S1

روش حل دستگاه m معادله و n مجهول بروش حذفی

[گاوس - جردن]

دستگاه های زیر را درنظر بگیرید

$$A \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

2 معادله 3 مجهول

$$B \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

سه معادله 3 مجهول

$$C \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = 4 \\ x_1 + 2x_2 = 16 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases}$$

سه معادله 2 مجهول

$$D = \begin{cases} x_1 - x_2 = 4 \\ x_1 + 2x_2 = 16 \\ 2x_1 + x_2 = 24 \end{cases}$$

سه معادله دو مجهول

S2

منظور از حل دستگاه یعنی یافتن مقادیر مجهول به شرطی

که همزمان معادلات برقرار باشد

به عنوان مثال در دستگاه A اگر

$x_1 = 1$ و x_2 و $x_3 = 1$

آنگاه هر دو معادله همزمان برقرار است

در دستگاه B اگر

$x_1 = 1 \quad x_2 = 2$ و $x_3 = 3$

همزمان هر 3 معادله برقرار است

در دستگاه C هیچ جوابی وجود ندارد زیرا اگر

$x_1 = a$ و $x_2 = b$

جواب دستگاه باشد آنگاه باید همزمان در هر سه معادله صدق کنند

پس در معادله اول و دوم صادق‌اند پس

$$\begin{cases} a - b = 4 \\ a + 2b = 16 \end{cases}$$

اگر این دو را باهم جمع بزنیم به عبارت $2a + b = 24$ می‌رسیم

از طرفی دیگر a و b باید در معادله سوم نیز صادق باشند یعنی $2a+b=8$ که

S_3

تناقض است پس جواب ندارد .

برای دستگاه D یک جواب خواهد بود $x_1 = 8$ و $x_2 = 4$

سوال : آیا دستگاه درصورت وجود جواب ، جواب یکتا دارد؟

جواب خیر : در دستگاه A یک جواب دیگر عبارت است از

$$x_1 = \frac{2}{5} \quad x_2 = \frac{7}{5} \quad x_3 = 0$$

درحالت کلی دستگاه ازنظر جواب به سه دسته تقسیم میشود

- جواب ندارد
- جواب یکتا دارد
- بی نهایت جواب دارد

که بعداز ارائه الگوریتم گاوس-جردن حالات دستگاه نیز

بررسی می شود:

S4

قبل از اینکه الگوریتم را بیان کنیم شکل ماتریسی دستگاه را بیان می‌کنیم

$$A\quad \begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=6 \\ x_1-x_2-x_3=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$B\quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \\ x_1+x_2-x_3=0 \\ x_1+2x_3=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$D\quad \begin{cases} x_1-x_2=4 \\ x_1+2x_2=16 \\ 2x_1+x_2=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 16 \\ 24 \end{bmatrix}$$

و در حالت کلی

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}$$

S_5

که به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$X = b$$

شکل کلی .

$$AX = b \longrightarrow$$ بردار سمت راست

R.H.S

یا بردار معلومات

A: ماتریس ضرایب

X: بردار مجهولات

سطر i ام

$$\begin{bmatrix} a_{i1}, & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b_i$$

$$\cong R_i X = b_i$$

S6

دقت کنیم که تعداد معادلات دو دستگاه نقشی در هم ارزی

ندارد مثال: دو دستگاه زیر هم ارزند

$$A\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1\\ 2x_1-x_2+x_3=2\\ 3x_1\qquad +2x_2=3\end{cases} \qquad B=\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1\\ 2x_1-x_2+x_3=2\end{cases}$$

زیرا اگر x_1^* و x_2^* و x_3^* یک جواب برای A باشد بدیهی است که

برای B نیز جواب است زیرا دستگاه B شامل معادلات اول و دوم A

می باشد

حال اگر x_1^* و x_2^* و x_3^* جواب برای B باشد در معادله اول

و دوم A نیز صادق است در معادله 3 چطور؟

$$+\begin{cases} x_1^*+x_2^*+x_3^*=1\\ 2x_1-x_2^*+x_3^*=2\end{cases}$$

$$3x_1^*\qquad +2x_3^*=3$$

اگر دو معادله B را

با هم جمع بزنیم

که همان معادله سوم است

یعنی دستگاه B با دستگاه A هم ارزاند

قواعد مجاز در ساده الگوریتم

تعریف : دو دستگاه را هم ارز گویند که اولا تعداد مجهولات هر دو دستگاه با هم برابر باشد

دوم آنکه هر جواب یک دستگاه جواب برای دستگاه دیگری باشد .

