お願いします！
圏論の記事だからと言って
読み飛ばさないでください！

、、、、、、この記事は
紐図とか絵算とか
string diagram
呼ばれている図を用いて、
圏論をより直観的に
理解しようというものです！

TEXをバリバリ使って作る気も
あったのですが、
、、、、、、手書きの方がずっと効率が良い
と気付いたので、手書きとします！
拙い字&絵ですが、
ご容赦ください！
それでは $\boxed{\text{本編}}$ へ ⟹

モノイド

まず、圏の定義に行く前に、
モノイド(monoid)を定義します。
―― そうする方が誤解が少ないかな～
と思いました。

定義

モノイドとは 台集合(underlying set)（「値」の集合）M と
その上の二項演算(binary operation) $\cdot : M \times M \to M$
（二つのMの元を受け取りMの元を返す写像(mapping)）
の組$(M, \cdot)$（要はデータとしてMと$\cdot$を含むということ）のうち、以下の条件を満たす
（$\mathcal{M} = (M, \cdot)$とするとき$|\mathcal{M}|$でMを表す）
もののことである：

- 結合則(associative law)：任意の$x, y, z \in M$に対し、
  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ が成立
  ―― ゆえに $x \cdot y \cdot z$ と書いてok
- 単位元の存在(identity (identity element))：任意の$x \in M$に対し
  $e \cdot x = x \cdot e = x$
  を満たす$e \in M$が存在する。
  （掛け算の比喩で 1 とも書く）

このeを単位元という。単位元は存在すればただ一つしかない。（$\because$ eとe'が単位元なら $e = e \cdot e' = e'$）

例

単位元

$(\mathbb{N}, +) \cdots 0$, $(\mathbb{N}, \times) \cdots 1$,

自然数（0以上の整数）全体の集合

((文字列全体の集合), (文字列の結合)) … (空文字列)

文字全体の集合はなんでもいいですね！

絵

$\boxed{x}\ \boxed{y}$ を $x \cdot y$ とみなすと、

・結合則 $\boxed{\boxed{x}\ \boxed{y}}\ \boxed{z} = \boxed{x}\ \boxed{\boxed{y}\ \boxed{z}}$

要は $\boxed{x}\ \boxed{y}\ \boxed{z}$ でOK！

・単位元の存在 $\boxed{e}\ \boxed{x} = \boxed{x}\ \boxed{e} = \boxed{x}$ となる $\boxed{e}$ が存在する！

こんなノリで、圏も絵で描いていきます！

イコール $=$ で繋がっているそれぞれの絵は「モノイドの元（element）」を表していますね！

—— 圏の絵で表されるのは射です！

圏……と対象と射

モノイドでは二つの元x,yを持ってきたら、自由にx・yを作れました。……が！それでは不便なこともあります！そこで、x・yを作れるための簡単な条件が追加されたのが圏です！
category
(categoryとどう訳したら圏になるものか、不思議ですね！)

定義

(複素数とは関係ないです) (モノイドでいう元に当たります！)

圏 $\mathbb{C}$ とは射全体の集合 $\mathbb{C}_1$ と
morphism か arrow (矢とも訳す) (一次元的なので)

対象全体の集合 $\mathbb{C}_0$ と
object (ゼロ次元的なので) ($|\mathbb{C}|$ とも書きます——が、台集合のニュアンスと違うような気もします)

射に始域を割り当てる写像 $\mathrm{dom} : \mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}_0$ と
domain

〃 終域 〃 $\mathrm{cod} : \mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}_0$ と
codomain (射は f, g, h で表すことが多いです)

$\mathrm{cod}\, f = \mathrm{dom}\, g$ なる任意の二つの射 f, g に対して

合成射 $f \triangleright g$ をもたらす合成の演算 $\triangleright$ の組
composite composition (普通 $g \circ f$ とか $f ; g$ とか書きます)

うち、以下の条件を満たすもののことである：

・結合則：$\mathrm{cod}\, f = \mathrm{dom}\, g$, $\mathrm{cod}\, g = \mathrm{dom}\, h$ を満たす
associative law　任意の三つの射 f, g, h に対して

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

— ゆえに $f \circ g \circ h$ と書いてOK！

（対象は A, B, C で表すことが多いです）

・恒等射の存在：任意の対象 A に対し、
identity
（単位元と同じ英語です！）

□任意の $\mathrm{dom}\, f = A$ なる射 f について
$${}^{A}id \circ f = f$$
□任意の $\mathrm{cod}\, g = A$ なる射 g について
$$g \circ {}^{A}id = g$$

なる射 ${}^{A}id$ が存在する。（ただ一つしかない、ということ）

恒等射という。一意性は uniqueness モノイドの単位元と同様に示せる

（普通は id_A と書く。
略して id と書くことも。
また、id を 1 と書く向きもある。）

射 f が $\mathrm{dom}\, f = A$, $\mathrm{cod}\, f = B$ を満たすとき $f : A \to B$ と書きます。また、$\mathrm{dom}\, f = A$, $\mathrm{cod}\, f = B$ なる射 f 全体の集合を
（AからBへの射、と言います）

$(A, B)_{\mathbb{C}}$ とか $(A, B)_{\mathrm{hom}}$ とか書きます。こうした集合を
（普通は $\mathbb{C}(A, B)$ とか $\mathrm{hom}(A, B)$ とか書きます。）

$\overset{ホム}{\mathrm{hom}}$ 集合といいます。
（homomorphism から来ている名前だけど気にしなくてよい）
準同型

圏の定義は若干複雑に見えるかもしれませんが、
モノイドを拡張したものだと分かるはずです！

例 ー(読み飛ばしてもOKです)

- 任意のモノイド $(M, \cdot)$ について、対象をただ一つ $*$ とし、(何でもいいということ)
  射を $x \in M$ に対応させ $x : * \to *$ として取ることにし、
  合成を $x \rhd y$ に $x \cdot y$ とし、恒等射を単位元 e とすると、
  (左辺を右辺で定義するということ)
  圏が出来ます！ (逆に対象が一つしかない圏はモノイドと同一視できます。)

