تحقیق در عملیات

استاد:

دکتر رستمی

Subject: 1 Date:

مسئله کلی

Max
Min $c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n$

s.t. $a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \lesseqgtr b_1$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n \lesseqgtr b_2$

$\vdots$

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \lesseqgtr b_m$

متغیر $x_1,\dots,x_n \geq 0$

(Min.) Max ... برای حل مسئله ... لازم (است) ... [illegible]

... (Min یا Max) ... باید ... [illegible]

[illegible]

... Max ... Min ... [illegible]

c: ضرایب هزینه یا ضرایب سود (در حالت Min سازی به هزینه و در حالت Max سازی به سود) گفته می‌شود — ضرایب تابع هدف

x_j: متغیرهای تصمیم یا متغیرهای ساختاری

b_i: منابع ($i=1,\dots,m$) اگر i امین ساخت ... واحد

... استفاده شود ... از منبع استفاده می‌شود

a_{ij}: ضرایب فنی یا ضرایب تکنولوژیکی (تکنولوژی کار را مشخص می‌کند)

این ضرایب نشان می‌دهد چقدر از هر منبع استفاده می‌شود

برای ساختن ... نشان می‌دهد ... تولید داریم.

(۲)

Subject: Date

فرم استاندارد:

مسئله Max یا Min سازی است

قیود به صورت تساوی

مقادیر سمت راست (RHS) بزرگتر مساوی صفر هستند ($b_i \geq 0$)

متغیرها نامنفی ($x_j \geq 0$)

فرم کانونی:

تابع هدف ما ماکسیمم سازی (مینیمم سازی) است

قیود به صورت کوچکتر مساوی ← Max (بزرگتر مساوی ← Min سازی) است

متغیرها نامنفی هستند ($x_j \geq 0$)

تبدیل فرم استاندارد و کانونی به هم

(۱) اگر قید ما به صورت بزرگتر مساوی باشد یا قید ما منفی باشد می توان علامت قید را عوض کرد یعنی بزرگتر مساوی را به کوچکتر مساوی و بالعکس تبدیل کنیم (فرم استاندارد) را می توان $(-1)\times$ کرد

چون ممکن است شرط $RHS \geq 0$ از بین برود

(۲) حالت تساوی را به صورت ≤ و ≥ می توان تبدیل کرد $a=2 \Leftrightarrow a \leq 2$ و $a \geq 2$

(اگر مسئله Min سازی بود اولی را در منفی ضرب کن، اگر Max سازی بود دومی را در منفی ضرب کن)

(۳) اگر $a \leq 2$ را بخواهیم به حالت تساوی تبدیل کنیم یک متغیر slack اضافه می کنیم

$a+s=2$

$s \geq 0$ اگر $s=0 \Rightarrow a=2$

MICRO

(۳)

Subject: I   Date:

با $a \geq ۲$ ... $a - s = ۲$ و $s \geq ۰$

۲ متغیرهای slack مازاد یا کمبود نیز تعبیر میشود

$exp: ۲x_1 - ۳x_2 \geq -۲ \equiv -۲x_1 + ۳x_2 \leq ۲ \rightarrow -۲x_1 + ۳x_2 + x_3 = ۲$

(۴) تبدیل Min ... Max

$\max_{x \in D} f(x) = -\min(-f(x))$

$f(x) = -x^2 - 1 \qquad -f(x) = x^2 + 1$

D ناحیه شدنی است

تمرین: صورت ... ثابت کنید ... این تساوی برقرار است

$\max f = -\min(-f)$

(۵) $x_j \leq ۰ \rightarrow x_j' = -x_j \geq ۰$

$a_{12}x_2 = -a_{12}y_2$

(۶) x_j آزاد

$x_1 = x_1^+ - x_1^-$

$x_1^+, x_1^- \geq ۰$

در جدول سیمپلکس ... باید مستقل باشد

(a_1)

$a_1 x_1^+ - a_1 x_1^-$

[illegible]

تمرین

$\text{Min } c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$

$\text{s.t. } a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$

$x_1 \geq ۰, \; x_2, \ldots, x_n \geq ۰$

@MICRO®

Subject:

Date

Subject: ۳ Data:

اگر همه متغیرها معین باشند مثلاً ۳ و ۱ و ۲ را برای بسیاری همه متغیرها ...

