J1

فضای برداری

از آغاز قرن ۱۸ میلادی تفکر انتزاعی در ریاضیات قوت و شمول بیشتری به خود گرفت تفکر انتزاعی یا تجریدی که در ریاضیات شکل گرفت عموماً به قالب بندی ساختارهای همگن ریاضی می‌پردازد که اوج تفکر تجریدی در زمینه ساختارهای همگن (جبر) به اواریست گالوا فرانسوی که زودرس ناپدید شد برمی‌گردد گالوای **۲۱** ساله از نوابغ بی نظیر ریاضیات است. ساختارهای همگن ساختارهایی هستند که علی رغم تفاوت های بسیار آشکار رفتار یکسان نشان می‌دهند مثلاً همه ماتریس ها عضو قرینه دارند همانگونه که همه توابع پیوسته و همانگونه که اعداد صحیح همانگونه که ماتریس های مربعی شکل معکوس پذیر وارون دارند اگر بدون توجه به مصادیق قوانین حاکم بر رفتارهایشان را بیان کنیم از تفکر انتزاعی استفاده کرده‌ایم که اوج این روش در ساختمان های جبری است

یکی از ساختمان ها فضای برداری **است** که خود تقاطع دو ساختمان دیگر **با** نام گروه و میدان است که در این بخش به آنها می‌پردازیم

J2

مفهوم ساختمان گروه

یک مجموعه G را با یک عمل $*$ گروه گویند هرگاه:

1) $\forall a, \forall b \quad a, b \in G \quad a * b \in G$

$\forall a$ یعنی به ازای همه عناصر a

خاصیت شماره یک خاصیت بسته بودن نام دارد

2) $\exists!\ e \in G : \forall a \in G : e * a = a * e$

$\exists!\, e$ یعنی دقیقاً یک عضو مثل e موجوداست

خاصیت شماره دو خاصیت عضو خنثی

3) $\forall a \in G\ \exists!\ b \in G : a * b = b * a = e$

خاصیت شماره ۳ خاصیت عضو وارون است

4) $\forall a , \forall b , \forall c \quad a,b,c \in G$ J3

$$a*(b*c) = (a*b)*c$$

به خاصیت شماره ۴ خاصیت انجمنی یا شرکت پذیری گویند

یعنی اولویت مهم نیست

$\forall a , \forall b \quad a,b \in G$

و اگر
داشته باشیم $a*b = b*a$ می گویند گروه جابجایی یا آبلی است

برای روشن شدن مفهوم گروه چند مثال ذکر می شود

مثال اول: فرض کنیم که $\mathbb{Z} = G$ و عمل $*$ همان جمع دو عدد صحیح باشد

حال بررسی می کنیم که آیا $(\mathbb{Z}, +)$ گروه است یا خیر؟

خاصیت ① بدیهی است که جمع دو عدد صحیح یک عدد صحیح است پس بسته است

خاصیت ② بدیهی است که عضو خنثی e برابر با 0 است

$\forall a \in \mathbb{Z} \quad a+0 = 0+a$

سوم شرط وارون پذیری : بدیهی است که قرینه هر عدد وارون آن خواهد بود

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

شرکت پذیری بدیهی است

پس ساختمان $(Z, +)$ یک گروه است.

J4

سوال: آیا ساختمان $(IN, +)$ گروه است؟

اعداد طبیعی

جمع معمولی

مثال: $(IR^3, +)$ [که منظور از + جمع برداری است] یک گروه است چرا!

اول بسته بودن: بدیهی است زیرا

$$\forall X, Y \in IR^3 \quad X+Y = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) \in IR^3$$

دوم عضو خنثی برای همه بردارهای متعلق به IR^3 بردار صفر یعنی $(0,0,0)$

عضو خنثی است زیرا

$$\forall X \in IR^3 \quad X + (0,0,0) = (x_1+0, x_2+0, x_3+0) = X$$

سوم: عضو وارون قرینه هر بردار نیز عضو وارون خواهد بود

$$X + (-X) = (x_1 + (-x_1), x_2 + (-x_2), x_3 + (-x_3)) = (0,0,0)$$

$$(-X) + X = (0,0,0)$$

شرکت پذیری بدیهی است

J5

نتیجه $(\mathbb{R}^n,+)$ یک گروه است.