- 何らかの集合の集合 S を取ってきて、対象を S の任意の元とし、A から B への射を A から B への任意の写像とし、
  (集合族と普通は言います) family of sets
  射の合成を写像の合成とし、恒等射を恒等写像とすると、
  ($f \rhd g$ が普通の記法での $g \circ f$ に当たる) ($(g \circ f)(x) = g(f(x))$ です) ($f(x) = x$ なる写像)
  圏が出来ます！ (この記事では $x \rhd f$ と書くことにします！)

- 何か適当に集合 X を持ってきて、対象を X の任意の元とし、
  射を恒等射だけ形式的に取るものとすると、自動的に
  圏が出来ます！ (合成は自明なものだけになります。恒等射は自分と合成しても恒等射)
  このように恒等射しかない圏を疎な圏と言い、
  discrete category
  集合と疎な圏は同一視できます。
  ここで作ったような圏を集合と同じく X と書きます。

・適当な集合 X について、X 上の二項関係 binary relation $\leq \subseteq X^2$ が

(この記事では $\subset$ ではなく $\subseteq$ と書きます) ─ (X と X の直積 $X \times X = X^2$ の部分集合だ、ということです)

(細かいことは気にしないで!)

推移則 transitive law：任意の $x \leq y$, $y \leq z$ なる $x, y, z \in X$ について、$x \leq z$ が成立する。

反射則 reflexive law：任意の $x \in X$ について、$x \leq x$

(全順序と同じ読みなので注意)

reflective じゃありません

を満たすとき $\leq$ は擬順序関係 pseudo-order relation だとか前順序関係 preorder relation だとか言います!

更に反対称則 antisymmetric law：任意の $x \leq y$, $y \leq x$ を満たす $x, y \in X$ について $x = y$

を満たす場合は(半)順序関係 (partial) order relation だと言います。

このとき、対象を X の任意の元、射は $x, y \in X$ が $x \leq y$ を満たすとき、そのときに限り、$x \leq y$ という形式的な射を x から y へ張り、合成と恒等射は自明なものに限るとすると、やはり、圏が出来ます! このように、任意の対象 X, Y について、($X = Y$ でもよい) X から Y への射が存在しないかただ一つであるような圏を痩せた圏 slim category と言います。擬順序と痩せた圏は同一視できます。

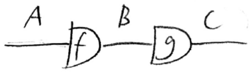
……とにかく圏には色々あるのです!

絵

さて！お絵描きしましょう！

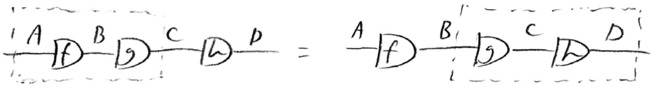
射 $f:A\to B$ は  と書きます！

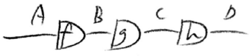
そして射 $f:A\to B$ と $g:B\to C$ との合成は

 と書きます！

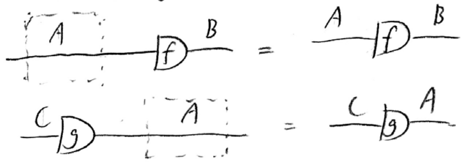
$\mathrm{cod}\,f=\mathrm{dom}\,g$ というのが線の連なりで簡潔に表されます！

そして、次の二つの条件も絵の上で自明なものとなります。

・結合則：

——だから  と書いてOK！

・恒等射の存在：Aの恒等射を  と書くと、



あまりにも簡単ですね！

——しかし！これに満足していては

圏論の世界に踏み入れたことにすらなりません！

圏論は関手と自然変換を扱ってからが

本番なのです！

関手

関手は複数の圏を扱えます！ ここが大事なのです！
functor

定義

圏 $\mathbb{C}$ から圏 $\mathbb{D}$ への関手 F とは、（このとき $F: \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ と書きます）

（圏は $\mathbb{C}, \mathbb{D}, \mathbb{E}$ で表すことが多いです）

$\mathbb{C}$ の任意の対象 A を $\mathbb{D}$ のある対象 $\underset{F}{\underset{\triangledown}{A}}$ へと写し、（普通 $F(A)$ と書きます）

$\mathbb{C}$ の任意の射 $f: A \to B$ を $\mathbb{D}$ のある射 $\underset{F}{\underset{\triangledown}{f}} : \underbrace{\underset{F}{\underset{\triangledown}{A}} \to \underset{F}{\underset{\triangledown}{B}}}_{\text{重要！}}$

へと写し、かつ以下の条件を満たすもののことです：

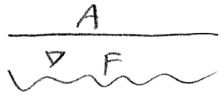
- 合成の保存（preservation）：$f, g \in \mathbb{C}_1$, $\mathrm{cod}\, f = \mathrm{dom}\, g$ のとき、
$$\underset{F}{\underset{\triangledown}{(f \rhd g)}} = \left(\underset{F}{\underset{\triangledown}{f}}\right) \rhd \left(\underset{F}{\underset{\triangledown}{g}}\right)$$
- 恒等射の保存：$A \in \mathbb{C}_0$ に対し、
$$\underset{F}{\underset{\triangledown}{{}^{A}\mathrm{id}}} = {}^{\underset{F}{\underset{\triangledown}{A}}}\mathrm{id} \quad \left(: \underset{F}{\underset{\triangledown}{A}} \to \underset{F}{\underset{\triangledown}{A}} \right)$$

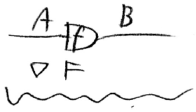
$\underset{F}{\underset{\triangledown}{A}}$ や $\underset{F}{\underset{\triangledown}{f}}$ は省略して A_F とか f_F とも書くことにします。

関手の例を出すのが面倒なので、とりあえずお絵描きしましょう。

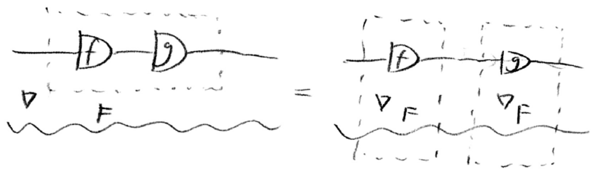
絵

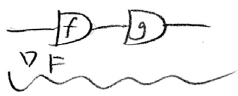
関手は  と表します。

A
▽
F
は  となり、

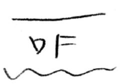
f: A→B に対する
f
▽
F
は  となります。

二つの条件はかなり自明なものとなります。

・合成の保存： 

ゆえに  と書いてOK！

・恒等射の保存： 

もちろん  と書いてOK！

こうしてみると、関手ってかなり単純だな〜と思ってもらえると思います！お絵描きとしては横の広がりだけでなく縦の広がりも出ました。これは大進歩です！

自然変換

ここが一番楽しい部分です！

圏から圏への関手……の次は、

関手から関手への自然変換です！

natural transformation

定義

圏$\mathbb{C}$から圏$\mathbb{D}$への二つの関手 $F, G : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ が