باید متغیرها را به اندازه هم نسبت داده

اصول برنامه ریزی خطی

۱- اصل تناسب بودن proportiontiy ← هزینه اضافی نداریم

هزینه اولیه نداریم

تخفیف نداریم

بازده به مقیاس نداریم

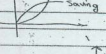
NO saving ، fix cost

$c_j x_j$ ← قیمت هر واحد ← اگر x_j تغییر کند ← c_j نیز متغیر می‌کند

اگر یک صندلی ۵۰$ ← دو صندلی ۱۰۰$

$a_{ij} x_j$ ← یک ساعت کار ... اگر واحد را ۲ ساعت کار ... a_{ij} مصرف

۲ a_{ij} ۲ ۲ ۲



در تولید ۱ ساعت : ۱ تولید
۲ : ۲

هزینه اولیه نداریم :

:

بازده به مقیاس (RTS)

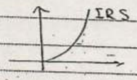
RTS:
صعودی IRS
ثابت CRS ← بازده به مقیاس ثابت است
نزولی DRS

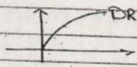
↓

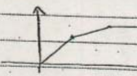
یعنی مقیاس برای ما مهم نیست

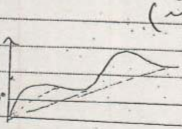
Subject:

Date



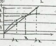






در نقطه عطف اگر بازده به مقیاس چپ و راست با هم برابر باشند بازده به مقیاس ثابت است

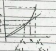
Subject: Data:



- بازده به مقیاس نزولی DRS

$$f(\lambda x):\begin{cases} > \lambda f(x) & \lambda<1 \\ = \lambda f(x) & \lambda=1 \\ < \lambda f(x) & \lambda>1 \end{cases}$$

توجه شود که λ عددی نزدیک (یک) است



- بازده به مقیاس صعودی IRS

$$f(\lambda' x):\begin{cases} < \lambda' f(x) & \lambda'<1 \\ = \lambda' f(x) & \lambda'=1 \\ > \lambda' f(x) & \lambda'>1 \end{cases}$$

جنس بازده به مقیاس صعودی یا نزولی: ما تابع کاب داگلاس را امتحان می‌کنیم با بازده صعودی یا ...

فرض: $f(A_1,\dots,A_n)=A_1^{x_1}A_2^{x_2}\cdots A_n^{x_n}$

$x_1,\dots,x_n$ چه شرایطی داشته باشند تا بازده به مقیاس صعودی یا نزولی یا ثابت است

$$f(x_1,\dots,x_n)=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n} \qquad (A_1,\dots,A_n\geq 0)$$

$$f(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)=(\lambda x_1)^{\alpha_1}\cdots(\lambda x_n)^{\alpha_n}=\lambda^{(\alpha_1+\dots+\alpha_n)}x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$$

$=\lambda^{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i} f(x_1,\dots,x_n)$ ، $\lambda>1$: $\sum\alpha_i>1 \rightarrow$ بازده به مقیاس صعودی

$\sum\alpha_i=1 \rightarrow$ ثابت

$0<\lambda<1$ $\sum\alpha_i<1 \rightarrow$ نزولی

(۸)

Subject: Date

۲- اصل جمع‌پذیری: متغیرها روی هم اثر متقابل ندارند
با هم جمع می‌شوند

در تابع هدف: سود کل = جمع سود تک‌تک واحدها $c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$

قید: میزان استفاده از منبع = جمع مقادیری که تک‌تک واحدها مصرف می‌کنند

$a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n=b_i \quad i=1,\dots,m$

ماتریس‌ها: توسط
a_{i1}: واحد اول یک واحد محصول
از منبع ... متغیر

مثال: روی هم اثر متقابل ندارند: مقدار سارچانه‌ای میزان تولید نسبت با میزان
تولید شرکت ارتباطی ندارد (متغیرها اثر متقابل روی هم ندارند)

x_1 ← شرکت نوع ۱
← تولید آنها روی هم هیچ اثری ندارند

x_2 ← شرکت نوع ۲
با هم اثر متقابل ندارند

مثال ۲: ... نمی‌توانند ... می‌توان بجای شرکت نوع ۱ از نوع ۲ استفاده

نکته: اصل جمع‌پذیری به تنهایی اصل مستقل بودن را نتیجه می‌دهد ولی عکس آن ...

