Определения для подготовки к экзамену, 4 модуль

2018-2019-й учебный год

1. Сформулируйте определение алгебры над полем. Приведите два примера.

Пусть A – векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, снабженное дополнительной операцией умножения: $A \times A \to A$. A называется алгеброй над полем $\mathbb{F}$, если выполнены следующие свойства:

$\forall x, y, z \in A \; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}:$

1.$(x + y)z = xz + yz$

2.$x(y + z) = xy + xz$

3.$(\alpha x)(\beta y) = (\alpha\beta)(xy)$

Примеры:

1. $\mathbb{C}$ является двумерной алгеброй над $\mathbb{R}$ (операция – комплексное умножение)
2. Алгебра многочленов $\mathbb{F}[x]$

2. Сформулируйте определение тензора. Приведите два примера.

Пусть F – поле, V – векторное пространство над F, V^* – сопряженное векторное пространство, $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда $\forall$ полилинейное отображение

$f : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{p} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{q} \to F$ называется тензором типа (p, q) и валентности $p + q$

Примеры:

1. Тензор типа $(1, 0)$ – линейная функция на V, то есть ковектор
2. Тензор типа $(0, 1)$ – линейная функция на V^*, но $V^* \simeq V \Rightarrow$это вектор

3. Дайте определение эллипса как геометрического места точек. Выпишите его каноническое уравнение. Что такое эксцентриситет эллипса? В каких пределах он может меняться?

Эллипсом называют геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек постоянна.

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – каноническое уравнение эллипса

Эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}$, где a – большая полуось, b – малая полуось, лежит на полуинтервале $[0, 1)$ и служит мерой "сплюснутости" эллипса

4. Дайте определение гиперболы как геометрического места точек. Выпишите ее каноническое уравнение. Что такое эксцентриситет гиперболы? В каких пределах он может меняться?

Гиперболой называют геометрическое место точек, модуль разности расстояния от которых до двух данных точек постоянен.

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – каноническое уравнение гиперболы

Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = \sqrt{1 + \dfrac{b^2}{a^2}} > 1$ характеризует угол между асимптотами

5. Дайте определение параболы как геометрического места точек. Выпишите ее каноническое уравнение.

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки и от данной прямой.

$y^2 = 2px$ – каноническое уравнение параболы

6. Сформулируйте теорему о классификации кривых второго порядка.

Для любой кривой второго порядка существует прямоугольная декартова система координат O_{xy}, в которой уравнение этой кривой имеет один из следующих видов:

Эллиптический тип

1	2	3
эллипс	пустое множество	точка
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $a \geq b > 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$

Гиперболический тип

4	5
гипербола	пара пересекающихся прямых
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $a > 0, b > 0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

Параболический тип

6	7	8	9
парабола	пара $\|\|$ прямых	пустое множество	прямая
$y^2 = 2px$	$y^2 = d$, где $d > 0$	$y^2 = -d$, где $d > 0$	$y^2 = 0$

7. Дайте определение цилиндрической поверхности.

Рассмотрим кривую γ, лежащую в некоторой плоскости P, и прямую L, не лежащую в P. Цилиндрической поверхностью называют множество всех прямых, параллельных L и пересекающих γ

8. Дайте определение линейчатой поверхности. Приведите три примера.

Линейчатой называют поверхность, образованную движением прямой линии.

Примеры:

1. Цилиндр
2. Гиперболический параболоид
3. Конус

9. Дайте определение полуторалинейной формы. Дайте определение эрмитовой формы.

$f : V \times V \to \mathbb{C}$ называется полуторалинейной формой на комплексном векторном пространстве, если $\forall x, y, z \in V \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

1.$f(\alpha x + \beta y, z) = \alpha f(x, z) + \beta f(y, z)$

2.$f(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha} f(x, y) + \overline{\beta} f(x, z)$

Полуторалинейная форма называется эрмитовой, если $f(y, x) = \overline{f(x, y)}$

10. Как меняется матрица эрмитовой формы при замене базиса?

Пусть P – матрица перехода от базиса $e_1, \ldots, e_n$ в V к базису $e'_1, \ldots, e'_n$ в V. Тогда матрица эрмитовой формы преображается по формуле $F' = P^T F P$

11. Дайте определение эрмитова пространства.

Эрмитовым пространством H называется пара, состоящая из конечномерного векторного пространства V над $\mathbb{C}$ и положительно определенной эрмитовой полуторалинейной формой, то есть на V задана функция $(x|y) = f(x, y)$, такая, что $\forall x, y, z \in V$ выполнено:

1. $(x|y) = \overline{(y|x)}$ – эрмитовость
2. $(\alpha x + \beta y|z) = \alpha(x|z) + \beta(y|z)$
3. $(x|x) \geq 0$ и $(x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ – положительно определенность

12. Что можно сказать про собственные значения унитарного оператора?

Все собственные значения унитарного оператора по модулю$= 1$, то есть они имеют вид $e^{i\varphi}$

13. Дайте определение сопряженного оператора в эрмитовом пространстве. Дайте определение эрмитова оператора.

Линейный оператор φ^*, действующий в эрмитовом пространстве H, называется сопряженным к φ, если $\forall x, y \in H$ $(\varphi(x)|y) = (x|\varphi^*(y))$

Оператор φ в эрмитовом пространстве H называется эрмитовым (самосопряженным), если $\varphi^* = \varphi$

14. Как найти матрицу сопряженного оператора в произвольном базисе эрмитова пространства?

Пусть дан линейный оператор φ в конечномерном эрмитовом пространстве с матрицей A. Тогда матрицу A_1 сопряженного линейного пространства φ^* можно вычислить по формуле: $\overline{A_1} = \overline{\Gamma^{-1}} A^T \Gamma$

15. Сформулируйте определение унитарной матрицы. Сформулируйте определение унитарного оператора.

Матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ называется унитарной, если $A^* \cdot A = E$

16. Каков канонический вид унитарного оператора?

Каноническим видом унитарного линейного оператора является диагональный и все собственные значения по модулю$= 1$, то есть $\begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\varphi_n} \end{pmatrix} = \Sigma$

17. Сформулируйте критерий унитарности оператора, использующий его матрицу.

Оператор является унитарным$\Leftrightarrow$его матрица в ОНБ является унитарной

18. Сформулируйте утверждение о сингулярном разложении в эрмитовом пространстве.

$\forall A \in M_{mn}(\mathbb{C})$ может быть представлена в виде $A = P\Sigma V^*$, где P и V – унитарные матрицы, а $\Sigma \in M_{mn}(\mathbb{R})$ и на диагонали $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r \geq 0$

19. Сформулируйте утверждение о полярном разложении в эрмитовом пространстве.

$\forall$ квадратная матрица из $M_n(\mathbb{C})$ представима в виде $A = HP$, где H – эрмитова матрица с неотрицательными собственными значениями, а P – унитарная