あるとき、FからGへの自然変換 $\alpha : F \to G$ とは、

自然変換はギリシア文字で表すことが多いです

$\mathbb{C}$の各対象Aに対し射 $\begin{smallmatrix}A\\ \triangledown\\ \alpha\end{smallmatrix} : \begin{smallmatrix}A\\ \triangledown\\ F\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}A\\ \triangledown\\ G\end{smallmatrix}$ を割り当てる

普通は α_A と書きます

もののうち、以下の条件を満たすもののことです：

- $\mathbb{C}$の任意の射 $f : A \to B$ に対し、

$$\begin{pmatrix}f\\ \triangledown\\ F\end{pmatrix} \triangleright \begin{pmatrix}B\\ \triangledown\\ \alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A\\ \triangledown\\ \alpha\end{pmatrix} \triangleright \begin{pmatrix}f\\ \triangledown\\ F\end{pmatrix}$$

が成立する。（ゆえにこれを $\begin{smallmatrix}f\\ \triangledown\\ \alpha\end{smallmatrix}$ と書いてよい。）

$\begin{smallmatrix}A\\ \triangledown\\ \alpha\end{smallmatrix}$ や $\begin{smallmatrix}f\\ \triangledown\\ \alpha\end{smallmatrix}$ は $A\alpha$ や $f\alpha$ とも書くことにします。

少し不思議な定義だな〜と思うかもしれません。

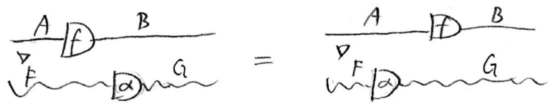
が！ 絵を描けばすぐに納得できます！

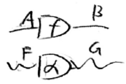
絵

自然変換 $\alpha : F \to G$ を 

と書きます。

このとき、例の条件は



ゆえに 

と書いてOK!

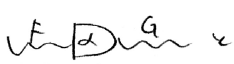
となります!

ただするする滑らしているだけですね!
水平合成というものも定義しておきますが、
絵を描けばこれも分かるはずです。

定義

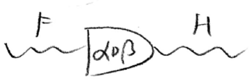
関手 $F, G, H : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ と自然変換 $\alpha : F \to G$, $\beta : G \to H$
について、α と β の水平合成 $\alpha \rhd \beta : F \to H$ とは、 (普通 $\beta \circ \alpha$ と書く)
horizontal composite
任意の $A \in \mathbb{C}$ について $\begin{pmatrix} A \\ \triangledown \\ \alpha \rhd \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ \triangledown \\ \alpha \end{pmatrix} \rhd \begin{pmatrix} A \\ \triangledown \\ \beta \end{pmatrix}$ となるものです!

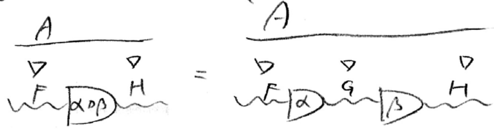
絵



と


に対し、



は


を満たす。

関手の合成と自然変換の垂直合成

縦方向への広がりは留まるところを知りません！

定義

関手 $F:\mathbb{C}\to\mathbb{D}$ と $G:\mathbb{D}\to\mathbb{E}$ があるとき、

$$\begin{array}{c}A\\ \triangledown\\ \left(\begin{array}{c}F\\ \triangledown\\ G\end{array}\right)\end{array} = \begin{array}{c}\left(\begin{array}{c}A\\ \triangledown\\ F\end{array}\right)\\ \triangledown\\ G\end{array}, \qquad \begin{array}{c}f\\ \triangledown\\ \left(\begin{array}{c}F\\ \triangledown\\ G\end{array}\right)\end{array} = \begin{array}{c}\left(\begin{array}{c}f\\ \triangledown\\ F\end{array}\right)\\ \triangledown\\ G\end{array}$$

とすることで関手 $\begin{array}{c}F\\ \triangledown\\ G\end{array}:\mathbb{C}\to\mathbb{E}$ が作れます。（普通 $G\circ F$ と書く）

これを F と G の合成と言います。

また、関手 $F,G:\mathbb{C}\to\mathbb{D}$, $H,K:\mathbb{D}\to\mathbb{E}$ と
自然変換 $\alpha:F\to G$, $\beta:H\to K$ があるとき、

