

板球系统的间接模糊自适应控制

韩京元^{1a,2}, 田彦涛^{1a,1b}, 孔英秀^{1a}, 赵博昊^{1a}, 李 聪^{1a}

(1. 吉林大学 a. 通信工程学院, b. 工程仿生教育部重点实验室,
长春 130022; 2. 理科大学 控制科学学院, 平壤 526890)

摘 要: 针对具有强耦合、不确定摩擦力的多变量非线性板球系统, 利用 Lyapunov 稳定理论, 设计一种间接模糊自适应控制器. 该控制器可以在确保系统变量在有限范围内变动的同时保持收敛性, 并且在系统的增益矩阵不可逆时, 使得板球系统稳定并跟踪误差收敛到零邻域内. 控制器是由监督、间接模糊自适应和自适应补偿 3 种控制算法结合的. 仿真实验表明, 所提出的控制方法能够确保板球系统跟踪控制的稳定性和收敛性.

关键词: 板球系统; 间接型模糊自适应; Lyapunov 稳定性; 轨迹跟踪控制

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Fuzzy indirect adaptive control for ball and plate system

HAN Kyong-won^{1a,2}, TIAN Yan-tao^{1a,1b}, KONG Yong-su^{1a}, ZHAO Bo-hao^{1a}, LI Cong^{1a}

(1a. College of Communication Engineering, 1b. Key Laboratory of Bionic Engineering of Ministry of Education, Jilin University, Changchun 130022, China; 2. College of Control and Science, University of Science, Pyongyang 526890, Democratic People's Republic of Korea. Correspondent: TIAN Yan-tao, E-mail: tianyt@jlu.edu.cn)

Abstract: For the ball and plate system where the strong coupling and the uncertainty of friction force are existed, an indirect adaptive control method is proposed by using the Lyapunov stability theory. The proposed system not only can ensure all variables in the system are bounded, and keep the convergence property of the tracking error of the ball and plate system, but also can ensure the stability and the tracking error of that are converged to a small neighborhood of the origin. The proposed indirect fuzzy controller consists of a supervisory control term, an indirect fuzzy control term, and an adaptive compensation control term. The simulation results show that the proposed approach guarantees the stability and control performance of the nonlinear multivariable ball and plate system trajectory tracking control.

Keywords: ball and plate control system; indirect fuzzy adaptive control; Lyapunov stability; trajectory tracking control

0 引 言

板球系统不仅是一个典型的带有欠驱动、耦合和不确定性的非线性系统, 而且是一个具有不可逆控制增益矩阵的系统. 这是因为板球系统的输入输出分别为两个, 但控制系统的状态变量为 8 个, 同时还存在两个轴的耦合、板球的不确定摩擦力和各种机构的不确定性. 为此, 自 20 世纪 80 年代, 人们将板球系统作为控制领域中验证各种控制算法的 benchmark 实验对象, 进而引起了很多学者的广泛关注^[1-4]. 针对板球系统存在的不确定性、强耦合、滞后、参数扰动和外部干扰等非线性特性, 文献 [5-8] 提出了对非线

性系统数学模型精度要求不高的智能控制方法和切换控制方法等. 然而, 这些方法大多是在板球系统存在的不确定性、参数变动范围和耦合特性的强弱的基础上, 分别研究了 X -轴和 Y -轴的控制算法, 并将两个轴的运动状态结合起来^[3,7], 因此在高速度下容易导致控制精度下降, 甚至失控现象^[8-9].

近几十年来, 在不确定性问题的处理上, 模糊自适应算法已经广泛运用到不确定非线性系统控制中, 并且成为一个较为有效的算法^[10]. 文献 [11] 针对不确定 SISO 非线性系统提出了模糊自适应控制方法. 然而, 在实际工程中经常遇到的系统大部分都是多变

收稿日期: 2013-12-19; 修回日期: 2014-02-26.

基金项目: 高等学校博士学科点专项基金项目(20060183006); 国家自然科学基金项目(60974067); 吉林大学“985工程”工程仿生科技创新平台项目(2008212).

作者简介: 韩京元(1973—), 男, 博士生, 从事工程控制、智能控制的研究; 田彦涛(1958—), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统建模与优化控制、分布式智能系统与网络控制等研究.

量非线性系统,包括板球系统、火箭升空系统和化学蒸馏塔系统等.

仿射型多变量非线性对象的自适应设计理论已取得了较好的成果,但是针对非线性系统的控制增益矩阵不可逆的情况,文献[12-13]没有予以考虑.

球在板上运动时,存在控制增益矩阵的行列式等于零的时刻,该时刻就是控制矩阵不可逆的时刻,也是球最容易处于失控状态的时刻.为此,在无法保证控制增益矩阵可逆性的情况下,自适应控制设计具有重要意义.

本文采用的是较为典型的不确定非线性多输入多输出(MIMO)系统——板球控制系统.针对该系统,本文提出一种具有监督控制项的间接模糊自适应控制方法,同时基于Lyapunov稳定性理论,推导出自适应控制规则和自适应补偿控制律的参数.无论控制增益矩阵是否可逆,所提出的控制方法都能保证闭环系统的稳定性和跟踪误差趋于零领域内的收敛性.

