به نام خدا

حل تمرینات

برنامه ریزی خطی

مختار بازارا

LINEAR PROGRAMMING

پدید آورنده: سیده لیلا سید هوشیار

فصل ۱

مقدمه

۱

مقدمه

۱- یک کارخانه خوراک دام برای گاو، گوسفند و طیور خوراک تهیه می‌کند. این خوراک با ترکیب مواد اصلی زیر تهیه می‌شود: ذرت، سنگ آهک، دانه سویا و پودر ماهی. این مواد شامل ترکیبات مغذی زیر است: ویتامین‌ها، پروتئین، کلسیم و چربی خام. میزان این ترکیبات در هر کیلوگرم از مواد اصلی در جدول زیر خلاصه می‌شود:

	مواد مغذی			
مواد اصلی	ویتامین	پروتئین	کلسیم	چربی خام
ذرت	۸	۱۰	۶	۸
سنگ آهک	۶	۵	۱۰	۶
دانه سویا	۱۰	۱۲	۶	۶
پودر ماهی	۴	۸	۶	۹

کارخانه برای تولید ۱۰، ۶ و ۸ تن (در واحد متریک) خوراک گاو، گوسفند و طیور قرارداد بسته است. به دلیل کمبود، مقدار محدودی از مواد-یعنی ۶ تن ذرت، ۱۰ تن سنگ آهک، ۴ تن دانه سویا و ۵ تن پودر ماهی موجود است. قیمت هر کیلوگرم از این مواد به ترتیب ۰/۲۰، ۰/۱۲، ۰/۲۴ و ۰/۱۲ دلار است. حداقل و حداکثر واحدهای ترکیبی مواد مختلف مغذی در هر کیلوگرم خوراک گاو، گوسفند و طیور در جدول زیر خلاصه شده است:

	مواد مغذی							
	ویتامین		پروتئین		کلسیم		چربی خام	
تولید	حداقل	حداکثر	حداقل	حداکثر	حداقل	حداکثر	حداقل	حداکثر
خوراک گاو	۶	∞	۶	∞	۷	∞	۴	۸
خوراک گوسفند	۶	∞	۶	∞	۶	∞	۴	۶
خوراک طیور	۴	۶	۶	∞	۶	∞	۴	۶

این مسأله را طوری فرمول‌بندی کنید که کل هزینه می‌نیمم شود.

حل

متغیرهای تصمیم : x_{ij} عبارتست از تعداد واحد از ماده i ام برای تولید محصول j ام

	غذای گاو	غذای گوسفند	غذای مرغ	هزینه
ذرت	x_{11}	x_{12}	x_{13}	۰/۲
سنگ آهک	x_{21}	x_{22}	x_{23}	۰/۱۲
دانه سویا	x_{31}	x_{32}	x_{33}	۰/۲۴
پودر ماهی	x_{41}	x_{42}	x_{43}	۰/۱۲

محدودیت مواد موجود را با قیود زیر اعمال می‌کنیم:

$x_{11}+x_{12}+x_{13} \le 6000$: مقدار ذرت به کار رفته در ۳ نوع غذا

$x_{21}+x_{22}+x_{23} \le 10000$: مقدار سنگ آهک به کار رفته در ۳ نوع غذا

$x_{31}+x_{32}+x_{33} \le 4000$: مقدار دانه سویا به کار رفته در ۳ نوع غذا

$x_{41}+x_{42}+x_{43} \le 5000$: مقدار پودر ماهی به کار رفته در ۳ نوع غذا

محدودیت مقدار غذای تولیدی برای هر دام را با قیود زیر اعمال می‌کنیم:

$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41} \ge 10000$: مقدار غذای تولیدی برای گاو

$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42} \ge 6000$: مقدار غذای تولیدی برای گوسفند

$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43} \ge 8000$: مقدار غذای تولیدی برای مرغ

و طبق مسأله هر کیلوگرم ماده غذایی حاوی مقدار معینی از ویتامین، پروتئین، کلسیم و چربی خام است. محدودیت‌هایی نیز برای مقدار ویتامین، پروتئین، کلسیم و چربی خام موجود در خوراک دام داریم:

$$\frac{8x_{11}+6x_{21}+10x_{31}+4x_{41}}{10000} \ge 6$$: محدودیت ویتامین برای غذای گاو

تقسیم بر ۱۰۰۰۰ یعنی این که ۶ حداقل ویتامینی است که باید در یک کیلوگرم غذای گاو وجود داشته باشد و $8x_{11}+6x_{21}+10x_{31}+4x_{41}$ مقدار ویتامینی است که از طریق چهار ماده غذایی ذرت، سنگ آهک، دانه سویا و پودر ماهی وارد ۱۰۰۰۰ کیلوگرم غذای گاو شده پس ویتامین موجود در هر کیلوگرم آن $\frac{8x_{11}+6x_{21}+10x_{31}+4x_{41}}{10000}$ است که باید از ۶ بیشتر باشد.

$$\frac{10x_{11}+5x_{21}+12x_{31}+8x_{41}}{10000} \ge 6$$: محدودیت پروتئین برای غذای گاو

$$\frac{6x_{11}+10x_{21}+6x_{31}+6x_{41}}{10000} \ge 7$$: محدودیت کلسیم برای غذای گاو

$$4 \le \frac{8x_{11}+6x_{21}+6x_{31}+9x_{41}}{10000} \le 8$$: محدودیت چربی خام برای غذای گاو

قیدهای مواد مغذی برای غذای گوسفند :

$$\frac{8x_{12}+6x_{22}+10x_{32}+4x_{42}}{6000} \geq 6$$: محدودیت ویتامین برای غذای گوسفند

$$\frac{10x_{12}+5x_{22}+12x_{32}+8x_{42}}{6000} \geq 6$$: محدودیت پروتئین برای غذای گوسفند

$$\frac{6x_{12}+10x_{22}+6x_{32}+6x_{42}}{6000} \geq 6$$: محدودیت کلسیم برای غذای گوسفند

$$4 \leq \frac{8x_{12}+6x_{22}+6x_{32}+9x_{42}}{6000} \leq 6$$: محدودیت چربی خام برای غذای گوسفند

قیدهای مواد مغذی برای غذای مرغ نیز به‌همین طریق نوشته می‌شود.

حال تابع هدف را می‌نویسیم:

$$\min z = 0/2\,(x_{11}+x_{12}+x_{13}) + 0/12\,(x_{21}+x_{22}+x_{23}) + 0/24\,(x_{31}+x_{32}+x_{33}) + 0/12\,(x_{41}+x_{42}+x_{43})$$

و نیز $x_{ij} \geq 0$ و $i = 1, 2, 3$ و $j = 1, 2, 3, 4$

۲- کارکنان فنی یک بیمارستان تصمیم دارند سیستم غذایی، کامپیوتری آن بیمارستان را توسعه دهند. ابتدا برنامه غذایی ناهار را بررسی می کنند. برنامه غذایی ناهار به سه گروه اصلی تقسیم می شود: سبزیجات، گوشت و دسر. در هر سفارش حداقل یک سرویس از هر گروه تقاضا می شود. هزینه هر سرویس از اقلام پیشنهادی به علاوه ترکیبات هیدروکربن‌ها، ویتامین‌ها، پروتئین‌ها و چربی در جدول زیر خلاصه می‌شود.

	هیدروکربن‌ها	ویتامین‌ها	پروتئین‌ها	چربی	هزینه‌سرویس برحسب‌دلار
سبزیجات					
نخود	۱	۳	۱	۰	۰/۱۰
نخود فرنگی	۱	۵	۲	۰	۰/۱۲
بامیه	۱	۵	۱	۰	۰/۱۳
ذرت	۲	۶	۱	۲	۰/۰۹
ماکارونی	۴	۲	۱	۱	۰/۱۰
برنج	۵	۱	۱	۱	۰/۷
گوشت					
مرغ	۲	۱	۳	۱	۰/۷۰
گوشت گاو	۳	۸	۵	۲	۱/۲۰
ماهی	۳	۶	۶	۱	۰/۶۳
دسر					
پرتقال	۱	۳	۱	۰	۰/۲۸
سیب	۱	۲	۰	۰	۰/۴۲
پودینگ	۱	۰	۰	۰	۰/۱۵
ژله	۱	۰	۰	۰	۰/۱۲

فرض کنید که حداقل هیدروکربن‌ها، ویتامین‌ها، پروتئین‌ها و چربی‌های مورد نیاز در هر وعده غذا به ترتیب ۵، ۱۰، ۱۰ و ۲ است.

الف) مسأله برنامه غذایی را به صورت برنامه‌ریزی خطی فرمول‌بندی کنید.

ب) بسیاری از جنبه‌های واقعی این مدل نادیده گرفته شده است، این جنبه‌ها شامل برنامه‌ریزی صبحانه، ناهار و شام با هم، برنامه‌ریزی هفتگی که در آن انواع غذاها استفاده شود، و برنامه غذایی ویژه بیماران، رژیم غذایی خاص، در مورد این که چگونه می‌توانیم این جنبه‌ها را در یک سیستم برنامه غذایی جامع تلفیق کنیم به تفصیل بحث کنید.

حل

متغیرهای تصمیم x_{ij} طبق جدول زیر معین شده‌اند:

	برنج	ماکارونی	ذرت	بامیه	نخودفرنگی	نخود
سبزی	x_{16}	x_{15}	x_{14}	x_{13}	x_{12}	x_{11}

	ماهی	گوشت گاو	مرغ
گوشت	x_{23}	x_{22}	x_{21}

	ژله	پودینگ	سیب	پرتقال
دسر	x_{34}	x_{33}	x_{32}	x_{31}

x_{ij}: مقدار غذای jام از گروه اصلی iام.

محدودیت هیدروکربن‌ها:

$$1x_{11}+1x_{12}+1x_{13}+2x_{14}+4x_{15}+5x_{16}+2x_{21}+3x_{22}+3x_{23}+1x_{31}+1x_{32}+1x_{33}+1x_{34}\geq 5$$

محدودیت ویتامین‌ها:

$$3x_{11}+5x_{12}+5x_{13}+6x_{14}+2x_{15}+1x_{16}+1x_{21}+8x_{22}+6x_{23}+3x_{31}+2x_{32}+0x_{33}+0x_{34}\geq 10$$

محدودیت پروتئین‌ها:

$$1x_{11}+2x_{12}+1x_{13}+1x_{14}+1x_{15}+1x_{16}+3x_{21}+5x_{22}+6x_{23}+1x_{31}+0x_{32}+0x_{33}+0x_{34}\geq 10$$

محدودیت چربی‌ها:

$$0x_{11}+0x_{12}+0x_{13}+2x_{14}+1x_{15}+1x_{16}+1x_{21}+2x_{22}+1x_{23}+0x_{31}+0x_{32}+0x_{33}+0x_{34}\geq 2$$

حال تابع هدف را می‌نویسیم:

$$\min z = 0.10x_{11}+0.12x_{12}+0.13x_{13}+0.09x_{14}+0.10x_{15}+0.07x_{16}+0.7x_{21}$$
$$+1.2x_{22}+0.63x_{23}+0.28x_{31}+0.42x_{32}+0.15x_{33}+0.12x_{34}$$

و نیز

$$x_{ij}\geq 0 \quad \text{برای} \quad \begin{array}{lll} i=1 & , & j=1,\dots,6 \\ i=2 & , & j=1,\dots,3 \\ i=3 & , & j=1,\dots,4 \end{array}$$

۳- مسأله تعیین مکان نصب یک ماشین جدید را در یک خط تولید شامل چهار ماشین درنظر بگیرید. این ماشین‌ها در مختصات x_1 و x_2 زیر تعبیه شده‌اند: $\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$. فرض کنید مختصات

ماشین جدید $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ است. مسأله یافتن بهترین مکان نصب ماشین جدید را در هر یک از حالت‌های زیر به‌صورت برنامه خطی فرمول‌بندی کنید.

الف) مجموع فواصل ماشین جدید از چهار ماشین می‌نیمم است، فاصله خیابانی را به کار ببرید، مثلاً فاصله نقطه $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ از ماشین اول $|x_1 - 3| + |x_2|$ است.

ب) به‌علت وجود جریان‌های مختلف میان ماشین جدید و ماشین‌های قبلی مسأله را وقتی مجموع فواصل وزین می‌نیمم می‌شود، تجدید فرمول کنید به طوری که اوزان متناظر با چهار ماشین به ترتیب ۵، ۷، ۳ و ۱ باشد.

ج) برای جلوگیری از تراکم ماشین‌ها، فرض کنید بخواهیم ماشین جدید در مربع $\{(x_1, x_2) : 0 \le x_1 \le 2, -1 \le x_2 \le 1\}$ نصب کنیم. قسمت‌های (الف) و (ب) را با این محدودیت اضافه فرمول‌بندی کنید.

د) فرض کنید بخواهیم ماشین جدید را طوری نصب کنیم که فاصله آن از ماشین اول از $\frac{3}{2}$ بیشتر نشود و مسأله را با این محدودیت اضافی فرمول‌بندی کنید.

حل

الف) هدف می‌نیمم‌سازی مجموع فواصل ماشین جدید از چهار ماشین قبلی است، پس :

$$\min \quad z = |x_1 - 3| + |x_2| + |x_1| + |x_2 + 3| + |x_1 + 2| + |x_2 - 1| + |x_1 - 1| + |x_2 - 4|$$

به‌طوری که

$$|x_1 - 3| + |x_1| + |x_1 + 2| + |x_1 - 1| \ge 6$$
$$|x_2| + |x_2 + 3| + |x_2 - 1| + |x_2 - 4| \ge 8$$

برای تبدیل مسأله فوق به یک مسأله خطی قرار می‌دهیم :

$$y_1 = |x_1 - 3| + |x_1| + |x_1 + 2| + |x_1 - 1|$$
$$y_2 = |x_2| + |x_2 + 3| + |x_2 - 1| + |x_2 - 4|$$

پس مسأله به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$\min \quad z = y_1 + y_2$$

به‌طوری که

$$y_1 \ge 6$$
$$y_2 \ge 8$$

ب)

$$\min \quad 5(|x_1 - 3| + |x_2|) + 7(|x_1| + |x_2 + 3|) + 3(|x_1 + 2| + |x_2 - 1|) + (|x_1 - 1| + |x_2 - 4|)$$

به‌طوری که

$$5|x_2| + 7|x_2 + 3| + 3|x_1 - 1| + |x_2 - 4| \ge 20$$
$$5|x_2| + 7|x_2 + 3| + 3|x_1 - 1| + |x_2 - 4| \ge 20$$

برای تبدیل به یک مسأله خطی قرار می‌دهیم :

$$y_1 = 5|x_1 - 3| + 7|x_1| + 3|x_1 + 2| + |x_1 - 1| \ge 8$$
$$y_2 = 5|x_2| + 7|x_2 + 3| + 3|x_2 - 1| + |x_2 - 4| \ge 20$$

بنابراین :

$$
\begin{aligned}
\min \quad & y_1 + y_2 \\
\text{به‌طوری که} \quad & y_1 \geq 8 \\
& y_2 \geq 20
\end{aligned}
$$

ج)

$$
\begin{aligned}
\min \quad & |x_1-3| + |x_2| + |x_1| + |x_2+3| + |x_1+2| + |x_2-1| \\
& + |x_1-1| + |x_2-4| \\
\text{به‌طوری که} \quad & -1 \leq x_1 \leq 2 \\
& 0 \leq x_2 \leq 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 5(|x_1-3| + |x_2|) + 7(|x_1| + |x_2+3|) + 3(|x_1+2| + |x_2-1|) \\
& + (|x_1-1| + |x_2-4|) \\
\text{به‌طوری که} \quad & -1 \leq x_1 \leq 2 \\
& 0 \leq x_2 \leq 1
\end{aligned}
$$

د)

$$
\begin{aligned}
\min \quad & |x_1-3| + |x_2| + |x_1| + |x_2+3| + |x_1+2| + |x_1-1| + |x_2-4| \\
\text{به‌طوری که} \quad & |x_1-3| + |x_2| \leq \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

۴- مسأله پرتاب یک راکت به ارتفاع b در زمان مفروض T که کمترین مقدار سوخت را مصرف می کند در نظر بگیرید. فرض کنید $u(t)$ قدرت شتاب فرار راکت و $y(t)$ ارتفاع آن در زمان t باشد. مسأله را می توان چنین فرمول‌بندی کرد

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \int_0^T |u(t)|\, dt \\
\text{به‌طوری که} \quad & \ddot{y}(t) = u(t) - g \\
& y(t) = b \\
& y(t) \geq 0 \qquad t \in [0, T]
\end{aligned}
$$

که در آن g نیروی شتاب ثقل و $\ddot{y}$ مشتق دوم ارتفاع y است. مسأله را به شکل گسسته بنویسید، و آن را به صورت یک برنامه خطی فرمول‌بندی کنید. به ویژه مسأله را در $T=10$ و $b=15$ و $g=32$ فرمول‌بندی کنید (راهنمایی: انتگرال با مجموع سره و مشتقات را با معادلات تفاضلی عوض کنید. تغییر متغیر $x_j = |u_j|$ را اعمال کنید و توجه کنید که $x_j \geq u_j$ ، $x_j \geq -u_j$)

حل

بازه زمانی $[0, T]$ را به‌صورت زیر افراز می‌کنیم:

$$
[0,\Delta], [\Delta, 2\Delta], \ldots, [(n-1)\Delta, n\Delta] \qquad , \qquad \Delta = \frac{T}{n}
$$

$|u_j| = x_j$ پس: $-x_j \leq u_j \leq x_j$.

