A/1

مقدمه ای بر اعداد مختلط :

معادله $2x = 4 \Rightarrow x = 2 \in N$

ولی $2x + 4 = 0 \quad x = -2 \notin N$

بنابراین یک مجموعه بزرگتر نیاز است یعنی اعداد صحیح و Z

$2x = 5 \Rightarrow x = 5/2 \notin Z$

بنابراین به یک مجموعه بزرگتر نیاز بود که آن را Q می‌نامیم

و $x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$

$\sqrt{2} \notin Q$ زیرا اگر $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ که m و n مقسوم

علیه مشترک ندارند (ساده نمی‌شوند) آنگاه $2n^2 = m^2$ که نشان می‌دهد m زوج

است و بنابراین $2n^2 = 4k^2$ پس n هم زوج بنابراین

m و n مقسوم علیه مشترک دارند و ساده می‌شود پس $\sqrt{2}$ گنگ است

بنابراین به یک مجموعه بزرگتر نیاز است یعنی $\mathbb{R}$ اعداد حقیقی

ولی $x^2 = -1$ در $\mathbb{R}$ جواب ندارد

A/2

پس به یک ساختار بزرگ‌تر به اسم اعداد مختلط نیاز داریم که آن را با

C مخفف Complex Numbers نشان می‌دهیم

در واقع ساختار C ساختار تمام است بدین معنی که هر چندجمله‌ای

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$$

در آن n ریشه دارد ولو تکراری

این ساختار به شکل زیر است

$$\{ a + bi : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1 \}$$

به همراه دو عمل جمع و ضرب $i = \sqrt{-1}$

$Re(a+ib) = a$ قسمت حقیقی

$Im(a+ib) = b$ قسمت موهومی

و اما عمل جمع

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)$$

$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$$

A3

خاصیت عمل جمع

عضو خنثی $(a+ib)+0=a+ib$

وارون $(a+ib)+(-a-ib)=0$

$$a_1+ib_1+(a_2+ib_2+a_3+ib_3)$$

انجمنی

$$=(a_1+ib_1+a_2+ib_2)+a_3+b_3 i$$

مثال:

$$(3+2i)+(5+6i)=(3+5)+(2+6)i$$
$$=8+8i$$

$$i+2-3i=2-2i$$

$$7+2-3i=9-3i$$

و اما عمل ضرب

قبل از عمل ضرب دو مفهوم دیگر را معرفی می‌کنیم

مزدوج عدد مختلط

$$z=a+ib \Rightarrow \bar{z}=a-ib$$

می‌خوانیم z بار یعنی قسمت موهومی قرینه می‌شود

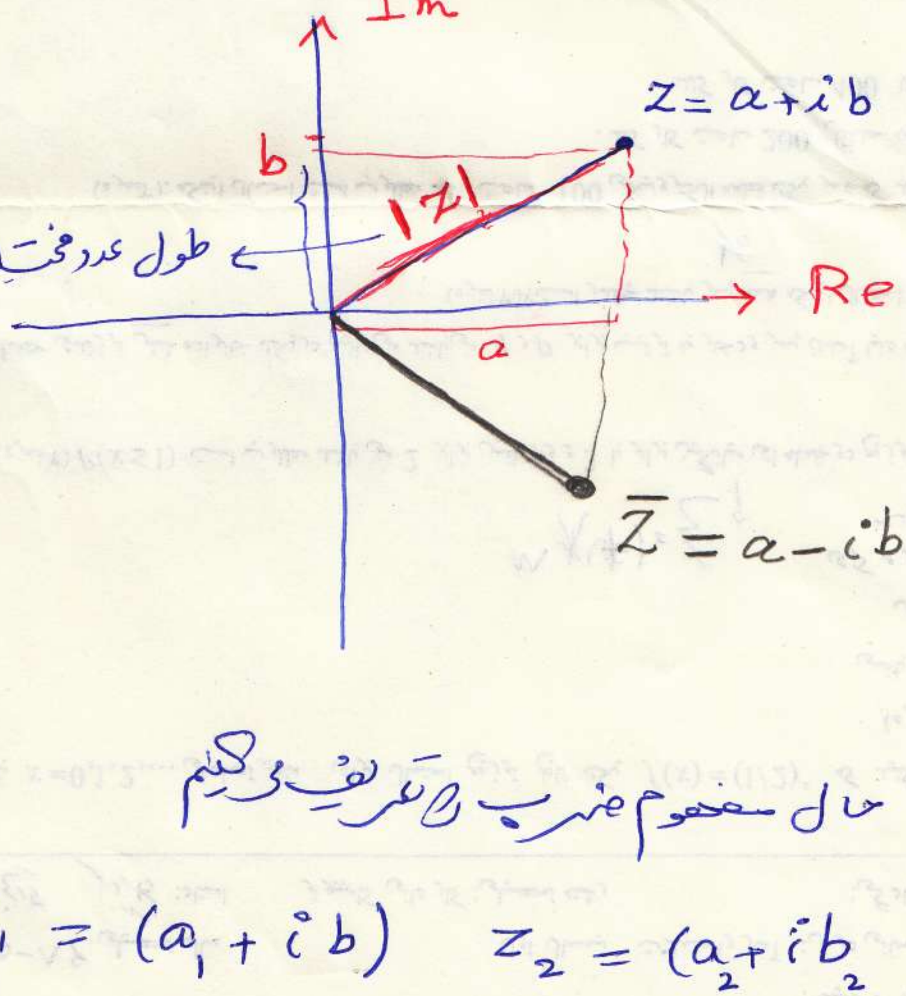
$$z = i \Rightarrow \bar{z} = -i$$

$$z = 7 \Rightarrow \bar{z} = 7$$

مفهوم دوم

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|3+4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$



حال مفهوم ضرب را تعریف می کنیم

$$z_1 = (a_1 + ib) \qquad z_2 = (a_2 + ib_2$$

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib)(a_2 + ib)$$

$$= a_1[a_2 + ib_2] + i b_1 [a_2 + i b_2]$$

A5

$$= a_1 a_2 + i a_1 b_2 + i b_1 a_2 + \underbrace{i^2}_{-1} b_1 b_2$$

$$= [a_1 a_2 - b_1 b_2] + i [a_1 b_2 + b_1 a_2]$$

مثال:

$$(2+3i)(4+2i)$$

$$= 2(4+2i) + 3i(4+2i)$$

$$= 8 + 4i + 12i + 6\underbrace{i^2}_{-1}$$

$$(8-6) + (4+12)i = 2 + 16i$$

خواص

1 عضو خنثی ضرب $\quad Z \cdot 1 = Z$

وارون. $\quad Z^{-1} = \dfrac{\bar{Z}}{|Z|^2} \qquad Z = a + ib \qquad Z^{-1} = \dfrac{a - ib}{a^2+b^2}$

$$Z = 7 + i \Rightarrow Z^{-1} = \frac{7-i}{7^2+1^2} = \frac{7}{50} - \frac{i}{50}$$

$$Z \times Z^{-1} = a + ib \times \frac{a - ib}{a^2+b^2} = \frac{a(a-ib) + bi(a-ib)}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{a^2 \cancel{- iab} \cancel{+ iab} - i^2 b^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$$

A6

$$z z^{-1} = 1$$

برهن

$$|z^{-1}| = \left| \frac{a - ib}{a^2+b^2} \right| = \sqrt{\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{b^2}{(a^2+b^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{|z|}$$

$$z_1 (z_2\ z_3) = (z_1\ z_2)\ z_3$$

خاصية

انحقق

ارتباط ، ضرب ، بالتقسيم

$$z_1 = a_1 + i b_2 \qquad z_2 = a_2 + i b_2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \times z_2^{-1} = (a_1 + i b_1) \times \frac{a_2 - i b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

A7

ارتباط ضرب با جمع

$$z_1(z_2+z_3)$$

$$= z_1 z_2 + z_2 z_3$$

شیوه دیگری برای نمایش اعداد مختلط وجود دارد به نام فرمول مُوآور

اما قبل از بیان این فرمول رجوعی خواهیم داشت به

حساب مقدماتی یعنی بسط های مک لورن توابع

e^x ، $\sin x$ و $\cos x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

اگر به جای x قرار دهیم $i\theta$

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + i^3\frac{\theta^3}{3!} + \frac{i^4}{4!}\theta^4 + i^5\frac{\theta^5}{5!} + i^6\frac{\theta^6}{6!} + i^7\frac{\theta^7}{7!} + i^8\frac{\theta^8}{8!} + i^9\frac{\theta^9}{9!} + \cdots$$

A8

$$= i\left[\theta + \frac{i^2 \theta^3}{3!} + \frac{i^4 \theta^5}{5!} + \frac{i^6 \theta^7}{7!} + \frac{i^8 \theta^9}{9!} + \cdots \right]$$

$$+ \left[1 + \frac{i^2 \theta^2}{2!} + \frac{i^4 \theta^4}{4!} + \frac{i^6 \theta^6}{6!} + \frac{i^8 \theta^8}{8!} + \cdots \right]$$