1 问题描述

考虑具有如下机构的多变量非线性动态系统^[14]:

$$\begin{cases} y_1^{(r_1)} = f_1(X) + \sum_{j=1}^p g_{1j}(X)u_j, \\ y_2^{(r_2)} = f_2(X) + \sum_{j=1}^p g_{2j}(X)u_j, \\ \vdots \\ y_p^{(r_p)} = f_p(X) + \sum_{j=1}^p g_{pj}(X)u_j. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $X = [y_1, \dot{y}_1, \dots, y_1^{(r_1-1)}, y_2, \dot{y}_2, \dots, y_2^{(r_2-1)}, \dots, y_p, \dot{y}_p, \dots, y_p^{(r_p-1)}]^T$ 是系统的状态向量; $u = [u_1, u_2, \dots, u_p]$ 是控制输入向量; $y = [y_1, y_2, \dots, y_p]^T$ 是非线性系统的输出向量; $f_i(X), g_{ij}(X) (i, j = 1, 2, \dots, p)$ 是光滑的未知非线性函数.

令

$$\begin{aligned} y &= [y_1^{(r_1)}, y_2^{(r_2)}, \dots, y_p^{(r_p)}]^T, \\ F(X) &= [f_1(X), f_2(X), \dots, f_p(X)]^T, \\ G(X) &= \begin{bmatrix} g_{11}(X) & g_{12}(X) & \cdots & g_{1p}(X) \\ g_{21}(X) & g_{22}(X) & \cdots & g_{2p}(X) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{p1}(X) & g_{p2}(X) & \cdots & g_{pp}(X) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

则系统(1)可被改写为如下简单形式:

$$y^{(r)} = F(X) + G(X)u. \quad (2)$$

要求在闭环系统稳定的条件下,设计一个间接模

糊控制器和相关参数可调的自适应控制律,使得控制系统的输出 y 最大程度地跟踪给定的理想信号

$$y_d(t) = [y_{d1}(t), y_{d2}(t), \dots, y_{dp}(t)]^T,$$

其中 $y_{di}(t) (i = 1, 2, \dots, p)$ 的导数均为已知并有界.

取目标信号的误差

$$e_1 = y_{d1} - y_1,$$

$$e_2 = y_{d2} - y_2,$$

$$\vdots$$

$$e_p = y_{dp} - y_p,$$

$$\underline{e} = [e_1, \dot{e}_1, \dots, e_1^{(r_1-1)}, \dots, e_p, \dot{e}_p, \dots, e_p^{(r_p-1)}]^T,$$

则误差动态方程可以表示为

$$\underline{\dot{e}} = A\underline{e} + B[-F(X) - G(X)u + y_d^{(r)}]. \quad (3)$$

其中

$$A = \text{diag}[A_{01}, A_{02}, \dots, A_{0p}],$$

$$B = \text{diag}[B_1, B_2, \dots, B_p],$$

$$A_{0i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

为了设计稳定的模糊自适应控制器,本文对系统做如下假设.

假设 1 存在 $\sigma_0, \sigma_1 \in R$ 且 $\sigma_0 \neq 0$, 使得

$$\sigma_0 I_p \leq G(x) \leq \sigma_1 I_p,$$

其中 I_p 是 p 阶单位矩阵.

注 1 由假设 1 可知,若令

$$\bar{\sigma} = \max\{|\sigma_0|, |\sigma_1|\},$$

则有

$$\|G(X)\| \leq \bar{\sigma}\sqrt{p}.$$

假设 2 存在函数 $F^U(X)$, 使得

$$\|F(X)\|_1 \leq F^U(X),$$

其中 $\|\cdot\|_1$ 表示 1 范数.

间接模糊逻辑推论函数 $\hat{F}(x|\theta_f)$ 可以逼近未知函数 $F(x)$. 模糊逻辑系统执行从输入向量 $x = [x_1, x_2,$

$\dots, x_n]^T \in U \subseteq R^n$ 到输出向量 $y \in R$ 的映射, $U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ 且 $U_i \in R$. $F_i^k (k = 1, 2, \dots, N)$ 为被模糊对象定义的第 i 个输入量, 可利用如下 if-then 规则集描述模糊对象:

$$\begin{aligned} R(k): & \text{ if } x_1 = F_1^k, x_2 = F_2^k, \dots, x_n = F_n^k; \\ & \text{ then } \varsigma = C^k, k = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (4)$$

其中: $F_i^k \in \{F_i^1, F_i^2, \dots, F_i^N\}$, $i = 1, 2, \dots, n$; C^k 为 R 上的模糊系统; $N = \prod_{i=1}^n N_i$ 为全部规则数.

令 $\hat{f}_i(x|\theta_f)$ 是模糊逻辑系统 $\hat{F}(x|\theta_f)$ 的第 i 个向量, 应用乘机推理机和中心平均解模糊器, 可以得到模糊系统的输出形式如下^[14]:

$$\hat{f}_i(x|\theta_f) = \varsigma_{fi}^T(x)\theta_{fi}, \quad i = 1, 2, \dots, m_{fi}. \quad (5)$$

其中: $\theta_{fi} = [\theta_{fi1}, \theta_{fi2}, \dots, \theta_{fim_{fi}}]^T \in R^{m_{fi}}$ 是参数向量; $\varsigma_{fi}(x) = [\varsigma_{fi1}(x), \varsigma_{fi2}(x), \dots, \varsigma_{fim_{fi}}(x)]^T \in R^{m_{fi}}$ 是一个模糊基函数向量, 定义如下:

$$\varsigma_{fil}(x) = \frac{\prod_{j=1}^r \mu_{F_j^l}^l(x_j)}{\sum_{l=1}^r \prod_{j=1}^r \mu_{F_j^l}^l(x_j)}, \quad l = 1, 2, \dots, m_{fi}. \quad (6)$$

在这里, 隶属函数 $\mu_{F_j^l}(x_j) (1 \leq j \leq n)$ 是给定的. 由文献[14]可知, 当存在足够多的模糊规则数时, 连续函数可以被式(6)中的模糊逻辑系统以任意精度逼近, 同时模糊系统 $\hat{F}(x|\theta_f)$ 可以表示如下:

$$\hat{F}(X|\theta_f) = \varsigma_f(x)\theta_f. \quad (7)$$

其中: $\theta_f = [\theta_{f1}, \theta_{f2}, \dots, \theta_{fp}] \in R^{m_f}$, $m_f = \sum_{i=1}^p m_{fi}$, $\varsigma_f = \text{diag}[\varsigma_{f1}^T(x), \varsigma_{f2}^T(x), \dots, \varsigma_{fp}^T(x)]$ 是模糊基矩阵.

