(1)

فرض کنیم که V یک فضای برداری با میدان $\underbrace{\mathbb{R} \text{ یا } \mathbb{C}}_{F}$ باشد آنگاه

تابع

$$T: V\times V \to F$$

با شرایط زیر یک ضرب داخلی است

1) $$T(x,y)=\overline{T(y,x)}$$ اگر $F=\mathbb{C}$

و اگر $F=\mathbb{R}$ نیازی به مزدوج نیست

2) $$T(\alpha x_A + x_B, y) = \alpha T(x_A, y) + T(x_B, y)$$

$\alpha\in F$

3) $$T(x,x)\geq 0 \quad \text{و} \quad T(x,x)=0 \iff x=\vec{0}$$

اگر $F=\mathbb{R}$ آنگاه شرط 2 را می‌توان اینگونه هم نوشت:

$$T(x,\alpha y^A + y^B) = \alpha T(x,y^A) + T(x,y^B)$$

مثال: فرض کنیم که $V=\mathbb{R}^2$ و $F=\mathbb{R}$ ، $x=(x_1,x_2)$ و $y=(y_1,y_2)$

آنگاه تابع زیر

$$T(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

یک ضرب داخلی است:

زیرا شرط تقارن برقرار است.

۲ T

ب) اگر فرض کنیم که

$$X = (x_1, x_2) \text{ و } Y_A = (y_1^A, y_2^A) \text{ و } Y_B = (y_1^B, y_2^B)$$

$$T(X, \alpha Y_A + Y_B) = x_1(\alpha y_1^A + y_1^B) + x_2(\alpha y_2^A + y_2^B)$$

$$= \alpha\left[x_1 y_1^A + x_2 y_2^A\right] + \left[x_1 y_1^B + x_2 y_2^B\right]$$

$$= \alpha T(X, Y_A) + T(X, Y_B)$$

به دلیل متقارن بودن بررسی یکی از شروط کافی است.

پ: اگر $X = (x_1, x_2)$ آنگاه

$$T(X, X) = x_1^2 + x_2^2 \geq 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 0 \iff x_1 = 0,\ x_2 = 0$$

پس تابع $T(X, Y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ یک ضرب داخلی است.

درک شهودی: فرض کنید می‌خواهیم به یک زمین مستطیل شکل قیمتی نسبت دهیم

این زمین یک طول دارد به نام x و یک عرض به نام y. بدیهی است اگر طول این

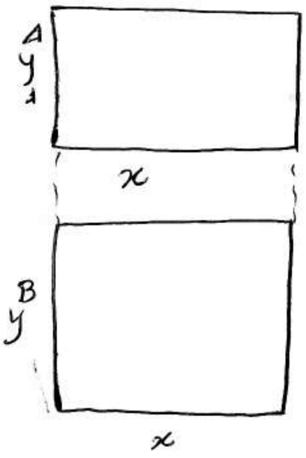
زمین یا عرض آن را دوبرابر کنیم قیمت دوبرابر بشود یعنی

اگر تابع $T(x, y)$ قیمت باشد آنگاه

عدد

$$T(\alpha x, y) = \alpha T(x, y) \quad \text{یا} \quad T(x, \alpha y) = \alpha T(x, y)$$

اگر دو زمین با طول یکسان و با عرض های متفاوت داشته باشیم آنگاه



$\rightarrow T(x, y^A)$

$\rightarrow T(x, y^B)$

و به قیمت کل دو زمین

$$T(x, y^A + y^B) = T(x, y^A) + T(x, y^B)$$

و به همین شیوه برای عرض ثابت بنابراین مفهوم دو خطی بودن کامل گفته می شود

از طرفی دیگر در قیمت گذاری اول طول یا اول عرض در محاسبه بودن هم ثابت

به عبارتی بهتر طول و عرض الویتی بر یکدیگر ندارد یعنی

$$T(x, y) = T(y, x)$$

پس متقارن بودن حاصل می شود.

حال اگر $x=1$ و $y=1$ آنگاه $T(1, 1) = c$

بنابراین $T(1, y) = y T(1, 1) = cy$

و $T(x, y) = x T(1, y) = cxy$

قیمت زمین به راحتی به دست آمد که در واقع فرمول مساحت است

در این مثال چون x, y و ... بنابراین شرط ج همواره صحیح است و از این مثال نکته

استنباط می شود.

-۱

مثال دیگر :

فرض کنید که $V=\mathbb{R}^2$ با میدان $\mathbb{R}$ باشد نشان دهید تابع زیر یک ضرب داخلی است :

$$T: V \times V \to \mathbb{R} \quad T(x,y) = 2[x_1y_1 + x_2y_2] + x_1y_2 + x_2y_1$$

$$T(x,y) = 2[x_1y_1 + x_2y_2] + x_1y_2 + x_2y_1 = 2[y_1x_1 + y_2x_2] + y_1x_2 + y_2x_1$$

$$= T(y,x)$$

تقارن

دو خطی بودن

$$T(x, \alpha y^A + y^B) = 2[x_1(\alpha y_1^A + y_1^B) + x_2(\alpha y_2^A + y_2^B)]$$

$$+ x_1[\alpha y_2^A + y_2^B] + x_2[\alpha y_1^A + y_1^B]$$

$$= \alpha\left[2(x_1y_1^A + x_2y_2^A + x_1y_2^A + x_2y_1^A)\right] + \left[2(x_1y_1^B + x_2y_2^B) + x_1y_2^B + x_2y_1^B\right]$$

$$= \alpha T(x, y^A) + T(x, y^B) \checkmark$$

شرط سوم: معین مثبت بودن

$$T(x,x) = 2[x_1x_1 + x_2x_2] + x_1x_2 + x_2x_1$$

$$= [x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2] + x_1^2 + x_2^2 = \underbrace{(x_1+x_2)^2}_{+} + x_1^2 + x_2^2 \geq 0$$

$$T(x,x) = 0 \Rightarrow (x_1+x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 0$$

