Facharbeit

Versuche der Annäherung an die Kreiszahl Pi und aktuelle Diskussionen zum Thema

Julius-Ambrosius-Hülße-Gymnasium Dresden
Naturwissenschaften
Mathematik

eingereicht bei
Frau Skomski

vorgelegt von
Markus Wieland

Dresden, 14.03.2017

Vorwort

Schon seit vielen Jahrhunderten beschäftigen sich die größten Mathematiker mit dem Phänomen der Kreiszahl Pi. Pi spielt in unserem Leben eine elementare Rolle und ist so gut wie in jeder Wissenschaft vertreten. Vielleicht macht das auch den Reiz an dieser Zahl aus. Des Öfteren habe ich gelesen, dass wieder neue Dezimalstellen von Pi gefunden wurden.

Seitdem ich das erste Mal von Pi gehört hatte, habe ich mich gefragt, was genau diese Zahl so besonders macht. Im Laufe der Schulzeit erhielt ich Antworten auf diese Frage. Doch anstatt dass alle Fragen geklärt wären, ergaben sich nur noch weitere.

Was hat diese Zahl, dass es so viele Menschen gibt, die sich mit ihr befassen? Woher kommt die Faszination für diese Zahl? Das waren Fragen, die ich mir immer gestellt habe, ich aber nie unbedingt beantworten wollte. Viel mehr interessierten mich die oben genannten Funde neuer Dezimalstellen von Pi. Wie war es den Verantwortlichen dieses Rekordes möglich neue Stellen zu berechnen? Warum kann man Pi nicht einfach genau bestimmen? Und welchen Zweck hat es für uns Menschen, so viele Dezimalstellen von Pi zu kennen?

Das Thema der Facharbeit gab mir nun die Gelegenheit, mich intensiver mit dem Phänomen Pi zu beschäftigen. Noch bevor ich mich mit den Arbeiten bekannter Mathematiker beschäftigt habe, habe ich mir selbst Gedanken darüber gemacht, wie ich Pi bestimmen kann und habe einen eigenen Näherungsversuch durchgeführt. Wie ich bei meinen späteren Recherchen festgestellt habe, weisen die meisten Versuche Ähnlichkeiten mit meinem Näherungsverfahren auf, dennoch findet man Unterschiede.

Das Studieren mathematischer Überlegungen und Berechnungen war eine faszinierende Reise durch die Geschichte der Mathematik, welche mir große Freude bereitet hat. An dieser Stelle möchte ich mich bei Frau Skomksi für die Betreuung meiner Facharbeit bedanken sowie für ihre Unterstützung. Vielen Dank auch an meinen Mathematiklehrer Herrn Bether für die Beantwortung meiner Fragen.

Inhaltsverzeichnis

1 Die Kreiszahl Pi

1.1 Definition der Kreiszahl

Die Zahl π (Pi) ist wohl eines der bekanntesten mathematischen Probleme, welches die Menschheit nun schon seit vielen Jahrtausenden beschäftigt. Bereits 2000 Jahre vor Christus kannten die Menschen Näherungswerte für Pi. Der Ausdruck „π“ existiert jedoch erst seit dem 17. Jahrhundert. Zu dieser Zeit begannen Mathematiker für die Kreiszahl ein Symbol zu verwenden. Dabei gab es viele verschiedene Symbole, wie zum Beispiel „c“ oder „p“, aber nachdem der Mathematiker Leonhard Euler „π“ in seiner Arbeit „Introductio in Analysin infinitorum“ verwendete, setzte sich dieses Zeichen durch. Als Erfinder dieses Symbols wird jedoch der Engländer William Jones geführt. Er leitete Pi von dem ersten Buchstaben des griechischen Wortes „περιφέρεια“ ab, was übersetzt Peripherie, also Kreisumfang, bedeutet. (Vgl. Arndt und Haenel 1998, 115)

Doch wofür steht Pi? Pi steht für das Verhältnis zwischen Umfang eines Kreises und dessen Durchmesser. Daraus folgt eine Gleichung zur Bestimmung von Pi mithilfe des Durchmessers und dem Umfang:

$$U = \pi \times d$$

Setzt man in diese Gleichung für den Durchmesser d = 1 ein, so ergibt sich, dass der Umfang gleich Pi ist. Stellt man die Gleichung zur Berechnung des Umfangs eines Kreises nach Pi um, so erhält man:

$$\pi = \frac{U}{d}$$

Pi ist somit immer der Quotient aus dem Umfang und dem Durchmesser eines Kreises. Verdoppelt man den Radius und damit den Durchmesser des Kreises, so verdoppelt sich auch der Umfang des Kreises. Für jeden beliebigen Durchmesser eines Kreises und den daraus resultierenden Umfang ist der Quotient gleich Pi. Daher auch der Name Kreiszahl.

1.2 Verwendung der Kreiszahl

Aus der Tatsache, dass die Kreiszahl das Verhältnis des Durchmessers und des Umfangs eines Kreises ist, lässt sich ableiten, dass Pi in der Geometrie eine große Rolle spielt. So wird Pi bei der Berechnung von Volumen, Flächeninhalt und Umfang bei allen geometrischen Objekten verwendet, welche einen Kreis beinhalten, wie z.B. ein Kegel, ein Kreis, eine Kugel. Deshalb findet Pi natürlich auch im Alltag und bei Berechnungen in anderen Naturwissenschaften, wie der Physik oder Astronomie, eine Anwendung. Die Kreiszahl findet sich auch in der Kosmologie bei der Berechnung der kosmologischen Konstante ʌ wieder. *„Die kosmologische Konstante wird […] als die zeitlich konstante Energiedichte ρvac […] des Va-*

kuums interpretiert“. (Wikipedia - Kosmologische Konstante 2016) Die Gleichung dafür lautet:

$$\Lambda = \frac{8 \times \pi \times G}{c^2} \times \rho vac$$

Dabei ist G die Gravitationskonstante und c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. (Vgl. Wikipedia – Kosmologische Konstante 2016)

1.3 Eigenschaften der Kreiszahl

Pi ist eine irrationale Zahl, was 1761/1767 von Johann Heinrich Lambert bewiesen wurde. (Vgl. Wikipedia – J. H. Lambert 2017). Das bedeutet, dass das Verhältnis zweier ganzer Zahlen niemals Pi beträgt. Es gibt zwar Brüche mit ganzen Zahlen, welche sich Pi grob annähern, jedoch ist dieser Wert dann nicht gleich Pi, worauf ich im späteren Verlauf der Arbeit Bezug nehmen werde. Da Pi eine irrationale Zahl ist, bedeutet das auch, dass Pi unendlich viele Nachkommastellen besitzt. So ist es und wird es auch niemals einem Menschen möglich sein, die letzte Nachkommastelle von Pi zu bestimmen, da es diese nicht gibt.

Irrationale Zahlen unterscheidet man generell in algebraische und transzendente Zahlen. Eine algebraische irrationale Zahl ist eine Zahl dann, wenn sie Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ist, wie z.B. die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ Nullstelle des Polynoms $f(x) = x^2 – 2$ ist. Eine transzendente Zahl ist das genaue Gegenteil einer algebraischen, irrationalen Zahl. Es gibt kein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, welche diese Zahl als Nullstelle hat. Pi ist eine solche transzendente Zahl.

Eine weitere Eigenschaft, welche niemals bewiesen oder wiederlegt werden konnte, ist die Normalität der Kreiszahl. Eine Zahl ist dann normal, wenn alle Ziffern mit der gleichen Häufigkeit in den Dezimalstellen dieser Zahl auftreten. Bei Pi konnte bis jetzt noch keine solche Regelmäßigkeit bestimmt werden. Eventuell wird sie eines Tages gefunden und somit die Normalität der Kreiszahl beweisen, aber bis dahin kann man nicht beweisen, dass Pi keine normale Zahl ist. (Vgl. Arndt und Haenel 1998, 3)

1.4 Die Faszination Pi

Pi ist eine der bekanntesten Zahlen auf diesem Planeten. So ist praktisch vorprogrammiert, dass sich eine große Menschengruppe mit der Kreiszahl beschäftigt. Doch obwohl es nur eine Zahl ist, übersteigt die Faszination mancher Menschen für diese Zahl jegliche Grenzen.