مثال: چند جمله‌ای های حداکثر درجه 2 آیا گروه است؟

[توضیح: منظور از چند جمله‌ای های ~~...~~ حداکثر درجه 2 عبارت های زیر است

$4x^2+9$ و 5 و x^2 و $3x$ و x^2+3x و $3x+6$, ...

که شکل کلی آن ← ax^2+bx+c که a و b و c هر کدام می‌تواند صفر هم باشد]

بررسی گروه بودن

بسته بودن

$$P_1 = a_1 x^2 + b_1 x + c_1 \qquad P_2 = a_2 x^2 + b_2 x + c_2$$

$$P_1 + P_2 = \overbrace{(a_1+a_2)}^{a_3}x^2 + \overbrace{(b_1+b_2)}^{b_3}x + \overbrace{c_2+c_1}^{c_3} = a_3x^2+b_3x+c_3$$

که P_1+P_2 نیز حداکثر درجه 2 خواهد بود

عضو خنثی

$P=0$ یعنی $0x^2+0x+0=0$

به کار است

عضو وارون اگر $P=ax^2+bx+c$ آنگاه

$-P = -ax^2-bx-c$

عضو وارون است

J6

مثال: توابع پیوسته با دامنه $[0,1]$ و عمل جمع دو تابع یک گروه است

بسته بودن: از حساب می دانیم جمع دو تابع پیوسته، پیوسته است

عضو خنثی تابع $f(x)=0$ عضو خنثی است

عضو وارون چون f پیوسته است پس $-f$ نیز پیوسته است

$$f(x)+(-f(x))=0$$

شرکت پذیری بدیهی است

مثال: ماتریس $m\times n$ با عمل جمع [که منظور جمع عنصر به عنصر است] یک گروه است

بسته بودن بدیهی

$$A_{m\times n}+B_{m\times n}=C_{m\times n}$$

عضو خنثی

$$e=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$$

$$e+A=A+e=A$$

عضو وارون شرکت پذیری بدیهی است

$$\forall A_{m\times n} \quad -A+A=e$$

$(-A)$ ماتریس که عناصرش قرینه عناصر ماتریس A

مجموعه گروه ماتریس های $m\times n$ را با $M_{m\times n}$ نمایش می دهیم

مثال ماتریس های مربعی $n \times n$ و معکوس پذیر با عمل ضرب ماتریس یک گروه است:

بسته بودن ضرب دو ماتریس $n \times n$ فقط $n \times n$ است

عضو خنثی $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ماتریس قطر اصلی آن یک و ما بقی صفر است

$$IA = AI = A$$

عضو وارون طبق فرض مسئله نقض نشده است.

ماتریس های زوجی مربعی:

این ماتریس ها به شکل زیر هستند

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 2 & 1 & 1/5 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 1/8 \\ 7 & 1 & 1/9 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 4 & 1 & 1/7 & 1/8 \\ 5 & 7 & 1 & 1/2 \\ 6 & 8 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

زوجی مربعی این ماتریس ها نقش کلیدی در فرایند تصمیم گیری مدیریتی ایفا می کنند

J8

مثال : ماتریس های زوجی مربعی با عمل ضرب عنصر به عنصر $\dot{\times}$ تشکیل گروه می دهند:

گفتیم که ماتریس زوجی مربعی به شکل زیر است

$$A = [a_{ij}] \quad : \quad \begin{array}{ll} a_{ij} = 1 & i = j \\ a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}} & i \neq j \end{array}$$

بسته بودن ضرب دو ماتریس زوجی زوجی است زیرا

$$C = A \dot{\times} B \qquad c_{ii} = a_{ii} \, b_{ii} = 1 \times 1$$

$$i \neq j \quad c_{ij} = a_{ij} \, b_{ij} = \frac{1}{a_{ji}} \, \frac{1}{b_{ji}} = \frac{1}{a_{ji} b_{ji}}$$

$$= \frac{1}{c_{ji}}$$

وارون $e = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ همه عناصر آن یک شد

$$eA = A$$

خنثی برای هر A ماتریس ترانهاده آن وارون خواهد بود

شرکت نیازی به

J9

مفهوم میدان (هیأت)