همچنین با تعریف عملگر $\Delta f_i = f_i - f_{i-1}$ در آنالیز عددی ثابت می‌شود:

$$
y^{(n)}(t) = \frac{\Delta^n y_j}{h^n} \qquad , \qquad t \in (j\Delta, (j+1)\Delta)
$$

پس: $y^{(2)}(t) = \frac{\Delta^2 y_j}{h^2}$ و می‌توان نوشت:

$$y^2(t) = \frac{\Delta^2 y_j}{h^2} = \frac{\Delta(\Delta y_j)}{h^2} = \frac{\Delta(y_{j+1} - y_j)}{\Delta^2} = \frac{y_{j+2} - 2y_{j+1} + y_j}{\Delta^2} = x_j - g$$

پس مسأله را می‌توان به‌صورت گسسته زیر فرمول‌بندی کرد:

$$min\ z = \sum_{j=1}^{n} x_j \Delta$$

به‌طوری که

$$y_{j+2} - 2y_{j+1} + y_j = \Delta^2 x_j - \Delta^2 g$$
$$y_n = b \ ,\ y_j \geq 0 \ ,\ x_j \geq u_j \ ,\ x_j \geq -u_j$$
$$j = 1, \ldots, n$$

۵- شرکتی می‌خواهد برای دو فقره از تولیداتش با توجه به تقاضاهای فصلی برای مدت ۱۲ ماه برنامه‌ریزی کند. تقاضای ماهیانهٔ فقره یکصد هزار واحد در طول ماه‌های اکتبر، نوامبر و دسامبر: ده هزار واحد در طول ماه‌های ژانویه، فوریه، مارس و آوریل: سی هزار واحد در طول ماه‌های باقیمانده. تقاضای فقره ۲ در طول ماه‌های اکتبر تا فوریه ۵۰۰۰۰ واحد و ۱۵۰۰۰ واحد در طول ماه‌های باقیمانده است. فرض کنید که هزینه تولید فقره ۱ و ۲ به ترتیب ۵ و ۸ دلار است به شرطی که آنها قبل از ماه ژوئن تولید شده باشند. بعد از ماه ژوئن، به علت اصلاح سیستم تولید، هزینه دو فقره به ۴/۵ و ۷ دلار کاهش می‌یابد. تعداد کل اقلام تولیدی فقره ۱ و ۲ هر ماه در فاصله زمانی بین ماه‌های ژانویه - سپتامبر حداکثر ۱۲۰۰۰۰ و بین ماه‌های اکتبر - دسامبر حداکثر ۱۵۰۰۰۰ است. علاوه بر این، هر واحد از فقره ۱ دو فوت مکعب و هر واحد فقره ۲ چهار فوت مکعب از فضای انبار را اشغال می‌کند. فرض کنید که ماکزیمم فضای انبار که به این دو فقره می‌توان اختصاص داد ۱۵۰۰۰۰ فوت مکعب است و هزینهٔ نگهداری هر فوت مکعب در طول ماه ۰/۱ دلار است. مسأله زمان‌بندی تولید را طوری فرمول‌بندی کنید که کل هزینهٔ تولید و انبارداری می‌نیمم شود.

حل

متغیرهای تصمیم :

x_i : مقدار کالای تولید شده نوع اول در ماه iام.

y_i : مقدار کالای تولید شده نوع دوم در ماه iام.

x'_i : مقدار کالای تولید شده اضافی نوع اول در ماه iام.

y'_i : مقدار کالای تولید شده اضافی نوع دوم در ماه iام.

هدف می‌نیمم‌سازی هزینه تولید و انبارداری است :

$$min \quad z = 0/5 \sum_{i=1}^{6} x_i + 4/5 \sum_{i=7}^{12} x_i + 8 \sum_{i=1}^{6} y_i + 7 \sum_{i=7}^{12} y_i + 2 \sum_{i=1}^{12} x'_i + 0/4 \sum_{i=1}^{12} y'_i$$

قیود عبارتند از :

$$x_1 + x'_{12} - x'_1 = 10000 \qquad y_1 + y'_{12} - y'_1 = 50000$$
$$x_2 + x'_1 - x'_2 = 10000 \qquad y_2 + y'_1 - y'_2 = 50000$$
$$x_3 + x'_2 - x'_3 = 10000 \qquad y_3 + y'_2 - y'_3 = 15000$$

$$
\begin{array}{ll}
x_4 + x'_3 - x'_4 = 10000 & y_4 + y'_3 - y'_4 = 15000 \\
x_5 + x'_4 - x'_5 = 30000 & y_5 + y'_4 - y'_5 = 15000 \\
x_6 + x'_5 - x'_6 = 30000 & y_6 + y'_5 - y'_6 = 15000 \\
x_7 + x'_6 - x'_7 = 30000 & y_7 + y'_6 - y'_7 = 15000 \\
x_8 + x'_7 - x'_8 = 30000 & y_8 + y'_7 - y'_8 = 15000 \\
x_9 + x'_8 - x'_9 = 30000 & y_9 + y'_8 - y'_9 = 15000 \\
x_{10} + x'_9 - x'_{10} = 10000 & y_{10} + y'_9 - y'_{10} = 50000 \\
x_{11} + x'_{10} - x'_{11} = 10000 & y_{11} + y'_{10} - y'_{11} = 50000 \\
x_{12} + x'_{11} - x'_{12} = 10000 & y_{12} + y'_{11} - y'_{12} = 50000
\end{array}
$$

$$x_i + y_i = 120000 \quad ; \quad i = 1, \cdots, 9$$

$$x_i + y_i = 150000 \quad ; \quad i = 10, 11, 12$$

$$\sum_{i=1}^{12} (2x'_i + 4y'_i) \le 150000 \quad ; \quad x_i + y_i \ge 0$$

$$x'_i + y'_i \ge 0$$

$$i = 1, \cdots, 12$$

۶- یک کارخانه نساجی پنج نوع پارچه تولید می‌کند تقاضا (بر حسب هزار یارد) در طول سه ماه سال برای این نوع پارچه‌ها به ترتیب ۱۶، ۴۸، ۳۵، ۲۱ و ۸۲ است. این پنج نوع پارچه پس از بافت و دسته‌بندی در بازار هر یارد به ترتیب ۰/۹، ۰/۸، ۰/۸، ۱/۲ و ۰/۶ دلار فروخته می‌شود. علاوه بر تولید و بسته‌بندی در خود کارخانه، پارچه‌ها از خارج کارخانه نیز خریداری می‌شود و قبل از فروش در خود کارخانه بسته‌بندی می‌شود. اگر پارچه‌های بسته‌بندی نشده از خارج کارخانه خریداری شود هزینه پنج نوع پارچه هر یارد ۰/۸، ۰/۷، ۰/۷۵، ۰/۹ و ۰/۷ دلار است. اگر در خود کارخانه تولید شود هر یارد به ترتیب ۰/۶، ۰/۵، ۰/۶، ۰/۷ و ۰/۳ دلار هزینه بر می‌دارد. دو نوع دستگاه در کارخانه وجود دارد که می‌توانند پارچه تولید کنند. یعنی ۱۰ دستگاه Dobbie و ۸۰ دستگاه عادی. میزان تولید هر دستگاه Dobbie در ساعت برای پنج پارچه به ترتیب ۴/۶، ۴/۶، ۵/۲، ۳/۸ و ۴/۲ یارد است. دستگاه عادی به همان میزان دستگاه Dobbie تولید دارد ولی فقط پارچهٔ نوع ۳، ۴، و ۵ را می‌تواند تولید کند. با فرض این‌که کارخانه هفت روز هفته و هر روز هم ۲۴ ساعت کار می‌کند، مسأله برنامه‌ریزی بهینه برای برآورد تقاضای بازار برای سه ماه در سال را به‌صورت خطی فرمول‌بندی کنید. آیا فرمول‌بندی شما یک مسأله حمل و نقل است؟ اگر نه، مسأله را به‌صورت یک مسأله حمل و نقل دوباره فرمول‌بندی کنید.

حل

x_i : پارچه تولید شده نوع iام برحسب یارد.

y_i : پارچه خریداری شده نوع iام از بیرون برحسب یارد.

$x_i + y_i$: کل پارچه نوع iام

تابع هدف که ماکزیمم‌سازی سود است به‌صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
\max z = {} & (0/9 - 0/6)\, x_1 + (0/8 - 0/5)\, x_2 + (0/8 - 0/6)\, x_3 + (1/2 - 0/7)\, x_4 + (0/6 - 0/3)\, x_5 \\
& + (0/9 - 0/8)\, y_1 + (0/8 - 0/7)\, y_2 + (0/8 - 0/75)\, y_3 + (1/2 - 0/9)\, y_4 + (0/6 - 0/7)\, y_5
\end{aligned}
$$

از ماشین نوع Dobbie، ۱۰ دستگاه داریم، پس حداکثر ساعت کار این ماشین‌ها در طول این سه‌ماه عبارتست از:

$$۱۰ \times ۹۰ \times ۲۴ = ۲۱۶۰۰$$

حداکثر ساعت کار ماشین‌های معمولی در سه‌ماه:

$$۸۰ \times ۹۰ \times ۲۴ = ۱۷۲۸۰۰$$

بنابراین دو قید زیر را داریم:

$$\frac{x_1}{4/6}+\frac{x_2}{4/6}+\frac{x'_3}{5/2}+\frac{x'_4}{3/8}+\frac{x'_5}{4/2} \leq 21600$$

$$\frac{x''_3}{5/2}+\frac{x''_4}{3/8}+\frac{x''_5}{4/2} \leq 172800$$

که x'_i تولید پارچه نوع iام توسط دستگاه Dobbie و x''_i تولید پارچه نوع iام توسط دستگاه معمولی است، پس:

$$x'_3+x''_3=x_3$$
$$x'_4+x''_4=x_4$$
$$x'_5+x''_5=x_5$$

و نیز تولید این پارچه‌ها باید تقاضاها را نیز برآورده نماید:

$$x_1+y_1 \geq 16000$$
$$x_2+y_2 \geq 48000$$
$$x_3+y_3 \geq 35000$$
$$x_4+y_4 \geq 21000$$
$$x_5+y_5 \geq 82000$$

و باید داشته باشیم:

$$x_i, y_i \geq 0 \quad , \quad i=1,2,3,4,5$$
$$x'_i, x''_i \geq 0 \quad , \quad i=3,4,5$$

۷- شخصی ۲۲۰۰ دلار را می‌خواهد در پنج سال آینده سرمایه گذاری کند. در شروع هر سال او می‌تواند پولش را برای یک دوره یک ساله یا دو ساله به حساب سپرده بگذارد. بانک ۸ درصد سود به‌ازای هر سال سپرده و ۱۷ درصد (در کل) برای دو سال سپرده می‌پردازد. به علاوه، شرکتی برای سه سال سود تضمینی پیشنهاد می‌کند که شروع آن در شروع سال دوم است. این تضمین شامل ۲۷ درصد (درکل) است و اگر این شخص موجودی‌اش را هر سال سرمایه‌گذاری کند، یک برنامه خطی ارائه دهید تا به او نشان دهد چگونه باید سرمایه‌گذاری کند تا در پایان سال پنجم پول نقدش ماکزیمم شود.

حل

x_{ij} مقدار پول سرمایه‌گذاری شده در سال iام برای طرح jام باشد و S_i مقدار پول باقی‌مانده برای این شخص باشد.

$$\max z = 1/08x_{51} + 1/17x_{42} + 1/27x_{33} + S_5$$

به‌طوری که

$$x_{11}+x_{12}+S_1 = 2200$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+S_2 = S_1 + 1/08x_{11}$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+S_3 = S_2 + 1/08x_{21} + 1/17x_{12}$$

$$x_{41}+x_{42}+S_4=S_3+1/08x_{31}+1/17x_{22}$$
$$x_{51}+S_5=S_4+1/08x_{41}+1/17x_{32}+1/27x_{23}$$
$$x_{ij}\geq 0 \quad , \quad S_5\geq 0 \qquad i=1,2,3 \quad , \quad j=1,2,3,4$$

توضیح: در قید اوّل مجموع پول سرمایه‌گذاری شده در طرح ۱ و ۲ و پول باقی‌مانده برای شخص برابر کل سرمایه او یعنی ۲۲۰۰ است. سمت چپ قید دوّم پولی است که در سال دوّم در طرح ۱ و ۲ و ۳ سرمایه‌گذاری می‌شود به‌علاوه پول باقی‌مانده برای شخص و سمت راست قید ۲ در حقیقت سرمایه کنونی شخص است که عبارتست از پول باقی‌مانده از سال قبل به‌علاوه مقدار پولی که در سال اوّل در طرح ۱ سرمایه‌گذاری کرده بود یعنی x_{11} به‌علاوه سود آن یعنی $0/08x_{11}$ و به‌همین ترتیب بقیه قیدها را نیز می‌نویسیم و تابع هدف در حقیقت همان پول قابل سرمایه‌گذاری در آغاز سال ششم است، که باید ماکزیمم شود.

۸- یک کارخانه فولادسازی تیرآهن به شکل I را در چهار اندازه، کوچک، متوسط، بزرگ و خیلی بزرگ تولید می‌کند. هر یک از ماشین‌های A، B و C می‌تواند این تیرها را تولید کند. طول تیرآهن‌های تولیدی توسط ماشین‌ها در هر ساعت چنین خلاصه می‌شود.

تیرآهن	ماشین A	B	C
کوچک	۳۰۰	۶۰۰	۸۰۰
متوسط	۲۵۰	۴۰۰	۷۰۰
بزرگ	۲۰۰	۳۵۰	۶۰۰
خیلی بزرگ	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰

با فرض اینکه از هر ماشین تا ۵۰ ساعت در هفته می‌توان استفاده کرد و نیز هزینهٔ هر ساعت کار این ماشین‌هابه ترتیب ۳۰ دلار، ۵۰ دلار و ۸۰ دلار است. علاوه بر این با فرض اینکه ۱۰۰۰۰، ۸۰۰۰، ۶۰۰۰ و ۶۰۰۰ فوت از اندازه‌های مختلف تیر I در هر هفته لازم است، مسأله زمان‌بندی ماشین را به‌صورت برنامه‌ریزی خطی فرمول‌بندی کنید.

حل

x_i: تعداد ساعت کار ماشین iام در یک هفته.

تابع هدف که می‌نیمم‌سازی هزینه تولید است به‌صورت زیر است:

$$min\ z=30x_1+50x_2+80x_3$$

محدودیت مقدار تیرآهن تولیدی از هرنوع برحسب فوت:

ماشین A در یک ساعت از نوع کوچک ۳۰۰ فوت تولید می‌کند. بنابراین در x_1 ساعت کار مقدار $300x_1$ فوت تیرآهن نوع کوچک تولید می‌نماید. پس:

$$300x_1+600x_2+800x_3=10000$$
$$250x_1+400x_2+700x_3=8000$$
$$200x_1+350x_2+600x_3=6000$$
$$100x_1+200x_2+300x_3=6000$$

و محدودیت ساعت کار هر ماشین درهفته:

$0 \le x_i \le 50$ برای $i = 1,2,3,4$

توجه: فرمول‌بندی فوق برای حالتی است که هر ماشین بتواند به‌طور همزمان هرچهار نوع محصول را تولید کند. امّا اگر هر ماشین دریک لحظه فقط بتواند یک نوع محصول تولید کند. فرمول‌بندی زیر را داریم:

x_{ij}: تعداد ساعت کار ماشین i ام روی محصول نوع jام در یک هفته.

تابع هدف.

$$\min z = 30(x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}) + 50(x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}) + 80(x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34})$$

محدودیت مقدار تیرآهن تولیدی از هرنوع برحسب فوت:

$$\begin{cases} 300x_{11}+600x_{21}+800x_{31} = 10000 \\ 250x_{12}+400x_{22}+700x_{32} = 8000 \\ 200x_{13}+350x_{23}+600x_{33} = 6000 \\ 100x_{14}+200x_{24}+300x_{34} = 6000 \end{cases}$$

محدودیت زمان کار هرماشین دریک هفته:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} = 50 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} = 50 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} = 50 \\ x_{ij} \ge 0 \qquad i = 1,2,3 \qquad j = 1,2,3,4 \end{cases}$$

۹- یک شرکت دو نوع پنیر تولید می کند: پنیر سوئیسی و پنیر تند. شرکت ۶۰ کارگر مجرب دارد و می‌خواهد تعداد نیروی کاری خود را به ۹۰ کارگر در طول ۸ هفتهٔ آینده افزایش دهد. هر کارگر مجرب می‌تواند سه کارگر تازه استخدام جدید را در یک دورهٔ ۲ هفته‌ای آموزش دهد که در طول این مدت کارگران آموزش دهنده چیزی تولید نمی‌کنند. تولید ۱۰ پوند پنیر سوئیسی یک ساعت و تولید ۶ پوند پنیر تند نیز یک ساعت وقت می‌گیرد. یک هفته کاری چهل ساعت است. تقاضای هفتگی (برحسب ۱۰۰۰پوند) چنین خلاصه می‌شود:

نوع پنیر	هفته ۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
پنیر سوئیسی	۱۲	۱۲	۱۲	۱۶	۱۶	۲۰	۲۰	۲۰
پنیر تند	۸	۸	۱۰	۱۰	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲

فرض کنید هر کارگر کارآموز همان حقوق کارگر مجرب را دریافت کند. علاوه بر این، فرض کنید تاریخ مصرف پنیرها یک هفته باشد. شرکت چگونه باید دستمزد بپردازد و نیروهای جدید را آموزش دهد تا هزینه دستمزدها کم‌ترین شود؟ مسأله را به صورت برنامه خطی فرمول‌بندی کنید.

