1

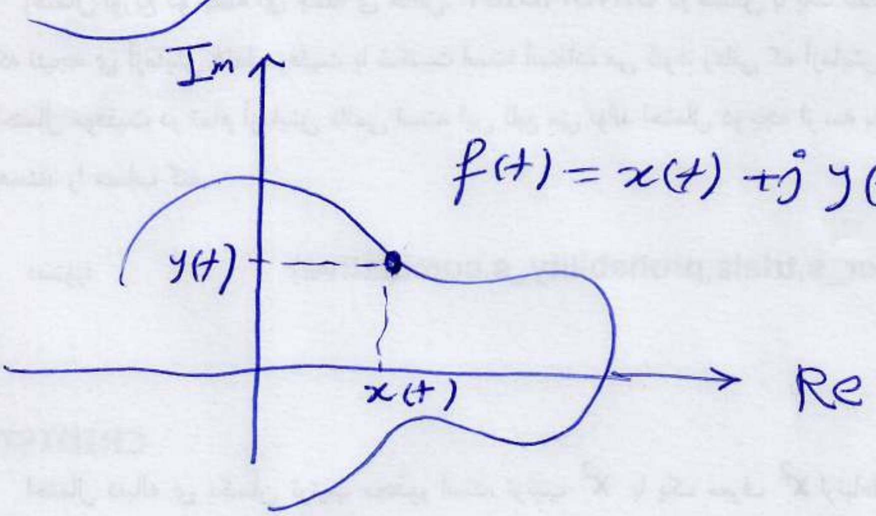
فوریه: سری فوریه پیوسته

خم

اگر یک تابع مختلط را در نظر بگیریم یعنی

$$f(t) = x(t) + j\,y(t) \qquad j = \sqrt{-1} = i$$

آنگاه می‌توان آن را شبیه حرکت یک ذره روی صفحه تلقی کرد



یعنی در هر لحظه می‌توان مختصات x و y وابسته به آن لحظه را مطابق با تابع محاسبه نمود به این حالت می‌گوییم فضای زمان

حال مطلب جالب زیر قابل توجه است که خم‌های ابتدایی موجود است که هر تابع متناوب برآیند جمع جبری آن خم‌های ابتدایی

این خم‌ها عبارت‌اند $\left\{ e^{jk\omega_0 t} \right\}_{k=-\infty}^{k=\infty}, \quad t \in \mathbb{R}$

که ω_0 ثابت است

اگر بزرگترین دوره تناوب این خم های بسته که معروف هستند به

خم های فوریه

را T بنامیم آنگاه رابطه

$$\text{فرکانس پایه} \leftarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \text{دوره تناوب اصلی}$$

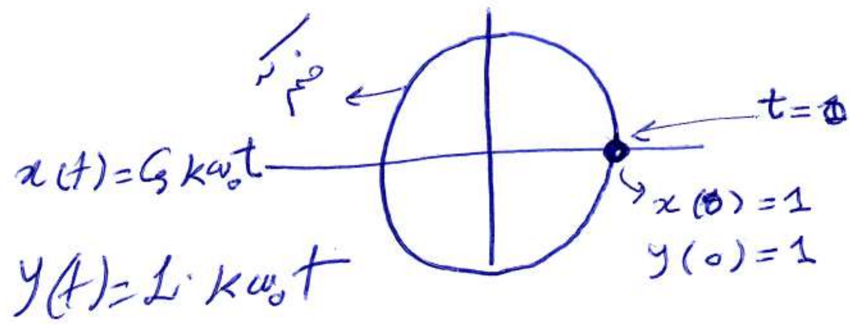
برقرار است:

برای اثبات مطلب فوق ابتدا ماهیت

$$e^{jk\omega_0 t} \qquad t \in \mathbb{R}$$

را بررسی می کنیم

$$e^{jk\omega_0 t} = \cos k\omega_0 t + j \sin k\omega t$$



یعنی دایره واحد که دوره تناوب آن

$$T_k = \frac{2\pi}{k\omega_0} \qquad k \neq 0 \qquad T_0 = 0$$

دوره تناوب
تابع C ثابت
برابر صفر
می‌گیریم

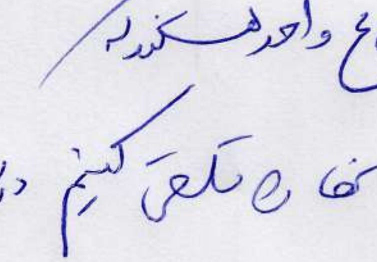
پس $\max|T_k| = \frac{2\pi}{\omega_0}$

دقت کنیم که اگر $k=0$ آنگاه هم فقط $x=1$ و $y=0$ است یعنی ذره ساکن است.

