A/1

تعریف: نرم:

اگر V یک فضای برداری با هیئت F باشد تابع زیر یک نرم است

$$\| \cdot \| \quad V \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

به شرطی که:

1) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

2) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

3) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$

مثال اگر $V=\mathbb{R}^2$ و $F=\mathbb{R}$ آنگاه

$$T: V \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \Rightarrow \text{نرم } 2$$

$$\|x\|_1 = |x_1| + |y_1| \Rightarrow \text{نرم } 1$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x|, |y|\} \Rightarrow \text{نرم بی‌نهایت}$$

اثبات: در نرم 2 شرط اول و سوم بدیهی است پس به شرط دوم

می‌پردازیم:

$$\left(\sqrt{(x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2}\right)^2 = \cancel{x_1^2 + y_1^2} + 2x_1y_1 + \cancel{x_2^2 + y_2^2} + 2x_2y_2$$

$$\leq \left(\sqrt{x_1^2+x_2^2} + \sqrt{y_1^2+y_2^2}\right)^2 = \cancel{x_1^2 + x_2^2} + \cancel{y_1^2 + y_2^2} + 2\sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2}$$

به توان 2

$$\Rightarrow \cancel{(x_1y_1)^2} + \cancel{(x_2y_2)^2} + 2x_1x_2y_1y_2 \leq \cancel{(x_1y_1)^2} + \cancel{(x_2y_2)^2} + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2$$

A/2

بنابراین

$$0 \leqslant \underbrace{\left(x_1^2 y_2^2 + 2x_1 y_1 x_2 y_2 + x_2^2 y_1^2 \right)}_{(x_1 y_2 + x_2 y_1)^2}$$

و این سلسله نامساوی برگشت پذیر است پس $\|\ \|_2$ یک نرم است

اثبات نرم یک $\|\ \|_1$: شرط اول و سوم بدیهی است: شرط سوم

$$|x_1 + y_2 + x_2 + y_2| \leqslant |x_1 + x_2| + |y_1 + y_2|$$

خاصیت قدر مطلق: پس

$$\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$$

نرم بی‌نهایت فرض کنید که

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

پس

$$\|\alpha x\|_\infty = \max\{|\alpha x_1|, |\alpha x_2|\}$$

$$= |\alpha| \max\{|x_1|, |x_2|\} = |\alpha| \, \|x\|_\infty$$

شرط سوم بدیهی است ؛ اما شرط دوم فرض کنیم

$$\|x+y\|_\infty = \max_{\max}\{|x_1+y_1|, |x_2+y_2|\} = |x_i + y_i|$$

اگر

$$\|x+y\|_\infty \ |x_i + y_i| < |x_i| + |y_i| \leqslant \max\{|x_1|, |y_1|\} + \max\{|x_2|, |y_2|\}$$

$$= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

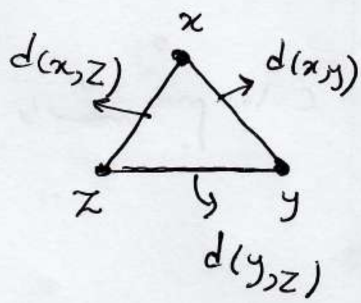
هر نرم یک متر القا می‌کند: اما هر متری منشأ نرم ندارد

تعریف متر:

$$d(x,y) = V \times V \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$$

1) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

2) $\underbrace{d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)}_{\text{قانون مثلث}}$



مثال: فرض کنیم $V = \mathbb{R}^2$

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

اثبات بدیهی است

این متر منشأ نرم ندارد و به متر گسسته معروف است:

متر القایی از نرم ها

$$d(x,y) = \| x - y \|$$

مثلا:

$$d_2(x,y) = \| x - y \|_p \qquad P = 1, 2, \infty$$

که $P=2$ متر اقلیدسی و $P=1$ متر خیابانی

تعریف همسایگی: اگر V یک فضای برداری و d یک متر و r عدد مثبت آنگاه

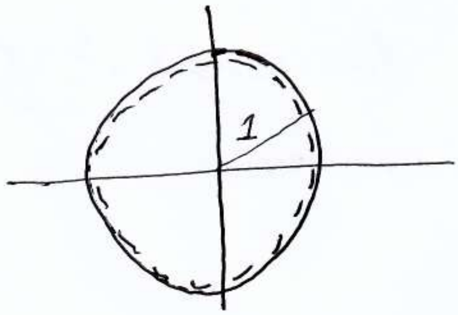
برای نقطه $x_0 \in V$ مجموعه زیر را همسایگی نامیده و با $N_r(x_0)$ نشان می‌دهند

$$N_r(x_0) = \{ x \in V : d(x, x_0) < r \}$$

نرم 2

مثال فرض کنید که متر اقلیدسی و $x_0 = (0,0)$ آنگاه

$$N_1((0,0)) = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1-0)^2 + (x_2-0)^2} < 1 \}$$

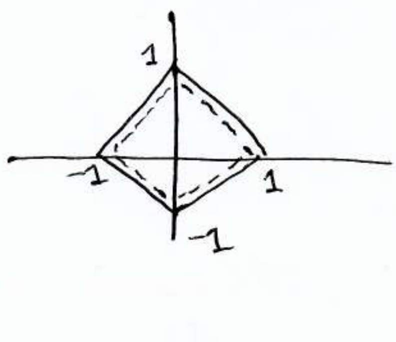


خط چین اشاره دارد
به اینکه مرز دایره
مشمول همسایگی نیست

نرم یک

فرض کنید که متر و $x_0 = (0,0)$ آنگاه

$$N_1((0,0)) = \{ x \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - 0| + |x_2 - 0| < 1 \}$$

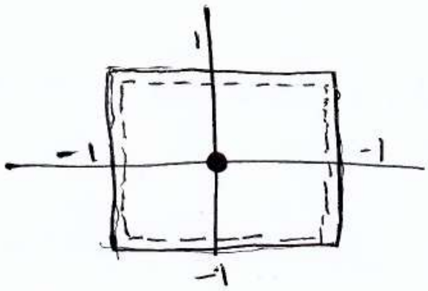


خط چین اشاره دارد به اینکه مرز لوزی مشمول
همسایگی نیست

— A/5

اگر متر d_∞ را برداشته،

$$N_1((0,0)) = \{X\in\mathbb{R}^2 : \max\{|x_1|,|x_2|\}<1\}$$



نقطه‌چین اشاره‌ها دارد به اینکه
مرز مشمول مربع نیست

در واقع $\|\cdot\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p+|x_2|^p}$

$0<p<\infty$ معروف به نرم p است که متر

$$d_p(X,Y) = \sqrt[p]{|x_1-y_1|^p+|x_2-y_2|^p}$$

$p\to\infty$ d_∞ را القا کند