سرانجام، اطلاعات را می توان به گونه ای ابتکاری پردازش نمود، مثلا براساس روش های کاملا معینی که مستلزم انواع دیگر زبان ها نیز باشند. یک سیستم یا رفتار یک سیستم برای مدل سازی، مثلا توصیف، تجویز یا پیش بینی به طور نرمال هدف مشخصی را دنبال می کند. این سیستم می تواند درخدمت یک مشاهده کننده انسانی باشد، می تواند ورودی یک سیستم الکترونیکی یا مکانیکی دیگر باشد، می تواند برای دیگر الگوریتم های ریاضی استفاده شود و موارد دیگر. در شکل ۸,۱ یک مشاهده کننده انسانی به عنوان دریافت کننده اطلاعات درنظر گرفته شد. در این مورد اطلاعات نه تنها باید توسط دریافت کننده «قابل خواندن» باشد، بلکه بایستی بر اساس هدف موردنظر الزامات دیگری را نیز رفع نماید. اگر مشاهده کننده بخواهد الگوهای مشخصی را بشناسد، یک سطح مقیاس اسمی برای اطلاعات دریافت شده ممکن است کافی باشد. اگر او بخواهد پدیده ها را ارزیابی یا مرتب کند، اطلاعات حداقل باید در سطح مقیاس ترتیبی باشد و موارد دیگر. بنابراین، اطلاعات درباره یک سیستم نامشخص باید به زبان مناسبی ارائه شود، یعنی یا به صورت عددی، به شکل بازه، زبانی یا نمادین و یا در یک مقیاس مناسب.

۸,۱,۴. تئوری های عدم قطعیت به عنوان تغییردهنده اطلاعات

بخش های ۸,۱,۱ تا ۸,۱,۳ این فصل بر مشخصه های اطلاعاتی پدیده نامعلومی متمرکز بود. حساب، تئوری و یا متد عدم قطعیت استفاده شده برای توصیف این پدیده باید به طور واضحی با مشخصه های این پدیده سازگار باشد، به عنوان مثال عدم نیاز به اطلاعات در سطحی بالاتر از آن چه ارائه شده است، عدم ارائه فرضیه های بدیهی درباره علت عدم قطعیت و موارد دیگری که در شرایط واقعی برآورده نمی شوند.

این قطعیت با دیدگاه هایی مغایرت دارد که برای مثال هرگونه عدم قطعیت می تواند با احتمالات یا مجموعه های فازی یا امکان ها و یا هر متد دیگری مدل سازی شود. ما بر این باور هستیم که هیچ متد واحدی نمی تواند همه انواع عدم قطعیت را به یک شکل مدل سازی کند.

اکثر تئوری ها و متدهای اثبات شده برای مدل سازی عدم قطعیت یا بر «انواع عدم قطعیت» متمرکز اند که توسط علل عدم قطعیت تعریف می شوند و یا حداقل متضمن دلایل خاصی هستند که خود براساس نوع پردازش اطلاعاتی که استفاده می کنند، مستلزم انواع و یا ویژگی های خاصی از اطلاعات اند. می توان این متدهای عدم قطعیت و الگوهای آنان را مانند عینک هایی درنظر گرفت که از طریق آن ها شرایط نامعلوم سنجیده می شوند یا به عبارت دیگر: هیچ «عدم قطعیت احتمالی» متمایز از «عدم قطعیت ممکن» وجود ندارد. شخصی می تواند با مشخصه هایی که قبلا مشخص شدند به یک وضعیت نامعلوم بنگرد و دیگری می تواند این وضعیت نامعلوم را بااستفاده از تئوری امکان مدل سازی کند. بنابراین، تئوری مناسب برای مدل سازی یک وضعیت خاص عدم قطعیت باید از طریق ویژگی های این وضعیت که پیش تر مشخص شده اند و نیز باتوجه به الزامات مشاهده کننده تعیین شود. درحال حاضر، تئوری های عدم قطعیت زیادی مانند تئوری های احتمال، تئوری شواهد (شافر، ۱۹۷۶)، تئوری امکان (دوبوئس و پراد، ۱۹۸۸)، تئوری مجموعه فازی، تئوری مجموعه خاکستری، تئوری مجموعه شهودگرایانه

(آتاناسوف، ۱۹۸۶)، تئوری مجموعه راف (پاولاک، ۱۹۸۵)، حساب بازه، مدل سازی محدب (بن هایم و الیشاکوف، ۱۹۹۰)، و غیره. برخی از این تئوری ها در تئوری های دیگر مشمول هستند که در این جا بررسی نخواهند شد.

با این حال ما می خواهیم به این حقیقت اشاره کنیم که گاهی اوقات نادیده گرفته می شود: تئوری های عدم قطعیت اغلب باتوجه به پردازش اطلاعات و الزامات آن ها درمورد کیفیت اطلاعات اغلب همانند نیستند. به عنوان مثال تئوری مجموعه فازی می گوید که اطلاعات زبانی را پردازش می کند. ارائه رسمی این اطلاعات می تواند کاملا متفاوت باشد. اگر از یگانه ها استفاده شود، پردازش نماد مطرح می شود. اگر از متغیرهای زبانی استفاده شود، توابع عضویت این اصطلاحات پردازش می شوند. این ها ممکن است در مقیاس های گوناگون باشند و بر این اساس تعیین کنند که کدام اپراتورها، مانند عملیات ریاضی، می توانند استفاده شوند و کدام یک نمی توانند.

این که یک تئوری عدم قطعیت از پردازش یا استنتاج اطلاعات ریاضی، ابتکاری و یا مبتنی بر دانش استفاده کند نیز بر نوع اطلاعات ورودی موردنیاز و کیفیت اطلاعات ارائه شده به مشاهده کننده اثرگذار می باشد.

۸٫۱٫۵. تطبیق تئوری عدم قطعیت و پدیده های نامشخص

بادرنظر گرفتن عدم قطعیت به عنوان یک ویژگی اطلاعاتی از یک موقعیت یا پدیده، می توان آن را به وسیله یک بردار ۴ مولفه ای توصیف کرد. ۴ مولفه در این بردار چهار بعدی را توصیف می کنند که در جدول ۱-۸ ترسیم شده است.

اساسا هر تئوری عدم قطعیتی را می توان به وسیله یک بردار یا پروفایل مشخص نمود. پروفایل یک تئوری در حالت بهینه باید با پروفایل موقعیتی که در آن اعمال می شود هماهنگ باشد.

تعیین پروفایل برای متداول ترین تئوری احتمال (کولموگروف) نسبتا آسان است:

$$\{a; a; c; a\}$$

علاوه بر این، بعضی از ویژگی های دیگر، مثل این که وقایع باید دوبخشی باشند و موارد دیگر، باید مفروض باشند. تعیین یک پروفایل مناسب برای دیگر تئوری های احتمال از پیش سخت تر است. بردار نمایه تئوری مجموعه فازی قطعا به اپراتورهای استفاده شده، نوع تابع عضویت مفروض، سطح مقیاس تابع عضویت و موارد دیگر بستگی دارد. یا به عبارت دیگر، پس از مشخص شدن وضعیت نامشخص «پروفایل عدم قطعیت»، آن نسخه از تئوری مجموعه فازی که با پروفایل این موقعیت هماهنگ است باید یافت شود. در ادامه ما تا حد مشخصی سه تئوری رسمی را که یا برای مدل سازی عدم قطعیت (مانند احتمال) توسعه داده شده اند و یا در میان اهداف دیگر برای مدل سازی عدم قطعیت پیشنهاد شده اند، مقایسه خواهیم کرد: تئوری احتمال، تئوری امکان و تئوری مجموعه فازی. ما همچنین بعضی از مفاهیم ≫ترکیبی≪ را درنظر خواهیم گرفت، مثلا اصطلاحاتی که در آن ها دو تئوری رسمی ترکیب شده اند. از آن جا که ل. زاده مفهوم مجموعه فازی را در ۱۹۶۵ پیشنهاد کرد، رابطه میان تئوری احتمال

Table 1: Rough taxonomy of uncertainty properties. Rough taxonomy of uncertainty models (not exhaustive, not disjunct).

