پایه‌های عمود

فرض کنیم که فضای برداری V به ضرب داخلی

$$T: X \times X \to R \quad T(x,y) = \langle x,y \rangle$$

مجهز شده باشد، مجموعه β یک مجموعه متعامد است اگر β

$$\beta = \{\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_k\}$$

$$\langle \beta_1, \beta_2 \rangle = 0, \langle \beta_1, \beta_3 \rangle = 0, \dots, \langle \beta_i, \beta_j \rangle = 0 \quad i \neq j$$

و یکه است اگر $\langle \beta_i, \beta_i \rangle = 1$

مثال: اگر R^3 را با ضرب معمولی در نظر بگیریم و

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

آنگاه به وضوح یک مجموعه متعامد یکه است.

مثال دیگر

اگر $V=\mathbb{R}^2$ و ضرب داخلی عادی آنگاه

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

یک متعامد است ولی یکه نیست زیرا

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1\times 1 + (-1)\times 1 = 0$$

ولی

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= 1\times 1 + (-1)(-1) = 2 \neq 1$$

مثال دیگر: اگر $V=\mathbb{R}^2$ و ضرب داخلی زیر را در نظر بگیریم

$$\langle x, y \rangle = (x_1, x_2)\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

مجموعه زیر متعامد است:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

2

زیرا

$$(-8,7)\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$$

$$=(-8,7)\begin{bmatrix}7\\8\end{bmatrix}=-56+56=0$$

$$[2,3]\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$$ یکه نیست زیرا

$$=[2,3]\begin{bmatrix}7\\8\end{bmatrix}=2\times7+3\times8=38$$ ✓

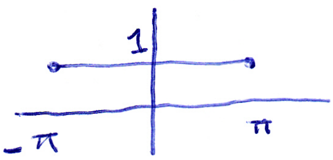
مثال : فرض کنید $C[-\pi,\pi]$ یعنی توابع پیوسته روی

دامنه $[-\pi,\pi]$ باشد آنگاه مجموعه زیر متعامد است .

$$\left\{\begin{matrix}1,\ \sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x,\dots\\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x\end{matrix}\right\}$$

در این مجموعه $\underline{1}$ یک تابع است که ثابت است یعنی

$$h:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}\qquad h(x)=1$$



$$\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi} f g\,dx$$ ضرب داخلی عبارت

3

اثبات :

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \sin x = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \sin nx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cos nx = +\frac{1}{n} \sin nx \Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n}\Big[\cancel{\sin (n\pi)}^{0} - \cancel{\sin(-n\pi)}^{0}\Big] = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x \right] dx = 0$$

$$n \neq m$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x \right] = 0$$

$$n \neq m$$

$$\int \sin nx \cos mx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m+n)x - \sin(m-n)x$$

$$= 0$$

بنابراین متعامد است بر یکدیگر زیرا

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx = 2\pi \quad , \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin nx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 - \cos 2x = \pi$$

4-A

اگر $\beta=\{\vec{\beta}_1,\dots,\vec{\beta}_k\}$ یک مجموعه متعامد فاقد مبدأ

باشد آنگاه مستقل خطی است زیرا اگر

$$c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \cdots c_i\beta_i + \cdots c_k\beta_k = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}}_{\text{مبدا}}$$

آنگاه

$$\langle c_1\beta_1 + \cdots c_i\beta_i + \cdots c_k\beta_k , \beta_i\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, \beta_i\right\rangle$$

$$= c_1\underbrace{\cancel{\langle\beta_1,\beta_i\rangle}}_{0} + \cdots + c_i\langle\beta_i,\beta_i\rangle + \cdots c_k\underbrace{\cancel{\langle\beta_k,\beta_i\rangle}}_{0} = 0$$

$$\Rightarrow \quad c_i\langle\beta_i,\beta_i\rangle = 0$$

پس c_i یا $\langle\beta_i,\beta_i\rangle = 0$ چون $\beta_i \neq 0$

پس $c_i = 0$ بنابراین یک مجموعه متعامد فاقد مبدا مستقل است

اگر تعداد این بردارها با بعد فضا برابر باشد آنگاه

یک پایه خواهد بود که به پایه متعامد معروف است

4-B

خاصیت یک پایه متعامد یکه این است که اگر

$$B = \{\vec{B}_1, \dots, \vec{B}_n\}$$

یک پایه متعامد باشد و $\vec{\alpha} \in V$ آنگاه

$$\vec{\alpha} = c_1 \vec{B}_1 + c_2 \vec{B}_2 + \dots + c_n \vec{B}_n$$

به c_1 و c_2 و ... c_n مختصات α در پایه B گویند

$$c_1 = \frac{\langle \vec{\alpha}, \vec{B}_1 \rangle}{\langle \vec{B}_1, \vec{B}_1 \rangle} \qquad c_2 = \frac{\langle \vec{\alpha}, \vec{B}_2 \rangle}{\langle B_2, \vec{B}_2 \rangle}$$

$$, \dots \quad c_n = \frac{\langle \vec{\alpha}, \vec{B}_n \rangle}{\langle \vec{B}_n, \vec{B}_n \rangle} \quad \checkmark$$

حتی اگر این پایه متعامد نباشد نیز این فرمول صادق است

$$\vec{\alpha} = c_1 \vec{B}_1 + c_2 \vec{B}_2 + \dots c_n \vec{B}_n + \dots$$

۲۹

۵

در واقع وقتی می‌نویسیم

$$\vec{\alpha} = c_1\vec{\beta}_1 + c_2\vec{\beta}_2 + \cdots c_i\vec{\beta}_i + \cdots c_n\vec{\beta}_n$$

