B1

مفهوم ترکیب خطی استقلال و پایه

فرض کنیم که V یک فضای برداری با میدان

اسکالری F باشد و

$$\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots \vec{\alpha}_n\} \subseteq V$$

و $C_1, C_2, \ldots C_n \in F$ آنگاه بردار β به صورت زیر

ترکیب خطی $\vec{\alpha}_1$ و $\vec{\alpha}_2$ و ... $\vec{\alpha}_n$ است

$$\beta = C_1 \vec{\alpha}_1 + C_2 \vec{\alpha}_2 + \cdots C_n \vec{\alpha}_n$$

مثال: فرض کنید که $V = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

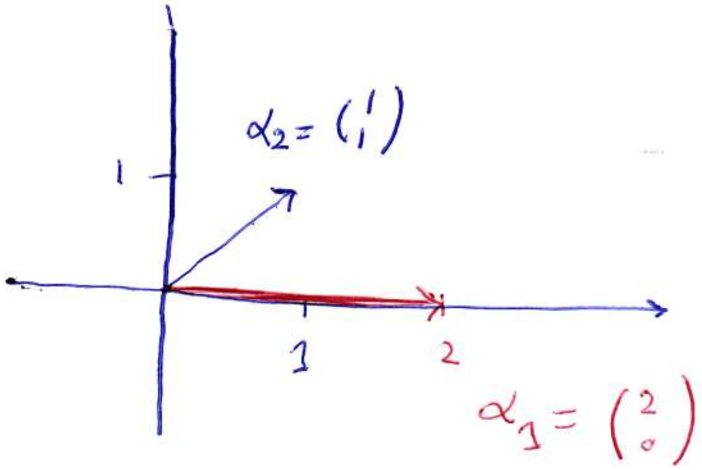
$C_1 = 1$, $C_2 = 2$ آنگاه

$$\beta = 1\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

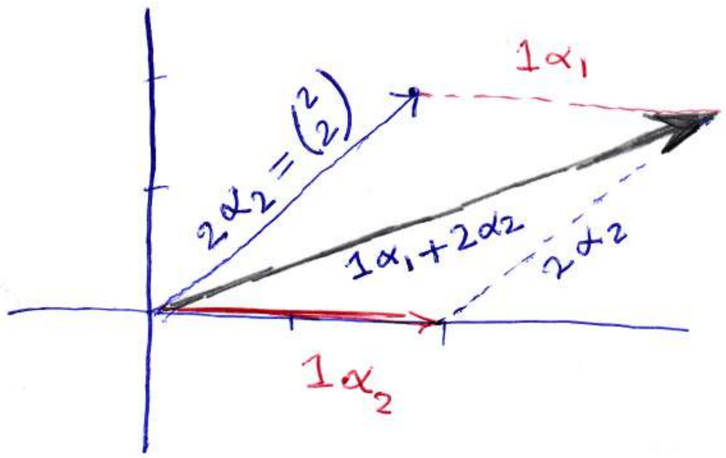
B2

یک ترکیب خطی است از بردارهای α_1 و α_2 .

در تفسیر هندسی ترکیب خطی می‌توان به قانون متوازی الاضلاع اشاره داشت



$$1\alpha_1 + 2\alpha_2 =$$



$$\beta = 1\vec{\alpha}_1 + 2\vec{\alpha}_2$$

یعنی به موازات و اندازه $\overrightarrow{1\alpha_1}$ از انتهای $\overrightarrow{2\alpha_2}$ یک بردار رسم می‌کنیم

و نیز به موازات و اندازه $\overrightarrow{2\alpha_2}$ از انتهای $\overrightarrow{1\alpha_1}$ یک بردار رسم می‌کنیم