1.Causes of (subj.) uncertainty	3.Scale Level of Numerical Information
(a)Lack of information	(a)Nominal
(b)Abundance of information	(b) Ordinal
(c) Conflicting evidence	(c) Cardinal
(d) Ambiguity (complexity)	
(e) Measurement	
(f) Belief	
2. Available Information (Input)	4. Required Information (Output)
(a) Numerical	(a) Numerical
(b) Set- or interval-valued	(b) Set- or interval-valued
(c) Linguistic	(c) Linguistic
(d) Symbolic	(d) Symbolic

و تئوری مجموعه فازی بیشتر مطرح شد. به نظر می رسد هر دو تئوری از این جهت شبیه باشند که هر دو با نوعی از عدم قطعیت سر وکار دارند و هر دو از بازه [۰, ۱] به عنوان دامنه توابع خود برای مقیاس هایشان استفاده می کنند (حداقل تا زمانی که تنها مجموعه های فازی نرمال شده را درنظر بگیریم!). دیگر مقیاس های عدم قطعیت که پیش تر نیز در فصل ۴ ذکر شد، بر عدم قطعیت تمرکز می کند و بنابراین می تواند در چنین بحثی گنجانده شود. مقایسه میان تئوری احتمال و تئوری مجموعه فازی اساسا به دو دلیل دشوار است:

۱- این مقایسه را می توان در سطوح بسیار متفاوتی انجام داد، یعنی از نظر ریاضی، از نظر معنایی، زبانی و موارد دیگر

۲- تئوری مجموعه فازی دیگر ساختاری نیست که منحصرا از نظر ریاضی تعریف شده باشد، مانند جبر بولی یا منطق دوگانه. بلکه این تئوری یک خانواده جامع از تئوری هاست (مثلا تمام عملکردهای ممکنی که در فصل ۳ تعریف شد یا انواع گوناگون توابع عضویت را درنظر بگیرید). تئوری مجموعه فازی از این جهت می تواند با تئوری های مختلف موجود درمورد منطق چندارزشی مقایسه شود.

علاوه براین، هنوز تعریف یگانه و مستقل از شرایطی از معنای واقعی فازی بودن وجود ندارد و احتمالا این تعریف هرگز وجود نخواهد داشت. از طرف دیگر، تئوری احتمال نیز تعریف واحدی ندارد. تعاریف و نمودهای زبانی متفاوتی برای ≪ احتمال ≫ وجود دارد.

در سال های اخیر چندین تفسیر خاص از تئوری مجموعه فازی پیشنهاد شد. یکی از آن ها به نام تئوری امکان با نسخه حداقل تئوری مجموعه فازی مطابقت داشت، یعنی با یک تئوری از مجموعه فازی

که در آن تقاطع به وسیله یک اپراتور کوچک و اتحاد توسط یک اپراتور بزرگ مدل سازی می شود. با این حال، این تفسیر تئوری امکان دیگر صحیح نیست. در عوض به یک تئوری جامع و مستدل تبدیل شده است. بیشتر پیشرفت ها در تئوری امکان، پس از مقالات ابتدایی توسط ل. زاده (۱۹۷۸، ۱۹۸۱)، به واسطه دوبوئس و پراد بوده است. به عنوان مثال به کتاب بسیار خوب آن ها در این زمینه مراجعه کنید (دوبوئس و پراد، ۱۹۸۸).

ما ابتدا باید موارد ضروری تئوری امکان را توصیف کنیم و سپس آن را با دیگر تئوری های عدم قطعیت مقایسه کنیم.

۸٫۲. تئوری امکان

۸٫۲٫۱. مجموعه های فازی و توزیع امکان

تئوری امکان ابتدا بر عدم دقت، که در ذات زبان های طبیعی، تمرکز می کند و مفروض است که به جای ≪احتمالی≫ ≪ممکن≫ باشند. بنابراین، اصطلاح متغیر اغلب در معنای زبانی خود به کار می رود تا یک معنای کاملا ریاضی. این یکی از دلایلی است که اصطلاحات و نشان پردازی تئوری امکان از جوانب متعددی با تئوری مجموعه فازی متفاوت است. بنابراین، ما به منظور آسان سازی بررسی تئوری امکان از اصطلاحات احتمالی رایج استفاده می کنیم، اما همواره مطابقت خود را با تئوری مجموعه فازی نشان خواهد داد.

به عنوان مثال فرض کنید که ما می خواهیم قضیه ≪ X ,$F^{\sim}$ است≫ را در نظر بگیریم، در صورتی که X نام یک شی، متغیر یا یک قضیه باشد. به عنوان مثال، در ≪ X یک عدد صحیح کوچک است≫، X نام یک متغیر است. در ≪جان جوان است≫، جان نام یک شی است. $F^{\sim}$ (مثلا عدد صحیح کوچک یا جوان) یک مجموعه فازی است که به وسیله تابع عضویتش مشخص می شود.

یکی از مفاهیم اصلی تئوری امکان، توزیع امکان است (دربرابر توزیع احتمال). به منظور تعریف یک توزیع امکان ابتدا باید مفهوم یک محدودیت فازی را معرفی کرد. خواننده برای تجسم یک محدودیت فازی باید یک چمدان الاستیک را تصور کند که بر حجم ممکن محتوای خود به عنوان یک محدودیت عمل می کند. حجم برای یک چمدان محکم یک عدد واضح است. حجم محتوای یک کیف نازک به درجه خاصی از استحکام آن بستگی دارد که برای کشش استفاده می شود. متغیر در این مورد حجم کیف نازک است، مقادیری که این متغیر می تواند اتخاذ کند ممکن است $u \in U$ باشد و درجه ای که متغیر X می تواند مقادیر متفاوت u را فرض کند با $\mu f \sim (u)$ نشان داده می شود. زاده (زاده و همکارانش، ۱۹۷۵، ص ۲، زاده ۱۹۷۸، ص ۵) این رابطه ها را به شکل زیر تعریف می کنند:

تعریف ۸٫۲

فرض کنید $F^{\sim}$ یک مجموعه فازی از دنیای U باشد که به وسیله یک تابع عضویت $\mu f \sim (u)$ مشخص می شود. اگر $F^{\sim}$ به عنوان یک محدودیت قابل ارتجاعی در مقادیری که احتمالا به X اختصاص داده می شوند، عمل کند، $F^{\sim}$ یک محدودیت فازی بر متغیر X است، به این معنا که اختصاص مقادیر u به X به شکل زیر باشد .

$$X = \mu u : \mu_{\hat{F}}(u)$$

) درجه ایست که حد محدودیت $F^{\sim}$ را نشان می دهد، زمانی که u به X اختصاص داده شود. به همین ترتیب این قضیه متضمن این امر است که $\mu f \sim (u)$ ۱- حد محدودیت اختصاص مقادیر u به متغیر X را نشان می دهد.

این که یک مجموعه فازی را بتوان به عنوان یک محدودیت فازی در نظر گرفت یا خیر ، به طور بدیهی به تفسیر آن بستگی دارد: این قضیه تنها در حالی صحیح است که به عنوان یک محدودیت در مقادیر یک متغیر عمل کند که ممکن است شکل یک اصطلاح زبانی یا یک متغیر کلاسیک را به خود بگیرد.