2 板球系统的动态模型

板球系统 BPVS-JLU II 的机构如图 1 所示, 系统坐标的示意图如图 2 所示. 板球系统利用步进电机驱动平板的两个自由度产生可控姿态, 使小球在平板上稳定地跟踪期望运动轨迹, 同时利用 CCD 摄像头和图像视觉系统测量小球的位置信息^[1-7].

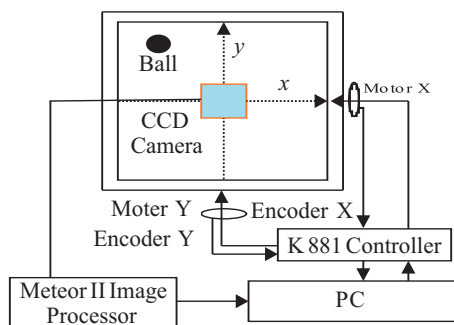


图 1 板球实验装置 BPVS-II 的原理

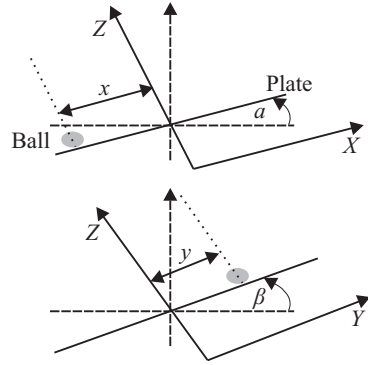


图 2 板球系统的坐标系

假设小球和平板一直接触, 始终保持滚动运动而无滑动, 则板球系统的状态方程为^[2-3]

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ B[x_1x_4^2 + x_4x_5x_8 - g(\sin x_3 - \mu \cos x_3)] \\ x_4 \\ 0 \\ x_6 \\ B[x_5x_8^2 + x_1x_4x_8 - g(\sin x_7 - \mu \cos x_7)] \\ x_8 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}, \quad (8)$$

其中输入、输出变量为

$$\begin{cases} X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)^T = \\ \quad (x, \dot{x}, \theta_x, \dot{\theta}_x, y, \dot{y}, \theta_y, \dot{\theta}_y)^T, \\ Y = (x_1, x_5)^T = (x, y)^T. \end{cases} \quad (9)$$

其中: g 是重力加速度, m 是小球的质量, R 是小球的半径, μ 是滚动摩擦系数, J_b 是小球的转动惯量, x 和 y 分别是小球在 X 轴和 Y 轴方向上的位移, \dot{x} 和 \dot{y} 分

别是对应的速度, θ_x 和 θ_y 是平板在 X 轴和 Y 轴方向上的角位移, $\dot{\theta}_x$ 和 $\dot{\theta}_y$ 是相应的角速度, $B = m/(m + J/R^2)$.

通过式 (1) 可将板球系统 (4) 分成两个子系统, 所得板球系统的参考状态方程如下:

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ \dot{y}_1 = \dot{x}_1 = x_2, \\ \ddot{y}_1 = \dot{x}_2 = Bg(\sin x_3 + \mu_x \cos x_3), \\ y_1^{(3)} = Bgx_4(-\cos x_3 - \mu_x \sin x_3), \\ y_1^{(4)} = Bg[x_4^2(\sin x_3 - \mu_x \cos x_3) - (\cos x_3 + \mu_x \sin x_3)u_1], \\ y_2 = x_5, \\ \dot{y}_2 = \dot{x}_5 = x_6, \\ \ddot{y}_2 = \dot{x}_6 = Bg(\sin x_7 + \mu_y \cos x_7), \\ y_2^{(3)} = Bgx_8(-\cos x_7 - \mu_y \sin x_7), \\ y_2^{(4)} = Bg[x_8^2(\sin x_7 - \mu_y \cos x_7) - (\cos x_7 + \mu_y \sin x_7)u_2]. \end{cases} \quad (10)$$

利用式 (10) 可将板球系统参考状态方程表示为如下形式:

$$y^{(4)} = \begin{bmatrix} y_1^{(4)} \\ y_2^{(4)} \end{bmatrix} = F(X) + G(X) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

其中

$$F(X) = \begin{bmatrix} Bgx_4^2(\sin x_3 - \mu_x \cos x_3) \\ Bgx_8^2(\sin x_7 - \mu_y \cos x_7) \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$G(X) = \begin{bmatrix} -Bg(\cos x_3 + \mu_x \sin x_3) & \rightarrow \\ 0 & \\ & 0 \\ \leftarrow & -Bg(\cos x_7 + \mu_y \sin x_7) \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$y = (y_1, y_2)^T = (x_1, x_5)^T,$$

$$u = (u_1, u_2)^T = (u_x, u_y)^T.$$

由式 (1)、(10) 和 (11) 可知, $r_1 = 4$, $r_2 = 4$, $p = 2$. 此时, 根据式 (3) 可以定义矩阵 A 和 B , 即

$$A_{01} = A_{02} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$A = \text{diag}[A_{01}, A_{02}], \quad B = \text{diag}[B_1, B_2]. \quad (15)$$

因此, 可以通过板球系统参考状态方程设计并分析模糊自适应控制器和系统的稳定性, 并且根据实际板球系统的状态变量的动态变化调整自适应控制律.