حل

x_{ij} : مقدار پنیرسوئیسی تولید شده در هفته i ام و فروخته شده در هفته j ام.

y_{ij} : مقدار پنیرتند تولید شده در هفته i ام و فروخته شده در هفته j ام.

t_k : تعداد کارگران آموزش دهنده در اول هفته k ام.

$k = 1,2,\dots,7$ چون طول مدّت آموزش ۲ هفته است پس اول هفته ۸ ام کارگر آموزش دهنده جدید

نمی‌گیریم.

M : دستمزد هر کارگر دریک هفته.

هدف : می‌نیمم‌سازی هزینه.

$$\begin{aligned} \min z = M\,[& ((60 - t_1) + 4t_1) + ((60 - t_1 - t_2) + 4t_1 + 4t_2) + ((60 - t_2 - t_3 + 3t_1) + 4t_2 + \\ & 4t_3) + ((60 - t_3 - t_4 + 3t_1 + 3t_2) + 4t_3 + 4t_4) + ((60 - t_4 - t_5 + 3t_1 + 3t_2 + 3t_3) + \\ & 4t_4 + 4t_5) + ((60 - t_5 - t_6 + 3t_1 + 3t_2 + 3t_3 + 3t_4) + 4t_5 + 4t_6) + ((60 - t_6 - t_7 + \\ & 3\sum_{i=1}^{5} t_i) + 4t_6 + 4t_7) + ((60 - t_7 + 3\sum_{i=1}^{6} t_i) + 4t_7)] \end{aligned}$$

چون کارخانه ۶۰ کارگر مجرب دارد و می‌خواهد نیروی کارخود رابه ۹۰ نفر افزایش دهد، پس تا آخر این ۸ هفته باید ۳۰ کارگر آموزش داده شوند، پس:

$$3\sum_{i=1}^{7} t_k = 30$$

طبق جدول محدودیت‌های زیر رانیز داریم:

$$x_{11} \geq 12$$
$$y_{11} \geq 8$$

چون پنیر تولیدی فقط یک هفته می‌تواند نگهداری شود:

$$x_{12} + x_{22} \geq 12$$
$$y_{12} + y_{22} \geq 8$$
$$x_{23} + x_{33} \geq 12$$
$$y_{23} + y_{33} \geq 10$$
$$x_{34} + x_{44} \geq 16$$
$$y_{34} + y_{44} \geq 10$$
$$x_{45} + x_{55} \geq 16$$
$$y_{45} + y_{55} \geq 12$$
$$x_{56} + x_{66} \geq 20$$
$$y_{56} + y_{66} \geq 12$$
$$x_{67} + x_{77} \geq 20$$
$$y_{67} + y_{77} \geq 12$$
$$x_{78} + x_{88} \geq 20$$
$$y_{78} + y_{88} \geq 12$$

کل ساعت کاری هر کارگر در یک هفته ۴۰ ساعت است.

پوند پنیرسوئیسی	ساعت
۱۰	۱
x_{11}	؟

مقدار ساعت صرف شده برای مقدار x_{11} پنیر $\Rightarrow \dfrac{x_{11}}{10}$

و چون کارگران آموزش دهنده کار نمی‌کنند پس تعداد کارگرانی که در هفته اول کار می‌کنند $60 - t_1$ است. پس قید زیر را داریم:

$$\frac{x_{11} + x_{12}}{10} + \frac{y_{11} - y_{12}}{6} \leq 40 \times (60 - t_1)$$

تعداد کارگرانی که در هفته دوم کار می‌کنند: $60 - (t_1 + t_2)$ پس:

$$\frac{x_{۲۲}+x_{۲۳}}{۱۰}+\frac{y_{۲۲}+y_{۲۳}}{۶} \le ۴۰ \times \left[۶۰-(t_۱+t_۲)\right]$$

در هفته سوم کارگران آموزش دیده در دو هفته قبل که تعداد آن‌ها $۳t_۱$ است مشغول به‌کار می‌شوند. بنابراین تعداد کارگرانی که در هفته سوم کار می‌کنند $(۶۰+۳t_۱)-t_۲-t_۳$ است. پس:

$$\frac{x_{۳۳}+x_{۳۴}}{۱۰}+\frac{y_{۳۳}+y_{۳۴}}{۶} \le ۴۰ \times \left[(۶۰+۳t_۱)-t_۲-t_۳\right]$$

به‌همین ترتیب تا هفته هشتم:

$$\frac{x_{۴۴}+x_{۴۵}}{۱۰}+\frac{y_{۴۴}+y_{۴۵}}{۶} \le ۴۰ \times \left[(۶۰+۳t_۱+۳t_۲)-t_۳-t_۴\right]$$

$$\frac{x_{۵۵}+x_{۵۶}}{۱۰}+\frac{y_{۵۵}+y_{۵۶}}{۶} \le ۴۰ \times \left[(۶۰+۳t_۱+۳t_۲+۳t_۳)-t_۴-t_۵\right]$$

$$\frac{x_{۶۶}+x_{۶۷}}{۱۰}+\frac{y_{۶۶}+y_{۶۷}}{۶} \le ۴۰ \times \left[(۶۰+۳t_۱+۳t_۲+۳t_۳+۳t_۴)-t_۵-t_۶\right]$$

$$\frac{x_{۷۷}+x_{۷۸}}{۱۰}+\frac{y_{۷۷}+y_{۷۸}}{۶} \le ۴۰ \times \left[\left[۶۰+۳\sum_{k=۱}^{۵} t_k\right]-t_۶-t_۷\right]$$

$$\frac{x_{۸۸}}{۱۰}+\frac{y_{۸۸}}{۶} \le ۴۰ \times \left[\left[۶۰+۳\sum_{k=۱}^{۶} t_k\right]-t_۷\right]$$

و نیز:

$$i=۱,\dots,۸$$
$$x_{ij}\ ,\ y_{ij}\ ,\ t_k \ge ۰ \qquad j=۱,\dots,۸$$
$$t_k \text{ صحیح} \qquad k=۱,\dots,۷$$

۱۰- یک میله فولادی به طول ۳۶ اینچ داریم و با کمک یک دستگاه برش می‌خواهیم قطر آن را از ۱۴ اینچ به ۱۲ اینچ برسانیم. $x_۱$ سرعت دورانی (دور در دقیقه)، $x_۲$ سرعت عمقی (اینچ در دقیقه) و $x_۳$ سرعت طولی (اینچ در دقیقه) کمیت‌های موردنظر هستند که باید مشخص شوند. مدت زمان برش با رابطهٔ $\frac{۳۶}{x_۲x_۳}$ داده می‌شود. تراکم و فشار کناری وارد بر دستگاه برش به‌ترتیب با رابطهٔ $۳۰x_۱+۴۰۰۰x_۲$ و $۴۰x_۱+۶۰۰۰x_۲+۶۰۰۰x_۳$ پوند بر اینچ مربع است. درجه حرارت تیغهٔ برش برحسب فارنهایت $۲۰۰+\frac{۱}{۲}x_۱+۱۵۰(x_۲+x_۳)$ است. ماکزیمم تراکم، فشار کناری و درجه حرارت مجاز به‌ترتیب ۱۵۰۰۰۰، ۱۰۰۰۰۰ هر اینچ مربع و ۸۰۰ درجه فارنهایت است. می‌خواهیم سرعت (که باید در فاصله ۶۰۰ تا ۸۰۰ دور در هر دقیقه باشد)، عمق برش و طول برش را تعیین کنیم به طوری که زمان برش می‌نیمم شود. برای به‌کارگیری یک مدل خطی تقریب زیر ارائه می‌شود. چون $\frac{۳۶}{x_۲x_۳}$ می‌نیمم است اگروفقط‌اگر $x_۲x_۳$ ماکزیمم باشد، تابع هدف با ماکزیمم می‌نیمم $x_۲$ و $x_۳$ جای‌گزین می‌کنیم. مسأله را به‌صورت یک مدل خطی فرمول‌بندی کنید و درستی تقریب به‌کار رفته در تابع هدف رابورسی کنید. (در تمرین ۳-۲۶ حل این مسأله خواسته شده است.)

حل

$$\max \quad \min\{x_۲,x_۳\}$$

به‌طوری که

$$۳۰x_۱+۴۰۰۰x_۲ \le ۱۵۰۰۰۰$$
$$۴۰x_۱+۶۰۰۰x_۲+۶۰۰۰x_۳ \le ۱۰۰۰۰۰$$

$$0/5x_1 + 150x_2 + 150x_3 + 200 \le 800$$
$$600 \le x_1 \le 800$$
$$x_j \ge 0 \quad for \quad j = 1,2,3$$

برای تبدیل مسأله فوق به شکل برنامه‌ریزی خطی قرار می‌دهیم: $y = min\ \{x_2, x_3\}$ پس داریم:

$$max \quad y$$

به‌طوری که

$$y \le x_2$$
$$y \le x_3$$
$$30x_1 + 4000x_2 \le 150000$$
$$40x_1 + 6000x_2 + 6000x_3 \le 100000$$
$$0/5x_1 + 150x_2 + 150x_3 + 200 \le 800$$
$$600 \le x_1 \le 800$$
$$x_j \ge 0 \quad for \quad j = 1,2,3$$

y : آزاد

۱۱- پالایشگاهی می‌تواند دو نوع نفت خریداری کند: نفت خام سفید و نفت خام سنگین. هزینهٔ هر شبکه به‌ترتیب ۱۱ و ۹ دلار است. محصولات گازوئیل، نفت سفید، سوخت هواپیمای تولیدی از هر شبکه مطابق جدول زیر است:

	گازوئیل	نفت سفید	سوخت هواپیما
نفت خام سفید	۰/۴	۰/۲	۰/۳۵
نفت خام سنگین	۰/۳۲	۰/۴	۰/۲

قابل‌توجه است که در هنگام فرایند پالایش به‌ترتیب ۵ درصد و ۸ درصد آنها هدرمی‌رود. پالایشگاه برای تحویل ۱ میلیون بشکه گازوئیل، ۴۰۰۰۰۰ بشکه نفت سفید و ۲۵۰۰۰۰ بشکه سوخت هواپیما قراردادی امضا کرده است. مسألهٔ یافتن تعداد بشکه‌های دونوع نفت خام را برای برآوردن تقاضا و می‌نیمم‌سازی کل هزینه به‌صورت یک مدل خطی فرمول‌بندی کنید. (در تمرین ۳-۲۷ حل این مسأله خواسته شده است.)

حل

x_i : تعداد بشکه‌های نفت از نوع iام که باید خریداری شود و $i = 1, 2$

نفت خام $i = 2 \rightarrow$; نفت سفید $i = 1 \rightarrow$

هدف می‌نیمم‌سازی هزینه است:

$$min \quad z = 11x_1 + 9x_2$$

به‌طوری که

$$0/4x_1 + 0/32x_2 = 10^6$$
$$0/2x_1 + 0/4\ x_2 = 400000$$
$$0/35x_1 + 0/2\ x_2 = 250000$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

۱۲- شرکتی مونتاژ محصولی را به‌عهده دارد که شامل قاب- میله فلزی و بلبرینگ است. شرکت میله فلزی و قاب را خود تولید می‌کند اما بلبرینگ را از تولیدکننده دیگری خریداری می‌کند. هرمیله فلزی باید مراحل ماشین سندان، ماشین تراش و ماشین تیزکن را بگذراند. این مراحل به ترتیب $\frac{1}{2}$ ساعت، ۰/۲ ساعت و ۰/۳ ساعت برای هر میله فلزی وقت می‌گیرد. هر قاب ۰/۸ ساعت در ماشین سندان، ۰/۱ ساعت در ماشین سوراخ‌کن و ۰/۳ ساعت در آسیاب و ۰/۵ ساعت در ماشین تیزکن وقت می‌گیرد. شرکت ۵ ماشین‌تراش، ۱۰ ماشین‌تیزکن، ۲۰ ماشین سندان، ۳ ماشین سوراخ‌کن و ۶ آسیاب دارد. با فرض این که هر ماشین ماکزیمم ۲۴۰۰ ساعت در هر سال کار می‌کند، مسأله یافتن ماکزیمم تعداد مؤلفه‌های محصول تولیدی مونتاژ را به صورت یک مدل خطی فرمول‌بندی کنید. (حل این مسأله در تمرین ۳-۴۴ خواسته شده است.)

حل

x_1 : تعداد میله فلزی که در یک‌سال باید تولید شود.

x_2 : تعداد قاب که در یک‌سال باید تولید شود.

ماکزیمم ساعت کار ۲۰ ماشین سندان در یک‌سال $= 20 \times 2400 = 48000$

ماکزیمم ساعت کار ۵ ماشین تراش در یک‌سال $= 5 \times 2400 = 12000$

ماکزیمم ساعت کار ۱۰ ماشین تیزکن در یک‌سال $= 10 \times 2400 = 24000$

ماکزیمم ساعت کار ۳ ماشین سوراخ‌کن در یک‌سال $= 3 \times 2400 = 7200$

ماکزیمم ساعت کار ۶ ماشین آسیاب در یک‌سال $= 6 \times 2400 = 14400$

$$\max z = x_1 + x_2$$

به‌طوری که

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x_1 + 0/8x_2 &\le 48000 \\ 0/2x_1 &\le 12000 \\ 0/3x_1 + 0/5x_2 &\le 24000 \\ 0/1x_2 &\le 7200 \\ 0/3x_2 &\le 14400 \\ x_1, \quad x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

۱۳- یک شرکت تولیدکننده تلویزیون تصمیم دارد تلویزیون سیاه و سفید و رنگی تولید کند. ارزیابی بازار نشان می‌دهد که حداکثر می‌توان ۱۰۰۰ تلویزیون رنگی و ۴۰۰۰ تلویزیون سیاه و سفید در ماه فروش داشت. ماکزیمم تعداد نفر- ساعت موجود در هر ماه ۵۰۰۰۰ است. یک تلویزیون رنگی ۲۰ نفر - ساعت و یک تلویزیون سیاه و سفید ۱۵ نفر - ساعت وقت می‌گیرد. سود حاصل از تلویزیون رنگی و سیاه و سفید به ترتیب ۶۰ و ۳۰ دلار است. می‌خواهیم تعداد تلویزیون‌هایی را پیدا کنیم که شرکت باید از هر نوع تولید کند تا سود آن ماکزیمم شود. مسأله را فرمول‌بندی کنید. (حل این مسأله در تمرین ۳-۴۵ خواسته شده است.

حل

x_i: تعداد تلویزیون‌های نوع i ام که باید تولید شوند.

محدودیت نفر - ساعت کارخانه در هر ماه : $20x_1 + 15x_2 \le 50000$

محدودیت بازار برای تولید:

$x_1 \le 1000$

$x_2 \le 4000$

تابع هدف : $max\ z = 60x_1 + 30x_2$

پس کلاً مسأله به صورت مقابل است:

$$\max z = 60x_1 + 30x_2$$

به طوری که :

$$\begin{aligned} 20x_1 + 15x_2 &\le 50000 \\ x_1 \quad\quad &\le 1000 \\ x_2 &\le 4000 \\ x_1, \quad x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

۱۴- یک تولیدکننده محصولات پلاستیکی محصول جدیدی را با ترکیب چهار ماده شیمیایی طراحی کرده است. این مواد عمدتاً حاصل ترکیب سه عنصر است: A ، B ، C . درصد ترکیبی و هزینه هر واحد از این مواد شیمیایی در جدول زیر آمده است:

ماده شیمیایی	۱	۲	۳	۴
درصد A	۳۰	۲۰	۴۰	۲۰
درصد B	۲۰	۶۰	۳۰	۴۰
درصد C	۴۰	۱۵	۲۵	۳۰
هزینه /کیلوگرم	۲۰	۳۰	۲۰	۱۵

محصول جدید شامل ۲۰ درصد از عنصر A ، حداقل ۳۰ درصد از عنصر B و حداقل ۲۰ درصد از عنصر C است. با توجه به تأثیر مواد شیمیایی ۱ و ۲، این مواد از ۳۰ درصد و ۴۰ درصد محصول جدید بیش‌تر نیست. مسأله یافتن حداقل هزینه محصول ترکیبی را به صورت برنامه خطی فرمول‌بندی کنید. (حل این مسأله در تمرین ۵-۳۰ خواسته شده است.)

حل

x_i : مقدار ماده شیمیائی نوع i ام به کار رفته در محصول جدید.

محدودیت مقدار درصد عنصر A به کار رفته در محصول جدید:

$$\frac{30}{100}x_1 + \frac{20}{100}x_2 + \frac{40}{100}x_3 + \frac{20}{100}x_4 = \frac{20}{100}$$

مثلاً $\frac{30}{100}x_1$ مقدار عنصر A به کار رفته در ماده شیمیائی نوع ۱ است.