So gibt es zum Beispiel einige Menschen, die den „Pi-Tag“ feiern. Dieser Tag ist der 14. März. Dieses Datum entspricht nach amerikanischer Schreibweise, also 3/14, den ersten drei Stellen von Pi. Am 14. März 2015 um 9:26:53 a.m. war ein ganz besonderer Moment für alle Pi-Fans. Schreibt man dieses Datum nach amerikanischer Schreibweise, also 3/14/15 9:26:53, so entspricht dieses Datum sogar den ersten zehn Stellen von Pi. Pi-Anhänger feiern diesen Tag, in dem sie „Pie“, ein herzhaft oder süß gebackenes Gebäck aus den Vereinigten Staaten, essen und gemeinsam einige Dezimalstellen vortragen. Albert Einstein wurde übrigens 1879 am Pi-Tag geboren. (Vgl. Buchan 2011, 104)

Da Pi eine irrationale Zahl ist, muss jede beliebige Zahlenkombination in Pi vorkommen. Ein Beispiel dafür sind Geburtsdaten, Pins oder Telefonnummern. Auf der Website www.pi-e.de kann man jede beliebige achtstellige Zahlenkombination eingeben und die Seite zeigt dem Nutzer, an welchen Dezimalstellen von Pi, welche bis jetzt bekannt sind, diese Zahlenkombination vorkommt.

In Paris gibt es für Pi-Fans eine einzigartige Attraktion, das Palais de la Découverte, ein Teil des Gebäudekomplexes Grand Palais. In diesem Museum gibt es einen kreisrunden Pi-Saal. Pi-Fans können dort einiges über die Kreiszahl lernen. Außerdem können Besucher in drei Spiralumdrehungen um den Saal die ersten 707 Stellen von Pi bewundern. (Vgl. Arndt und Haenel 1998, 34)

1.5 Pi in Rekorden

Derzeit sind 22,4 Billionen Nachkommastellen von Pi bekannt. Dieser Rekord wurde am 11. November 2016 von dem Schweizer Peter Trüb aufgestellt. Wie genau er diesen Rekord aufstellte, wird in Kapitel 3.3.1 erläutert. (Vgl. Steffen, 2016)

Ein weiterer beachtlicher Rekord wurde 2006 von Akira Haraguchi aufgestellt. Auch wenn es keinen wirklichen Nutzen hat, haben er und einige andere Menschen es sich zum Hobby gemacht, möglichst viele Nachkommastellen von π auswendig aufsagen zu können. So hat er im Oktober 2006 innerhalb von 16 Stunden die ersten 100.000 Nachkommastellen auswendig vortragen können. (Vgl. Buchan 2011, 104) (Vgl. Wikipedia - Akira Haraguchi 2016)

1.6 Merksätze für Pi

Für Leute wie Akira Haraguchi und Menschen, die sich nicht einmal die ersten zwei Nachkommastellen von Pi merken könne, gibt es einige Merkverse, welche das Merken der Dezimalstellen vereinfachen soll. Ein gutes Beispiel dafür ist die Kurzgeschichte „The Cadaeic Cadenza“ von Mike Keith, einem amerikanischen Mathematiker. Bei solchen Texten achtet der Autor darauf, dass die Anzahl der Buchstaben eines Wortes gleich der entsprechenden Ziffer an der dementsprechenden Dezimalstelle ist. Mike Keith hat eine Geschichte geschrieben, bei der die Anzahl der Buchstaben der 3.835 Wörter den ersten 3.835 Stellen von Pi entsprechen (siehe Abbildung 1). Dieses Werk ist jedoch nur eins von vielen Beispielen.

Es gibt natürlich einige weitere Möglichkeiten, solche Merkverse umzusetzen, aber diese ist die wohl geläufigste Variante. (Vgl. Arndt und Haenel 1998, 30)

2 Näherungsverfahren in der Mathematik

2.1 Definition

Annäherung oder auch Approximation (von dem lateinischen Wort proximus, was so viel bedeutet wie „der Nächste“) ist ein Begriff, welcher vor allem in der Mathematik eine große Rolle spielt. Dort ist der Begriff jedoch noch einmal auf Näherungsverfahren präzisiert.

Näherungsverfahren werden in der Mathematik aus zwei Gründen verwendet. Erstens ist nur die Lösung einer Gleichung gegeben und man versucht eine möglichst einfache Gleichung zur Bestimmung dieses Ergebnisses zu finden. Zweitens ist ein mathematisches Problem in Form einer Gleichung gegeben, welche aber nur sehr schwer handhabbar ist. In einem solchen Fall versucht man eine einfachere Lösung dieses mathematischen Problems zu finden. (Vgl. Wikipedia - Approximation 2017)

2.2 Anwendung

Man verwendet Näherungsverfahren beispielweise zur Erschließung annähernder Lösungen von nicht exakt lösbaren Differentialgleichungen. Auch in der Geometrie werden Näherungsverfahren verwendet, um Berechnungen von komplizierten, geometrischen Objekten durchzuführen. Ein großer Teil der Näherungsverfahren wurden für die Bestimmung irrationaler Zahlen entwickelt, wie z.B. die Euler'sche Zahl, $\sqrt{2}$ oder Pi. So kann man zwar immer noch nicht ihren exakten Wert wiedergeben, aber man kann den exakten Wert dieser Zahlen annähernd bestimmen. (Vgl. Wikipedia - Approximation 2017)

Wie genau solche Näherungsverfahren an irrationale Zahlen aussehen können, wird anhand des Beispiels der Kreiszahl in Kapitel 3 und 4 erklärt.

3 Ausgewählte Näherungsverfahren für Pi

Viele berühmte Denker haben auf die unterschiedlichste Arte und Weise einen Weg gefunden, Pi näherungsweise zu bestimmen. Einige ausgewählte Versuche davon werden in diesem Kapitel vorgestellt.

3.1 Primitiver Näherungswert

Menschen in Gegenwart und Vergangenheit, welche entweder Pi nicht genauer kannten oder zu faul waren mit genaueren Werten zu rechnen, verwenden den wohl primitivste Näherungswert für Pi = 3. Auch in der Bibel wurde mit diesem Wert gerechnet. „*Er machte das Meer, gegossen, von einem Rand zum andern zehn Ellen weit rundherum und fünf Ellen hoch, und eine Schnur von dreißig Ellen war das Maß ringsherum*.“ (Evangelische Kirche (Altes Testament) 2013, 350). Gegeben ist also ein Kreis mit dem Durchmesser von zehn Ellen und einem Umfang von 30 Ellen.

$$\pi = \frac{U}{d} = \frac{30 \text{ Ellen}}{10 \text{ Ellen}} = 3$$

3.2 Mathematische Näherungsverfahren

Da der Wert Pi = 3 zum Rechnen doch sehr ungenau ist, haben sich einige sehr begabte Mathematiker den Kopf darüber zerbrochen, wie man Pi genauer bestimmen könnte. Dabei sind einige interessante, mathematische Annäherungsversuche entstanden.

3.2.1 Archimedes

Archimedes ist einer der berühmtesten Mathematiker und Physiker der Geschichte der Menschheit. Er lebte von 278 v. Chr. bis 212 v. Chr. Vor allem in der Geschichte der Kreiszahl spielt er eine große Rolle. Er bewies, „*dass der Umfang eines Kreises sich zu seinem Durchmesser genauso verhält wie die Fläche des Kreises zum Quadrat des Radius. Das jeweilige Verhältnis ergibt also in beiden Fällen die Kreiszahl*.“ (Wikipedia - Kreiszahl 2016)

Wie in Kapitel 1.1 bereits erwähnte wurde, kannte er damals noch nicht den Namen Pi für dieses Verhältnis, wusste aber um seine Bedeutung. Wie viele Mathematiker nach ihm versuchte Archimedes ebenfalls sich mittels eines Vielecks an einen Kreis mit der Radius r = 1 anzunähern. Dafür zeichnete er ein Sechseck (siehe Abbildung 2) in einen Kreis ein, berechnete so den Umfang dieses Sechsecks und ermittelte einen Näherungswert für Pi. Er verdoppelte die Anzahl der Ecken, bis er an einem 96-Eck angekommen war. Er schätzte, dass Pi, da das Vieleck in den Kreis gezeichnet wurde, größer sein müsse als $3 + \frac{10}{71} \approx 3{,}1408450$. Jetzt führte er diesen Versuch erneut durch, zeichnete das Vieleck nur nicht in den Kreis, sondern um den Kreis herum (siehe Abbildung 3). Er berechnete wieder den Umfang eines 96-Ecks und schätzte, dass Pi kleiner sein müsse als $3+\frac{10}{70}\approx 3{,}1428571$. Zusammenfassend definierte er Pi als:

$$3{,}1408450 \approx 3 + \frac{10}{70} < \pi < 3 + \frac{10}{70} \approx 3{,}1428571$$

So ermittelte er einen Näherungswert mithilfe des vermutlich ältesten numerische Verfahren der Geschichte. (Vgl. Wikipedia - Kreiszahl 2016)