میدان یک ساختمان است با دو عمل $\dot{+}$, $\times$ که هم با عمل + همان گروه می شود . و با عمل ضرب هم گروه می شود با این تفاوت که در حالت ضرب عضو خنثی جمع را کنار می گذاریم
و خاصیت پخشی برای ارتباط با دو عمل

$$x \times (y+z) = x\times y + x\times z$$

عمل ضرب ، عمل جمع

چند مثال : دیدیم که $(+ , Z)$ یک گروه است آیا $(Z-\{0\} , \times)$ هم گروه است : خیر چون مثلا وارون ضربی 2 می شود $\frac{1}{2}$ که در Z نیست

پس $(Z , + , \times)$ میدان نیست

مثال $(Q , + , \times)$ اعداد گویا میدان است :
زیرا نسبت به عمل + بسته است جمع هر دو عدد گویا یک گویاست
عضو خنثی آن صفر است عضو وارون جمع آن قرینه است
و $Q-\{0\}$ نسبت به عمل ضرب هم گروه است ضرب دو کسری ، کسری است
خنثی آن عدد 1 است و وارون ضربی $\frac{a}{b}$ کسر $\frac{b}{a}$ است

ج۱۰

$$\frac{a_1}{b_1}\times\left(\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}\right)$$

$$= \frac{a_1}{b_1}\left(\frac{a_2 b_3 + b_2 a_3}{b_2 b_3}\right) = \frac{a_1 a_2 b_3}{b_1 b_2 b_3} + \frac{a_1 b_2 a_3}{b_1 b_2 b_3}$$

$$= \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} + \frac{a_1 a_3}{b_1 b_3} = \frac{a_1}{b_1}\,\frac{a_2}{b_2} + \frac{a_1 \times a_3}{b_1 b_3}$$

خاصیت پخشی بررسی شد پس Q یک میدان است

اعداد حقیقی نیز یک میدان است (تمرین)

مثال مجموعه زیر کدام با دو عمل ضرب و جمع زیر یک میدان است

$$G = \{x+\sqrt{2}\,y : x,y \in Q\}$$

نیز یک میدان هست : اعمال جمع و ضرب به شرح زیر

$$(x_1+\sqrt{2}\,y_1) + (x_2+\sqrt{2}\,y_2) = x_1+x_2+\sqrt{2}\,(y_1+y_2)$$

$$(x_1+\sqrt{2}\,y_1)\times(x_2+\sqrt{2}\,y_2) = x_1x_2+2y_1y_2+\sqrt{2}\,(x_1y_2+x_2y_1)$$

عمل + بدیهی است ؛ زیرا طبق تعریف جمع بسته است ✓

e خنثی آن $0+0\sqrt{2}$ وارون آن $-x-\sqrt{2}\,y$

J11

حال عمل ضرب طبق تعریف بسته است

$1+0\sqrt{2}$ آن

عضو خنثی

وارون

$$a+\sqrt{2}b \in F \Rightarrow \frac{a-\sqrt{2}b}{a^2-2b^2}$$

زیرا $\left(a+\sqrt{2}\,b\right)\left(\frac{a-\sqrt{2}b}{a^2-2b^2}\right)=1$

a^2-2b^2 هیچگاه صفر نخواهد شد زیرا در این صورت

$$a=\sqrt{2}\,b \quad \text{یا} \quad a=-\sqrt{2}\,b$$

چون b گویا است $\sqrt{2}\,b$ گویا نخواهد بود در صورتی که a گویا است

و این تناقض است از آنجا داریم که $\frac{a-\sqrt{2}b}{a^2-2b^2}$ معکوس a است

خاصیت پخشی

$$\overbrace{(a_1+\sqrt{2}\,b_1)}^{x}\,(\overbrace{a_2+\sqrt{2}\,b_2}^{y}+\overbrace{a_3+\sqrt{2}\,b_3}^{z})=xy+xz$$

