Języki formalne i Techniki Translacji
Zadanie Domowe

Jakub Musiał 268442

Styczeń 2024

Lista 4 - Zadanie 7

Opis zadania

Określić, czy język słów nad alfabetem $\{1, 2, 3, 4\}$ takich, że liczba symboli 1 jest równa liczbie symboli 2 oraz liczba symboli 3 jest równa liczbie symboli 4 jest bezkontekstowy.

Rozwiązanie

Zadany język:

$$L = \{w \in \{1, 2, 3, 4\}^* : |w|_1 = |w|_2 \wedge |w|_3 = |w|_4\}$$

nie jest bezkontekstowy.

Dowód:
Załóżmy nie wprost, że L jest językiem bezkontekstowym.
Niech n będzie stałą z lematu Ogdena oraz $m > n$. Musimy znaleźć podział $uvwxy$ słowa $z \in L$ taki, że:

1. v i x mają łącznie conajmniej jeden oznaczony symbol

2. vwx ma conajwyżej n oznaczonych symboli

Weźmy słowo $z = 1^m 3^m 2^m 4^m \in L$. Oznaczmy wszystkie symbole 2 oraz 3 w słowie z.
Łatwo zauważyć, że nie możemy pompować wyłącznie symboli 1 - wtedy musielibyśmy wyznaczyć podział słowa z taki, że vwx składa się wyłącznie z symboli 1, jednak taki podział nie spełnia pierwszego warunku. Analogicznie nie możemy pompować wyłącznie symboli 4.

Weźmy zatem podział $z = uvwxy$ taki, że w $|v|_2 > 1$. Tutaj możemy zauważyć, że niezależnie od tego, który z symboli 2 byłby pompowany, nie możemy pompować symboli 4

$(|v|_4 = 0 \land |x|_4 = 0)$, ponieważ możemy pompować maksymalnie n oznaczonych symboli, więc żeby pompować jednocześnie symbole 2 i 4 podsłowo vwx musiałoby zawierać wszystkie symbole 3, których jest $m > n$ i wszystkie są oznaczone, co jest sprzeczne z drugim warunkiem. Analogicznie nie możemy pompować jednocześnie symboli 1 i 3.

Możemy zatem pompować słowo z wyłącznie dla podziałów $uvwxy$ takich, że $(|v|_2 > 0 \land |v|_4 = |x|_4 = 0) \lor (|x|_2 > 0 \land |v|_4 = |x|_4 = 0)$ oraz analogiczne podziały dla symboli 2 i 3. Możemy zauważyć jednak, że dla takich podziałów $(\forall i \neq 1)(uv^iwx^iy \notin L)$.
Stąd język nie jest bezkontekstowy. $\square$