فصل چهارم: معیار های فازی و معیار های فازی بودن

۴-۱- معیارهای فازی

برای جلوگیری از ابهام درباره معیارهای فازی و معیارهای فازی بودن، ابتدا مختصرا به معنی و ویژگی های معیارهای فازی می پردازیم. در اواخر دهه ۱۹۷۰، سوگنو یک معیار فازی بصورت زیر تعریف کرد:

سوگنو [۱۹۷۷]: $\mathcal{B}$ دامنه بورل مجموعه اختیاری (مرجع) X است.

تعریف ۴-۱ : تابع مجموعه ای g روی $\mathcal{B}$ را یک معیار فازی می نامند اگر دارای ویژگی های زیر باشد:

۱. $g(\circ) = \circ, g(X) = ۱$

۲. اگر $A \subseteq B$ و $A, B \in \mathcal{B}$ آنگاه $g(A) \leq g(B)$.

۳. $A_n \in \mathcal{B}, A_۱ \subseteq A_۲ \subseteq \cdots$ آنگاه $\lim_{n\to\infty} g(A_n) = g\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)$

معیار سوگنو با معیارهای کلاسیک فرق دارد چرا که ویژگی جمع پذیری را حذف کرده است [ماروفاشی و سوگنو ۱۹۸۹، ص ۲۰۱]. اما روشی متفاوت توسط کلمنت و شویلا [۱۹۸۲] بکار رفته است که خواننده علاقمند می تواند به مطالعه ایشان مراجعه کند.

بانون[۱۹۸۱] نشان می دهند معیارهای بسیار زیادی مانند معیار احتمال، توابع باور، معیارهای باورپذیری و غیره، معیارهای فازی در سیستم سوگنو هستند. برای این کتاب تنها از معیار احتمال استفاده شده است[دوبیس و پراد a ۱۹۸۸، ص ۷].

در چارچوب تئوری مجموعه فازی، زاده ایده توزیع احتمال و مفهوم معیار احتمال را مطرح می کند که نوع خاصی از معیار فازی پیشنهادی سوگنو است. معیار احتمال بصورت زیر تعریف می شود[زاده ۱۹۷۸؛ هیگاشی و کلیر ۱۹۸۲]:

تعریف ۴-۲ : اگر $P(X)$ مجموعه توانی مجموعه X باشد. معیار احتمال تابع $\prod : P(X) \rightarrow [0, 1]$ با ویژگی های زیر است:

۱. $\prod(0) = 0, \prod(X) = 1$

۲. $A \subseteq B \Longrightarrow \prod(A) \leq \Pi(B)$

۳. $\prod(\cup_{i\in I} A_i) = \sup \prod(A_i)$ که I مجموعه اندیس گذار است.

این را می توان بطور منحصربفرد با یک تابع توضیح احتمال $f : X \rightarrow [0, 1]$ در $\prod(A) = \sup_{x\in A} f(x), A \subset X$ تعیین کرد. مستقیما ثابت می شود که f با $f(x) = \prod(\{x\})\forall_x \in X$ تعریف می شود[کلر و فلگر ۱۹۸۸، ص ۱۲۲].

یک احتمال همیشه یک معیار فازی نیست [پوری و رلسکو ۱۹۸۲]. اما اگر X متناهی و اگر توزیع احتمال نرمال باشد یک معیار فازی و نگاشتی به باز $[0, 1]$ است.

مثال ۴-۱ : اگر $X = \{0, 1, \cdots, 10\}$ و $\prod(\{x\})$ احتمال اینکه x به ۸ نزدیک است باشد:

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
$\prod(\{x\})$	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۱	۰/۵	۰/۸	۱	۰/۸	۰/۵

$\prod(A)$ احتمال آن است که A شامل یک عدد صحیح نزدیک به ۸ است.

$$A \subset X \Rightarrow \prod(A) = \sup_{x\in A} \prod(\{x\})$$

معیارهای فازی و معیارهای فازی بودن

برای $A=\{۲,۵,۹\}$ داریم :

$$
\begin{aligned}
\prod(A) &= \sup_{x\in A}\prod(\{x\})\\
&= \sup\{\prod(\{۲\}),\prod(\{۵\}),\prod(\{۹\})\}\\
&= \sup\{۰, ۰/۱, ۰/۸\}\\
&= ۰/۸
\end{aligned}
$$

۴-۲- معیارهای فازی بودن

معیارهای فازی بودن ، برخلاف معیارهای فازی، تلاش می کنند تا درجه فازی بودن یک مجموعه فازی را مشخص کنند. تعداد روش های انجام این کار مشخص است. بعضی از نویسندگان، به شدت تحت تاثیر آنتروپی شانون بعنوان معیار اطلاعات هستند و با پیروی از دی لوکا و ترمینی [۱۹۷۲] معیار فازی بودن را بصورت نگاشت d از مجموعه توانی $P(X)$ به $[۰,+\infty[$ در نظر می گیرند که چند شرط را برآورده می کند. سایر نویسندگان[کافمن ۱۹۷۵] اندیس فازی بودن را بعنوان یک فاصله نرمال پیشنهاد می کند و سایرین [یگار ۱۹۷۹؛ هیگاشی و کلر ۱۹۸۲] مفهوم فازی بودن را مبتنی بر درجه توزیع میان مجموعه فازی و مکمل اش می دانند.

این دو معیار فازی را در ادامه توضیح می دهیم و برای هر دو فرض می کنیم A متناهی است.

معیار اول بصورت زیر است: اگر $u_{\tilde{A}}(x)$ تابع عضویت مجموعه فازی $\tilde{A}$ برای $x\in X$ باشد، X متناهی است. به نظر محتمل می رسد که معیار فازی بودن $(\tilde{A})$ دارای ویژگی های زیر است :

۱. $(\tilde{A})=۰$ اگر $\tilde{A}$ یک مجموعه غیرفازی در X است.

۲. $(\tilde{A})$ یک ماکزیمم منحصربفرد است اگر $\mu_{\tilde{A}}(x)=\frac{۱}{۲}\forall x\in X$

۳. $d(\tilde{A})\geq d\left(\tilde{A}'\right)$ اگر $\tilde{A}'$ غیرفازی تر از $\tilde{A}$ باشد یعنی اگر $\mu_{A'}(x)\leq\mu_{\tilde{A}}(x)$ برای $\mu_{\tilde{A}}(x)\leq\frac{۱}{۲}$ و $\mu_{A'}(x)\geq\mu_{\tilde{A}}(x)$ برای $\mu_{\tilde{A}}(x)\geq\frac{۱}{۲}$

۴. $d(\mathrm{C}\tilde{A})=d\left(\tilde{A}'\right)$ که در آن $C\tilde{A}$ مکمل $\tilde{A}$ است.

