

Języki formalne i Techniki Translacji

Zadanie Domowe

Jakub Musiał 268442

Październik 2023

Lista 1 - Zadanie 1

Podać deterministyczne automaty skończone (DFA) akceptujące następujące języki nad alfabetem $\{0, 1\}$:

1. zbiór wszystkich łańcuchów o zakończeniu 101;
2. zbiór wszystkich łańcuchów zawierających trzy kolejne jedyńki;
3. zbiór wszystkich łańcuchów, w których każdy blok złożony z pięciu kolejnych symboli zawiera co najmniej dwa zera;
4. zbiór wszystkich łańcuchów zaczynających się od 1, które interpretowane jako binarna reprezentacja liczby całkowitej są wielokrotnością 7;
5. zbiór wszystkich łańcuchów, w których piąty symbol od końca jest zerem.

1. Zbiór wszystkich łańcuchów o zakończeniu 101

Automatem akceptującym zadany język jest:

$$M_1 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \delta_1, q_0, \{q_3\})$$

Gdzie $q_i \equiv$ najdłuższy prefix wzorca '101', który znajduje się na końcu tekstu ma długość i , a funkcja przejść δ_1 jest zdefiniowana w następujący sposób:

| q | $\delta_1(q, 0)$ | $\delta_1(q, 1)$ |
|-------|------------------|------------------|
| q_0 | q_0 | q_1 |
| q_1 | q_1 | q_2 |
| q_2 | q_0 | q_3 |
| q_3 | q_2 | q_1 |

Table 1: Funkcja przejść δ_1

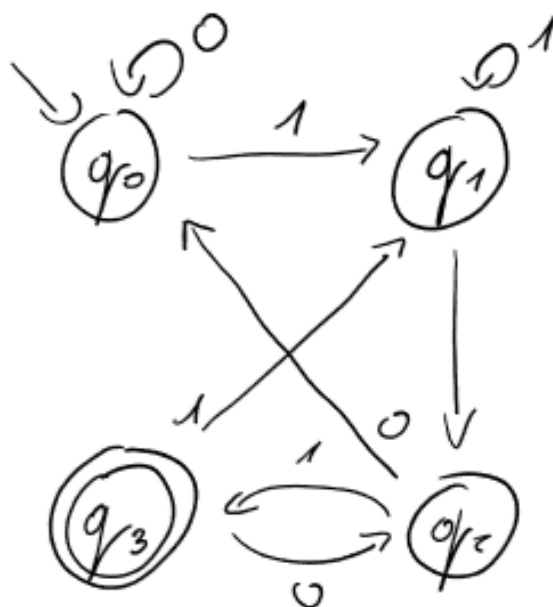


Figure 1: Schemat automatu M_1

2. Zbiór wszystkich łańcuchów zawierających trzy kolejne jedyne

Automatem akceptującym zadany język jest

$$M_2 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \delta_2, q_0, \{q_3\})$$

Gdzie:

- $(\forall i \in \{0, 1, 2\})(q_i \equiv i \text{ ostatnich wczytanych liter z rzędu to } 1)$
- $q_3 \equiv \text{znaleziono (w dowolnym miejscu) ciąg co najmniej 3 jedynek}$

W automacie M_2 stan q_3 jest pochłaniający.

Funkcja przejść δ_2 dla tego automatu jest zdefiniowana w następujący sposób:

| q | $\delta_2(q, 0)$ | $\delta_2(q, 1)$ |
|-------|------------------|------------------|
| q_0 | q_0 | q_1 |
| q_1 | q_0 | q_2 |
| q_2 | q_0 | q_3 |
| q_3 | q_3 | q_3 |

