Теоремы для подготовки к экзамену

Математический анализ

2018-2019-й учебный год

1. Теорема Ньютона-Лейбница.

Формулировку выбирайте сами, я не знаю, что от нас хотят

Формулировка 1, называемая в лекции теоремой:

Если f непрерывна на $[\alpha;\beta] \Rightarrow F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ – дифференцируема в $(\alpha;\beta)$

$\forall x \in (\alpha;\beta) \Rightarrow F'(x) = f(x)$

Доказательство:

$$F'(x) = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}(\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt) = \frac{1}{\Delta x}\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \circledast$$

$\exists\ x^*$ между x и $x+\Delta x$:

$\circledast = f(x^*) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} f(x)$

Формулировка 2, называемая в интернете теоремой, а в лекции формулой:

$f(x)$ непрерывна на $[\alpha;\beta]$

$\Phi(x)$ – первообразная для $f(x)$

$[a;b] \subset [\alpha;\beta]$

$\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$

Доказательство:

$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt;\ \int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

так как $\Phi(x)$ – первообразная$\Rightarrow \Phi(x) = F(x) + c$

$\Phi(b) - \Phi(a) = F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)dx$

2. Теорема о замене переменного в определённом интеграле.

$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Доказательство:

$\Phi(x)$ – первообразная для $f(x)$

$\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$

$\Phi(\varphi(t));\ \Phi'_t(\varphi(t)) = \Phi'_x(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$

$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) = \Phi(a) - \Phi(b)$

Следовательно, $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

3. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

Пусть $f(x)$ на $[\alpha;\beta]$ имеет непрерывную производную порядка $(n+1)$. Тогда

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underbrace{\frac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt}_{\text{остаточный член в интегральной форме}}$$

$a \in [\alpha; \beta)$, $x \in [\alpha; \beta]$

<u>Доказательство:</u>

(Индукция по n)

$n = 0$

$f(x) = \dfrac{f^{(0)}(a)}{0!}(x-a)^0 + \dfrac{1}{0!}\int\limits_a^x f'(t)(x-t)^0 dt$. Это формула Ньютона-Лейбница:

$f(x) = f^{(0)}(a) + \int\limits_a^x f'(t)dt$

$f(x) - f(a) = \int\limits_a^x f'(t)dt$

По предположению индукции:

$f(x) = T_{n-1}(f,a) + \dfrac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt$

$f(x) = T_{n-1}(f,a) - \dfrac{1}{(n-1)! \cdot n}\int\limits_a^x f^{(n)}(t)d(x-t)^n =$

$= T_{n-1}(f,a) - \dfrac{1}{n!}(x-t)^n f^{(n)}\Bigg|_{t=a}^{t=x} + \dfrac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt =$

$= T_{n-1}(f,a) + \dfrac{1 \cdot f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dfrac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = T_n(f,a) = \dfrac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$

4. Теорема сравнения для несобственных интегралов в интегральной форме.

$x \in [a, b)$; $f(x) > 0$; $g(x) > 0$; $I_1 = \int\limits_a^b f(x)dx$; $I_2 = \int\limits_a^b g(x)dx$

Если $f(x)\ g(x), x \to b-$, то I_1 и I_2 одновременно сходятся или расходятся.

<u>Доказательство:</u>

$\lim\limits_{x \to b-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

$\varepsilon = 1/2\ \exists \delta : a < \delta < b\ \forall x \in (\delta, b) \Rightarrow \left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - 1\right| < 1/2$

$\dfrac{1}{2} < \dfrac{f(x)}{g(x)} < \dfrac{3}{2}$

$\dfrac{1}{2}g(x) < f(x) < \dfrac{3}{2}g(x)$

Если I_1 сходится, то так как $0 < \dfrac{1}{2}g(x) < f(x)$, по теореме сравнения $\int\limits_\delta^b \dfrac{1}{2}g(x)dx$ сходится$\Rightarrow$ $I_2 =$

$\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится.