فرض کنید $R \sim (x)$ محدودیتی فازی است که با x مرتبط است، همان طور که در تعریف ۸٫۱ مشخص شد. پس $R \sim (X) = F \sim$ یک معادله واگذاری رابطه ای نامیده می شود که مجموعه فازی $F^{\sim}$ را به محدودیت فازی $R \sim (X)$ واگذار می کند.

اکنون فرض می کنیم که $A(X)$ یک ویژگی ضمنی از متغیر X باشد، برای مثال، $A(X) =$ سن جک، و $F^{\sim}$ مجموعه فازی ≪جوان≫ است. قضیه ≪جک جوان است≫ (یا بهتر است بگوییم سن جک جوان است) را می توان به این شکل بیان کرد.

$$\widetilde{R}(A(X)) = \widetilde{F}$$

مثال ۸٫۱ (زاده ۱۹۷۸، ص. ۵)

فرض کنیم p قضیه ≪جان جوان است≫ باشد، که در آن ≪جوان≫ یک مجموعه فازی از جامعه کل $U = [۰, ۱۰۰]$ باشد که با تابع عضویت مشخص می شود

$$\mu_{young}(u) = S(u; ۲۰, ۳۰, ۴۰)$$

که u سن عددی است و تابع S به این شکل تعریف می شود

$$S(u;\alpha,\beta,\Upsilon)=\begin{cases}۱ & \text{for}\, u<\alpha\\ ۱-۲\left(\frac{u-\alpha}{\Upsilon-\alpha}\right)^{۲} & \text{for}\, \alpha\le u\le\beta\\ ۲\left(\frac{u-\Upsilon}{\Upsilon-\alpha}\right)^{۲} & \text{for}\, \beta<u\le\Upsilon\\ ۰ & \text{for}\, u>\Upsilon\end{cases}$$

در این مورد ویژگی ضمنی $A(X)$ سن (جان) است و ترجمه ≪جان جوان است≫ شکل زیر را دارد

جان جوان است $-- > R^{\sim}$ (سن (جان)) = جوان

زاده (۱۹۷۸) مفهوم یک محدودیت فازی را به مفهوم محدودیت امکان به شرح زیر ارتباط داد:

یک سن عددی، برای مثال ۲۸، را درنظر بگیرید که درجه عضویت آن در مجموعه فازی ≪جوان≫ تقریبا ۰,۷ باشد. ما ابتدا ۰,۷ را به عنوان درجه مطابقت ۲۸ با مفهوم جوان نشان دار برداشت می کنیم. سپس، باتوجه به قضیه ≪جان جوان است≫، ما فرض می کنیم که قضیه ≪جان جوان است≫ معنای ۰,۷ را از درجه مطابقت ۲۸ با جوان به درجه امکان این که جان ۲۸ ساله است، تغییر می دهد. به طور خلاصه، با در نظر گرفتن ≪جان جوان است≫، مطابقت مقدار u با جوان تبدیل به امکان مقدار u می شود (زاده ۱۹۷۸، ص ۶).

مفهوم توزیع امکان را می توان به شکل زیر تعریف کرد:

تعریف ۱ (تعریف ۸,۳ (زاده ۱۹۷۸، ص ۶)). فرض کنید $F^{\sim}$ یک مجموعه فازی در جامعه ای از U باشد که به وسیله تابع عضویت خود، $\mu(u)\sim f$ مشخص می شود که به عنوان مطابقت $u\in U$ با مفهوم نشان دار شده تفسیر می شود. فرض کنید X متغیری باشد که مقادیری در U اتخاذ می کند و $F^{\sim}$ به عنوان یک محدودیت فازی عمل می کند، $R\sim(X)$ مرتبط با X. پس قضیه ≪$XF\sim$ است≫ که به شکل $R\sim(X)=F\sim$ ترجمه می شود با یک توزیع امکان مرتبط می شود، π_x ، در صورتی که فرض شود X برابر با $R\sim(X)$ باشد.

تابع توزیع امکان، $\pi_x(u)$، که توزیع امکان π_x را نشان می دهد، از نظر عددی با تابع عضویت $\mu f^{\sim}(u)$ از $f^{\sim}$ برابر است.

نماد همواره نشاندهنده ≪علامت گذاری ها≫ یا ≪تعریف می شود≫ خواهد بود. ما به منظور هماهنگی با نماد متداول تئوری امکان، یک توزیع امکان را به جای $\widetilde{\pi}_x$، با π_x نشان خواهیم داد، حتی اگر یک مجموعه فازی باشد.

مثال ۲ (مثال ۸,۲ (زاده، ۱۹۷۸، ص ۷)). فرض کنید U جامعه اعداد صحیح باشد و $F^{\sim}$ مجموعه فازی اعداد صحیح کوچک باشد که به شکل زیر تعریف شده باشد:

$$\widetilde{F}=\{(۱,۱),(۲,۱),(۳,۰/۸),(۴,۰/۶),(۵,۰/۴),(۶,۰/۲)\}$$

پس قضیه ≫X یک عدد صحیح کوچک است≪ توزیع امکان را با X مرتبط می سازد

$$\pi_x = \widetilde{F}$$

که در آن اصطلاحی مانند (۳، ۰٫۸) به این معنی است که امکان ۳ بودن X ، با توجه به این که X یک عدد صحیح کوچ است، ۰٫۸ است.

اگرچه تعریف ۳-۸ به این معنی نیست که منظور ما از معنا و مفهوم امکان با تئوری حداقل مجموعه فازی موافق است، اما این تعریف می تواند به درک منشا مشترک آن ها کمک کند. این تعریف همچنین می تواند تفاوت میان توزیع امکان و توزیع احتمال را واضح تر کند.

زاده (۱۹۷۸، ص ۸) این تفاوت را با یک مثال ساده، اما تاثیرگذار، نشان می دهد.

مثال ۳ (مثال ۳-۸). عبارت ≪هانس X عدد تخم مرغ برای صبحانه خورد≫ را در نظر بگیرید، $X = \{۱, ۲, \cdots\}$. یک توزیع امکان و نیز یک توزیع احتمال را می توان با X مرتبط دانست. توزیع امکان $\pi x(u)$ را می توان به عنوان درجه سهولتی که بوسیله آن هانس می تواند U عدد تخم مرغ بخورد، تفسیر کرد، درحالی که توزیع احتمال را میتوان ازطریق مشاهده صبحانه خوردن هانس به مدت ۱۰۰ روز تعیین کرد. مقادیر $\pi x(u)$ و $P x(u)$ ممکن است به شرح جدول ذیل باشند:

u	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi_x(u)$	1	1	1	1	0.8	0.6	0.4	0.2
$P_x(u)$	0.1	0.8	0.1	0	0	0	0	0

مشاهده می شود که درجه بالای امکان به معنای درجه بالای احتمال نیست. بااین حال، اگر یک رویداد ممکن نباشد، محتمل هم نیست. بنابراین، امکان به جهتی یک حد بالاتر برای احتمال می باشد. بررسی دقیق تری از ≫ اصل مطابقت امکان/احتمال≪ را می توان در زاده (۱۹۷۸) یافت.

این اصل یک اصل قطعی که احتمال ها و امکان ها را بتوان از آن محاسبه کرد، بلکه یک اصل ابتکاری است که نشاندهنده رابطه میان امکان ها و احتمال ها است.

۸٫۲٫۲ مقیاس های امکان و الزام

یک مقیاس امکان در فصل ۴ برای موردی تعریف شده بود (تعریف ۴٫۲) که در آن A یک مجموعه قطعی است. اگر $A^\sim$ یک مجموعه فازی باشد، تعریف عمومی تری از یک مقیاس امکان باید ارائه شود (زاده ۱۹۷۸، ص. ۹).

