お願いします！
圏論の記事だからと言って
読み飛ばさないでください！

、、、、、、この記事は
紐図とか絵算とか
string diagram
呼ばれている図を用いて、
圏論をより直観的に
理解しようというものです！

TEXをバリバリ使って作る気も
あったのですが、
、、、、、、手書きの方がずっと効率が良い
と気付いたので、手書きとします！
拙い字&絵ですが、
ご容赦ください！
それでは本編へ ⟹

モノイド

まず、圏の定義に行く前に、
モノイドを定義します。
monoid
—— そうする方が誤解が少ないかな〜
と思いました。

定義

モノイドとは 台集合 (「値」の集合) M と
underlying set

その上の二項演算 $\cdot : M \times M \to M$
binary operation
(二つのMの元を受け取り Mの元を返す写像)
mapping

の組 $(M, \cdot)$ のうち、以下の条件を満たす
(要はデータとして Mと$\cdot$を含むということ)
($\mathbf{M} = (M, \cdot)$ とするとき $|\mathbf{M}|$でMを表す)
もののことである：

- 結合則：任意の $x, y, z \in M$ に対し、
  associative law
  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ が成立
  —— ゆえに $x \cdot y \cdot z$ と書いて ok
- 単位元の存在：任意の $x \in M$ に対し
  identity
  (identity element)
  $e \cdot x = x \cdot e = x$
  を満たす $e \in M$ が存在する。
  掛け算の比喩で 1 とも書く

このeを単位元という。単位元は存在すればただ一つしかない。($\because$ eとe'が単位元なら $e = e \cdot e' = e'$)

例

単位元

$(\mathbb{N}, +)$ … 0 , $(\mathbb{N}, \times)$ … 1 ,

自然数(0以上の整数)全体の集合

((文字列全体の集合), (文字列の結合)) … (空文字列)

文字全体の集合はなんでもいいですね!

絵

$\boxed{x}$ $\boxed{y}$ を $x \cdot y$ とみなすと、

・結合則 $(\boxed{x}\ \boxed{y})\ \boxed{z} = \boxed{x}\ (\boxed{y}\ \boxed{z})$

要は $\boxed{x}\ \boxed{y}\ \boxed{z}$ でOK!

・単位元の存在 $\boxed{e}\ \boxed{x} = \boxed{x}\ \boxed{e} = \boxed{x}$ となる $\boxed{e}$ が存在する!

こんなノリで、圏も絵で描いていきます!

イコール = で繋がっているそれぞれの絵は「モノイドの元 element」を表していますね!

—— 圏の絵で表されるのは **射** です!

$\boxed{圏}$……と対象と射

モノイドでは二つの元x, yを持ってきたら、自由に$x \cdot y$を作れました……が！それでは不便なこともあります！そこで、$x \cdot y$を作れるための簡単な条件が追加されたのが$\boxed{圏}$です！

category ―(categoryとどう訳したら$\boxed{圏}$になるものか、不思議ですね！)

$\boxed{定義}$

(複素数とは関係ないです)
(モノイドでいう元に当たります！)

$\boxed{圏}$ $\mathbb{C}$とは射全体の集合$\mathbb{C}_1$と

morphism か arrow ―(矢とも訳す)　(一次元的なので)

対象全体の集合$\mathbb{C}_0$と

object　(ゼロ次元的なので)　($|\mathbb{C}|$とも書きます―が台集合のニュアンスと違うような気もします)

射に始域を割り当てる写像 $\mathrm{dom} : \mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}_0$と

domain

〃 終域 〃 $\mathrm{cod} : \mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}_0$と

codomain　(射はf, g, hで表すことが多いです)

$\mathrm{cod}\, f = \mathrm{dom}\, g$なる任意の二つの射$f, g$に対して

合成射$f \triangleright g$をもたらす合成の演算$\triangleright$の組

composite　composition　(普通$g \circ f$とか$f;g$とか書きます)

うち、以下の条件を満たすもののことである：

・結合則：$\mathrm{cod}\, f = \mathrm{dom}\, g$，$\mathrm{cod}\, g = \mathrm{dom}\, h$ を満たす
associative law　任意の三つの射 f, g, h に対して

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

— ゆえに $f \circ g \circ h$ と書いてOK！

・恒等射の存在：任意の対象 A に対し、（対象は A, B, C で表すことが多いです）
identity
（単位元と同じ英語です！）

□任意の $\mathrm{dom}\, f = A$ なる射 f について
$${}^{A}\mathrm{id} \circ f = f$$
□任意の $\mathrm{cod}\, g = A$ なる射 g について
$$g \circ {}^{A}\mathrm{id} = g$$

なる射 ${}^{A}\mathrm{id}$ が存在する。（ただ一つしかない、ということ）

恒等射という。一意性は uniqueness
モノイドの単位元と同様に示せる

（普通は id_A と書く。
略して id と書くことも。
また、id を 1 と書く向きもある。）

射 f が $\mathrm{dom}\, f = A$，$\mathrm{cod}\, f = B$ を満たすとき $f : A \to B$ と書きます。また、$\mathrm{dom}\, f = A$，$\mathrm{cod}\, f = B$ なる射 f 全体の集合を（AからBへの射、と言います）

$(A, B)_{\mathbb{C}}$ とか $(A, B)_{\mathrm{hom}}$ とか書きます。こうした集合を
（普通は $\mathbb{C}(A, B)$ とか $\mathrm{hom}(A, B)$ とか書きます。）

hom（ホム）集合といいます。
（homomorphism から来ている名前だけど気にしなくてよい）
準同型

圏の定義は若干複雑に見えるかもしれませんが、
モノイドを拡張したものだと分かるはずです！

例 ー(読み飛ばしてもOKです)

- 任意のモノイド $(M, \cdot)$ について、対象をただ一つ $*$ とし、(何でもいいということ)
  射を $x \in M$ に対応させ $x : * \to *$ として取ることにし、
  合成を $x \rhd y := x \cdot y$ とし、恒等射を単位元 e とすると、
  (左辺を右辺で定義するということ)
  圏が出来ます！ (逆に対象が一つしかない圏はモノイドと同一視できます。)