محل تقاطع می‌شود بردار β

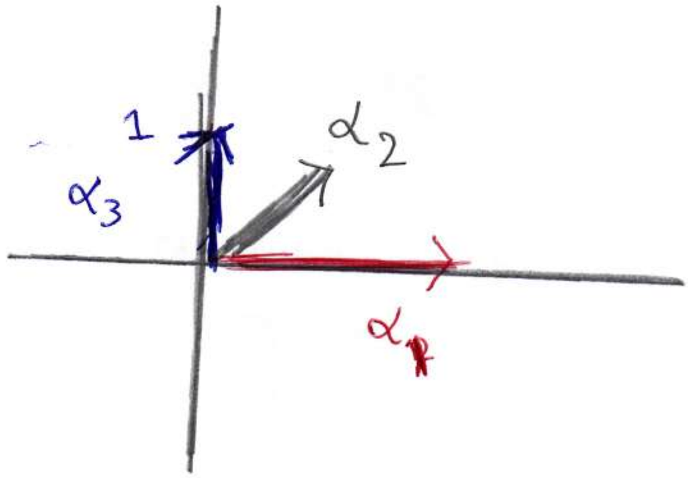
B3

شکل دیگر

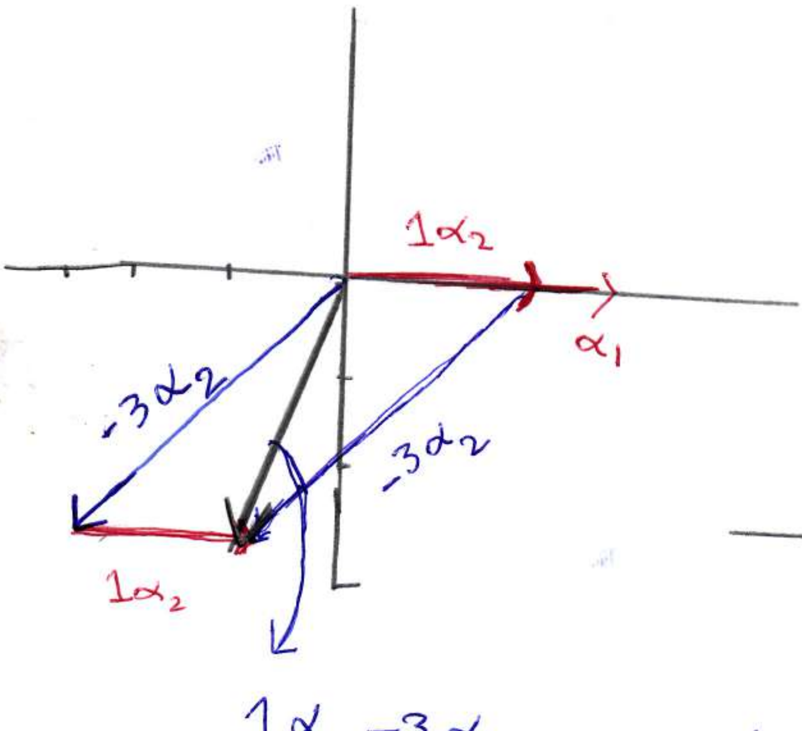
$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$c_1 = 1 \quad c_2 = -3 \quad c_3 = 1$

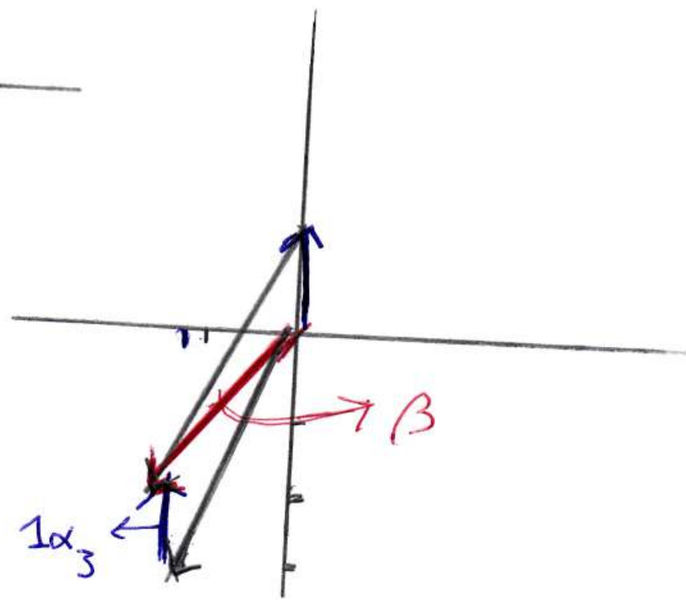
$$\beta = c_1 \vec{\alpha_1} + c_2 \vec{\alpha_2} + c_3 \vec{\alpha_3} = 1\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$