تعریف ۴ (تعریف ۴-۸). درنظر بگیرید که $A^\sim$ یک مجموعه فازی در جامعه آماری U باشد و π_x توزیع امکانی باشد که با متغیر X مرتبط است و مقادیری در U اتخاذ می کند. مقیاس امکان $\pi_x(A^\sim)$

برای $A^{\sim}$ به شکل زیر تعریف می شود

$$\begin{aligned} poss\{X \text{ is } \widetilde{A}\} &\hat{=} \pi(\tilde{A}A) \\ &\hat{=} \sup_{u\in U} \min\{\mu_{\tilde{A}A}(u), \pi_x(u)\} \end{aligned}$$

مثال ۵ (مثال ۸,۴ (زاده ۱۹۷۸)). در نظر می گیریم که توزیع امکان ناشی از قضیه ≫X یک عدد صحیح کوچک است≫ (به مثال ۸,۲ مراجعه کنید):

$$\pi_x = \{(۱, ۱), (۲, ۱), (۳, ۰/۸), (۴, ۰/۶), (۵, ۰/۴), (۶, ۰/۲)\}$$

و مجموعه قطعی $A = \{۳, ۴, ۵\}$ مقیاس امکان $\pi(A)$ می شود

$$\pi(A) = \max(۰/۸, ۰/۶, ۰/۴) = ۰/۸$$

از طرف دیگر، اگر فرض شود که $A^{\sim}$ یک مجموعه فازی از ≫ اعداد صحیحی که کوچک نیستند ≫ باشند، به این شکل تعریف می شود

$$\tilde{A} = \{(۳, ۰/۲), (۴, ۰/۴), (۵, ۰/۶), (۶, ۰/۸), (۷, ۱), \cdots\}$$

پس مقیاس امکان ≫X یک عدد صحیح کوچک نیست≫ می شود

$$Poss(\text{یک عدد صحیح کوچک نیست } X) = \max\{۰/۲, ۰/۴, ۰/۴, ۰/۲\} = /۴$$

امکان پذیری های شرطی نیز مانند تئوری احتمال وجود دارند. چنین توزیع امکان پذیری شرطی را می توان به شکل زیر تعریف نمود (زاده ۱۹۸۱ ب، ص. ۸۱).

تعریف ۶ (تعریف ۸,۵). در نظر می گیریم که X و Y به ترتیب دو متغیر در جامعه U و V هستند. توزیع امکان پذیری شرطی X با توجه به Y با قضیه ای به شکل ≫اگر $X \sim F$ باشد، پس $Y \sim G$ است≫ استنتاج می شود و با نشان داده می شود.

قضیه ۷ (قضیه ۸,۱). در نظر می گیریم که به ترتیب تابع توزیع امکان پذیری شرطی X و Y باشد. تابع مشترک توزیع امکان پذیری X و Y و $Y, \pi_{(X,Y)}$ به شکل زیر ارائه می شود

$$\pi_{(X,Y)}(u, v) = \min\{\pi_X(u), \pi_{(Y/X)}(v/u)\}$$

به نظر می رسد که هنوز سوال پاسخ داده نشده از نحوه بدست آوردن تابع مشترک توزیع امکان پذیری شرطی وجود دارد. دیدگاه های گوناگونی درباره این سوال توسط زاده (۱۹۸۱ب، ص ۸۲)، هیزدال (۱۹۷۸) و نگوین (۱۹۷۸) ارائه شده است.

Student	Grade				
	A	B	C	D	E
1	0.8	1	0.7	0	0
2	1	0.8	0.6	0.1	0
3	0.6	0.7	0.9	0.1	0
4	0	0.8	0.9	0.5	0
5	0	0	0.3	1	0.2
6	0.3	1	0.3	0	0

همان طور که در تعریف ۴,۲ تعیین شد، مقیاس های فازی بیانگر درجه امکان پذیر بودن یک زیرمجموعه مشخص از یک جامعه ، Ω، یا یک رویداد است. بنابراین ما خواهیم داشت

$$g(\circ) = \circ \text{ and } g(\Omega) = ۱$$

نتیجه شرط ۲ از تعریف ۴,۲ می شود

$$A \subseteq B \Rightarrow g(A) \leq g(B)$$

ما داریم

$$g(A \cup B) \geq \max(g(A), g(B)) \qquad \text{and} \qquad (۸,۱)$$
$$g(A \cap B) \geq (g(A), g(B)) \qquad \text{for} \qquad A, B \subseteq \Omega \qquad (۸,۲)$$

مقیاس های امکان (تعریف ۴,۲) برای موارد محدودکننده به این شکل تعریف می شوند:

$$\pi(A \cup B) = \max(\pi(A), \pi(B)) \qquad (۸,۳)$$
$$\pi(A \cap B) = \min(\pi(A), \pi(B)) \qquad (۸,۴)$$

جدول ۸,۲ توابع امکان پذیری اگر مکمل $\complement A$ در Ω باشد، پس

$$\pi(A \cup \complement A) = \max(\pi(A), \pi(\complement A)) = ۱ \qquad (۸,۵)$$

که این واقعیت را بیان می کند که A یا $\complement A$ کاملا امکان پذیر هستند.
در تئوری امکان یک مقیاس اضافی تعریف شده است که از رابطه عطفی استفاده می کند و به عبارتی دوبرابر مقیاس امکان است:

$$N(A \cap B) = \min(N(A), N(B)) \qquad (۸,۶)$$

پس N مقیاس الزام نامیده می شود. $N(۱) =!$ نشان می دهد که A لزوما صحیح است (A صحیح است). رابطه دوبرابر امکان پذیری و الزام نیازمند عبارت زیر است

$$\pi(A) = ۱ - N(\complement A); \forall A \subseteq \Omega \qquad (۸,۷)$$

مقیاس های الزام این شرط را ادا می کند

$$\min(N(A), N(\complement A)) = ۰ \qquad (۸,۸)$$

رابطه میان مقیاس های امکان پذیری و الزام شروط زیر را برآورده می سازند (دوبوئس و پراد، ۱۹۸۸، ص. ۱۰):

$$\pi(A) \geq N(A), \quad \forall A \subseteq \Omega \qquad (۸,۹)$$
$$N(A) > ۰ \Rightarrow \pi(A) = ۱$$
$$\pi(A) < ۱ \Rightarrow N(A) = ۰ \qquad (۸,۱۰)$$

در این جا همواره فرض می شود که Ω محدود است.

مثال ۸ (مثال ۸,۵). فرض می کنیم که از تجربه پیشین خود عملکرد ۶ دانش آموز در امتحانات نوشتاری را می شناسیم. جدول ۸,۱ توابع امکان پذیری را برای نمرات A تا E و دانش آموزان ۱ تا ۶ نشان می دهد.

ابتدا مشاهده می کنیم که تابع عضویت برای نمرات دانش آموز ۴ یک تابع امکان پذیری نیست، زیرا $g(\Omega) \neq ۱$.

ما اکنون می توانیم سوالات متفاوتی بپرسیم:

۱. این عبارت که دانش آموز ۱ می تواند در امتحان بعدی خود B بگیرد چقدر معتبر است؟ در این مورد $B \gg A \ll$ است و $\complement A$ $\{A, C, D, E\}$ می باشد.

بنابراین $\pi(A) = ۱$

$$N(A) = \min\{۱ - \pi_i\}$$
$$= \min\{۰/۲, ۰/۳, ۱, ۱\} = ۰/۲.$$

از این رو این امکان که دانش آموز ۱ B بگیرد $\pi = ۱$ است و الزام آن $N = ۲$ می باشد.