Если I_1 расходится, то так как $0 < f(x) < \dfrac{3}{2}g(x)$, по теореме сравнения $\int\limits_\delta^b \dfrac{3}{2}g(x)dx$ расходится$\Rightarrow$

$I_2 = \int\limits_a^b g(x)dx$ расходится.

5. Интегральный признак сходимости числового ряда.

$x \in [1; +\infty)$; $f(x)$ убывает; $f(x) \xrightarrow{x \to \infty} 0$

$f(a) + f(2) + \ldots + f(k) + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$

Ряд сходится $\Leftrightarrow \int\limits_1^\infty f(x)dx$ сходится

Доказательство:

$f(2) \le \int\limits_1^2 f(x)dx \le f(1)$

$f(3) \le \int\limits_2^3 f(x)dx \le f(2)$

$\vdots$

$f(n+1) \le \int\limits_n^{n+1} f(x)dx \le f(n)$

$\Rightarrow S_{n+1} - f(1) \le \int\limits_1^{n+1} f(x)dx \le S_n$

Пусть $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ сходится. $S_{n+1} - f(1) \le \int\limits_1^{n+1} f(x)dx \le S_n$

Последовательность S_{n+1} ограничена $\Rightarrow$ ряд сходится

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится. $\int\limits_1^{p} f(x)dx \le \int\limits_1^{[p]+1} f(x)dx \le S_{[p]+1} \le S$

$F(p) = \int\limits_1^{p} f(x)dx$ не убывает и ограничена сверху$\Rightarrow \int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ сходится

6. Признак д'Аламбера в предельной форме.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n; a_n > 0, n = 1, 2, \ldots$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то

1. ряд сходится, если $0 \le q < 1$
2. ряд расходится, если $q > 1$
3. имеет место неопределенность, если $q = 1$

Доказательство:

1. $\exists N \forall n \ge N \Rightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < \dfrac{q+1}{2} < 1$

по признаку д'Аламбера $\Rightarrow \sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ сходится$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится

2. $\exists N \forall n \ge N = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > \dfrac{q+1}{2} > 1 \Rightarrow$ (по признаку д'Аламбера) $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ расходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1/(n+1)}{1/n} = \dfrac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \dfrac{n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

7. Признак Лейбница для знакочередующихся рядов.

$a_n > 0; n = 1, 2, \ldots$

$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n - \ldots$

Если $a_n \downarrow 0 (n \to \infty)$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ сходится

Доказательство:

$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}); S_{2n}$ – последовательность положительных возрастающих чисел

$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_2 n < a_1$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$

$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} S$ (так как $a_{2n+1} \to 0$)

$S_{2n} \xrightarrow{n\to\infty} S$
$S_{2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} S$
$\Rightarrow S_n \xrightarrow{n\to\infty} S$

8. Лемма Абеля для степенных рядов.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

1. Если степенной ряд сходится в точке $x_1 \neq 0$, то он абсолютно сходится $\forall x : |x| > |x_2|$
2. Если степенной ряд расходится в точке x_2, то он расходится $\forall x : |x| > |x_2|$

Доказательство:

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$ сходится $\Rightarrow c_n x_1^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \exists M\ \forall n : |c_n x_1^n| < M$

Пусть $|x| < |x_1|$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ – ?

