

计算机视觉中图匹配研究进展: 从二图匹配迈向多图匹配

严骏驰^{1,2†}, 杨小康²

(1. 上海交通大学 计算机科学与工程系, 上海 200240; 2. 上海交通大学 人工智能研究院, 上海 200240)

摘要: 图匹配试图求解二图或多图之间节点的对应关系, 在图像图形领域, 图匹配是一个历久弥新的基础性问题. 从优化的角度来看, 图匹配问题是一个组合优化问题, 且在一般情形下具有非确定性多项式复杂程度(non-deterministic polynomial, NP)难度的性质. 在过去数十年间, 出现了大量求解二图匹配的近似算法, 并在各个领域得到了较为广泛的应用. 然而, 受限于优化问题本身的理论困难和实际应用中数据质量的种种限制, 各二图匹配算法在匹配精度上的性能日益趋近饱和. 相比之下, 由于引入了更多信息且往往更符合实际问题的设定, 多图的协同匹配则逐渐成为了一个新兴且重要的研究方向. 本文首先介绍了经典的二图匹配方法, 随后着重介绍近年来多图匹配方法的最新进展和相关工作. 最后, 本文讨论了图匹配未来的发展.

关键词: 图匹配; 多图匹配; 增量匹配; 高阶图匹配

引用格式: 严骏驰, 杨小康. 计算机视觉中的图匹配研究进展: 从二图匹配迈向多图匹配. 控制理论与应用, 2018, 35(12): 1715 – 1724

中图分类号: TP273 文献标识码: A

Recent advance on graph matching in computer vision: from two-graph matching to multi-graph matching

YAN Jun-chi^{1,2†}, YANG Xiao-kang²

(1. Department of Computer Science and Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China;
2. Artificial Intelligence Institute, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: Graph matching refers to the problem of finding vertex correspondence among two or multiple graphs, which is a fundamental problem in computer vision and computer graphics. As a combinational optimization problem, graph matching is NP-hard in general settings. Classic two-graph matching has met its limitations in matching accuracy because of its NP nature and limits in data qualities. In contrast to the classic two-graph matching setting, until recently matching multiple graphs with consistent correspondences start to emerge for their practical usefulness and methodological potential for further innovation. Starting by a brief introduction for traditional two-graph matching, we walk through the recent development of multiple graph matching methods, including details for both models and algorithms. Finally, several directions for future work are discussed.

Key words: graph matching; multi-graph matching; incremental matching; higher-order graph matching

Citation: YAN Junchi, YANG Xiaokang. Recent advance on graph matching in computer vision: from two-graph matching to multi-graph matching. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(12): 1715 – 1724

1 引言(Introduction)

相较于向量形式, 图的形式在刻画实际目标时往往具有更为灵活和丰富的表达能力. 特别是在考虑到关系结构信息时, 图结构的表达优势更为明显. 对于图数据的处理, 一个常见且实用的技术是图匹配, 即试图求解两个乃至多个图间节点的对应关系(一般来说, 假设节点对应关系是一对一的). 与传统基于局部点特征、坐标等信息的配准方法不同, 图匹配旨在通

过考察单阶节点信息和高阶边信息(往往考虑二阶边), 寻找整体相似度最大的节点对来求解匹配关系. 事实上, 在引入了二阶和更高阶的边信息后, 图匹配成为了一个具有非确定性多项式复杂程度(non-deterministic polynomial, NP)难度的开放性课题. 相比之下, 基于点相似度的点匹配问题, 则可以通过匈牙利算法^[1]等算法获得多项式时间复杂度的全局最优解.

由于其对噪声和形变有较好的鲁棒性, 图匹配被

收稿日期: 2018-06-29; 录用日期: 2018-12-20.

[†]通信作者. E-mail: yanjunchi@sjtu.edu.cn; Tel.: +86 15021203817.

本文责任编辑: 刘智勇.

国家自然科学基金项目(61602176)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61602176).