محدودیت مقدار درصد عنصر B به کار رفته در محصول جدید:

$$\frac{20}{100}x_1 + \frac{60}{100}x_2 + \frac{30}{100}x_3 + \frac{40}{100}x_4 \ge \frac{30}{100}$$

محدودیت مقدار درصد عنصر C به کار رفته در محصول جدید:

$$\frac{40}{100}x_1 + \frac{15}{100}x_2 + \frac{25}{100}x_3 + \frac{30}{100}x_4 \ge \frac{20}{100}$$

و نیز : $x_2 \le \frac{40}{100}$, $x_1 \le \frac{30}{100}$

پس در کل مسأله به شکل زیر است:

$$\min \quad z = 20x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 15x_4$$

به طوری که

$$0/3x_1 + 0/2x_2 + 0/4x_3 + 0/2x_4 = 0/2$$
$$0/2x_1 + 0/6x_2 + 0/3x_3 + 0/4x_4 \geq 0/3$$
$$0/4x_1 + 0/15x_2 + 0/25x_3 + 0/3x_4 \geq 0/2$$
$$x_1 \leq 0/3$$
$$x_2 \leq 0/4$$
$$x_1, \quad x_2 \geq 0$$

۱۵ - یک مدیر تولید زمان‌بندی سه محصول روی چهار ماشین را برنامه‌ریزی می‌کند. هر محصول می‌تواند با هر ماشین تولید شود. هزینه تولید هر واحد (بر حسب دلار) چنین است:

محصول	ماشین ۱	۲	۳	۴
۱	۴	۴	۵	۷
۲	۶	۷	۵	۶
۳	۱۲	۱۰	۸	۱۱

زمان لازم (بر حسب ساعت) برای تولید هر واحد محصول در هر ماشین در جدول زیر آمده است.

محصول	ماشین ۱	۲	۳	۴
۱	۰/۳	۰/۲۵	۰/۲	۰/۲
۲	۰/۲	۰/۳	۰/۲	۰/۲۵
۳	۰/۸	۰/۶	۰/۶	۰/۵

فرض کنید که ۴۰۰۰ ، ۵۰۰۰ و ۳۰۰۰ واحد از محصولات مورد نیاز است، و نیز ماشین - ساعت موجود به‌ترتیب ۱۵۰۰، ۱۲۰۰، ۱۵۰۰ و ۲۰۰۰ باشد. مسأله زمان‌بندی را به صورت یک برنامه خطی فرمول‌بندی کنید. (حل مسأله در تمرین ۱۰-۲۱ خواسته شده است.)

حل

x_{ij} : تعداد محصول i ام که توسط ماشین j ام باید تولید گردد.

ابتدا تابع هدف که می‌نیمم سازی هزینه تولید است را می نویسیم:

$$\min z = 4x_{11} + 4x_{12} + 5x_{13} + 7x_{14} + 5x_{23} + 6x_{24} + 12x_{31} + 10x_{32} + 8x_{33} + 11x_{34}$$

محدودیت زمانی هر ماشین به صورت زیر است:

محدودیت زمانی ماشین ۱ : $0/3x_{11} + 0/2x_{21} + 0/8x_{31} \leq 1500$

محدودیت زمانی ماشین ۲ : $0/25x_{12} + 0/3x_{22} + 0/6x_{32} \leq 1200$

محدودیت زمانی ماشین ۳ : $0/2x_{13} + 0/2x_{23} + 0/6x_{33} \leq 1500$

محدودیت زمانی ماشین ۴ : $0/2x_{14} + 0/25x_{24} + 0/5x_{34} \leq 2000$

محدودیت تولید هر محصول :

تعداد واحد تولیدی محصول ۱ : $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 4000$

تعداد واحد تولیدی محصول ۲ : $x_{21} + x_{22} + x_{23} = 5000$

$x_{31}+x_{32}+x_{33}=3000$: تعداد واحد تولیدی محصول ۳

و نیز:

$x_{ij}\geq 0 \quad , \quad i=1,2,3 \quad , \quad j=1,2,3,4$

۱۶- یک تولیدکننده مبلمان خانگی سه کارخانه دارد که در هر هفته ۵۰۰، ۷۰۰ و ۶۰۰ تن الوار احتیاج دارند. تولیدکننده، الوارهای مورد نیازش را از سه شرکت می‌تواند خریداری کند. دو شرکت اول در تحویل الوارها واقعاً محدودیتی ندارند، ولی شرکت سوم به دلیل سایر تعهداتش حداکثر در هر هفته می‌تواند ۵۰۰ تن الوار تحویل دهد. شرکت اول از راه آهن استفاده می‌کند و محدودیتی در توناژ باری که به تولیدکننده تحویل می‌دهد ندارد. از طرف دیگر، دو شرکت دیگر از کامیون برای حمل الوارها استفاده می‌کنند و ماکزیمم باری که می‌توانند به هر تولیدکننده تحویل دهند ۲۰۰ تن است. جدول زیر هزینه حمل و نقل از شرکت الوار به کارخانه‌های مبلمان سازی را (بر حسب هر تن دلار) ارائه می‌دهد:

شرکت الوار	کارخانه مبلمان سازی ۱	۲	۳
۱	۲	۳	۵
۲	۲/۵	۴	۴/۸
۳	۳	۳/۶	۳/۲

مسأله را به صورت یک برنامه‌ریزی خطی فرمول‌بندی کنید. (حل مسأله در تمرین ۱۰-۳۴ خواسته شده است.)

حل

x_{ij} : مقدار الواری که از شرکت الوار i ام به کارخانه مبل سازی jام باید بر حسب تُن حمل شود. هدف می‌نیمم سازی هزینه حمل و نقل است:

$$\min\ z=2x_{11}+3x_{12}+5x_{13}+2/5x_{21}+4x_{22}+4/8x_{23}+3x_{31}+3/6x_{32}+3/2x_{33}$$

قیود احتیاج کارخانه‌های مبل سازی:

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=500$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=700$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=600$$

قید محدودیت شرکت الوار سوم:

$$x_{31}+x_{32}+x_{33}\leq 500$$

قیود محدودیت شرکت الوار دوم و سوم در حمل و نقل:

$$0\leq x_{22}\leq 200$$
$$0\leq x_{21}\leq 200$$
$$0\leq x_{23}\leq 200$$
$$0\leq x_{31}\leq 200$$
$$0\leq x_{32}\leq 200$$
$$0\leq x_{33}\leq 200$$
$$x_{11},x_{12},x_{13}\geq 0$$

۱۷- یک شرکت تعاونی می‌خواهد در سال آینده به ۳ شرکت اقماری‌اش سی میلیون دلار اعتبار تخصیص دهد. به‌علت تعهداتش به کارکنان ثابت شرکت و به دلایل دیگر، شرکت تعاونی یک حداقل تخصیصی برای هر یک از شرکت‌ها در نظر گرفته است. این مبالغ به‌ترتیب ۳ میلیون، ۵ میلیون و ۸ میلیون دلار است. شرکت اقماری ۲ به‌خاطر ماهیت عملیاتی‌اش بدون افزایش سرمایه اولیه‌اش نمی‌تواند بیش از ۱۷ میلیون دلار به‌کار اندازد. شرکت تعاونی در حال حاضر تمایلی به افزایش سرمایه ندارد. هر شرکت با پولی که دریافت می‌کند فرصت اجرای پروژه‌های مختلفی را دارد. نرخ بهره (در صورت درصدی از سرمایه‌گذاری) به‌ازای هر پروژه تدوین شده است. به علاوه، در بعضی از پروژه‌ها در جذب سرمایه سقفی وجود دارد. داده‌های هر پروژه در زیر آمده است:

شرکت اقماری	پروژه	نرخ بهره	سقف سرمایه‌گذاری
۱	۱	٪۸	۶ میلیون دلار
	۲	٪۶	۵ میلیون دلار
	۳	٪۷	۹ میلیون دلار
۲	۴	٪۵	۷ میلیون دلار
	۵	٪۸	۱۰ میلیون دلار
	۶	٪۹	۴ میلیون دلار
۳	۷	٪۱۰	۶ میلیون دلار
	۸	٪۶	۳ میلیون دلار

این مسأله را به صورت یک برنامه خطی فرمول‌بندی کنید. (حل این مسأله در تمرین ۹-۵۰ خواسته شده است.)

حل

x_{ij}: مقدار پولی که شرکت i ام برای پروژه jام خود سرمایه‌گذاری می‌کند بر حسب میلیون دلار.

قیود حداقل تخصیص برای هر شرکت:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}\geq 3$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}\geq 5$$
$$x_{31}+x_{32}\geq 8$$

قیود محدودیت سقف سرمایه‌گذاری هر شرکت در پروژه‌هایش:

$$0\leq x_{11}\leq 6 \qquad 0\leq x_{12}\leq 5 \qquad 0\leq x_{13}\leq 9$$
$$0\leq x_{21}\leq 7 \qquad 0\leq x_{22}\leq 10 \qquad 0\leq x_{23}\leq 4$$
$$0\leq x_{31}\leq 6 \qquad 0\leq x_{32}\leq 3$$

قید مقدار کل سرمایه‌گذاری در تمام شعبه‌ها:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{31}+x_{32}=30$$

و تابع هدف ماکزیمم‌سازی بهره‌دهی کل پروژه‌ها است:

$$max\ z=\frac{8}{100}x_{11}+\frac{6}{100}x_{12}+\frac{7}{100}x_{13}+\frac{5}{100}x_{21}+\frac{8}{100}x_{22}+\frac{9}{100}x_{23}+\frac{10}{100}x_{31}+\frac{6}{100}x_{32}$$

۱۸- قرار است ۱۰ جریب زمین برای بهره‌برداری در شهر نیویورک آماده شود. مقامات شهر باید روی طرح توسعه تصمیم‌گیری کنند. دو نوع طرح خانه‌سازی قرار است بررسی شود! خانه‌های کم درآمد،

خانه‌های با درآمد متوسط. در هر جریب زمین می‌توان ۲۰ واحد کم درآمد و ۱۵ واحد با درآمد متوسط خانه‌سازی کرد. هزینه هر واحد از خانه‌های کم درآمد ۱۳۰۰۰ دلار و هزینه هر واحد از خانه‌های با درآمد متوسط ۱۸۰۰۰ دلار است. حداقل و حداکثر تعداد خانه‌های کم درآمد که باید توسط مقامات شهری احداث شود ۶۰ و ۱۰۰ است به طریق مشابه حداقل و حداکثر تعداد خانه‌های با درآمد متوسط ۳۰ و ۷۰ است. ماکزیمم تعداد تقاضای بالقوه هر دو نوع طرح ۱۵۰ برآورد می‌شود (که این رقم به‌دلیل وجود متقاضی یا متقاضیانِ همزمانِ دو نوع طرح از مجموع سقف‌های دو طرح کم‌تر است). کل مبلغ رهن تعهد شده طرح جدید از دو میلیون دلار کم‌تر است. سرانجام، مهندس مشاور تعداد خانه‌های کم‌درآمد را از یک و نیم برابر تعداد خانه‌های با درآمد متوسط ۵۰ واحد بیش‌تر پیشنهاد کرده است.

الف) می‌نیمم هزینه مسأله طرح‌ریزی جدید را به‌صورت برنامه خطی فرمول‌بندی کنید و آن‌را به‌طور نموداری حل کنید.

ب) مسأله را وقتی تابع هدف ماکزیمم تعداد خانه‌هایی بگیریم که قرار است ساخته شود، دوباره فرمول‌بندی کنید.

حل

x_{1j} : تعداد خانه‌های کم درآمد که باید در جریب jام ساخته شوند.

x_{2j} : تعداد خانه‌های با درآمد متوسط که باید در جریب jام ساخته شوند. $\qquad j = 1, \dots, 10$

تابع هدف می‌نیمم سازی هزینه:

$$\min z = 13000 \sum_{j=1}^{10} x_{1j} + 18000 \sum_{j=1}^{10} x_{2j}$$

به‌طوری که

$$60 \le \sum_{j=1}^{10} x_{1j} \le 100$$

$$30 \le \sum_{j=1}^{10} x_{2j} \le 70$$

$$\sum_{j=1}^{10} x_{1j} = \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{10} x_{2j} + 50$$

$$13000 \sum_{j=1}^{10} x_{1j} + 18000 \sum_{j=1}^{10} x_{2j} \le 2 \times 10^{6}$$

$$\sum_{j=1}^{10} x_{1j} = \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{10} x_{2j} + 50$$

$$0 \le x_{1j} \le 20$$

$$0 \le x_{2j} \le 15 \qquad \text{برای} \quad j = 1, \dots, 10$$

$$\sum_{j=1}^{10} x_{1j} + \sum_{j=1}^{10} x_{2j} - \theta \le 150$$

$$0 \le \theta \le 20$$

که θ تعداد متقاضی همزمان هر دو طرح است.

ب) متغیرهای تصمیم همان‌هایی که در قسمت (الف) ذکر شده، می‌باشند.

تابع هدف ماکزیمم‌سازی تعداد خانه‌هایی که قرار است ساخته شود می‌باشد:

$$\max \quad z = \sum_{j=1}^{10} x_{1j} + \sum_{j=1}^{10} x_{2j}$$

و قیود همان قیود قسمت (الف) می‌باشند.

۱۹- یک منطقه به m ناحیه مسکونی و تجاری تقسیم می‌شود. هر ناحیه با یک گره نشان داده می‌شود و گره‌ها با خطوطی که نمایانگر مسیرهای اصلی هستند به هم وصل می‌شود. ساکنین نواحی مختلف می‌توانند به نواحی تجاری ناحیه خودشان یا نواحی دیگر بروند به طوری که به هر گره تعدادی سفر ختم می‌شود یا مبدأ تعدادی سفر است. به ویژه، فرض کنید a_{ij} تعداد سفرهای به مبدأ i و به مقصد j باشد و فرض کنید b_{ij} زمان سفر از گره i به گره j باشد. می‌خواهیم مسیرهای انتخابی توسط ساکنین را مشخص کنیم:

الف) مسأله را با یک شبکه مناسب شرح دهید.

ب) بعضی از عوامل مؤثر در این مسأله تخصیص ترافیک را توسعه دهید و به‌ازای هر یک از آن‌ها مدل مناسب را توصیه کنید.

حل

متغیرهای تصمیم : x_{ij} تعداد سفرهایی که در طول کمان (i, j) انجام می‌شود.

مدت زمان سفر از گره i به j = b_{ij}.

هدف می‌نیمم‌سازی زمان سفرها است :

$$min \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} b_{ij} x_{ij}$$

به‌طوری که

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - \sum_{k=1}^{m} x_{jk} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \quad for \quad j = 1, \cdots, m$$

$$0 \le x_{ij} \le a_{ij}$$

که در آن : $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$ همان تعداد سفرهایی است که به گره j داریم.

$\sum_{k=1}^{m} x_{jk}$ همان تعداد سفرهایی است که از گره j خارج می‌شوند.

$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$ تعداد افرادی که در گره jام می‌مانند.

۲۰- مسأله زمان‌بندی رسیدگی به دعاوی در یک دورهٔ زمانی شامل n دوره را در نظر بگیرید. فرض کنید b_j ساعت‌های حضور قاضی در دادگاه در دوره jام، h_{ij} تعداد دعاوی نوع iام که در دورهٔ jام طرح می‌شود باشد، a_i تعداد ساعت‌های لازمی باشد که برای دعوای نوع iام باید صرف قضاوت کرد. تعیین تعداد دعاوی نوع iام که باید در دوره jام رسیدگی شود، مدنظر است:

الف) مسأله را به صورت مدل خطی فرمول‌بندی کنید.

ب) مدل قسمت (الف) را به طریقی اصلاح کنید که رسیدگی به دعاوی برای یک مدت طولانی به تأخیر نیفتد.

حل

x_{ij} : تعداد دعاوی نوع i ام که باید در دوره jام رسیدگی شود.

هدف ما ماکزیمم‌سازی تعداد دعاوی رسیدگی شده است :

$$max \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} x_{ij}$$

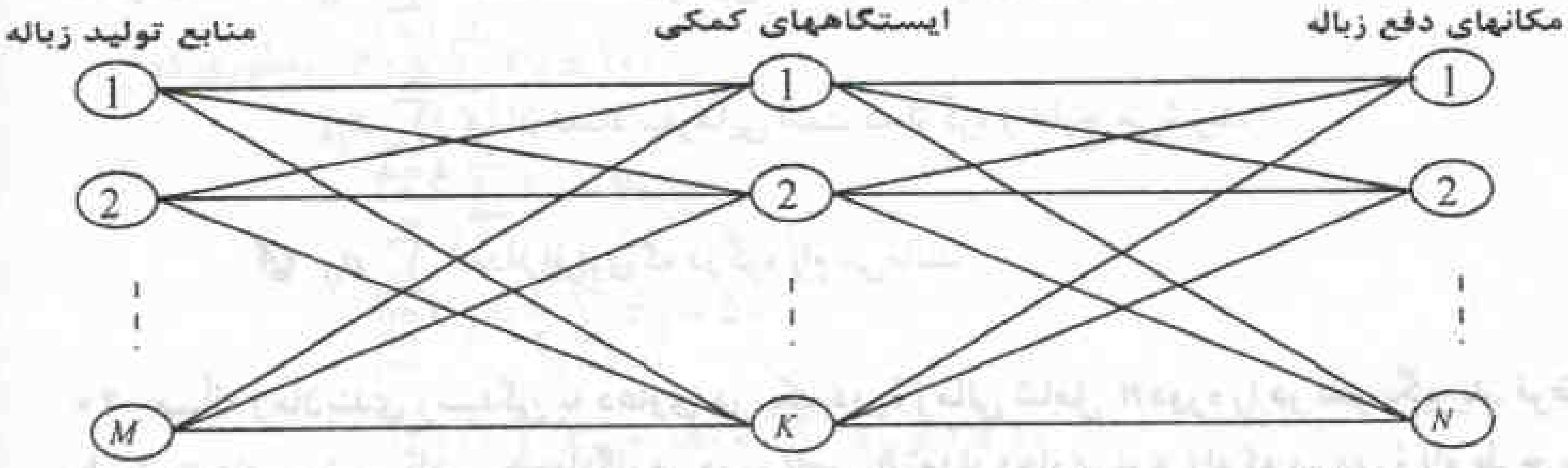
فرض کنیم k نوع دعاوی داشته باشیم.