۲. اگر بخواهیم صحت عبارت «دانش آموز ۱ یا ۲ نمرات A یا B خواهند گرفت» را بدانیم، Ω ما باید به شکل متفاوتی تعریف شود. این تعریف اکنون شامل المان ها دو ردیف اول می شود. نتیجه به شکل زیر خواهد بود

$$\pi(A) = \pi(\text{student ۱ } A \; or \; B \; or \text{ Student ۲ } A \; or \; B) = ۱$$
$$N(A) = ۰/۳$$

۳. سرانجام باید اعتبار این عبارت را مشخص کنیم:≪دانش آموز C ۱ خواهد گرفت≫ در این مورد

$$\pi(A) = ۰/۷$$
$$N(A) = ۰.$$

۸٫۳ احتمال رویدادهای فازی

تا اینجا باید مشخص شده باشد که امکان پذیری جایگزینی برای احتمال نیست، بلکه نوع دیگری از عدم قطعیت است.

اکنون باید فرض کنیم که یک رویداد به طور واضحی تعریف نمی شود، مگر با یک توزیع امکان (یک مجموعه فازی) و این که ما در موقعیت کلاسیکی از عدم قطعیت تصادفی قرار داریم، یعنی وقوع این رویداد (باتوصیف فازی) قطعی نیست و این که می خواهیم احتمال وقوع آن را بیان کنیم. دو دیدگاه را درباره این احتمال می توان اتخاذ کرد: یا این احتمال باید یک اسکالر (مقیاس) باشد و یا می توان آن را به عنوان یک مجموعه فازی نیز در نظر گرفت. ما هر دو دیدگاه را به طور خلاصه درنظر خواهیم گرفت.

۸٫۳٫۱ احتمال یک رویداد فازی به عنوان اسکالر

در تئوری احتمال کلاسیک یک رویداد A عضوی از یک میدان از زیرمجموعه های یک فضای نمونه Ω می باشد. یک مقیاس احتمال p یک مقیاس نرمال شده در یک فضای قابل اندازه گیری می باشد (Ω, a) – یعنی p یک تابع ارزش واقعی است که در یک احتمال $P(A)$ به هر A اختصاص داده می شود به گونه ای که

1. $P(A) \geq 0 \; A \in a$
2. $P(\Omega) = 1$
3. If $A_i \in a$, $i \in I \subset \mathbb{N}$, pairwise disjoint, then $P\left(\underset{i\in I}{\cup} A_i\right) = \sum_{i\in I} P(A_i)$

به عنوان مثال اگر Ω یک فضای n اقلیدسی و یک میدان ∂ از مجموعه های بورل در R^n باشد، پس احتمال A را می توان به شکل زیر بیان کرد

$$P(A) = \int_A dP$$

اگر $\mu A(x)$ نشاندهنده تابع مشخصه یک مجموعه واضح از A و $E_p(\mu a)$ انتظار $\mu a(X)$ باشد، پس

$$P(A) = \int_{R^n}^{\mu_A} (x) dP = E_P(\mu_A)$$

اگر $\mu_A(x)$ نشاندهنده تابع مشخصه ی یک مجموعه واضح نباشد و اما در عوض نشاندهنده تابع عضویت یک مجموعه فازی باشد، تعریف اساسی احتمال A نباید تغییر کند. بنابراین، زاده (۱۹۶۸) احتمال یک رویداد فازی $A^{\sim}$ (به عنوان مثال یک مجموعه فازی $A^{\sim}$ با تابع عضویت $\mu(x)$) را به شکل زیر تعریف کرد:

تعریف ۹ (تعریف ۸,۶). در نظر می گیریم که $(\mathbb{R}^n, a, P)$ یک فضای احتمال است که در آن a میدان ∂ از مجموعه های بورل در R^n و p یک مقیاس احتمال در R^n باشد. پس یک رویداد فازی در R^n یک مجموعه فازی $A^{\sim}$ در R^n است که تابع عضویت آن $\mu_{\tilde{A}}(x)$ قابل اندازه گیری بورل است.

احتمال یک رویداد فازی $A^{\sim}$ به وسیله انتگرال Lebesgue-Stieltjes تعریف می شود

$$P(\tilde{A}) = \int_{R^n}^{\mu_A} (x) dP = E(\mu_{\tilde{A}})$$

شباهت احتمال رویدادهای فازی و رویدادهای واضح در زاده (۱۹۶۸) نشان داده شده است. پیشنهادات او اگرچه بسیار محتمل بودند، اما به صورت اصل موضوعی در ۱۹۶۸ قابل توجیه نبودند. با این حال، اسمتز (۱۹۸۲) نشان داد که یک توجیه بدیهی را می توان برای مورد احتمالات واضح رویدادهای فازی در محیط های غیرفازی ارائه داد. دیگر نویسندگان موارد دیگری مانند احتمالات فازی را بررسی می کنند که در این کتاب مورد بحث قرار نمی گیرد.

ما در عوض به تعریف احتمال یک رویداد فازی به عنوان یک مجموعه فازی بازمی گردیم که به خوبی با برخی از رویکردهای بحث شده، به عنوان مثال برای انتگرال های فازی، مطابقت دارد.

۸,۳,۲ احتمال یک رویداد فازی به عنوان یک مجموعه فازی

در ادامه ما مجموعه هایی را با تعداد محدودی از المان بررسی خواهیم کرد. فرض می کنیم که یک مقیاس احتمال p وجود دارد که درمورد مجموعه ای از تمام زیر مجموعه های (جامعه کل) X تعریف شده است، مجموعه بورل. $P(x_i)$ نشاندهنده احتمال عنصر خواهد بود.

$$\tilde{A} = \{x, \mu_{\tilde{A}}(x) | x \in X\}$$

یک مجموعه فازی است که نشاندهنده یک رویداد فازی است. درجه عضویت المان $x_i \in \tilde{A}$ بوسیله ی $\mu_{\tilde{A}}(x_i)$ نشان داده می شود. مجموعه های سطح α یا $\alpha - cut$ ها که پیش تر در تعریف ۲,۳ تعریف شده اند بوسیله A_α نشان داده می شوند.

یاگر (۱۹۷۹، ۱۹۸۴) بر این باور است که تعریف احتمال یک مجموعه سطح α به عنوان $P(A_\alpha) = \sum_{x \in A_\alpha} P(x)$ کاملا طبیعی است. بر این اساس، احتمال یک رویداد فازی به شرح زیر تعریف می شود (یاگر، ۱۹۸۴).

تعریف ۱۰ (تعریف ۷-۸). در نظر می گیریم که A_α مجموعه ای در سطح α از مجموعه فازی $A^\sim$ نشاندهنده یک رویداد فازی است. پس احتمال رویداد فازی $A^\sim$ را می توان به شکل زیر تعریف کرد

$$P_Y(\tilde{A}) = \{(P(A_\alpha), \alpha) | \alpha \in [۰, ۱]\}$$

با این تفسیر که ≪ احتمال حداقل یک درجه α از برآورده شدن شرط $A^\sim$≫.

زیرنویس y مربوط به p_Y نشان می دهد که بر اساس یاگر P_y تعریفی از احتمال است که با تعریف زاده متفاوت است، تعریفی که با p نشان داده می شود. کاملا بدیهی است که یاگر α را درنظر می گیرد که به عنوان درجه عضویت احتمال های $P(A_\alpha)$ در مجموعه فازی $P(A_\alpha^\sim)$ به عنوان نوعی از سطح معنی دار بودن برای احتمال یک رویداد فازی استفاده می شود.

یاگر همچنین بر اساس ارتباط شخصی با کلمنت، تعریف دیگری را برای احتمال یک رویداد فازی پیشنهاد می کند که به شکل ذیل استخراج شده است.