در دو مرحله انجام میدهیم



$1\alpha_1 - 3\alpha_2$



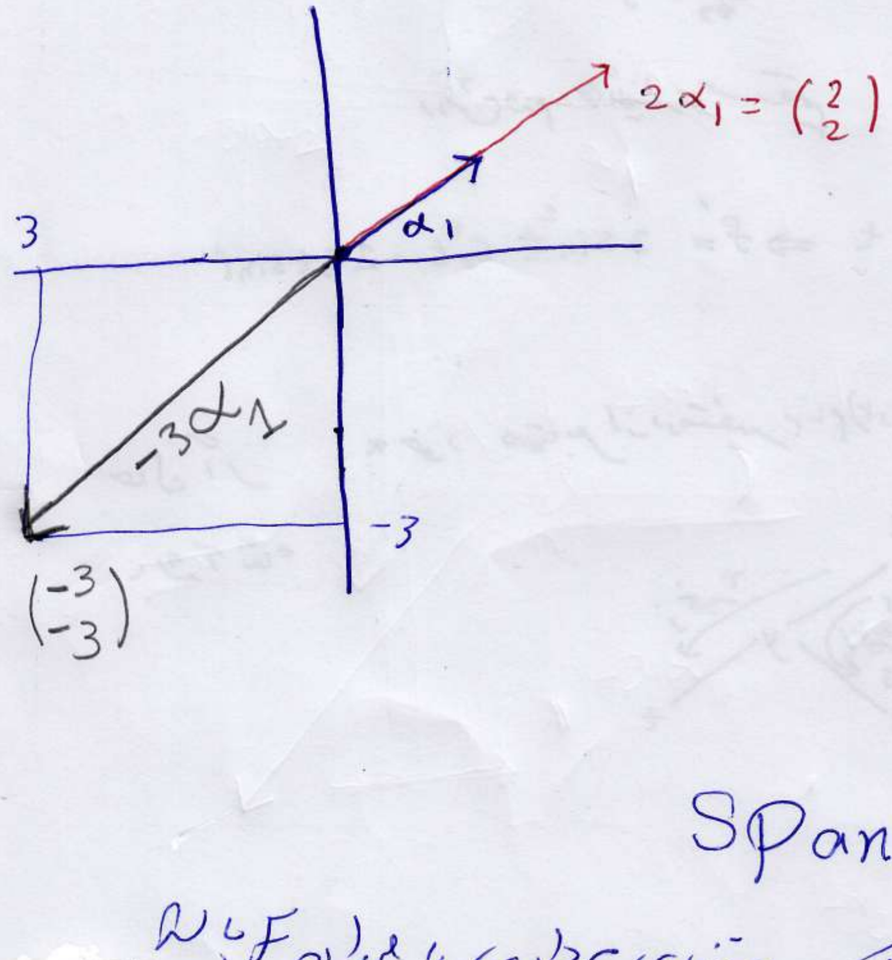
B4

مثال دیگر

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$c \in F$ یک عدد دلخواه است

$$\beta = c\,\alpha_1 = c\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\c\end{pmatrix}$$



مفهوم Span

اگر V یک فضای برداری با میدان F باشد

و $S=\{\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k\}$ آنگاه

$$Span(S) = \left\{ c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \dots c_k\vec{\alpha}_k : c_i \in F \right\}$$