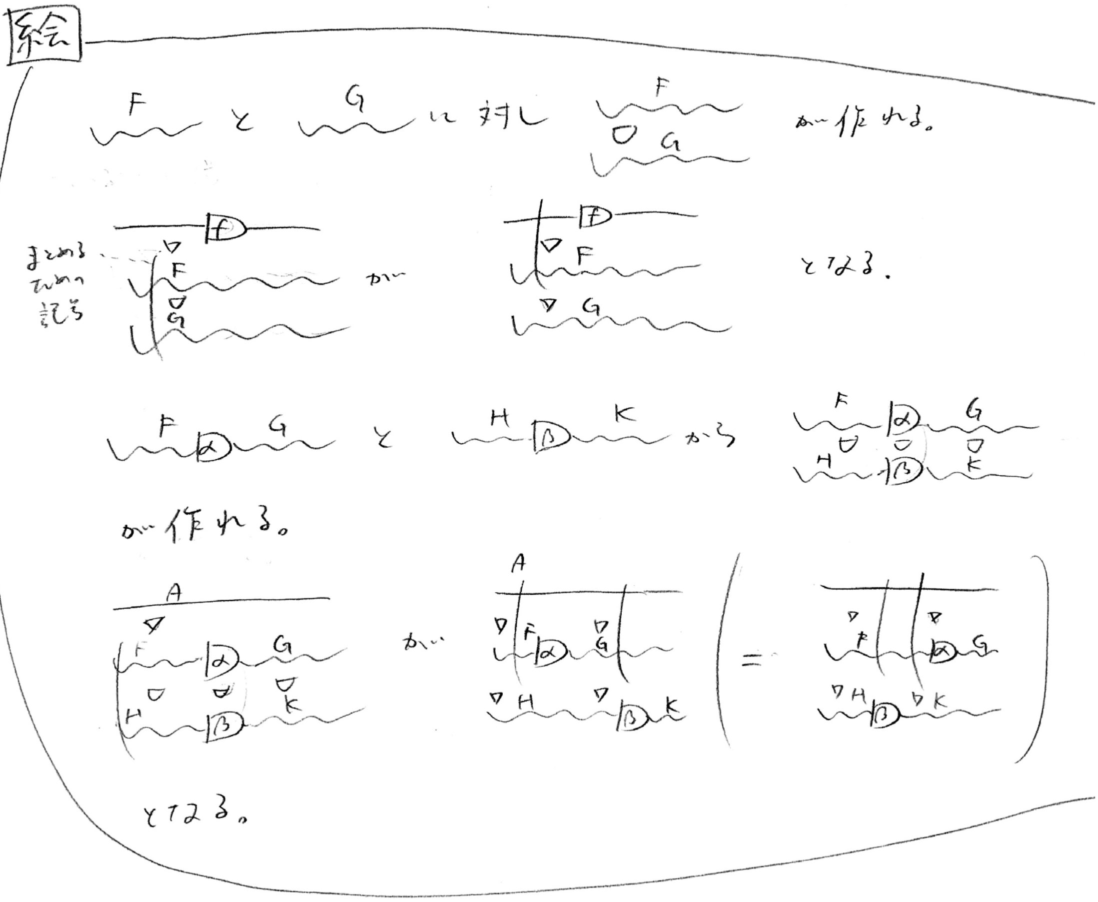
$$\begin{array}{c}A\\ \triangledown\\ \left(\begin{array}{c}\alpha\\ \triangledown\\ \beta\end{array}\right)\end{array} = \begin{array}{c}\left(\begin{array}{c}A\\ \triangledown\\ \alpha\end{array}\right)\\ \triangledown\\ H\end{array} \;D\; \begin{array}{c}\left(\begin{array}{c}A\\ \triangledown\\ G\end{array}\right)\\ \triangledown\\ \beta\end{array} \quad \left(= \begin{array}{c}\left(\begin{array}{c}A\\ \triangledown\\ F\end{array}\right)\\ \triangledown\\ \beta\end{array} \;D\; \begin{array}{c}\left(\begin{array}{c}A\\ \triangledown\\ \alpha\end{array}\right)\\ \triangledown\\ K\end{array}\right)$$

とすることで自然変換 $\begin{array}{c}\alpha\\ \triangledown\\ \beta\end{array}:\begin{array}{c}F\\ \triangledown\\ H\end{array}\to\begin{array}{c}G\\ \triangledown\\ K\end{array}$ が作れます。

普通 $\beta\cdot\alpha$ と書きます。

これを α と β の垂直合成 (vertical composite) と言います。

さてさてお絵描きしましょう！



そろそろ▽とか□とか面倒だな……と思ったら
良い兆候です！

自然変換が分かっただけでもかなりの進歩ですが、
これをさらに拡張した **両自然変換** が分かると
かなり便利です。ちょっと複雑ですが……絵の助けを借りれば
大幅にイメージしやすくなるでしょう！

両自然変換

両自然変換 —— は名前すら知らない人も多そう
dinatural transformation
ですが、すごく便利な道具です！紹介します！

定義

まず、圏 $\mathbb{C}$ があるとき、各射の dom と cod を入れ替えて、
$f \triangleright g$ を $g \triangleright f$ に変えても圏ができますね！これを
圏 $\mathbb{C}$ の 双対圏 とか 逆圏 とかいって、$\mathbb{C}^{op}$ と書きます。
dual category　opposite category

あと、圏 $\mathbb{C}$ と $\mathbb{D}$ があるとき、対象が $\mathbb{C}$ の対象と $\mathbb{D}$ の対象との
組で、射が $\mathbb{C}$ の射と $\mathbb{D}$ の射との組で、合成と恒等射は
想像が付く感じになるような圏が作れます。これを、
$\mathbb{C}$ と $\mathbb{D}$ の 積 といい、$\mathbb{C} \times \mathbb{D}$ と書きます。
product

さて！関手 $F, G : \mathbb{C}^{op} \times \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ があるとします。
両自然変換 $\alpha : F \to G$ とは、任意の $\mathbb{C}$ の対象 A
に対して射 ${}^{A}\alpha : {}^{(A,A)}F \to {}^{(A,A)}G$ を割り当てるもののうち
以下の条件を満たすもののことです！

- 任意の $\mathbb{C}$ の射 $f : A \to B$ に対し、

$$
\begin{aligned}
&{}^{(f,A)}F \triangleright {}^{A}\alpha \triangleright {}^{(A,f)}F \\
&= {}^{(B,f)}F \triangleright {}^{B}\alpha \triangleright {}^{(f,B)}F
\end{aligned}
$$

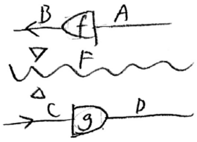
が成立する。

絵

絵を描けば……分かるはず！　また $F, G : \mathbb{C}^{op} \times \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ とします。

FとGには実質的に二つ引数があります。

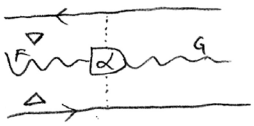
これを



という感じで書きます！

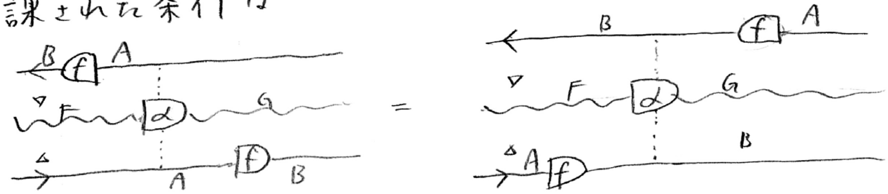
（ここで、$f : A \to B$, $g : C \to D$ です。双対圏なので逆向きなのです。）
$\mathbb{C}$において

さて、関手 $F, G : \mathbb{C}^{op} \times \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ に対する両自然変換 $\alpha : F \to G$ は