اما $i^{\text{زوج}} = \begin{cases} +1 & \text{زوج مضرب ۴} \\ -1 & \text{زوج غیر مضرب ۴} \end{cases}$ (چرا؟)

بنابراین حاصل $e^{i\theta}$ به شرح زیر است

$$i\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^9}{9!} + \cdots \right] \rightarrow \sin\theta$$

$$+ \left[1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} + \cdots \right] \rightarrow \cos\theta$$

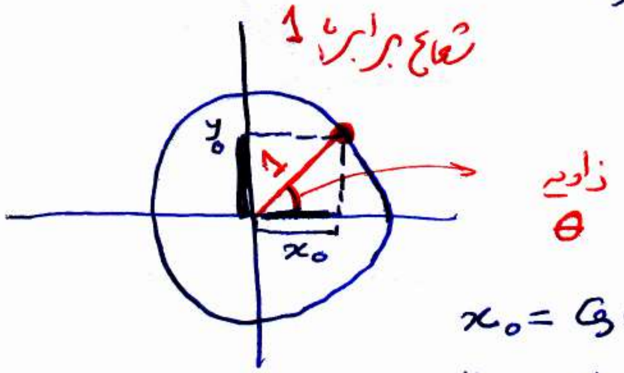
$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta} \longrightarrow \text{فرمول موآدر}$$

$$|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

A9

$$e^{i\theta} = \underbrace{\cos\theta}_{x_0} + i\,\underbrace{\sin\theta}_{y_0} = x_0 + iy_0 \quad \text{پس}$$

روی دایره واحد قرار دارد



$x_0 = \cos\theta$

$y_0 = \sin\theta$

حال اگر طول عدد مختلط را با ρ (رو از الفبای یونانی) نمایش دهیم

Rho

$$|z| = \rho \Rightarrow \left|\frac{z}{\rho}\right| = \sqrt{\frac{a^2}{\rho^2} + \frac{b^2}{\rho^2}} = \frac{\rho}{\rho} = 1$$