اصل مستقل بودن را نتیجه نمی‌دهد

۳- اصل تقسیم‌پذیری:

اصل تقسیم‌پذیری پیوستگی متغیرها را نشان می‌دهد (متغیرها مقادیر کسری
اختیار می‌کنند)

MICRO

Subject: ۵ Data:

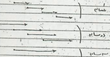
۴ـ اصل حتمیت

ضرایب هدفی و ثابت تکنولوژی ضرایب c_j و a_{ij} و b_i باید به صورت قطعی ثابت باشند

حل نمونه:

exp: احمد ۲۲۰۰۰ پول دارد که می‌تواند برای پنج سال آینده سرمایه‌گذاری نماید احمد در ابتدای هر سال می‌تواند سرمایه‌گذاری یک ساله یا دو ساله بنماید سود سرمایه‌گذاری یکساله ۱۸% و دوساله ۲۷% است یک شرکت دولتی اوراق قرضه‌ی سه ساله‌ای عرضه می‌نماید بهره آن برای سه سال ۱۲۷% است عرضه این اوراق از ابتدای سال دوم شروع می‌گردد اگر احمد پول موجود در ابتدای هر سال را مجدداً سرمایه‌گذاری نماید خط‌مشی سرمایه‌گذاری او را طوری مشخص نمائید که موجودی احمد در ابتدای سال ششم ماکسیمم می‌گردد مسئله را بصورت برنامه‌ریزی خطی فرموله کنید

(صفحه ۱۶ مثال ۱-۶-۱)



x_j : میزان پولی که در ابتدای سال j ام بصورت یکساله سرمایه‌گذاری می‌شود $j=1,2,3,4,5$

y_j دوساله $j=1,2,3,4$

z_j سه‌ساله $j=2,3$

s_j : میزان پولی که در ابتدای سال j ام فعلاً جای سرمایه‌گذاری نشده

Subject: Date

Max $S_5 + 1.08x_5 + 1.17y_4 + 1.27z_3$ ← باید $S_5 = 0$ باشد

$2000 = x_1 + y_1 + S_1$

$S_1 + 1.08x_1 = x_2 + y_2 + z_2 + S_2$

$S_2 + 1.08x_2 + 1.17y_1 = x_3 + y_3 + z_3 + S_3$

$S_3 + 1.08x_3 + 1.17y_2 = x_4 + y_4 + S_4$

$S_4 + 1.08x_4 + 1.17y_3 + 1.27z_2 = x_5 + S_5$

$S_1, \dots, S_5, x_1, \dots, x_5, y_1, \dots, y_4, z_2, z_3 \geq 0$

تا سال پنجم S_5 صفر است. اگر فرض شود در ابتدای سال پنجم ۱۰۰۰ تومان داشته باشیم اگر $x_5 = 800$ و $S_5 = 200$ باشد در سال ششم $1.08(800) + 200$ تومان داریم اما اگر $S_5 = 0$ باشد ابتدای سال ششم $(1.08) \times 1000$ داریم چون مسئله Max است پس مقدار بزرگتر را انتخاب می‌کند

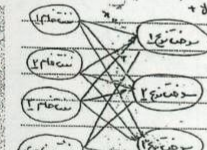
exp: یک شرکت چهار نوع نفت خام را در جهت تولید ۳ نوع سوخت با هم ترکیب می‌کند داده‌ها در جدول زیر آمده است

نوع نفت خام	میزان اکتان	تعداد بشکه در دسترس در روز	قیمت خرید هر بشکه
۱	۶۸	۴۰۰۰	۴۲$
۲	۸۶	۵۰۵۰	۴۵$
۳	۹۱	۷۱۰۰	۴۸$
۴	۹۹	۴۳۰۰	۵۲$

نوع سوخت	میزان اکتان min	قیمت فروش	ماکزیمم تقاضای سوخت
۱	۹۵	۶۰$	حداکثر ۱۰۰۰۰ بشکه در روز
۲	۹۰	۵۵$	هر مقدار تولید شود می‌توان فروخت
۳	۸۵	۵۴$	حداقل ۱۵۰۰۰ بشکه در روز

MICRO

Subject: Date:



Subject:　　　　　　　　　　　　　　　　　　Date ______

s.t.