という感じになります。

そして課された条件は



となります。今度は単純なスライドでなくて、上下で同時に同じ射 $\boxed{f}$ が通過するときはスライドできる、という感じです。

説明のスピードがどんどん上がりますが、

まあ、絵を見ればだいぶイメージが掴めるのではないでしょうか。……とにかく先へ行きましょう！

随伴

圏論において随伴もなくてはならないものです。
　　　　　　　adjunction
かなり多くの概念が○○の左随伴関手とか
　　　　　　　　　　　　left adjoint functor
右随伴関手とかいえば片付きます。
right adjoint functor

「随伴」という一般性の高い概念の中に、
実に豊かな性質が既に含まれているのです！
—— 詳は尽きませんが ここでは簡単に導入しておきます。

定義：自然同型を用いる版

圏 $\mathbb{C}$ に対し、$\mathbb{C}_1$ の部分集合全体を含む族くらいを考えておきます。この集合族を S として、S の上に前述の通り写像を射とする圏が作れます。この圏も S と書きましょう。

このときホム集合を作る $(A,B)_{\mathbb{C}}$ は関手

$$(-,-)_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^{op} \times \mathbb{C} \to S$$

と見なせます。この $(-,-)_{\mathbb{C}}$ をホム関手といいます。
どうしてなのかは考えてみましょう。

さて、関手 $L : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ と $R : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ があるとします。

自然同型
natural isomorphism
$$\Phi : (-L, -)_{\mathbb{D}} \simeq (-, -R)_{\mathbb{C}}$$

（それぞれ $\mathbb{C}^{op} \times \mathbb{D} \to S$ の関手です。
S は十分大きい集合族とします。）

が存在するとき、L と R は随伴であるといい、
L は R の左随伴関手だとか R は L の右随伴関手だとかいいます。また、$L \dashv R$ と書きます。

Φが自然同型だというのは、
Φは自然変換 $\Phi : {}^{(^{-}L,-)}\mathbb{D} \to {}^{(-,^{-}R)}\mathbb{C}$ で
別に自然変換 $\Phi^{-1} : {}^{(-,^{-}R)}\mathbb{C} \to {}^{(^{-}L,-)}\mathbb{D}$ もあって、
$\Phi \mathbin{\mathrm{D}} \Phi^{-1} = {}^{(^{-}L,-)_{\mathbb{D}}}id$ かつ $\Phi^{-1} \mathbin{\mathrm{D}} \Phi = {}^{(-,^{-}R)_{\mathbb{C}}}id$
を満たす（即ちΦとΦ^{-1}は互いに逆だ）ということです。
ちなみに、一般に関手 $F : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ に対し ${}^{-F}id : F \to F$
という自然変換をFの恒等変換(identity transformation)といいます。普通 1_F と書きます

随伴には他にも定義の仕方があります。等価な定義です！

定義：ジグザグする版

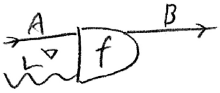
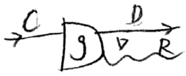
関手 $L : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ と $R : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ があるとします。
自然変換 $\varepsilon : R \mathbin{\mathrm{D}} L \to Id_{\mathbb{C}}$ と
(elimination より)
$\eta : Id_{\mathbb{D}} \to L \mathbin{\mathrm{D}} R$ で条件（ジグザグ則とも呼ばれる）
(introduction より)

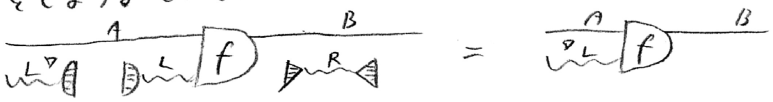
- $\begin{pmatrix} \eta \\ \triangledown \\ {}^{-L}id \end{pmatrix} \mathbin{\mathrm{D}} \begin{pmatrix} {}^{-L}id \\ \triangledown \\ \varepsilon \end{pmatrix} = {}^{-L}id$
- $\begin{pmatrix} {}^{-R}id \\ \triangledown \\ \eta \end{pmatrix} \mathbin{\mathrm{D}} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \triangledown \\ {}^{-L}id \end{pmatrix} = {}^{-R}id$

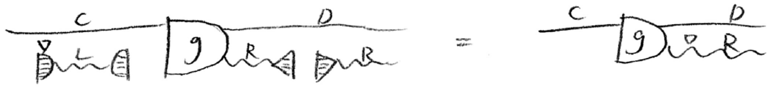
を満たすものが存在するとき、$L \dashv R$ と書きます。
εは余単位(counit)、ηは単位(unit)といいます。
なお、$Id_{\mathbb{C}}$は$\mathbb{C}$から$\mathbb{C}$への関手で、そのまま写すもののことで、恒等関手 identity functor といいます。

——と、二つ定義を出しましたが、両者が等価だとは
パッと見では分からないでしょう。でも、また絵描き
すれば、分かってくるはずです！

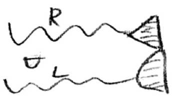
絵

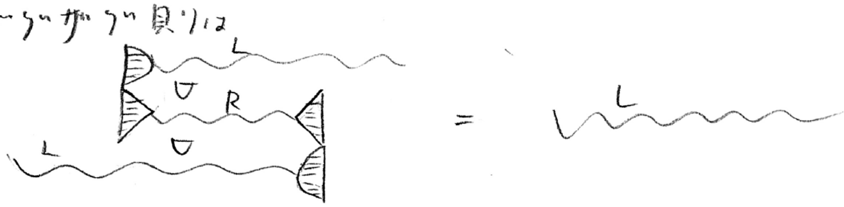
亜は射  を射 
に写すとします。 が亜ということです。
（亜の自然性はこの描き方で自動的に実現されます。）
また、亜'は射  を射 
に写すとします。このとき