حال هر بار مساوی را در یک β_i مثلا ضرب می‌کنیم

$$\langle \alpha, \beta_i \rangle = \langle c_1\vec{\beta}_1 + c_2\vec{\beta}_2 + \cdots c_i\vec{\beta}_i + \cdots c_n\vec{\beta}_n, \beta_i \rangle$$

$$= c_1 \underbrace{\cancel{\langle \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_i \rangle}}_{\text{متعامد}\ 0} + c_2 \underbrace{\cancel{\langle \vec{\beta}_2, \vec{\beta}_i \rangle}}_{\text{متعامد}\ 0} + \cdots c_i \langle \vec{\beta}_i, \vec{\beta}_i \rangle$$

$$+ \cdots + c_n \underbrace{\cancel{\langle \vec{\beta}_n, \beta_i \rangle}}_{\text{متعامد}\ 0}$$

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta}_i \rangle = c_i \langle \beta_i, \beta_i \rangle$$

پس $c_i = \dfrac{\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta}_i \rangle}{\langle \vec{\beta}_i, \vec{\beta}_i \rangle}$

⑥ ۷۲

مثال: $V = \mathbb{R}^2$ ، ضرب داخلی معمولی و

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

مطلوب است محاسبه مختصات $\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ در پایه β

$$\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = c_1 \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle + \cancel{c_2 \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{0}$$

$$c_1 = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle} = \frac{7}{2}$$

$$c_2 = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle} = \frac{-3}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{7}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right]_\beta = \left(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2} \right)$$

مثال: $V=\mathbb{R}^2$ با ضرب داخلی

$$\langle X,y\rangle = (x_1,x_2)\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$$

و

$$\beta=\left\{\begin{pmatrix}-8\\ 7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}\right\}$$

یک پایه متعامد باشد مطلوب است یافتن مختصات بردار $\begin{pmatrix}6\\ 6\end{pmatrix}$ در پایه β

$$\begin{pmatrix}6\\ 6\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-8\\ 7\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$$

$$c_1=\frac{\langle \alpha,\beta_1\rangle}{\langle \beta_1,\beta_1\rangle}=\frac{(6,6)\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}-8\\ 7\end{pmatrix}}{(-8,7)\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}-8\\ 7\end{pmatrix}}=\frac{(6,6)\begin{pmatrix}-9\\ 6\end{pmatrix}}{(-8,7)\begin{pmatrix}-9\\ 6\end{pmatrix}}=\frac{-18}{114}$$

$$c_2=\frac{\langle \alpha,\beta_2\rangle}{\langle \beta_2,\beta_2\rangle}=\frac{(6,6)\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}}{(2,3)\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}}=\frac{(6,6)\begin{pmatrix}7\\ 8\end{pmatrix}}{(2,3)\begin{pmatrix}7\\ 8\end{pmatrix}}=\frac{90}{38}$$

$$\begin{pmatrix}6\\ 6\end{pmatrix}=\frac{-18}{114}\begin{pmatrix}-8\\ 7\end{pmatrix}+\frac{90}{38}\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}6\\ 6\end{pmatrix}_{[\beta]}=\left(\frac{-18}{114},\frac{90}{38}\right)$$

مثال دیگر: فرض کنیم $V=C([-\pi,\pi])$ توابع پیوسته با دامنه $[-\pi,\pi]$ و مقادیر حقیقی

$$B=\{1,\ \sin x,\ \sin 2x, \ldots,\ \cos x,\ \cos 2x, \ldots\}$$

مطلوب است مختصات $f(x)=x$ در پایه B

$$x = b_0\times 1 + b_1\cos x + b_2\cos 2x + \cdots + a_1\sin x + a_2\sin 2x + \cdots$$

$$b_0=\frac{\int_{-\pi}^{\pi} x\times 1}{\int_{-\pi}^{\pi} 1\times 1}=0 \qquad b_n=\frac{\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx}{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos nx\,dx}=0$$

1 و $\cos nx$ توابع زوج هستند و x تابع فرد. از جانب مقدماتی می‌دانیم که ضرب یک تابع زوج در فرد، تابعی فرد است و انتگرال متقارن تابع فرد صفر است.

9

$$a_n = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \, dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx} = \frac{\langle x, \sin nx \rangle}{\langle \sin nx, \sin nx \rangle}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx = 2 \int_{0}^{\pi} \sin nx \; x dx$$

برای محاسبه انتگرال صورت از روش جزء به جزء استفاده میکنیم

$$\int x \sin nx = -x \frac{\cos nx}{n} + \int \frac{\cos nx}{n} dx$$

$$= \left(-\frac{1}{n} x \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx \right) \Big]_{0}^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{n} \pi \cos n\pi \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{n}\pi & \cos n\pi = 1 \Leftarrow n \text{ زوج} \\ \frac{1}{n}\pi & \cos n\pi = -1 \; n \text{ فرد} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{(-1)^{n+1} \frac{\pi}{n}}{\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

10

بنابراین

$$x = \frac{(-1)^2}{1}\sin x + \frac{(-1)^3}{2}\sin 2x + \frac{(-1)^4}{3}\sin 3x$$

$$+ \frac{(-1)^5}{4}\sin 4x + \cdots \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

$$= \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4}$$

$$+ \frac{\sin 5x}{5} + \cdots$$

$x \in [-\pi, \pi]$

در واقع

$$x_{[B]} = [\overset{b_0}{0}, \overset{b_1}{0}, \overset{b_2}{0}, \cdots 0 \cdots, \underset{a_1}{1}, \underset{a_2}{-\frac{1}{2}}, \underset{a_3}{\frac{1}{3}}, \underset{a_4}{-\frac{1}{4}}, \frac{1}{5}, \cdots]$$

به این پایه معروف پایه فوریه گویند و به سری فوق

حقیقی

سری فوریه گویند

حقیقی