قیدهای زیر را نیز داریم:

به طوری که
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k} a_i x_{ij} \le b_j \\ 0 \le x_{ij} \le h_{ij} \\ i=1,\ldots,k \qquad , \qquad j=1,\ldots,n \end{cases}$$

۲۱- فرض کنید m منبع تولید زباله و n مکان دفع آن وجود دارد. مقدار زباله تولیدی در منبع iام a_i و ظرفیت مکان jام b_j است. می‌خواهیم از بین k ایستگاه کمکی که جهت انتقال زباله‌ها درنظر گرفته شده است، ایستگاه کمکی مناسب را انتخاب کنیم. ایستگاه کمکی بالقوه kام دارای هزینه ثابت f_k و ظرفیت q_k و هزینه پردازش α_k به‌ازای هر تن زباله است. فرض کنید c_{ik} و $\bar{c}_{kj}$ به ترتیب هزینه‌های حمل از منبع iام به ایستگاه انتقال kام و از ایستگاه انتقال به مکان دفع زباله jام باشد. مسأله انتخاب ایستگاه انتقال و الگوی حمل و نقل است به طوری که کل سرمایه و هزینه عملیاتی ایستگاه به‌علاوه هزینه حمل و نقل می‌نیمم شود. این مسأله توزیع را فرمول‌بندی کنید. (راهنمایی: فرض کنید اگر ایستگاه انتقال kام انتخاب شود y_k مساوی ۱ است و سایر موارد صفر است.)

حل



x_{it} : مقدار زباله‌ای که از منبع iام به ایستگاه کمکی tام باید حمل شود.

P_{tj} : مقدار زباله‌ای که از ایستگاه کمکی tام باید به محل دفع jام حمل شود.

ونیز:
$$y_t = \begin{cases} 1 & \text{ایستگاه کمکی } t \text{ ام انتخاب شود :} \\ 0 & \text{ایستگاه کمکی } t \text{ ام انتخاب نشود :} \end{cases}$$

هدف می‌نیمم‌سازی هزینه حمل‌ونقل و هزینه عملیاتی ایستگاه‌های کمکی است.

$$min\ z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{k} c_{it} x_{it} + \sum_{t=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_{tj} P_{tj} + \sum_{t=1}^{k} f_t y_t + \sum_{t=1}^{k} \alpha_t q_t$$

به‌طوری که

$$\sum_{i=1}^{m} x_{it} = \sum_{j=1}^{n} P_{tj} = q_t \qquad t=1,\ldots,k$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{it} \le q_t y_t \qquad t=1,\ldots,k$$

$$\sum_{t=1}^{k} x_{it} \geq a_i \qquad i = 1,\ldots,m$$
$$\sum_{t=1}^{k} P_{it} \leq b_j \qquad j = 1,\ldots,n$$
$$y_t = 0, 1 \qquad t = 1,\ldots,k$$
$$x_{it} \geq 0 \qquad i = 1,\ldots,m \quad t = 1,\ldots,k$$
$$P_{tj} \geq 0 \qquad t = 1,\ldots,k \quad j = 1,\ldots,n$$

۲۲- یک بنگاه برنامه‌ریزی دولتی می‌خواهد مقادیر خرید نفت سفید مورد استفاده در n انبار را در m مزایده مشخص کند. فرض کنید ماکزیمم کمیت پیشنهادی در مزایده i ام a_i گالن و نیز تقاضای انبار jام b_j گالن باشد، فرض کنید c_{ij} هزینه هر واحد حمل و نقل از محل مزایده i ام به انبار jام باشد. مسأله می‌نیمم کردن کل هزینه خرید را به‌صورت برنامه خطی فرمول‌بندی کنید.

حل

x_{ij} : تعداد گالن‌هایی که از مزایده i ام باید حمل شود.

مزایده	n	...	۲	۱	
a_1	c_{1n}	...	c_{12}	c_{11}	۱
a_2	c_{2n}	...	c_{22}	c_{21}	۲
a_3	c_{3n}	...	c_{32}	c_{31}	۳
⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮
a_m	c_{mn}	...	c_{m2}	c_{m1}	m
انبار	b_n	...	b_2	b_1	

جدول هزینه حمل‌ونقل:

الف)

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

به‌طوری که

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \quad \text{برای} \quad j = 1,\ldots,m$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_j \quad \text{برای} \quad j = 1,\ldots,n$$
$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1,\ldots,m \quad j = 1,\ldots,n$$

۲۳- کیفیت هوا در یک ناحیه صنعتی، بسیار زیاد به انتشار گازهای خروجی n کارخانه مستقر در آن ناحیه بستگی دارد. هر کارخانه می‌تواند m نوع سوخت مختلف مصرف کند. فرض کنید کل انرژی مورد نیاز کارخانه jام در هر روز b_j واحد انگلیسی ترمال و نیز c_{ij} مقدار گاز خروجی به‌ازای هر تن سوخت مصرفی نوع i ام در کارخانه jام است. به‌علاوه، فرض کنید هر تن سوخت نوع i ام c_i دلار هزینه در بردارد و نیز هر تن این نوع سوخت a_{ij} ترمال انرژی در کارخانهٔ jام تولید می‌کند. میزان آلودگی هوای این ناحیه از b

میکروگرم در مترمکعب بیش‌تر نیست. سرانجام، فرض کنید γ_j پارامتر اندازه‌گیری انتشار گازهای خروجی jام باشد.

الف) مسأله تعیین سوخت‌های ترکیبی که باید در هر کارخانه مصرف شود را فرمول‌بندی کنید.

ب) چگونه فن‌آوری یکسانی را که استفاده از بعضی سوخت‌های ترکیبی را در بعضی از کارخانه ممنوع می‌سازد، اعمال می‌کنید؟

ج) چگونه از به‌کارگیری یکسان آن در کارخانه‌ها مطمئن می‌شوید؟

حل

متغیرهای تصمیم : x_{ij} میزان سوخت مصرفی نوع iام در کارخانه jام برحسب تن.

تابع هدف می‌نیمم‌سازی هزینه خرید سوخت است یعنی :

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

و نیز ترکیب سوخت‌های مصرفی در کارخانه jام باید نیاز b_j ترمال انرژی را برآورده کند پس قید مقابل را داریم

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ij} = b_j \qquad for \quad j = 1, \cdots, n$$

جهت کنترل آلودگی هوا قید زیر را قرار می‌دهیم :

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij} c_{ij} \leq b$$

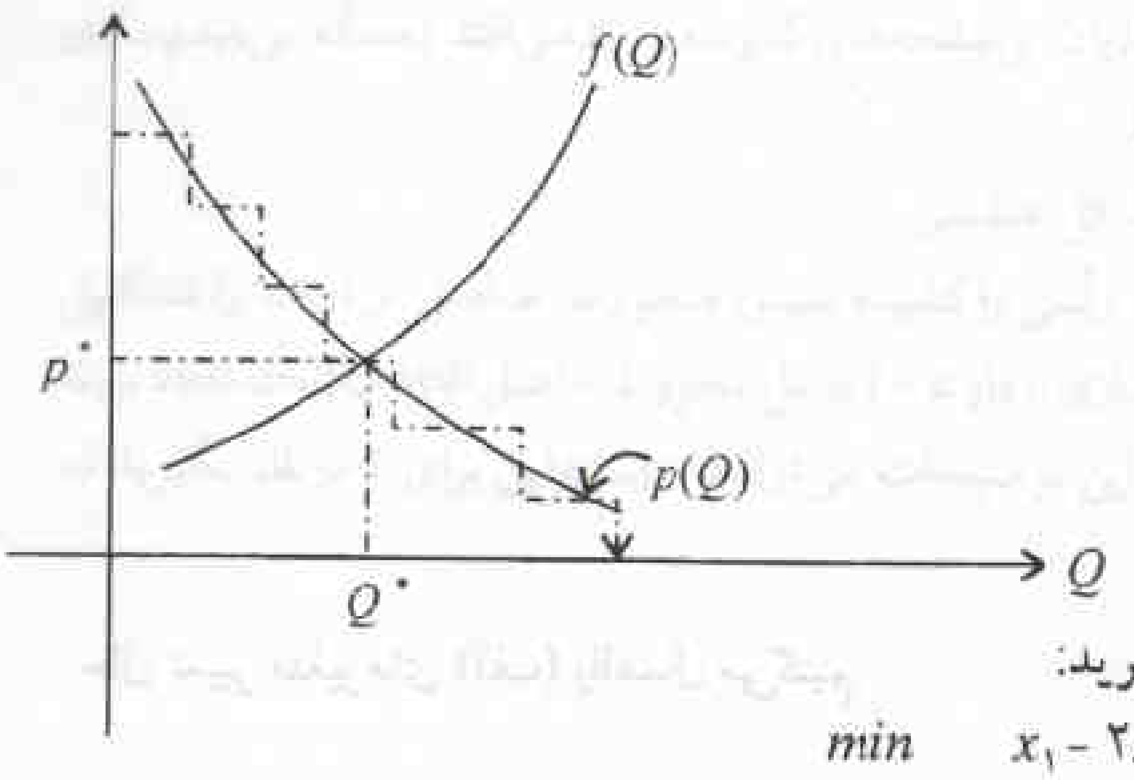
و نیز :

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{برای} \quad \begin{array}{l} i = 1, \cdots, m \\ j = 1, \cdots, n \end{array}$$

۲۴- در یک مرکز صنعتی ، فرض کنید $p(Q)$، $Q \geq 0$، منحنی معکوس تقاضا باشد. یعنی $p(Q)$ قیمت Q واحد محصول مورد تقاضا است. فرض کنید $f(Q)$، $Q \geq 0$، منحنی هزینه متفرقه یا هزینه عرضه باشد، یعنی $f(Q)$ قیمت Q واحد از محصولی باشد که مرکز صنعتی می‌خواهد آنرا تهیه کند. مسأله تعیین قیمت تعادلی (رقابتی) و تولید p^* و Q^* توابع $p(\circ)$ و $f(\circ)$ را از طریق محل تقاطع منحنی‌های عرضه و تقاضا نظیر آنچه در شکل ۱-۱۴ نشان داده شده است درنظر بگیرید. توجه دارید که Q^* مقداری از Q است که به‌ازای آن سطح زیر منحنی تقاضا منهای سطح زیرمنحنی عرضه ماکزیمم شود. اکنون فرض کنید که $f(\circ)$ را مستقیماً در اختیار نداشته باشیم، ولی منحنی هزینه‌های متفرقه که به‌صورت زیر داده شده موجود باشد:

$$\int_0^Q f(x)dx = \min \{cy : Ay = b, \alpha y = Q, y \geq 0\}$$

که در آن A از بعد $m\times n$، α و c از بعد $1\times n$ و y یک بردار n مؤلفه‌ای نمایش دهنده مجموعه فعالیت‌های تولیدی است. به‌علاوه، فرض کنید که منحنی تقاضا $p(\circ)$ را با پله‌های نشان داده شده در شکل تقریب زده شود (فرض کنید s پله به ارتفاع H_i و عرض W_i و $i = 1, 2, \ldots, s$ در این تقریب به‌کار رود.) با این تقریب، مسأله تعیین قیمت تعادلی را به صورت برنامه خطی فرمول‌بندی کنید.



شکل ۱-۱۴: عرضه و تقاضای تعادلی مسأله ۱-۲۴

۲۵- مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\min \quad x_1 - 2x_2 - 3x_3$$

به‌طوری که

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 14 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leq 12 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1,\ x_2 &\ \text{نامقید} \\ x_3 &\leq -3 \end{aligned}$$

الف) مسأله را در شکل استاندارد فرمول‌بندی کنید. ب) مسأله را در شکل متعارفی فرمول‌بندی کنید. ج) مسأله را به یک مسأله ماکزیمم‌سازی تبدیل کنید.

حل

الف) چون x_1 و x_2 نامقید هستند قرار می‌دهیم:

$$x_1 = x - x'_1 \quad ; \quad x_2 = x - x'_2$$

$$x,\ x'_1 \geq 0 \qquad\qquad x,\ x'_2 > 0$$

$y = -3 - x_3 \geq 0$ پس $x_3 = -3 - y$

$$\min z = x - x'_1 - 2(x - x'_2) - 3(-3-y)$$

به‌طوری که

$$\begin{aligned} x - x'_1 + 2(x - x'_2) + (-3-y) + x_4 &= 14 \\ x - x'_1 + 2(x - x'_2) + 4(-3-y) + x_5 &= 12 \\ x - x'_1 - (x - x'_2) + (-3-y) &= 2 \\ x,\ x'_1,\ x'_2,\ y,\ x_4,\ x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\min z = -x - x'_1 + 2x'_2 + 3y + 9$$

به‌طوری که

$$\begin{aligned} 3x - x'_1 - 2x'_2 - y + x_4 &= 17 \\ 3x - x'_1 - 2x'_2 - 4y - x_5 &= 12 \\ -x'_1 - 2x'_2 - y &= 5 \\ x,\ x'_1,\ x'_2,\ y,\ x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\min z = x_1 - 2x_2 - 3x_3$$

به‌طوری که

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -14 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 12 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \geq -2 \\ x_1, \; x_2 \; \text{نامقید} \\ x_3 \leq -3 \end{cases}$$

حال تغییر متغیرهای (الف) رااعمال می‌کنیم:

$$\min z = -x - x_1' + 2x_2' + 3y + 9$$

به‌طوری که

$$\begin{cases} -3x + x_1' + 2x_2' + y \geq -17 \\ 3x - x_1' - 2x_2' - 4y \geq 24 \\ -x_1' + x_2' - y \geq 5 \\ x_1' - x_2' + y \geq -5 \\ x, x_1', x_2', y \geq 0 \end{cases}$$

ایکس ۲ حذف شد

برای ایکس ۱ اندیس بنویسیم

ج) کافیست تابع هدف را در یک منفی ضرب کنیم:

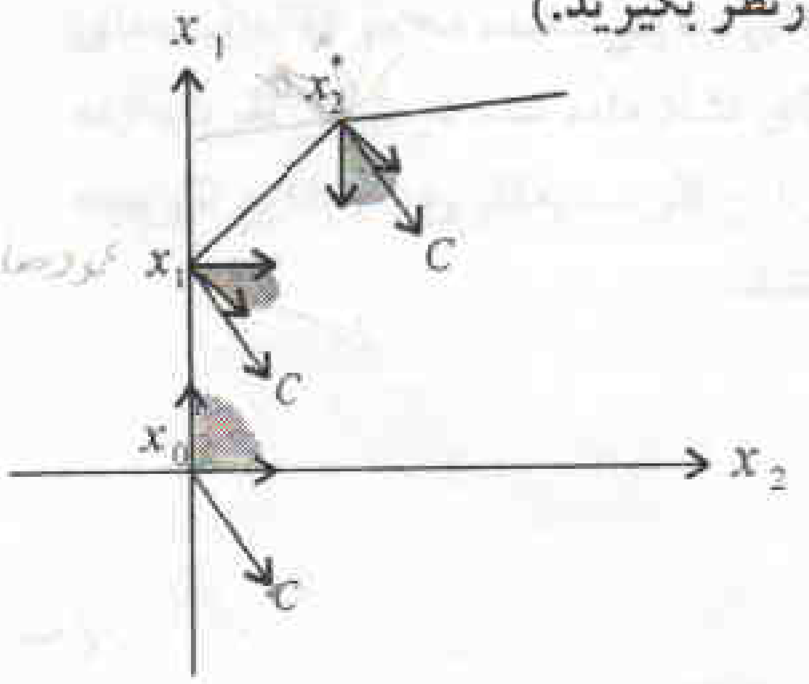
$$\max \; -x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

به‌طوری که

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 14 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 12 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1, \; x_2 \; \text{نامقید} \\ x_3 \leq -3 \end{cases}$$

۲۶- ناحیهٔ شدنی شکل ۱-۵- ب را در نظر بگیرید. به‌طور هندسی، شرایطی روی بردار گرادیان تابع هدف c تعیین کنید تا نقاط مختلف ناحیهٔ شدنی بهینه شود و شرایطی روی بردار c تعیین کنید تا هیچ بهینه‌ای وجود نداشته باشد. (مسأله را به‌صورت می‌نیمم‌سازی درنظر بگیرید.)

حل



چون در نقطهٔ x_2 بردار c داخل مخروط حاصل از گرادیان ابرصفحه‌های گذرنده از x_2 می‌افتد (مسأله می‌نیمم‌سازی است) بنابراین x_2^* نقطهٔ بهینهٔ شکل ۱-۵ ب می‌باشد.