・

・

が残りの制約です。

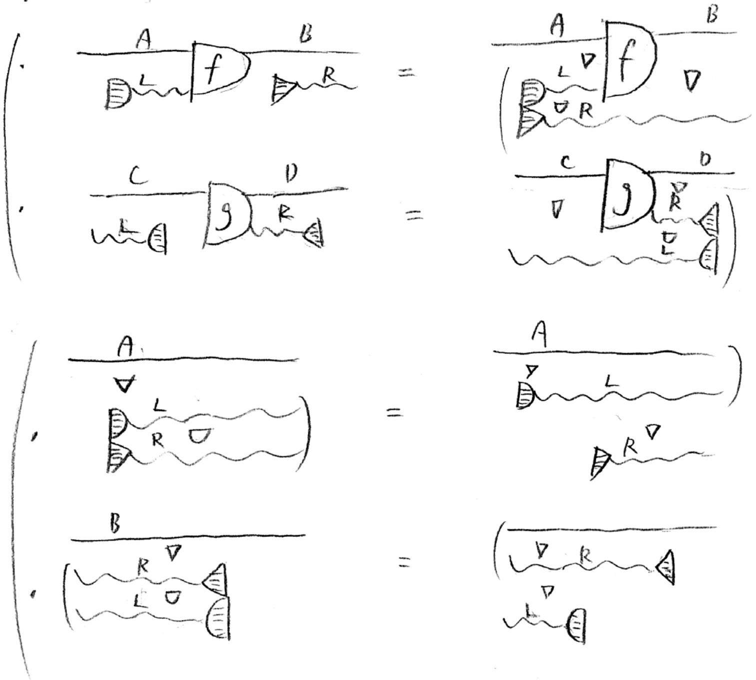
また、ε を ，η を  とします。
（恒等関手は無いものとしていいのです。）
このとき、ジグザグ則は

・

・

となります。（まさにジグザグですね！）

両形式の関係性は



とすることで分かります。それぞれの二つの条件が対応していることもよく分かるはずです！

ここまで来たら、だいぶ随伴が面白く感じてきたのではないでしょうか？ ……この先にもっともっと豊かな奥深い広がりがあるのですが、とりあえずこの辺にしておきます。

補足 — ある関手の左あるいは右随伴関手は複数存在しえますが、それらはある意味で同一視できるので、気にしないことが多いです。（一つも存在しないこともあります！）

極限的構成

まあ、百聞は一見に如かず！
見ていきましょう！

定義

圏 $\mathbb{C}$ の中で考えます。対象 A, B について、

A と B の積 $A \times B$ とは、
product　　（これも $\mathbb{C}$ の対象）

射 $proj_L : A \times B \to A$ と $proj_R : A \times B \to B$ があり、
projection の略　　二つの射は射影ともいう

任意の射 $f : C \to A$ と $g : C \to B$ に対して

・ $f = \langle f, g \rangle \triangleright proj_L$, $g = \langle f, g \rangle \triangleright proj_R$

を満たす射 $\langle f, g \rangle : C \to A \times B$ がただ一つ存在するもののことです。

……なお $A \times B$ は複数存在するかもしれないが、それらはある意味で同一視できるので気にしない。もちろん一つも存在しないこともあります。

$\mathbb{C}$ の任意の2対象 A, B に対し積 $A \times B$ が存在するとき、関手 $\times : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が作れます。射については $f : A \to B$, $g : C \to D$ として、$A \times C$ の射影を $proj_L$ と $proj_R$ として、

$$f \times g := \langle proj_L \triangleright f, proj_R \triangleright g \rangle$$

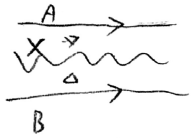
とすればよいです。

なお圏の積もここでの積として見ることができます！

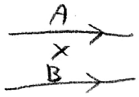
適切な「圏の圏」を考えてみましょう！

絵

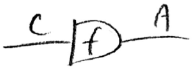
とりあえず関手 $\times : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ があることにします。

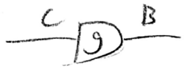


と書いてもいいところですが、

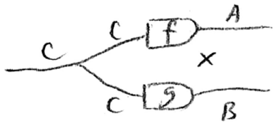


と略して書くことにします。

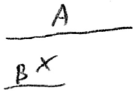
射 

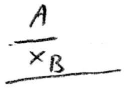
と 

に対し、

$\langle f, g\rangle$ を 

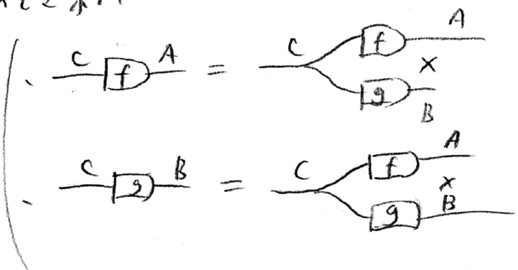
と書くことにします。

また、proj_L を 

, proj_R を 

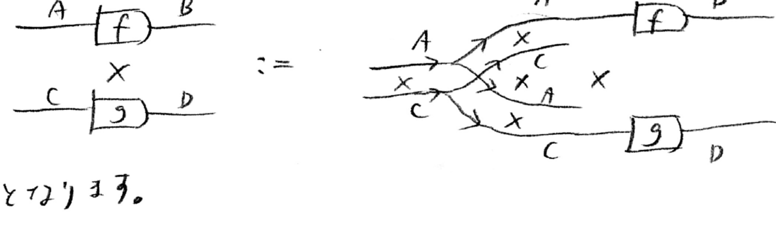
と書くことにします。

このとき条件の等式は



となります。（「ただ一つ存在する」等の条件は絵図では描きづらくて、可換図式を使う方が楽です。）

また、



となります。

ここから冪対象もすぐに定義できます!
power object

定義

圏 $\mathbb{C}$ が積関手 $\times : \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を持つとする。

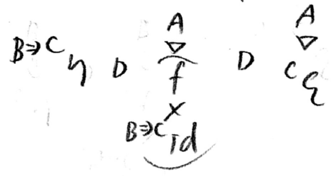
対象 A に対し関手 $A\times - : \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ が作れます。

その右随伴関手を $A\Rightarrow - : \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ と書き、

$A\Rightarrow B$ を A と B の冪対象とか指数対象とか言います。
exponential object

$f : A\to B$ に対し

$f\Rightarrow C :=$



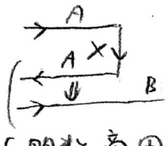
とすることで、関手 $\Rightarrow : \underbrace{\mathbb{C}^{op}}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ が作れます。

双対圏が登場します!

