

Rotation matrices as functions of orientation angles

This appendix presents the rotation matrices for various descriptions of the orientation of a right-handed orthogonal set of unit vectors $\mathbf{b}_x, \mathbf{b}_y, \mathbf{b}_z$ relative to another right-handed orthogonal set of unit vectors $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$. These rotation matrices are calculated by first aligning $\mathbf{b}_i = \mathbf{a}_i$ ($i=x, y, z$) and then subjecting $\mathbf{b}_x, \mathbf{b}_y, \mathbf{b}_z$ to the specified rotation sequence. For example, a **Body xyz** rotation sequence means that $\mathbf{b}_x, \mathbf{b}_y, \mathbf{b}_z$ is subjected to right-handed rotations relative to $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$ characterized by $\theta_1 \mathbf{b}_x, \theta_2 \mathbf{b}_y, \theta_3 \mathbf{b}_z$. The symbols c_i and s_i ($i=1, 2, 3$) denote $\sin(\theta_i)$ and $\cos(\theta_i)$ ($i=1, 2, 3$), respectively.

Body xyz

	\mathbf{a}_x	\mathbf{a}_y	\mathbf{a}_z
\mathbf{b}_x	$c_2 c_3$	$s_3 c_1 + s_1 s_2 c_3$	$s_1 s_3 - s_2 c_1 c_3$
\mathbf{b}_y	$-s_3 c_2$	$c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3$	$s_1 c_3 + s_2 s_3 c_1$
\mathbf{b}_z	s_2	$-s_1 c_2$	$c_1 c_2$

Body yxz

	\mathbf{a}_x	\mathbf{a}_y	\mathbf{a}_z
\mathbf{b}_x	$c_1 c_2$	s_2	$-s_1 c_2$
\mathbf{b}_y	$s_1 s_3 - s_2 c_1 c_3$	$c_2 c_3$	$s_3 c_1 + s_1 s_2 c_3$
\mathbf{b}_z	$s_1 c_3 + s_2 s_3 c_1$	$-s_3 c_2$	$c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3$

Body zxy

	\mathbf{a}_x	\mathbf{a}_y	\mathbf{a}_z
\mathbf{b}_x	$c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3$	$s_1 c_3 + s_2 s_3 c_1$	$-s_3 c_2$
\mathbf{b}_y	$-s_1 c_2$	$c_1 c_2$	s_2
\mathbf{b}_z	$s_3 c_1 + s_1 s_2 c_3$	$s_1 s_3 - s_2 c_1 c_3$	$c_2 c_3$

Body xzy

	\mathbf{a}_x	\mathbf{a}_y	\mathbf{a}_z
\mathbf{b}_x	$c_2 c_3$	$s_1 s_3 + s_2 c_1 c_3$	$s_1 s_2 c_3 - s_3 c_1$
\mathbf{b}_y	$-s_2$	$c_1 c_2$	$s_1 c_2$
\mathbf{b}_z	$s_3 c_2$	$s_2 s_3 c_1 - s_1 c_3$	$c_1 c_3 + s_1 s_2 s_3$

Body yxz

	\mathbf{a}_x	\mathbf{a}_y	\mathbf{a}_z
\mathbf{b}_x	$c_1 c_3 + s_1 s_2 s_3$	$s_3 c_2$	$s_2 s_3 c_1 - s_1 c_3$
\mathbf{b}_y	$s_1 s_2 c_3 - s_3 c_1$	$c_2 c_3$	$s_1 s_3 + s_2 c_1 c_3$
\mathbf{b}_z	$s_1 c_2$	$-s_2$	$c_1 c_2$

Body zyx

	\mathbf{a}_x	\mathbf{a}_y	\mathbf{a}_z
\mathbf{b}_x	$c_1 c_2$	$s_1 c_2$	$-s_2$
\mathbf{b}_y	$s_2 s_3 c_1 - s_1 c_3$	$c_1 c_3 + s_1 s_2 s_3$	$s_3 c_2$
\mathbf{b}_z	$s_1 s_3 + s_2 c_1 c_3$	$s_1 s_2 c_3 - s_3 c_1$	$c_2 c_3$