تعریف ۱۱ (تعریف ۸,۸). صحت قضیه ≪ احتمال $A^\sim$ حداقل w است≫ به عنوان مجموعه فازی $P_y^*(\tilde{A})$ با تابع عضویت زیر تعریف شده است

$$P_y^*(\tilde{A})(w) = \sup_\alpha\{\alpha | P(A_\alpha) \geq w\}, \qquad w \in [۰, ۱]$$

خواننده باید بداند که ≪شاخص≫ معنی دار بودن مقیاس احتمال w است و دیگر α نیست**!** خواننده همچنین باید از این واقعیت آگاه باشد که ما از اصطلاحات یاگر برای نشان دادن مقادیر تابع عضویت بوسیله $P_y^*(\tilde{A})(w)$ استفاده کردیم. این امر خواندن کار یاگر (۱۹۸۴) را تسهیل می کند.

اگر متمم $\tilde{A}$ را با $C\tilde{A} = \{(x, ۱ - \mu_{\tilde{A}}(x))/x \in X\}$ و مجموعه های سطح $C\tilde{A}\alpha$ را با $(C\tilde{A})\alpha$ نشان دهیم، پس $P_y^*(CA)(w) = \sup_\alpha\{\alpha | P(C\tilde{A})_\alpha \geq w\}$ و $w \in [۰, ۱]$ را می توان به عنوان صحت گزاره احتمال ≪احتمال $A^\sim$ نبودن حداقل w است≫ تفسیر کرد.

$\overline{P}_y^*(\tilde{A}) = ۱ - P_y^*(C\tilde{A})$ را تعریف می کنیم. اگر $\overline{P}_y^*(\tilde{A})(w)$ به عنوان حقیقت گزاره ≪ احتمال $A^\sim$ حداکثر w است≫ تفسیر کنیم، پس ما می توانیم استدلال زیر را داشته باشیم: ترکیب ≪و≫ در ≪احتمال $A^\sim$ حداقل w است≫ و ≪احتمال $A^\sim$ حداکثر w است≫ را می توان به این شکل درنظر گرفت ≪احتمال $A^\sim$ دقیقا w است ≫. اگر $P_y^*(\tilde{A})$ و $\overline{P}_y^*(\tilde{A})$ به عنوان توزیع های امکان پذیری درنظر گرفته شوند، پس عطف آن ها تقاطع آن هاست (به وسیله اپراتور حداقل به توابع عضویت مربوطه مدل سازی شدند). بنابراین، تعریف زیر (یاگر، ۱۹۸۴) ارائه می شود:

تعریف ۱۲ (تعریف ۸,۹ (یاگر ۱۹۸۴)). $P_y^*(\tilde{A})$ و $\overline{P}_y^*(\tilde{A})$ به شکل بالا تعریف می شوند. توزیع امکان مرتبط با قضیه ≪ احتمال $A^\sim$ دقیقا w است≫ را می توان به شکل زیر تعریف کرد

$$\overline{P}_y(\tilde{A})(w) = \min\{P_y^*(\tilde{A})(w), \overline{P}_y^*(\tilde{A})(w)\}$$

مثال ۱۳ (مثال ۸,۶). درنظر می گیریم که $\tilde{A} = \{(x_{۱}, ۱), (x_{۲}, ۱۷), (X_{۳}, ٫۶), (X_{۴}, -۲)\}$ یک رویداد فازی با احتمال تعریف شده برای المان های گروهی باشد: $P۱ = ٫۱, P۲ = ٫۴, P۳ = ٫۳, P۴ = ٫۲ Px_{۲} = ٫۴$ که المان $X_{۲}$ به مجموعه فازی $\tilde{A}$ با درجه ۰,۷ تعلق دارد.

ابتدا $P_y^*(\tilde{A})$ را محاسبه می کنیم. ما با مشخص کردن مجموعه های A_α در سطح α برای تمام $\alpha \in [۰, ۱]$ شروع می کنیم. سپس احتمال رویدادهای واضح A_α را محاسبه می کنیم و بازه های w را برای $P(A_\alpha) \geq w$ ارائه می دهیم. سرانجام ما را به عنوان سوپریمم مربوط به α به دست می آوریم. محاسبات در جدول زیر خلاصه شده اند: به همین شکل سوپریمم مربوط به $\overline{P}_y^*(\tilde{A}) = ۱ -$

α	A_α	$P(A)$	w	$P_y^*(\tilde{A}) = \sup \alpha$
[0,0.2]	$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$	1	[0.8,1]	0.2
$[0.2, 0.6]$	$\{x_1, x_2, x_3\}$	0.8	[0.5,0.8]	0.6
$[0.6, 0.7]$	$\{x_1, x_2\}$	0.5	[0.1,0.5]	0.7
$[0.7, 1]$	$\{x_1\}$	0.1	[0,0.1]	1

$P_y^*(C\tilde{A})$، را به دست می آوریم

	$(C\tilde{A})_\alpha$	$P(C\tilde{A})_\alpha$	w	$\overline{P}_y^*(C\tilde{A})$	$\overline{P}_y(\tilde{A}) = 1 - P_y(C\tilde{A})$
0	$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$	1	[0.9,1]	0	0.1
$1[0, 0.3]$	$\{x_2, x_3, x_4\}$	0.9	[0.5,0.9]	0.3	0.7
$[0.3, 0.4]$	$\{x_3, x_4\}$	0.5	[0.2,0.5]	0.4	0.6
$[0.4, 0.8]$	$\{x_4\}$	0.2	[0,0.2]	0.8	0.2
$[0.8, 1]$	0	0	0	1	0

احتمال $\overline{P}_y(\tilde{A})$ مربوط به رویداد فازی $A^{\sim}$ اکنون به وسیله تقاطع های مجموعه های فازی $P_y^*(\tilde{A})$ و $\overline{P}_y^*(\tilde{A})$ که به وسیله یک اپراتور حداقلی مدل سازی شده است، همان طور که در تعریف ۸,۹ نشان داده شد:

$$\overline{P}_y(\tilde{A})(w) = \begin{cases} ۰, & w = ۰ \\ ۰٫۲, & w \in [۰, ۰٫۲] \\ ۰٫۶, & w \in [۰٫۲, ۰٫۸] \\ ۰٫۲, & w \in [۰٫۸, ۱] \end{cases}$$

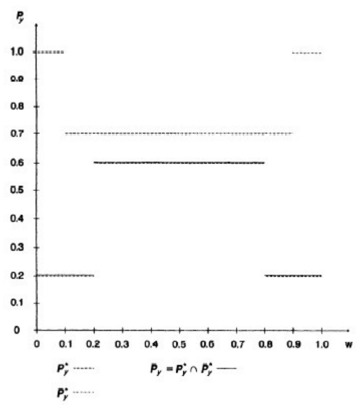
شکل ۱ مجموعه های فازی $P_y^*(\tilde{A})(w), \overline{P}_y^*(\tilde{A})$ and $\overline{P}_y(\tilde{A})(w)$ را نشان می دهد.

۸,۴ امکان درمقایسه با احتمال

سوالات مربوط به رابطه میان تئوری مجموعه فازی و تئوری احتمال به وفور مطرح می شوند، به ویژه توسط ≪تازه واردها≫ به عرصه مجموعه های فازی. احتمالا دو دلیل عمده برای این امر وجود دارد. از یک طرف شباهت های رسمی خاصی میان تئوری مجموعه فازی (به خصوص هنگام استفاده از مجموعه های فازی نرمال شده) و تئوری احتمال وجود دارد. از طرفی دیگر، احتمالات پیشین تنها وسیله ای برای بیان ≪عدم قطعیت≫ بوده اند. این امر برای روشن کردن این موضوع مناسب و مفید به نظر می رسد.