3 间接控制器的设计

在系统 (10) 中应用模糊逻辑系统的万能逼近特性, 可以构造如下自适应控制器:

$$u = u_i + u_s + u_c. \quad (16)$$

其中: u_i 是间接模糊控制律, u_s 是监督控制律, u_c 是自适应控制律.

3.1 模糊控制器设计及稳定性分析

由式 (2) 和 (7) 可得 (控制矩阵 $G(X)$ 为不可逆时, 由注 1 可知, $\bar{\sigma}\sqrt{p}$ 可用)

$$u_i = \frac{-\hat{F}(x|\theta_f) + y_d^{(r)}}{\bar{\sigma}\sqrt{p}}. \quad (17)$$

由确定等效原理可知, 设计理想控制器为

$$u^*(x) = \frac{F(x) + y_d^{(r)}}{\bar{\sigma}\sqrt{p}}. \quad (18)$$

将式 (16) 代入 (3), 并利用式 (18) 整理闭环系统的误差方程, 可得

$$\begin{aligned} \dot{e} = & \\ A\bar{e} + B\{\bar{\sigma}\sqrt{p}u^*(x) - G(x)[u_i(x) + u_s(x) + u_c(x)]\}. \end{aligned} \quad (19)$$

考虑候选 Lyapunov 函数

$$V_e = \frac{1}{2}e^T P e. \quad (20)$$

其中: $P = \text{diag}[P_1, P_2, \dots, P_p]$, P_i 是 $r_i \times r_i$ 阶正定矩阵. 为了证明闭环系统的稳定性, 需要利用如下的 Lyapunov 方程:

$$(A + BK)^T P + P(A + BK) = -Q. \quad (21)$$

其中: 矩阵 K 的选择满足, 对于任意一个给定的矩阵 $Q = \text{diag}[Q_1, Q_2, \dots, Q_p]$, Q 是 $r_i \times r_i$ 阶正定矩阵, 使得式 (21) 可以通过如下线性矩阵不等式 (LMI) 求解:

$$\begin{bmatrix} XA^T + AX + Y^T B^T + BY & X \\ X & -\bar{Q} \end{bmatrix} < 0. \quad (22)$$

这里: $X = P^{-1} > 0$, $Y = KX$, $\bar{Q} = Q^{-1}$. 由式 (19) 和 (20) 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_e = & \frac{1}{2}(\dot{e}^T P e + e^T P \dot{e}) = \\ & \frac{1}{2}e^T [(A + BK)^T P + P(A + BK)]e - \\ & \frac{1}{2}e^T [K^T B^T P + PBK]e - e^T PBG(x)[u_i + u_s + u_c] = \\ & -\frac{1}{2}e^T Q e - e^T PBK e + e^T PB[-F(x) + y_d^{(r)}] - \\ & e^T PBG(x)[u_i + u_s + u_c] \leq \\ & -\frac{1}{2}e^T Q e + \|e^T PB\|_1 [\|K e\|_1 + \|F(x)\|_1 + \|y_d^{(r)}\|_1] + \\ & \bar{\sigma}\sqrt{p} \|e^T PB\|_1 [\|u_i\|_1 + \|u_c\|_1] - \sigma_0 e^T PB u_s. \end{aligned} \quad (23)$$

通过对式 (23) 的观察, 并由假设 1 可知, 设计监督控

制律为

$$u_s(x) = I^* \text{sgn}(\underline{e}^T P B)^T \left\{ \frac{\bar{\sigma} \sqrt{p}}{|\sigma_0|} [\|u_i\|_1 + \|u_c\|_1] + \frac{1}{|\sigma_0|} [F^U(x) + \|y_d^{(r)}\|_1 + \|K \underline{e}\|_1] \right\}. \quad (24)$$

其中: \bar{V} 是使得 V_e 有界 (即 $V_e < \bar{V}$) 的一个给定常数, 其值可根据 x 的边界来决定^[14]; I^* 是指标函数, 当 $V_e \geq \bar{V}$ 时, $I^* = 1$, 当 $V_e < \bar{V}$ 时, $I^* = 0$. 将式 (24) 代入 (23), 考虑 $I^* = 1$ 的情况, 由假设 2 可知

$$\dot{V}_e \leq -\frac{1}{2} \underline{e}^T Q \underline{e}. \quad (25)$$

由此可知, 当 \bar{V} 选取适当时, 根据监督控制律 u_s 可以保证 $V_e \leq \bar{V}$, 从而对于任意常数 M_x , $\|x\| \leq M_x$.

由指标函数 I^* 的定义可知, 当且仅当 $V_e \geq \bar{V}$ 时, u_s 才是非零的, 此时的 u_s 才可以作为一个监督控制器, 即整个闭环系统具有优秀的性能, 可以使误差在有限集 (集 $V_e \leq \bar{V}$ 或 $\|x\| \leq M_x$) 内, 此时监督控制项 u_s 停止自己的作用; 反之, 当且仅当闭环系统趋于不稳定时 (即 $V_e \geq \bar{V}$ 时), 监督控制项才开始作用, 以迫使 $V_e \leq \bar{V}$.