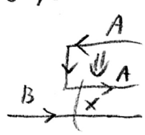
絵

普通の随伴での書き方を微修正します。

$^B\varepsilon$ は



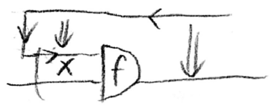
となり、$^B\eta$ は



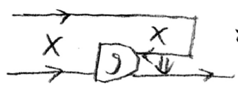
となります。

(関数適用に相当)　(引数をそのまま返すことに相当)

Φ は

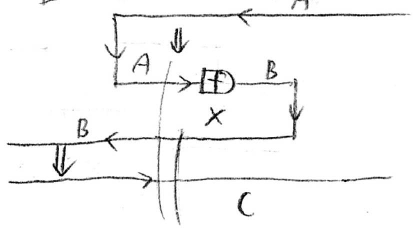


となり、Φ^{-1} は



となります。

$f\Rightarrow C$ は



となります。

極限

積をさらに一般化した概念が極限(limit)です。

とはいえまあ、丁寧に理解していけば分かるはずです。

定義

圏 $\mathbb{J}$ と $\mathbb{C}$ があり、関手 $F : \mathbb{J} \to \mathbb{C}$ があるとします。

図式と呼ばれることもあります
(極限関係の文脈では特に)

F の錐(cone)とは、$\mathbb{C}$ の対象 A と、$\mathbb{J}$ の各対象 X に対する
(F への錐ともいいます)

射 ${}^X\alpha : A \to \overset{X}{\underset{F}{\triangledown}}$ との組のうち、$\mathbb{J}$ の各射 $f : X \to Y$ に対して
(ある種の自然変換)

${}^X\alpha \triangleright \overset{f}{\underset{F}{\triangledown}} = {}^Y\alpha$ を満たすもののことです。

F の極限 $({}^F\mathit{lim}, {}^F\pi)$ とは、F の錐であり、

かつ F の任意の錐 (A, α) に対して、

・任意の $\mathbb{J}$ の対象 X に対し ${}^X\alpha = \langle\alpha\rangle \triangleright \overset{X}{\underset{F\pi}{\triangledown}}$ が成立する

を満たす射 $\langle\alpha\rangle : A \to {}^F\mathit{lim}$ が一意に存在する

もののことです。${}^F\mathit{lim}$ を F の極限対象(あるいは単に極限)、

${}^F\pi$ を射影といいます。(普通は $\lim F$ と書きます)

重要な性質としては、一意性より導かれる以下のものがあります。

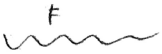
・任意の射(自然変換ではない) f に対し、

$$\langle f \triangleright \alpha \rangle = f \triangleright \langle \alpha \rangle$$

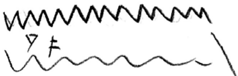
・$$\langle {}^F\pi \rangle = {}^{{}^F\mathit{lim}}\mathit{id}$$

では絵を描きましょう!

絵

関手 F が 

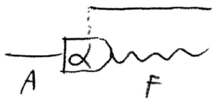
となっているとき、

$^F\lim$ は 

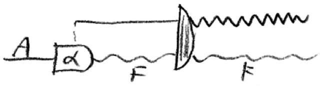
と書きます。

(引数の部分をギザギザで潰すのです。)

(自然性が閉じこめられている感じ)

α が 

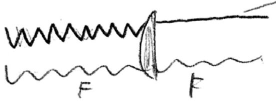
で表されるとき、

$\langle \alpha \rangle$ は 

と書きます。

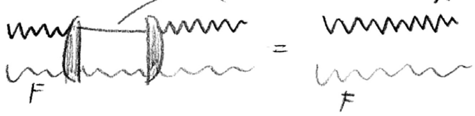
($\langle f \triangleright \alpha \rangle = f \triangleright \alpha$ なので、左側の閉じ方は明示しません)

(自然性を解放する感じ)

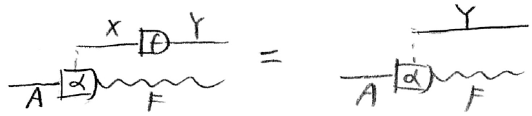
そして、$^F\pi$ は 

となります。

(この線は何の対象にでもなれる
——という感じです)

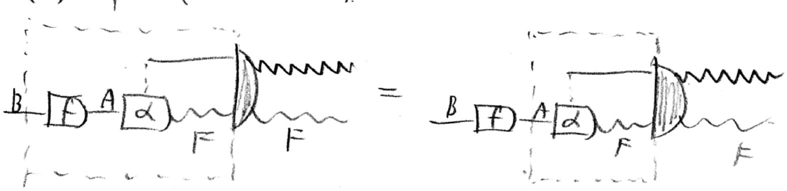
$\langle {}^F\pi \rangle = {}^F\lim\, id$ より、

となります。

なお α の自然性は 

となります。(スライドしたら飲み込まれるのです。)

$\langle f \triangleright \alpha \rangle = f \triangleright \langle \alpha \rangle$ は $f : B \to A$ として



という感じです。

ちょっと難しいかもしれないですが、頑張ってください。

エンド

極限をさらに一般化したのがエンド(end)です。
(……厳密には極限の一種としてエンドを作ることもできますが。)
ここでようやく両自然変換が活躍します。

定義

圏 $\mathbb{J}$ と $\mathbb{C}$ があり関手 $F : \mathbb{J}^{op} \times \mathbb{J} \to \mathbb{C}$ があるとします。

F の楔(くさび, wedge)とは、$\mathbb{C}$ の対象 A と $\mathbb{J}$ の各対象 X に対する
射 ${}^{X}\alpha : A \to {}^{(X,X)}F$ との組のうち、
(ある種の両自然変換)
$\mathbb{J}$ の各射 $f : X \to Y$ に対して ${}^{Y}\alpha \triangleright {}^{(f,Y)}F = {}^{X}\alpha \triangleright {}^{(X,f)}F$
を満たすもののことです。

F のエンド $({}^{F}\!\int, {}^{F}\pi)$ とは、F の楔であり、かつ
(普通は $\int_{C} F(X,X)$ と書きます)
F の任意の楔 (A, α) に対して、
・任意の $\mathbb{J}$ の対象 X に対し ${}^{X}\alpha = \langle\alpha\rangle \triangleright \underset{F\pi}{\overset{X}{\square}}$ が成立する
を満たす射 $\langle\alpha\rangle : A \to {}^{F}\!\int$ が一意に存在するもののことです。
${}^{F}\!\int$ 自体をエンドと言ってしまうこともあります。

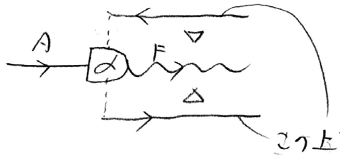
エンドについても極限と同様の性質があります。

- 任意の射(両自然変換でない) f に対し、
  $\langle f \triangleright \alpha \rangle = f \triangleright \langle\alpha\rangle$
- $\langle {}^{F}\pi \rangle = {}^{F}\!\int_{id}$

では再びお絵描きしましょう!