3.2.2 Ludolph van Ceulen

Ein weiterer berühmter Mathematiker in der Geschichte von Pi war Ludolph van Ceulen. Er wurde 1540 in Hildesheim in Deutschland geboren und starb 1610 in Leiden in den Niederlanden. Grundlage für die Leistung von Ludolph van Ceulen war der Näherungsversuch von Archimedes. Ludolph van Ceulen führte dieses Prinzip weiter und berechnete so ein 2^{62}-Eck, was 4 Trillionen Seiten entspricht. Dafür benötigte er 30 Jahre. Am Ende seines Lebens hatte er mit dieser Methode 35 Nachkommastellen von Pi berechnen. Damit verdoppelte er die zu seiner Zeit bekannten Dezimalstellen von Pi. Deshalb ist Pi auch als die Ludolph'sche Zahl bekannt. (Vgl. Wikipedia - Ludolph van Ceulen 2017)

3.2.3 Johann Heinrich Lambert

Ein weiterer Mathematiker, dessen Annäherung an Pi in dieser Arbeit vorgestellt werden sollte, ist Johann Heinrich Lambert. Johann Heinrich Lambert war ein schweizerisch-elsässischer Mathematiker und wohl einer der hervorragendsten Denker seiner Zeit. Er lebte im 18. Jahrhundert im deutschen Raum. Wie in Kapitel 1.3 genannt, war eine seiner größten Leistungen der Beweis der Irrationalität von Pi mittels der Theorie der Kettenbrüche im Jahre 1761. Der Kettenbruch, den er dafür verwendete und erstellte, sieht wie folgt aus:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{3 + \cfrac{2^2}{5 + \cfrac{3^2}{7 + \cfrac{4^2}{9 + \cfrac{5^2}{\ddots}}}}}$$

Aber nicht nur er stellte einen solchen Kettenbruch zur Bestimmung von Pi auf. Unzählige Mathematiker versuchten sich an solchen Brüchen, wie z.B. William Brouncker oder Leonhard Euler. (Vgl. Wikipedia – J. H. Lambert 2017)

3.3 Näherungsverfahren in der Informatik

Da das menschliche Gehirn nur beschränkt arbeiten kann und wir deshalb nur sehr deprimierende Ergebnisse per Hand berechnen können, verwendet man seit einiger Zeit Computer mit starker Rechenleistung zur Annäherung an Pi.

3.3.1 Y-cruncher

Ein Programm, was dabei auf gar keinen Fall fehlen darf, ist ein Programm namens „y-cruncher“. Mit diesem Programm wurde der in Kapitel 1.5 genannte Weltrekord zur Berechnung der meisten Dezimalstellen von Pi aufgestellt. Auch die vorherigen Rekorde wurden Großteils mithilfe dieses Programmes aufgestellt. Die 22,4 Billionen Dezimalstellen berechnete er innerhalb von 105 Tagen.

Mit diesem Programm kann man einige irrationale Zahlen einfach per Knopfdruck berechnen. Speziell zur Berechnung von Pi kann der Nutzer dieses Programmes zwischen zwei Algorithmen zur Berechnung von Pi wählen.

Der erste ist der Chudnovsky-Algorithmus. Dieser Algorithmus wurde 1989 von den Chudnovsky-Brüdern entwickelt und ist bis heute einer der schnellsten Methoden, um Nachkommastellen von Pi zu berechnen.

$$\frac{1}{\pi} = 12\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(6k)!(545140134k + 13591409)}{(3k)!(k!)^3 640329^{3k+\frac{3}{2}}}$$

Der zweite Algorithmus, mit dem das Programm arbeitet, ist die Ramanujan-Formel. Dieser Algorithmus wurde von Srinivasa Ramanujan, einem indischen Mathematiker entwickelt, welcher sich vor allem mit analytischen und zahlentheoretischen Problemen beschäftigt hat. 1914 veröffentlichte er diese sehr effektive Näherungsformel für die Kreiszahl, mit welcher man mit nur 10 Schritten 88 Dezimalstellen von Pi berechnen kann. Sein Algorithmus ähnelt dem der Chudnovsky-Brüder:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \times \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!}{(n!)^4} \times \frac{1103 + 26390n}{396^{4n}}$$

(Vgl. Numberworld y-cruncher 2017)

Das Programm kann sich jeder kostenlos aus dem Internet herunterladen. So habe auch ich das Programm heruntergeladen und es zum Testen eine Weile arbeiten lassen. Ich habe innerhalb von 10,6 Minuten eine Milliarden Dezimalstellen mithilfe dieses Programmes berechnen können. Theoretisch kann also jeder mithilfe dieses Programmes den Rekord von Peter Trüb brechen. Ein großes Problem an diesem Programm ist jedoch, dass die Dezimalstellen in einer „txt“-Datei ausgeben werden. Bei meinem Versuch ist ein Textdokument entstanden, welches ein Gigabyte an Speicherplatz benötigt (siehe Abbildung 4,5 und 6).

3.3.2 Brian Westley

Es gibt einige Programme, welche sich auf den unterschiedlichsten Weisen Pi annähern. Doch während meiner Recherchen bin ich auf ein Programm gestoßen, welches erwähnt werden sollte. Der Autor dieses Programmes ist Brian Westley. Das Programm (siehe Abbildung 7) wurde in der Programmiersprache ANSI C geschrieben. Mit diesem Programm kann man Pi auf vier Stellen genau berechnen. Das besondere an diesem Programm ist jedoch, dass Brian Westley nur vier Wörter benötigte, um dieses Programm zu schreiben. Er gewann damit 1988 bei dem International Obfuscated C Code Contest.

Das Programm basiert auf einem aus Strichen bestehenden Kreis. Das Programm misst die Fläche des Kreises anhand der Unterstriche (hier 201) und den Durchmesser d anhand der Zeilen, die der Kreis beansprucht (hier 16). Aus der Gleichung zur Berechnung der Fläche f eines Kreises lässt sich folgende Formel herleiten:

$$\pi = 4 \times \frac{f}{d^2} = 4 \times \frac{201}{16^2} = 3{,}141\ldots$$

(Vgl. Arndt und Haenel 1998, 23)

3.4 Pi durch Stochastik bestimmen

Nicht allzu genaue, aber dennoch sehr interessante Näherungsversuche an die Kreiszahl basieren auf der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

3.4.1 Dartboard-Algorithmus

Der Dartboard-Algorithmus, auch Monte-Carlo-Verfahren genannt, ist eine auf Wahrscheinlichkeit basierende Methode zur Berechnung von Pi. Dabei betrachtet man einen Kreis mit dem Radius r in einem Koordinatensystem, dessen Mittelpunkt der Koordinatenursprung ist. Um diesen Kreis wird ein Quadrat gezeichnet, dessen Seitenlänge a = 2r beträgt (siehe Abbildung 8 und 9). Um den Versuch zu vereinfachen, betrachtet man nur den ersten Quadranten dieses Koordinatensystems. Aus der Fläche A des Kreises und der des Quadrates kann man eine Formel für Pi ableiten:

$$\frac{A_{Kreis}}{A_{Quadrat}} = \frac{(r^2 \times \pi) \div 4}{r^2} = \frac{\pi}{4}$$

Zur Berechnung von Pi benötigt man also die Fläche des Quadrats und die des Kreises. Die Fläche des Quadrates lässt sich einfach bestimmen, die Fläche des Kreises hingegen nur schwer ohne den Wert von Pi zu kennen. Um dieses Problem zu lösen, wirft man Pfeile auf das Quadrat oder erzeugt mittels eines Programms zufällige Punkte in dem Quadrat. Dabei gibt es eine Anzahl an Punkten / Pfeilen, die in dem Kreis landen und eine Anzahl an Punkten / Pfeilen, welche außerhalb des Kreises in dem Quadrat landen. Die Anzahl der Treffer interpretiert man als den Flächeninhalt der jeweiligen Fläche.

$$\frac{A_{\text{Kreis}}}{A_{\text{Quadrat}}} = \frac{(r^2 \times \pi) \div 4}{r^2} = \frac{\pi}{4} = \frac{\text{Treffer im Kreis}}{\text{Treffer außerhalb des Kreises}}$$

$$\text{Daraus folgt: } \pi \approx \frac{\text{Treffer im Kreis} \times 4}{\text{Treffer außerhalb des Kreises}}$$

(Vgl. Arndt und Haenel 1998, 25)

3.4.2 Teilerfremdheit von Pi

Teilerfremd sind zwei ganze Zahlen, wenn sie keinen gemeinsamen Teiler außer ±1 besitzen, wie z.B. die Zahlen 12 und 77. Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei zufällig gewählte, ganze Zahlen teilerfremd sind, beträgt $\frac{6}{\pi^2}$. Auf dieser Tatsache baute Robert Matthews, ein britischer Physiker, seinen Annäherungsversuch an Pi auf. Robert Matthews notierte sich die Koordinaten der 100 hellsten Sterne an unserem Nachthimmel. Aus diesen Koordinaten leitete er sich Paare ganzer Zahlen ab, welcher er als zufällig bestimmt betrachtete. Aus dieser Gruppe aus Zahlenpaaren ermittelte er schließlich jene Paare, welche teilerfremd waren. Mit diesen Werten kam er auf einen Näherungswert für Pi von 3,12772, welcher nur 0,5% von Pi abweicht. (Vgl. Stern 1999, 27f.) (Vgl. Wikipedia – Robert Matthews 2017)

Man kann für diesen Versuch nicht nur Zahlen aus den Koordinaten der Sterne wählen. Man kann alle möglichen Zahlen, seien es Lottozahlen, zufällig ausgewählte Seitenzahlen eines Buches oder mittels eines Programms generierte ganze Zahlen, für diesen Versuch verwenden.