可以构造如下自适应补偿控制器:

$$u_c(x) = k_c \cdot \text{sgn}(\underline{e}^T P B)^T. \quad (26)$$

3.2 间接模糊控制器的自适应律设计

为了设计稳定的自适应律, 定义参数向量 θ_f 的约束集

$$\Omega_f = \{\theta_f : \|\theta_f\| \leq M_f\},$$

状态向量 x 的紧集

$$U_x = \{x : \|x\| \leq M_x\},$$

其中 M_f 和 M_x 是定义常数. 利用参考文献[14]的方法定义最优参数

$$\theta_f^* = \arg \min_{\theta_f} \left\{ \sup_{x \in U_x} |\hat{F}(x|\theta_f) - F(x)| \right\},$$

定义小逼近误差

$$\omega_i = [\hat{F}(x|\theta_f^*) - F(x)]. \quad (27)$$

假设 3 最小逼近误差是有界的, 即存在 $\omega_1 > 0$, 使得 $\|\omega_i\| \leq \omega_1$.

令

$$\tilde{\theta}_f = \theta_f - \theta_f^*,$$

由式 (5) 和 (27) 可知, 误差方程 (19) 可表示为

$$\begin{aligned} \dot{\underline{e}} = & A \underline{e} + B \{ \varsigma_f(x) \tilde{\theta}_f + \omega_i + \bar{\sigma} \sqrt{p} u_i - G(x) [u_i + u_s + u_c] \}. \end{aligned} \quad (28)$$

自适应律的目的是调节 θ_f , 以迫使参数误差 $\tilde{\theta}_f$ 和跟踪误差 \underline{e} 达到最小值. 由此, 本文利用如下候选 Lyapunov 函数:

$$V = \frac{1}{2} \underline{e}^T P \underline{e} + \frac{1}{2\gamma} \tilde{\theta}_f^T \tilde{\theta}_f, \quad (29)$$

其中 γ 是正设计常数. 由式 (23) 可知

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\frac{1}{2} \underline{e}^T Q \underline{e} - \underline{e}^T P B K \underline{e} + \left(\frac{1}{\gamma} \dot{\tilde{\theta}}_f^T + \underline{e}^T P B \varsigma_f(x) \right) \tilde{\theta}_f + \\ & \underline{e}^T P B [\bar{\sigma} \sqrt{p} u_i - G(x) u_i] + \underline{e}^T P B [\omega_i - G(x) (u_s + u_c)]. \end{aligned} \quad (30)$$

利用投影算法^[14]设计参数 θ_f 的自适应调节律 $\tilde{\theta}_f$ 如下:

$$\dot{\tilde{\theta}}_f = \begin{cases} -\gamma \varsigma_f^T(x) B^T P \underline{e}, & \|\theta_f\| < M_f \text{ 或 } \|\theta_f\| = M_f \text{ 且 } \underline{e}^T P B \varsigma_f(x) \theta_f \geq 0; \\ \text{Pr}\{-\gamma \varsigma_f^T(x) B^T P \underline{e}\}, & \|\theta_f\| = M_f \text{ 且 } \underline{e}^T P B \varsigma_f(x) \theta_f < 0. \end{cases} \quad (31)$$

其中投影算子 $\text{Pr}\{\cdot\}$ 定义如下:

$$\begin{aligned} \text{Pr}\{-\gamma \varsigma_f^T(x) B^T P \underline{e}\} = & -\gamma \varsigma_f^T(x) B^T P \underline{e} + \gamma \frac{\theta_f \theta_f^T}{\|\theta_f\|^2} \varsigma_f^T(x) B^T P \underline{e}. \end{aligned} \quad (32)$$

可以看出, 设计参数投影方法的自适应律可以确保参数在指定的集合范围内.

3.3 稳定性与性能分析

通过上述过程进行设计可以保证闭环系统的稳定性. 稳定性的相关结论由如下定理给出.

定理 1 假设 1~假设 3 成立, 根据式 (1) 的非线性动态系统, 应用式 (16)、(17)、(24)、控制律 (26) 以及自适应律 (31)、(32) 可以得到如下结论: 1) 闭环系统的所有信号是有界的; 2) 跟踪误差收敛到原点的小领域内.

证明 将式 (31) 代入 (30), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\frac{1}{2} \underline{e}^T Q \underline{e} + \underline{e}^T P B \varsigma_f(x) \frac{\theta_f \theta_f^T}{\|\theta_f\|^2} \tilde{\theta}_f - \\ & \underline{e}^T P B K \underline{e} + \underline{e}^T P B \bar{\sigma} \sqrt{p} u_i + \\ & \underline{e}^T P B \{ \omega_i - G(x) [u_i + u_s + u_c] \}. \end{aligned} \quad (33)$$

其中: 当式 (31) 的第 1 个条件成立时, $I = 0$; 当式 (31) 的第 2 个条件成立时, $I = 1$. 证明 $I = 1$ 时, 式 (31) 的第 2 项非正, 此时 $\|\theta_f\| = M_f$ 且 $\underline{e}^T P B \varsigma_f(x) \theta_f < 0$, $\|\theta_f\| = M_f \geq \|\theta_f^*\|$, 则有

$$\begin{aligned} \theta_f^T \tilde{\theta}_f &= \theta_f^T (\theta_f - \theta_f^*) = \\ &\left(\frac{\theta_f - \theta_f^*}{2} \right)^T (\theta_f - \theta_f^*) + \left(\frac{\theta_f^T + \theta_f^{*T}}{2} \right) (\theta_f - \theta_f^*) = \\ &\frac{1}{2} \|\theta_f - \theta_f^*\|^2 + \frac{1}{2} (\|\theta_f\|^2 - \|\theta_f^*\|^2) \geq 0. \end{aligned} \quad (34)$$