پس هم ω سری فوریه همش دایره با شعاع واحد هستند که اگر به شکل ذره در حال حرکت آن‌ها را تلقی کنیم دارای سرعت حرکت و جهت حرکت متفاوت هستند یعنی

$e^{j\omega_0 t}$ سرعت دو برابر $e^{2j\omega_0 t}$ ذره روی هم

و نصف سرعت و خلاف جهت $e^{-4j\omega_0 t}$ داره.



این خم‌ها برهم عمودند :

زیرا اگر ضرب داخلی

$$\langle f, g \rangle = \int_{-T/2}^{T/2} f \, \bar{g} \, dt$$

$$\langle e^{jk\omega t}, e^{jk'\omega t} \rangle =$$ در نظر بگیریم آنگاه

$k \neq k'$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} e^{jk\omega t} \, e^{-jk'\omega t} \, dt$$

تابع فرد

$$= \int_{-T/2}^{T/2} G\left[(k-k')\omega_0 t\right] dt + \cancel{\int_{-T/2}^{T} \mathcal{L}\left[(k-k')\omega_0 t\right] dt}$$

$$= \frac{1}{k-k'} \, \mathcal{L}\left[(k-k')\omega_0 t\right]_{-T/2}^{T/2}$$

$$= \frac{1}{k-k'} \left(\mathcal{L}\left[(k-k')\omega_0 \frac{\pi}{\omega_0}\right] - \mathcal{L}\left[(k-k')\omega_0 \times \left(\frac{-\pi}{\omega_0}\right)\right] \right)$$

$$= 0$$

(5)

و اگر $k = k'$

$$\langle e^{j\omega_0 kt} \; e^{jk\omega_0 t} \rangle$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} e^{j\omega_0 kt} \, e^{-jk\omega_0 t} \, dt = T$$

در آنالیز فوریه اثبات می‌شود که این مجموعه ازهم‌ها یک پایه متعامد است که از اثبات آن به دلیل نیاز پیش‌نیازهای متعدد صرف‌نظر می‌کنیم [مرجع کتاب آنالیز فوریه والتر رودین]

حال اگر f یک تابع متناوب با دوره T باشد می‌توان نوشت

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \, e^{jk\omega_0 t}$$

این عمل یعنی انتقال فضای زمان به فضای فرکانس‌ها $\{k\omega_0\}_{k=-\infty}^{+\infty}$

6

به دلیل متعامد بودن . خانواده فوریه خواهیم نوشت

$$f(t) = \cdots + c_{-2}\, e^{-j2\omega_0 t} + c_{-1}\, e^{-j\omega_0 t} + c_0$$

$$+\, c_1 \cdot e^{j\omega_0 t} + c_2\, e^{j\omega_0 t} + \cdots \quad e^{jk\omega_0 t} + \cdots$$

$$\langle f(t), e^{jk\omega_0 t} \rangle = \cancel{\cdots + c_{-2} \langle e^{-2j\omega_0 t}, e^{kj\omega t} \rangle}^{0}$$

$$+\, \cancel{c_{-1} \langle e^{-j\omega t}, e^{jk\omega_0 t} \rangle}^{0} + \cancel{c_0 \langle 1, e^{jk\omega_0 t} \rangle}^{0} + \cancel{c_1 \langle e^{j\omega_0 t}, e^{jk\omega_0 t} \rangle}^{0}$$

$$+\, \cancel{c_2 \langle e^{j2\omega_0 t}, e^{jk\omega_0 t} \rangle}^{0} + \cdots + c_k \underbrace{\langle e^{jk\omega_0 t}, e^{jk\omega_0 t} \rangle}_{T} + \cdots$$

$$\boxed{c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-jk\omega_0 t}}$$

ضریب هارمونی k ام

اگر $f(t) \in \mathbb{R}$ یعنی قسمت موهومی نداشته باشد

آنگاه

$$C_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\left[\cos k\omega_0 t - j\sin \omega_0 k t\right] dt$$