3.5 Experimentelle Annäherung an die Kreiszahl

Pi kann man annähernd auch durch teilweise sehr einfache Experimente bestimmen. Einer der wohl einfachsten Wege Pi zu ermitteln, wurde bereits in dem Zitat aus der Bibel in Kapitel 3.1 genannt. Man nimmt einen kreisrunden Gegenstand, wie zum Beispiel den Deckel eines Eimers oder einen Teller, und misst den Durchmesser dieses Gegenstandes aus. Anschließend legt man eine Schnur rund um diesen Gegenstand und kürzt sie so, dass sie einmal genau herum gelegt werden kann und misst dann die Länge der Schnur. So hat man den Durchmesser und den Umfang des Gegenstandes und kann Pi bestimmen.

Um einen weiteren experimentellen Wert für Pi zu bestimmen, benötigt man einen kugelförmigen Behälter mit einem Radius von r = 1 und einer möglichst dünnen Wand. Zunächst wird der Behälter gewogen. Danach füllt man den Behälter mit Wasser und wiegt ihn erneut. Nun subtrahiert man das Gewicht der Kugel ohne Wasser m_K von dem Gewicht der Kugel gefüllt mit Wasser m_{WK}. Die Werte müssen dabei in Kilogramm angegeben werden. Die Differenz entspricht der Masse des Wassers. Dividiert man diesen Wert durch 1000, was der Masse eines Kubikmeter Wassers entspricht, erhält man so das Volumen des Behälters. Nun benötigt man die Gleichung zur Berechnung des Volumens V einer Kugel. Stellt man diese Gleichung nach Pi um und setzt die ermittelten Werte ein, erhält man einen experimentellen Wert für Pi.

$$\pi = \frac{m_{WK} - m_K}{1000} \times \frac{3}{4} = V \times \frac{3}{4}$$

(Vgl. Stern 1999, 20f.)

4 Persönlicher Versuch zur Annäherung an Pi

4.1 Theorie

Bevor ich mich mit anderen Annäherungen an Pi beschäftigt habe, versuchte ich mich selbst an einem Näherungsverfahren. An sich ist die Berechnung von Pi ganz einfach. Wie in Kapitel 1.1 bereits genannt, ist Pi das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser eines Kreises. Kennt man den Umfang und den Durchmesser eines Kreises, ist Pi sehr einfach zu bestimmen. Aber genau da liegt auch das Problem bei dieser Methode, welche diesen Versuch doch sehr kompliziert macht. Man kann zwar den Durchmesser oder den Radius eines Kreises relativ einfach bestimmen, den Umfang zu bestimmen, ist aber deutlich schwieriger.

Um dieses Problem zu überwinden, nutzte ich den Fakt, dass ein Kreis auch als ein beliebig großes n-Eck beschrieben werden kann. Ich betrachtete einen Kreis als nichts weiter als eine Anreihung n-Mal gleichgroßer Seiten, die sich zu einem n-Eck verbinden. Kennt man die Anzahl der Seiten n dieses n-Ecks, die Länge s einer von diesen Seiten und einen festgelegten Durchmesser d, kann man den Umfang U bestimmen. Aus der Gleichung für Pi wird also:

$$\pi = \frac{U}{d} \approx \frac{n \times s}{d}$$

4.2 Umsetzung

Um die Länge und die Anzahl der Seiten zu berechnen, benötigt man zunächst den Durchmesser. Diesen Durchmesser habe ich als d = 2 festgelegt. Daraus folgt ein Radius von r =1. Nun habe ich mit einem Zirkel einen Kreis in ein Koordinatensystem gezeichnet. Der Mittelpunkt des Kreises ist der Ursprung des Koordinatensystem, also der Punkt M (0|0).

Ich betrachtete nur den ersten Quadranten des Koordinatensystems (siehe Abbildung 10). Durch den Schnittpunkt des Kreises mit der y-Achse (0 | 1) und den Schnittpunkt des Kreises mit der x-Achse (1 | 0) zeichnete ich nun eine Gerade g, welche sich auch mit der Funktion $f(x) = (-1)x + 1$ beschreiben lässt. Aus der y-Achse, der x-Achse und dieser Gerade g entsteht so ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck. Da es ein rechtwinkliges Dreieck ist, darf der Satz des Pythagoras angewendet werden. Dieser besagt, dass die Hypotenuse g im Quadrat gleich der Summe aus den Quadraten der anderen beiden Seiten a und b ist. Also:

$$a^2 + b^2 = g^2$$

Die Länge der beiden Seiten a und b in diesem Dreieck ist gleich dem Radius des Kreises, also a = b = 1. Setzt man diesen Wert in die Gleichung ein, so ist die Länge der Hypotenuse $g = \sqrt{2}$. Würde man dies in jedem Quadranten so machen, so würde ein Viereck entstehen.

Es entsteht ein n-Eck mit vier Seiten, welche alle die Länge $\sqrt{2}$ besitzen. Setzt man diese Werte in die im Kapitel 4.1 genannte Gleichung ein, kommt man auf:

$$\pi \approx \frac{4 \times \sqrt{2}}{2} = 2{,}8284\ldots$$

Ein Quadrat ist einem Kreis jedoch nicht sehr ähnlich. Der Wert für Pi ist also, wie man bereits vermuten konnte, sehr ungenau. Deshalb probierte ich es weiter und verdoppelte die Anzahl der Seiten, indem ich durch den Koordinatenursprung einen weiteren Radius r_1 einzeichne, welcher sich auch mit der Funktion $f(x) = x$ beschreiben lässt und die Gerade g in der Mitte schneidet. Verbindet man den neu entstandenen Schnittpunkt des neuen Radius mit dem Kreis ebenfalls mit dem Schnittpunkt des Kreises an der y-Achse, so entsteht ein neues rechtwinkliges Dreieck. Die Hypotenuse f dieses Dreiecks entspricht dabei der Länge einer Seite s des neuen n-Ecks (siehe Abbildung 11). Um diese Hypotenuse f zu berechnen, verwendete ich erneut den Satz des Pythagoras. Dafür benötigte ich die Länge der anderen beiden Seiten des Dreiecks. Die Seite d entspricht der Hälfte der Länge der Hypotenuse des ersten Dreiecks, also $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Die andere Seite e ist die Differenz des Radius und der Strecke desselben Radius, welcher das erste Dreieck in zwei gleichgroße Dreiecke teilt. Um diese Strecke zu berechnen, betrachte ich eines der durch die Einzeichnung des Radius r_1 entstandenen Dreiecke genauer. Um diese Seite zu berechnen, lässt sich wieder mit dem Satz des Pythagoras arbeiten. Diesmal jedoch ist eine Seite $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und die Länge der Hypotenuse $r = 1$ gegeben. Stellt man die Gleichung des Satz des Pythagoras nach der fehlenden Seite um, so erhält man:

$$b^2 = a^2 - r^2$$

Demnach entspricht die Länge der Strecke $\frac{\sqrt{2}}{2}$, welche das erste Dreieck teilt. Die fehlende Seite e ist also die Differenz aus dem Radius $r_1 = 1$ und $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Setzt man das Ganze nun wieder in den Satz des Pythagoras zur Berechnung der Hypotenuse f ein, so erhält man

$$f = s = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

Durch diese Gleichung erhält man eine neue Seitenlänge s für ein n-Eck mit doppelt so vielen Seiten wie bei meinem ersten Versuch. Daraus folgt:

$$\pi \approx \frac{8 \times \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}{2} = 3{,}061467\ldots$$

Der neue Wert nähert sich Pi schon eher, ist aber immer noch sehr ungenau. Also versuchte ich es erneut mit der Verdoppelung der Seiten des n-Ecks. Zeichnet man nun einen Radius r_2 ein, welcher eine Seite des Achtecks in der Mitte teilt und den Schnittpunkt dieses Radius r_2 mit dem Kreis mit dem Schnittpunkt des Kreises mit der y-Achse verbindet, so erhält man wieder ein neues rechtwinkliges Dreieck (siehe Abbildung 12).