- 何らかの集合の集合 S を取ってきて、対象を S の任意の
  (集合族と普通は言います) family of sets
  元とし、AからBへの射をAからBへの任意の写像とし、
  射の合成を写像の合成とし、恒等射を恒等写像とすると、
  ($f \rhd g$ が普通の記法での $g \circ f$ に当たる)
  ($(g \circ f)(x) = g(f(x))$ です) ($f(x) := x$ なる写像)
  圏が出来ます！ (この記事では $x \rhd f$ と書くことにします！)

- 何か適当に集合 X を持ってきて、対象を X の任意の元とし、
  射を恒等射だけ形式的に取るものとすると、自動的に
  圏が出来ます！ (合成は自明なものだけになります。)
  恒等射は自分と合成しても恒等射
  このように恒等射しかない圏を疎な圏と言い、
  discrete category
  集合と疎な圏は同一視できます。
  ここで作ったような圏を集合と同じく X と書きます。

・適当な集合 X について、X 上の二項関係 $\leq \subseteq X^2$ が〜
binary relation

(この記事では $\subset$ ではなく $\subseteq$ と書きます) ― (X と X の直積 $X \times X = X^2$ の部分集合だということです)

(細かいことは気にしないで！)

推移則 transitive law：任意の $x \leq y$, $y \leq z$ なる $x, y, z \in X$ について、$x \leq z$ が成立する。

反射則 reflexive law：任意の $x \in X$ について、$x \leq x$

reflective じゃありません

(全順序と同じ読みなので注意)

を満たすとき $\leq$ は擬順序関係 pseudo-order relation だとか前順序関係 preorder relation だとか言います！

更に反対称則 antisymmetric law：任意の $x \leq y$, $y \leq x$ を満たす $x, y \in X$ について $x = y$

を満たす場合は(半)順序関係 (partial) order relation だと言います。

このとき、対象を X の任意の元、射は $x, y \in X$ が $x \leq y$ を満たすとき、そのときに限り、$x \leq y$ という形式的な射を x から y へ張り、合成と恒等射は自明なものに限るとすると、やはり、**圏**が出来ます！このように、任意の対象 X, Y について、($X = Y$ でもよい)

X から Y への射が存在しないかただ一つであるような**圏**を痩せた**圏** slim category と言います。擬順序と痩せた**圏**は同一視できます。

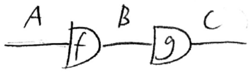
……とにかく**圏**には色々あるのです！

絵

さて！お絵描きしましょう！

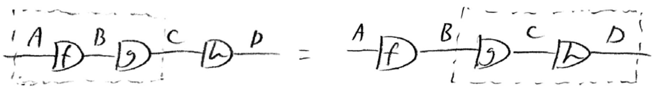
射 $f: A \to B$ は  と書きます！

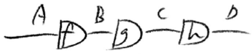
そして射 $f: A \to B$ と $g: B \to C$ との合成は

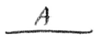
 と書きます！

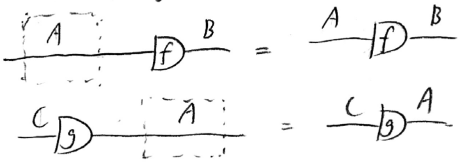
$\mathrm{cod}\, f = \mathrm{dom}\, g$ というのが線の連なりで簡潔に表されます！

そして、次の二つの条件も絵の上で自明なものとなります。

・結合則：

——だから  と書いてOK！

・恒等射の存在：Aの恒等射を  と書くと、



あまりにも簡単ですね！

——しかし！これに満足していては

圏論の世界に踏み入れたことにすらなりません！

圏論は 関手 と 自然変換 を扱ってからが

本番なのです！

$\boxed{\text{関手}}$

関手は複数の圏を扱えます！ ここが大事なのです！
functor

$\boxed{\text{定義}}$

圏 $\mathbb{C}$ から圏 $\mathbb{D}$ への関手 F とは、 このとき $F:\mathbb{C}\to\mathbb{D}$ と書きます
(圏は $\mathbb{C},\mathbb{D},\mathbb{E}$ で表すことが多いです)

$\mathbb{C}$ の任意の対象 A を $\mathbb{D}$ のある対象 $\overset{A}{\underset{F}{\triangledown}}$ へと写し、
(普通 $F(A)$ と書きます)

$\mathbb{C}$ の任意の射 $f:A\to B$ を $\mathbb{D}$ のある射 $\overset{f}{\underset{F}{\triangledown}} : \underbrace{\overset{f}{\underset{A}{\triangledown}} \to \overset{f}{\underset{B}{\triangledown}}}_{\text{重要！}}$

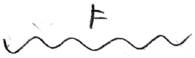
へと写し、かつ以下の条件を満たすもののことです：

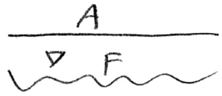
- 合成の保存 preservation ： $f,g\in\mathbb{C}_1$, $\mathrm{cod}\, f=\mathrm{dom}\, g$ のとき、
$$\underset{F}{\overset{(f\triangleright g)}{\triangledown}} = \left(\overset{f}{\underset{F}{\triangledown}}\right)\triangleright\left(\overset{g}{\underset{F}{\triangledown}}\right)$$
- 恒等射の保存 ： $A\in\mathbb{C}_0$ に対し、
$$\underset{F}{\overset{{}^{A}id}{\triangledown}} = {}^{\overset{A}{\underset{F}{\triangledown}}}id \quad \left(: \overset{A}{\underset{F}{\triangledown}} \to \overset{A}{\underset{F}{\triangledown}}\right)$$

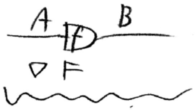
$\overset{A}{\underset{F}{\triangledown}}$ や $\overset{f}{\underset{F}{\triangledown}}$ は省略して ${}^{A}F$ とか ${}^{f}F$ とも書くことにします。