پس این یک ضرب داخلی است

مثال دیگر: فرض کنیم که V یک فضای بردار C^2 و میدان C است تابع زیر یک ضرب داخلی است

$$T(x,y): C^2 \times C^2 \to C \qquad T(X,y) = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2$$

که

$$x_1 = a_1 + ib_1 \qquad y_1 = c_1 + id_1$$

و

$$x_2 = a_2 + ib_2 \qquad y_2 = c_2 + id_2$$

و $\bar{y}_1$ و $\bar{y}_2$ به ترتیب مزدوج y_1 و y_2 است: بررسی شرط اول

$$T(x,y) = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 = \bar{\bar{x}}_1\bar{y}_1 + \bar{\bar{x}}_2\bar{y}_2$$

$$= \overline{\bar{x}_1 y_1} + \overline{\bar{x}_2 y_2} = \overline{\bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2} = \overline{y_1\bar{x}_1 + y_2\bar{x}_2}$$

$$= \overline{T(y,x)}$$

تقارن مزدوج

شرط دوم $\overset{A}{X} = (\overset{A}{x}_1 , \overset{A}{x}_2) , \overset{B}{X} = (\overset{B}{x}_1 , \overset{B}{x}_2) .$

$$T(\alpha \overset{A}{X} + \overset{B}{X} , y) = (\alpha \overset{A}{x}_1 + \overset{B}{x}_1)\bar{y}_1 + (\alpha \overset{A}{x}_2 + \overset{B}{x}_2)\bar{y}_2$$

$$= \alpha [\overset{A}{x}_1 \bar{y}_2 + \overset{A}{x}_2 \bar{y}_2] + [\overset{B}{x}_1 y_1 + \overset{B}{x}_2 y_2] = \alpha T(\overset{A}{X} , y) + T(\overset{B}{X} , y)$$

شرط سوم

$$T(X , X) = x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 = a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b^2 \geq 0$$

$$T(X , X) = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0 \Rightarrow X = (0 + 0i , 0 + 0i) = \vec{0}$$

پس

$$T(X , Y) = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2$$

یک ضرب داخلی است :

اگر $F = \mathbb{R}$ روی $V = \mathbb{R}^2$ آنگاه

$$T(X , Y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

یک ضرب داخلی است که شرح آن در سوال اول رفت .

تمرین 17

ص ۱۱۱ کتاب توماس

قطر درختی ۱۰ اینچ بوده. در طول سال بعد به محیط آن ۲ اینچ اضافه می‌شود.
قطر درخت حدوداً چقدر افزایش یافته است؟ مساحت مقطع عرضی درخت چقدر؟

$$\text{محیط} = C = 2\pi r \longrightarrow \begin{cases} dC = 2\pi dr \\ dr = 2 \end{cases}$$

$$dr = \frac{1}{2\pi} dC \Rightarrow 2dr = \frac{1}{2\pi} dC \Rightarrow$$ افزایش قطر درخت

$$r = \frac{10}{2} = 5 \,,\quad A = \pi r^2 \longrightarrow dA = 2\pi r\, dr = 10\pi\left(\frac{1}{\pi}\right) = 10$$

8)

حال با استفاده از ضرب داخلی یک نرم تعریف می‌شود:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

اثبات فرض کنیم که میدان $\mathbb{K}$ است بررسی شرط اول:

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha \bar{\alpha} \langle x, x\rangle} = \sqrt{|\alpha|^2 \langle x, x\rangle}$$

$$= \underbrace{|\alpha|}_{\text{طول عدد مختلط}} \sqrt{\langle x, x\rangle} =$$

شرط سوم:

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle x, x\rangle} = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$$

شرط سوم

$$\|x+y\|^2 = \sqrt{\langle x+y, x+y\rangle}^2 = \langle x, x\rangle + \langle \cancel{x}, \cancel{y}\rangle + \langle \cancel{y}, \cancel{x}\rangle + \langle y, y\rangle$$

$$= \|x\|^2 + \underbrace{\langle \cancel{x}, \cancel{y}\rangle + \langle \cancel{x}, \cancel{y}\rangle}_{2\,Re\langle x, y\rangle} + \|y\| < \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| \quad \|y\|^2$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{Re\langle x, y\rangle < |\langle x, y\rangle| < \cancel{4}\|x\|\,\|y\|}_{\text{شوارتز}}$$

$$\Rightarrow \|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \Rightarrow \|x+y\| < \|x\| + \|y\|$$