由此可得

$$I \underline{e}^T P B \zeta_f(x) \frac{\theta_f \theta_f^{fT}}{\|\theta_f\|^2} \tilde{\theta}_f \leq 0,$$

由假设 1 可知, 式 (33) 可以简化为

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\frac{1}{2} \underline{e}^T Q \underline{e} - \underline{e}^T P B K \underline{e} + \underline{e}^T P B (\bar{\sigma} \sqrt{p} - \sigma_0) u_i + \\ & \underline{e}^T P B \omega_i - \sigma_0 \underline{e}^T P B u_c - \sigma_0 \underline{e}^T P B u_s. \end{aligned} \quad (35)$$

根据式 (24) 中 u_s 的结构, 式 (35) 的最后一项可以改写为

$$\begin{aligned} \sigma_0 \underline{e}^T P B u_s &= \\ \sigma_0 I^* \|\underline{e}^T P B\|_1 \times &\left\{ \frac{\bar{\sigma} \sqrt{p}}{|\sigma_0|} [\|u_i\|_1 + \|u_c\|_1] + \right. \\ &\left. \frac{1}{|\sigma_0|} [F^U(x) + \|y_d^{(r)}\|_1 + \|K \underline{e}\|_1] \right\} \geq 0. \end{aligned} \quad (36)$$

根据式 (30) 中 u_c 的结构, 式 (35) 的倒数第 2 项可表示为

$$\sigma_0 \underline{e}^T P B u_c = \sigma_0 k_c \|\underline{e}^T P B\|_1. \quad (37)$$

因此, 由假设 3 可知, 式 (31) 可化简为

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\frac{1}{2} \underline{e}^T Q \underline{e} + \|\underline{e}^T P B\| [\|K \underline{e}\|_1 + \\ & (\bar{\sigma} \sqrt{p} - \sigma_0) \|u_i\|_1 + \omega_1 - \sigma_0 k_c]. \end{aligned} \quad (38)$$

令

$$k_c \geq \frac{\omega_1 + \|K \underline{e}\|_1 + (\bar{\sigma} \sqrt{p} - \sigma_0) \|u_i\|_1}{\sigma_0}, \quad (39)$$

可以得到

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \underline{e}^T Q \underline{e}. \quad (40)$$

式 (40) 可以保证 $\underline{e} \in L_\infty$. 因此, 由系统的假设条件以及控制律 (16)、(17)、(24) 和 (26) 可知, 控制律 u_i 、 u_s 和 u_c 均有界. 因此, 式 (19) 右端有界, 即 $\dot{\underline{e}} \in L_\infty$. 又由式 (40) 可得

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \underline{e}^T Q \underline{e} \leq -\frac{\lambda_{Q \min}}{2} \|\underline{e}\|^2, \quad (41)$$

其中 $\lambda_{Q \min}$ 是 Q 的最小特征值. 对式 (41) 两边同时积分, 可得

$$\int_0^\infty \|\underline{e}(\tau)\|^2 d\tau \leq \frac{2}{\lambda_{Q \min}} [V(0) - V(\infty)], \quad (42)$$

由此可知, $\underline{e} \in L_2$.

综合上述结果, 根据 Barbalat 的引理 (即 $\underline{e} \in L_2 \cap L_\infty$ 且 $\dot{\underline{e}} \in L_\infty$, 则有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{e}(t) = 0$) 即可得出 $\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{e}(t) = 0$. \square

4 仿真实验

由式 (3)、(5)、(6)、(10)、(16)、(17)、(24)、(26) 以及 (31) 能够实现小球在平板上的轨迹跟踪控制. 板球系统的参数如表 1 所示.

表 1 板球系统 BPVS II 的参数

| 参数 | 描述 | 数值 |
|-------|------------------------------|----------------------|
| m | 小球的质量/kg | 0.263 |
| r_b | 小球的半径/m | 0.02 |
| g | 重力加速度/(m/s ²) | 9.8 |
| J_b | 小球的转动惯量/(kg·m ²) | 4.2×10^{-5} |

板球的控制目标为

$$\begin{cases} y_1 = x_1 = 0.15 \sin(2\pi t/T), \\ y_2 = x_5 = 0.15 \cos(2\pi t/T). \end{cases} \quad (43)$$

在式 (11) 中, 当 $\mu_x = \tan x_3$ 或 $\mu_y = \tan x_7$ 时, 板球系统的控制增益矩阵 $G(x)$ 为不可逆矩阵. 因此, 根据板球系统的控制增益矩阵 $G(x)$ 和前面提到的假设 1, 可以推出 $\sigma_0 = -10, \sigma_1 = 10$. 又由于板球系统被构造为两个 4 阶子系统, 可定义 $p = 2$.

