(Lab)Exercise: Kansrekening

Rein van den Boomgaard

April 2013

1. We gooien met een zuivere dobbelsteen.
   (a) Wat is de uitkomstenruimte U als we eenmaal gooien? Is dat een unieke mogelijkheid?
   (b) We gooien 2 maal onafhankelijk van elkaar. Beschrijf de uitkomstenruimte U in dit geval.
   (c) Wat is de kans om 2 maal een 6 te gooien?
   (d) Wat is de kans om met 2 keer gooien in totaal 9 ogen te gooien?
   (e) Laat n het aantal ogen zijn wat in twee worpen wordt gegooid. Welke waarden kan n allemaal aannemen? Wat is de kans in totaal n ogen te gooien?
   (f) Wat is de kans om in totaal een even aantal te gooien (met twee worpen)?
2. Gegeven $A, B \subset U$ en de kansen $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.7$ en $P(A \cup B) = 0.8$. Bereken de 4 kansen die als oppervlak in het Venn diagram te zien zijn.
3. Gegeven de kansaxioma's:

$$P(A) \geq 0$$
$$P(U) = 1$$
$$A, B \subset U, A \cap B = \emptyset : P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

   Bewijs:

   (a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
   Bewijs dit zowel aan de hand van een Venn diagram als ook algebraisch (d.w.z. door het manipuleren van formules).
   (b) $P(\neg A) = 1 - P(A)$
   (c) $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \neg B)$
   Bewijs dit wederom zowel "visueel" als ook algebraisch.

(d) Gegeven dat de gebeurtenissen B_i ($i = 1, \ldots, n$) een partitie vormen van U (d.w.z. de B_i's zijn disjunct en hun vereniging is gelijk aan U) bewijs dat:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i)$$

4. Gegeven de definitie van de conditionele kans:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

bewijs de Bayes regel:

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} P(B|A)$$

5. (a) Interpreteer de conditionele (voorwaardelijke) kans $P(A|B)$ in termen van de oppervlakten in het Venn diagram.

   (b) Conditioneren op gebeurtenis B betekent in feite dat het universum U wordt teruggebracht tot de deelverzameling $B \subset U$. Overtuig jezelf ervan dat het tweede kansaxioma (zie hierboven) dan bepaalt dat we de kansen moeten hernormeren en dat dat precies is wat er gebeurt in de definitie van de voorwaardelijke kans.

6. (a) Leid de "chain rule":

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1|A_2 \cdots A_n) P(A_2|A_3 \cdots A_n) \cdots P(A_{n-1}|A_n) P(A_n)$$

   af uit de definitie van de conditionele kans. Merk op dat we hier gebruik maken van de verkorte schrijfwijze AB voor $A \cap B$.

   (b) Is dit de enige mogelijke chain rule voor de kans $P(A_1 A_2 \cdots A_n)$?

7. Beschouw het volgende kansexperiment: Er zijn 3 vazen. In de eerste vaas zitten 5 witte en 1 rode knikker, in de tweede vaas 2 witte en 1 rode en de derde vaas 1 witte en 1 rode. We kiezen eerst willekeurig een vaas en daarna trekken we uit die vaas 1 knikker.

   Het kansexperiment wordt beschreven met twee stochasten: V wat staat voor de vaas, met als mogelijke uitkomsten $V \in \{1, 2, 3\}$ en K voor de kleur van de bal met als mogelijke uitkomsten $K \in \{\text{wit}, \text{rood}\}$.

   (a) Maak de bijbehorende kansboom en bereken $P(K = \text{wit})$

   (b) Welke kansregel heb je (impliciet) toegepast bij het opstellen van de kansboom?

8. Volgens definitie zijn twee gebeurtenissen A en B onafhankelijk als $P(AB) = P(A)P(B)$, genoteerd als $A \perp B$. Hoe zit het met de (on)afhankelijkheid van de volgende tweetallen gebeurtenissen:

   (a) A en $\neg B$

   (b) $\neg A$ en B

   (c) $\neg A$ en $\neg B$

9. Beschouw nu wederom het kansexperiment met de drie vazen en de rode en witte ballen. Vanwege de opzet van het experiment waarbij we eerst een vaas kiezen en daarna een bal is het logisch dat de kansboom begint met de splitsing naar de 3 vazen. En daarna per vaas de opsplitsing naar de kleur van de bal. Vanuit de uitvoering van het experiment gezien ligt deze boom dus voor de hand, maar vanuit de kansrekening gezien is het een arbitraire keuze.

   Maak de kansboom waarbij je eerst splitst naar kleur en daarna splitst naar vaas. Benoem en bereken ook alle kansen in de kansboom.