دی لوکا و ترمینی معیار فازی بودن را " آنتروپی" یک مجموعه فازی می دانند که بصورت زیر تعریف می شود[دی لوکا و ترمینی ۱۹۷۲، ص ۳۰۵]:

تعریف ۴-a۳ : آنتروپی معیاری از یک مجموعه فازی $\tilde{A}=\{x,\mu_{\tilde{A}}(x)\}$ است که بصورت زیر تعریف می شود:

$$d(\bar{A})=H(\bar{A})+H(\Phi\bar{A}),\quad x\in X$$
$$H(\tilde{A})=-K\sum_{i=۱}^{n}\mu_{\lambda}(x_i)\ln(\mu_{\lambda}(x_i))$$

که n تعداد عناصر در پشتیبان $\tilde{A}$ و K یک ثابت مثبت است.

با استفاده از تابع شانون $S(x)=-x\ln-(۱-x)\ln(۱-x)$ ، دی لوکا و ترمینی رابطه بخش ؟؟ را ساده کرده تا به تعریف زیر برسند.

تعریف ۴-b۳ : آنتروپی d معیار فازی بودن مجموعه فازی $\tilde{A}=\{x,\mu_{\tilde{A}}(x)\}$ است که بصورت زیر تعریف می شود:

$$d(\tilde{A})=K\sum_{i=۱}^{n}S(\mu_{\lambda}(x_i))$$

فرض می شود $\tilde{A}$ نزدیک به ۱۰ است (مثال d۱-۲)

$$\tilde{A}=\{(۷,/۱),(۸,/۵),(۹,/۸),(۱۰,۱),(۱۱,/۸),(۱۲,./۵),(۱۳,/۱)\}$$

اگر $K=۱$، داریم

$$d(\tilde{A})=/۳۲۵+/۶۹۳+/۵۰۱+۰+/۵۰۱+/۶۹۳+/۶۱۱+/۳۲۵=۳/۰۳۸$$

بعلاوه، اگر $\tilde{B}$ عددی صحیح نزدیک به ۱۰ باشد :

$$\tilde{B}=\{(۶,/۱),(۷,/۳),(۸,/۴),(۹,/۷),(۱۰,۱),(۱۱,/۸),(۱۲,/۵),(۱۳,/۳),(۱۴,/۱)\}$$
$$d(\tilde{B})=/۳۲۵+/۶۱۱+/۶۷۳+/۶۱۱+۰+/۵۰۱+/۶۹۳+/۶۱۱+/۳۲۵=۴/۳۵$$

معیار دوم: نافماکر [۱۹۷۵]، لو [۱۹۷۷]، گاتوالد [b۱۹۷۹] و سایرین مطالعات خود را بر مبنای لوکا و

تریمینی بنا نهاده اند.

اگر $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی در X و $C\tilde{A}$ مکمل اش باشد، آنگاه بر خلاف مجموعه های غیرفازی، موارد زیر لزوما صادق نیستند:

$$\tilde{A} \cup \not\subset \tilde{A} = X$$

$$\tilde{A} \cap \not\subset \tilde{A} = \varnothing$$

این بدان معناست که مجموعه های فازی همیشه قانون طرد ثالث را برآورده نمی کنند که این یکی از تمایزهای اصلی مجموعه های فازی از مجموعه های غیرفازی است. بعضی نویسندگان [یاگار ۱۹۷۹؛ هیگاشی و کلر۱۹۸۲] رابطه بین $\tilde{A}$ و $C\tilde{A}$ را اصل فازی بودن می دانند.

یاگر [۱۹۷۹] خاطر نشان می کند که شرط تمایز بین $\tilde{A}$ و $C\tilde{A}$ توسط مجموعه های فازی برآورده نمی شود. بنابراین بر این باور است که هر معیار فازی بودن باید معیاری از فقدان تمایز میان $\tilde{A}$ و $C\tilde{A}$ یا $\mu_{\tilde{A}}(x)$ و $\mu_{C\tilde{A}}(x)$ باشد. بعنوان یک متریک محتمل برای اندازه گیری فاصله میان یک مجموعه فازی و مکمل آن، یاگر تعریف ۴-۴ را ارائه می دهد:

$$D_p(\tilde{A}, \Phi\tilde{A}) = \left[\sum_{i=۱}^{n} \left|\mu_\lambda\left(x_i\right) - \mu_{Gi}\left(x_i\right)\right|^p\right]^{۱/p} \quad p = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

$$S = \operatorname{supp}(\tilde{A}) : D_p(S, \Phi S) = \|S\|^{۱/p}$$

تعریف ۴-۵ : [یاگر ۱۹۷۹] : معیار فازی بودن $\tilde{A}$ را می توان بصورت زیر تعریف کرد:

$$f_P(\tilde{A}) = ۱ - \frac{D_p(\tilde{A}, \Phi\tilde{A})}{\|\operatorname{supp}(\tilde{A})\|}$$

بنابراین $f_p(\tilde{A}) \in [\circ, ۱]$. این معیار ویژگی های ۱ تا ۴ مطرح شده توسط لوکا و ترمینی را برآورده می سازد. برای $D_p(\tilde{A}, C\tilde{A}) \cdot \mathrm{p} = ۱$ به متریک همینگ منجر می شود:

$$D_۱(\tilde{A}, \Phi\tilde{A}) = \sum_{i=۱}^{n} \left|\mu_{\grave{\lambda}}\left(x_i\right) - \mu_{\mathrm{Ci}}\left(x_i\right)\right|$$

از آنجا که $\mu_{C\tilde{A}}(x) = ۱ - \mu_{\tilde{A}}(x)$ ، داریم:

$$D_۱(\tilde{A}, \Phi\tilde{A}) = \sum_{i=۱}^{n} |۲\mu_\lambda(x_i) - ۱|$$

برای $p = ۲$، به متریک اقلیدسی می رسیم:

$$D_۲(\tilde{A}, \Phi\tilde{A}) = \left(\sum_{i=۱}^{n} (\mu_\lambda(x_i) - \mu_{\square\square}(x_i))^۲ \right)^{۱/۲}$$

و برای $۱ - \mu_{\tilde{A}}(x)$ داریم:

$$D_۲(\tilde{A}, \Phi\tilde{A}) = \left(\sum_{i=۱}^{n} (۲\mu_\lambda(x_i) - ۱)^۲ \right)^{۱/۲}$$