関手の例を出すのが面倒なので、とりあえずお絵描きしましょう。

絵

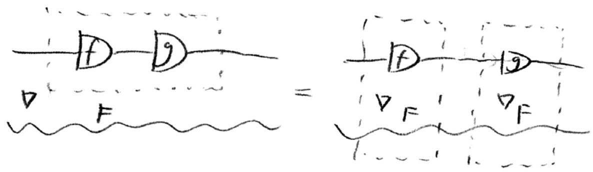
関手は  と表します。

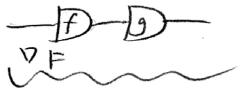
A
▽
F
は  となり、

f: A→B に対する
f
▽
F
は  となります。

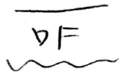
二つの条件はかなり自明なものとなります。

・合成の保存：



ゆえに  と書いてok！

・恒等射の保存：

もちろん  と書いてok！

こうしてみると、関手ってかなり単純だな～と思ってもらえると思います！お絵描きとしては横の広がりだけでなく縦の広がりも出ました。これは大進歩です！

自然変換

ここが一番楽しい部分です！

圏から圏への関手……の次は、
関手から関手への自然変換です！
natural transformation

定義

圏$\mathbb{C}$から圏$\mathbb{D}$への二つの関手 $F, G : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ が
あるとき、FからGへの自然変換 $\alpha : F \to G$ とは、
（自然変換はギリシア文字で表すことが多いです）

$\mathbb{C}$の各対象Aに対し射 $\begin{smallmatrix}A\\ \triangledown\\ \alpha\end{smallmatrix} : \begin{smallmatrix}A\\ \triangledown\\ F\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}A\\ \triangledown\\ G\end{smallmatrix}$ を割り当てる
（普通は α_A と書きます）

もののうち、以下の条件を満たすもののことです：

- $\mathbb{C}$の任意の射 $f : A \to B$ に対し、

$$\begin{pmatrix}f\\ \triangledown\\ F\end{pmatrix} \triangleright \begin{pmatrix}B\\ \triangledown\\ \alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A\\ \triangledown\\ \alpha\end{pmatrix} \triangleright \begin{pmatrix}f\\ \triangledown\\ F\end{pmatrix}$$

が成立する。（ゆえにこれを $\begin{smallmatrix}f\\ \triangledown\\ \alpha\end{smallmatrix}$ と書いてよい。）

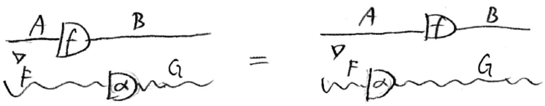
$\begin{smallmatrix}A\\ \triangledown\\ \alpha\end{smallmatrix}$ や $\begin{smallmatrix}f\\ \triangledown\\ \alpha\end{smallmatrix}$ は $A\alpha$ や $f\alpha$ とも書くことにします。

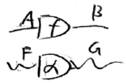
少し不思議な定義だな〜と思うかもしれません。
が！絵を描けばすぐに納得できます！

絵

自然変換 $\alpha : F \to G$ を  と書きます。

このとき、例の条件は



ゆえに  と書いてOK!

となります!

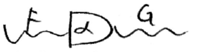
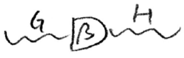
ただするする滑らしているだけですね!
水平合成というものも定義しておきますが、
絵を描けばこれも分かるはずです。

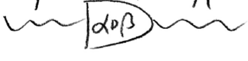
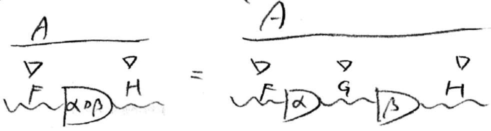
定義

関手 $F, G, H : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ と自然変換 $\alpha : F \to G$, $\beta : G \to H$ について、α と β の水平合成 $\alpha \triangleright \beta : F \to H$ とは、(普通 $\beta \circ \alpha$ と書く)
horizontal composite

任意の $A \in \mathbb{C}$ について $\begin{matrix} A \\ \triangledown \\ (\alpha \triangleright \beta) \end{matrix} = \begin{pmatrix} A \\ \triangledown \\ \alpha \end{pmatrix} \triangleright \begin{pmatrix} A \\ \triangledown \\ \beta \end{pmatrix}$ となるものです!

絵

 と  に対し、

 は  を満たす。

関手の合成と自然変換の垂直合成

縦方向への広がりは留まるところを知りません！

定義

関手 $F : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ と $G : \mathbb{D} \to \mathbb{E}$ があるとき、

$$\begin{array}{c} A \\ \triangledown \\ F \\ \triangledown \\ G \end{array} = \begin{array}{c} A \\ \triangledown \\ F \\ \triangledown \\ G \end{array}, \qquad \begin{array}{c} f \\ \triangledown \\ F \\ \triangledown \\ G \end{array} = \begin{array}{c} f \\ \triangledown \\ F \\ \triangledown \\ G \end{array}$$

とすることで関手 $\begin{array}{c} F \\ \triangledown \\ G \end{array} : \mathbb{C} \to \mathbb{E}$ が作れます。
（普通 $G \circ F$ と書く）

これを F と G の合成と言います。

また、関手 $F, G : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$, $H, K : \mathbb{D} \to \mathbb{E}$ と
自然変換 $\alpha : F \to G$, $\beta : H \to K$ があるとき、

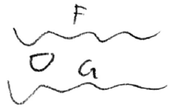
$$\begin{array}{c} A \\ \triangledown \\ \alpha \\ \triangledown \\ \beta \end{array} = \begin{array}{c} A \\ \triangledown \\ \alpha \\ \triangledown \\ H \end{array} \triangleright \begin{array}{c} A \\ \triangledown \\ G \\ \triangledown \\ \beta \end{array} \quad \left(= \begin{array}{c} A \\ \triangledown \\ F \\ \triangledown \\ \beta \end{array} \triangleright \begin{array}{c} A \\ \triangledown \\ \alpha \\ \triangledown \\ K \end{array} \right)$$

とすることで自然変換 $\begin{array}{c} \alpha \\ \triangledown \\ \beta \end{array} : \begin{array}{c} F \\ \triangledown \\ H \end{array} \to \begin{array}{c} G \\ \triangledown \\ K \end{array}$ が作れます。
（普通 $\beta \cdot \alpha$ と書きます。）