یک روش کلی برای پی‌بردن به نقطهٔ بهینه از روی شکل هندسی :

ابتدا بردارهای گرادیان ابرصفحه‌های گذرنده از نقاط رأسی را کشیده سپس مخروط حاصل از آن‌ها را تشکیل می‌دهیم. در می‌نیمم‌سازی اگر بردار c (در ماکزیمم‌سازی بردار $c-$) داخل مخروط حاصل افتاد آن‌گاه آن نقطهٔ بهینه است در غیر این‌صورت نقطه بهینه نیست. حال با این توضیحات می‌توانید جهت‌هایی برای c درنظر بگیرید که جواب مسأله را پیدا کنید.

۲۷- مسأله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{lrl} \max & x_1 - x_2 & \\ \text{به‌طوری که} & -x_1 + 2x_2 & \leq 0 \\ & -3x_1 + x_2 & \geq -3 \\ & x_1, \; x_2 & \geq 0 \end{array}$$

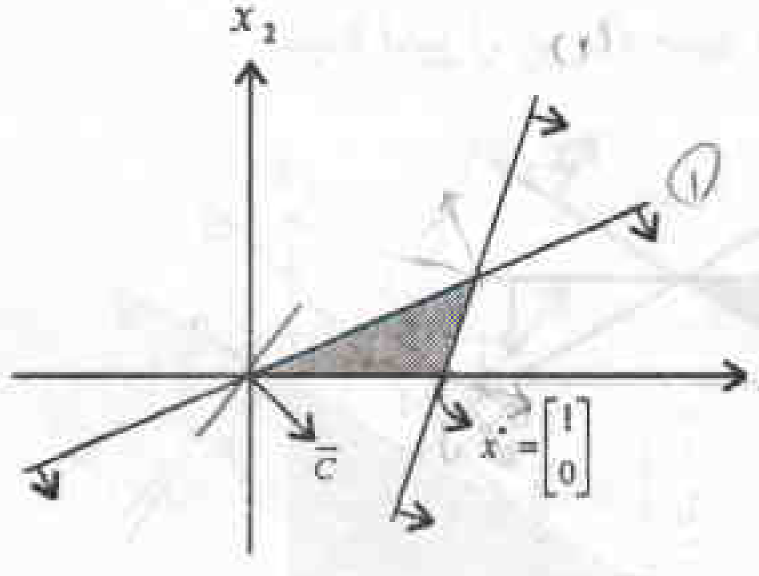
الف) ناحیه شدنی را در فضای (x_1, x_2) رسم کنید.

ب) ناحیه‌های فضای (x_1, x_2) را مشخص کنید که متغیرهای کمکی x_3 و x_4، مثلاً، صفر شوند.

ج) مسأله را به طور هندسی حل کنید.   د)فضای احتیاج را رسم کنید و شدنی بودن را تعبیر کنید.

حل

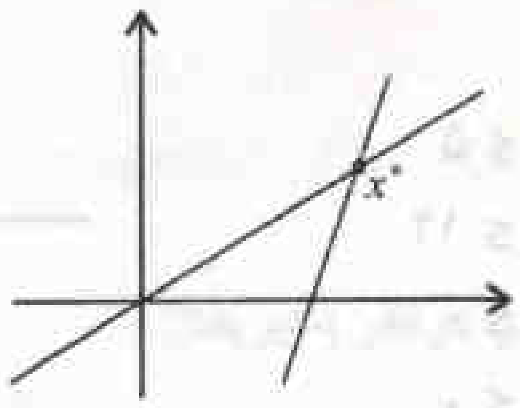
الف)



$$x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad z^* = 1$$

ب)

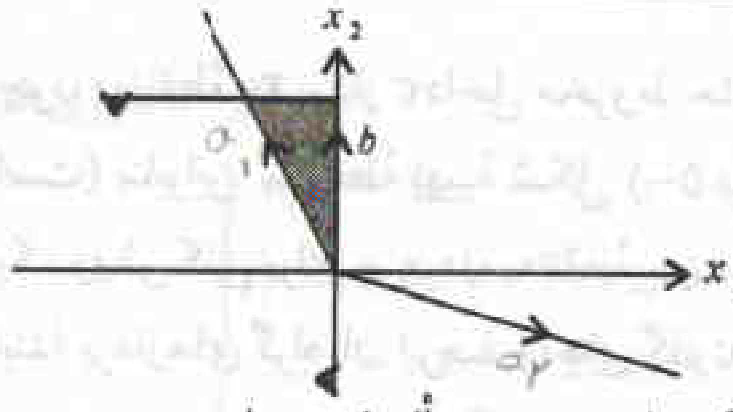
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ -3x_1 + x_2 = -3 \\ x_1, \; x_2 \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{x_3 = x_4 = 0} \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - x_4 = -3 \\ x_1, \; x_2 \qquad \geq 0 \end{cases}$$



در این حالت فضا فقط یک نقطه است.

$$x^\circ = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

ج) جواب بهینه از راه هندسی در قسمت (الف) داده شده است.

د)


$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 0 \\ 3x_1 - x_2 \le 3 \end{cases} \qquad a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

چون ناحیه بردارهای کوچکتر از b و مخروط حاصل از a_1 و a_2 اشتراک دارند پس مسأله شدنی است.

۲۸- ناحیهٔ شدنی مجموعهٔ $\{x : Ax \le b\}$ را که در آن A و b به‌صورت زیر داده شده‌اند، رسم کنید. در هر حالت پاسخ دهید که آیا ناحیه شدنی تهی است یا نه و آیا کران‌دار است یا خیر؟

الف) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

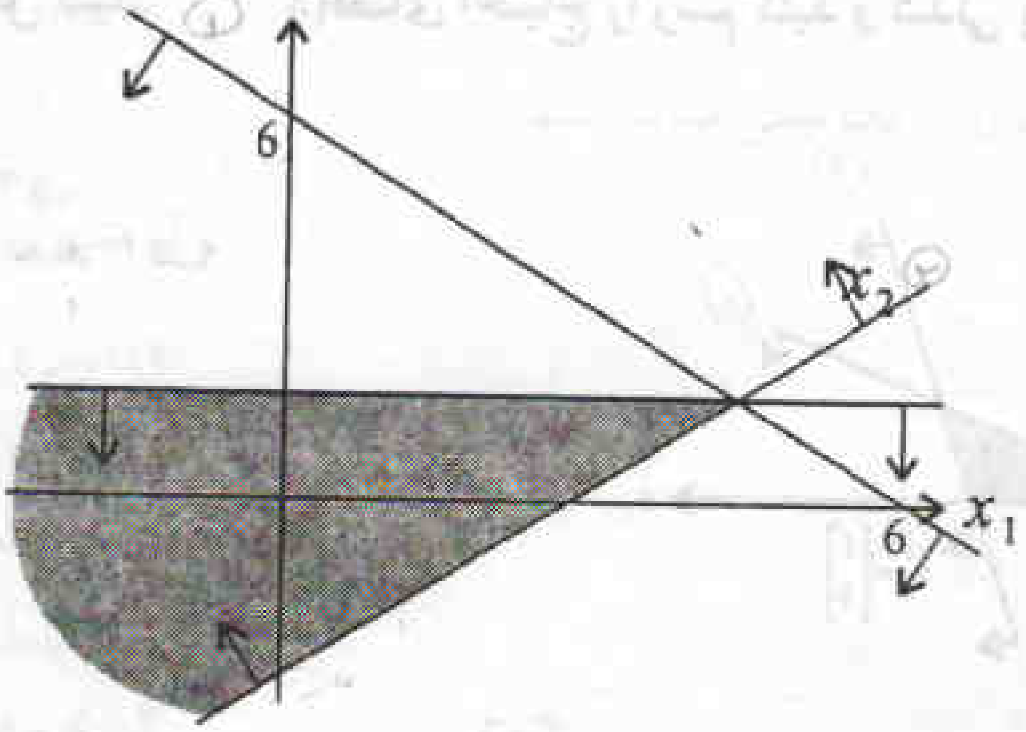
ب) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$

ج) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 4 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix}$

حل

الف)

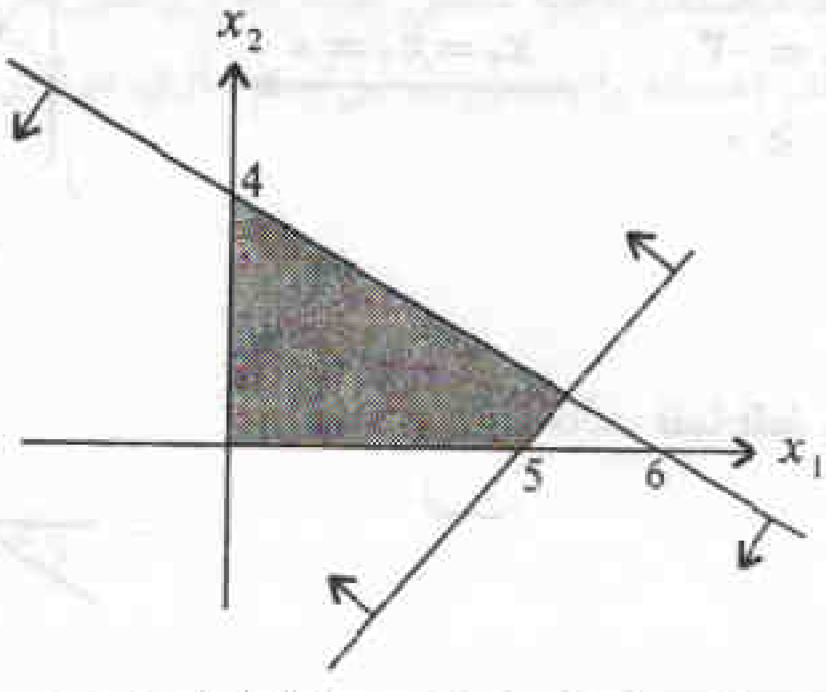
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 & (1) \\ 2x_1 - x_2 \le 6 & (2) \\ x_2 \le 2 & (3) \end{cases}$$



در این حالت ناحیه شدنی غیرتهی و بی‌کران است و یک قید زائد داریم.

ب)

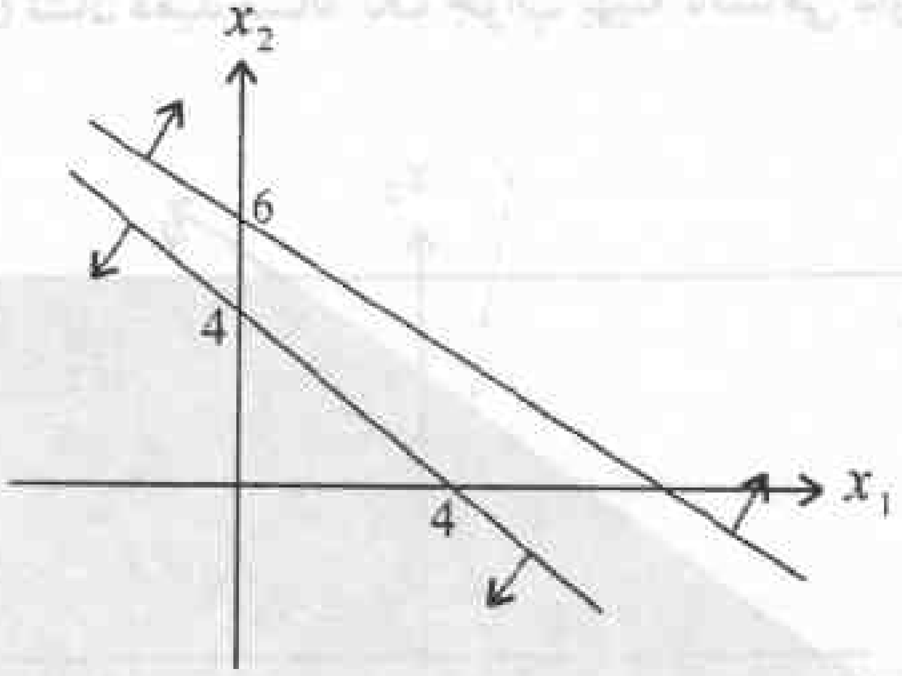
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 5 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ -x_1 \le 0 \\ -x_2 \le 0 \end{cases}$$



ناحیه شدنی غیرتهی و کراندار است.

ج)

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 \le 4 \\ -x_1 - 2x_2 \le -12 \\ -x_1 \qquad\ \ \le 0 \end{cases}$$



ناحیه شدنی تهی است.

۲۹- مسأله زیر را درنظر بگیرید:

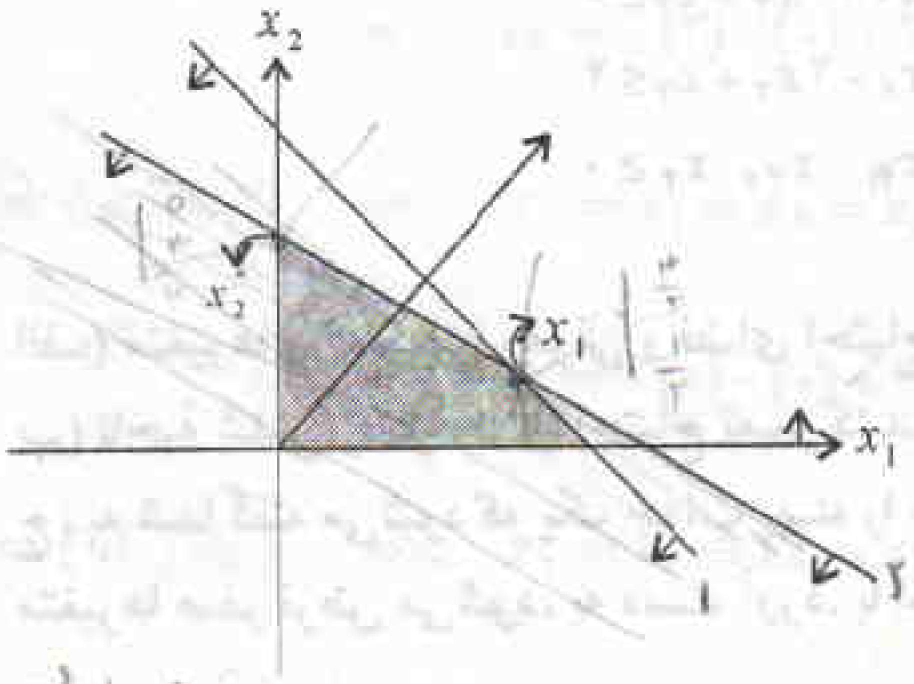
$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{به‌طوری که} \quad & x_1 + \ x_2 \le 2 \\ & 4x_1 + 6x_2 \le 9 \\ & x_1, \quad x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

الف) ناحیه شدنی را رسم کنید. ب) دو نقطه رأسی (گوشه‌ای) بهینه دگرین را پیدا کنید.

ج) مجموعه نامتناهی جواب‌های بهینه را پیدا کنید.

حل

الف)



ب) $x_2^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ و $x_1^* = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ و $z^* = \frac{9}{2}$

گردی ۲ تا است نقطه رأسی

ج) هر نقطه روی پاره خط واصل دو نقطه گوشه‌ای x_1^* و x_2^* جواب بهینه است:

$$A = \{ x \mid x = \lambda x_1^* + (1-\lambda) x_2^* \ ; \ 0 \le \lambda \le 1 \}$$

$$\Rightarrow \ A = \left\{ \left[\frac{3}{2}\lambda , \frac{3}{2} - \lambda \right]' \mid \ 0 \le \lambda \le 1 \right\}$$

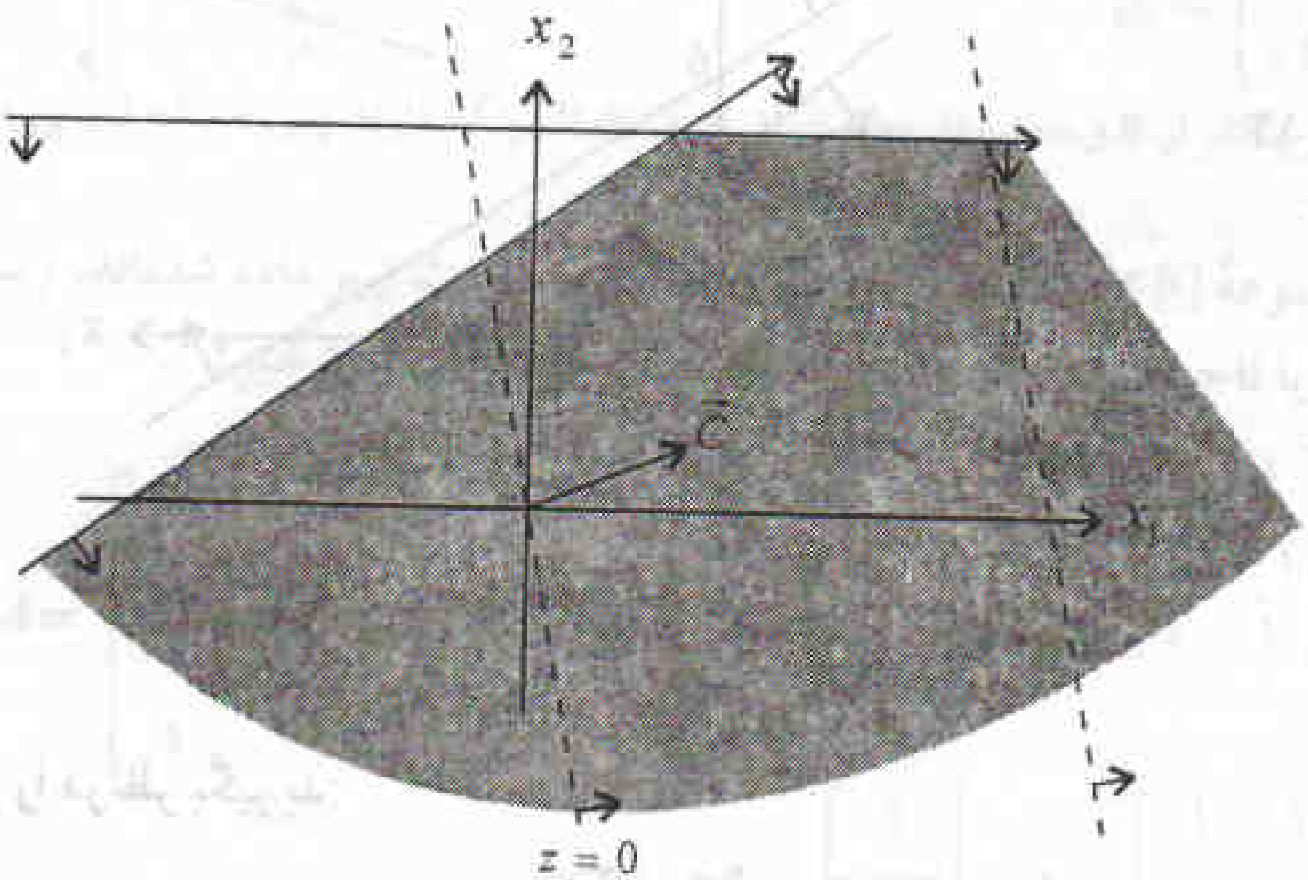
۳۰- مسأله زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + \ x_2 \\ \text{به‌طوری که} \quad & -x_1 + 2x_2 \le 6 \\ & x_2 \le 4 \end{aligned}$$

الف) ناحیه شدنی را رسم کنید. ب) نشان دهید مسأله یک جواب بهینه نامتناهی دارد.

