D_1

در این قسمت ما راجع به توابع گسسته بحث خواهیم کرد فرض کنیم که

بردار $f = \{f_1, f_2, \dots f_N\}$ $\quad R$ $\quad f_i \in C$ اعداد مختلط

حال یک پایه متعامد را با کمک ریشه‌های واحد می‌سازیم فرض کنیم که

$N = 2$

$$\Rightarrow z^2 = 1 \Rightarrow z = +1 \Rightarrow$$
$$z = -1$$

$$W_0^2 = (1^0, -1^0)$$

$$W = \{(1,1), (1,-1)\}$$

$$W_1^2 = (1^1, -1^1)$$

$$W = \{ W_0^2, W_1^2 \}$$

تشکیل پایه متعامد است

اگر $N = 4$ آنگاه معادله $z^4 = 1$ را در نظر بگیریم

$$Z = 1 \quad Z = i \quad \Rightarrow Z = -1 \quad , Z = -i$$

$$e^{\frac{2\pi j}{4} 0} \quad e^{\frac{2\pi}{4} 1} \quad e^{\frac{2\pi}{4} 2} \quad e^{\frac{2\pi}{4} 3}$$

D_2

حل بردارهای زیر را معرفی می‌کنیم

$$W_0^4 = (1, 1, 1, 1)$$

$$W_1^4 = (1, i, -1, -i)$$

$$W_2^4 = (1, -1, 1, -1)$$

$$W_3^4 = (1 \; -i \; -1, i)$$

می‌توان به راحتی نشان داد که این پایه متعامد است به عنوان مثال

$$\langle W_1^4, W_3^4 \rangle = (1, i, -1, -i) \cdot \overline{(1, -i, -1, i)}$$

$$= 1\times 1 + i(--i) + (-1)\times(-1) + (-i)\times(-i) = 0$$

D_3

فرم کلی تحت این جا از بردارها به شرح زیر است:

$$W_N = e^{(2\pi j)/N}$$

$$W_0^N = \left(W_N^{0(k-1)} \right)_{k=1}^{N}$$

یک بردار n تایی

$$= (1, 1, \dots 1)$$

$$W_1^N = \left(W_N^{1(k-1)} \right)_{k=1}^{N}$$

$$= \left(\underbrace{e^{1\frac{2\pi j}{N}0}}_{1}, e^{1\frac{2\pi j}{N}1}, e^{1\frac{2\pi j}{N}2}, \dots e^{1\frac{2\pi j}{N}(N-1)} \right)$$

D4

$$W_r^N = \left(W_N^{r(k-1)} \right)_{k=1}^{N}$$

$$= \left(e^{r\frac{2\pi j}{N}0} , e^{r\frac{2\pi j}{N}1} , \dots , e^{r\frac{2\pi j}{N}(N-1)} \right)$$

$$0 \leqslant r < N-1$$

برای 2، 4، 8 تعامدی در پایان فصل نشان داده شده است

حال نشان می دهیم که مجموعه زیر متعامد است

$$W^N = \left\{ \left(\underbrace{e^{(r-1)\frac{2\pi j}{N}}}_{W_N}(k-1) \right)_{k=1}^{N} \right\}_{r=1}^{N}$$

اثبات کافی است نشان دهیم

$$\langle W_t^N , W_s^N \rangle = \sum_{k=1}^{N} e^{(t-1)\frac{2\pi j}{N}(k-1)} \; \overline{e^{(s-1)\frac{2\pi j}{N}(k-1)}}$$

$\frac{D}{5}$

$$= \sum_{k=1}^{N} e^{(t-1)\frac{2\pi j}{N}(k-1)} \cdot e^{(1-s)\frac{2\pi j}{N}(k-1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \left(e^{\frac{2\pi j}{N}(k-1)}\right)^{t-s}$$

اما $e^{\frac{2\pi j}{N}(k-1)}$ ریشه Nام

معادله $z^N = 1$ که با z_{k-1} نمایش می‌دهیم

می‌باشد

بنابراین تساوی فوق به شکل زیر ادامه می‌یابد

$$\sum_{k=1}^{N} z_{k-1}^{t-s} = \begin{cases} N & t-s \ \text{مضربی از } N \text{ باشد} \\ 0 & t-s \neq \ \text{مضربی از } N \end{cases}$$