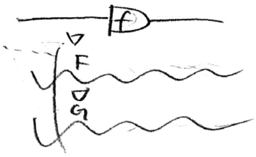
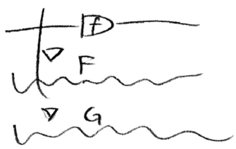
これを α と β の垂直合成 (vertical composite) と言います。

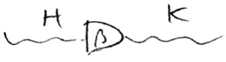
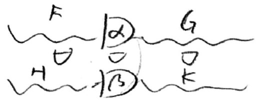
さてさてお絵描きしましょう！

絵

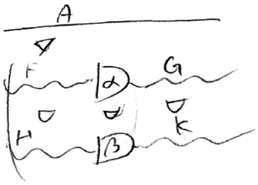
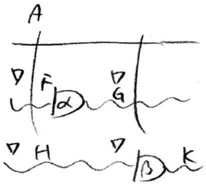
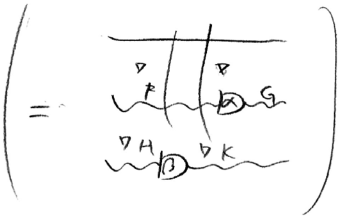
 と  に対し  が作れる。

まとめるための記号

 が  となる。

 と  から 

が作れる。

 が  

となる。

そろそろ ▽とか □とか面倒だな……と思ったら
良い兆候です！

自然変換が分かっただけでもかなりの進歩ですが、
これをさらに拡張した $\boxed{\text{両自然変換}}$ が分かると
かなり便利です。ちょっと複雑ですが……絵の助けを借りれば
大幅にイメージしやすくなるでしょう！

両自然変換

両自然変換 dinatural transformation —— は名前すら知らない人も多そうですが、すごく便利な道具です！紹介します！

定義

まず、圏 $\mathbb{C}$ があるとき、各射の dom と cod を入れ替えて、$f \triangleright g$ を $g \triangleright f$ に変えても圏ができますね！これを圏 $\mathbb{C}$ の双対圏 dual category とか逆圏 opposite category とかいって、$\mathbb{C}^{op}$ と書きます。

あと、圏 $\mathbb{C}$ と $\mathbb{D}$ があるとき、対象が $\mathbb{C}$ の対象と $\mathbb{D}$ の対象との組で、射が $\mathbb{C}$ の射と $\mathbb{D}$ の射との組で、合成と恒等射は想像が付く感じになるような圏が作れます。これを、$\mathbb{C}$ と $\mathbb{D}$ の積 product といい、$\mathbb{C} \times \mathbb{D}$ と書きます。

さて！関手 $F, G : \mathbb{C}^{op} \times \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ があるとします。両自然変換 $\alpha : F \to G$ とは、任意の $\mathbb{C}$ の対象 A に対して射 ${}^{A}\alpha : {}^{(A,A)}F \to {}^{(A,A)}G$ を割り当てるもののうち以下の条件を満たすもののことです！

- 任意の $\mathbb{C}$ の射 $f : A \to B$ に対し、

$$ {}^{(f,A)}F \triangleright {}^{A}\alpha \triangleright {}^{(A,f)}F $$
$$ = {}^{(B,f)}F \triangleright {}^{B}\alpha \triangleright {}^{(f,B)}F $$

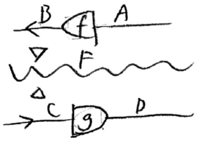
が成立する。

絵

絵を描けば……分かるはず！　また $F, G : \mathbb{C}^{op} \times \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ とします。

FとGには実質的に二つ引数があります。

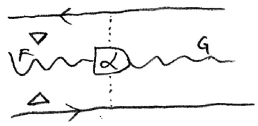
これを



という感じで書きます！

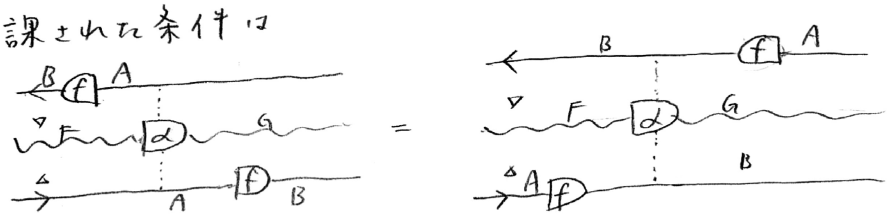
（ここで、$f: A \to B$, $g: C \to D$ です。双対圏なので逆向きなのです。）
$\mathbb{C}$において

さて、関手 $F, G : \mathbb{C}^{op} \times \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ に対する両自然変換 $\alpha : F \to G$ は



という感じになります。

そして課された条件は



となります。今度は単純なスライドではなくて、上下で同時に同じ射 f が通過するときはスライドできる、という感じです。

説明のスピードがどんどん上がりますが、まあ、絵を見ればだいぶイメージが掴めるのではないでしょうか。……とにかく先へ行きましょう！

随伴

圏論において随伴もなくてはならないものです。
adjunction

かなり多くの概念が○○の左随伴関手とか
left adjoint functor

右随伴関手とかいえば片付きます。
right adjoint functor

「随伴」という一般性の高い概念の中に、
実に豊かな性質が既に含まれているのです！
——話は尽きませんがここでは簡単に導入しておきます。

定義：自然同型を用いる版

圏 $\mathbb{C}$ に対し、$\mathbb{C}_1$ の部分集合全体を含む族くらいを考えておきます。この集合族を S として、S の上に前述の通り写像を射とする圏が作れます。この圏も S と書きましょう。

このときホム集合を作る $(A,B)_{\mathbb{C}}$ は関手

$$(-,-)_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^{op}\times\mathbb{C}\to S$$

と見なせます。この $(-,-)_{\mathbb{C}}$ をホム関手といいます。
どうしてなのかは考えてみましょう。

さて、関手 $L:\mathbb{C}\to\mathbb{D}$ と $R:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ があるとします。