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n x_1^n| \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \leq M \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$ сходится, так как $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$

2. Пусть ряд расходится в x_2. Пусть в точке $x_3 : |x_3| > |x_2|$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_3^n$ сходится$\Rightarrow$ сходится $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_2^n \Rightarrow$ противоречие

9. Теорема: радиус сходимости степенного ряда не меняется при почленном дифференцировании ряда.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$; радиус сходимости R_1

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1}$; радиус сходимости R_2

Теорема: $R_1 > 0 \Rightarrow R_1 = R_3$

Доказательство:

$(1)'$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n x^n = c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots$ радиус сходимости R_1

$(2)'$ $x \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = c_1 x + 2c_2 x^2 + \ldots + n c_n x^n + \ldots$ радиус сходимости R_2

1) $R_2 \leq R_1$

Если $R_2 = 0, 0 < R_1$

Пусть $R_2 > 0$. Пусть в x сходится $(2)'$. Требуется доказать, что $(1)'$ сходится в точке x

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n x^n$ сходится абсолютно. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n|c_n x^n| < \infty$; этот ряд мажорирует $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n x^n| \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ сходится в точке x

2) $R_1 \leq R_2$

$(1)'$ сходится в точке x. Требуется доказать, что $(2)'$ сходится в точке x

Рассмотрим $x^* : |x| < |x^*| < R_1 \Rightarrow \left|\frac{x}{x^*}\right| < 1$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |n c_n x^n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n|c_n| \cdot |(x^*)^n| \cdot \left|\frac{x}{x^*}\right|^n \leq \circledast$

(так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n| \cdot |x^*|^n$ сходится, $\exists M \forall n \Rightarrow |c_n| \cdot |x^*|^n \leq M$)

$\circledast \leq M \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left|\frac{x}{x^*}\right|^n$ – сходится$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1} n c_n x^n$ сходится абсолютно

10. Достаточное условие представимости функции её рядом Тейлора.

Если $f(x)$ в промежутке $(a-\delta, a+\delta)$ имеет производные всех порядков, которые ограничены в совокупности ($\exists M \forall n \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow |f^{(n)}(x)| \leq M$), то $\forall x \in (a-\delta, a+\delta)$

$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ – ряд Тейлора функции $f(x)$

Доказательство:

Формула верна, если $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$, где $r_n(x)$ – остаточный член в формуле Тейлора функции f. Возьмем $r_n(x)$ в форме Лагранжа ($r_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$). Из $|f^{(n)}(x)|\le M \Rightarrow$
$\Rightarrow |r_n(x)| = \left|\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right| \le \dfrac{M}{(n+1)!}\delta^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

11. Необходимое условие условного экстремума.

$$\begin{cases} f(x_1,\dots,x_n)\to extr \\ g_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ \vdots \\ g_m(x_1,\dots,x_n)=0 \end{cases}$$

$m<n$

Если $M(x_1^*,\dots,x_n^*)$ – локальный экстремум и $\bigtriangledown g_1(M),\dots,\bigtriangledown g_m(M)$ л.н.з., то $\bigtriangledown f(M)$ – линейная комбинация $\bigtriangledown g_1(M),\dots,\bigtriangledown g_m(M)$. То есть $\exists\lambda_1,\dots,\lambda_m\in\mathbb{R}:\bigtriangledown f(M)+\lambda_1\bigtriangledown g_1(M)+\ldots+\lambda_m\bigtriangledown g_m(M)=0$

<u>Доказательство:</u>

Пусть $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \ne 0$ в M

$f(x_1,\dots,x_m,x_{m+1}(x_1,\dots,x_m),\dots,x_n(x_1,\dots,x_m))$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}+\ldots+\dfrac{\partial f}{\partial x_m}+\dfrac{\partial f}{\partial x_{m+1}}x'_{m+1}+\ldots+\dfrac{\partial f}{\partial x_n}x'_n=0 \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}+\ldots+\dfrac{\partial g_1}{\partial x_m}+\dfrac{\partial g_1}{\partial x_{m+1}}x'_{m+1}+\ldots+\dfrac{\partial g_1}{\partial x_n}x'_n=0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1}+\ldots+\dfrac{\partial g_m}{\partial x_m}+\dfrac{\partial g_m}{\partial x_{m+1}}x'_{m+1}+\ldots+\dfrac{\partial g_m}{\partial x_n}x'_n=0 \end{cases}$$