مثال ۳-۴: اگر $\tilde{A}$ عددی صحیح نزدیک به ۱۰ و $\tilde{A}$ عددی صحیح کاملا نزدیک به ۱۰ باشد، با استفاده از فرمول بالا می توان برای $p = ۱$ محاسبه کرد:

$$D_۱(\tilde{A}, \Phi\tilde{A}) = ٫۸ + ۰ + ٫۶ + ۱ + ٫۶ + ۰ + ٫۸ = ۳٫۸$$

$$\| \mathrm{supp}(\tilde{A}) \| = ۷$$

$$f_۱(\tilde{A}) = ۱ - \frac{۳٫۸}{۷} = ۰٫۴۵۷$$

بطور مشابه

$$D_۱(\tilde{B}, \not\subset \tilde{B}) = ۴٫۶$$

$$\| \mathrm{supp}(\tilde{B}) \| = ۹$$

$$f_۱(\tilde{B}) = ۱ - \frac{۴٫۶}{۹} = ۰٫۴۸۹$$

همچنین برای $p = ۲$ داریم:

$$D_۲(\tilde{A}, \not\subset \tilde{A}) = ۱/۷۳$$
$$\| \operatorname{supp}(\tilde{A}) \| = ۲/۶۵$$
$$f_۲(\tilde{A}) = ۱ - \frac{۱/۷۳}{۲/۶۵} = ۰/۳۴۷$$
$$D_۲(\tilde{B}, \not\subset \tilde{B}) = ۱/۷۸$$
$$\| \operatorname{supp}(\tilde{B}) \| = ۱$$
$$f_۲(\tilde{B}) = ۱ - \frac{۱/۷۸}{۳} = ۰/۴۰۷$$

خواننده باید بداند مکمل یک مجموعه فازی تعریف منحصربفردی ندارد[بلمن و گیبرتز ۱۹۷۳؛ دوبیس و پراد ۱۹۸۲a؛ لامن ۱۹۷۸]. بنابراین ممکن است تعاریف دیگری برای مکمل و برای سایر معیارهای فاصله وجود داشته باشد حتی اگر همه آن ها نیز روی فاصله میان یک مجموعه فازی و مکمل آن تمرکز کنند[بعنوان مثال، کلر ۱۹۸۷ ، ص ۱۴۱]. این تفاوت ها، بسط معیارهای فازی بودن برای پشتیبان های نامتناهی و همچنین روش های تعریف معیارهای فازی مجموعه های فازی در اینجا بررسی می شود[یاگر ۱۹۷۹].

تمرین ها

۱- $\tilde{A}$ را مشابه با مثال ۴-۲ در نظر بگیرد. با توجه به $\tilde{B}$ و $\tilde{C}$ آیا $\tilde{A}$ غیرفازی تر از $\tilde{A}$ (یا $\tilde{C}$) است؟ معیارهای فازی بودن زیر را محاسبه کرده و نتایج را مقایسه کنید:

الف) آنتروپی (با$K = ۱$)

ب) $f_۱$

ج) $f_۲$ برای هر سه مجموعه

$$\bar{B}' = \mathrm{I}(۸, /۵), (۹, /۹), (۱۰, ۱)^\circ(۱۱, /۸), (۱۲, /۵)\}$$
$$\overline{\boldsymbol{C}}' = [(۶, /۱), (۷, /۱), (۸, /۵), (۹, /۸), (۱۰, ۱), (۱۱, /۸), (۱۲, ۵), (۱۳, /۱), (۱۴, ۱)]$$

۲- ماکزیمم آنتروپی $d(\tilde{A})$ را با توجه به کاردینالیتی پشتیبان $\tilde{A}$ تعیین کنید.

۳- $\tilde{A}$ در تمرین ۱ را در نظر بگیرید

$\tilde{A} \cap C\tilde{A}$ و $\tilde{A} \cup C\tilde{A}$ را بدست آورید. برای کدام مجموعه های فازی (خاص) تساوی برقرار است؟

۴- مثال ۴-۱ را در نظر بگیرید. احتمال مجموعه های زیر را محاسبه کنید:

$$A_۱ = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}, A_۲ = \{۱, ۵, ۸, ۹\}, A_۳ = \{۷, ۹\}$$

فصل پنجم: اصل توسعه و کاربردهای آن

۵-۱- اصل توسعه

یکی از بنیادی ترین مفاهیم مجموعه فازی که می تواند برای تعمیم مفاهیم ریاضی غیرفازی به مجموعه های فازی بکار رود اصل توسعه است. در شکل ابتدایی اش، در اولین مطالعه زاده [۱۹۶۵] بکار رفته است. در ضمن، تغییراتی در این مفهوم داده شده است[زاده ۱۹۷۳a ؛ زاده و همکاران ۱۹۷۵ ؛ جین ۱۹۷۶]. با پیروی از مطالعه زاده [۱۹۷۳a] و دوبیس و پراد [۱۹۸۰a]، اصل توسعه را بصورت زیر تعریف می کنیم:

تعریف ۵-۱ : اگر X یک ضرب کارتزین مجموعه های مرجع $X = X_1 x \dots x X_r$ و $\tilde{A}_1, \cdots, \tilde{A}_r$ نشان دهنده r مجموعه فازی در $X_1 \cdots X_r$ باشد، f نگاشتی از X به مجموعه مرجع Y باشد آنگاه اصل توسعه به ما امکان تعریف یک مجموعه فازی در Y را می دهد :

$$\tilde{B} = \{(y, \mu_B(y)) \mid y = f\left(x_1, \dots, x_r\right), \left(x_1, \dots, x_r\right) \in X\}$$

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1, \dots, x_r) e f^{-1}(y)} \min\left\{\mu_{\lambda_1}\left(x_1\right), \dots, \mu_{\lambda_r}\left(x_r\right)\right\} & if \quad f^{-1}(y) \neq \theta \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

که در رابطه بالا f^{-1} معکوس f است. برای $r = 1$، اصل توسعه به صورت زیر کاهش می یابد:

$$\tilde{B} = f(\bar{A}) = \{(y, \mu_B(y)) \mid y = f(x), x \in X\}$$

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x), & if f^{-1}(y) \neq \theta \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

مثال ۵-۱ : اگر $\tilde{A} = \{(-1, 0.5), (0, 0.8), (1, 1), (2, 0.4)\}$ و $f(x) = x^2$ ، آنگاه با اعمال اصل توسعه داریم:

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}) = \{(0, 0.8), (1, 1), (4, 0.4)\}$$

شکل ۵-۱ این رابطه را نشان می دهد.

اصل توسعه گفته شده در تعریف ۵-۱ را می توان با استفاده از جمع جبری (تعریف ۳-۸) به جای sup و ضرب به جای min تغییر داد[دوبیس و پراد a ۱۹۸۰]. اما از آنجا که این اصل بطور کلی در تعریف ۵-۱ بیان شده است، در اینجا خود را به این نسخه "کلاسیک" محدود می کنیم.