حل

الف)



ب) نامتناهی بودن جواب بهینه با توجه به‌شکل مشخص است.

۳۱- مسأله زیر را درنظر بگیرید:

$$\max \quad -x_۱-x_۲+۲x_۳+x_۴$$

به‌طوری که

$$۲x_۱+x_۲+x_۳+x_۴\geq ۶$$
$$x_۱+x_۲-۲x_۳+x_۴\leq ۴$$
$$x_۱, x_۲, x_۳, x_۴\geq ۰$$

الف) متغیرهای کمکی را معرفی و فضای احتیاج را رسم کنید.

ب) ناحیهٔ شدنی را در فضای احتیاج تعبیر کنید.

ج) به شما گفته می‌شود که یک جواب بهینه را می‌توان با داشتن حداکثر دو متغیر مثبت در حالی که بقیه متغیرها صفر فرض می‌شود، به دست آورد. با استفاده از این و فضای احتیاج یک جواب بهینه پیدا کنید.

حل

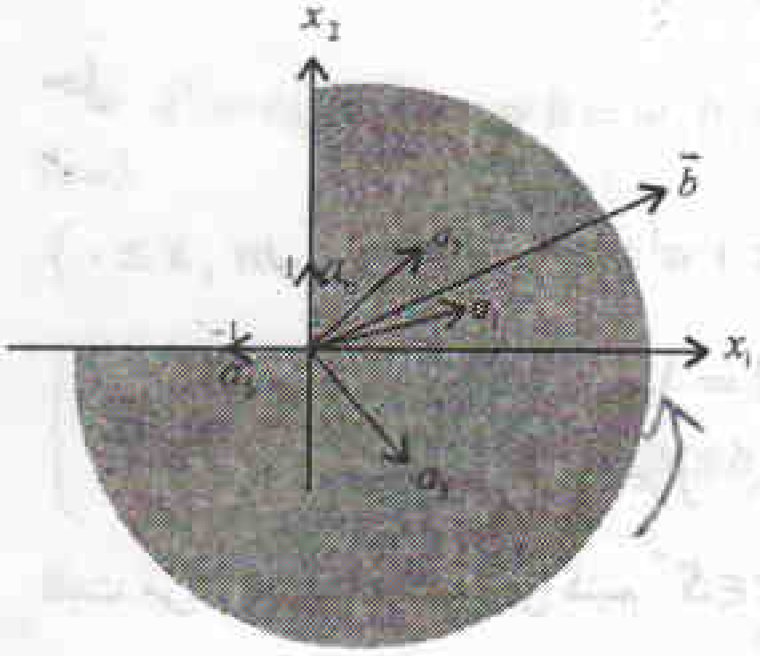
$$\max z=-x_۱-x_۲+۲x_۳+x_۴$$

به‌طوری که

$$\begin{cases} ۲x_۱+x_۲+x_۳+x_۴-x_۵=۶ \\ x_۱+x_۲-۲x_۳+x_۴+x_۶=۴ \\ x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵, x_۶\geq ۰ \end{cases}$$

$a_۱=\begin{bmatrix}۲\\۱\end{bmatrix}$ و $a_۲=\begin{bmatrix}۱\\۱\end{bmatrix}$ و $a_۳=\begin{bmatrix}۱\\-۲\end{bmatrix}$ و $a_۴=\begin{bmatrix}۱\\۱\end{bmatrix}$ و $a_۵=\begin{bmatrix}-۱\\۰\end{bmatrix}$ و $a_۶=\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}$

$b=\begin{bmatrix}۶\\۴\end{bmatrix}$



ب) $b \in Pos\{a_1, a_2, \ldots, a_6\}$ پس مسأله شدنی است.

ج) زیر مجموعه‌های دوعضوی مجموعه بردارهای $A = \{a_1, \cdots, a_6\}$ که بردار $\vec{b}$ را می‌توان برحسب ترکیب خطی مثبت آن‌ها نوشت عبارتند از $A_1 = \{a_1, a_2\}$ و $A_2 = \{a_1, a_6\}$ و $A_3 = \{a_6, a_3\}$ و $A_4 = \{a_1, a_5\}$. حال جواب‌های متناظر با این مجموعه‌ها را می‌یابیم :

مثلاً ۳ را جواب ، لاسمی ۵ شود

$$A_1 = \{a_1, a_2\} \Rightarrow x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z_1 = -(2) - (2) + 2(0) + 0 = -4 \Rightarrow z_1 = -4$$

$$A_2 = \{a_1, a_6\} \Rightarrow x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 6 \\ x_1 + x_6 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_6 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z_2 = -(3) - (0) + 2(0) + 0 = -3 \Rightarrow z_2 = -3$$

$$A_3 = \{a_6, a_3\} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 6 \\ -2x_3 + x_6 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 6 \\ x_6 = 16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z_3 = -(0) - (0) + 2(6) + 0 = 12 \Rightarrow z_3 = 12$$

$$A_4 = \{a_1, a_5\} \Rightarrow x_2 = x_3 = x_4 = x_6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_5 = 6 \\ x_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_5 = 2 \\ x_1 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z_4 = -(4) - (0) + 2(0) + 0 = -4 \Rightarrow z_4 = -4$$

حال ماکزیمم مقادیر z_1 تا z_4 را به‌عنوان مقدار بهینه انتخاب می‌کنیم پس :

$x_1^* = x_2^* = x_4^* = x_5^* = 0$ و $x_6^* = 16$ و $x_3^* = 6$ و $z^* = z_3 = 12$

۳۲- مسأله زیر را درنظر بگیرید:

$b_i \longrightarrow b_{i+1}$

$$\min \quad cx$$

به‌طوری که

$$Ax \geq b$$
$$x \geq 0$$

فرض کنید یک مؤلفهٔ بردار b، با افزایش یک واحد به $b_i + 1$ تغییر کند.

الف) ناحیهٔ شدنی چه می‌شود؟ ب) تابع هدف بهینه چه می‌شود؟

حل

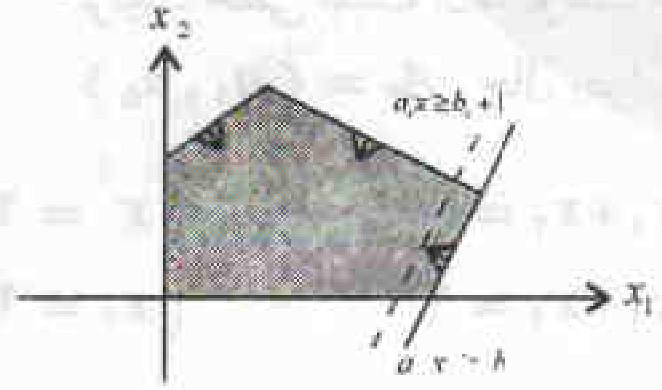
الف)

$S=\{x \mid a^j x \geq b_j \ , j=1,\dots,m \ , x\geq 0\}$ ناحیه شدنی مسأله اصلی (a^jها سطرهای ماتریس A هستند.)

$S'=\left\{x \mid a^j x \geq b_j \ , \begin{matrix} j=1,\dots,m \\ j\neq i\end{matrix} \ , a^i x \geq b_i+1 \ , x\geq 0\right\}$ ناحیه شدنی مسأله تغییر یافته.

ثابت می‌کنیم $S' \subseteq S$ فرض کنیم $x\in S'$ پس:

$$\begin{cases} a^j x \geq b_j \ ; j=1,\dots,m \ , j\neq i \\ a^i x \geq b_i+1 > b_i \ \Rightarrow \ a^i x > b_i \end{cases} \Rightarrow \ a^i x \geq b \ \Rightarrow \ x\in S$$

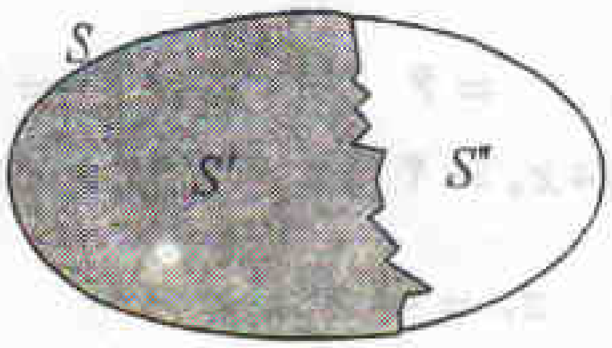


بنابراین $S' \subseteq S$ یعنی فضای شدنی مسأله جدید کوچکتر می‌شود.

$Ax \geq b$

$b_i = b_i + 1$

ب) وقتی فضای شدنی کوچک شود، جواب بهتر نمی‌شود یعنی یا مقدار قبلی می‌ماند و یا بیشتر می‌شود. برای اثبات این مطلب باتوجه به‌شکل داریم:



اگر جواب بهینه مسأله اصلی یعنی x^* در S' یعنی فضای شدنی مسأله جدید باشد پس جواب بهینه عوض نمی‌شود ولی اگر $x^*\in S''$ پس $x^*\notin S'$ و باید مسأله جدید را حل کرده و جواب بهینه را بیابیم ولی مسلماً مقدار تابع هدف به‌ازای جواب بهینه جدید کمتر از مقدار آن به‌ازای جواب بهینه قبلی نمی‌شود. زیرا:

فرض کنیم x° جواب بهینه جدید باشد پس $x^\circ\in S'$ آنگاه $x^\circ \in S$. اما چون x^* جواب بهینه مسأله اصلی است پس: $\forall x\in S \ ; \ z(x^*)\leq z(x)$ و چون $x^\circ\in S$ آنگاه: $z(x^*)\leq z(x^\circ)$.

روش دیگر برای اثبات اینکه مقدار تابع هدف روی ناحیه جدید کمتر نمی‌شود از راه اطلاعات فصل‌های بعد:

$$\text{مقداربهینه‌مسأله‌جدید} = z_\circ^* = c_B B^{-1} b' = w b' = (w_1,\dots,w_m)\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i+1 \\ \vdots \\ b_m\end{bmatrix} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} w_j b_j + w_i(b_i+1)$$

$Ax \geq b$

$$=\sum_{j=1}^{m} w_j b_j + w_i \geq \sum_{j=1}^{m} w_j b_j = c_B B^{-1} b = z^*$$

چون می‌دانیم $w_i\geq 0$ (تمرین ۳-۳۰) پس ثابت کردیم: $z_\circ^* \geq z^*$.

$z(x^\circ) \geq z(x^*)$

۳۳- از نتایج مسأله قبلی، با فرض این که $\frac{\partial z^*}{\partial b_i}$ وجود دارد، آیا آن ≤ 0، $=0$ یا ≥ 0 است؟

حل

با تغییر b_i به b_i+1 مقدار z^* زیاد می‌شود و یا همان مقدار قبلی می‌ماند، پس: $\frac{\partial z^*}{\partial b_i}\geq 0$

اثبات از راه اطلاعات فصل‌های بعد:

$$z^* = c_B B^{-1} b = wb = w_1 b_1 + \ldots + w_i b_i + \ldots + w_m b_m$$

پس: $\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = w_i \geq 0$

۳۴- مسأله‌های ۱-۳۲ و ۱-۳۳ را وقتی محدودیت‌های $Ax \geq b$ با $Ax \leq b$ عوض می‌شود حل کنید.

حل

$Ax \le b$ $\quad b_i = b_{i+1}$

$$min\ z = cx$$

به‌طوری که $Ax \leq b$

$x \geq 0$

$Ax \ge b$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad b' = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i + 1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

الف) $S = \{x \mid a^j x \leq b_j\ , j = 1, \ldots, m\ , x \geq 0\}$ فضای شدنی مسأله اصلی که a^j ها سطرهای ماتریس A هستند.

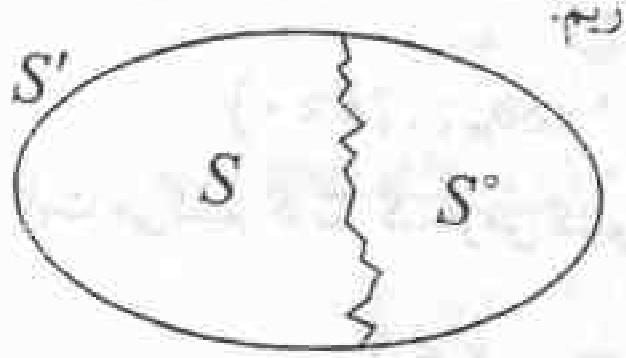
$S' = \left\{ x \mid a^j x \leq b_j\ , \begin{matrix} j = 1, \ldots, m \\ j \neq i \end{matrix}\ , a^i x \leq b_i + 1\ , x \geq 0 \right\}$ فضای شدنی مسأله تغییر یافته.

ثابت می‌کنیم $S \subseteq S'$. فرض کنیم $x \in S$ پس:

$$\begin{cases} a^j x \leq b_j\ ;\ j = 1, \ldots, m\ ,\ j \neq r \\ a^i x \leq b_i < b_i + 1 \Rightarrow a^i x \leq b_i + 1 \end{cases} \Rightarrow x \in S'$$

بنابراین $S \subseteq S'$ یعنی فضای شدنی مسأله تغییر یافته افزایش می‌یابد.

ب) فضای شدنی بزرگ‌تر شده و جواب بهینه بدتر نمی‌شود. باتوجه به‌شکل داریم:



اگر جواب بهینه مسأله تغییر یافته در S واقع شود و فرض‌کنیم x^* جواب بهینه مسأله اصلی است. پس: $\forall x \in S\ ;\ z(x^*) \leq z(x)$ بنابراین x^* جواب بهینه مسأله تغییر یافته نیز می‌شود و در این حالت $z^* = z_0^*$ که z_0^* مقدار بهینه مسأله تغییر یافته است.

اگر جواب بهینه مسأله تغییر یافته یعنی x_0^* در S' واقع شود داریم:

$$\forall x \in S'\ ;\ z(x) \geq z(x_0^*)$$

و چون $S \subseteq S'$ و $x^* \in S$ پس $x^* \in S'$ بنابراین:

$$z^* = z(x^*) \geq z(x_0^*) = z_0^*$$

یعنی مقدار تابع هدف به‌ازای بهینه جدید کمتر می‌شود.

-اثبات دیگری برای نشان دادن اینکه مقدار تابع هدف روی ناحیه جدید بیشتر نمی‌شود، از راه اطلاعات فصل‌های بعد:

$$z_0^* = c_B B^{-1} b' = w b' = (w_1, \ldots, w_i, \ldots, w_m) \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i + 1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{m} w_j b_j + w_i \leq \sum_{j=1}^{m} w_j b_j$$

$$= w b = c_B B^{-1} b = z^*$$

$(w_i \leq 0)$. بنابراین ثابت کردیم: $z_0^* \leq z^*$.

با تغییر b_i به $b_i + 1$ مقدار z^* کم می‌شود یا همان مقدار قبلی می‌ماند، پس:

$$\frac{\partial z^*}{\partial b_i} \leq 0$$

اثبات از راه دیگر با توجه به‌اطلاعات فصل‌های بعد:

$$z^* = c_B B^{-1} b = w b = w_1 b_1 + \ldots + w_i b_i + \ldots + w_m b_m$$

و چون $w_i \leq 0$ پس: $\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = w_i \leq 0$

برای اثبات اینکه $w_i \leq 0$، از روش تمرین ۳-۳۰ استفاده کنید.