$$= \frac{1}{T}\left[\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t - j\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin k\omega_0 t\right]$$

$$= \frac{1}{T}\left[\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(k\omega_0 t) + j\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(-k\omega_0 t)\right]$$

$$= \overline{C_{-k}}$$

$\cos k\omega_0 t$ زوج است بنابراین $\cos k\omega_0 t = \cos(-k\omega_0 t)$

$\sin(k\omega_0 t)$ فرد است بنابراین

$$\sin(k\omega_0 t) = -\sin(-k\omega_0 t)$$

8

$$\overline{c_k e^{j\omega_0 kt}} = \overline{c_k}\, e^{-jk\omega_0 t}$$

پس

$$= c_{-k}\, e^{-jk\omega_0 t}$$

بنابراین

$$c_{-k}\, e^{-jk\omega_0 t} + c_k\, e^{kj\omega_0 t}$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left(c_k\, e^{jk\omega_0 t}\right)$$

اگر

$$c_k = a_k - i\, b_k$$

آنگاه

$$c_k\, e^{jk\omega_0 t} =$$

$$= a_k \cos k\omega_0 t - \overset{-1}{i^2} b_k \sin k\omega_0 t$$

$$+ i\left[a_k \sin k\omega t - b_k \cos k\omega t\right]$$

پس

$$\mathrm{Re}\left[c_k\, e^{jk\omega_0 t}\right] = a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)$$

بنابراین

$$f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{kj\omega t}$$

$$+ \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{kj\omega t}$$

$$= c_0 + 2\sum a_k \cos k\omega t$$

$$+ 2 \sum b_k \sin k\omega_0 t$$

که

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega_0 t \, dt$$

و

$$b_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin k\omega_0 t) \, dt$$

بنابراین اگر f کاملا حقیقی باشد

$$f(t) = A_0 + \sum A_k \cos(k\omega_0 t) + \sum B_k \sin[k\omega_0 t]$$

که

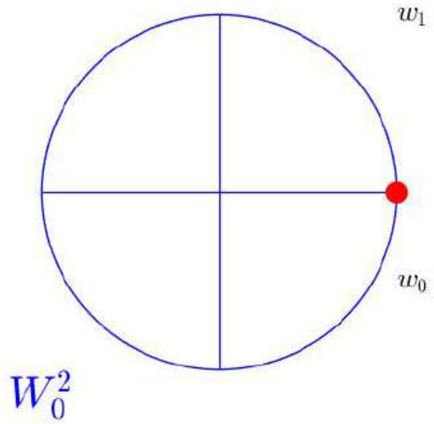
$$A_0 = \frac{\int_{-T/2}^{T} f(t)\, dt}{T}$$