۵-۲- عملیات برای مجموعه های فازی نوع ۲

اصل توسعه را می توان برای تعریف عملیات تئوری مجموعه ها برای مجموعه های فازی نوع ۲ بکار برد(تعریف ۳-۱). در اینجا تنها مجموعه های فازی نوع ۲ با دامنه های گسسته را در نظر می گیریم. دو نوع مجموعه فازی نوع ۲ تعریف می شود:

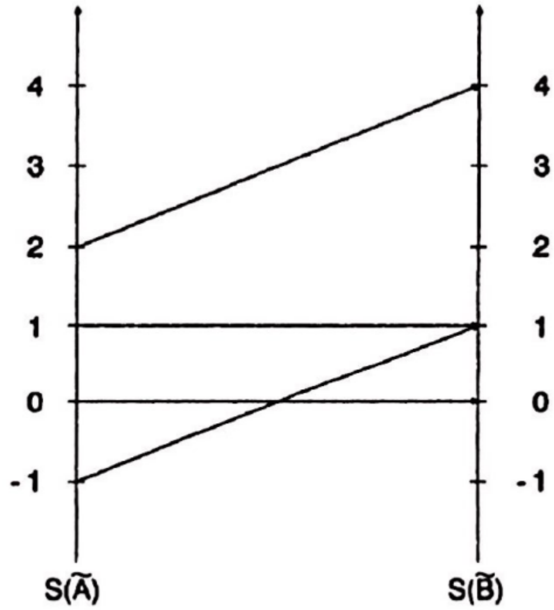
$$\tilde{A}(x) = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x))\} \;\; and \;\; \tilde{B}(x) = \{(x, \mu_{\dot{B}}(x))\}$$

$$\mu_{\dot{\lambda}}(x) = \{(u_i, \mu_{ui}(x)) \mid x \in X, u_i, \mu_{ui}(x) \in [0, 1]\}$$

$$\mu_B(x) = \{(v_j, \mu_{vj}(x)) \mid x \in X, v_j, \mu_{vj}(x) \in [0, 1]\}$$

u_i و v_i به ترتیب درجه عضویت مجموعه های فازی نوع ۱ و توابع عضویت آن ها یعنی $u_{u_i}(x)$ و $u_{v_i}(x)$ هستند. با استفاده از اصل توسعه، عملیات تئوری مجموعه ها را می توان بصورت زیر تعریف کرد [میزوموتو و تاناکا ۱۹۷۶]:

تعریف ۵-۲ : اگر مجموعه های فازی نوع ۲ تعریف شده در بالا را در نظر بگیریم، تابع عضویت اتحاد آن ها بصورت



شکل۵-۱: اصل توسعه

زیر تعریف می شود:

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \cup \mu_{\tilde{B}}(x)$$
$$= \{(w, \mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(w)) \mid w = \max\{u_i, v_j\}, u_i, v_j \in [\circ, \mathsf{1}]\}$$
$$\mu_{\lambda\cup\tilde{B}}(w) = \sup_{w=\max\{\mu_i, v_j]} \min\{\mu_{ui}(x), \mu_{vj}(x)\}$$

برای اشتراک آن ها داریم:

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \cap \mu_{\tilde{B}}(x)$$
$$= \{(w, \mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(w)) \mid w = \min\{u_i, v_j\}, u_i, v_j \in [\circ, \mathsf{1}]\}$$

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(w) = \sup_{w=\min\{u_{i,vj}\}} \min\{\mu_{u_i}(x), \mu_{vj}(x)\}$$

و برای مکمل $\tilde{A}$ داریم :

$$\tilde{\mu}_{\not\subset\tilde{A}}(x) = \{[(۱ - u_i)\,, \mu_{\tilde{A}}\,(u_i)]\}$$

مثال ۵-۲ : اگر $\tilde{A}$ ۱۰ , ... , $X = ۱,\cdots$ اعداد صحیح کوچک و $\tilde{B}$ اعداد صحیح نزدیک به ۴ باشد:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x))\}$$

$$\tilde{B} = \{(x, \mu_{B\tilde{B}}(x))\}$$

که برای $x = ۳$ داریم :

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{A}}(۳) &= \{(u_i, \mu_{ui}(۳)) \mid i = ۱, \ldots, ۳\} \\ &= \{(/۸, ۱), (/۷, /۵), (/۶, /۴)\} \\ \mu_{\tilde{B}}(۳) &= \{(v_j, \mu_{vj}(۳))\,(j = ۱, \ldots, ۳\} \\ &= \{(۱, ۱), (/۸, /۵), (/۷, /۳)\}\end{aligned}$$

u_i	v_j	$w = \min\{u_i, v_j\}$	$\mu_{ui}(۳)$	$\mu_{vj}(۳)$	$\min\{\mu_{\mu i}(۳), \mu_{vj}(۳)\}$
۰/۸	۱	۰/۸	۱	۱	۱
۰/۸	۰/۸	۰/۸	۱	۰/۵	۰/۵
۰/۸	۰/۷	۰/۷	۱	۰/۳	۰/۳
۰/۷	۱	۰/۷	۰/۵	۱	۰/۵
۰/۷	۰/۸	۰/۷	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۰/۷	۰/۷	۰/۷	۰/۵	۰/۳	۰/۳
۰/۶	۱	۰/۶	۰/۴	۱	۰/۴
۰/۶	۰/۸	۰/۶	۰/۴	۰/۵	۰/۴
۰/۶	۰/۷	۰/۶	۰/۴	۰/۳	۰/۳

سپس، سوپرموم (کوچک ترین کران بالا) درجه عضویت تمام جفتایی های (u_i, v_i) محاسبه می شود که w مینیمم آن است:

$$\sup_{/۸=\min\{u_i, v_j\}} \{۱, /۵\} = ۱$$

$$\sup_{/\!۷=\min\{u_i,v_j\}} \{/\!۳, /\!۵, /\!۵, /\!۳\} = /\!۵$$

$$\sup_{/\!۶=\min\{u_i,v_j\}} \{/\!۴, /\!۴, /\!۳\} = /\!۴$$

بنابراین تابع عضویت $x = ۳$ بعنوان مجموعه فازی بدست می آید:

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(۳) = \{(/\!۸, ۱), (/\!۷, ./\!۵), (/\!۶, ۴)\}$$

میزوموتو و تاناکا [۱۹۷۶، ص ۳۱۸] نشان داد که مجموعه های فازی نوع ۲ تعریف شده در بالا خودتوان، جابجاپذیر و انجمنی هستند و از قوانین دمرگان پیروی می کنند. اما، آن ها توزیع پذیر نبوده و قانون جذب، قانون همانی یا قانون مکمل را رعایت نمی کنند.

مثال ۵-۲ نمونه خوبی از محاسبات موجود در عملیات مجموعه های فازی نوع دوم است. خاطر نشان می شود در این مثال درجه عوضیت تنها یک عنصر از مجموعه فازی نوع دو محاسبه شده است. برای سایر عناصر، مانند $x = ۴$ و $x = ۵$ و غیره از مجموعه $\tilde{A} * \tilde{B}$ ، محاسبات مربوطه ضروری است. در اینجا " $*$ " می تواند هر عملیاتی در تئوری مجموعه ها باشد.

۵-۳- عملیات جبری با اعداد فازی

تعریف ۵-۳ : یک عدد فازی $\tilde{M}$ یک مجموعه فازی نرمال شده محدب $\tilde{M}$ از خط واقعی R است بطوریکه:

۱- دقیقا یک $x_\circ \in R$ با $u_{\tilde{M}}(x_\circ) = ۱$ وجود دارد($x_\circ$ را مقدار میانگین $\tilde{M}$ می نامند).

