

# Теоремы для подготовки к экзамену

Математический анализ

2018-2019-й учебный год

## 1. Теорема Ньютона-Лейбница.

Формулировку выбирайте сами, я не знаю, что от нас хотят

Формулировка 1, называемая в лекции теоремой:

Если  $f$  непрерывна на  $[\alpha; \beta] \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)dt$  – дифференцируема в  $(\alpha; \beta)$

$$\forall x \in (\alpha; \beta) \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

Доказательство:

$$F'(x) = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left( \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right) = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = *$$

$\exists x^*$  между  $x$  и  $x + \Delta x$  :

$$* = f(x^*) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} f(x)$$

Формулировка 2, называемая в интернете теоремой, а в лекции формулой:

$f(x)$  непрерывна на  $[\alpha; \beta]$

$\Phi(x)$  – первообразная для  $f(x)$

$$[a; b] \subset [\alpha; \beta]$$

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Доказательство:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt; \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

так как  $\Phi(x)$  – первообразная  $\Rightarrow \Phi(x) = F(x) + c$

$$\Phi(b) - \Phi(a) = F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

## 2. Теорема о замене переменного в определённом интеграле.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Доказательство:

$\Phi(x)$  – первообразная для  $f(x)$

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

$$\Phi(\varphi(t)); \Phi'_t(\varphi(t)) = \Phi'_x(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) = \Phi(a) - \Phi(b)$$

$$\text{Следовательно, } \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

## 3. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

Пусть  $f(x)$  на  $[\alpha; \beta]$  имеет непрерывную производную порядка  $(n + 1)$ . Тогда

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt}_{\text{остаточный член в интегральной форме}}$$

$$a \in [\alpha; \beta], x \in [\alpha; \beta]$$

Доказательство:

(Индукция по  $n$ )

$$n = 0$$

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(a)}{0!}(x-a)^0 + \frac{1}{0!} \int_a^x f'(t)(x-t)^0 dt. \text{ Это формула Ньютона-Лейбница:}$$

$$f(x) = f^{(0)}(a) + \int_a^x f'(t) dt$$

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$$

По предположению индукции:

$$f(x) = T_{n-1}(f, a) + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt$$

$$f(x) = T_{n-1}(f, a) - \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f^{(n)}(t) d(x-t)^n =$$

$$= T_{n-1}(f, a) - \frac{1}{n!} (x-t)^n f^{(n)} \Big|_{t=a}^{t=x} + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt =$$

$$= T_{n-1}(f, a) + \frac{1 \cdot f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt = T_n(f, a) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

**4. Теорема сравнения для несобственных интегралов в интегральной форме.**

$$x \in [a, b]; f(x) > 0; g(x) > 0; I_1 = \int_a^b f(x) dx; I_2 = \int_a^b g(x) dx$$

Если  $f(x) g(x), x \rightarrow b-$ , то  $I_1$  и  $I_2$  одновременно сходятся или расходятся.

Доказательство:

$$\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

$$\varepsilon = 1/2 \exists \delta : a < \delta < b \forall x \in (\delta, b) \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right| < 1/2$$

$$\frac{1}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2}g(x) < f(x) < \frac{3}{2}g(x)$$

Если  $I_1$  сходится, то так как  $0 < \frac{1}{2}g(x) < f(x)$ , по теореме сравнения  $\int_{\delta}^b \frac{1}{2}g(x) dx$  сходится  $\Rightarrow I_2 =$

$$\int_a^b g(x) dx \text{ сходится.}$$

Если  $I_1$  расходится, то так как  $0 < f(x) < \frac{3}{2}g(x)$ , по теореме сравнения  $\int_{\delta}^b \frac{3}{2}g(x) dx$  расходится  $\Rightarrow$

$$I_2 = \int_a^b g(x) dx \text{ расходится.}$$

**5. Интегральный признак сходимости числового ряда.**

$$x \in [1; +\infty); f(x) \text{ убывает; } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

$$f(a) + f(2) + \dots + f(k) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

$$\text{Ряд сходится} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ сходится}$$

Доказательство:

$$f(2) \leq \int_1^2 f(x)dx \leq f(1)$$

$$f(3) \leq \int_2^3 f(x)dx \leq f(2)$$

$\vdots$

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$$

$$\Rightarrow S_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq S_n$$

$$\text{Пусть } \int_1^\infty f(x)dx \text{ сходится. } S_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq S_n$$

