Теоремы для подготовки к экзамену

Математический анализ

2018-2019-й учебный год

1. Теорема Ньютона-Лейбница.

Если f непрерывна на $[\alpha;\beta] \Rightarrow F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ – дифференцируема в $(\alpha;\beta)$

$\forall x \in (\alpha;\beta) \Rightarrow F'(x) = f(x)$

Доказательство:

$$F'(x) = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}(\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt) = \frac{1}{\Delta x}\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \circledast$$

$\exists\ x^*$ между x и $x+\Delta x$:

$\circledast = f(x^*) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} f(x)$

2. Теорема о замене переменного в определённом интеграле.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Доказательство:

$\Phi(x)$ – первообразная для $f(x)$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

$$\Phi(\varphi(t));\ \Phi'_t(\varphi(t)) = \Phi'_x(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) = \Phi(a) - \Phi(b)$$

Следовательно, $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

3. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

Пусть $f(x)$ на $[\alpha;\beta]$ имеет непрерывную производную порядка $(n+1)$. Тогда

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underbrace{\frac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt}_{\text{остаточный член в интегральной форме}}$$

$a \in [\alpha;\beta)$, $x \in [\alpha;\beta]$

Доказательство:

(Индукция по n)

$n = 0$

$f(x) = \frac{f^{(0)}(a)}{0!}(x-a)^0 + \frac{1}{0!}\int\limits_a^x f'(t)(x-t)^0 dt$. Это формула Ньютона-Лейбница:

$$f(x) = f^{(0)}(a) + \int\limits_a^x f'(t)dt$$

$$f(x) - f(a) = \int\limits_a^x f'(t)dt$$

По предположению индукции:

$f(x) = T_{n-1}(f,a) + \dfrac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt$

$f(x) = T_{n-1}(f,a) - \dfrac{1}{(n-1)!\cdot n}\int\limits_a^x f^{(n)}(t)d(x-t)^n =$

$= T_{n-1}(f,a) - \dfrac{1}{n!}(x-t)^n f^{(n)}\Bigg|_{t=a}^{t=x} + \dfrac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt =$

$= T_{n-1}(f,a) + \dfrac{1\cdot f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dfrac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = T_n(f,a) = \dfrac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$

4. Теорема сравнения для несобственных интегралов в интегральной форме.

$x \in [a,b)\,; f(x) > 0; g(x) > 0; I_1 = \int\limits_a^b f(x)dx; I_2 = \int\limits_a^b g(x)dx$

Если $f(x)\ g(x), x \to b-$, то I_1 и I_2 одновременно сходятся или расходятся.

<u>Доказательство:</u>

$\lim\limits_{x\to b-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

$\varepsilon = 1/2\ \exists\delta : a < \delta < b\ \forall x \in (\delta, b) \Rightarrow \left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - 1\right| < 1/2$

$\dfrac{1}{2} < \dfrac{f(x)}{g(x)} < \dfrac{3}{2}$

$\dfrac{1}{2}g(x) < f(x) < \dfrac{3}{2}g(x)$

Если I_1 сходится, то так как $0 < \dfrac{1}{2}g(x) < f(x)$, по теореме сравнения $\int\limits_\delta^b \dfrac{1}{2}g(x)dx$ сходится$\Rightarrow I_2 = \int\limits_a^b g(x)dx$ сходится.

Если I_1 расходится, то так как $0 < f(x) < \dfrac{3}{2}g(x)$, по теореме сравнения $\int\limits_\delta^b \dfrac{3}{2}g(x)dx$ расходится$\Rightarrow I_2 = \int\limits_a^b g(x)dx$ расходится.

5. Интегральный признак сходимости числового ряда.

$x \in [1; +\infty)\,; f(x)$ убывает; $f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$

$f(a) + f(2) + \ldots + f(k) + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$

Ряд сходится $\Leftrightarrow \int\limits_1^\infty f(x)dx$ сходится

<u>Доказательство:</u>

$f(2) \le \int\limits_1^2 f(x)dx \le f(1)$

$f(3) \le \int\limits_2^3 f(x)dx \le f(2)$

$\vdots$

$f(n+1) \le \int\limits_n^{n+1} f(x)dx \le f(n)$

$\Rightarrow S_{n+1} - f(1) \le \int\limits_1^{n+1} f(x)dx \le S_n$

Пусть $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ сходится. $S_{n+1} - f(1) \le \int\limits_1^{n+1} f(x)dx \le S_n$

Последовательность S_{n+1} ограничена $\Rightarrow$ ряд сходится

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится. $\int\limits_1^p f(x)dx \leq \int\limits_1^{[p]+1} f(x)dx \leq S_{[p]+1} \leq S$

$F(p) = \int\limits_1^p f(x)dx$ не убывает и ограничена сверху$\Rightarrow \int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ сходится

6. Признак д'Аламбера в предельной форме.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n; a_n > 0, n = 1, 2, \ldots$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то

1. ряд сходится, если $0 \leq q < 1$
2. ряд расходится, если $q > 1$
3. имеет место неопределенность, если $q = 1$

<u>Доказательство:</u>

1. $\exists N \forall n \geq N \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{q+1}{2} < 1$

по признаку д'Аламбера $\Rightarrow \sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ сходится$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится

2. $\exists N \forall n \geq N = \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{q+1}{2} > 1 \Rightarrow$ (по признаку д'Аламбера) $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ расходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

7. Признак Лейбница для знакочередующихся рядов.

$a_n > 0; n = 1, 2, \ldots$

$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1}a_n - \ldots$

Если $a_n \downarrow 0 (n \to \infty)$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ сходится

<u>Доказательство:</u>