Table 2: Funkcja przejść δ_2

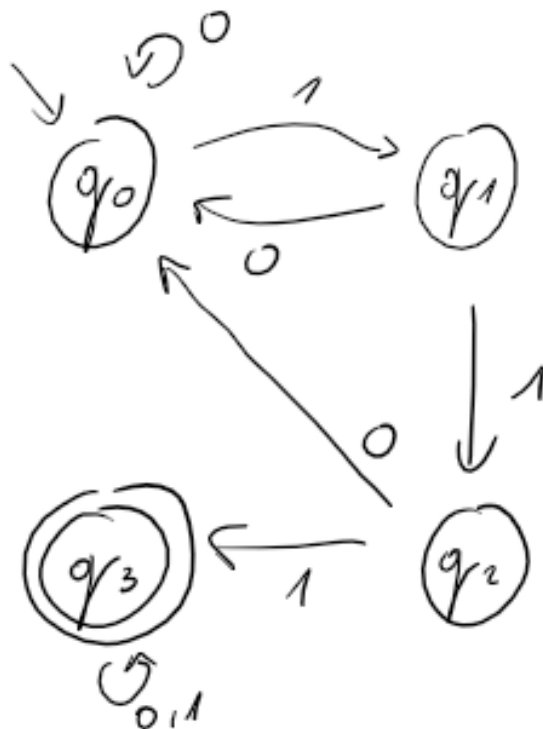


Figure 2: Schemat automatu M_2

3. Zbiór wszystkich łańcuchów, w których każdy blok złożony z pięciu kolejnych symboli zawiera co najmniej dwa zera

Automatem akceptującym zadany język jest

$$M_3 = (Q_3, \{0, 1\}, \delta_3, q_\epsilon, F_3)$$

Gdzie:

- $Q_3 = \{q_t\} \cup \{q_b : b \in \{0, 1\}^{\leq 5}\}$
- $\delta_3(q_t, l) = q_t$
- $|b| < 5 \implies \delta_3(q_b, l) = q_{(b|l)}$
- $|b| = 5 \implies \delta_3(q_b, l) = \begin{cases} q_{(b|l)[-5:]} & : c_0(b) \geq 2 \\ q_t & : \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$
- $F_3 = \{q_b : b \in \{0, 1\}^{\leq 4}\} \cup \{q_b : b \in \{0, 1\}^5 \wedge c_0(b) \geq 2\}$

Oznaczenia:

- $q_t \equiv$ stan śmietnikowy
- $\{0, 1\}^{\leq n} \equiv$ ciągi bitowe o długości nie większej niż n ($q_\epsilon \equiv$ ciąg bitowy o długości 0)
- $l \equiv$ litera alfabetu binarnego ($l \in \{0, 1\}$)
- $(b|l) \equiv$ konkatenacja ciągu b i litery l
- $b[-n:] \equiv n$ elementowy suffix ciągu b lub cały ciąg b , jeśli $|b| < 5$
- $c_0(b) \equiv$ liczba zer w ciągu b

Uzasadnienie poprawności:

Stany automatu są indeksowane ciągami bitowymi o długości ≤ 5 (5 ostatnich wczytanych bitów lub wszystkie wczytane bity, jeśli jest ich mniej niż 5). Automat akceptuje wszystkie ciągi bitów o długości < 5 oraz te ciągi o długości ≥ 5 , w których każda piątka zawiera minimum 2 zera. Wczytanie nowego bitu powoduje przejście do stanu powstałego poprzez dopisanie nowego bitu na koniec aktualnego ciągu indeksującego oraz - jeśli długość pamiętanego ciągu = 5 - usunięcie pierwszego pamiętanego bitu, gdy w pamiętanym ciągu były minimum 2 zera, lub do stanu śmietnikowego w przeciwnym przypadku (stan śmietnikowy jest pochłaniający, więc jeśli istnieje conajmniej jedna piątka w której nie ma odpowiedniej liczby zer, cały ciąg nie zostanie zaakceptowany).