Последовательность  $S_{n+1}$  ограничена  $\Rightarrow$  ряд сходится

$$\text{Пусть } \sum_{n=1}^\infty f(n) \text{ сходится. } \int_1^p f(x)dx \leq \int_1^{[p]+1} f(x)dx \leq S_{[p]+1} \leq S$$

$$F(p) = \int_1^p f(x)dx \text{ не убывает и ограничена сверху} \Rightarrow \int_1^\infty f(x)dx \text{ сходится}$$

**6. Признак д'Аламбера в предельной форме.**

$$\sum_{n=1}^\infty a_n; a_n > 0, n = 1, 2, \dots \text{ Если } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \text{ то}$$

1. ряд сходится, если  $0 \leq q < 1$

2. ряд расходится, если  $q > 1$

3. имеет место неопределенность, если  $q = 1$

Доказательство:

$$1. \exists N \forall n \geq N \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{q+1}{2} < 1$$

$$\text{по признаку д'Аламбера} \Rightarrow \sum_{n=N}^\infty a_n \text{ сходится} \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty a_n \text{ сходится}$$

$$2. \exists N \forall n \geq N = \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{q+1}{2} > 1 \Rightarrow (\text{по признаку д'Аламбера}) \sum_{n=N}^\infty a_n \text{ расходится} \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty a_n$$

расходится

$$3. \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \text{ расходится}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \text{ сходится}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

**7. Признак Лейбница для знакочередующихся рядов.**

$$a_n > 0; n = 1, 2, \dots$$

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n - \dots$$

$$\text{Если } a_n \downarrow 0 (n \rightarrow \infty), \text{ то } \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} a_n \text{ сходится}$$

Доказательство:

$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n})$ ;  $S_{2n}$  — последовательность положительных возрастающих чисел

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$$

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S \text{ (так как } a_{2n+1} \rightarrow 0)$$

$$\begin{aligned} S_{2n} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} S \\ S_{2n+1} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} S \\ \Rightarrow S_n &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} S \end{aligned}$$

**8. Лемма Абеля для степенных рядов.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

1. Если степенной ряд сходится в точке  $x_1 \neq 0$ , то он абсолютно сходится  $\forall x : |x| > |x_1|$

2. Если степенной ряд расходится в точке  $x_2$ , то он расходится  $\forall x : |x| > |x_2|$

Доказательство:

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n \text{ сходится} \Rightarrow c_n x_1^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \exists M \forall n : |c_n x_1^n| < M$$

Пусть  $|x| < |x_1|$ ;  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - ?$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n x_1^n| \cdot \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \text{ сходится, так как } \left| \frac{x}{x_1} \right| < 1$$

2. Пусть ряд расходится в  $x_2$ . Пусть в точке  $x_3 : |x_3| > |x_2|$  и  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_3^n$  сходится  $\Rightarrow$  сходится

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_2^n \Rightarrow \text{противоречие}$$

**9. Теорема: радиус сходимости степенного ряда не меняется при почленном дифференцировании ряда.**

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n; \text{ радиус сходимости } R_1$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1}; \text{ радиус сходимости } R_2$$

Теорема:  $R_1 > 0 \Rightarrow R_1 = R_2$

Доказательство:

$$(1)' \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots \text{ радиус сходимости } R_1$$

$$(2)' x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = c_1 x + 2c_2 x^2 + \dots + n c_n x^n + \dots \text{ радиус сходимости } R_2$$

$$1) R_2 \leq R_1$$

Если  $R_2 = 0, 0 < R_1$

Пусть  $R_2 > 0$ . Пусть в  $x$  сходится  $(2)'$ . Требуется доказать, что  $(1)'$  сходится в точке  $x$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n x^n \text{ сходится абсолютно. } \sum_{n=1}^{\infty} n |c_n x^n| < \infty; \text{ этот ряд мажорирует } \sum_{n=1}^{\infty} |c_n x^n| \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \text{ сходится в точке } x$$

$$2) R_1 \leq R_2$$

$(1)'$  сходится в точке  $x$ . Требуется доказать, что  $(2)'$  сходится в точке  $x$

$$\text{Рассмотрим } x^* : |x| < |x^*| < R_1 \Rightarrow \left| \frac{x}{x^*} \right| < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |n c_n x^n| = \sum_{n=1}^{\infty} n |c_n| \cdot |(x^*)^n| \cdot \left| \frac{x}{x^*} \right|^n \leq (*)$$

$$(\text{так как } \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \cdot |x^*|^n \text{ сходится, } \exists M \forall n \Rightarrow |c_n| \cdot |x^*|^n \leq M)$$

$$(*) \leq M \sum_{n=1}^{\infty} n \left| \frac{x}{x^*} \right|^n - \text{сходится} \Rightarrow \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n \text{ сходится абсолютно}$$