D_6

اگر $t=s$ آنگاه

$$\langle w_t^N , w_s^N \rangle = N$$

و اگر $t \neq s$ آنگاه

$$\langle w_t^N , w_s^N \rangle = 0$$

حال با استفاده از خاصیت تعامد می‌توان گفت که این مجموعه مستقل است و چون تعداد عناصر آن با بعد فضا برابر است پس یک پایه است بنابراین

$$f = \sum_{k=0}^{N-1} c_k w_k^N$$

که

$$c_k = \langle f , w_k^N \rangle$$

منفی جهت مزدوج

$$= \sum_{i=1}^{N} f_i e^{-(k-1)\frac{2\pi j}{N}(i-1)}$$

✓

D7

این ضرایب از روش DFT به دست آمد

برای هر ضریب C_k نیاز به ~~یک~~ N عمل ضرب مختلط است

که [هر ضرب مختلط خود یک ضرب و یک جمع دارد] یا [چهار ضرب و دو جمع]

و برای محاسبه همه ضرایب N^2 ضرب لازم است

اگر $N=2^m$ آنگاه پیچیدگی محاسباتی این روش

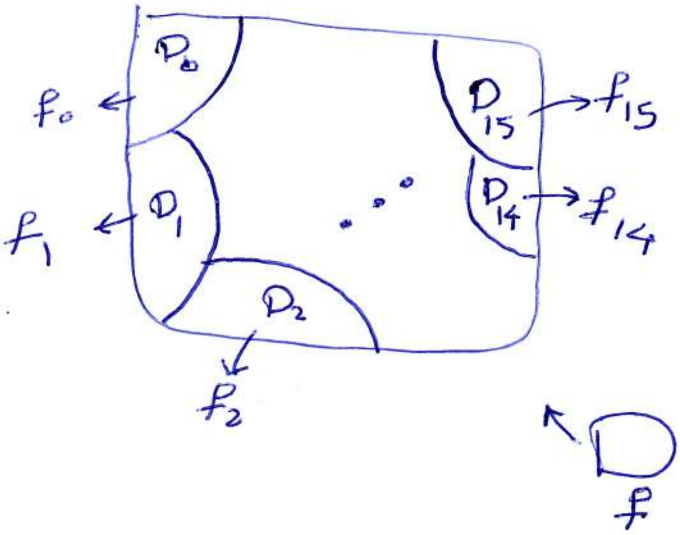
$$(2^m)(2^m)$$

خواهد بود حال الگوریتم FFT را ارائه می‌کنیم که

پیچیدگی آن بسیار کاهش می‌یابد:

مثال فرض کنید که $f = \{f_0, f_1 - f_{15}\}$ داده شده باشد یعنی

$$f : \underset{f}{D} \to \{f_0, \ldots f_{15}\}$$



تقاضا مطلوب است DFT برای f

جواب ابتدا پایه مطلوب برای این f را تشکیل می‌دهیم یعنی

$$\mathcal{B} = \left\{ W_k^{16} \right\}_{k=0}^{15} \qquad W_k^{16} \text{ بزرگ}$$

که هر W_k^{16} یک بردار 16 تایی به شکل زیر است

$$W_k^{16} = \left(w_k^0, w_k^1, w_k^2, \ldots w_k^{15} \right) \qquad \boxed{w \text{ کوچک}}$$

$$w_k = e^{\frac{2\pi j}{16} k} \quad \text{و} \quad w_k^i = (w_k)^i \quad \text{که}$$

