Algorytmy Metaheurystyczne 2023

Laboratorium 1-3 (na zaliczenie)

Termin oddania: 4 laboratorium

Problem komiwojażera
Problem komiwojażera (TSP, z ang. Travelling Salesman Problem) jest zagadnieniem optymalizacji kombinatorycznej, znanym co najmniej od 1930 roku (kiedy to sformułował je Karl Menger). Matematycznie można przedstawić je w następujący sposób. Dany jest pełny graf $G = (V, E)$ składający się ze zbioru wierzchołków $V = (1, 2, \ldots, n)$ oraz zbioru krawędzi E. Liczba wierzchołków n stanowi też najczęstszy sposób interpretacji rozmiaru problemu (choć nie jedyny). Ponieważ graf jest pełny, to w ogólnej postaci problemu liczba krawędzi wynosi $|E| = \frac{n^2-n}{2}$ (rozważamy grafy symetryczne, ale można też rozpatrywać niesymetryczne). Graf jest ważony, tzn. z każdą krawędzią (x, y) skojarzona jest nieujemna waga oznaczona $w(x, y)$.

Aby rozwiązać problem komiwojażera, należy znaleźć (podać) minimalny cykl Hamiltona tj. taką drogę (czyli ciąg krawędzi), która zaczynając się od jakiegoś wierzchołka odwiedza każdy inny wierzchołek dokładnie raz, wraca do wierzchołka początkowego, i jej długość (rozumiana jako suma wag krawędzi należących do tej drogi) jest najmniejsza z możliwych (tj. żaden inny cykl Hamiltona w grafie G nie ma mniejszej długości).

Dla grafów o n wierzchołkach istnieje $(n - 1)!$ różnych cykli Hamiltona (zastanów się, dlaczego nie $n!$?). Ogólnie cykle Hamiltona w problemie komiwojażera nazywamy rozwiązaniami (czasem kandydatami), zaś minimalny cykl Hamiltona nazywamy rozwiązaniem optymalnym (optimum). W grafie G może być wiele rozwiązań optymalnych.

Do reprezentacji rozwiązań wygodnie jest używać permutacji. Np. dla $n = 6$ przykładowa permutacja $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ może reprezentować drogę (cykl) będącą ciągiem krawędzi $((1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 1))$.

Wariantem problemu komiwojażera jest komiwojażer euklidesowy, który można sobie wyobrazić w następujący sposób. Z każdym wierzchołkiem skojarzona jest para współrzędnych, opisująca położenie tego wierzchołka na płaszczyźnie. Wtedy $w(x, y)$ jest równe odległości euklidesowej wierzchołków x i y w przestrzeni 2-wymiarowej. Algorytmy dedykowane dla danego wariantu problemu są zwykle „lepsze” (szybsze, dokładniejsze itd.) dzięki wykorzystaniu specyficznych własności danego wariantu (charakterystyka danych wejściowych) lub ze względu na mniejszą liczbę możliwych rozwiązań niż w przypadku problemu ogólnego.

Zadanie
Zapoznaj się z danymi zawartymi na stronie https://www.math.uwaterloo.ca/tsp/vlsi/index.html (zwróć szczególną uwagę na sposób wyznaczania wag jako liczb całkowitych i zasady zaokrąglania). Dla pierwszych dziesięciu przykładów wykonaj następujące zadania:

1. Policz minimalne drzewo rozpinające i jego wagę (zastanów się dlaczego waga minimalnego drzewa rozpinającego musi być mniejsza od optymalnego cyklu komiwojażera).

2. Stwórz na podstawie MST cykl komiwojażera na zasadzie wypisania wierzchołków w kolejności ich pierwszego odwiedzenia przy przeszukiwaniu w głąb. Policz wagę tak powstałego cyklu (zauważ, że otrzymane rozwiązanie powinno być nie większe niż dwukrotny koszt drzewa).

3. Wylosuj 1000 permutacji wierzchołków i policz

(a) średnią z minimum dla każdych 10 kolejnych losowań (100 grup po 10 losowań),
(b) średnią z minimum dla każdych 50 kolejnych losowań (20 grup po 50 losowań),
(c) i minimalną wartość dla tych 1000 losowań.

4. Przygotuj skrypt/program generujący graficznie uzyskane rozwiązanie.

Przygotuj krótkie sprawozdanie z opisem uzyskanych wyników dla każdych danych.

Przyjrzyj się uzyskanym cyklom i wiedząc że jest to przestrzeń euklidesowa zastanów się co można w łatwy sposób poprawić w uzyskanych rozwiązaniach (czy w optymalnej pętli krawędzie mogą się krzyżować?).