محدودیت موجودی نفت خام نوع ۱ تا ۴ (مقدار در دسترس)

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+y_1 \le 4000 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+y_2 \le 5050 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+y_3 \le 7100 \\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+y_4 \le 4300 \end{cases} \longrightarrow (*)$$

محدودیت سوخت — ادل و سوم

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41} \le 10000 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43} \ge 15000 \end{cases}$$

میزان اکتان برای بنزین ... است

$$\frac{68x_{11}+86x_{21}+91x_{31}+99x_{41}}{x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}} \ge 95$$

استفاده شده در سوخت نوع ۱ در مجموع ← $x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}$

سوخت نوع اول

$$\frac{68x_{12}+86x_{22}+91x_{32}+99x_{42}}{x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}} \ge 90$$

$$\frac{68x_{13}+86x_{23}+91x_{33}+99x_{43}}{x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}} \ge 85$$

$x_{ij} \ge 0 \quad i=1,\dots,4 \quad j=1,\dots,3$

(۴) ادعا داریم m در جواب ... سطر و ستون ... زیرا هم جوش رهم صحیح است

استفاده می‌کنیم ... بیشتر از ... ترتیب ...

حل مسئله:

c_{11}: فرض کنید ... واحد از انبار اول به ... اول

©MICRO

Subject: V Data:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{S.t} \begin{cases} x_{11}+\cdots+x_{1n} \le a_1 \\ \vdots \\ x_{m1}+\cdots+x_{mn} \le a_m \end{cases} \quad \text{عرضه}$$

$$\begin{cases} x_{11}+\cdots+x_{m1} \ge b_1 \\ \vdots \\ x_{1n}+x_{2n}+\cdots+x_{mn} \ge b_n \end{cases} \quad \text{تقاضا}$$

$$\text{Min } c_1x_1+\cdots+c_nx_n$$

$$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m$$

$$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n) \qquad c=(c_1,\ldots,c_n)$$

$$a_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \text{ ستون اول} \qquad a_1^t=(a_{11},\ldots,a_{m1}) \text{ سطر اول}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{ماتریس ضرایب}$$

$$\text{Min } C^tx \qquad \text{Min } C^tx \qquad \text{Min } c_1x_1+\cdots+c_nx_n$$

$$\text{S.t } Ax=b \quad \equiv \quad \text{S.t } a^tx=b_1 \quad \equiv \quad \text{S.t } a_1x_1+\cdots+a_nx_n=b$$

$$x_j \ge 0 \qquad a^tx=b_m \qquad x_1,\ldots,x_n \ge 0$$

$$x_j \ge 0$$

Subject :

Date

ماتریس ضرایب تابع هدف

$A_{(m+n)(mn)}$

$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

$x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} + \cdots = a_1$

$\cdots + x_{21} + \cdots + x_{2n} + x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} + \cdots = a_2$

$\cdots + \cdots + x_{m1} + x_{m2} \cdots + x_{mn} = a_m$

$x_{11} + \cdots + x_{21} + \cdots + x_{m1} + \cdots = b_1$

$\cdots + x_{mn} = b_n$

I_n

$I_n \; I_n \cdots I_n$

$m \times n$

$\min C^t x$

$Ax = b$

$x \geq 0$

فرم ماتریسی

Subject: Date:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

©MICRO

Subject:

Date

Subject: ۹ Data:

حالت اول: اگر ماتریس از مرتبه‌ی (k+1) دارای یک ستون صفر باشد.
در این صورت دترمینان آن برابر صفر و حکم ثابت است.