Просуммируем все, предварительно домножив последние $m-1$ строк на $\lambda_1,\dots,\lambda_m:$

$(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda_1\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}+\ldots+\lambda_m\dfrac{\partial g_m}{\partial x_1})+\ldots+(\dfrac{\partial f}{\partial x_m}+\lambda_1\dfrac{\partial g_1}{\partial x_m}+\ldots+\lambda_m\dfrac{\partial g_m}{\partial x_m})+$
$+x'_{m+1}(\dfrac{\partial f}{\partial x_{m+1}}+\lambda_1\dfrac{\partial g_1}{\partial x_{m+1}}+\ldots+\lambda_m\dfrac{\partial g_m}{\partial x_{m+1}})+\ldots+x'_n(\dfrac{\partial f}{\partial x_n}+\lambda_1\dfrac{\partial g_1}{\partial x_n}+\ldots+\lambda_m\dfrac{\partial g_m}{\partial x_n})=0$

$$\exists\lambda_1,\dots,\lambda_m: \begin{matrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda_1\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}+\ldots+\lambda_m\dfrac{\partial g_m}{\partial x_1}=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}+\lambda_1\dfrac{\partial g_1}{\partial x_2}+\ldots+\lambda_m\dfrac{\partial g_m}{\partial x_2}=0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}+\lambda_1\dfrac{\partial g_1}{\partial x_n}+\ldots+\lambda_m\dfrac{\partial g_m}{\partial x_n}=0 \end{matrix} \text{ в } M$$

$\bigtriangledown f(M)+\lambda_1\bigtriangledown g_1(M)+\ldots+\lambda_m\bigtriangledown g_m(M)=0$

12. Теорема о сведении двойного интеграла к повторному.

1. $D=[a,b]\times[c,d]; a\le x\le b; c\le y\le d; f$ – непрерывная
$a=x-0<\ldots<x_n=b$
$c=y_0<\ldots<y_m=d$
$\Delta_{ij}=\{(x,y)|x_{i-1}\le x\le x_i, y_{j-1}\le y\le y_j\}, i=1,\dots,n; j=1,\dots,m$
$M_{ij}(\xi_i,\nu_j)\le\Delta_{ij}$
$\sum\limits_{i,j} f(\xi_i,\nu_j)(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})=$ (возьмем $\xi_i=x_i$) $=\sum\limits_{i,j} f(x_i,\nu_j)(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})=$

$= \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \sum\limits_{j=1}^{m}(x_i, \nu_j)(y_j - y_{j-1}) = \circledast$

$\Phi(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy$ непрерывна на $[a,b]$

$\Phi(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)dy =$ (по теореме о среднем $\exists y_j^* \in [y_{j-1}, y_j]$) $= \sum\limits_{j=1}^{m} f(x, y_j^*)(y_j - y_{j-1})$

выберем $\nu_j = y_j^*$

$\circledast = \sum\limits_{i=1}^{n}(x-i-x_{i-1}) \sum\limits_{j=1}^{m} f(x-i, y_j^*)(y_j - y_{j-1}) = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\Phi(x_i) \xrightarrow[\max \Delta x_i \to 0]{} \int\limits_a^b \Phi(x)dx$

Вывод: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b (\int\limits_c^d f(x,y)dy)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d (\int\limits_a^b f(x,y)dx)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx$

2. $D = \{(x,y) | a \le x \le b; \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x); \varphi_1, \varphi_2$ непрерывны$\}$

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y); (x,y) \in D \\ 0; (x,y) \notin D; a \le x \le b; c \le y \le d \end{cases}$

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} \tilde{f}(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d \tilde{f}(x,y)dy = \int\limits_a^b dx(\int\limits_c^{\varphi_1(x)} \tilde{f}(x,y)dy + \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \tilde{f}(x,y)dy + \int\limits_c^{\varphi_2(x)} \tilde{f}(x,y)dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \tilde{f}(x,y)dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$