۲- $u_{\tilde{M}}(x)$ پیوسته چندضابطه ای است.

امروزه، تعریف ۵-۳ تغییرات زیادی داشته است. برای کارایی محاسباتی و سادگی جمع آوری داده ها، اغلب از توابع عضویت زوذنقه ای استفاده می شود. شکل ۵-۲ چنین مجموعه فازی را نشان می دهد که "تقریبا ۵ " نامیده می شود و بطور نرمال بصورت چهارتایی $\{۳, ۴, ۶, ۷\}$ تعریف می شود. این یک بازه فازی است(بخش ۵-۳-۲). البته یک عدد فازی مثلثی حالت خاصی از آن است.

تعریف ۵-۴ : یک عدد فازی $\tilde{M}$ را مثبت (منفی) می نامند اگر تابع عضویت اش $\mu_{\tilde{M}}(x) = \circ, \forall x <$

$(\forall x > ۰)$ ۰ باشد.

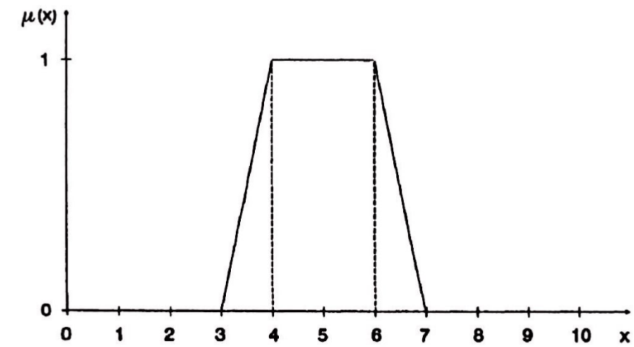


Figure 5–2. Trapezoidal "fuzzy number."

شکل۵-۲: "عدد فازی" ذورنقه ای

مثال ۵-۳ : مجموعه های فازی زیر اعداد فازی هستند:

$$approximately\ ۵ = \{(۳,/۲),(۴,/۶),(۵,۱),(۶,/۷),(۷,/۱)\}$$
$$approximately\ ۱۰ = \{(۸,/۳),(۹,/۷),(۱۰,/۱),(۱۱,/۷),(۱۲,/۳)\}$$

اما $\{(۳,/۸),(۴,۱),(۵,۱),(۶,۷)\}$ یک عدد فازی است چون $u(۴)$ و همچنین $u(۵) = ۱$.

همه ما با عملیات جبری روی اعداد غیرفازی آشنا هستیم. اگر بخواهیم از مجموعه های فازی در عمل استفاده کنیم، باید با اعداد فازی کار کنیم و اصل توسعه تنها راه بسط عملیات جبری از اعداد غیرفازی به اعداد فازی است.

ما نیازمند تعاریف بیشتر هستیم. اگر $L(R)$ مجموعه اعداد فازی حقیقی باشد و $X = X_۱ \times X_۲$ می توان ویژگی های زیر را برای عملیات دودویی تعریف کرد:

$$for \qquad x_۱ > y_۱ \quad and \quad x_۲ > y_۲$$
$$x_۱ * x_۲ > y_۱ * y_۲ \, (x_۱ * x_۲ < y_۱ * y_۲)$$

تعریف۵-۵: یک عملیات دودویی $*$ در R را افزایشی (کاهشی) می نامند اگر

تعریف ۵-۴ :

$f(x,y) = x + y$ یک عملیات افزایشی است.

$f(x,y) = x.y$ یک عملیات افزایشی روی R^+ است.

$f(x,y) = -(x+y)$ یک عملیات کاهشی است.

اگر عملیات جبری . $-$ $+$ و : را به عملیات روی اعداد فازی بسط دهیم، آن ها را به ترتیب با $\oplus$ ، $\ominus$ ، $\odot$ و نشان می دهیم.

تئوری ۵-۱ [دوبیس و پراد ۱۹۸۰ a ،ص ۴۴]: اگر $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ اعداد فازی باشند که توابع عضویت آن ها پیوسته و نگاشتی از R به $[۰,۱]$ و $*$ یک عملیات دودویی افزایشی (کاهشی) باشد، آنگاه $\tilde{M} \circledast \tilde{N}$ یک عدد فازی است که تابع عضویتآن پیوسته و نگاشتی از R به $[۰,۱]$ است.

دوبیس و پراد [۱۹۸۰ a] رویکردهایی را برای تعیین توابع عضویت $\mu_{\widetilde{M \circledast R}}(x)$ بر اساس $u_{\tilde{M}}$ و u_R پیشنهاد داده اند.

تئوری ۵-۲ : اگر $\tilde{M}, \tilde{N} \in F(R)$ با توابع عضویت پیوسته $u_{\tilde{M}}(x)$ و $u_{\tilde{N}}(x)$ باشد آنگاه با استفاده از اصل توسعه برای عملیات دودویی $R \otimes R \to R$: $*$ ، تابع عضویت عدد فازی $\tilde{M} \circledast \tilde{N}$ برابر است:

$$\mu_{\tilde{M} \circledast \tilde{N}}(z) = \sup_{z=x^*y} \min \{\mu_{\tilde{M}}(x), \mu_{\tilde{N}}(y)\}$$

ویژگی های عملیات بسط یافته $\circledast$ نکته ۵-۱ [دوبیس و پراد ۱۹۸۰، ص ۴۵]:

۱- برای هر عملیات جابجاپذیر $*$ ، عملیات بسط یافته $\circledast$ نیز جابجاپذیر است.

۲- برای هر عملیات انجمنی $*$، عملیات بسط یافته $\circledast$ نیز انجمنی است.

۵-۳-۱- عملیات بسط یافته خاص

برای عملیات یگانی $f : X \to Y, X = X_۱$ (بخش ۵-۱) ، اصل توسعه برای تمام $M \in F(R)$ بصورت زیر کاهش می یابد:

$$\mu_{f(\tilde{M})}(z) = \sup_{x \in f^{-۱}(z)} \mu_{\tilde{M}}(x)$$

مثال ۵-۵

۱- برای $f(x) = -x$، متضاد عدد فازی $\tilde{M}$ بصورت $-\widetilde{M} = \{(x, \mu_{\tilde{M}}(x) \mid x \in X\}$ نشان داده می شود که در آن $\mu_{-\widetilde{M}}(x) = \mu_{\widetilde{M}}(-x)$

۲- اگر $f(x)=\frac{۱}{۲}$ آنگاه معکوس عدد فازی $\tilde{M}$ بصورت $\widetilde{M}^{-۱}=\left\{x,\mu^{-۱}\tilde{M}(x)\mid x\in X\right\}$ نشان داده می شود که در آن $\mu^{-۱}\tilde{M}(x)=\mu_{\widetilde{M}}\left(\frac{۱}{x}\right)$

۳- برای $\lambda\in R_{\circ}$ و $f(x)=\lambda.x$ ضرب اسکالر یک عدد فازی با $\lambda.\widetilde{M}=\{\left(x,\mu_{\lambda\widetilde{M}}(x)\right)\mid x\in X\}$ نشان داده می شود که در آن $\mu_{\lambda\tilde{M}}(x)=\mu_{\tilde{M}}(\lambda x)$

در ادامه، اصل توسعه را برای عملیات دودویی بکار می بریم. تعمیم به عملیات n تایی ساده است.