اندیس فوقانی توان است

برای محاسبه ضریب C_k این DFT باید از معادله زیر استفاده کرد

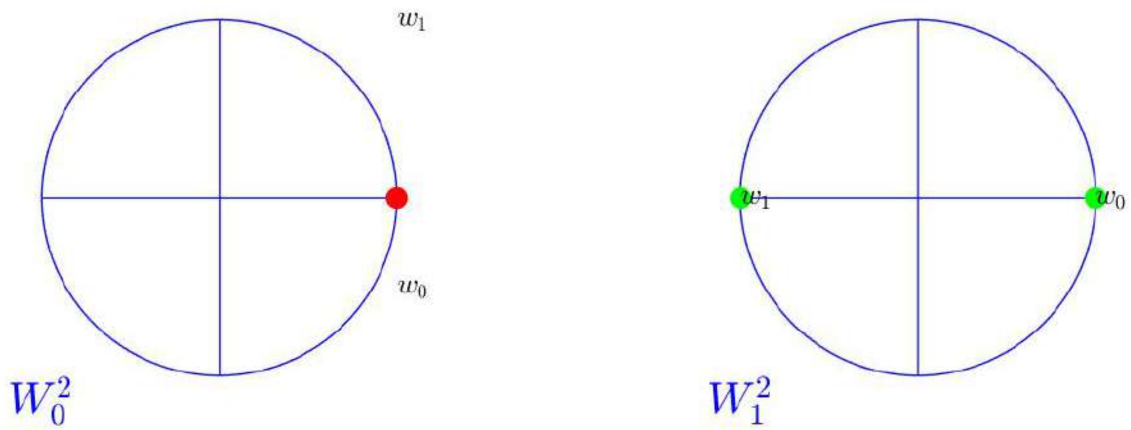
$$C_k = \frac{\langle f, W_k^{16} \rangle}{\langle W_k^{16}, W_k^{16} \rangle} =$$

$$= \frac{1}{n}\left[f_0 \omega_k^0 + f_1 \omega_k^1 + f_2 \omega_k^2 + \cdots f_{14} \omega_k^{14} + f_{15} \omega_k^{15} \right]$$

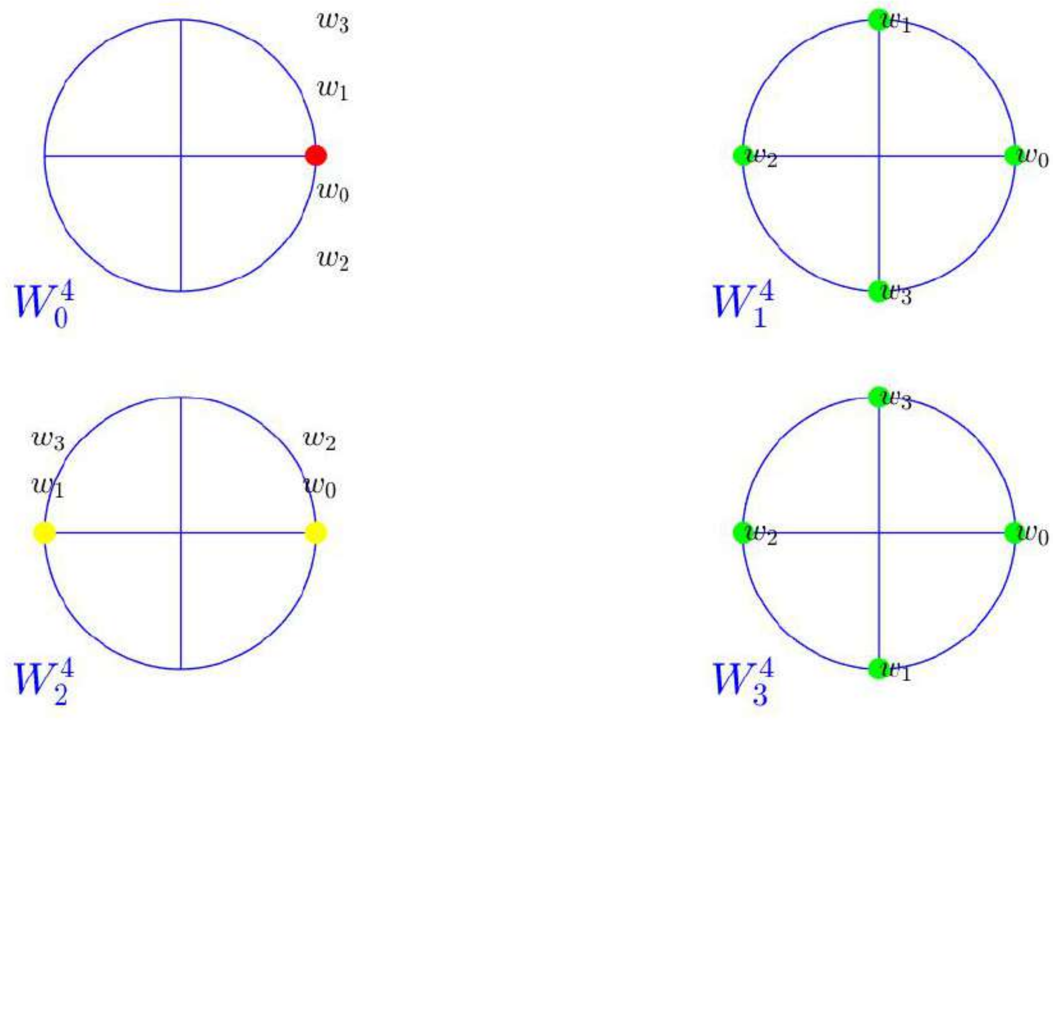
که $\overset{\text{اُمگا}}{\omega_k}$ مزدوج W_k است یعنی