**10. Достаточное условие представимости функции её рядом Тейлора.**

Если  $f(x)$  в промежутке  $(a - \delta, a + \delta)$  имеет производные всех порядков, которые ограничены в совокупности  $(\exists M \forall n \forall x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow |f^{(n)}(x)| \leq M)$ , то  $\forall x \in (a - \delta, a + \delta)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n - \text{ряд Тейлора функции } f(x)$$

Доказательство:

Формула верна, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ , где  $r_n(x)$  – остаточный член в формуле Тейлора функции

$f$ . Возьмем  $r_n(x)$  в форме Лагранжа ( $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ ). Из  $|f^{(n)}(x)| \leq M \Rightarrow$

$$\Rightarrow |r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} \delta^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

### 11. Необходимое условие условного экстремума.

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow extr \\ g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ m < n \end{cases}$$

Если  $M(x_1^*, \dots, x_n^*)$  – локальный экстремум и  $\nabla g_1(M), \dots, \nabla g_m(M)$  л.н.з., то  $\nabla f(M)$  – линейная комбинация  $\nabla g_1(M), \dots, \nabla g_m(M)$ . То есть  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R} : \nabla f(M) + \lambda_1 \nabla g_1(M) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(M) = 0$

Доказательство:

Пусть  $\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0$  в  $M$

$$\begin{cases} f(x_1, x_2(x_1), \dots, x_n(x_1)) \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} x'_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x'_n = 0 \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_1}{\partial x_2} x'_2 + \dots + \frac{\partial g_1}{\partial x_n} x'_n = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} + \frac{\partial g_m}{\partial x_2} x'_2 + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial x_n} x'_n = 0 \end{cases}$$

Просуммируем все, предварительно домножив последние  $m-1$  строк на  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ :

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_1} \right) + x'_2 \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + \dots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_2} \right) + \dots + x'_n \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n} + \dots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_1} = 0$$

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m : \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + \dots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_2} = 0 \quad \text{в } M$$

$\vdots$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n} + \dots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_n} = 0$$

$$\nabla f(M) + \lambda_1 \nabla g_1(M) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(M) = 0$$

### 12. Теорема о сведении двойного интеграла к повторному.

1.  $D = [a, b] \times [c, d]; a \leq x \leq b; c \leq y \leq d; f$  – непрерывная

$$a = x_0 < \dots < x_n = b$$

$$c = y_0 < \dots < y_m = d$$

$$\Delta_{ij} = \{(x, y) | x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$$

$$M_{ij}(\xi_i, \nu_j) \leq \Delta_{ij}$$

$$\sum_{i,j} f(\xi_i, \nu_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = (\text{возьмем } \xi_i = x_i) = \sum_{i,j} f(x_i, \nu_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sum_{j=1}^m (x_i, \nu_j)(y_j - y_{j-1}) = *$$

$\Phi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$  непрерывна на  $[a, b]$

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^m \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y) dy = (\text{по теореме о среднем } \exists y_j^* \in [y_{j-1}, y_j]) = \sum_{j=1}^m f(x, y_j^*) (y_j - y_{j-1})$$

выберем  $\nu_j = y_j^*$

$$\circledast = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j^*) (y_j - y_{j-1}) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \Phi(x_i) \xrightarrow{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \int_a^b \Phi(x) dx$$

$$\text{Вывод: } \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

2.  $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b; \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x); \varphi_1, \varphi_2 \text{ непрерывны}\}$

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y); & (x, y) \in D \\ 0; & (x, y) \notin D; a \leq x \leq b; c \leq y \leq d \end{cases}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{[a, b] \times [c, d]} \tilde{f}(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d \tilde{f}(x, y) dy = \int_a^b dx \left( \int_c^{\varphi_1(x)} \tilde{f}(x, y) dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \tilde{f}(x, y) dy + \int_{\varphi_2(x)}^d \tilde{f}(x, y) dy \right)$$

$$\int_c^{\varphi_2(x)} \tilde{f}(x, y) dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \tilde{f}(x, y) dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$$