自然同型
natural isomorphism

$$\Phi : (-L,-)_{\mathbb{D}} \simeq (-,-R)_{\mathbb{C}}$$

（それぞれ $\mathbb{C}^{op}\times\mathbb{D}\to S$ の関手です。
S は十分大きい集合族とします。）

が存在するとき、L と R は随伴であるといい、
L は R の左随伴関手だとか R は L の右随伴関手
だとかいいます。また、$L\dashv R$ と書きます。

Φが自然同型だというのは、

Φは自然変換 $\Phi : (^{-}L, -)_{\mathbb{D}} \to (-, {}^{-}R)_{\mathbb{C}}$ で

別に自然変換 $\Phi^{-1} : (-, {}^{-}R)_{\mathbb{C}} \to (^{-}L, -)_{\mathbb{D}}$ もあって、

$\Phi \rhd \Phi^{-1} = {}^{(^{-}L,-)_{\mathbb{D}}}id$ かつ $\Phi^{-1} \rhd \Phi = {}^{(-,{}^{-}R)_{\mathbb{C}}}id$

を満たす（即ちΦとΦ^{-1}は互いに逆だ）ということです。

ちなみに、一般に関手 $F : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ に対し ${}^{-F}id : F \to F$

という自然変換をFの恒等変換 identity transformation といいます。普通 1_F と書きます

随伴には他にも定義の仕方があります。等価な定義です！

定義：ジグザグする版

関手 $L : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ と $R : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ があるとします。

自然変換 $\varepsilon : R \rhd L \to Id_{\mathbb{C}}$ と

(elimination より)

$\eta : Id_{\mathbb{D}} \to L \rhd R$ で 条件（ジグザグ則とも呼ばれる）

(introduction より)

- $$\begin{pmatrix} \eta \\ \triangledown \\ {}^{-L}id \end{pmatrix} \rhd \begin{pmatrix} {}^{-L}id \\ \triangledown \\ \varepsilon \end{pmatrix} = {}^{-L}id$$
- $$\begin{pmatrix} {}^{-R}id \\ \triangledown \\ \eta \end{pmatrix} \rhd \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \triangledown \\ {}^{-L}id \end{pmatrix} = {}^{-R}id$$

を満たすものが存在するとき、$L \dashv R$ と書きます。

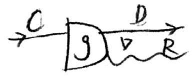
εは余単位 counit、ηは単位 unit といいます。

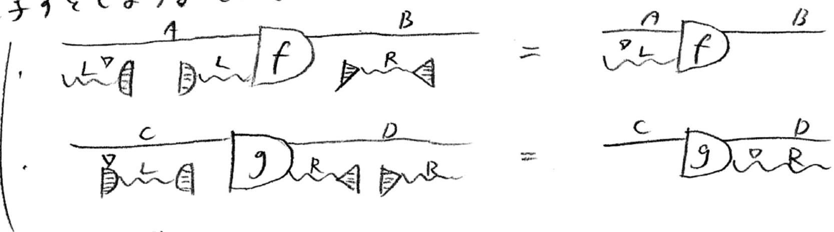
なお、$Id_{\mathbb{C}}$は$\mathbb{C}$から$\mathbb{C}$への関手で、そのまま写すもののことで、恒等関手 identity functor といいます。

——と、二つ定義を出しましたが、両者が等価だとはパッと見では分からないでしょう。でも、また絵描きすれば、分かってくるはずです！

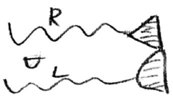
絵

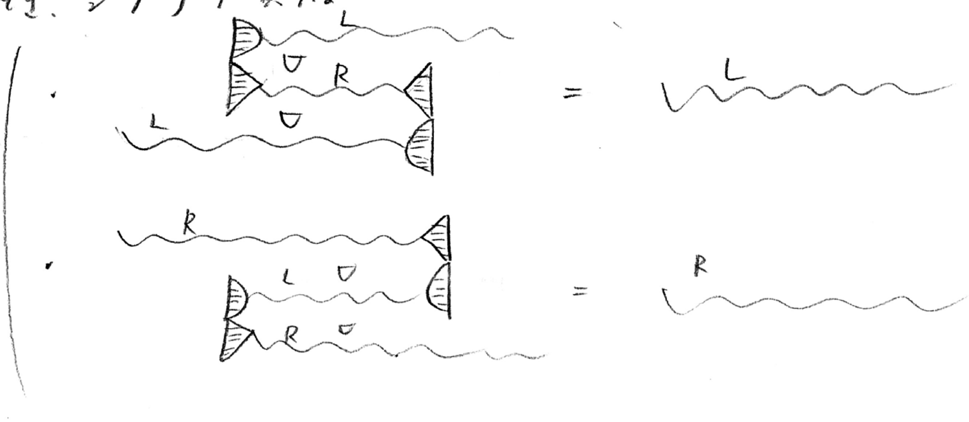
亜は射  を射 
に写すとします。 が亜ということです。
（亜の自然性はこの描き方で自動的に実現されます。）