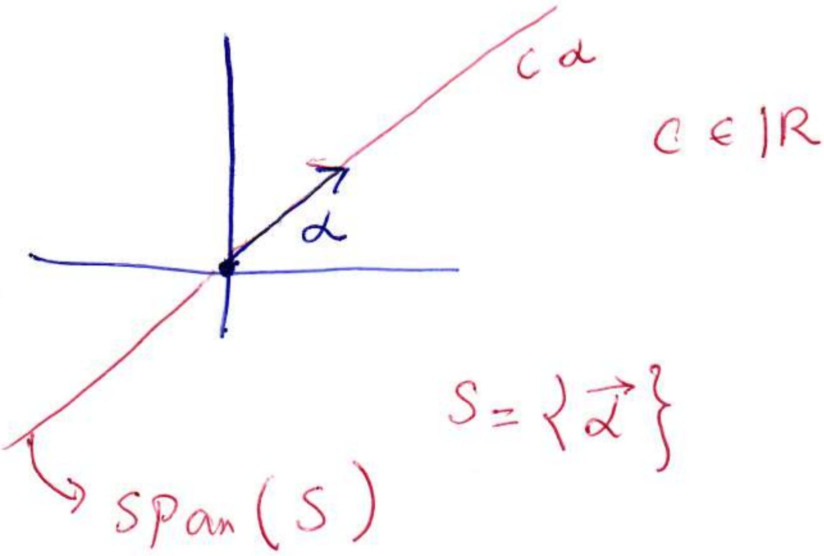
B5

مثال اگر $V=\mathbb{R}^2$ و $F=\mathbb{R}$ و $S=\{\vec{\alpha}\}$

آنگاه

$$Span(S)=\{c\vec{\alpha} : c\in\mathbb{R}\}$$

یعنی یک خط از مبدا عبور می‌کند با راستای $\vec{\alpha}$



مثال اگر $V=\mathbb{R}^2$ و $S=\left\{\binom{2}{0},\binom{1}{1}\right\}$

ثابت کنید که

$$Span(S)=\mathbb{R}^2$$

B3

B6

اثبات: فرض کنید که بردار $B=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$ داده شده است

یعنی y_1 و y_2 معلوم است هدف یافتن c_1 و c_2 به طوری که

$$c_1\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}2c_1+c_2&=y_1\\ c_2&=y_2\end{aligned}$$

این دستگاه در واقع حل شده است زیرا $c_2=y_2$

و $c_1=\frac{y_1-y_2}{2}$ پس

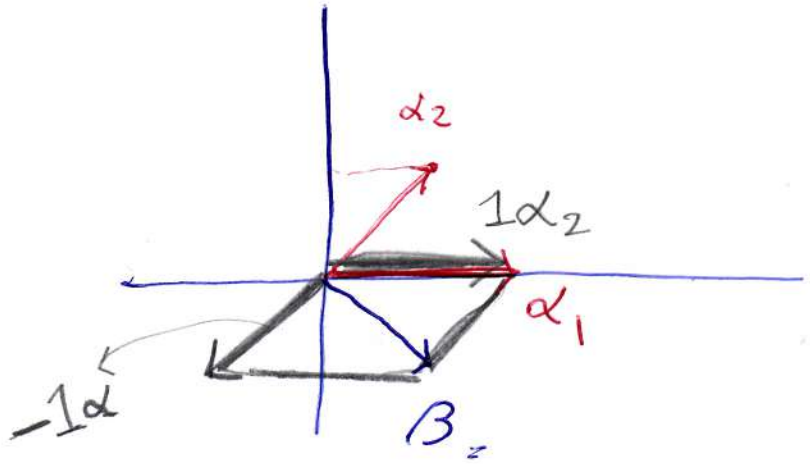
$$\frac{y_1-y_2}{2}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+y_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

پس برای هر بردار $\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$ یک ترکیب خطی از S یافتیم که مسئله قابل حل می‌شد.

تفسیر هندسی فرض کنید $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$

B7

آنگاه $c_1 = \frac{1-(-1)}{2} = 1$ و $c_2 = -2/2 = -1$



مثال اگر $V = \mathbb{R}^2$ و $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ مطلوب است

محاسبه $span(S)$

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{(c_1 + 2c_2)}_{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

همان خط مثال اول کتاب span است این مثال و مثال 2 نشان دهد که افزایش بردارها ممکن است span را ثابت یا افزایش دهد و هیچگاه کاهش نمی‌دهد.