$$=a_1(a_2+a_3)+2b_1(b_2+b_3)+\sqrt{2}\,\left(a_1(b_2+b_3)+(a_2+a_3)b_1\right)$$

$$=\left[a_1a_2+2b_1b_2+\sqrt{2}\,(a_1b_2+a_2b_1)\right]+\left[a_1a_3+2b_1b_3+\right.$$

$$\left.+\sqrt{2}\,(a_1b_2+a_2b_1)\right]=(a_1+\sqrt{2}b_1)(a_2+\sqrt{2}b_2)+(a_1+\sqrt{2}b_1)(a_3+\sqrt{2}b_3)$$

حال که با مفهوم گروه و میدان آشنا شدیم به بررسی فضای برداری می‌پردازیم

J12

فضای برداری از سه عنصر تشکیل شده

الف: ساختمانی به نام گروه G

ب: ساختمان به نام میدان F

پ: یک عمل بین ساختمان میدان و ساختمان گروه $*$ $*$

این عمل باید شرایط زیر را داشته باشد:

عضو خنثی ضربی میدان F

1) $\forall \alpha \in G \quad 1 * \alpha = \alpha$

یک عدد از میدان F

2) $c * \alpha \in G$

3) $(c_1 \; c_2)\alpha = c_1 * (c_2 * \alpha)$

4) $C * (\alpha_1 + \alpha_2) = C * \alpha_1 + C_2 * \alpha$

در واقع عمل $*$ که از میدان F و گروه G به دست می‌آید باعث می‌شود که عناصر G ضرب‌پذیر بشوند به عناصر G به دلیل اینکه فضاهای متناهی البعد (بعداً توضیح خواهیم داد) از جنس $\mathbb{R}^n$ هستند می‌گویند بردار.

?

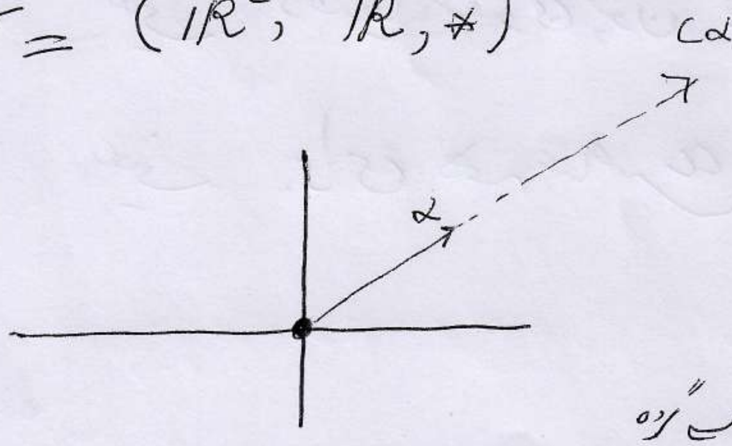
و به عمل $*$ می‌گویند ضرب فضای برداری: معمولاً میدان‌های مجموعه اعداد حقیقی با عمل جمع و ضرب می‌باشد یا اعداد مختلط C می‌باشد

$G = \mathbb{R}^2$

از لحاظ هندسی

J 13

$V = (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, *)$



تبدیل به گره

مثال آیا $\underbrace{\mathbb{Q}^2}_{\text{گروه}}$ با $\underbrace{\mathbb{R}}_{\text{میدان}}$ و عمل * به سطح زیر فضای برداری است؟

$$c * (x_1 \cdots x_n) = (cx_1 \cdots cx_n)$$

جواب خیر: زیرا اگر $c=\sqrt{2}$ و $\alpha=(1,1)$ آنگاه

$$c\alpha = (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \notin \mathbb{Q}^2$$

مثال: $\mathbb{R}^n$ با لحاظ میدان F یک فضای برداری است با عمل
$c*(x_1 \cdots x_n) = (cx_1 \cdots cx_n)$