قاعده اول : تعویض جایگاه دو معادله منجر به دستگاه هم ارز جدیدی می شود یعنی تغییری در جواب ایجاد نمی کند

قاعده دوم : اگر یک معادله را در عدد غیر صفر ضرب کنیم به دستگاه هم ارز جدیدی می رسیم یعنی تغییری در جواب ایجاد نمی شود

دقت کنیم که تقسیم هم نوعی ضرب است مثلا تقسیم بر ۵ معادل ضرب در $\frac{1}{5}$ است .

قاعده سوم : اگر مضربی از یک معادله را به معادله دیگر اضافه کنیم به دستگاه هم ارز جدیدی می رسیم یعنی تغییری در جواب ایجاد نمی شود

S8

۱) قواعد مجاز که به عملیات سطری معروف هستند منجر به دستگاه های هم ارزی شوند

الف) تعویض دو سطر بدیهی است

ب)

$$A_1:\quad \begin{array}{l} R_1 x = b_1 \\ \vdots \\ R_k x = b_k \\ \vdots \\ R_m x = b_m \end{array} \quad \xRightarrow{R_k \div c} \quad A_2 \begin{cases} R_1 x = b_1 \\ \vdots \\ \dfrac{R_k}{c} x = \dfrac{b_k}{c} \\ \vdots \\ R_m x = b_m \end{cases}$$

هر جواب A_2 یک جواب برای همه معادلات A_1 است چون همه معادلات بجز k شبیه A_1 است اگر x^* در معادله kام A_1 صادق باشد دو طرف را در c ضرب کنیم معادله kام A حاصل می شود و همین استدلال را برای جواب های A_1 می توانیم انجام دهیم

ج: در عملیات سوم یعنی اضافه کردن مضرب یک سطر به سطر دیگر

S9

$$\underbrace{\begin{cases} R_1 x = b_1 \\ \vdots \\ R_i x = b_i \\ \vdots \\ R_k x = b_k \\ \vdots \\ R_m x = b_k \end{cases}}_{A_1} \xRightarrow{c R_i + R_k \to R_k} \underbrace{\begin{cases} R_1 x = b_1 \\ \vdots \\ R_i x = b_i \\ \vdots \\ \overbrace{(cR_i + R_k)}^{R'_k} x = \overbrace{cb_i + b_k}^{b'_k} \\ \vdots \\ R_m x = b_m \end{cases}}_{A_2}$$

دقت شود که هر جوابی که برای A_2 صادق باشد برای A_1
نیز در همه معادلات چون یکسان است صادق است الا در معادله
k ام که در این مورد خواهیم نوشت

$$\begin{matrix} -c \\ + \end{matrix} \begin{cases} R_i x^* = b_i \\ R'_k x^* = b'_k \end{cases} \Rightarrow -c R_i x^* + (c R_i x + R_k x)$$

$$= -c b_i + (c b_i + b_k)$$

$$\Rightarrow R_k x^* = b_k$$

S10

به همین شیوه می‌توان استدلال کرد که هر جواب A_1 یک جواب A_2 است

مثال عملیات اول

$$2x_1+3x_2-x_3=5$$
$$x_1-x_2+x_3=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1-x_2+x_3=1 \\ 2x_1+3x_2-x_3=5 \end{cases}$$

$$A_1 \Longleftrightarrow A_2$$

عملیات دوم سطری

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=5 \\ x_1-x_2+x_3=1 \end{cases} \xRightarrow{R_1\times 6} \begin{cases} 12x_1+18x_2-6x_3=30 \\ x_1-x_2+x_3=1 \end{cases}$$

$$A_1 \Longleftrightarrow A_2$$

عملیات سوم

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=5 \\ x_1-x_2-x_3=1 \end{cases} \xRightarrow{R_2=3R_1+R_2} \begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=5 \\ (3\times2+1)x_1+(3\times3-1)x_2+(3\times(-1)-1)x_3= \\ =3\times5+1 \end{cases}$$

A_1

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2 \cancel{+} x_3=5 \\ 7x_1+8x_2-4x_3=16 \end{cases}$$

A_2

A_1

S11

حال به شرح الگوریتم می‌پردازیم

این الگوریتم یک زنجیره از دستگاه‌های هم ارز تولید می‌کند

که در این زنجیره دو حالت رخ می‌دهد یا جوابهای دستگاه

به سادگی قابل محاسبه است یا عدم وجود جواب مشخص می‌شود

مرحله اول برای دستگاه $Bx=b$ عبارت است از $A_1=[B:b]$

و مرحله $i+1$ یک دستگاه هم ارز A_i تولید می‌شود که آن را

A_{i+1} می‌نامیم و باید در هر مرحله دوگام طی شود

گام اول: انتخاب ستون لولا:

ستون کاندید لولا، ستونی است که اولا در مراحل قبلی انتخاب نشده باشد

و عناصر سطر iام تا mام آن ستون کاندید شامل حداقل یک عنصر غیر صفر باشد

اگر تعداد این ستونها بیشتر از یک باشد آنگاه مطابق با یک قاعده خوش تعریف

نظیر کمترین یا بیشترین اندیس یا اندیس رندمی یک ستون انتخاب می‌شود که

ما از کمترین اندیس استفاده می‌کنیم

گام دوم: اگر در مرحله iام ستون kام لولا باشد

بزرگترین قدر مطلق عدد ستون زیر

$$\begin{bmatrix} a_{ik} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}$$

S12

انتخاب می شود یعنی a_{rk} اگر $r \neq k$ که عملیات

تعویض سطر kام با سطر r انجام می شود عملیات اول

حال اگر این a_{kk} جدید مخالف یک باشد سطر kام را

بر a_{kk} تقسیم می کنیم این سطر جدید را محور می نامید عملیات دوم

در مرحله آخر تمام ستون لولا را لحاظ می کنیم یعنی

$$\begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}$$

حال به کمک عملیات سطری سوم همه عناصر غیر از a_{kk} را صفر می کنیم

وارد مرحله k+1 می شویم این کار تا یافتن عدم ستون لولا تکرار می شود

نکته: اگر در هر مرحله ای به سطری برسیم که سمت راست غیر صفر باشد و سمت چپ همه صفر الگوریتم خارج می شود و اعلام می کند دستگاه فاقد جواب است ولی اگر هم سمت راست و سمت چپ هر دو صفر شد آن سطر از معادله حذف می شود.

S13

دلیل این نکته در زیر توضیح داده شده است

فرض کنید که سطر t ام به شرح زیر شود

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots 0x_n = b_t \neq 0$$

بدیهی است که هر $(x_1, \ldots, x_n)$ قرار دهیم دستگاه فاقد جواب است

و اگر

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b_t = 0$$

بدیهی است که هر $(x_1, \ldots, x_n)$ در معادله t ام قرار دهیم صادق است

و کمکی به حل دستگاه نمی‌کند پس زائد است و حذف می‌شود

برای راحتی کار دستگاه $AX = b$ را به شکل زیر می‌نویسیم

$$AX = b \Longrightarrow [A \vdots b] \rightarrow \text{ماتریس افزوده}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 \quad\quad - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 \quad\quad = 6 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right]$$

S14

مثال دستگاه زیر را حل کنید

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6$$

$$-4x_1 - 8x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 12x_5 = 12$$

$$2x_1 \quad 4x_2 + 6x_3 - 6x_4 + x_5 = 7$$

برای راحتی همان طور که گفته شد دستگاه را به شکل زیر می‌نویسیم در مرحله 1 هستیم

$$A_1 = \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ -4 & -8 & 4 & 8 & 12 & 12 \\ 2 & 4 & 6 & -6 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

گام اول: انتخاب ستونهای لولا :

$$K = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow k = \min K = 1$$

یعنی ۵ ستون می‌توانند لولا بشوند که ما کوچکتره min را انتخاب کردیم

گام دوم در زیر ستون $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$ عدد (-4) از لحاظ قدر مطلق بیشتر است.

S15

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{-4} & -8 & 4 & 8 & 12 & 12 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & -6 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

پس تعویض سطری صورت نگیرد

$R_1 \Leftrightarrow R_2$

حال چون $-4 \neq 1$ سطر محور که در اینجا سطر اول است را بر (-4) تقسیم می‌کنیم یعنی

$$(-4 \quad -8 \quad 4 \quad 8 \quad 12 \ \vdots \ 12) \div (-4)$$

$$= (1 \quad 2 \quad -1 \quad -2 \quad -3 \ \vdots \ -3)$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & -6 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