根据式 (4), 为求基础参数 ζ_f , 设定 9 个隶属函数的中心点分别为 -0.2 、 -0.15 、 -0.1 、 -0.05 、 0.0 、 0.05 、 0.1 、 0.15 、 0.2 , 并设定规则数目为 9, 隶属函数表示为

$$\begin{aligned} \mu_{F_i^1}(x_i) &= \frac{1}{1 + \exp(5(x_i + 0.2))}, \\ \mu_{F_i^2}(x_i) &= \exp(-(x_i + 0.15)^2), \\ \mu_{F_i^3}(x_i) &= \exp(-(x_i + 0.1)^2), \\ \mu_{F_i^4}(x_i) &= \exp(-(x_i + 0.05)^2), \\ \mu_{F_i^5}(x_i) &= \exp(-x_i^2), \\ \mu_{F_i^6}(x_i) &= \exp(-(x_i - 0.05)^2), \\ \mu_{F_i^7}(x_i) &= \exp(-(x_i - 0.1)^2), \\ \mu_{F_i^8}(x_i) &= \exp(-(x_i - 0.15)^2), \\ \mu_{F_i^9}(x_i) &= \frac{1}{1 + \exp(-5(x_i - 0.2))}. \end{aligned}$$

子系统的基础函数为

$$\zeta_{fi} = [\zeta_{fi,1}, \zeta_{fi,2}, \dots, \zeta_{fi,18}]^T, \quad i = 1, 2.$$

其中

$$\begin{aligned} \zeta_{f1,j} &= \frac{\mu_{F_1^j}(x_1) \mu_{F_2^j}(x_2)}{D_1}, \\ \zeta_{fi,l} &= \frac{\mu_{F_1^l}(x_3) \mu_{F_2^l}(x_4)}{D_2}, \\ D_1 &= \sum_{j=1}^9 \mu_{F_1^j}(x_1) \mu_{F_2^j}(x_2), \\ D_2 &= \sum_{l=1}^9 \mu_{F_1^l}(x_3) \mu_{F_2^l}(x_4). \end{aligned}$$

令 $\zeta_{f1} = \zeta_{f2}$, 由式 (7) 可得

$$\hat{F}(x|\theta_f) = \zeta_f(x) \theta_f.$$

其中

$$\begin{aligned} \zeta_f &= \text{diag}[\zeta_{f1}^T, \zeta_{f2}^T], \quad \theta_f = [\theta_{f1}, \theta_{f2}]^T, \\ \theta_{f1} &= [\theta_{f1,1}, \theta_{f1,2}, \dots, \theta_{f1,18}]^T, \\ \theta_{f2} &= [\theta_{f2,1}, \theta_{f2,2}, \dots, \theta_{f2,18}]^T. \end{aligned}$$

可以将初始值 $\theta_{f1}(0), \theta_{f2}(0)$ 选择为随机值.

取正定矩阵 $Q = \text{diag}(10, 10, 10, 10)$, 由线性矩阵不等式 (21) 和 (22) 可求得矩阵 P, K 如下:

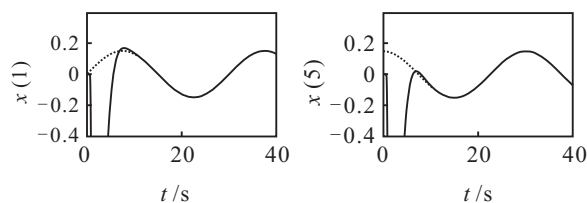
$$P_0 = \begin{bmatrix} 83.5146 & 125.6698 & 80.1822 & 12.3251 \\ 125.6698 & 246.4821 & 167.6234 & 26.5272 \\ 80.1822 & 167.6234 & 138.4865 & 22.5257 \\ 12.3251 & 26.5272 & 22.5257 & 6.1304 \end{bmatrix},$$

$$K_0 = [-28.6641, -61.1733, -52.5556, -13.9381],$$

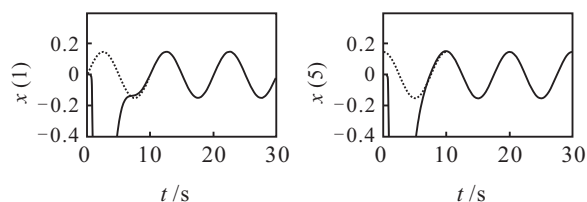
$$P = \text{diag}[P_0, P_0], K = \text{diag}[K_0, K_0].$$

板球系统的初始值选为 $x(0) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$.

仿真结果如图3~图5所示. 在图3~图5中, 实线为测量数据, 虚线为给定数据. 运行轨迹跟踪仿真实验结果如图3所示.



(a) 小球的 X 轴和 Y 轴运动曲线 ($T=30\text{ s}, u=31.4\text{ mm/s}$)



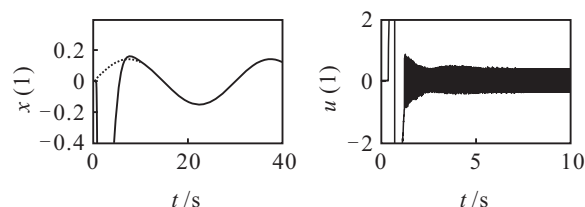
(b) 小球的 X 轴和 Y 轴运动曲线 ($T=10\text{ s}, u=94.2\text{ mm/s}$)

图3 圆形轨迹跟踪曲线

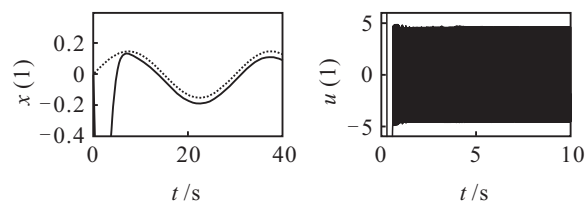
在图3中: 圆形轨迹的半径 $R = 150\text{ mm}$, 图3(a)是小球速度为 31.4 mm/s 时的仿真结果, 图3(b)是小

球速度为 94.2 mm/s 时的仿真结果. 由图3(a)的仿真结果可知: X 轴的位置偏差为 0.8139 mm , Y 轴的位置偏差为 1.275 mm , 圆形轨迹跟踪平均误差为 1.526 mm . 由图3的仿真结果可知, 小球的速度增加到 157 mm/s 时, 也能保证控制精度和小球的迅速性.