پس عدد $\frac{z}{\rho}$ روی دایره واحد قرار دارد بنابراین

θ ای موجود است که

$$\frac{z}{\rho} = e^{i\theta} \Rightarrow z = \rho e^{i\theta}$$

آرگومان

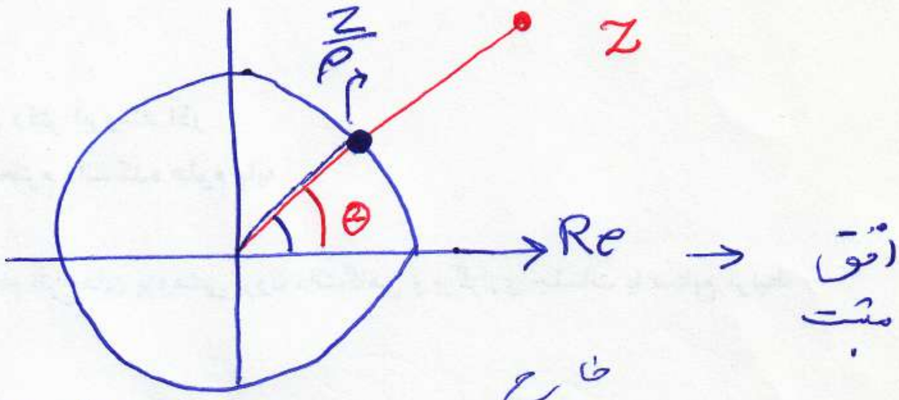
آوند

یا

طول

بدیهی است که $\frac{z}{\rho}$ زاویه با z ندارد یعنی نسبت

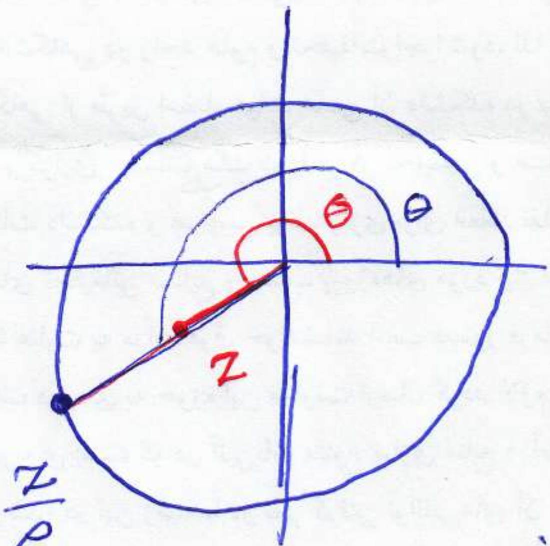
به افق مثبت در یک راستا هستند



خارج

$$z=\rho e^{i\theta}$$

یا

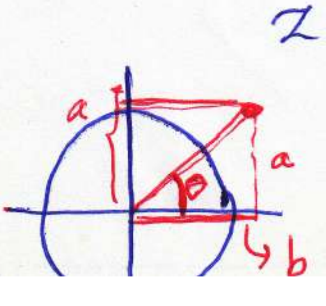


داخل دایره

$$z=\rho e^{i\theta}$$

بنابراین اگر

$$z=a+ib \Rightarrow \tan\theta = \frac{b}{a}$$



A11

چند مثال

$$3+4i \Rightarrow \rho=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

$$\tan\theta = \frac{4}{3} \cong 57^\circ \Rightarrow \frac{57\pi}{180}$$

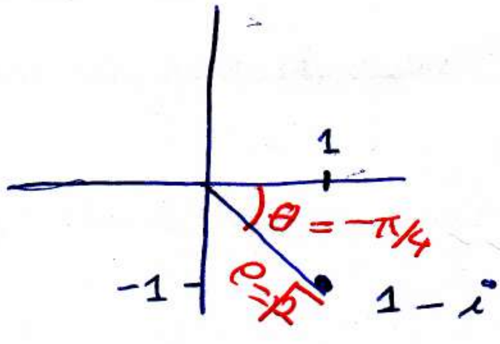
$$3+4i = 5\, e^{\frac{57\pi}{180} i}$$

مثال دیگر

$$z = 1-i$$

$$\rho = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \qquad \tan\theta = \frac{-1}{1} \Rightarrow -\pi/4 = \theta$$

$$z = \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4} i}$$



A12

مثال: مزدوج عبارت زیر را محاسبه کنید

$\overline{z_1 z_2}$ $\overline{z_1/z_2}$ $\overline{z_1^n}$

$z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1} \Rightarrow \bar{z}_1 = \rho_1 e^{-i\theta_1}$

$z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ $\bar{z}_2 = \rho_2 e^{-i\theta_2}$

$\Downarrow$

$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ $\bar{z}_1 \bar{z}_2 = \rho_1 \rho_2 e^{-i(\theta_1+\theta_2)}$

$\overline{z_1 z_2} = \rho_1 \rho_2 e^{-i(\theta_1+\theta_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

$\overline{z_1^n} = \overline{z_1 \cdots z_1} =$ بنابراین

$= \bar{z}_1 \cdots \bar{z}_1 = \bar{z}_1^n$

$\frac{1}{z_2} \times z_2 = 1 \Rightarrow \overline{\frac{1}{z_2} \times z_2} = 1$

$\Rightarrow \overline{\frac{1}{z_2}} \times \bar{z}_2 = 1 \Rightarrow \overline{z_2^{-1}} = \frac{1}{\bar{z}_2}$

پس

$\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \overline{z_1 \times \frac{1}{z_2}} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

A13

مثال: $(1+i)^{100} = ?$

اگر از طریق تعریف ضرب عمل کنیم کار بسیار دشواری است

اما از طریق موآور کار ساده است

$$z = 1+i \Rightarrow \rho = \sqrt{2} \qquad \theta = \pi/4$$

$$z = \sqrt{2}\, e^{\pi/4\, i}$$

$$(1+i)^{100} = \sqrt{2}^{100}\left(e^{i\pi/4}\right)^{100} = 2^{50} e^{\frac{100\pi}{4} i}$$

$$= 2^{50} e^{25\pi i} = 2^{50}\left(\cos 25\pi + i\,\underbrace{\cancel{\sin 25\pi}}_{0}\right)$$

$$\cos(12\times 2\pi + \pi) = \underbrace{\cos\pi}_{} = -1$$

$$= -2^{50}$$

در ضرب و تقسیم استفاده از موآور راحت تر است

مثلا اگر $|z| = \rho$ آنگاه $|z^n| = ?$

$$z = \rho e^{i\theta} \Rightarrow |z^n| = |\rho^n e^{in\theta}| = |\rho|^n \overset{1}{\cancel{|e^{in\theta}|}} = \rho^n$$