جمع توسعه یافته. از آنجا که جمع یک عملیات افزایشی مبتنی بر تئوری ۵-۱ است، می توان گفت جمع توسعه یافته $\oplus$ اعداد فازی بدین معنی است که $f(\widetilde{N},\widetilde{M})=\widetilde{N}\oplus\tilde{M},\widetilde{N},\widetilde{M}\in F(R)$ یک عدد فازی است یعنی $\widetilde{N}\oplus\widetilde{M}\in F(R)$

ویژگی $\oplus$

۱- $\oplus(\widetilde{N}\oplus\widetilde{M})=(\oplus\widetilde{N})\oplus(\oplus\widetilde{M})$

۲- $\oplus$ جابجاپذیر است.

۳- $\oplus$ انجمنی است.

۴- $\circ\in R\subseteq F(R)$ عنصر اصلی برای $\oplus$ است یعنی $\tilde{M}\oplus\circ=\tilde{M},\forall\tilde{M}\in F(R)$

۵- برای هیچ عنصر معکوسی وجود ندارد یعنی $\forall\widetilde{M}\in F(R)\backslash R:\widetilde{M}\oplus(\oplus\widetilde{M})\neq\circ\in R$

بدین ترتیب معادلات فازی به سختی قابل حل هستند چرا که متغیرها را نمی توان حذف کرد[یاگر ۱۹۸۰].

ضرب بسط یافته. ضرب یک عملیات افزایشی روی R^{+} و یک عملیات کاهشی روی R^{-} است. بنابراین، بنابر تئوری ۵-۱، ضرب اعداد فازی مثبت یا اعداد فازی منفی منجر به یک عدد فازی مثبت می شود. اگر $\tilde{M}$ یک عدد فازی مثبت و $\tilde{N}$ یک عدد فازی منفی باشد آنگاه $\widetilde{M}\odot\widetilde{N}=\ominus(\ominus\tilde{M}\odot\widetilde{N})$ نیز منفی است و منجر به یک عدد فازی منفی می شود.

ویژگی های $\odot$

۱- $(\ominus\tilde{M})\odot\widetilde{N}=\odot(\widetilde{M}\odot\widetilde{N})$

۲- $\odot$ جابجاپذیر است.

۳- $\odot$ انجمنی است.

۴- $\tilde{M}\odot۱=\tilde{M},۱\in R\subseteq F(R)$ عنصر خنثی برای $\odot$ است یعنی $\widetilde{M}\odot۱=\widetilde{M}\forall\widetilde{M}\in F(R)$

۵- برای $\odot$ هیچ عنصر معکوسی وجود ندارد یعنی $\forall\widetilde{M}\in F(R)\backslash R:\widetilde{M}\odot\widetilde{M^{-۱}}\neq ۱$

تئوری ۵-۳ : اگر $\tilde{M}$ یک عدد فازی مثبت و یا منفی و $\tilde{N}$ و $\tilde{P}$ هر دو اعداد فازی مثبت یا منفی باشند آنگاه :

$$\tilde{M} \odot (\tilde{N} \oplus \tilde{P}) = (\tilde{M} \odot \tilde{N}) \oplus (\tilde{M} \odot \tilde{P})$$

تفریق بسط یافته. تفریق نه کاهشی و نه افزایشی است. بنابراین تئوری ۵-۱ را نمی توان بکار برد. اما عملیات $\tilde{M} \ominus \tilde{N}$ را می توان بصورت $\tilde{M} \ominus \tilde{N} = \tilde{M} \oplus (\ominus \tilde{N})$ نوشت. با اعمال اصل توسعه داریم:

$$\begin{aligned}
\mu_{\tilde{M}\ominus\tilde{N}}(z) &= \sup_{z=x-y} \min\left(\mu_{\tilde{M}}(x), \mu_{\tilde{N}}(y)\right) \\
&= \sup_{z=x+y} \min\left(\mu_{\tilde{M}}(x), \mu_{\tilde{N}}(-y)\right) \\
&= \sup_{z=x+y} \min\left(\mu_{\tilde{M}}(x), \mu_{-\tilde{N}}(y)\right)
\end{aligned}$$

بنابراین $\tilde{M} \ominus \tilde{N}$ تا زمانی که $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ فازی باشند، یک عدد فازی است .

تقسیم بسط یافته. تقسیم نیز نه افزایشی و نه کاهشی است. اگر $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ اعداد فازی مثبت باشند، می توان مشابه با تفریق بسط یافته عمل کرد.

$$\begin{aligned}
\mu_{\tilde{M}\odot\tilde{N}}(z) &= \sup_{z=x/y} \min\left(\mu_{\tilde{M}}(x), \mu_{\tilde{N}}(y)\right) \\
&= \sup_{z=xy} \min\left(\mu_{\tilde{M}}(x), \mu_{\tilde{N}}\left(\frac{۱}{y}\right)\right) \\
&= \sup_{z=xy} \min\left(\mu_{\tilde{M}}(x), \mu_{\tilde{N}}^{-۱}(y)\right)
\end{aligned}$$

$\tilde{N}^{-۱}$ یک عدد فازی مثبت است. بنابراین حال تئوری ۵-۱ را می توان بکار برد. اگر $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ هر دو اعداد فازی منفی باشند باز هم این برقرار و صادق است. نتایج مشابهی را می توان با استفاده از سایر عملیات $\min - \max$ بدست آورد بعنوان مثال می توان به تعاریف ۳ تا ۷ از طریق ۳-۱۱ اشاره کرد.

عملیات بسط یافته با اعداد فازی تا زمانی که محدودیتی روی نوع توابع عضویت وجود نداشته باشد، شامل محاسبات زیاد است. دوبیس و پراد [۱۹۷۹] الگوریتم کلی برای انجام عملیات توسعه یافته ارائه کردند. اما در عمل، بهتر است انواع خاصی از اعداد فازی بکار رود که در بخش بعدی توضیح داده می شوند. تعمیم با محدود کردن عملیات بسط یافته به اعداد فازی در نمایش LR یا حتی اعداد فازی مثلثی، محدود نمی شود[وان لارهون

و پدریکز ۱۹۸۳] و محاسبات به شدت کاهش می یابد. خاطر نشان می شود که عملیات بسط یافته بر اساس $\min - \max$ را نمی توان برای اعداد فازی با پشتیبان های گسسته بکار برد. همانطور که توسط مثال ۵-۶ نشان داده شده است، مجموعه های فازی بدست آمده ممکن است دیگر محدب نباشند و بنابراین دیگر اعدادی فازی نباشند.