پیش تر در مقدمه این فصل ذکر شد که چنین مقایسه ای به علت نبود یک تعریف واحد از مجموعه های فازی دشوار است. فقدان یک تعریف واحد تا حدی به دلیل تنوع امکان پذیری های پیشنهاد شده برای تعریف ریاضی مجموعه های فازی و نیز عملیات های آن هاست، همان طور که در فصل ۲ و ۳ نشان داده شده است. و تا حدی به علت انواع مختلف فازی بودن است که می تواند با مجموعه های فازی، همان طور که در فضل ۱ توصیف شد، مدل سازی شود.

مشکل دیگر انتخاب جنبه هایی است که این تئوری ها در آن ها مقایسه شوند (به مقدمه این فصل مراجعه کنید). تئوری امکان در بخش ۸,۲ به طور خلاصه توضیح داده شد. در آن جا ذکر شد که تئوری



شکل ۱: شکل ۸,۲ احتمال یک رویداد فازی

امکان بیش از یک نسخه حداکثری از تئوری مجموعه فازی است. همچنین نشان داده شد که «مقیاس های عدم قطعیت» استفاده شده در تئوری امکان مقیاس امکان و الزام هستند، دو مقیاسی که در معنایی خاص همزاد یکدیگر هستند. ما در مقایسه تئوری امکان با تئوری احتمال ابتدا تنها توابع امکان – و مقیاس های تئوری امکان را (بدون درنظر گرفتن وجود مقیاس های دوگانه) بررسی خواهیم کرد. ما در انتهای این فصل ارتباط میان تئوری امکان و احتمال را بررسی خواهیم نمود.

اکنون به سراغ احتمال ها می رویم و سعی می کنیم مفاهیم موجود احتمالات را توصیف و طبقه بندی کنیم. سه جنبه مورد توجه قرار خواهند گرفت:

۱- بیان زبانی احتمال

۲- زمینه های متفاوت اطلاعاتی برای انواع متفاوت احتمال

۳- تفسیر معنایی احتمالات و پیامدهای بدیهی و ریاضی آن

ما از نظر زبانی می توانیم فرمول های صریح احتمال را از فرمول های ضمنی آن متمایز کنیم. ما با توجه به محتوای اطلاعات می توانیم بین احتمالاتی که قابل طبقه بندی (مثلا E،H احتمالی است)، قابل مقایسه (مثلا E،H محتمل تر از K است)، جزئی (مثلا E، احتمال K در بازه a، b] [a، b] می باشد) و کمی هستند (مثلا E، احتمال b H می باشد) تمایز قائل شویم. سرانجام تفسیر یک احتمال می تواند به میزان قابل توجهی متغیر باشد. دو تفسیر بسیار مهم و متداول از احتمالات کمی را بررسی می کنیم. کوپمن (۱۹۴۰، ص ۲۹۲-۲۶۹) و کارناپ و استگمولر (۱۹۵۹) احتمالات (ذهنی) را اساسا به عنوان درجات صحت عبارات در منطق دوگانه تفسیر می کنند. بدیهی است که کوپمن مفهومی از احتمال را استخراج می کند، q، که از نظر ریاضی یک حلقه بولی است.

کلموگروف (۱۹۵۰) احتمالات را از نظر «آماری» تفسیر می کند. او یک مجموعه Ω و یک جبر $\mathcal{G}\partial$ مرتبط را درنظر می گیرد که عناصر آن به عنوان رویداد تفسیر می شوند. او بر اساس تئوری اندازه گیری یک تابع احتمال $P : \mathcal{G} \to [۰, ۱]$ را با ویژگی های زیر تعریف می کند:

$$P : I \to [۰, ۱] \quad (۸,۱۱)$$

$$P(\Omega) = ۱ \quad (۸,۱۲)$$

$$\forall (X_i) \in \mathcal{G} (\forall i, j \in \mathbb{N} : i \neq j \to X_i \cap X_j = \emptyset) P(\bigcup_{i \in N} X_i) = \sum_{i \in N} P(X_i) \quad (۸,۱۳)$$

روابط زیر به راحتی از این ویژگی ها استنتاج می شوند:

$$X, CX \in \mathcal{G} \to P(CX) = ۱ - P(X) \quad (۸,۱۴)$$

$$X, Y \in \mathcal{G} \to P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) \quad (۸,۱۵)$$

که CX نشاندهنده متمم X است.

جدول ۸,۳ تفاوت میان مفهوم احتمال از نظر کوپمن و کولمگروف را با درنظر گرفتن امکان پذیری های زبانی و اطلاعاتی که پیش تر ذکر شد، نشان می دهد.

اکنون ما برای مقایسه ≪مجموعه های فازی≫ با ≪احتمالات≫ و یا حداقل نسخه مشخصی از تئوری مجموعه فازی با یکی از تئوری های احتمال آماده ایم. احتمالات ضمنی قابل مقایسه با مجموعه های فازی نیستند، زیرا مدل های مجموعه های فازی به طور ویژه ای سعی می کنند که عدم قطعیت را صراحتا مدل سازی کنند. احتمالات مقایسه ای و جزئی با استفاده از ≪متغیرهای زبانی≫ قابل مقایسه تر با عبارات احتمالی هستند که ما در فصل ۹ پوشش خواهیم داد. بنابراین، ما رایج ترین نسخه های استفاده شده را، مانند احتمالات کمی و صریح کلموگروف، با امکان پذیری مقایسه خواهیم کرد.

جدول ۲: جدول ۸٫۳ احتمالات کوپمن و کولمگروف

kooptan	Kolmogoroff
D, D', H, H' are statements of dual logic, Q is a nonnegative real number (generally $Q = [0, 1]$)	W is a set of events, W_i are subsets of$W$.
Classificatory: 1. Implicit: D supports H 2. Explicit: H is probable on the basis of D	1.W_i is a nonempty subset of W 2. If one throws the dice W times,probably no W_i is empty.
Comparative: 1. Implicit: D supports H more than D' supports H' 2. H is more probable given D than H' is, given D' .	1. For W times one throws the dice, W_i is of equal size as W_j. 2. If one throws a coin W times, W_i is as probable as W_j.
Quantitative: 1. The degree of support for H on the basis of D is G. 2. The probability for H given D is Q.	1.The ratio of the number of events in W_I and W is Q 2.The probability that the result of throwing a dice is I when throwing the dice M times is Q.

جدول ۳: جدول ۸,۴ ارتباط میان جبر بولی، احتمالات و امکان پذیری ها

	Boolean algebra	Probabilities (quantitative explicit)	Possibilities
Domain	Set of (logic) statements	σ-algebra	Any universe X
Range of values membership	$\{0, 1)$	[0, 1]	[0, 1] fuzzy: $0 < \mu < a$ real
Special constraints		$\sum_{\Omega} p(u) = 1$	
Union (independent, noninteractive)	max	$\sum$	max
Intersection	min	Π	min
Conditional equal to joint?	yes	no	often
What can be used for inference?	conditional	conditional or joint	conditional, often joint

جدول ۸,۴ برخی از تفاوت های اصلی ریاضی را میان سه حوزه ای که از بسیاری جهات با یکدیگر شباهت دارند، نشان می دهد.

اکنون به جنبه «دوگانگی» مقیاس های امکان پذیری و الزام بازمیگردیم.

یک مقیاس احتمال، $P(A)$ اصل اضافه کردن را برآورده می کند، یعنی $\forall A, B \subseteq \Omega$ که برای آن $A \cap B = \emptyset$ می شود:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{۸,۱۶}$$

این مقیاس درمعنای شرط ۲ در تعریف ۴,۲ یکنواخت است. معادله ۸,۱۲ معادل احتمالی ۸,۱ و ۸,۲ است.