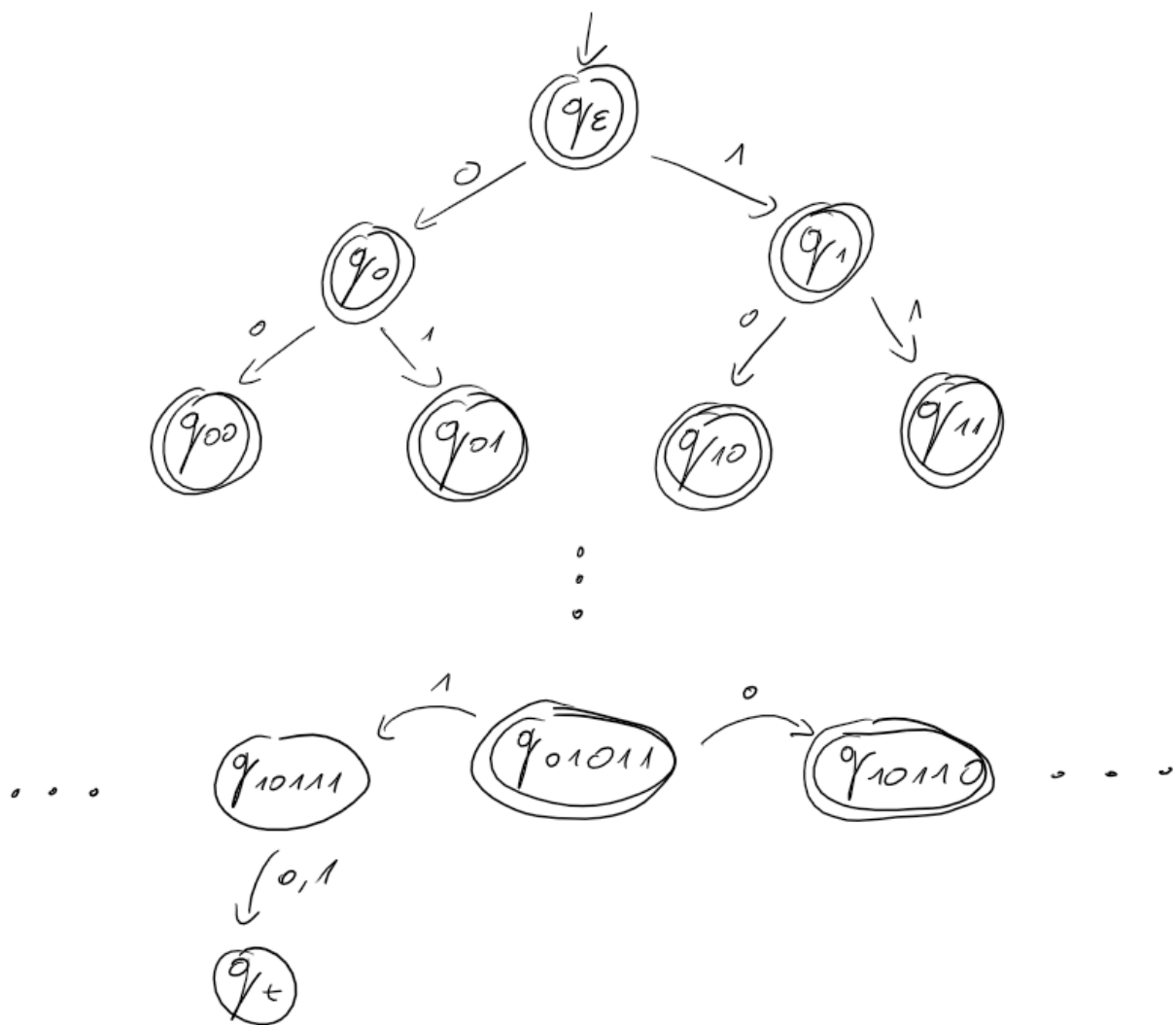


Figure 3: Schemat automatu M_3

4. zbiór wszystkich łańcuchów zaczynających się od 1, które interpretowane jako binarna reprezentacja liczby całkowitej są wielokrotnością 7

Automatem akceptującym zadany język jest:

$$M_4 = (\{q_t, q_\epsilon, q_0, q_1, \dots, q_6\}, \{0, 1\}, \delta_4, q_\epsilon, \{q_0\})$$

Gdzie:

- $q_t \equiv$ stan śmietnikowy
- $(\forall r \in \{0, \dots, 6\})(q_r \equiv \text{reszta z dzielenia dotychczasowego ciągu przez 7 jest równa } r)$
- $\delta_4(q_t, l) = q_t : l \in \{0, 1\}$
- $\delta_4(q_\epsilon, 0) = q_t \wedge \delta_4(q_\epsilon, 1) = q_1$
- $(\forall r \in \{0, \dots, 6\})(\delta_4(q_r, 0) = q_{2r \bmod 7} \wedge \delta_4(q_r, 1) = q_{(2r+1) \bmod 7})$

Uzasadnienie poprawności:

Stany automatu są indeksowane resztami z dzielenia przez 7 ($r \in \{0, \dots, 6\}$). Automat akceptuje wyłącznie stan q_0 - liczby podzielne przez 7 (o reszcie z dzielenia przez 7 równej 0). Wczytanie kolejnego bitu b jest równoznaczne z pomnożeniem liczby (reszty z dzielenia) przez 2, jeśli $b = 0$, natomiast jeśli $b = 1$, jest to równoznaczne z pomnożeniem liczby przez 2 oraz dodaniem 1. Następnie z uzyskanej wartości ponownie należy wziąć resztę z dzielenia przez 7, co daje indeks nowego stanu. Jeśli pierwszym wczytanym bitem jest 0, automat przechodzi do pochłaniającego stanu śmietnikowego, więc automat akceptuje wyłącznie ciągi zaczynające się bitem 1.