B8 ۱۰۸

مفهوم استقلال:

می‌گوییم مجموعه $S=\{\alpha_1, \dots \alpha_k\}$ مستقل خطی

است هرگاه فقط و فقط ترکیب خطی

که مبدا را تولید می‌کند ضرایب صفر باشد یعنی

$$c_1 \vec{\alpha}_1 + c_2 \vec{\alpha}_2 + \cdots c_k \vec{\alpha}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

مبدا

$$\Longrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_k = 0$$

از طریق هندسی می‌توان به دو گونه استقلال را تفسیر کرد

۰ نخست اگر B به $span(S)$ تعلق داشت

B به صورت یکتا براساس S نوشته شود

چه اگر این نباشد آنگاه ۰

39

$$c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \cdots c_r\vec{\alpha}_r + \cdots c_k\vec{\alpha}_k = \vec{\beta}$$

$$d_1\vec{\alpha}_1 + d_2\vec{\alpha}_2 + \cdots d_r\vec{\alpha}_r + \cdots d_k\vec{\alpha}_k = \vec{\beta}$$

که حداقل برای یک اندیس نظیر r داریم $c_r \neq d_r$ بنابراین

$$\underbrace{(c_1-d_1)}_{f_1}\vec{\alpha}_1 + \underbrace{(c_2-d_2)}_{f_2}\vec{\alpha}_2 + \cdots + \underbrace{(c_r-d_r)}_{f_r}\vec{\alpha}_r + \cdots \underbrace{(c_k-d_k)}_{f_k} = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}}_{\text{مبدا}}$$

یعنی

$$f_1\vec{\alpha}_1 + f_2\vec{\alpha}_2 + \cdots f_r\vec{\alpha}_r + \cdots f_k\vec{\alpha}_k = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}}_{\text{مبدا}}$$

یعنی ترکیب غیر از ضرایب صفر، مبدا را می‌سازد

که خلاف استقلال است.

تفسیر دوم اگر S مستقل باشد آنگاه برای هر بردار

از S که در نظر بگیریم مثلا α_r آنگاه

$$\alpha_r \notin \mathrm{Span}(S-\{\alpha_r\})$$

B10

ج) اگر این نباشد آنگاه بدون از دست دادن کلیت فرض کنیم

که $r=1$ پس ضرایب $c_2 \dots c_k$ هست که

$$c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + \dots c_k\alpha_k = \alpha_1$$

بنابراین

$$-\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots c_k\alpha_k = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}}_{\text{مبدا}}$$

یعنی یک ترکیب خطی غیر از ضرایب صفر مبدا را می‌سازد

که این خلاف استقلال است.

از منظر جبری تعریف استقلال به چه معناست

$$c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \dots c_k\vec{\alpha}_k = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}}_{\text{مبدا}}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11}\\ \\ \alpha_{m1}\end{pmatrix}c_1 + \begin{pmatrix}\alpha_{12}\\ \\ \alpha_{m2}\end{pmatrix}c_2 + \dots + \begin{pmatrix}\alpha_{1k}\\ \vdots \\ \alpha_{mk}\end{pmatrix}c_k = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}}_{\text{مبدا}}$$

B11

یعنی دستگاه مذکور فقط جواب

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$$

را داشته باشد یعنی:

در عملیات حذفی گاوس - جردن

ستون آزاد نداشته باشیم

چه اگر ستون آزاد به وجود آید یعنی جواب غیر از ضرایب صفر

چند مثال

آیا $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ مستقل خطی است

جواب خیر

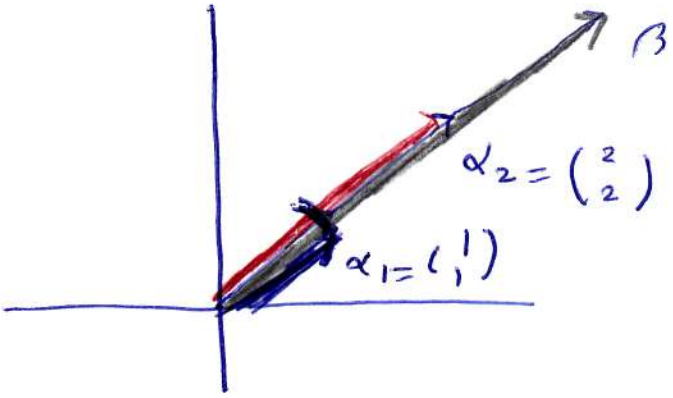
زیرا اگر $c_1 = -2$ و $c_2 = 1$ آنگاه

$$-2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

پس یک ضرایب غیر صفری موجود است که مبدأ را می‌سازد

B|12

تفسیر هندسی



اگر $\beta = \binom{3}{3}$ آنگاه $\beta \in span(S)$

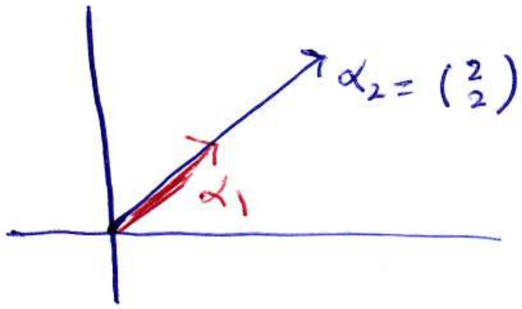
ولی

$\beta = 3\alpha_1$

$\beta = \frac{3}{2}\alpha_2$. $\beta = \alpha_1 + \alpha_2$ و .....

پس β یکتا نوشته نشد پس عدم استقلال اینجا مشاهده می‌شود.

تفسیر دوم اگر $S-\{\alpha_1\}$ یعنی $\{\alpha_2\}$ را در نظر بگیریم



$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha_2$

یعنی $\alpha_1 \in span(S-\{\alpha_1\} = span(\{\alpha_2\})$

B13

پس در فضای 2 بعدی اگر یک بردار مضرب دیگری باشد

آن مجموعه وابسته است :

از منظر جردن

$$A_1=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A_2=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ستونی نمی تواند کاندیدای لولا شود زیرا ستون اول قبلاً انتخاب

شده و ستون دوم هم به دلیل آنکه زیر ستون آن در مرحله دوم

فاقد عضو غیر صفر است پس کاندید نیست

بنابراین ستون آزاد داریم : بنابراین وابسته خطی است

مثال دوم آیا مجموعه $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ مستقل خطی است

1) تعریف مستقیم

$$c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{مبدا}$$

$$2c_1 + c_2 = 0$$

$$c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \xRightarrow{\text{در معادله اول}} c_1 = 0$$

تفسیر اول هندسی

اگر $\beta = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ درمبحث span مثال دیدیم

که $$\beta = \frac{y_1 - y_2}{2}\vec{\alpha}_1 + y_2\vec{\alpha}_2$$

B14

نوشته شد یعنی به صورت یکتا.

تفسیر دوم هندسی چون

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq c\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

یعنی هیچ برداری در span دیگری نیست

منظر جبری

لولا   لولا

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \to A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فاقد ستون آزاد پس مستقل است

یعنی در $\mathbb{R}^2$ هر دو بردار غیر هم راستا مستقل است.

B15

آیا مجموعه $S=\left\{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ مستقل است

جواب خیر زیرا

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

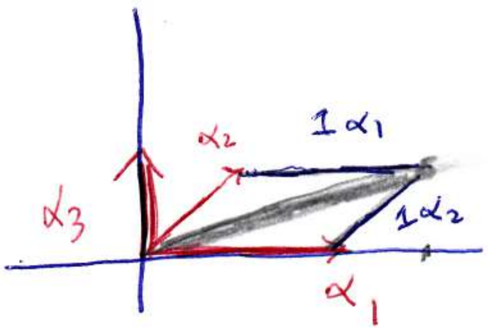
مبدا

یعنی ضرایب غیرصفری موجود است که مبدا را می سازد

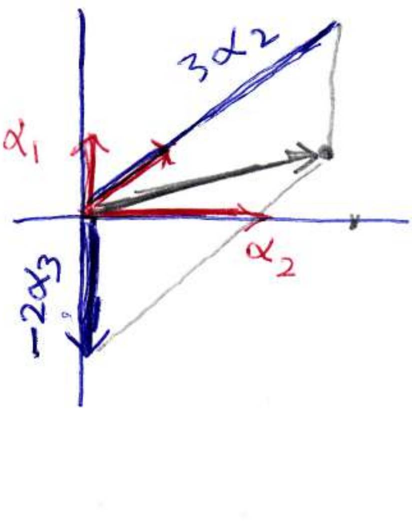
تفسیر هندسی اول اگر $\beta=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ آنگاه

$$\beta = 1\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$ ترکیب اول

و $$\beta = 0\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$ ترکیب دوم



ترکیب اول



تفسیر هندسی دوم

B16

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in \mathrm{span}\left(S-\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}\right) = \mathrm{span}\left(\left\{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}\right)$$

زیرا $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

و برای α_1 و α_3 به شیوه مشابه این مطلب صحیح است

هرچند که برای یکی کافی است مثال نقض.