حالت دوم: تمام ستون‌های این زیرماتریس مربعی (منظور) دارای دقیقاً ۲ تا یک باشند.
روشن است که طبق تعریف ماتریس در صفحه ۱۷ یکی از این یک‌ها مربوط به قید اول (عرضه)
و دیگری مربوط به قید دوم (قید تقاضا) است.
فرض می‌کنیم در این ماتریس t سطر اول متناظر قید عرضه و بقیه سطرها متناظر قید تقاضا باشند.
حال سطرهای این ماتریس را در نظر گرفته، a^i با سطر iام
توصیف می‌کنیم. ادعا داریم که ترکیب خطی
زیر از سطرها برقرار است:

قید عرضه ... سطر tام ... قید تقاضا — $(k+1)(k+1)$

$$1\times a^1 + 1\times a^2 + \cdots + 1\times a^t - 1\times a^{t+1} - \cdots - 1\times a^{k+1} = 0 \quad (*)$$

ترکیب خطی بالا معادل وابسته خطی بودن سطرهای این ماتریس است. به عبارت دیگر دترمینان
صفر است.

اثبات ادعا: باید ثابت کنیم ترکیب خطی $a^1+\cdots+a^t-a^{t+1}-\cdots-a^{k+1}$ برابر بردار صفر است.
به عبارت دیگر اگر a^i_j نمایشگر مؤلفه‌ی jام سطر iام باشد باید ثابت کنیم

$$\forall j \quad j=1,\dots,k+1 : \; a^1_j+\cdots+a^t_j-a^{t+1}_j-\cdots-a^{k+1}_j=0$$

حکم را برای $s=j$ ثابت می‌کنیم (برای بقیه هم به همین ترتیب است).
ترکیب خطی $a^1_s+\cdots+a^t_s-a^{t+1}_s-\cdots-a^{k+1}_s$ در حقیقت در نظر گرفتن ستون sام است.
حال طبق فرض هر ستون دقیقاً ۲ تا عدد یک دارد که یکی متعلق به t تای اول و دیگری متعلق
به قسمت دوم است. پس در این ترکیب t تای اول دارای ضریب ۱ و قسمت دوم ضریب ۱- هستند. پس این مجموع برابر صفر خواهد بود.

حالت سوم: فرض می‌کنیم ماتریس یک ستون دارد که دقیقاً یک عنصر یک داشته باشد.
در این صورت ماتریس را نسبت به همین ستون بسط می‌دهیم.
پس خواهیم داشت:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(k+1)(k+1)} \qquad |A| = (-1)^{i+j}\times 1\times \Big|\ \ \Big|_{k\times k}$$

طبق فرض استقرا = ۰ یا ±۱

$$\Rightarrow |A| = \pm 1 \ \text{یا}\ 0$$

فصل ۳

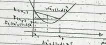
Subject:

Date جلسه سی دوم ۱۱ر ۱۲ ر ۸۸

Subject: ۱۵ Data: ۱

تعریف: اگر $S \subseteq \mathbb{R}^n$ محدب باشد و $f: S \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد آنگاه f محدب است اگر و فقط اگر برای هر $k \in \mathbb{N}$ و هر $x^1, \dots, x^k \in S$ و $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ با $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$:

$$f\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j\right) \leq \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f(x^j)$$



تابع مقعر

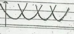
تابعی که نه محدب و نه مقعر

تعریف: f محدب است اگر و تنها اگر $-f$ مقعر باشد.

تعریف: اگر $S_1, \dots, S_k \subseteq \mathbb{R}^n$ نواحی محدب باشند ($S \subseteq \mathbb{R}^n$)

$f_i: S_i \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$. $f(x) = \min f_i(x)$, $i = 1, \dots, k$

توابع محدب (مقعر) باشند آنگاه تابع $f(x)$ تقعر Min نامیده می‌شود



point wise Min

Min توابع محدب، قطعه‌ای محدب است (در هر بازه محدب است و در کل مقعر)

تابع f را قطعه‌ای خطی (محدب) گوییم هرگاه بتوان دامنه f را به زیر مجموعه‌های افراز کرد