$$\omega_k = \overline{W_k} \Rightarrow \omega_k^i = (\omega_k)^i = \overline{(W_k^i)}$$

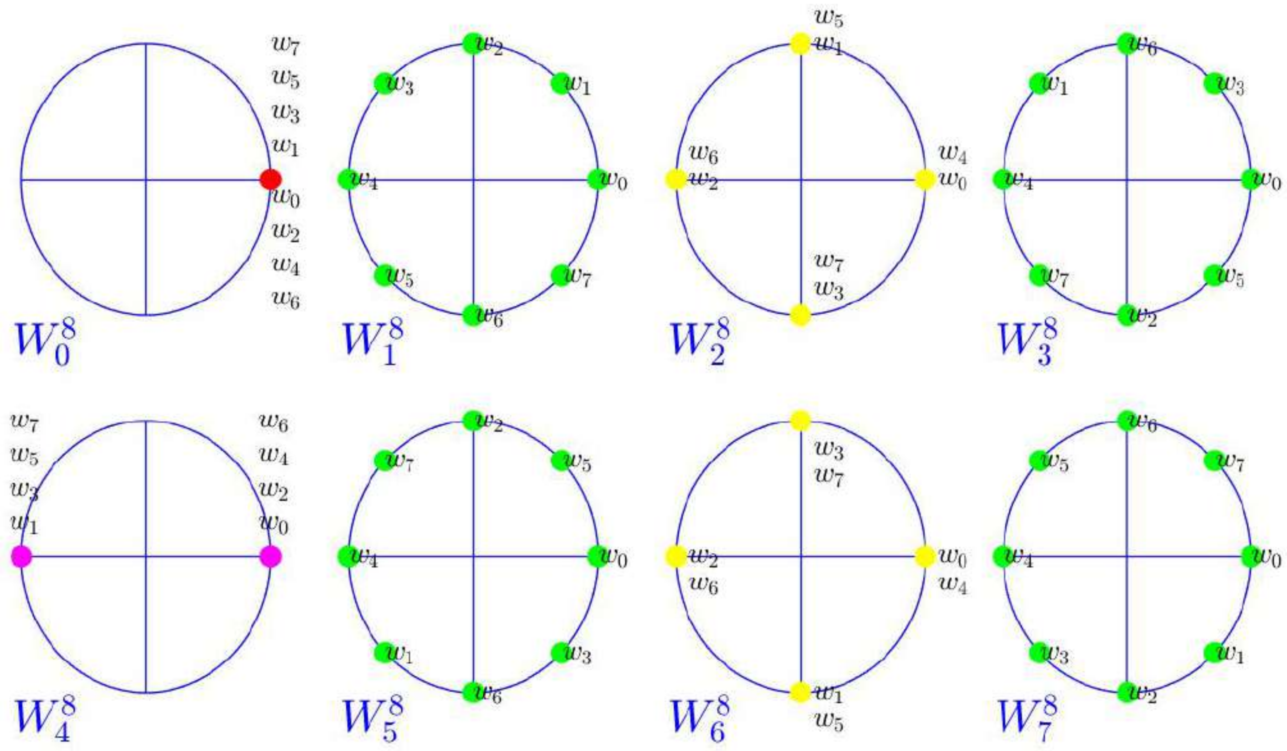
پس لازم است که برای هر C_k متناسب با k بردار W_k^{16} انتخاب و از فرمول بالا محاسبه شود یعنی در هر مرحله 16 ضرب و در جمع 16×16 مرحله ضرب نیاز داریم و در حالت کلی به n^2 ضرب. حال به بررسی روش سریع DFT یعنی FFT می‌پردازیم:

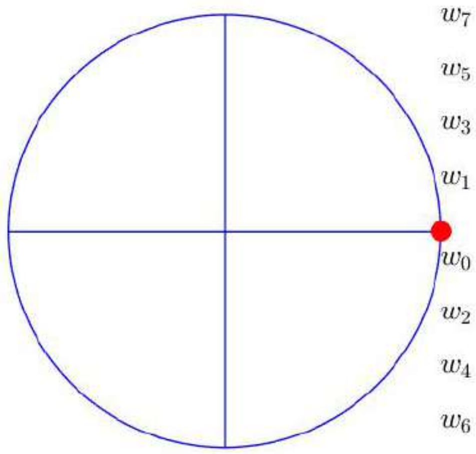


w_1
w_0
W_0^2
w_1
w_0
W_1^2

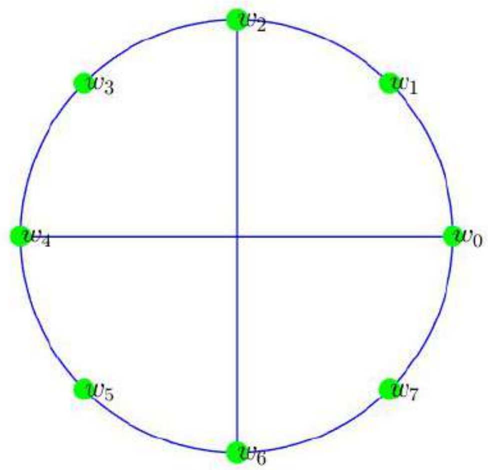


w_3
w_1
w_0
w_2
W_0^4
w_1
w_2
w_0
w_3
W_1^4
w_3
w_1
w_2
w_0
W_2^4
w_3
w_2
w_0
w_1
W_3^4

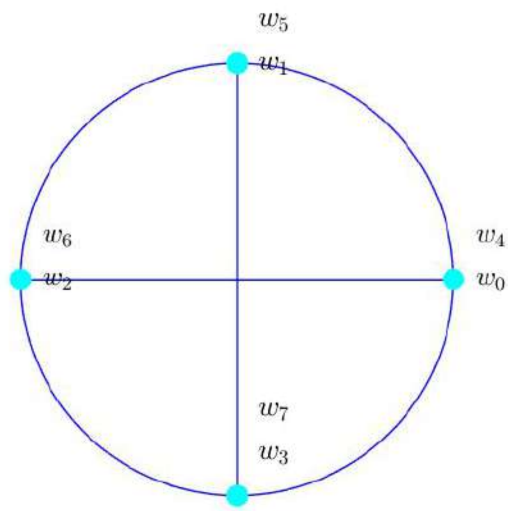

w_7 w_5 w_3 w_1 w_0 w_2 w_4 w_6
W_0^8
w_2 w_3 w_1 w_4 w_0 w_5 w_7 w_6
W_1^8
w_5 w_1 w_6 w_2 w_4 w_0 w_7 w_3
W_2^8
w_6 w_1 w_3 w_4 w_0 w_7 w_5 w_2
W_3^8
w_7 w_5 w_3 w_1 w_6 w_4 w_2 w_0
W_4^8
w_2 w_7 w_5 w_4 w_0 w_1 w_3 w_6
W_5^8
w_3 w_7 w_2 w_6 w_0 w_4 w_1 w_5
W_6^8
w_6 w_5 w_7 w_4 w_0 w_3 w_1 w_2
W_7^8



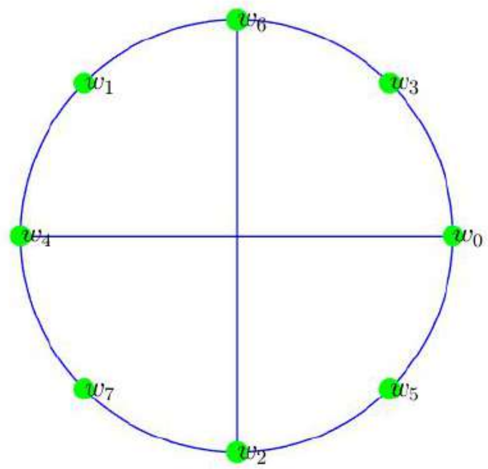
$$W_1^8 = (w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$