Body yxy

	\mathbf{a}_x	\mathbf{a}_y	\mathbf{a}_z
\mathbf{b}_x	c_2	$s_1 s_2$	$-s_2 c_1$
\mathbf{b}_y	$s_2 s_3$	$c_1 c_3 - s_1 s_3 c_2$	$s_1 c_3 + s_3 c_1 c_2$
\mathbf{b}_z	$s_2 c_3$	$-s_3 c_1 - s_1 c_2 c_3$	$c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3$

Body xzx

	\mathbf{a}_x	\mathbf{a}_y	\mathbf{a}_z
\mathbf{b}_x	c_2	$s_2 c_1$	$s_1 s_2$
\mathbf{b}_y	$-s_2 c_3$	$c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3$	$s_3 c_1 + s_1 c_2 c_3$
\mathbf{b}_z	$s_2 s_3$	$-s_1 c_3 - s_3 c_1 c_2$	$c_1 c_3 - s_1 s_3 c_2$

Body yxy

	\mathbf{a}_x	\mathbf{a}_y	\mathbf{a}_z
\mathbf{b}_x	$c_1 c_3 - s_1 s_3 c_2$	$s_2 s_3$	$-s_1 c_3 - s_3 c_1 c_2$
\mathbf{b}_y	$s_1 s_2$	c_2	$s_2 c_1$
\mathbf{b}_z	$s_3 c_1 + s_1 c_2 c_3$	$-s_2 c_3$	$c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3$

Body yzy

	\mathbf{a}_x	\mathbf{a}_y	\mathbf{a}_z
\mathbf{b}_x	$c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3$	$s_2 c_3$	$-s_3 c_1 - s_1 c_2 c_3$
\mathbf{b}_y	$-s_2 c_1$	c_2	$s_1 s_2$
\mathbf{b}_z	$s_1 c_3 + s_3 c_1 c_2$	$s_2 s_3$	$c_1 c_3 - s_1 s_3 c_2$

Body zxz

	\mathbf{a}_x	\mathbf{a}_y	\mathbf{a}_z
\mathbf{b}_x	$c_1 c_3 - s_1 s_3 c_2$	$s_1 c_3 + s_3 c_1 c_2$	$s_2 s_3$
\mathbf{b}_y	$-s_3 c_1 - s_1 c_2 c_3$	$c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3$	$s_2 c_3$
\mathbf{b}_z	$s_1 s_2$	$-s_2 c_1$	c_2

Body zyz

	\mathbf{a}_x	\mathbf{a}_y	\mathbf{a}_z
\mathbf{b}_x	$c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3$	$s_3 c_1 + s_1 c_2 c_3$	$-s_2 c_3$
\mathbf{b}_y	$-s_1 c_3 - s_3 c_1 c_2$	$c_1 c_3 - s_1 s_3 c_2$	$s_2 s_3$
\mathbf{b}_z	$s_2 c_1$	$s_1 s_2$	c_2

Space xyz

	\mathbf{a}_x	\mathbf{a}_y	\mathbf{a}_z
\mathbf{b}_x	$c_2 c_3$	$s_3 c_2$	$-s_2$
\mathbf{b}_y	$s_1 s_2 c_3 - s_3 c_1$	$c_1 c_3 + s_1 s_2 s_3$	$s_1 c_2$
\mathbf{b}_z	$s_1 s_3 + s_2 c_1 c_3$	$s_2 s_3 c_1 - s_1 c_3$	$c_1 c_2$

Space yzx

	\mathbf{a}_x	\mathbf{a}_y	\mathbf{a}_z
\mathbf{b}_x	$c_1 c_2$	$s_1 s_3 + s_2 c_1 c_3$	$s_2 s_3 c_1 - s_1 c_3$
\mathbf{b}_y	$-s_2$	$c_2 c_3$	$s_3 c_2$
\mathbf{b}_z	$s_1 c_2$	$s_1 s_2 c_3 - s_3 c_1$	$c_1 c_3 + s_1 s_2 s_3$

Space zxy

	\mathbf{a}_x	\mathbf{a}_y	\mathbf{a}_z
\mathbf{b}_x	$c_1 c_3 + s_1 s_2 s_3$	$s_1 c_2$	$s_1 s_2 c_3 - s_3 c_1$
\mathbf{b}_y	$s_2 s_3 c_1 - s_1 c_3$	$c_1 c_2$	$s_1 s_3 + s_2 c_1 c_3$
\mathbf{b}_z	$s_3 c_2$	$-s_2$	$c_2 c_3$