また、亜'は射  を射 
に写すとします。このとき



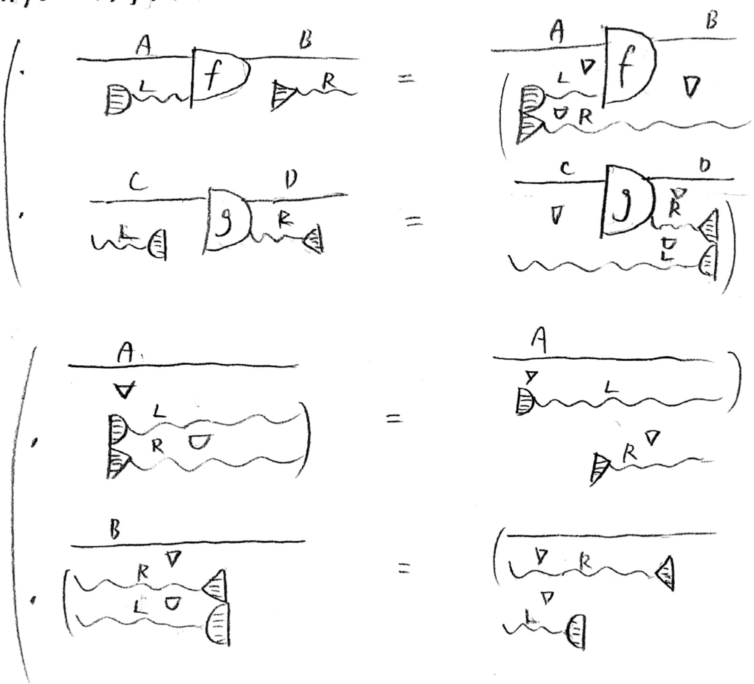
が残りの制約です。

また、ε を ，η を  とします。
（恒等関手は無いものとしていいのです。）
このとき、ジグザグ則は



となります。（まさにジグザグですね！）

両形式の関係性は



とすることで分かります。それぞれの二つの条件が対応していることもよく分かるはずです！

ここまで来たら、だいぶ随伴が面白く感じてきたのではないでしょうか？ ……この先にもっともっと豊かな奥深い広がりがあるのですが、とりあえずこの辺にしておきます。

補足 — ある関手の左あるいは右随伴関手は
複数存在しえますが、
それらはある意味で同一視できるので
気にしないことが多いです。
（一つも存在しないこともあります！）

極限的構成

まあ、百聞は一見に如かず！
見ていきましょう！

定義

圏 $\mathbb{C}$ の中で考えます。対象 A, B について、

A と B の積 $A \times B$ とは、
product（これも $\mathbb{C}$ の対象）

射 $\mathrm{proj}_L : A \times B \to A$ と $\mathrm{proj}_R : A \times B \to B$ があり、
projectionの略　二つの射は射影ともいう

任意の射 $f : C \to A$ と $g : C \to B$ に対して

・ $f = \langle f, g \rangle \rhd \mathrm{proj}_L$,　$g = \langle f, g \rangle \rhd \mathrm{proj}_R$

を満たす射 $\langle f, g \rangle : C \to A \times B$ がただ一つ存在するもののことです。

……なお $A \times B$ は複数存在するかもしれないが、それらはある意味で同一視できるので気にしない。もちろん一つも存在しないこともあります。

$\mathbb{C}$ の任意の2対象 A, B に対し積 $A \times B$ が存在するとき、関手 $\times : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が作れます。射については $f : A \to B$, $g : C \to D$ として、$A \times C$ の射影を proj_L と proj_R として、

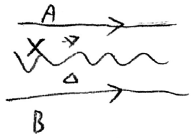
$$f \times g := \langle \mathrm{proj}_L \rhd f, \mathrm{proj}_R \rhd g \rangle$$

とすればよいです。

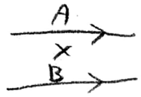
なお圏の積もここでの積として見ることができます！
適切な「圏の圏」を考えてみましょう！

絵

とりあえず関手 $\times: \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ があることにします。

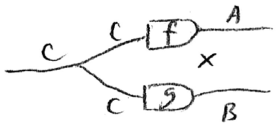


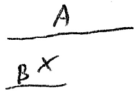
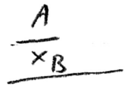
と書いてもいいところですが、



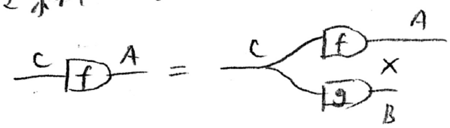
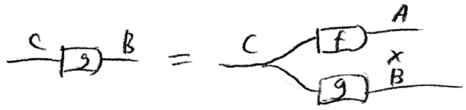
と略して書くことにします。

射  と  に対し、

$\langle f, g\rangle$ を  と書くことにします。

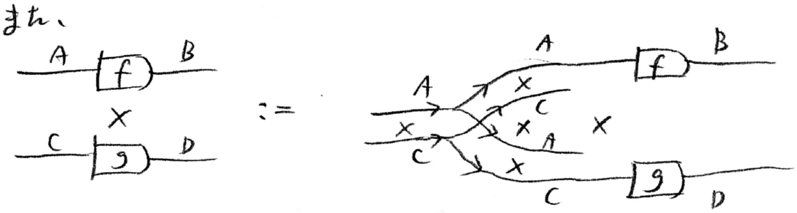
また、proj_L を , proj_R を  と書くことにします。

このとき条件の等式は

- 
- 

となります。(「ただ一つ存在する」等の条件は絵図では描きづらくて、可換図式を使う方が楽です。)

また、



となります。

ここから冪対象 もすぐに定義できます!
power object

定義

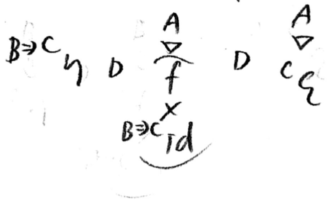
圏$\mathbb{C}$が積関手 $\times : \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を持つとする。

対象Aに対し関手 $A\times - : \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ が作れます。

その右随伴関手を $A\Rightarrow - : \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ と書き、

$A\Rightarrow B$ を AとBの冪対象とか指数対象とか言います。
exponential object

$f: A\to B$ に対し

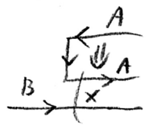
$f\Rightarrow C :=$ 

とすることで、関手 $\Rightarrow : \mathbb{C}^{op}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ が作れます。

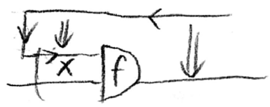
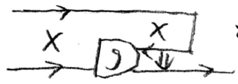
双対圏が登場します!