که f روی هر کدام از آنها (زیر مجموعه‌ها) خطی (محدب) باشد

©MICRO®

Subject: Date

تعریف: تابعی مانند f که بر یک مجموعه محدب تعریف شده باشد محدب (محدب) نامیده می‌شود

تابع $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ خطی است اگر و تنها اگر اسکالرهای $c_0, c_1, \dots, c_n$ موجود باشند به طوری که

$$f(x) = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

قضیه: فرض کنید اسکالرهای $c_0, c_1, \dots, c_n$ موجود باشند به طوری که $f(x) = c_0 + \dots + c_n x_n$

حکم: $f(x)$ آفین است. $\forall \bar{x}, \hat{x} \in S : f(\lambda \bar{x} + (1-\lambda)\hat{x}) \leq \lambda f(\bar{x}) + (1-\lambda) f(\hat{x})$

$$f(\lambda \bar{x} + (1-\lambda)\hat{x}) = f\begin{pmatrix} \lambda \bar{x}_1 + (1-\lambda)\hat{x}_1 \\ \vdots \\ \lambda \bar{x}_n + (1-\lambda)\hat{x}_n \end{pmatrix}$$

$$= c_0 + c_1(\lambda \bar{x}_1 + (1-\lambda)\hat{x}_1) + \dots + c_n(\lambda \bar{x}_n + (1-\lambda)\hat{x}_n)$$

$$= \lambda(c_0 + c_1 \bar{x}_1 + \dots + c_n \bar{x}_n) + (1-\lambda)(c_0 + c_1 \hat{x}_1 + \dots + c_n \hat{x}_n)$$

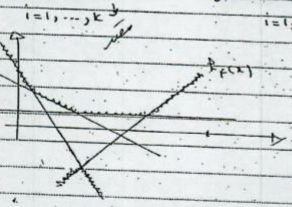
با اضافه کردن c_0 ها و ضرایب آن‌ها:

$$= \lambda f(\bar{x}) + (1-\lambda) f(\hat{x})$$

$$\Rightarrow f(\lambda \bar{x} + (1-\lambda)\hat{x}) = \lambda f(\bar{x}) + (1-\lambda) f(\hat{x})$$

تمرین: [illegible]

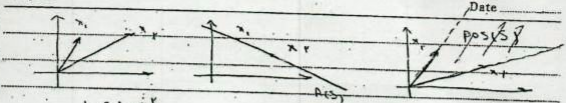
$$f(x) = \min_{i=1,\dots,k} f_i(x) \qquad g(x) = \max_{i=1,\dots,k} f_i(x)$$



Subject: ۱۱ Data:

Subject:

Date



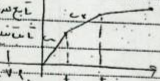
$$\max_{x \in L} f_1(x_1) + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$c_{11} > c_{12} > c_{13} > \cdots$$

$$p_1(x_1) = \begin{cases} c_{11} x_1 & 0 \leq x_1 \leq 100 \\ c_{11} \times 100 + c_{12}(x_1 - 100) & 100 < x_1 \leq 1000 \\ c_{11} \times 100 + c_{12} \times 900 + c_{13}(x_1 - 1000) & 1000 < x_1 \leq 10000 \end{cases}$$



$$\max c_{11} y_1 + c_{12} y_2 + \cdots + c_{1k} y_k + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