Der ganze Vorgang beginnt von vorn. Die Hypotenuse lässt sich berechnen aus der Hälfte einer Seite des Achtecks und der Differenz des Radius und der Länge der Strecke, welche das vorherige Dreieck teilt. So geht es immer weiter. Pi wäre bei einem 16-Eck also:

$$\pi = \frac{16\times\sqrt{\left(\frac{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}{2}\right)^2+\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}{2}\right)^2}\right)^2}}{2} = 3{,}1214451\ldots$$

Die Rechnung bleibt im Grunde immer gleich. Einzig die Seitenlängen und Anzahl der Seiten der Vorgängerrechnung müssen durch die neue Seitenlänge und Seitenanzahl ersetzt werden. Hier noch einmal der Versuch zur Berechnung für ein n-Eck mit 32 Seiten.

$$\pi \approx \frac{32\times\sqrt{\left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}{2}\right)^2+\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}{2}\right)^2}\right)^2}^{\,2}\right)^2+\left(\left(1-\sqrt{1-\left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}{2}\right)^2+\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}{2}\right)^2}\right)^2}\right)^2}\right)^2\right)}}{2} = 3{,}136\ldots$$

4.3 Auswertung

An der Gleichung zur Berechnung von Pi mit einem 32-Eck, welches den Kreis beschreiben soll, erkennt man, dass das Rechnen mit einem Taschenrechner nicht mehr sehr effektiv ist, da man allein zum Eintippen der Gleichung eine halbe Ewigkeit benötigt. Deshalb habe ich dafür mithilfe der Programmiersprache CASIO BASIC auf meinem Taschenrechner ein Programm geschrieben. Es berechnet und ersetzt automatisch die Seitenlängen und die Anzahl der Seiten. Der Quellcode und seine Erklärung dafür befinden sich im Abbildungsteil (siehe Abbildung 13). Mit diesem Programm habe ich einige Werte ermittelt und in einer Tabelle zusammengetragen (siehe Abbildung 14). Betrachtet man diese Werte, sieht man, wie man Pi immer näher kommt. Jedoch benötigt man 16 Versuche um neun Dezimalstellen zu berechnen, was nicht sehr effektiv für ein solches Problem wie die Annäherung an Pi ist. Dazu kommt, dass mein Taschenrechner mehr und mehr mit gerundeten Werten arbeiten musste, vor allem bei $\sqrt{2}$, wobei es sich ebenfalls um eine irrationale Zahl handelt, und nicht über neun Dezimalstellen ausgeben werden kann. Dennoch ist mein Annäherungsversuch erfolgreich gewesen, und ich konnte immerhin die ersten neun Dezimalstellen berechnen.

5 Fazit

Zusammenfassend kann man sagen, dass es Unmengen von unterschiedlichen und kreativen Möglichkeiten gibt, Pi zu bestimmen. Manche davon sind anspruchsvoller und effektiver als andere, aber dennoch ist jedes einzelne Verfahren beeindruckend.

Es ist eine unglaubliche Leistung des menschlichen Fortschritts, dass wir so viele Dezimalstellen von Pi kennen - zum aktuellen Zeitpunkt (14. März 2017) 22,4 Billionen. Aber welchen Nutzen hat es denn nun für uns? Bringt es uns irgendetwas, so viele Dezimalstellen von Pi zu kennen? Meine Antwort darauf ist nein. Sicherlich ist es eine beachtliche Leistung, aber von uns überhaupt nicht nutzbar. Wenn man z.B. die Größe des uns bekannten Universums auf die Genauigkeit des Radius einen Wasserstoffatoms berechnen müsste, so würde man nur 39 Dezimalstellen von Pi dafür benötigen (Vgl. Numberphile 2013). In unserem Alltag benötigen wir also nur eine Handvoll Dezimalstellen der Kreiszahl. Dennoch rechnen die Menschen weiter und weiter. Sie wollen immer mehr Dezimalstellen von Pi - die Unendlichkeit ist die Grenze. Aber warum machen wir es trotzdem? Warum versuchen Wissenschaftler immer mehr Stellen von Pi zu berechnen?

Einige sind sicherlich daran interessiert, den Rekord von Peter Trüb (siehe Kapitel 1.5) zu knacken, und ich bin überzeugt davon, dass es nicht mehr lange dauern wird, bis es jemand schafft. Andere Wissenschaftler sind eventuell einfach fasziniert von der Vorstellung der Unendlichkeit und wollen sie nicht wahr haben.

Anhand der Berechnung von Pi wird heutzutage vor allem getestet, ob Computersysteme sauber arbeiten. Diese Belastung gibt Aufschluss darüber, ob die zentrale Recheneinheit des Computers einwandfrei funktioniert. Anhand von Abweichungen des berechneten Wertes von Pi können Informatiker überprüfen, ob alle Komponenten des Computers zuverlässig gearbeitet haben. (Vgl. Welt.de – Die unheimliche Magie der niemals endenden Zahl Pi 2017) Abschließend kann man sagen:

„*Sich mit Pi zu beschäftigen und die Nachkommastellen zu errechnen ist letztendlich ein bisschen wie der Aufstieg auf den Mount Everest ohne Sauerstoffgerät. Das braucht auch niemand.*“ (Welt.de - Die unheimliche Magie der niemals endenden Zahl Pi 2017)

Aber der Mensch wird immer weiter und weiter nach Rekorden und Fortschritt streben.

Literaturverzeichnis

Arndt, Jörg, und Christoph Haenel. *π Algorithmen, Computer, Arithmetik.* Berlin: Springer, 1998.

Buchan, Jamie. *Pi mal Daumen, Was Zahlen erzählen.* München: Deutscher Taschenbuch Verlag GmbH & Co. KG, 2011.

cadaeic cadenza. http://www.cadaeic.net/cadenza.htm (Zugriff am 10. März 2017).

Evangelische Kirche. *Die neue Lutherbibel.* Stuttgart: Deutsche Bibelgesellschaft, 2013.

Numberphile. *YouTube.* 2013. https://www.youtube.com/watch?v=FpyrF_Ci2TQ (Zugriff am 11. März 2017).

Numberworld y-cruncher. 2017. http://www.numberworld.org/y-cruncher/ (Zugriff am 10. Januar 2017).

Steffens, Gerald. *π - Faszination in Ziffern.* 2016. http://3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592.eu/pi-wissen/pi-nachkommastellen-rekorde/ (Zugriff am 30. Dezember 2016).

Stern, Manfred. *π - Die Story.* Basel: Birkhäuser Verlag, 1999.

Welt.de - Die unheimliche Magie der niemals endenden Zahl Pi. 2017. https://www.welt.de/wissenschaft/article13920059/Die-unheimliche-Magie-der-niemals-endenden-Zahl-Pi.html (Zugriff am 11. März 2017).

Wikipedia - Akira Haraguchi. 2016. https://en.wikipedia.org/wiki/Akira_Haraguchi (Zugriff am 1. Januar 2017).

Wikipedia - Approximation. 2017. https://de.wikipedia.org/wiki/Approximation (Zugriff am 10. März 2017).

Wikipedia - J. H. Lambert. 2017. https://de.wikipedia.org/wiki/Johann_Heinrich_Lambert (Zugriff am 10. März 2017).

Wikipedia - Kosmologische Konstante. 10. Oktober 2016. https://de.wikipedia.org/wiki/Kosmologische_Konstante (Zugriff am 22. September 2016).

Wikipedia - Kreiszahl. 2016. https://de.wikipedia.org/wiki/Kreiszahl (Zugriff am 28. September 2016).

Wikipedia - Ludolph van Ceulen. 2017. https://de.wikipedia.org/wiki/Ludolph_van_Ceulen (Zugriff am 26. Januar 2017).

Wikipedia - Numerische Mathematik. https://de.wikipedia.org/wiki/Numerische_Mathematik (Zugriff am 22. September 2016).

Wikipedia - Robert Matthews . 2017. https://en.wikipedia.org/wiki/Robert_Matthews_(scientist) (Zugriff am 1. März 2017).

Wikipedia. 2016. https://de.wikipedia.org/wiki/Archimedes (Zugriff am 22. September 2016).