مثال ۵-۶

$$\tilde{M} = \{(۱,/۳), (۲,۱), (۳,/۴)\}$$
$$\tilde{N} = \{(۲,/۷), (۳,۱), (۴,/۲)\}$$

$$\tilde{M} \odot \tilde{N} = \{(۲,/۳), (۳,/۳), (۴,/۷), (۶,۱), (۸,/۲), (۲,/۴), (۱۲,/۲)\}$$

۵-۳-۲- عملیات بسط یافته برای نمایش LR مجموعه های فازی

هنگام استفاده از تئوری مجموعه های فازی برای حل مسائل واقعی،کارایی محاسباتی اهمیت خاصی دارد. بنابراین، در ادامه جزئیات نمایش LR مجموعه های فازی را بررسی می کنیم که باعث افزایش کارایی محاسباتی بدون نیاز به محدود کردن کلیت می شود. دوبیس و پراد[۱۹۷۹] نوع خاصی از نمایش را برای اعداد فازی پیشنهاد دادند: آن ها (L, R) را تعریف کردند که $[۰,۱] \to R^+$ را نگاشت می کرد و توابع شکلی کاهشی بودند اگر :

$$L(۰) = ۱, L(x) < ۱ \; for \; \forall x > ۰; L(x) > ۰ \; for \; \forall x < ۱;$$
$$L(۱) = ۰ \; or \; [L(x) > ۰, \forall x \; and \; L(+\infty) = ۰]$$

تعریف ۵-۶ : عدد فازی $\tilde{M}$ از نوع LR است اگر توابع مرجع L (برای چپ) و R (برای راست) و اسکالر های $\alpha > ۰$ و $\beta > ۰$ با m که میانگین مقادیر $\tilde{M}$ و یک عدد حقیقی است وجود داشته باشند. $\aleph$ و β گسترش چپ

و راست هستند. $\tilde{M}$ با $(m,\alpha,\beta)_{LR}$ نشان داده می شود(بخش ۵-۳).

$$\mu_{\bar{M}}(x)\begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right) \ \ for\ x\leq m \\ R\left(\frac{x-m}{\beta}\right) \ \ for\ x\geq m \end{cases}$$

برای $L(z)$ توابع مختلفی را می توان انتخاب کرد. دوبیس و پراد [۱۹۸۸، ص ۵۰] از توابع زیر استفاده کرده اند:

$$L(x)=\max(۰,۱-x)^p, L(x)=\max\left(۰,۱-x^p\right),\quad L(x)=e^{-x}, L(x)=e^{-x^۲}$$

این مثال ها نشان دهنده دامنه گسترده $L(z)$ هستند. البته مسئله یافتن تابع مناسب در یک زمینه خاص است.

مثال ۵-۷

اگر

$$L(x)=\frac{۱}{۱+x^۲}$$
$$R(x)=\frac{۱}{۱+۲|x|}$$
$$\alpha=۲,\beta=۳,m=۵$$

آنگاه

$$\mu_M(x)=\begin{cases} L\left(\frac{۵-x}{۲}\right)=\frac{۱}{۱+\left(\frac{۵-x}{۲}\right)^۲}\ for\ x\leq ۵ \\ R\left(\frac{x-۵}{۳}\right)=\frac{۱}{۱+\left|\frac{۲(x-۵)}{۳}\right|}\ for\ x\geq ۵ \end{cases}$$

اگر m یک عدد حقیق نباشد اما بازه $[\underline{m},\bar{m}]$ وجود داشته باشد آنگاه مجموعه فازی $\tilde{M}$ یک عدد فازی نیست بلکه یک بازه فازی است. بنابراین، یک بازه فازی در نمایش LR را می توان بصورت زیر تعریف کرد:

تعریف ۵-۶ بخش a : بازه فازی $\tilde{M}$ از نوع LR است اگر توابع شکلی L و R و چهار پارامتر $(\underline{m},\bar{m})\in$

$\{-\infty, +\infty\} \cup R^{۲}$ α و β وجود داشته باشد و تابع عضویت $\tilde{M}$ برابر باشد با:

$$\mu_{\tilde{M}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{\underline{m}-x}{\alpha}\right) & for\ x \leq \underline{m} \\ ۱ & for\ \underline{m} \leq x \leq \bar{m} \\ R\left(\frac{x-\bar{m}}{\beta}\right) & for\ x \geq \underline{m} \end{cases}$$

آنگاه بازه فازی بصورت زیر نشان داده می شود:

$$\tilde{M} = (\underline{m}, \bar{m}, \alpha, \beta)_{LR}$$

این تعریف بسیار کلی است و امکان کمی سازی انواع مختلف اطلاعات را فراهم می سازد بعنوان مثال اگر $\tilde{M}$ یک عدد غیرفازی حقیق برای $m \in R$ باشد:

$$\tilde{M} = (m, m, ۰, ۰)_{LR}, \forall L, \forall R$$

اگر $\tilde{M}$ یک بازه غیرفازی باشد:

$$\tilde{M} = (a, b, ۰, ۰)_{LR}, \forall L, \forall R$$

و اگر $\tilde{M}$ یک عدد فازی مثلثی (بخش ۵-۳) باشد، $L(x) = R(x) = \max(۰, ۱ - x)$ بکار می رود. برای اعداد فازی LR ، محاسبات لازم برای عملیات بالا به شدت کاهش می یابد. دوبیس و پراد [۱۹۷۹] نشان دادند که فرمول دقیقی می توان برای $\oplus$ و $\ominus$ ارائه داد. همچنین آن ها عبارت های تقریبی برای $\oplus$ و $\ominus$ پیشنهاد دادند که وقتی گسترش ها در مقایسه با مقادیر میانگین کوچک تر هستند تقریب بهتری دارند.