Space xzy

	\mathbf{a}_x	\mathbf{a}_y	\mathbf{a}_z
\mathbf{b}_x	$c_2 c_3$	s_2	$-s_3 c_2$
\mathbf{b}_y	$s_1 s_3 - s_2 c_1 c_3$	$c_1 c_2$	$s_1 c_3 + s_2 s_3 c_1$
\mathbf{b}_z	$s_3 c_1 + s_1 s_2 c_3$	$-s_1 c_2$	$c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3$

Space yxz

	\mathbf{a}_x	\mathbf{a}_y	\mathbf{a}_z
\mathbf{b}_x	$c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3$	$s_3 c_1 + s_1 s_2 c_3$	$-s_1 c_2$
\mathbf{b}_y	$-s_3 c_2$	$c_2 c_3$	s_2
\mathbf{b}_z	$s_1 c_3 + s_2 s_3 c_1$	$s_1 s_3 - s_2 c_1 c_3$	$c_1 c_2$

Space zyx

	\mathbf{a}_x	\mathbf{a}_y	\mathbf{a}_z
\mathbf{b}_x	$c_1 c_2$	$s_1 c_3 + s_2 s_3 c_1$	$s_1 s_3 - s_2 c_1 c_3$
\mathbf{b}_y	$-s_1 c_2$	$c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3$	$s_3 c_1 + s_1 s_2 c_3$
\mathbf{b}_z	s_2	$-s_3 c_2$	$c_2 c_3$

Space xyx

	\mathbf{a}_x	\mathbf{a}_y	\mathbf{a}_z
\mathbf{b}_x	c_2	$s_2 s_3$	$-s_2 c_3$
\mathbf{b}_y	$s_1 s_2$	$c_1 c_3 - s_1 s_3 c_2$	$s_3 c_1 + s_1 c_2 c_3$
\mathbf{b}_z	$s_2 c_1$	$-s_1 c_3 - s_3 c_1 c_2$	$c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3$

Space xzx

	\mathbf{a}_x	\mathbf{a}_y	\mathbf{a}_z
\mathbf{b}_x	c_2	$s_2 c_3$	$s_2 s_3$
\mathbf{b}_y	$-s_2 c_1$	$c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3$	$s_1 c_3 + s_3 c_1 c_2$
\mathbf{b}_z	$s_1 s_2$	$-s_3 c_1 - s_1 c_2 c_3$	$c_1 c_3 - s_1 s_3 c_2$

Space yxy

	\mathbf{a}_x	\mathbf{a}_y	\mathbf{a}_z
\mathbf{b}_x	$c_1 c_3 - s_1 s_3 c_2$	$s_1 s_2$	$-s_3 c_1 - s_1 c_2 c_3$
\mathbf{b}_y	$s_2 s_3$	c_2	$s_2 c_3$
\mathbf{b}_z	$s_1 c_3 + s_3 c_1 c_2$	$-s_2 c_1$	$c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3$

Space zyx

	\mathbf{a}_x	\mathbf{a}_y	\mathbf{a}_z
\mathbf{b}_x	$c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3$	$s_2 c_1$	$-s_1 c_3 - s_3 c_1 c_2$
\mathbf{b}_y	$-s_2 c_3$	c_2	$s_2 s_3$
\mathbf{b}_z	$s_3 c_1 + s_1 c_2 c_3$	$s_1 s_2$	$c_1 c_3 - s_1 s_3 c_2$

Space zxx

	\mathbf{a}_x	\mathbf{a}_y	\mathbf{a}_z
\mathbf{b}_x	$c_1 c_3 - s_1 s_3 c_2$	$s_3 c_1 + s_1 c_2 c_3$	$s_1 s_2$
\mathbf{b}_y	$-s_1 c_3 - s_3 c_1 c_2$	$c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3$	$s_2 c_1$
\mathbf{b}_z	$s_2 s_3$	$-s_2 c_3$	c_2

Space zyz

	\mathbf{a}_x	\mathbf{a}_y	\mathbf{a}_z
\mathbf{b}_x	$c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3$	$s_1 c_3 + s_3 c_1 c_2$	$-s_2 c_1$
\mathbf{b}_y	$-s_3 c_1 - s_1 c_2 c_3$	$c_1 c_3 - s_1 s_3 c_2$	$s_1 s_2$
\mathbf{b}_z	$s_2 c_3$	$s_2 s_3$	c_2