

Теоремы для подготовки к экзамену

Математический анализ

2018-2019-й учебный год

1. Теорема Ньютона-Лейбница.

Если f непрерывна на $[\alpha; \beta] \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)dt$ – дифференцируема в $(\alpha; \beta)$

$$\forall x \in (\alpha; \beta) \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

Доказательство:

$$F'(x) = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left(\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right) = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = *$$

$\exists x^*$ между x и $x + \Delta x$:

$$* = f(x^*) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} f(x)$$

2. Теорема о замене переменного в определённом интеграле.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Доказательство:

$\Phi(x)$ – первообразная для $f(x)$

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

$$\Phi(\varphi(t)); \Phi'_t(\varphi(t)) = \Phi'_x(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) = \Phi(a) - \Phi(b)$$

$$\text{Следовательно, } \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

3. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

Пусть $f(x)$ на $[\alpha; \beta]$ имеет непрерывную производную порядка $(n+1)$. Тогда

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt}_{\text{остаточный член в интегральной форме}}$$

$$a \in [\alpha; \beta], x \in [\alpha; \beta]$$

Доказательство:

(Индукция по n)

$$n = 0$$

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(a)}{0!}(x-a)^0 + \frac{1}{0!} \int_a^x f'(t)(x-t)^0 dt. \text{ Это формула Ньютона-Лейбница:}$$

$$f(x) = f^{(0)}(a) + \int_a^x f'(t)dt$$

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$$

По предположению индукции:

$$f(x) = T_{n-1}(f, a) + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt$$

$$f(x) = T_{n-1}(f, a) - \frac{1}{(n-1)! \cdot n} \int_a^x f^{(n)}(t) d(x-t)^n =$$

$$= T_{n-1}(f, a) - \frac{1}{n!} (x-t)^n f^{(n)} \Big|_{t=a}^{t=x} + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt =$$

$$= T_{n-1}(f, a) + \frac{1 \cdot f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt = T_n(f, a) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

4. Теорема сравнения для несобственных интегралов в интегральной форме.

$$x \in [a, b); f(x) > 0; g(x) > 0; I_1 = \int_a^b f(x) dx; I_2 = \int_a^b g(x) dx$$

Если $f(x) \sim g(x), x \rightarrow b-$, то I_1 и I_2 одновременно сходятся или расходятся.

Доказательство:

$$\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

$$\varepsilon = 1/2 \exists \delta : a < \delta < b \forall x \in (\delta, b) \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right| < 1/2$$

$$\frac{1}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2}g(x) < f(x) < \frac{3}{2}g(x)$$

Если I_1 сходится, то так как $0 < \frac{1}{2}g(x) < f(x)$, по теореме сравнения $\int_{\delta}^b \frac{1}{2}g(x) dx$ сходится $\Rightarrow I_2 =$

$$\int_a^b g(x) dx \text{ сходится.}$$

Если I_1 расходится, то так как $0 < f(x) < \frac{3}{2}g(x)$, по теореме сравнения $\int_{\delta}^b \frac{3}{2}g(x) dx$ расходится \Rightarrow

$$I_2 = \int_a^b g(x) dx \text{ расходится.}$$

5. Интегральный признак сходимости числового ряда.

$x \in [1; +\infty); f(x)$ убывает; $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$

$$f(1) + f(2) + \dots + f(k) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

Ряд сходится $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx$ сходится

Доказательство:

$$f(2) \leq \int_1^2 f(x) dx \leq f(1)$$

$$f(3) \leq \int_2^3 f(x) dx \leq f(2)$$

\vdots

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n)$$

$$\Rightarrow S_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq S_n$$

Пусть $\int_1^{\infty} f(x) dx$ сходится. $S_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq S_n$

Последовательность S_{n+1} ограничена \Rightarrow ряд сходится

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится. $\int_1^p f(x)dx \leq \int_1^{[p]+1} f(x)dx \leq S_{[p]+1} \leq S$

$F(p) = \int_1^p f(x)dx$ не убывает и ограничена сверху $\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится

6. Признак д'Аламбера в предельной форме.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n; a_n > 0, n = 1, 2, \dots$ Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то

1. ряд сходится, если $0 \leq q < 1$
2. ряд расходится, если $q > 1$
3. имеет место неопределенность, если $q = 1$

Доказательство:

$$1. \exists N \forall n \geq N \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{q+1}{2} < 1$$

по признаку д'Аламбера $\Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty} a_n$ сходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится

$$2. \exists N \forall n \geq N = \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{q+1}{2} > 1 \Rightarrow (\text{по признаку д'Аламбера}) \sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ расходится} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

расходится

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ расходится}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ сходится}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

7. Признак Лейбница для знакочередующихся рядов.

$a_n > 0; n = 1, 2, \dots$

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n - \dots$$

Если $a_n \downarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, то $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ сходится

Доказательство:

$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n})$; S_{2n} — последовательность положительных возрастающих чисел

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$$

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} S \text{ (так как } a_{2n+1} \rightarrow 0)$$

$$S_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S$$

$$S_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S$$

$$\Rightarrow S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S$$

8. Лемма Абеля для степенных рядов.

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

1. Если степенной ряд сходится в точке $x_1 \neq 0$, то он абсолютно сходится $\forall x : |x| > |x_1|$

2. Если степенной ряд расходится в точке x_2 , то он расходится $\forall x : |x| > |x_2|$

Доказательство:

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} C_n x_1^n \text{ сходится} \Rightarrow C_n x_1^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \exists M \forall n : |C_n x_1^n| < M$$

Пусть $|x| < |x_1|$; $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n - ?$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |C_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n x_1^n| \cdot \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \text{ сходится, так как } \left| \frac{x}{x_1} \right| < 1$$

2. Пусть ряд расходится в x_2 . Пусть в точке $x_3 : |x_3| > |x_2|$ и $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x_3^n$ сходится \Rightarrow сходится $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x_2^n \Rightarrow$ противоречие