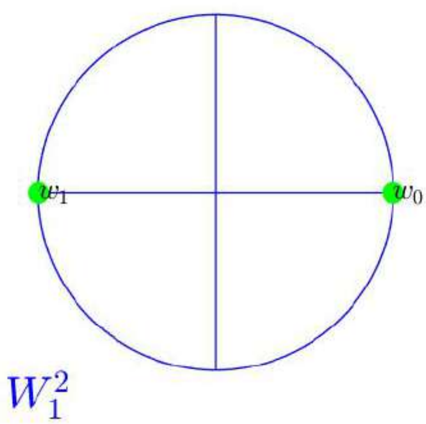
۱۵

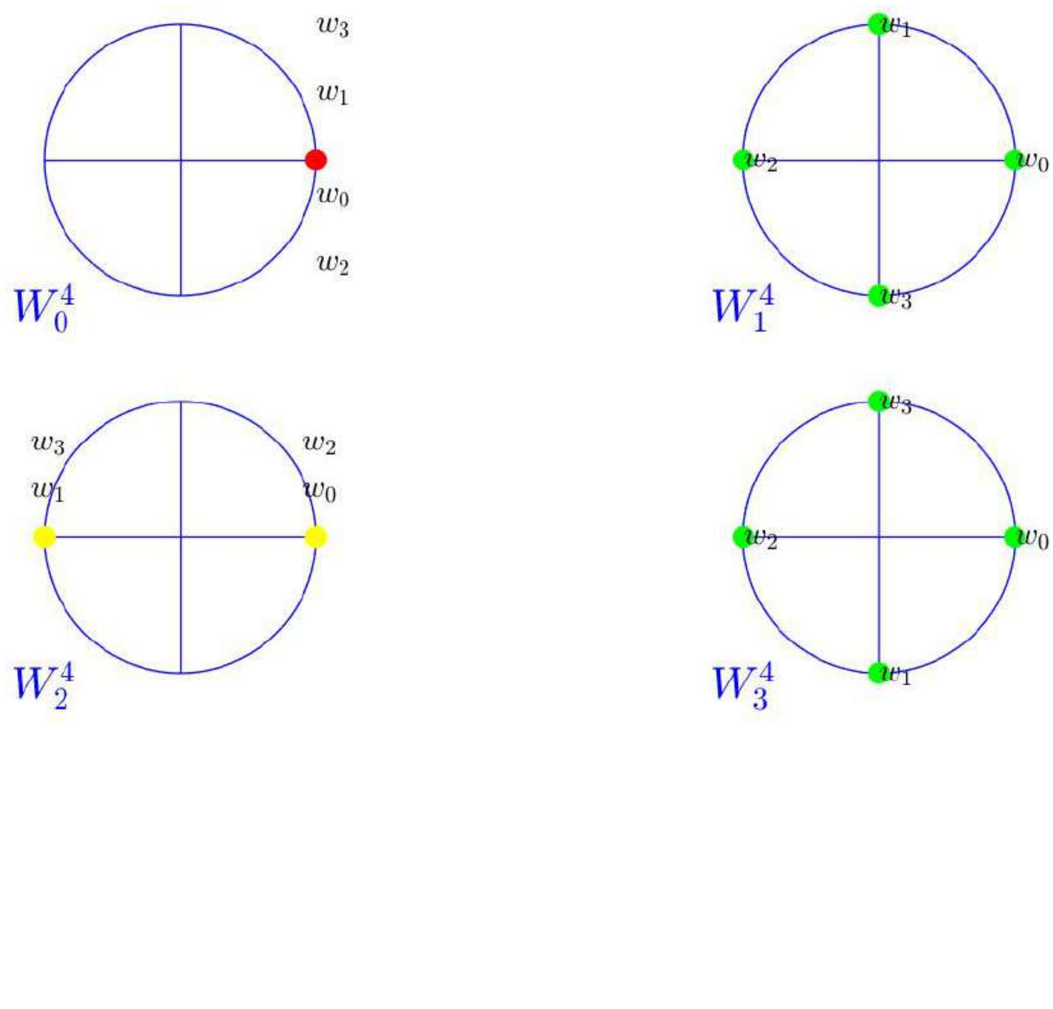
$$A_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega_0 t \, dt$$

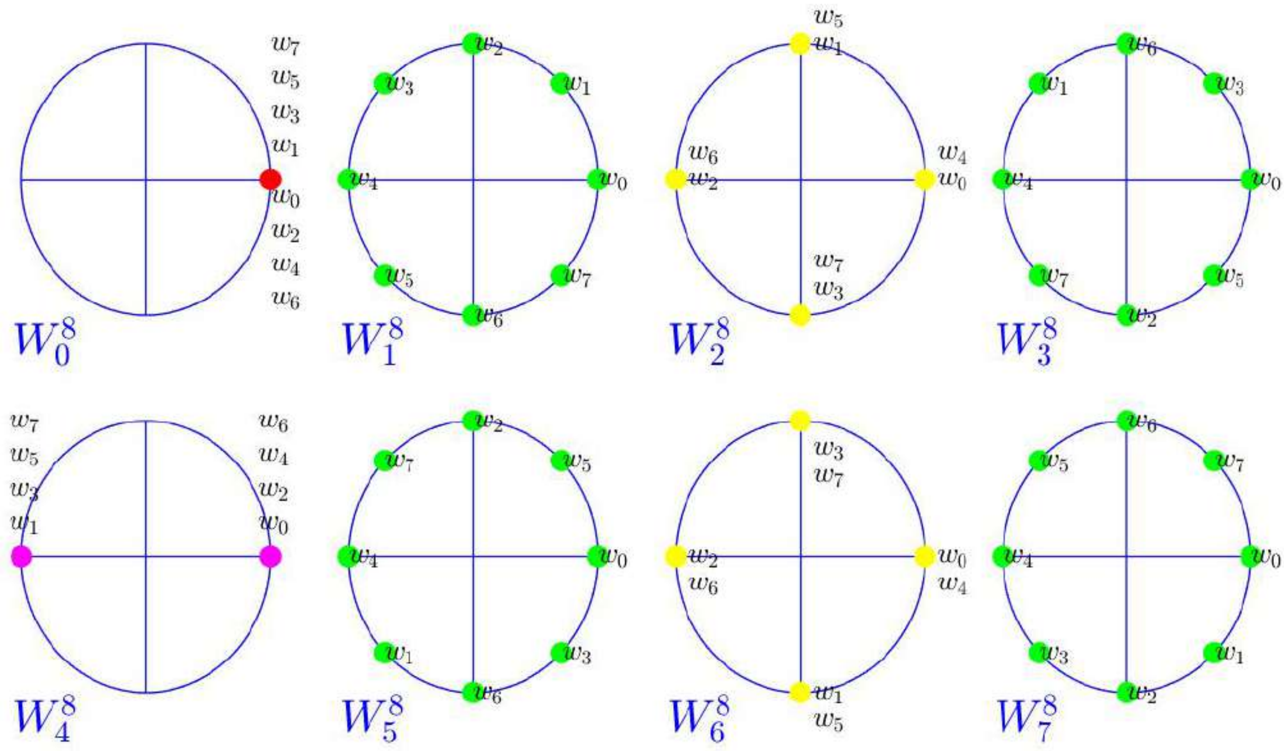
$$B_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin k\omega_0 t \, dt$$