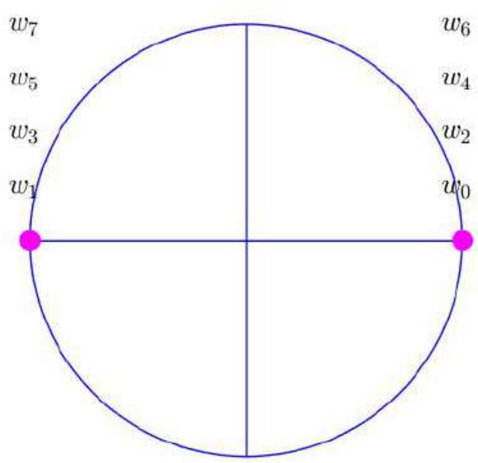
$$W_2^8 = (w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7) = (1, 0.707 + 0.707j, 1j, -0.707 + 0.707j, -1, -0.707 - 0.707j, -1j, 0.707 - 0.707j)$$



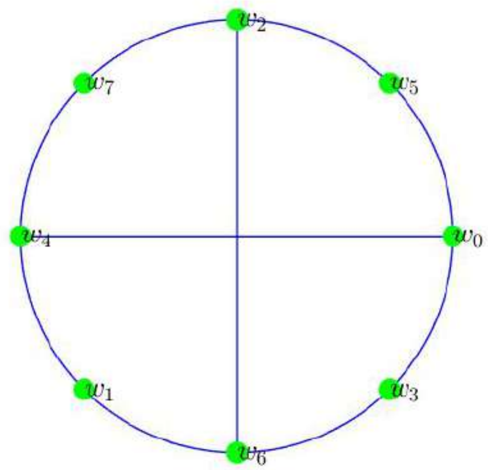
$$W_3^8 = (w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7) = (1, 1j, -1, -1j, 1, 1j, -1, -1j)$$



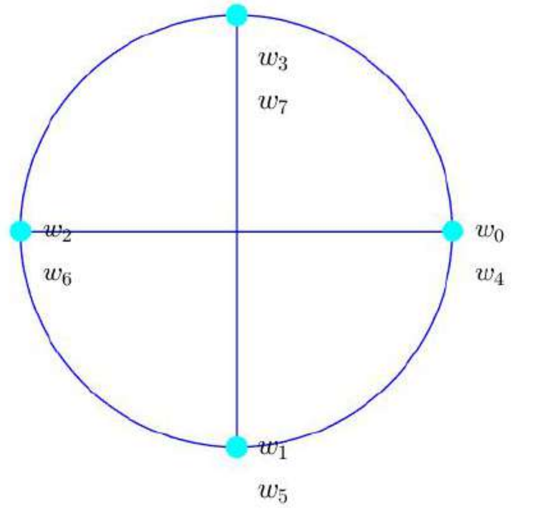
$$W_4^8 = (w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7) = (1, -0.707 + 0.707j, -1j, 0.707 + 0.707j, -1, 0.707 - 0.707j, 1j, -0.707 - 0.707j)$$



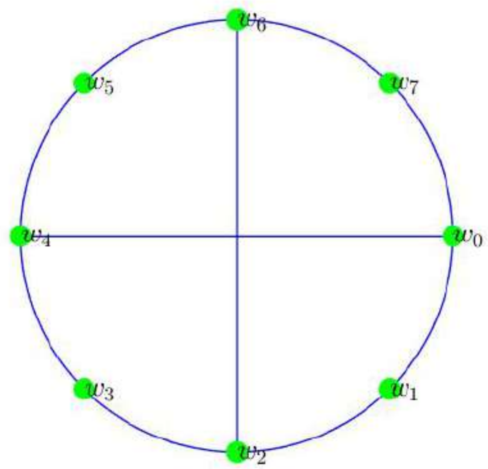
$$W_5^8 = (w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7) = (1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1)$$



$W_6^8 = (w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7) = (1, -0.707 - 0.707j, 1j, 0.707 - 0.707j, -1, 0.707 + 0.707j, -1j, -0.707 + 0.707j)$



$$W_7^8 = (w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7) = (1, -1j, -1, 1j, 1, -1j, -1, 1j)$$



$$W_8^8 = (w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7) = (1, 0.707 - 0.707j, -1j, -0.707 - 0.707j, -1, -0.707 + 0.707j, 1j, 0.707 + 0.707j)$$