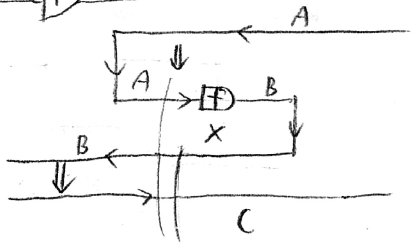
絵

普通の随伴での書き方を微修正します。

${}^{B}\varepsilon$ は  となり、${}^{B}\eta$ は  となります。

(関数適用に相当)　(引数をそのまま返すことに相当)

Φ は  となり、Φ^{-1} は  となります。

$f\Rightarrow C$ は  となります。

極限

積をさらに一般化した概念が極限(limit)です。

とはいえまあ、丁寧に理解していけば分かるはずです。

定義

圏 $\mathbb{J}$ と $\mathbb{C}$ があり、関手 $F: \mathbb{J} \to \mathbb{C}$ があるとします。
(図式と呼ばれることもあります(極限関係の文脈では特に))

F の錐(cone)とは、$\mathbb{C}$ の対象 A と、$\mathbb{J}$ の各対象 X に対する
(Fへの錐ともいいます)
射 ${}^X\alpha : A \to \overset{X}{\underset{F}{\triangleright}}$ (ある種の自然変換) との組のうち、$\mathbb{J}$ の各射 $f: X \to Y$ に対して
${}^X\alpha \rhd \overset{f}{\underset{F}{\triangleright}} = {}^Y\alpha$ を満たすもののことです。

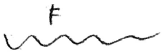
F の極限 $({}^F\mathit{lim}, {}^F\pi)$ とは、F の錐であり、
かつ F の任意の錐 (A, α) に対して、
・任意の $\mathbb{J}$ の対象 X に対し ${}^X\alpha = \langle\alpha\rangle \rhd \overset{X}{\underset{{}^F\pi}{\triangleright}}$ が成立する
を満たす射 $\langle\alpha\rangle : A \to {}^F\mathit{lim}$ が一意に存在する
もののことです。${}^F\mathit{lim}$ を F の極限対象(あるいは単に極限)、
${}^F\pi$ を射影といいます。(普通は $\lim F$ と書きます。)

重要な性質としては、一意性より導かれる以下のものがあります。

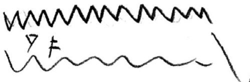
・任意の射(自然変換ではない) f に対し、
$$\langle f \rhd \alpha \rangle = f \rhd \langle \alpha \rangle$$
・$\langle {}^F\pi \rangle = {}^{{}^F\mathit{lim}}id$

では絵を描きましょう!

絵

関手 F が 

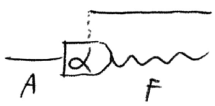
となっているとき、

${}^F\lim$ は 

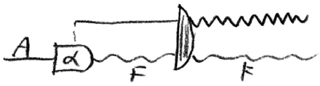
と書きます。

(引数の部分をギザギザで潰すのです。)

(自然性が閉じこめられている感じ)

α が 

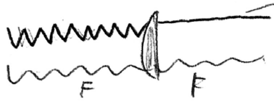
で表されるとき、

⟨α⟩ は 

と書きます。

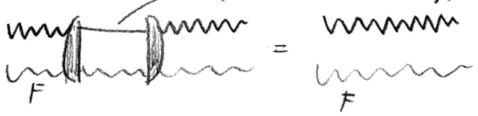
(⟨f▷α⟩ = f▷α なので、左側の閉じ方は明示しません)

(自然性を解放する感じ)

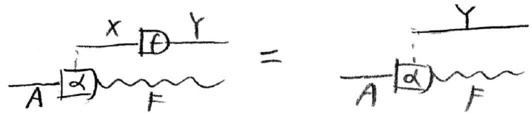
そして、${}^F\pi$ は 

となります。

(この線は何の対象にでもなれる
という感じです)

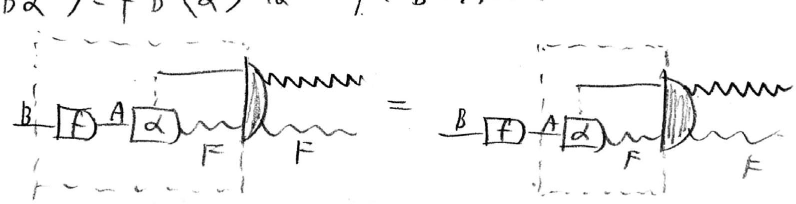
⟨${}^F\pi$⟩ = ${}^F\lim$ id より、 

となります。

なお α の自然性は 

となります。(スライドしたら飲み込まれるのです。)

⟨f▷α⟩ = f▷⟨α⟩ は f : B→A として



という感じです。

ちょっと難しいかもしれないですが、頑張ってください。

エンド

極限をさらに一般化したのがエンド(end)です。
(……厳密には極限の一種としてエンドを作ることもできますが。)
ここでようやく両自然変換が活躍します。

定義

圏 $\mathbb{J}$ と $\mathbb{C}$ があり関手 $F : \mathbb{J}^{op} \times \mathbb{J} \to \mathbb{C}$ があるとします。

Fの楔(くさび)(wedge)とは、$\mathbb{C}$の対象 A と $\mathbb{J}$ の各対象 X に対する射 ${}^{X}\alpha : A \to {}^{(X,X)}F$ との組のうち、(ある種の両自然変換)

$\mathbb{J}$の各射 $f : X \to Y$ に対して ${}^{Y}\alpha \rhd {}^{(f,Y)}F = {}^{X}\alpha \rhd {}^{(X,f)}F$

を満たすもののことです。

Fのエンド $({}^{F}\!\int, {}^{F}\pi)$ とは、Fの楔であり、かつ
(普通は ${}_{c}\!\int F(X,X)$ と書きます)

Fの任意の楔 (A, α) に対して、

・任意の$\mathbb{J}$の対象 X に対し ${}^{X}\alpha = \langle\alpha\rangle \rhd \overset{X}{{}^{F}\pi}$ が成立する

を満たす射 $\langle\alpha\rangle : A \to {}^{F}\!\int$ が一意に存在するもののことです。

${}^{F}\!\int$ 自体をエンドと言ってしまうこともあります。

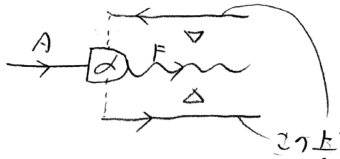
エンドについても極限と同様の性質があります。

- 任意の射(両自然変換でない) f に対し
$$\langle f \rhd \alpha \rangle = f \rhd \langle \alpha \rangle$$
- $\langle {}^{F}\pi \rangle = {}^{{}^{F}\!\int} id$

ではふたたびお絵描きしましょう!