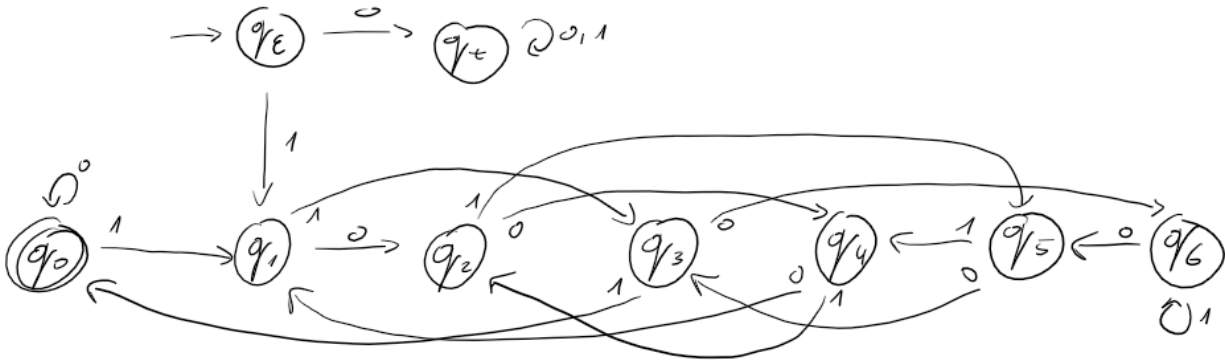


Figure 4: Schemat automatu M_4

5. Zbiór wszystkich łańcuchów, w których piąty symbol od końca jest zerem

Automatem akceptującym zadany język jest:

$$M_5 = (\{q_{ijklm} : i, j, k, l, m \in \{0, 1\}, \{0, 1\}, \delta_5, q_{00000}, \{q_{0jklm} : j, k, l, m \in \{0, 1\}\})$$

Gdzie:

- $q_{ijklm} \equiv 5$ ostatnich wczytanych bitów to ciąg (i, j, k, l, m) (jeśli, liczba wczytanych bitów jest < 5 , to ciąg ten uzupełniamy zerami od przodu)
- $\delta_5(q_{ijklm}, n) = q_{jklmn} : n \in \{0, 1\}$

Uzasadnienie poprawności:

Stany automatu indeksowane są ciągami ostatnich 5 wczytanych bitów. Zatem ze stanu q_{ijklm} po wczytaniu nowego bitu n przechodzimy do stanu q_{jklmn} . Automat akceptuje stany postaci q_{0jklm} , zatem ciąg zostanie zaakceptowany, jeśli 5-tym bitem od końca jest 0. Automat akceptuje również wszystkie ciągi o długości < 5 , ponieważ, jeśli wczytaliśmy mniej niż 5 bitów, to uzupełniamy ciąg zerami od przodu, by użyć 5-bitowy indeks.

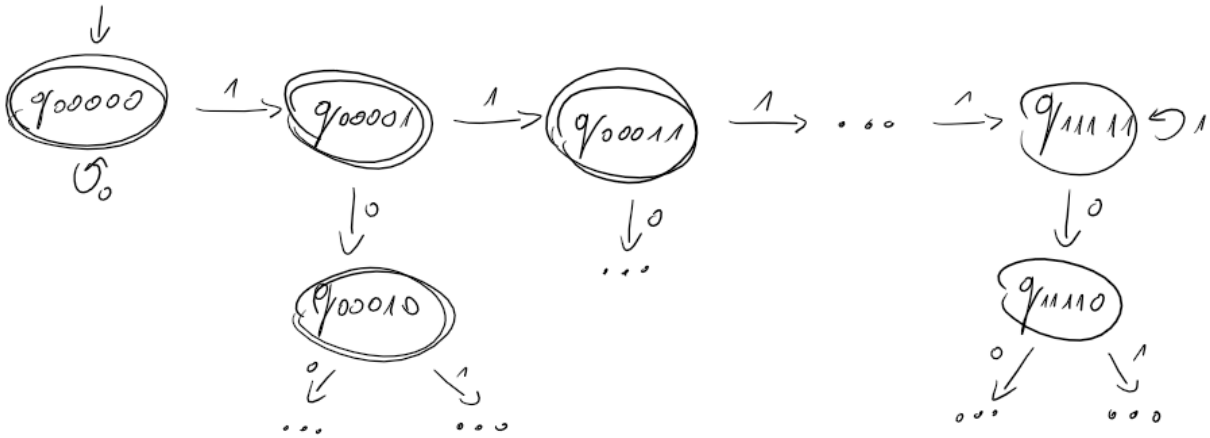


Figure 5: Schemat automatu M_5