۳۵- مسأله زیر را درنظر بگیرید و فرض کنید محدودیت جدید، $m+1$، به مسأله اضافه شود.

$$\begin{array}{ll} \min & cx \\ & Ax \geq b \quad \text{به‌طوری که} \\ & x \geq 0 \end{array}$$

الف) ناحیهٔ شدنی چه می‌شود؟ ب) تابع هدف بهینه z^* چه می‌شود؟

حل

الف)

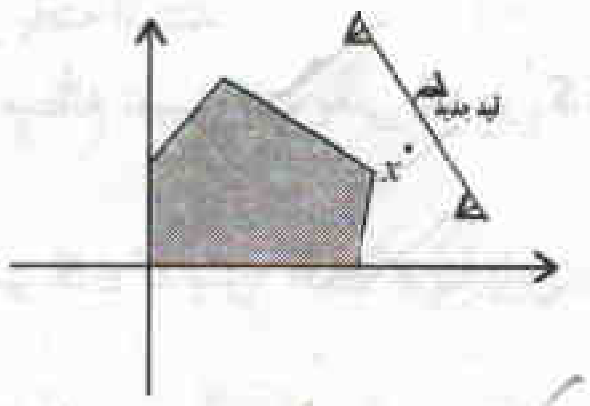
$S = \{x \mid a^j x \leq b_j, j = 1, \ldots, m, x \geq 0\}$ فضای شدنی مسأله اصلی

$S' = \{x \mid a^i x \geq b_i, i = 1, \ldots, m, a^{m+1} x \geq b_{m+1}, x \geq 0\}$ فضای شدنی مسأله تغییر یافته

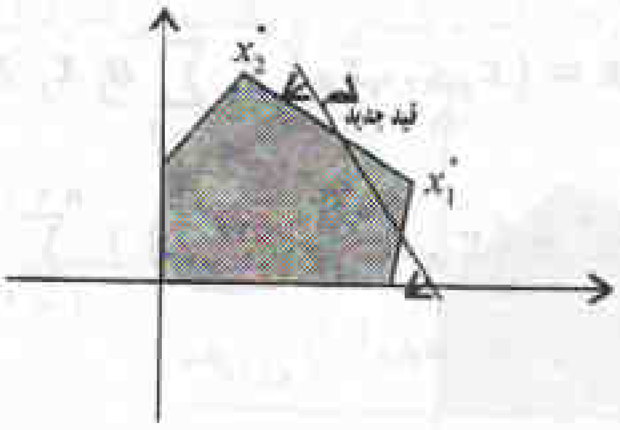
ثابت می‌کنیم $S' \subseteq S$. فرض کنیم $x \in S'$ بنابراین:

$$\begin{cases} a^i x \geq b_i \ ; \ i = 1, \ldots, m \\ a^{m+1} x \geq b_{m+1} \ ; \ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^i x \geq b_i & i = 1, \ldots, m \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in S$$

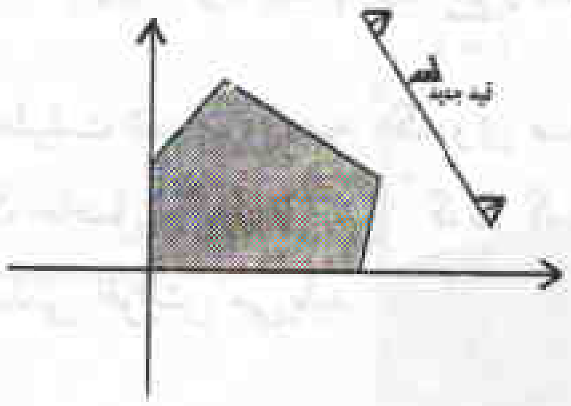
پس با افزودن یک محدودیت جدید، ناحیه شدنی کوچکتر یا مساوی ناحیه قبلی می‌شود و حالت‌های زیر می‌تواند اتفاق بیفتد:



ناحیه شدنی جدید تغییر نمی‌کند و همان ناحیه قبلی است و مقدار z^* تغییر نمی‌کند.



ناحیه شدنی جدید کوچکتر از ناحیه قبلی است و اگر x_2^* جواب بهینه مسأله اصلی باشد، z_0^* ممکن است بیشتر از z^* باشد اگر x_2^* بهینه باشد، مقدار z^* تغییر نمی‌کند.



هیچ نقطه اشتراکی ندارند یکی.

ناحیه شدنی جدید تهی است.

ب) مانند قسمت (ب) تمرین ۱-۳۲ مقدار بهینه تابع هدف روی ناحیه جدید کمتر نمی‌شود.

$$b=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad ; \quad b'=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ b_{m+1} \end{bmatrix}$$

افزودن قید جدید

اثبات اینکه مقدار بهینه تابع هدف روی ناحیه جدید کم‌تر نمی‌شود از راه اطلاعات فصل‌های بعد:

مقدار بهینه مسأله تغییریافته : $z_0^* = w'b' = (w_1, \dots, w_m, w_{m+1}) \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ b_{m+1} \end{bmatrix} = wb + w_{m+1}b_{m+1}$

$ax \geq$

حال اگر $b_{m+1} \geq 0$ و چون $a^{m+1}x \geq b_{m+1}$، متغیر دوگان متناظر این قید یعنی w_{m+1} نیز نامنفی است یعنی $w_{m+1} \geq 0$ پس: $wb + w_{m+1}b_{m+1} \geq wb = z^*$ یعنی $z_0^* \geq z^*$. $\leftarrow z_0^* \geq z^*$

و اگر $b_{m+1} \leq 0$ و چون $a^{m+1}x \geq b_{m+1}$ پس $-a^{m+1}x \leq -b_{m+1}$ و $w_{m+1} \leq 0$ در نتیجه داریم:

$w_{m+1}b_{m+1} \geq 0$ یعنی: $wb + w_{m+1}b_{m+1} \geq wb = z^*$ پس $z_0^* \geq z^*$.

۳۶- مسأله زیر را درنظر بگیرید و فرض کنید متغیر جدید، $n+1$، به مسأله اضافه می‌شود.

$$\begin{aligned} &\min \quad cx \\ &Ax \geq b \quad \text{به‌طوری که} \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

الف) ناحیهٔ شدنی چه می‌شود؟ ب) مقدار تابع هدف بهینه z^* چه می‌شود؟

حل

افزودن یک متغیر جدید در حقیقت اضافه کردن یک فعالیت جدید است که در قسمت تحلیل حساسیت بررسی می‌شود.

الف) $S = \left\{ x = (x_1,\dots,x_n) \mid \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \ge b \;,\; x \ge 0 \right\}$ ناحیه شدنی مسأله اصلی

$S' = \left\{ x' = (x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) \mid \sum_{j=1}^{n+1} a_j x_j \ge b \;,\; x' \ge 0 \right\}$ ناحیه شدنی مسأله جدید

معمول که اضافه شوند

که a_jها ستون‌های ماتریس A هستند.

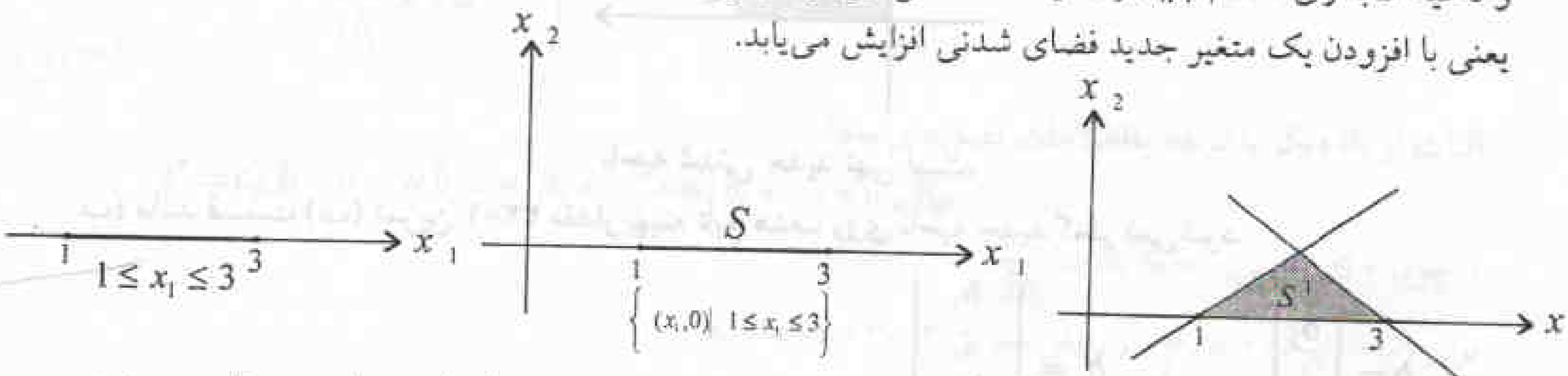
ناحیه S در فضای $n+1$ بعدی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$S = \left\{ x = (x_1,\dots,x_n, 0) \mid \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \ge b \;,\; x_{n+1} = 0 \;,\; x \ge 0 \right\}$$

پس در فضای $n+1$ بعدی ناحیه S در حقیقت تصویر ناحیه S' روی صفحه $x_{n+1} = 0$ است.

و ناحیه S به‌ازای $x_{n+1} = 0$ از ناحیه S' حاصل می‌شود. پس $S \subseteq S'$.

یعنی با افزودن یک متغیر جدید فضای شدنی افزایش می‌یابد.



ب) همان‌طور که قبلاً ثابت کردیم، چون فضای شدنی افزایش یافته بنابراین مقدار تابع هدف روی ناحیه جدید افزایش نمی‌یابد یعنی یا کم‌تر می‌شود و یا تغییری نمی‌کند. افزایش یابد [illegible]

۳۷- مسأله زیر را درنظر بگیرید و فرض کنید یک محدودیت، مثلاً محدودیت iام، از مسأله حذف شود.

$$\begin{array}{ll} \min & cx \\ \text{به‌طوری که} & Ax \ge b \\ & x \ge 0 \end{array}$$

الف) ناحیهٔ شدنی چه می‌شود؟ **ب) مقدار تابع هدف بهینه z^* چه می‌شود؟**

حل

الف)

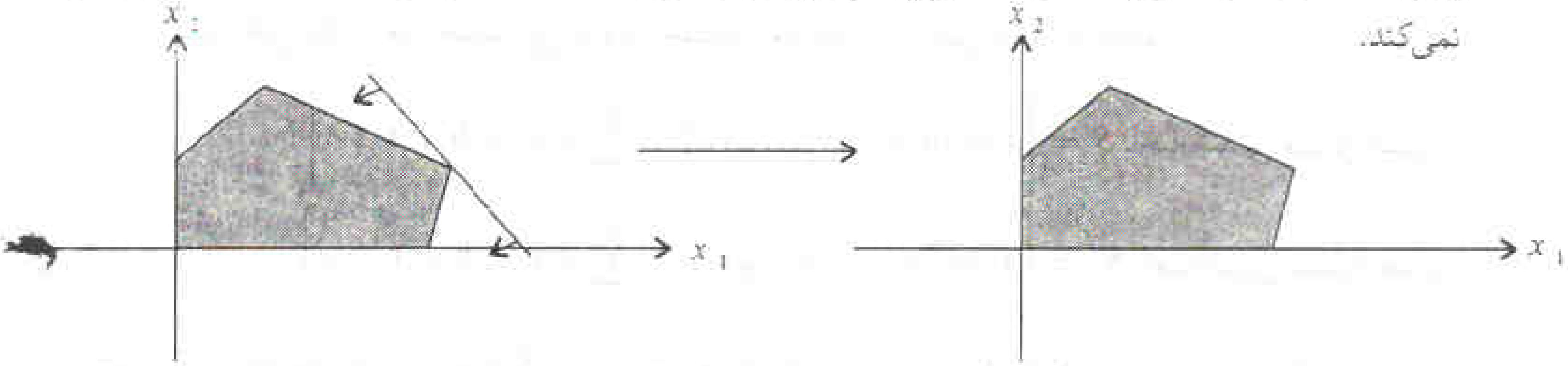
$S = \{ x \mid a^j x \ge b_j \;, j = 1,\dots,m \;, x \ge 0 \}$ ناحیه شدنی مسأله اصلی

$S' = \{ x \mid a^j x \ge b_j \;, j = 1,\dots,m \;, j \ne i \;,\; x \ge 0 \}$ ناحیه شدنی مسأله جدید

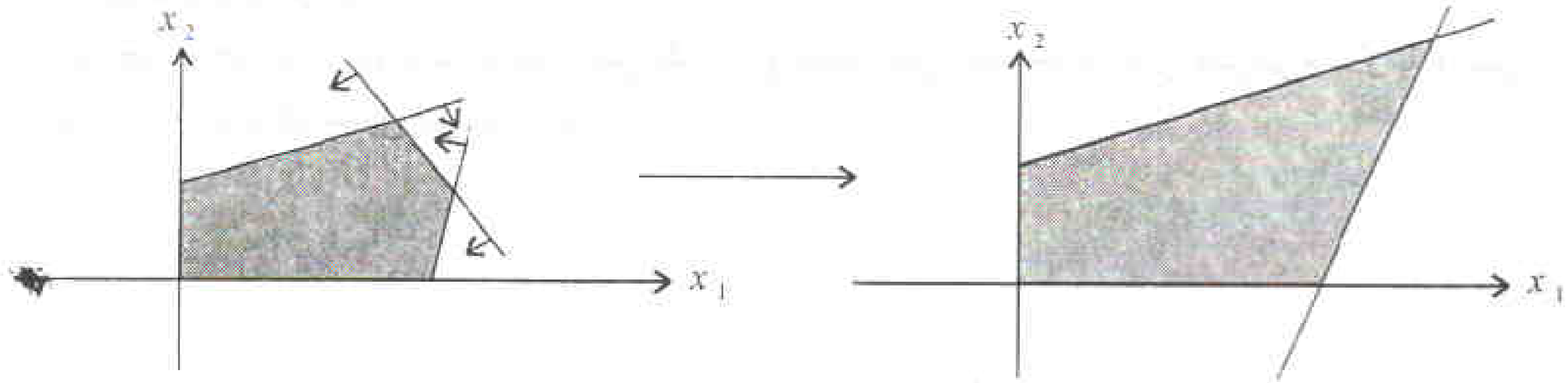
ثابت می‌کنیم $S \subseteq S'$. فرض کنیم $x \in S$ پس:

$$\begin{cases} a^1 x \ge b_1 \\ \vdots \\ a^i x \ge b_i \\ \vdots \\ a^m x \ge b_m \\ x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^1 x \ge b_1 \\ \vdots \\ a^{i-1} x \ge b_{i-1} \\ a^{i+1} x \ge b_{i+1} \\ \vdots \\ a^m x \ge b_m \\ x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow x \in S'$$

پس با حذف یک قید غیر زائد ناحیه شدنی بزرگ‌تر می‌شود و اگر قید حذف شده قید زائد باشد ناحیه شدنی تغییر نمی‌کند.



چون قید حذف شده قید زائد بوده است بنابراین ناحیه شدنی تغییری نمی‌کند.



باحذف یک قید غیرزائد ناحیه شدنی بزرگ‌تر می‌شود.

ب) چون فضای شدنی یا افزایش می‌یابد یا بی‌تغییر می‌ماند. پس همان‌طور که ثابت کردیم مقدار تابع هدف روی ناحیه شدنی جدید افزایش نمی‌یابد یعنی بی‌تغییر می‌ماند و یا کم‌تر می‌شود.

اثبات این مطلب از طریق اطلاعات فصل‌های بعد:

مقدار بهینه مسأله جدید =

$$= z_o^* = c'_B B'^{-1} b' = w' b' = (w_1, \dots, w_{i-1}, w_{i+1}, \dots, w_m) \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{i-1} \\ b_{i+1} \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} w_j b_j$$

را برداشت w_i و b_i — یک مقدار مثبت ارزش کم شده پس دو مقدار کمتر است

اگر $b_i \geq 0$ و چون $a^i x \geq b_i$ پس متغیر دوگان نظیر این قید $w_i \geq 0$ است بنابراین $w_i b_i \geq 0$

و اگر $b_i \leq 0$ پس $-a^i x \leq -b_i$ و متغیر دوگان این قید $w_i \leq 0$ است بنابراین $w_i b_i \geq 0$ داریم:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} w_j b_j \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} w_j b_j + w_i b_i = \sum_{j=1}^{m} w_j b_j = wb = z^* \Rightarrow z_o^* \leq z^*$$

مقدار جزء — مقدار کلی — جدید — قدیمی

۳۸- مسأله زیر را درنظر بگیرید و فرض کنید یک متغیر، مثلاً x_k، از مسأله حذف شود.

$$\min \quad cx$$

به‌طوری که $\quad Ax \geq b$

$$x \geq 0$$

الف) ناحیهٔ شدنی چه می‌شود؟ **ب) تابع هدف بهینه z^* چه می‌شود؟**

حل

الف) وقتی یک متغیر حذف می‌شود در حقیقت بعد مسأله را یکی کاهش داده‌ایم.

$$S=\left\{x=(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n)\mid \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geq b \;,\; x\geq 0\right\}$$ ناحیه شدنی مسأله اصلی

$$S'=\left\{x'=(x_1,\ldots,0,\ldots,x_n)\mid \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geq b \;,\; x'\geq 0\right\}$$ ناحیه شدنی مسأله جدید

ناحیه S' در حقیقت تصویر ناحیه S روی صفحه $x_k=0$ است بنابراین $S'\subseteq S$. یعنی با حذف یک متغیر ناحیه شدنی کوچک‌تر می‌شود.

ب) چون ناحیه شدنی کوچک می‌شود، پس مقدار تابع هدف روی ناحیه جدید یا بی‌تغییر می‌ماند و یا افزایش می‌یابد که اثبات در مسائل قبل آمده است.