شروط ۸,۵ و ۸,۸ تئوری امکان به این معنی اند که

$$N(A) + N(CA) \leq ۱ \tag{۸,۱۷}$$

$$\pi(A) + \pi(CA) \geq ۱ \tag{۸,۱۸}$$

که دقت کمتری نسبت به رابطه معادل خود از تئوی احتمال دارد

$$P(A) + P(CA) = ۱ \tag{۸,۱۹}$$

از این نظر امکان پذیری بیشتر با تئوری شواهد (شافر، ۱۹۷۶) مطابقت دارد تا با تئوری کلاسیک احتمال که در آ« احتمالات یک عنصر (یک زیرمجموعه) به طورواحدی با احتمال یک عنصر مخالف (مکمل) مرتبط است. در تئوری شافر که ماهیتی احتمالی دارد، محدودیت این ارتباط نیز با معرفی ≪بالاترین احتمال≫ و ≪پایین ترین احتمال≫، که مانند امکان و الزام، نسبت به یکدیگر ≪دوگانه≫ هستند، کاسته می شود. درحقیقت، ازنظر شافر می توان مقیاس های امکان و الزام را موارد محدودکننده مقیاس های احتمال دانست، یعنی

$$N(A) \leq P(A) \leq \pi(A) \qquad \forall A \subseteq \Omega \tag{۸,۲۰}$$

این مجددا به نوبه خود به صورت شهودی با «اصل مطابقت امکان/احتمال» زاده که در بخش ۸,۲,۱ ذکر شد مرتبط می شود.

ما باتوجه به تئوری های بررسی شده در این فصل می توانیم نتیجه گیری های زیر را داشته باشیم: تئوری مجموعه فازی، امکان پذیری و احتمال جایگزین یکدیگر نیستند، بلکه مکمل یکدیگر هستند. درحالی که تئوری مجموعه فازی باتوجه به اپراتورهای تقاطع و اتحاد، انواع مجموعه های فازی و موارد دیگر، کاملا دارای تعداد زیادی «درجه آزادی» است، اما دو تئوری دیگر باتوجه به عملکرد و ساختار به صورت یگانه و به خوبی توسعه یافته اند. به نظر می رسد تئوری مجموعه فازی با شرایط مختلف سازگارتر باشد. این سازگاری همچنین به معنی نیاز به انطباق تئوری با شرایط می باشد، اگر شخصی بخواهد یک تئوری یک ابزار مدل سازی مناسب نیز باشد.

تمارین

۱. درنظر می گیریم که U و $F^{\sim}$ به شکل مثال ۸,۲ تعریف شده اند. توزیع امکان پذیری مرتبط با عبارت «X یک عدد صحیح کوچک نیست» را به دست آورید.

۲. یک توزیع امکان پذیری و احتمال را تعریف کنید که بتواند با قضیه «ماشین ها با سرعت X mphدر بزرگراه های آمریکا حرکت می کنند» مرتبط باشد.

۳. مقیاس های امکان پذیری را (تعریف ۸,۴) برای توزیع های امکان پذیری زیر محاسبه کنید:

$$A = \{۶, ۷, \cdots, ۱۳, ۱۴\}$$

«X یک عدد صحیح نزدیک به ۱۰ است»

$$\pi_{\tilde{A}} = \{(۸, ۰/۶), (۹, ۰/۸), (۱۰, ۱), (۱۱, ۰/۸), (۱۲, ۰/۶)\}$$

یا

$$\pi_{\tilde{B}} = \{(۶, ۰/۴), (۷, ۰/۵), (۸, ۰/۶), (۹, ۰/۸), (۱۰, ۱), (۱۱, ۰/۸), (۱۲, ۰/۶), (۱۳, ۰/۵), (۱۴, ۰/۴)\}$$

نتایج را توضیح دهید.

۴. روابط میان مقیاس های عمومی، مقیاس های فازی، مقیاس های احتمال و مقیاس های امکان را توضیح دهید.

۵. احتمال یاگر را از یک رویداد فازی برای رویداد X» یک عدد صحیح نزدیک به ۱۰ است» مشخص کنید، همان طور که در تمرین ۳ تعریف شد.

۶. لیستی از مثال هایی برای انواع عبارات احتمالی که در جدول ۸,۳ ارائه شد تهیه کنید.

۷. تحلیل کنید و توضیح دهید که ادعای $\overline{P}_y^*(\tilde{A})(w)$ می تواند به عنوان صحت گزاره «احتمال $A^\sim$ حداکثر w است» تفسیر شود.

II کاربردهای تئوری مجموعه فازی

کاربردهای تئوری مجموعه فازی را می توان در بسیاری از حوزه ها یافت. می توان این کاربردها را به شکل زیر طبقه بندی کرد:

۱. کاربرد در ریاضیات، یعنی تعمیم ریاضیات سنتی مانند توپولوژی، تئوری نمودار، جبر، منطق و غیره.

۲. کاربرد در الگوریتم مانند متدهای خوشه بندی، الگوریتم های کنترل، برنامه نویس های ریاضی و موارد دیگر.

۳. کاربرد در مدل های استاندارد مانند «مدل حمل و نقل»، «مدل کنترل موجودی»، «مدل های نگهداری» و غیره.

۴. سرانجام، کاربرد در مشکلات مختلف دنیای واقعی.

در این کتاب اولین نوع «کاربردها» از طریق بررسی منطق فازی و استدلال تقریبی پوشش داده خواهد شد. دومین نوع کاربرد با درنظر گرفتن خوشه بندی فازی، برنامه نویسی خطی فازی و برنامه نویسی پویای فازی نشان داده خواهد شد. سومین نوع کاربرد از طریق بررسی نسخه های فازی عملکردهای استاندارد مدل ها و رویکردها چندمعیاری پوشش داده خواهد شد. درنهایت، چهارمین نوع کاربرد نیز از طرفی به وسیله توصیف مدل های پژوهش عملیاتی (OR) و نیز پژوهش تجربی در فصل ۱۵ نشان داده خواهد شد. از طرفی دیگر، فصل ۱۰ به طورکامل به سیستم های کنترل فازی و متخصص اختصاص داده شد، حوزه ای که تئوری مجموعه فازی در آن احتمالا در بیشترین حد و نیز نزدیک ترین حالت به کاربردهای واقعی اعمال شده است.

منطق فازی و استدلال تقریبی

۹,۱ متغیرهای زبانی

در عقب نشینی از دقت درمقابل پیچیدگی غالب، بررسی استفاده از آن چه متغیرهای زبانی نامیده می شوند طبیعی است، یعنی متغیرهایی که مقادیر آن ها عدد نیستند، بلکه واژه ها و جملاتی از یک زبان طبیعی یا ساختگی هستند.

انگیزه استفاده از واژه ها و جملات به جای اعداد این است که ویژگی های زبانی به طور عمومی از موارد عددی کمتر خاص هستند (زاده ۱۹۷۳، ص. ۳).

این نقل قول به طورخلاصه انگیزه و توجیه را برای منطق فازی و استدلال تقریبی بیان می کند. نقل قول دیگری که قدیمی تر است را هم می توانیم اضافه کنیم. فیلسوف بی راسل اشاره کرد:

تمام منطق سنتی به طورمعمول فرض می کند که نمادهای دقیقی استفاده شدند. بنابراین برای این زندگی زمینی قابل استفاده نیستند، بلکه تنها برای یک موجود خیالی فرازمینی قابل استفاده اند (راسل، ۱۹۲۳).

یکی از ابزارهای اساسی برای منطق فازی و استدلال تقریبی مفهوم متغیر زبانی است که در سال ۱۹۷۳ به جای متغیر فازی متغیری با مرتبه بالاتر نامیده می شد، و به شکل زیر تعریف می شود (زاده ۱۹۷۳الف، ص. ۷۵).