$$x_1 = y_1 + \cdots + y_k$$

$$0 \leq y_1 \leq t_1$$

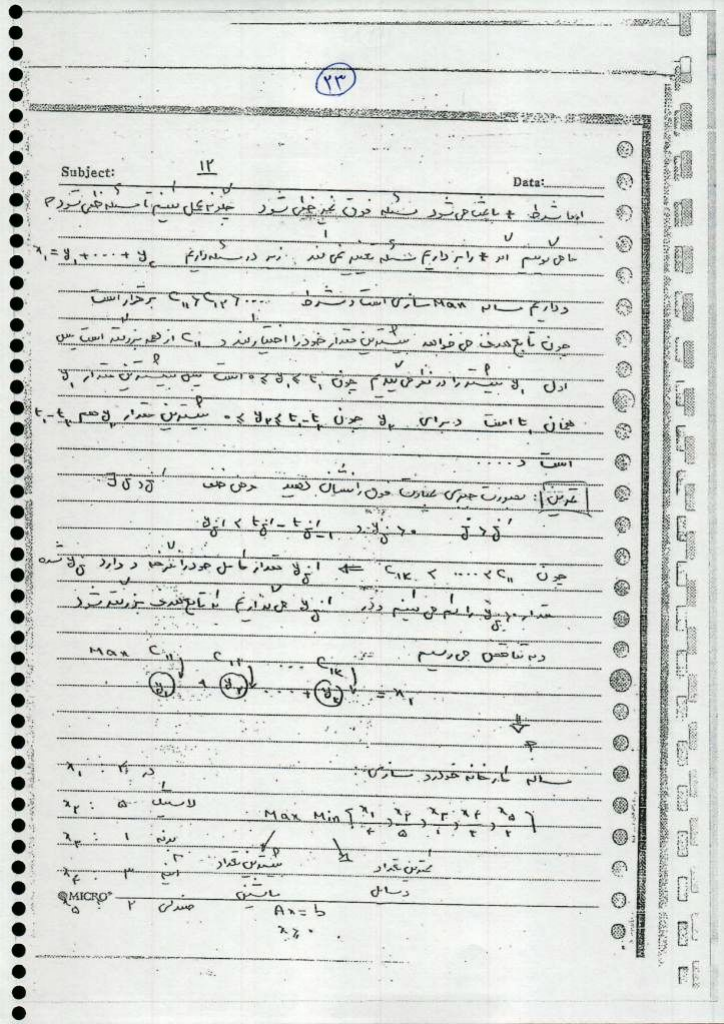
$$0 \leq y_2 \leq t_2 - t_1$$

$$0 \leq y_k \leq t_k - t_{k-1}$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

Subject: ۱۲ Data:



Subject:

Date

می‌توان در تابع هدف مقدار جزء صحیح را بنویسیم یعنی $\left[\frac{x_1}{2}\right]$ یا روی متغیرها

فرض کنیم متغیر x_1 را طوری بیابیم که $\frac{x_1}{2}$ عددی صحیح گردد

$$\text{Max Min } \{c^1x, c^2x, \dots, c^kx\}$$

$$Ax = b \qquad c^ix = c_1^i x_1 + c_2^i x_2 + \dots + c_n^i x_n$$

$$x \geq 0 \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

حال چگونه به تابع خطی تبدیل شود

$$\text{Max } \underbrace{\text{Min } \{c^1x, c^2x, \dots, c^kx\}}_{y} \qquad \text{Max } y$$

$$Ax = b \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} y \leq c^1x \\ y \leq c^2x \\ \vdots \\ y \leq c^kx \end{cases}$$

$$x \geq 0 \qquad Ax = b, \quad x \geq 0$$

حداقل یکی از قیود مساوی باشد (۴)