در ادامه گام دوم باید عناصر ① و ② در ستون اول صفر شود

با کمک عملیات سطری از قاعده زیر

قرینه ← $(-)$ عنصر صفرشونده $\times$ سطر محور

$+$ سطر هدف

سطر هدف جدید

S16

بنابراین خواهیم نوشت

$$\begin{array}{r} -1\times[1\quad 2\quad -1\quad -2\quad -3\ \vdots\ -3] \\ +[1\quad 2\quad 1\quad 1\quad 1\ \vdots\ 6] \\ \hline [0\quad 0\quad 2\quad 3\quad 4\ \vdots\ 9] \end{array}$$

و

$$\begin{array}{r} -2\times[1\quad 2\quad -1\quad -2\quad -3\ \vdots\ -3] \\ +[2\quad 4\quad 6\quad -6\quad 2\ \vdots\ 8] \\ \hline [0\quad 0\quad 8\quad -2\quad 8\ \vdots\ 14] \end{array}$$

$$A_2 = \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & -1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 8 & -2 & 8 & 14 \end{array}\right]$$

حال در مرحله دوم قرار داریم و گام اول باید مجدد اجرا شود

$$R_2 = \frac{R_2}{8}$$

بنابراین

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 8 & -2 & 8 & 14 \end{array}\right] \div (8)$$

$$= \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{4} & 1 & \frac{14}{8} \end{array}\right]$$

$$A_2 : \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{14}{8} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 9 \end{array}\right]$$

حال باید عناصر -1 و 2 شبیه مرحله قبل صفر کرد البته در اینجا سطر محور سطر دوم است

$$-(-1)\times\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{14}{8} \end{array}\right]$$

$$+ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & -3 & -3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -\frac{9}{4} & -2 & -\frac{10}{8} \end{array}\right]$$

$$-(-1)R_2 + R_1$$

$$-(2)\times\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{14}{8} \end{array}\right]$$

$$+ \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 9 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & \frac{14}{4} & 2 & \frac{44}{8} \end{array}\right]$$

$$-2 \times R_2 + R_3$$

S18

ستون اول نمی‌تواند کاندیدا شود چون قبلا انتخاب شده است

ستون دوم نیز نمی‌تواند کاندید شود چون زیر ستون

آن فاقد عنصر غیر صفر است $\begin{bmatrix} a_{22} \\ a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ستونهای سوم و چهارم و پنجم می‌توانند کاندید شوند

بزرگ $K = \{3, 4, 5\} \Rightarrow k = \min K = 3$

اما عناصر زیر ستون 3 یعنی $\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$ که از لحاظ قدر مطلق 8 بزرگتر است

پس سطر سوم و دوم تعویض می‌شود $R_2 \leftrightarrow R_3$

$$A_2 : \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & -2 & 8 & 14 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 9 \end{array}\right]$$

چون $8 \neq 1$ پس عناصر سطر دوم را بر 8 تقسیم می‌کنیم

S19

$$A_3 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -\frac{9}{4} & -2 & -\frac{10}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{14}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{14}{4} & 2 & \frac{44}{8} \end{array}\right]$$ پس

در این مرحله مجدد باید ستون کاندید انتخاب شود

ستون اول و سوم قبلا انتخاب شده اند پس امکان کاندید

شدن ندارند ستون دوم هم نمی‌تواند کاندید شود به همان دلیل

که در مرحله قبل گفته شد بنابراین

$$K = \{4, 5\} \Rightarrow k = \min\{4, 5\} = 4$$

پس ستون لولا ستون چهارم خواهد بود

چون در زیر ستون فقط یک عنصر $\frac{14}{4}$ موجود است

پس سطر سوم سطر محور خواهد بود

S20

چون عدد لولا $\frac{14}{4}$ مخالف 1 است پس

$$\frac{R_3}{\frac{14}{4}} = R_3 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc:c} 0 & 0 & 0 & \frac{14}{4} & 2 & \frac{44}{8} \end{array}\right] \div \frac{14}{4}$$

$$= \left[\begin{array}{ccccc:c} 0 & 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right]$$

$$A_3 = \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & 0 & -\frac{9}{4} & -2 & -\frac{10}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{4} & 1 & \frac{14}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{11}{7} \end{array}\right]$$

حال باید دو عنصر $-\frac{1}{4}$ و $-\frac{9}{4}$ صفر شود بنابراین

$$-\left(-\frac{9}{4}\right) \times \left[\begin{array}{ccccc:c} 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{11}{7} \end{array}\right]$$

$$+ \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & 0 & -\frac{9}{4} & -2 & -\frac{10}{8} \end{array}\right]$$

$-\left(-\frac{9}{4}\right)R_3$

$+\ R_1$

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & 0 & 0 & -\frac{5}{7} & \frac{16}{7} \end{array}\right]$$