Определения для подготовки к экзамену

Математический анализ

2018-2019-й учебный год

1. Теорема Ньютона-Лейбница.

Если f непрерывна на $[\alpha;\beta] \Rightarrow F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ – дифференцируема в $(\alpha;\beta)$

$\forall x \in (\alpha;\beta) \Rightarrow F'(x) = f(x)$

<u>Доказательство:</u>

$F'(x) = \dfrac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \dfrac{1}{\Delta x}(\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt) = \dfrac{1}{\Delta x}\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \circledast$

$\exists\ x^*$ между x и $x+\Delta x$:

$\circledast = f(x^*) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} f(x)$

2. Теорема о замене переменного в определённом интеграле.

$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

<u>Доказательство:</u>

$\Phi(x)$ – первообразная для $f(x)$

$\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$

$\Phi(\varphi(t));\ \Phi'_t(\varphi(t)) = \Phi'_x(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$

$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) = \Phi(a) - \Phi(b)$

Следовательно, $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

3. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

Пусть $f(x)$ на $[\alpha;\beta]$ имеет непрерывную производную порядка $(n+1)$. Тогда

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underbrace{\frac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt}_{\text{остаточный член в интегральной форме}}$$

$a \in [\alpha;\beta)$, $x \in [\alpha;\beta]$

<u>Доказательство:</u>

(Индукция по n)

$n = 1$