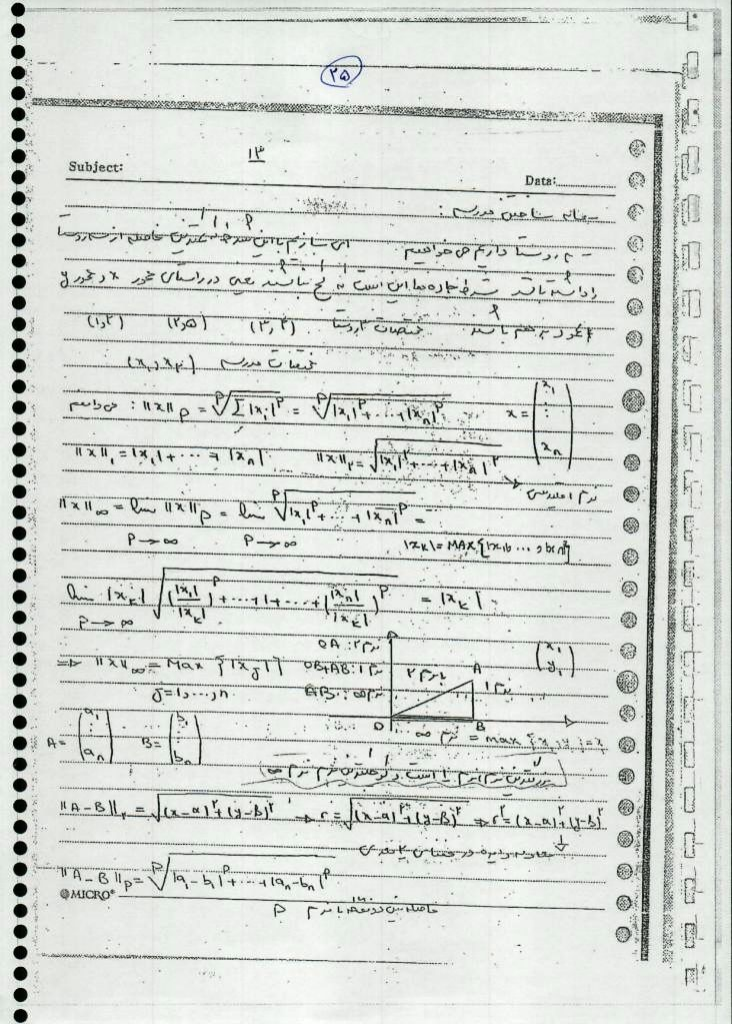
شرط (۴) حل مسئله را غیرخطی می‌کند اما این قید را مسئله احتیاج ندارد چون ما Max y را می‌خواهیم ماکزیمم در یکی از این قیدها (۴) مقدار Max رخ می‌دهد در اینجا

قید ضرورت تساوی می‌شود

اثبات جبری: فرض کنیم حالتی (۴) ... توجه ... چون ... توجه ... دیگر

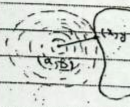
Max رخ می‌دهد

Subject: Data:

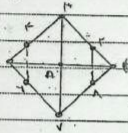


Subject:

Date



Subject: ۱۴ Date



Subject: Date:

پس جهت بدست آوردن کمترین فاصله ی نقطه A تا مجموعه S مربع های به مرکز A می کشیم

معلوم است که رئوس این مربع ها روی محورهای مختصات باشد روشن است به نصف قطر هر مربع

نمایانگر آن فاصله خواهد بود اولین مربعی که به S برخورد کند کمترین فاصله A تا

مجموعه S خواهد بود

تعبیری از فاصله با نرم بی نهایت

می دانیم که نرم بی نهایت برای هر بردار به صورت زیر تعریف می گردد

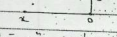
$x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \{x_i\} = x_k$$

همچنین فاصله ی بین دو نقطه با نرم ∞ به صورت زیر خواهد بود

$$\|x-y\|_\infty = \max\{|x_1-y_1|, \dots, |x_n-y_n|\} = |x_k-y_k|$$

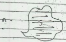
به عبارت دیگر در فضای دو بعدی نرم ∞ دو نقطه به صورت زیر خواهد بود



$$\|x-y\|_\infty = \max\{Ox, Oy\} = Ox$$

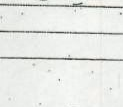
حال اگر بخواهیم به دست آوردن کمترین فاصله ی یک نقطه تا یک مجموعه مانند S ترسیم

می کنیم مربع های بی نهایت به صورت زیر است



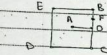
MICRO®

Subject: ۱۵ Date



Subject: Date:

بدین منظور نقطه‌ی F را روی ضلع مربع حول A روبرو در نظر می‌گیریم



مختصات F عبارت است از

$OA = x$

$OF = y$

یعنی نرم ∞ Max اینها فاصله‌ی F تا A خواهد بود روشن است

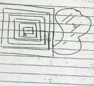
$OA = Max = 1$ است

بنابراین هر مربع که دارای یک عدد است به عبارت دیگر نرم ∞ نصف ضلع

هر مربع فاصله با نرم ∞ خواهد بود

پس نصف ضلع اولین مربعی که به ناحیه S می‌رسد

برابر کمترین فاصله‌ی ناحیه S تا A



خواهد بود

MICRO