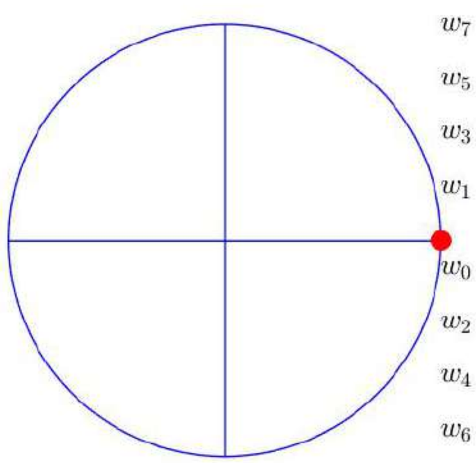
~~که ذکر ایم. مساله در پایه متعامد نیز رفت~~


w_1
w_0
W_0^2

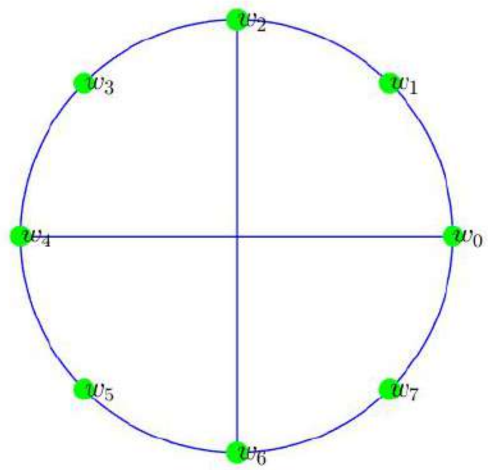

w_1
w_0
W_1^2


w_3
w_1
w_0
w_2
W_0^4
w_1
w_2
w_0
w_3
W_1^4
w_3
w_1
w_2
w_0
W_2^4
w_3
w_2
w_0
w_1
W_3^4