Abbildungsverzeichnis

One	3
A Poem	1 4
A Raven	1 5
Midnights so dreary, tired and weary,	9 2 6 5 3 5
Silently pondering volumes extolling all by-now obsolete lore.	9 7 9 3 2 3 8 4
During my rather long nap – the weirdest tap!	5 2 6 4 3 3 8 3
An ominous vibrating sound disturbing my chambers antedoor.	2 7 9 5 0 2 8 8

Abb. 1 - The Cadaeic Cadenza

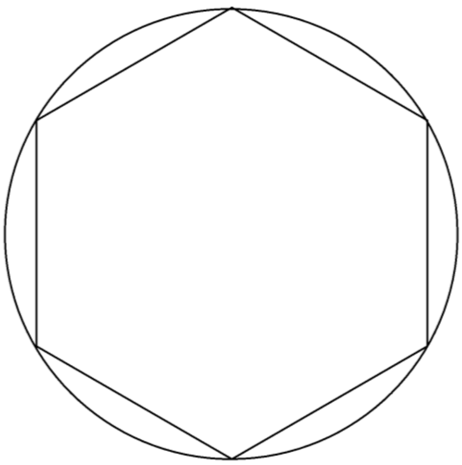

Abb. 2 - Archimedes, Sechseck in Kreis

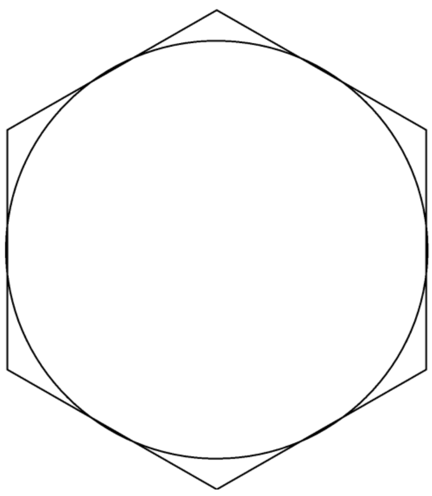

Abb. 3 - Archimedes, Sechseck um Kreis

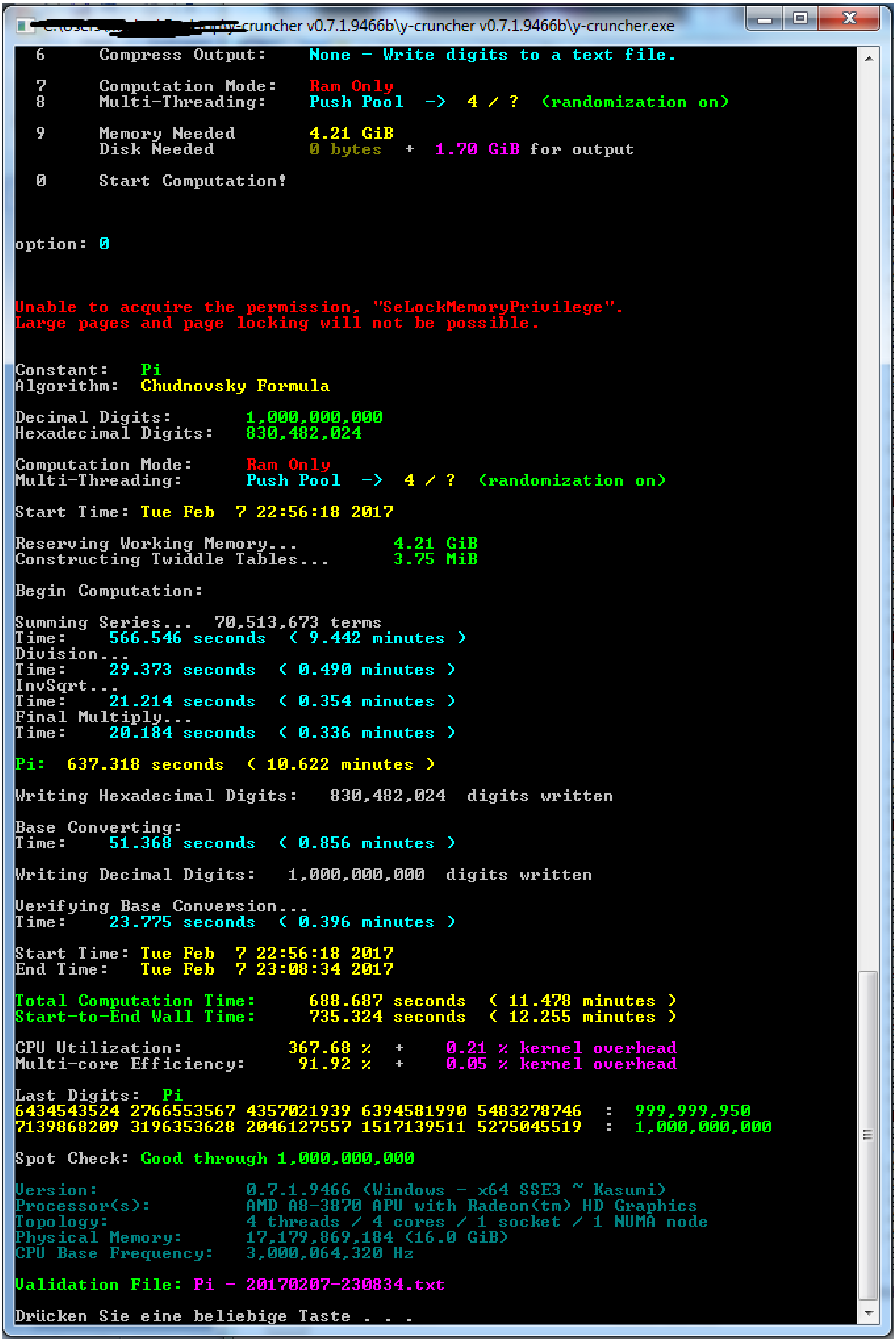

Abb. 4 - y-cruncher, Versuch durchgeführt

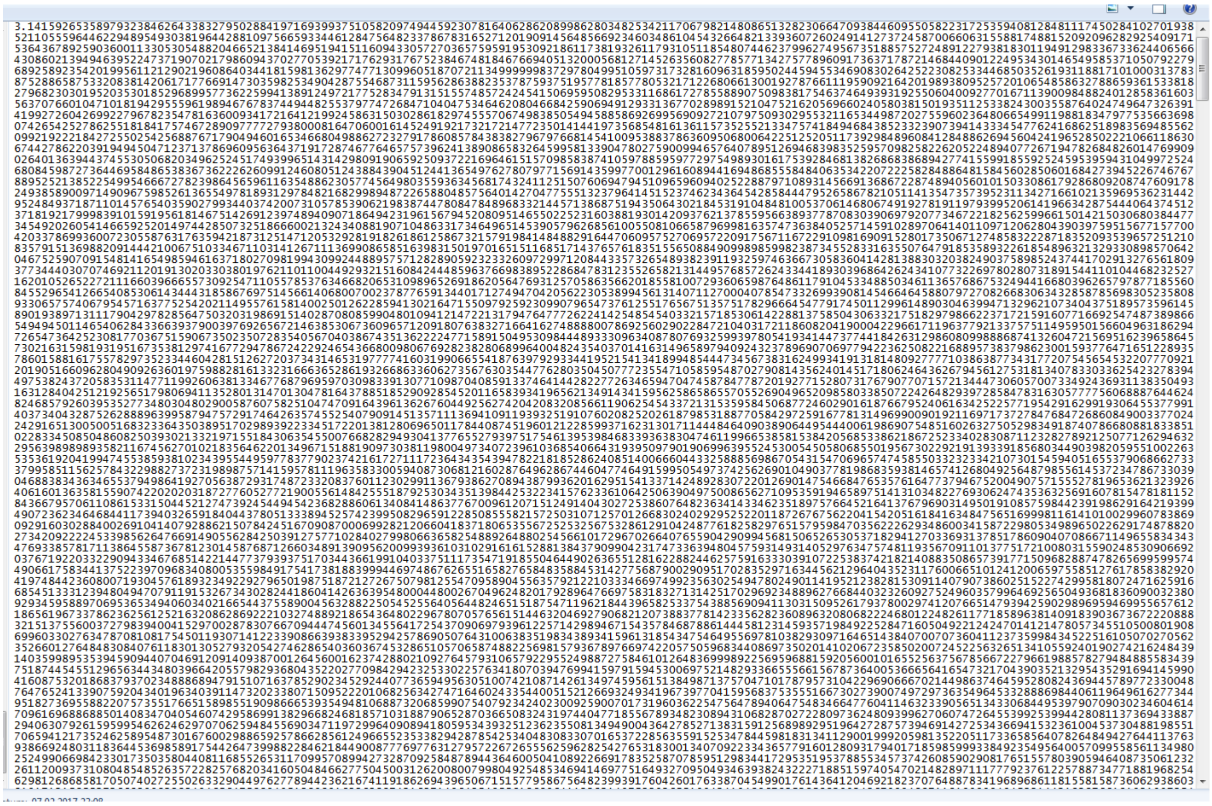

Abb. 5 - y-cruncher, txt-Datei Vorschau

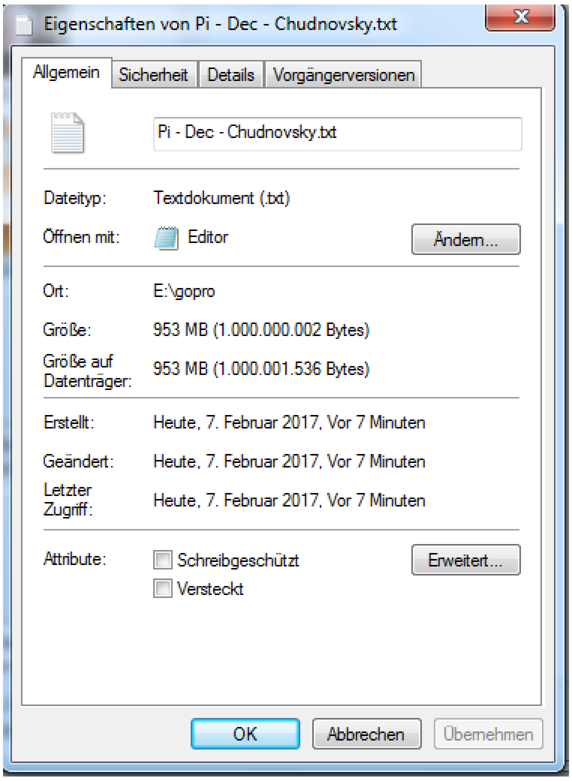

Abb. 6 - y-cruncher, Eigenschaften der txt-Datei

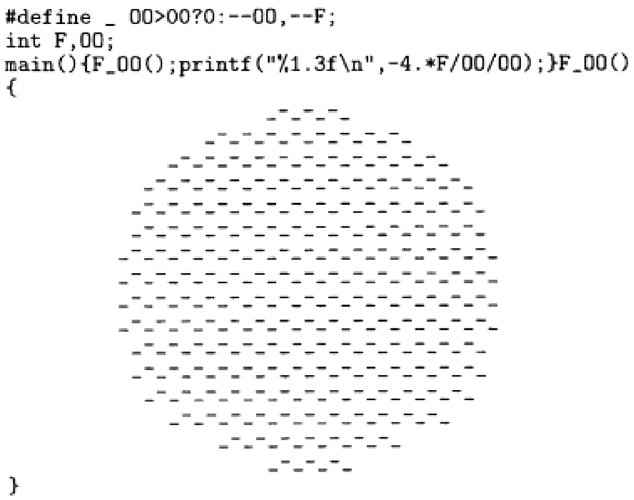

Abb. 7 - Brian Westley, Code

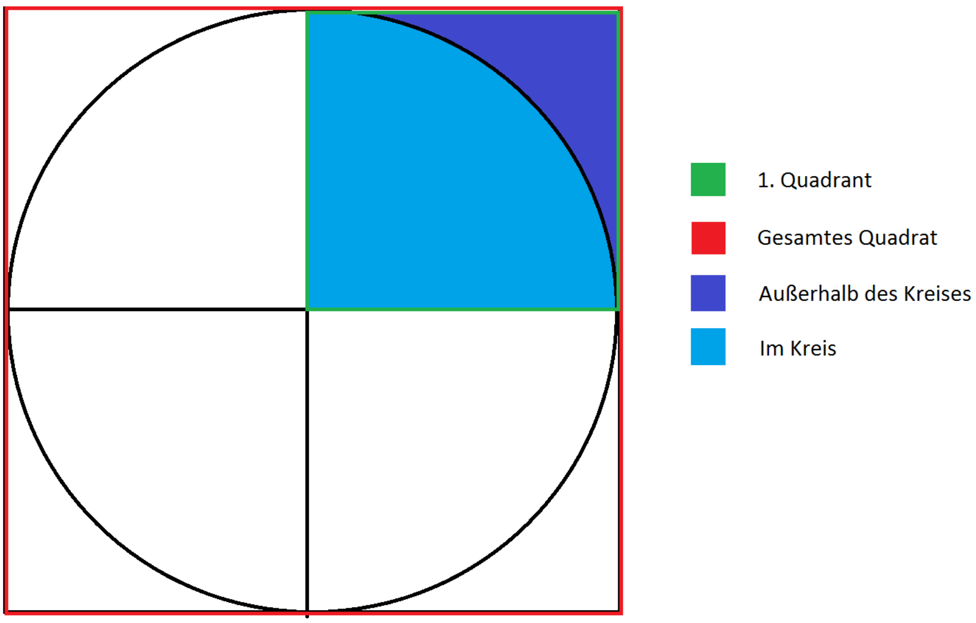

Abb. 8 - Dartboard-Verfahren Versuchsaufbau

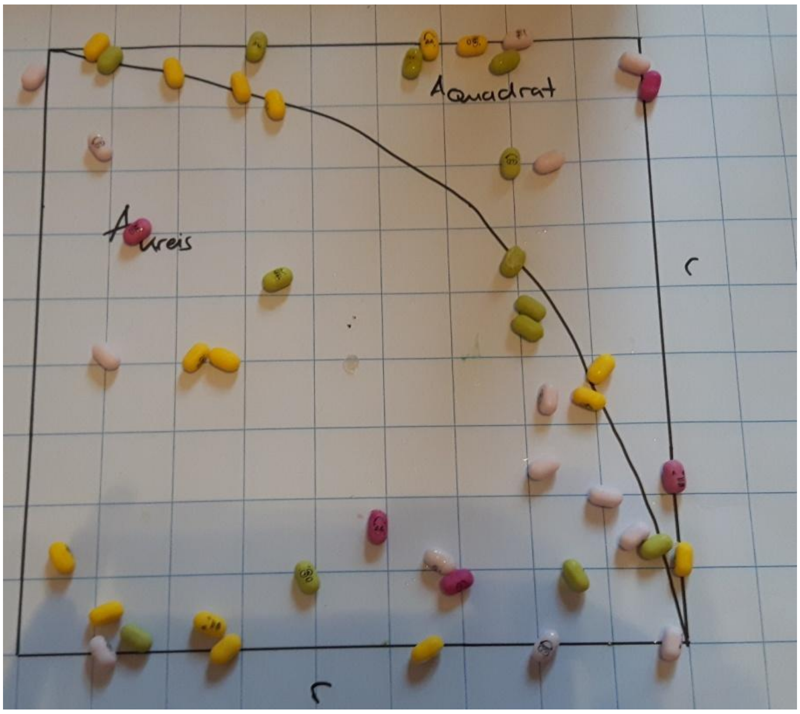

Abb. 9 - Dartboard-Verfahren mit TicTacs

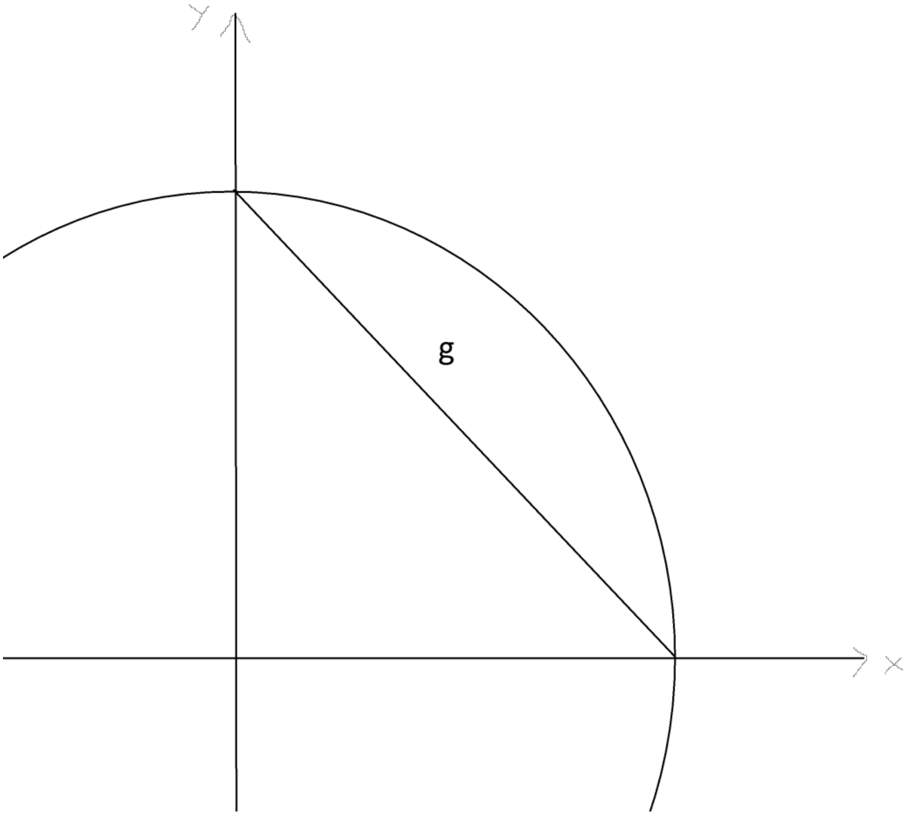

Abb. 10 - Eigener Versuch, Skizze Versuch 1

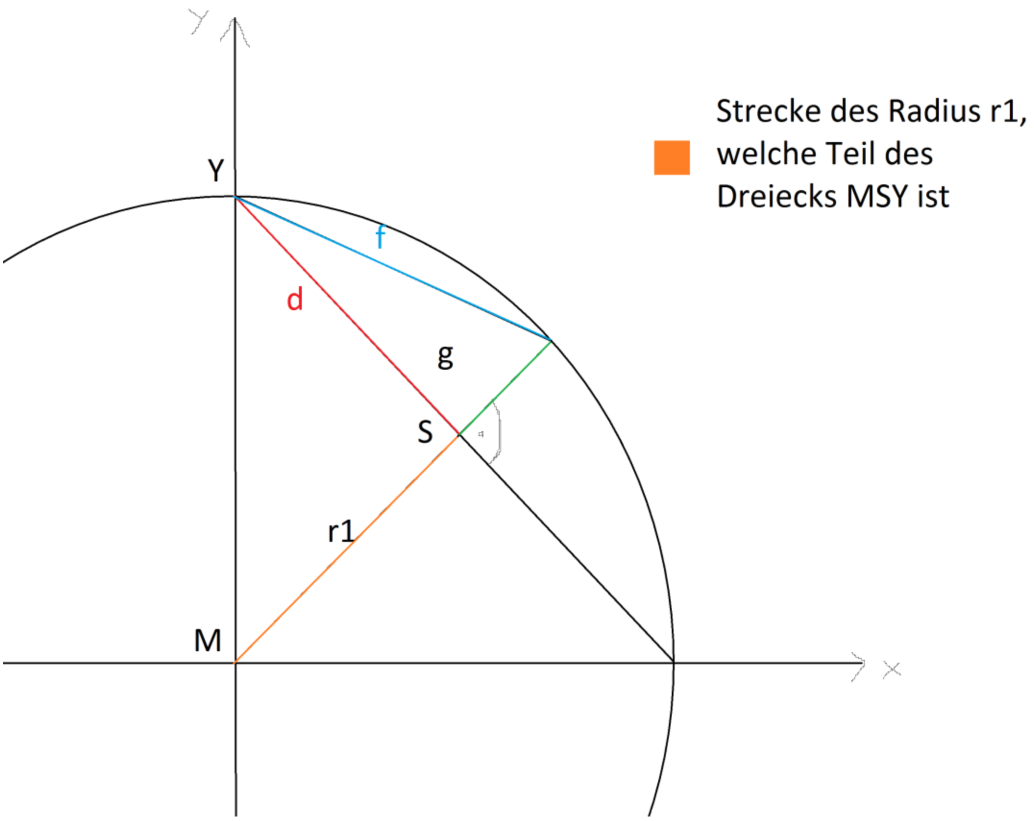

Abb. 11 - Eigener Versuch, Skizze Versuch 2

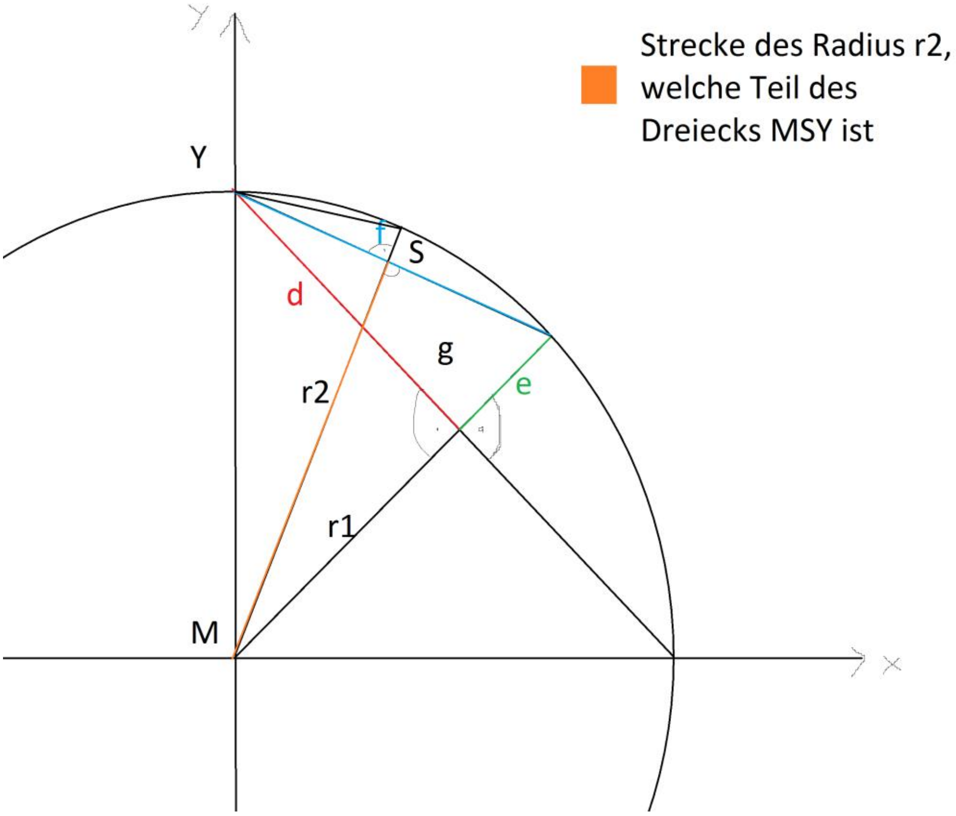

Abb. 12 - Eigener Versuch, Skizze Versuch 3

$\sqrt{2}\div 2\rightarrow C$	//Die Hilfsvariabeln C und D werden berechnet um B, welches die Länge der Seite f in Kapitel 4.2 ist, zu berechnen