منتظر جردن

$$\begin{array}{ccc} \text{لولا} & \text{کاندید لولا} & \text{هرزه} \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

کاندید لولا (نه)   لولا

$$\begin{array}{ccc} \text{لولا} & & \text{لولا} \end{array}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ستون دوم در این مرحله نمی‌تواند لولا شود چون مرحله سوم هستیم

و سطر سوم موجود نیست پس آن آزاد است و این یعنی

وابستگی ok

B17

مثال آیا در $V=\mathbb{R}^3$ آیا مجموعه

$$S=\left\{\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}8\\5\\1\end{pmatrix}\right\}$$

مستقل است :

از منظر جردن بررسی می‌کنیم

کاندید لولا

$$\begin{bmatrix}4 & 8\\ 2 & 5\\ 3 & 1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 0 & -5\end{bmatrix}$$

لولا

تنها کاندید لولا

پس ستون آزاد نداریم مجموعه مستقل است

مثال آیا در $V=\mathbb{R}^3$ آیا مجموعه

$$S=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

مستقل است

B18

هر سه ستون کاندید لولا

$$A_1=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لولا

سطر جردن

$\Downarrow$

هر دو کاندید لولا

$$A_2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

کاندید

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_3\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تنها ستون کاندید لولا اما امکان لولا شدن ندارد زیرا در زیر ستون این کاندید یعنی از سطر سوم به بعد فقط عنصر صفر موجود است پس ستون آزاد محسوب می‌شود و وابسته خطی

از منظر تعریف

$$1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}-1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

یعنی ترکیب ضرایب غیر صفر بردارها صفر است

B19

سوال اگر S مستقل باشد $span(S)$ چگونه تعریف می‌شود

این سوال را با یک مثال توضیح می‌دهیم

$$S=\left\{\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}8\\5\\1\end{pmatrix}\right\}$$

دیدیم این مجموعه مستقل است می‌خواهیم بدانیم کدام $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ در $span(S)$ قرار دارد بنابراین فرض کنیم که Y داده شده

$$c_1\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}8\\5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c}4&8&y_1\\2&5&y_2\\3&1&y_3\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cc|c}1&2&\frac{y_1}{2}\\2&5&y_2\\3&1&y_3\end{array}\right]$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{cc|c}1&2&\frac{y_1}{2}\\0&1&y_2-y_1\\0&-5&y_3-\frac{3}{2}y_1\end{array}\right]=A_2$$

B20

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & \frac{y_1}{2} \\ 0 & -5 & y_3 - \frac{3}{2}y_1 \\ 0 & 1 & y_2 - y_1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & \frac{y_1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{10}y_1 - \frac{1}{5}y_3 \\ 0 & 1 & y_2 - y_1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{10}y_1 + \frac{2}{5}y_3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{10}y_1 - \frac{1}{5}y_3 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{10}y_1 + \frac{1}{5}y_3 + y_2 \end{array}\right]$$

این دستگاه زمانی جواب دارد که

$$\frac{-13y_1}{10} + y_2 + \frac{1}{5}y_3 = 0$$

یعنی

$$\mathrm{Span}(S) = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \frac{-13}{10}y_1 + y_2 + \frac{1}{5}y_3 = 0 \right\}$$

یعنی $Span(S)$ یک ابرصفحه است

B21

پایه: اگر که یک مجموعه مستقل باشد و

$$Span(S) = V$$

یعنی که مستقل بتواند فضا را تولید کند آنگاه می‌گوییم که یک پایه

نکته: در $\mathbb{R}^n$

چون که یک مجموعه مستقل است در روش جردن امکان ستون آزاد نیست اما اگر مثل مثال قبل سطر صفر داشته باشد