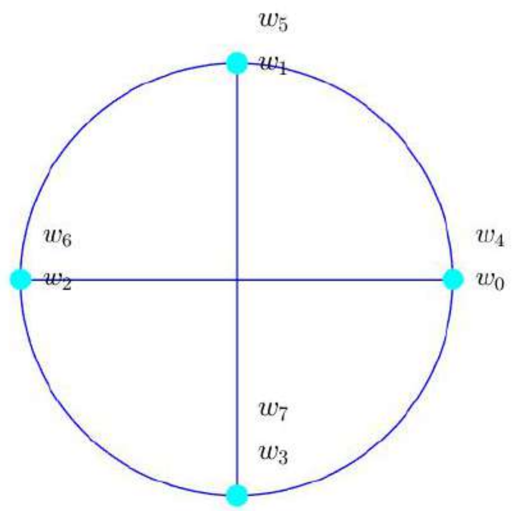

W_0^8
W_1^8
W_2^8
W_3^8
W_4^8
W_5^8
W_6^8
W_7^8



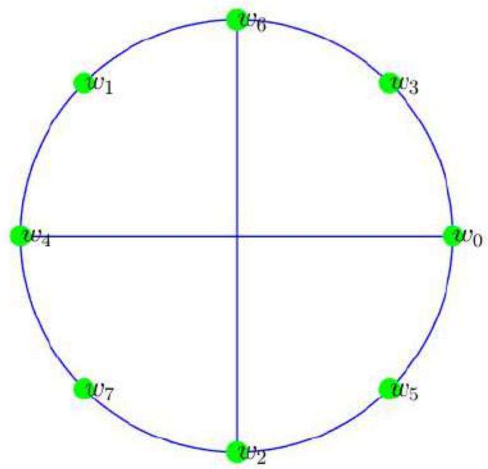
$$W_1^8 = (w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$



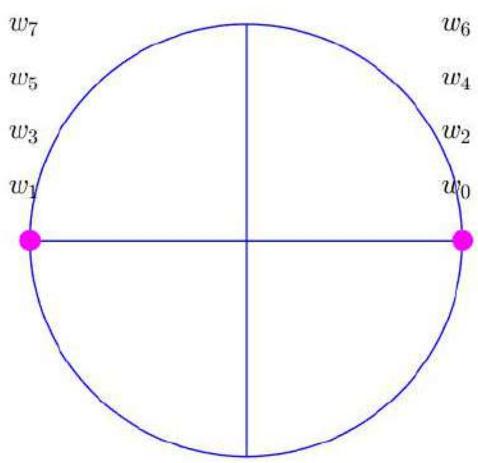
$$W_2^8 = (w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7) = (1, 0.707 + 0.707j, 1j, -0.707 + 0.707j, -1, -0.707 - 0.707j, -1j, 0.707 - 0.707j)$$



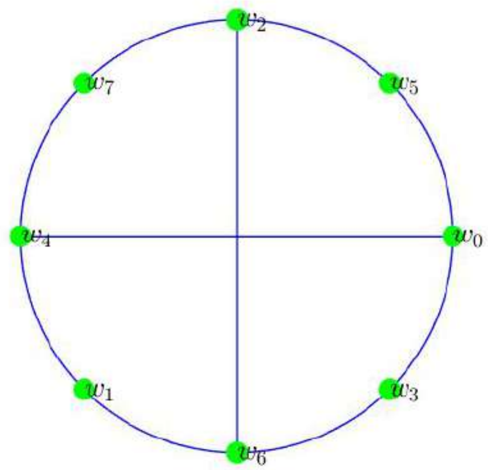
$$W_3^8 = (w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7) = (1, 1j, -1, -1j, 1, 1j, -1, -1j)$$



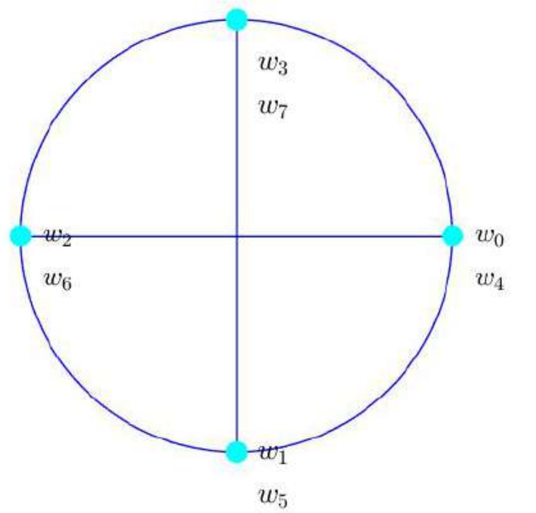
$$W_4^8 = (w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7) = (1, -0.707 + 0.707j, -1j, 0.707 + 0.707j, -1, 0.707 - 0.707j, 1j, -0.707 - 0.707j)$$



$$W_5^8 = (w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7) = (1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1)$$



$W_6^8 = (w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7) = (1, -0.707 - 0.707j, 1j, 0.707 - 0.707j, -1, 0.707 + 0.707j, -1j, -0.707 + 0.707j)$



$$W_7^8 = (w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7) = (1, -1j, -1, 1j, 1, -1j, -1, 1j)$$