自适应补偿控制器的参数 k_c 的变化影响全体模糊自适应控制器的特性和小球的运动精度, 仿真结果如图4所示.



(a) 小球的 X 轴和 Y 轴运动曲线 ($k_c=0.01, T=30\text{ s}, u=31.4\text{ mm/s}$)



(b) 小球的 X 轴和 Y 轴运动曲线 ($k_c=1, T=30\text{ s}, u=31.4\text{ mm/s}$)

图4 不同自适应补偿参数 k_c 的跟踪轨迹

当给定信号为式(43), 且加入幅值为 1.5 mm 的随机测量干扰在 X 轴和 Y 轴输出信号时, 没有特别的影响.

图5为小球速度在 40 mm/s 以上的方形轨迹跟踪和8字形轨迹跟踪仿真实验结果. 实验结果表明, 本文提出的控制器能够使小球在板球系统中跟踪多种图形.

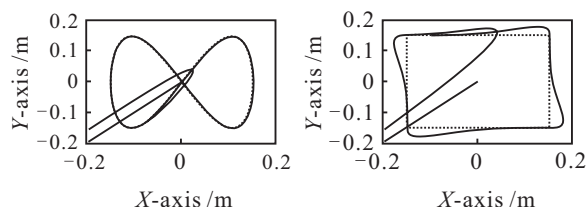


图5 其他轨迹跟踪曲线

5 结 论

本文主要研究了具有强耦合和不确定性的多变量非线性板球控制系统,提出了带有监督功能和自适应功能的间接模糊自适应控制算法,以及不要求控制增益矩阵的可逆性的控制器设计方法.通过控制器的推导过程,验证了在3个假设条件下,均能够保证闭环非线性多变量系统的稳定性和误差在零附近的收敛性.另外,通过板球非线性系统控制的仿真实验结果可以看出,将本文提出的模糊自适应控制算法应用于难以建模的不确定多变量系统和控制矩阵不可逆的非线性对象中,能够得到良好的控制效果.

参考文献(References)

- [1] Han Kyongwon, Tian Yantao, Kong Yongsu, et al. Tracking control of ball and plate system using a improved PSO on-line training PID neural network[C]. 2012 Int Conf on Mechatronics and Automation. New York: Curran Associates, 2012: 2297-2302.
- [2] 王红睿, 田彦涛. 板球系统的参数自调整反步控制[J]. 控制与决策, 2009, 24(5): 749-753.
(Wang H R, Tian Y T. Backstepping control with automatic tuning parameters for ball and plate system[J]. Control and Decision, 2009, 24(5): 749-753.)
- [3] 王红睿, 田彦涛. 一类欠驱动系统的非线性输出跟踪控制[J]. 控制与决策, 2011, 26(6): 953-956.
(Wang H R, Tian Y T. Nonlinear output tracking control for a class of underactuated system[J]. Control and Decision, 2011, 26(6): 953-956.)
- [4] 段慧达, 田彦涛, 李津松, 等. 一类高阶非线性系统的级联自抗扰控制[J]. 控制与决策, 2012, 27(6): 216-220.
(Duan H D, Tian Y T, Li J S, et al. Control for a class of higher order nonlinear system based on of active disturbance rejection control[J]. Control and Decision, 2012, 27(2): 216-220.)
- [5] Tian Yantao, Bai Ming, Su Jintao. A non-linear switching controller for ball and plate system[J]. Int J of Modelling, Identification and Control, 2006, 1(3): 177-182.
- [6] 王红睿, 田彦涛, 隋振. 板球系统的非线性摩擦补偿控制[J]. 吉林大学学报: 工学版, 2010, 40(3): 788-794.
(Wang H R, Tian Y T, Sui Z. Nonlinear control for friction compensation of ball and plate system[J]. J of Jilin University: Engineering and Technology Edition, 2010, 40(3): 788-794.)
- [7] John Hauser, Shankar Sastry, Petar Kokotovic. Nonlinear control via approximate input-output linearization the ball and beam example[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1992, 37(3): 392-398.
- [8] Fan Xingzhe, Zhang Naiyao, Teng Shuji. Trajectory planning and tracking of ball and plate system using hierarchical fuzzy control scheme[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 144(2): 297-312.
- [9] Matsuo Takami, Tsuruta Kenshi, Suemitsu Haruo. Fuzzy adaptive identification method based on Riccati equation and its application to ball-plate control system[C]. Systems, Man, and Cybernetics. USA: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1999: 162-167.
- [10] Chang Yeongchan. Adaptive fuzzy-based tracking control for nonlinear SISO System via VSS and H_∞ approaches[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2001, 9(2): 278-292.
- [11] Wang Chihsu, Liu Hanleih, Lin Tsungchi. Direct adaptive fuzzy-neural control with state observer and supervisory controller for unknown nonlinear dynamical system[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2002, 10(1): 39-49.
- [12] Li Yongming, Tong Shaocheng, Li Tieshan. Adaptive fuzzy output feedback control of MIMO nonlinear uncertain systems with time-varying delays and unknown backlash-like hysteresis[J]. Neurocomputing, 2012, 93(18): 55-56.
- [13] 刘艳军, 王伟. 一类多变量非线性系统的自适应模糊控制[J]. 自动化学报, 2007, 33(11): 1163-1169.
(Liu Y J, Wang W. Adaptive fuzzy control for a class of multivariable nonlinear systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2007, 33(11): 1163-1169.)
- [14] Wang Lixin. A course in fuzzy systems and control[M]. New Jersey: Prentice Hall, 1997: 90-118.

(责任编辑: 闫 妍)