J14

دیدیم که F میدان است
$\mathbb{R}^n$ هم یک گروه است
حال می ماند بررسی عمل $*$

$$1*\alpha = 1*(x_1 \cdots x_n) = (x_1, \cdots x_n) = \alpha \quad 1 \checkmark$$

$$c*(x_1 \cdots x_n) = (cx_1 \cdots cx_n) \in \mathbb{R}^n \checkmark$$

$$(c_2 c_1)*(x_1 \cdots x_n) = ((c_2 c_1 x_1 \cdots (c_2 c_n x_n) = (c_2 (c_1 x_1), \cdots, c_2 (c_n x_n))$$

$$= c_2 * (c_1 x_1 \cdots c_n x_n) = c_2 * (c_1 * \alpha) \checkmark$$

$$c*(\alpha+\beta) = c*((x_1+y_1, \cdots x_n+y_n)$$

$$= (c(x_1+y_1), \cdots c(x_n+y_n))$$

$$= (cx_1+cy_1, \cdots, cx_n+cy_n)$$

$$= (cx_1, \cdots cx_n) + (cy_1, \cdots, cy_n)$$

$$= c*(x_1 \cdots x_n) + c*(y_1 \cdots y_n)$$

$$= c\alpha + c\beta$$

J 15 : $M_{n\times n}$ مثال: فضای ماتریس ها

اگر $G = M_{m\times n}$ و $F=\mathbb{R}$ و عمل $*$ به شکل زیر

$$A \in G \qquad c*A = c*\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{m1} & \cdots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

دیدیم که G یک گروه است و $F=\mathbb{R}$ یک میدان است حال به بررسی

عمل می پردازیم

$1*A = A$ بدیهی

$c*A \in G$ بدیهی

$(c_1 c_2)*A = c_1*(c_2*A) \longrightarrow$ شبیه $\mathbb{R}^n$

$c*(A_1+A_2) = c*A_1 + c*A_2$

پس این فضا نیز یک فضای برداری است

J16

تمرین: نشان دهید فضای چندجمله‌ای های حداکثر درجه 2 با میدان اسکالری $\mathbb{R}$ و عمل ضرب به شکل زیر یک فضای برداری است

$$d \in \mathbb{R} \quad ، \quad ax^2+bx+c=\vec{\alpha} \qquad d * \vec{\alpha} = dax^2+dbx+dc$$

در حالت فضای برداری * معمولا نوشته نمی‌شود و خواننده از سیاق مطلب موضوع را درک می‌کند

گروه ها و میدان های متناهی نظیر Z_p که p اول است

مثلا Z_7 به شرح $Z_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

نقش کلیدی در رمزنگاری و رمزگشایی بازی می‌کنند بحث گروه های متناهی و میدان های متناهی یک گرایش در رشته ریاضی است و مطالب ارزشمند نظری و کاربردی در آن حوزه موجود است.

فضاهای متناهی البعد نظیر $\mathbb{R}^n$ ، چندجمله‌ای های حداکثر درجه n ماتریس های $k \times p$ و ... همه با $\mathbb{R}^n$ یکریخت هستند

۱۱۷

مثلاً $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cong \mathbb{R}^4 = (a, b, c, d)$

همریختی بین دو فضای برداری تابعی است چون f

۱- یک به یک ۲- پوشا (هم دامنه با بُرد برابر است)

۳- اگر $V_1 = (\overset{+}{G_1}, F_1)$ و $V_2 = (\overset{*}{G_2}, F_2)$

$f : V_1 \to V_2 \quad f(\alpha_1) = \alpha_2 \quad f(\beta_1) = \beta_2$

$\forall c \in F \quad f(c\alpha_1 + \beta_1) = cf(\alpha_1) * f(\beta_1)$

$= c\alpha_2 * \beta_2$

$*$ عمل گروه G_2 است
$+$ عمل گروه G_1 است

شرط 3 می‌گوید ساختار دو فضای برداری عیناً یکی است

و تنها آرایش عناصر فرق می‌کند مثلاً 4 عدد را در ماتریس

2x2 به شکل مربعی می‌نویسیم و در R^4 به شکل بردار سطری

مبحث هم ریختی در حد تعریف گفته شد مطلب در این باب بسیار است