چون x ها به صورت سمبلیک نوشته می‌شوند برای سطر های سطر صفر - باید سمت راست نیز صفر باشد یعنی

یک دستگاه از x ها خواهیم داشت و دقیقاً جواب است

همه فضای $\mathbb{R}^n$ نخواهد بود زیرا تنها دستگاهی که جواب آن $\mathbb{R}^n$ است دستگاهی است که ماتریس ضرایب آن صفر باشد سمت راست نیز صفر

B22

در مثال قبل

$$-\frac{13}{10}y_1 + y_2 + \frac{1}{5}y_3 = 0$$

دستگاه حاصل از سطر صفر بود بدیهی است که جواب این دستگاه همه $\mathbb{R}^3$ نیست.

پس یک مستقل زمانی می‌تواند پایه باشد که در پایان عملیات جردن سطر صفر نداشته باشد یعنی در هر سطر آن یک عدد لولا موجود باشد به عبارتی بهتر به ماتریس همانی برسیم یا ماتریسی که اگر ستونهای آن را جابجا کنیم همانی شود.

مثال

$$\left\{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

یک پایه است

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\0 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

همانی

B23

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$ حال اگر

ستون لولا — لولا

که با تغییر ستون های لولا می شود یعنی انتخاب ستون لولا در های شدن پایه همان نشان اثر می گذارد که البته تاثیری هم ندارد.

چون همانی پایه ها بودن دال بر پایه است

بنابراین می توان گفت هر مستقل خطی در $\mathbb{R}^n$ پایه است که n بردار داشته باشد

بنابراین هر دو بردار غیرهم راستا در $\mathbb{R}^2$ یک پایه است

نکته: بعد فضای V با تعداد عناصر یک پایه آن مشخص می شود

بنابراین بعد فضا $\mathbb{R}^n$ ، n می باشد نه اینکه چون تعداد مولفه های آن n تاست پس بعدش نیز n می شود. به عنوان مثال

$$\{(x_1, x_2) : x_2 = 2x_1\}$$

یک مجموعه است که مولفه های آن 2 تاست اما بعد آن یک است زیرا این مجموعه یک خط است.

B24

آخرین مبحث این قسمت به مختصات می پردازد

فرض کنیم که $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ پایه باشد

آنگاه بردار $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ به شکل

$$1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \beta$$

به ضرایب 1 و 3 مختصات β در پایه B می‌گویند و با

$$[B]^{\beta} = (1, 3)$$

نمایش می دهند

حال پایه $\hat{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ در نظر بگیرید مجدد برای

$\beta = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ خواهیم نوشت

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

پس

$$[\hat{B}]^{\beta} = (3, 1)$$

B 25

در اینجا 2 مجموعه $B = \hat{B}$ را وقتی به شکل پایه

نگاه می کنیم جایگاه بردارهای پایه بسیار مهم است

و تغییر در جایگاه بردارها در مختصات تغییرایجاد می کند

در فضای $\mathbb{R}^n$ بی نهایت پایه موجود است بنابراین

برای هر بردار بی نهایت مختصات موجود است

بهترین پایه ، پایه متعامد یکه است که در بحث پایه های

عمود مفصل بحث شده است

پایه استانده : تنها پایه ای است که مختصات بردار

از لحاظ عددی با بردار برابر است

مثلاً در $\mathbb{R}^3$

$$\left\{ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = E$$

پایه استاندارد هست بنابراین برای هر بردار

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

داریم

$$X_{[E]} = (x_1 , x_2 , x_3)$$

B26

یعنی

$$X = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$$

پایه بسیار معروف ریشه های واحد به ویژه
اگر بعد فضا 2^n باشد از اهمیت فوق العاده ای
در مهندسی مخابرات پردازش تصویر پردازش صدا
و ... دارد که آغازگر سری فوریه می باشد
در بحث موجک پایه های مشابه وجود دارد.

بحث تغییر مختصات از پایه ای به پایه ی دیگر از موضوعات
بسیار جالب و کاربردی است به خصوص در ناوبری ماهواره ای
و موضوعات مکان یابی سراسری GPS و
مکان یابی محلی LPS که در حوزه انرژی مطرح می شود