تئوری ۵-۴ : اگر $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ دو عدد فازی از نوع LR باشند:

$$\tilde{M} = (m, \alpha, \beta)_{LR}, \quad \tilde{N} = (n, \gamma, \delta)_{LR}$$

آنگاه

۱. $(m, \alpha, \beta)_{LR} \oplus (n, \gamma, \delta)_{LR} = (m+n, \alpha+\gamma, \beta+\delta)_{LR}$

۲. $-(m, \alpha, \beta)_{LR} = (-m, \beta, \alpha)_{LR}$

۳. $(m, \alpha, \beta)_{LR} \ominus (n, \gamma, \delta)_{LR} = (m-n, \alpha+\delta, \beta+\gamma)_{LR}$

مثال ۵-۸

$$L(x) = R(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\tilde{M} = (1, .5, .8)_{LR}$$

$$\tilde{N} = (2, .6, .2)_{LR}$$

$$\tilde{M} \oplus \tilde{N} = (3, 1.1, 1)_{LR}$$

$$\tilde{O} = (2, .6, .2)_{LR}$$

$$\ominus \tilde{O} = (-2, .2, .6)_{LR}$$

$$\tilde{M} \ominus \tilde{O} = (-1, .7, 1.4)_{LR}$$

تئوری ۵-۵ : اگر $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ دو عدد فازی مطابق با تعریف ۵-۳ باشند آنگاه:

$$(m, \alpha, \beta)_{LR} \odot (n, \gamma, \delta)_{LR} \approx (mn, m\gamma + n\alpha, m\delta + n\beta)_{LR}$$

برای $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ مثبت :

$$(m, \alpha, \beta)_{LR} \odot (n, \gamma, \delta)_{LR} \approx (mn, n\alpha - m\delta, n\beta - m\gamma)_{LR}$$

برای $\tilde{M}$ مثبت و $\tilde{N}$ منفی :

$$(m, \alpha, \beta)_{LR} \odot (n, \gamma, \delta)_{LR} \approx (mn, -n\beta - m\delta, n\alpha - m\gamma)_{LR}$$

برای $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ منفی.

مثال ۵-۹ : فرض می شود $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ زیر دو عدد فازی از نوع LR با توابع مرجع $L(z)$ باشند:

$$\tilde{M} = (۲, /۲, /۱)_{LR}$$

$$\tilde{N} = (۳, /۱, /۳)_{LR}$$

$$L(z) = R(z) = \begin{cases} ۱ & -۱ \leq z \leq ۱ \\ ۰ & else \end{cases}$$

اگر علاقمند به نمایش LR برای باشیم. شرط های تئوری ۵-۵ را اثبات کرده و اعمال می کنیم. بنابراین :

$$\mu_{\dot{M}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{۲-x}{/۲}\right) & x \leq ۲ \\ R\left(\frac{x-۲}{/۱}\right) & x \geq ۲ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ۱ & -۱ \leq \frac{۲-x}{/۲} \leq ۱ \ and \ -۱ \leq \frac{x-۲}{/۱} \leq ۱ \\ ۰ & else \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ۱ & ۱/۹ \leq x \leq ۲/۱ \\ ۰ & else \end{cases}$$

اگر $\tilde{M}$ مثبت باشد:

$$\mu_{\tilde{N}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{۳-x}{/۱}\right) & x \leq ۳ \\ R\left(\frac{x-۳}{/۳}\right) & x \geq ۳ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ۱ & ۲/۹ \leq x \leq ۳/۱ \\ ۰ & else \end{cases}$$

نشان می دهد که $\tilde{N}$ مثبت است.

با پیروی از تئوری ۵-۵ برای حالتی که در آن $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ مثبت هستند داریم:

$$\tilde{M} \odot \tilde{N} \approx (۲ \cdot ۳, ۲ \cdot /۱ + ۳ \cdot /۲, ۲ \cdot /۳ + ۳ \cdot /۱)_{LR} = (۶, /۸, /۹)_{LR}$$

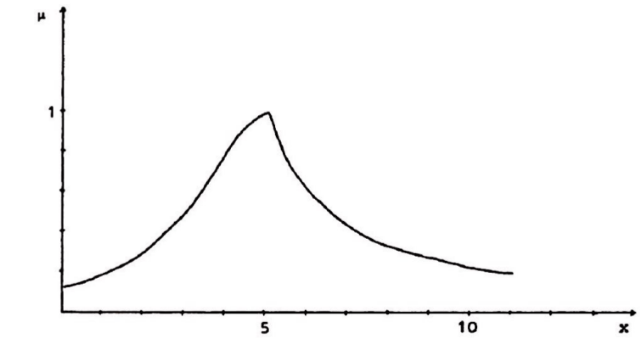


Figure 5–3. *LR*-representation of fuzzy numbers.

شکل۵-۳: نمایش LR اعداد فازی

تمرین ها

۱- با توجه به اطلاعات داده شده تصویر $f\left(\tilde{A}_۱ \times \tilde{A}_۲\right)$ را با اصل توسعه تعیین کنید.

$$X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$\vec{A}_۱ = \{(۱, /۶), (۲, /۸), (۳, ۱), (۴, /۶)\}$$

$$\tilde{A}_۲ = \{(۰, /۵), (۱, /۷), (۲, /۹), (۳, ۱), (۴, /۴)\}$$

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \; be\, defined\, by$$

$$f(x, y) = z, x \in \tilde{A}_۱, y \in \tilde{A}_۲$$

۲- $\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}$ را برای $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ مطابق مثال ۵-۲ محاسبه کنید.

۳- کدام یک از مجموعه های فازی زیر اعداد فازی هستند؟

$$a.\tilde{A} = \{(x, \mu_i(x)) \mid x \in \mathbb{R}]$$

که

$$\mu_{\lambda}(x)=\begin{cases}\left(\left(۱+\frac{۵-x}{۲}\right)^{۲}\right)^{-۱} & x\leq ۵\\ \left(۱+\left|\frac{۲(x-۵)}{۳}\right|\right)^{-۱} & x\geq ۵\end{cases}$$

$$b.\tilde{B}=\left\{(x,\mu_{\dot{B}}(x))\mid x\in\mathbb{R}^{+}\right\}$$

$$\mu_{B}(x)=\begin{cases}x & x\in[۰,۱]\\ ۱ & x\in[۱,۲]\\ ۳-x & x\in[۲,۳]\end{cases}$$

۴- کدام یک از توابع زیر توابع مرجع برای $x\in R$ هستند؟

الف)

$$f_{۱}(x)=|x+۱|$$

ب)

$$f_{۲}(x)=\frac{۱}{۱+x^{۲}}$$

ج)

$$f_{۳}(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}x+۱ & x\in[-۲,۰]\\ -۲x+۱ & x\in\left[۰,\frac{۱}{۲}\right]\\ ۰ & else\end{cases}$$

د)

$$f_4(x) = \frac{1}{1 + a|x|^p} p \geq 1$$

۵- اگر $\tilde{M} L(x)$ و $R(x)$ مطابق با مثال **۵-۸** تعریف شوند و $\tilde{N} = (-4,/1,/6)_{LR}$ باشد ، $\tilde{M} \ominus \tilde{N}$ را محاسبه کنید.

۶- اگر $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ مطابق با مثال **۵-۸** تعریف شده باشند، $\tilde{M} \odot \tilde{N}$ را محاسبه کنید.

۷- فرمولی تقریبی با در نظر گرفتن $\widetilde{M} = (m, \alpha, \beta)_{LR}, \tilde{N} = (n, \gamma, \sigma)_{LR}$ برای محاسبه $\tilde{M} \odot \tilde{N}$ ارائه دهید(توجه شود که چگونه فرمول برای تقسیم بسط یافته مشتق گرفته شده است).