絵

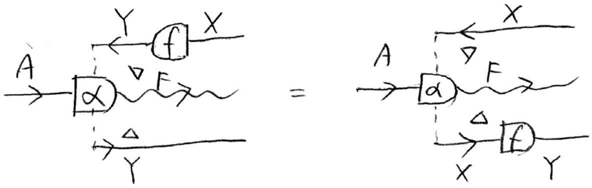
まず Fの楔 (A, α) について。αは



という感じです。

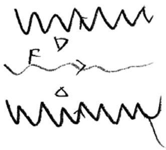
この上下の2本の線は、同じ対象になる（けど、なんでもよい）

そしてαの両自然性は、$f: X \to Y$として、

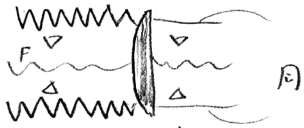


となります。 ⓕが ┆ を伝って移動する感じです！

$^F\int$ は



となり、$^F\pi$ は

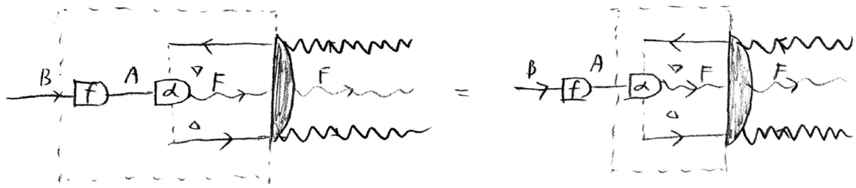


同じ対象！

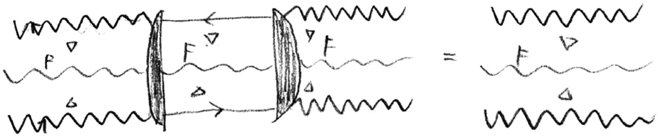
（両自然性を閉じ込めている感じ）

（両自然性を解放する感じ）

$\langle f \triangleright \alpha \rangle = f \triangleright \langle \alpha \rangle$ は $f: B \to A$ として



となり、$\langle {}^F\pi \rangle = {}^F\int_{id}$ は



となります。

絵で証明しよう

System Fと呼ばれるラムダ計算
(多相ラムダ計算、二階ラムダ計算ともいう)
では、以下の同型が一般の型 A について成立します。

・ $A \simeq \forall X. (A \to X) \to X$

(Haskellでもいくつかの制約のもと同様のことが言えます。)

圏論においても(右辺が存在すれば)以下の関係式が任意の対象 A について一般に成立します。

・ $A \simeq {}^{F}\!\!\int$ (ただし $(f,g)F := (A \Rightarrow f) \Rightarrow g$)

これはSystem Fにおける性質を圏論の言葉に翻訳しただけのものです。

最後に、この性質を絵を用いて証明しましょう!

予備知識として。
圏 $\mathbb{C}$ 内で考えます。対象 A, B について、

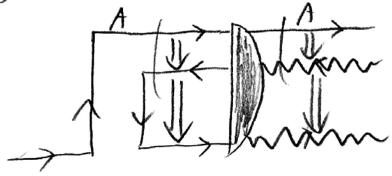
・ $f \circ g = {}^{A}id$ かつ $g \circ f = {}^{B}id$

を満たす射 $f: A \to B$ と $g: B \to A$ が存在するとき、
A と B は同型 (isomorphic) であるといい、$A \simeq B$ と書きます。

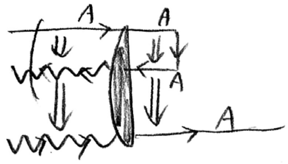
では早速証明しましょう!

証明（細かいことは簡略化するので各自補ってください）

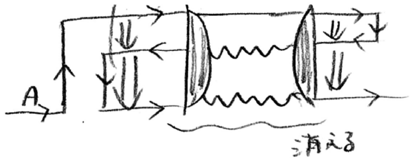
Aから ${}^{F}\!\int$ への射 f を



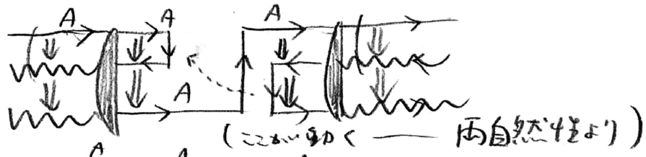
とし、${}^{F}\!\int$ から A への射 g を

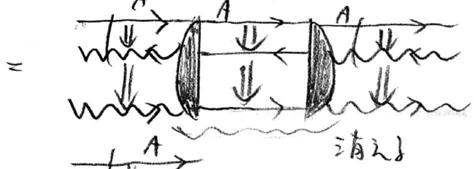


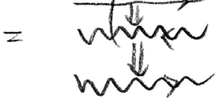
とします。$f \triangleright g = {}^{A}\mathrm{id}$ は



より、$g \triangleright f = {}^{F}\!\int \mathrm{id}$ は







より示せるので、$A \simeq {}^{F}\!\int$ が言えます。

最後に

こんな調子で、絵を使えば
少し難しい定理でも、見通しのよい
証明ができるようになります！

ただ概念を理解したつもりになるための
道具ではなくて、より奥深い世界へと
向かうための道具としても絵は役立つのです！

本当はもっともっと書きたいことはたくさんあります
……が、やはり手も疲れますから、
今回はこの辺にしておきます。（もう少し勉強してから書くつもりです！）

この記事が好評を博したら、
続編が出るかも、しれません！

紐図とか絵算とかいうものは記法に様々な
流派がありますが、ここで紹介した記法は
手書きのしやすさと論理の明快さを重視したものです。
記号類の使い方も絵に似せるように独自のものを
採用しました。
ちょっと変わってるけどいいな～と思ってもらえれば
嬉しいです。

最後まで読んでくださり、
ありがとうございました！