絵

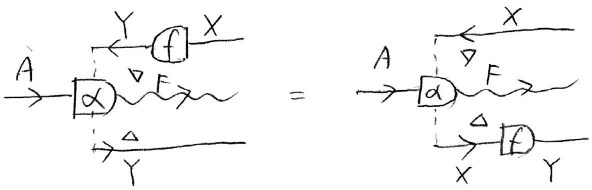
まず Fの楔 (A, α) について。αは



という感じです。

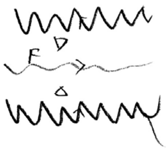
この上下の2本の線は、同じ対象になる(けど、なんでもよい)

そしてαの両自然性は、$f: X \to Y$として、

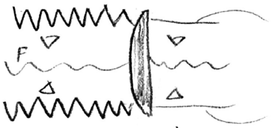


となります。 ⓕ が ┆ を伝って移動する感じです！

${}^{F}\!\int$ は



となり、${}^{F}\pi$ は

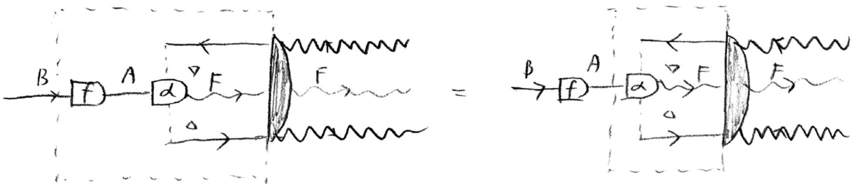


同じ対象！

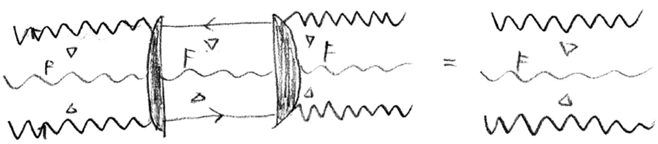
(両自然性を閉じ込めている感じ)

(両自然性を解放する感じ)

$\langle f \triangleright \alpha \rangle = f \triangleright \langle \alpha \rangle$ は $f: B \to A$ として



となり、$\langle {}^{F}\pi \rangle = {}^{F}\!\int_{id}$ は



となります。

絵で証明しよう

System Fと呼ばれるラムダ計算
(多相ラムダ計算、二階ラムダ計算ともいう)
では、以下の同型が一般の型 A について成立します:

・ $A \simeq \forall X. (A \to X) \to X$

(Haskellでもいくつかの制約のもと同様のことが言えます。)

圏論においても(右辺が存在すれば)以下の
関係式が任意の対象 A について一般に成立します。

・ $A \simeq {}^{F}\!\int$ (ただし $(f,g)F := (A \Rightarrow f) \Rightarrow g$)

これはSystem Fにおける性質を圏論の言葉に
翻訳しただけのものです。

最後に、この性質を絵を用いて証明しましょう!

予備知識として。
圏 $\mathbb{C}$ 内で考えます。対象 A, B について、

・ $f \circ g = {}^{A}\mathrm{id}$ かつ $g \circ f = {}^{B}\mathrm{id}$

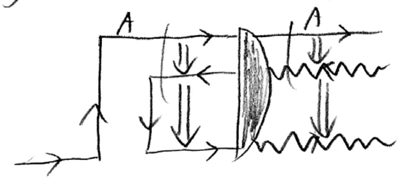
を満たす射 $f: A \to B$ と $g: B \to A$ が存在するとき、
A と B は同型(isomorphic)であるといい、$A \simeq B$ と書きます。

では早速証明しましょう!

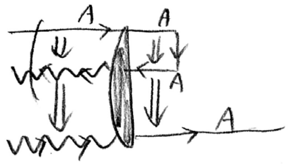
証明

（細かいことは簡略化するので各自補ってください）

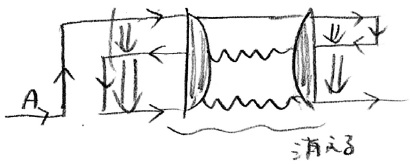
Aから ${}^{F}\!\int$ への射 f を

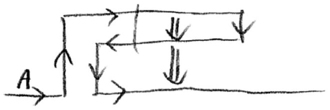
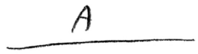


とし、${}^{F}\!\int$ から A への射 g を

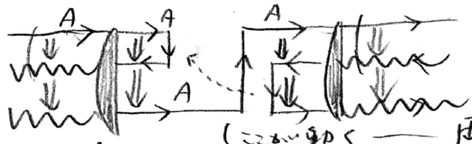


とします。$f \rhd g = {}^{A}id$ は

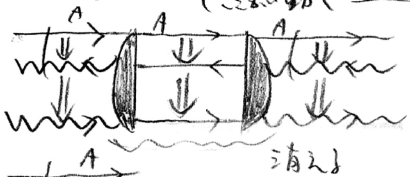


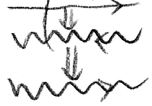
=  = 

より、$g \rhd f = {}^{F}\!\int id$ は



（ここが動く ― 両自然性より）

= 

= 

より示せるので、$A \simeq {}^{F}\!\int$ が言えます。

最後に

こんな調子で、絵を使えば
少し難しい定理でも、見通しのよい
証明ができるようになります！

ただ概念を理解したつもりになるための
道具ではなくて、より奥深い世界へと
向かうための道具としても絵は役立つのです！

本当はもっともっと書きたいことはたくさんあります
……が、やはり手も疲れますから、
今回はこの辺にしておきます。（もう少し勉強してから書くつもりです！）

この記事が好評を博したら、
続編が出るかも、しれません！

紐図とか絵算とかいうものは記法に様々な
流派がありますが、ここで紹介した記法は
手書きのしやすさと論理の明快さを重視したものです。
記号類の使い方も絵に似せるように独自のものを
採用しました。
ちょっと変わってるけどいいな～と思ってもらえれば
嬉しいです。

最後まで読んでくださり、
ありがとうございました！