1-C→D	
$\sqrt{0{,}5+D^2}\rightarrow B$	
1→Y	//Die Variable Y wird als 1 definiert.
Lbl 1	//„Checkpoint“
„π bei“	//Anzeige auf dem Bildschirm
Y+2→F	//Der Wert Y wird um 2 addiert und in der Variable F gespeichert.
Y+1→Y	//Der Wert Y wird um 1 erhöht und als sich selbst gespeichert, damit beim nächsten Versuch F um eins größer ist als bei diesem Durchgang.
2^F→S	//2 Hoch die Variable F entspricht S, die Anzahl der Seiten
S ⌟	//Unter dem Text „π bei“ wird die Anzahl der Seiten ausgegeben. Durch Betätigen der EXE-Taste wird das Programm weiter ausgeführt.
B×S→R	//Die Variable B wird mit der Anzahl der Seiten multipliziert, man erhält die Variable R.
R÷2→P	//R durch den Durchmesser 2 ergibt P. P ist der entstandene Näherungswerte für Pi.
P ⌟	//Der Wert für Pi wird dem Nutzer angezeigt. Durch Betätigen der EXE-Taste wird das Programm weiter ausgeführt.
ClrText	//Dialogfenster zwischen Taschenrechner und User wird gelöscht.
„Weiter“?→Str 1	//Weiter erscheint auf dem Bildschirm. Der User wird um eine Eingabe gebeten. Nach der Eingabe und Betätigung der EXE-Taste wird das Programm weiter ausgeführt
If StrCmp(Str 1, „1“)=0	//Das Programm vergleicht die in *Str 1* gespeicherte Eingabe des Users mit 1.
Then	//Sollte die Eingabe „1“ gewesen sein, passiert Folgendes:
B÷2→C	//Die Variable B wird neu berechnet. Am Ende entsteht die neue Seitenlänge für die doppelte Anzahl an Seiten.
$\sqrt{1^2-D^2}\rightarrow E$	

1-E→D

$\sqrt{C^2\text{-}D^2}$→B

Goto 1	//Mit dem neuen Wert für B geht man zurück zum Checkpoint.
Else	//Sollte Str 1 nicht 1 sein, sondern jede andere beliebige Eingabe, dann tritt dieser Teil in Kraft.
ClrText	//Das Dialogfenster wird gelöscht.
„Pi ist rund“	//“Pi ist rund“ wird auf dem Display abgebildet.
Q	//Darunter sieht man den errechneten finalen Wert nach beliebig vielen Durchführungen. Die EXE-Taste beendete das Programm.

Abb. 13 - Eigener Versuch, Code und Erklärung

Anzahl der Versuche	Anzahl der Seiten	Pi (richtige Dezimalstellen)
1	4	2,8298427125 (0)
2	8	3,061467459 (0)
3	16	3,121445152 (1)
4	32	3,136548491 (1)
5	64	3,1403331157 (2)
6	128	3,141277251 (3)
7	256	3,141513801 (4)
8	512	3,14157294 (4)
9	1024	3,141587725 (4)
10	2048	3,141591422 (5)
11	4096	3,141592346 (6)
12	8192	3,141592577 (6)
13	16384	3,141592634 (7)
14	32768	3,141592649 (7)
15	65536	3,141592652 (8)
16	131072	3,141592653 (9)

Abb. 14 – Eigener Versuch, Ergebnisse

Ich versichere, dass ich diese Facharbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Stellen der Facharbeit, die anderen Werken dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, sind unter der Angabe der Quellen als solche kenntlich gemacht.

Ort, Datum Unterschrift