广泛应用于图像^[2]、图形^[3]、基因^[4]等领域的数据分析。近年来,相关图匹配技术更被用于跨社交网络的对应节点匹配^[5]。在许多场合中,图匹配技术被作为一个度量结构之间相似度的基础功能模块,被用于诸如图像识别、图形聚类等应用中。

在过去几十年中,图匹配问题得到了世界各地学者的广泛研究。由于其内在的NP难性质,多数方法力图在匹配精度和效率上取得平衡。传统方法大多聚焦于二图间的匹配这一经典场景。直到近年来,涌现出一系列关于多图协同匹配的研究工作。作者分析认为多图匹配问题具有较大的研究空间和研究紧迫性,理由如下:第一,从方法层面来看,多个包含类似或者相同结构的图数据为有效的信息融合提供了可能性。特别是当局部两个图存在较强噪声时,全局的信息融合变得更为关键。相比之下,传统的二图匹配受限于可获得信息的有限性,特别是在信息受到噪声干扰时,即使算法得到了全局最优解,未必是物理意义上的真实解。第二,从应用层面来看,在包括图像集匹配、基因集匹配等实际问题中,往往需要同时匹配多个图结构。采取简单两两匹配的做法往往不是最佳方式。

作为一个历久弥新的基础研究问题,已有研究者对图匹配的相关工作进行了梳理和综述^[6-11],涵盖了包括图核与嵌入^[12]、图同构和子图同构^[13]、图编辑距离^[14]等图匹配问题的各个子领域及延伸。相比之下,除了在综述文献^[10]中简略提及了多图匹配的问题,一系列近期的多图匹配工作^[15-22]却鲜有被现有综述提及。为了填补这方面的不足,本文重点介绍多图协同匹配最近的进展,这也一定程度上反映了目前图匹配研究的趋势。

本文主要结构如下:首先对传统的二图匹配方法及其相关概念做简要介绍,包括相似度函数、松弛技术以及求解算法等。这些内容为本文后续重点介绍多图匹配相关方法奠定了必要基础。本文重点介绍了近年来多图匹配的代表性模型和方法。最后,本文也讨论了该领域的发展方向与趋势。

2 二图匹配(Two-graph matching)

二图匹配可以被形式化为一个具有NP难性质的二次指派问题(quadratic assignment problem, QAP)。从优化的角度来看,该问题可以拆解为两个子问题:

第一,如何构建优化目标函数;

第二,如何在给定的目标函数下求解(带约束)优化问题。

第1个问题涉及如何建模相似度函数来刻画点对和边对之间的匹配合适度,而第2个问题则与优化算法更为相关。一个广泛被采用的做法是将原始离散域问题松弛到连续域进行高效求解,然后再将结果离散化,得到最终的匹配关系。

2.1 匹配目标函数(Objective function)

如前所述,图匹配试图构建节点间的对应关系,使得匹配后的两个图间相似度最大化。如同当前主流二图匹配方法,仅考虑一阶点间和二阶边间的相似度,可以很方便地通过相似度矩阵 $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n_1 n_2 \times n_1 n_2}$ 来刻画图 \mathcal{G}_1 ($|\mathcal{G}_1| = n_1$)和 \mathcal{G}_2 ($|\mathcal{G}_2| = n_2$)间的相似度信息。在该矩阵中,对角线元素记录了两图间节点相似度,而非对角元素则代表了二阶边间的相似度。令 $\mathbf{X} \in \{0, 1\}^{n_1 \times n_2}$ 为二值对应矩阵(也叫作指派矩阵),二次指派问题可以被形式化为如下的模型:

$$\begin{cases} J(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}, \\ \mathbf{X} \mathbf{1}_{n_2} = \mathbf{1}_{n_1}, \mathbf{X}^T \mathbf{1}_{n_1} \leq \mathbf{1}_{n_2}, \mathbf{X} \in \{0, 1\}^{n_1 \times n_2}, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{x} = \text{vec}(\mathbf{X})$ 是将输入矩阵 \mathbf{X} 按列向量化的结果。上式中的约束代表图 \mathcal{G}_1 中的每个节点需要在图 \mathcal{G}_2 中找到对应点。换句话说,在图 \mathcal{G}_1 中不存在无法在图 \mathcal{G}_2 中找到匹配的外点。很多图匹配工作^[23-26]采取了上述紧凑简洁的形式,一个等价而较为繁琐的版本则见诸文献^[27]。

上述形式又被称为Lawler形式的二次指派问题。此外,人们也常用到Koopmans-Beckmann形式的二次指派模型,可以被看作Lawler型的特殊形式。其具体表达式如下:

$$\begin{cases} J(\mathbf{x}) = \text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{F}_i \mathbf{X} \mathbf{F}_j) + \text{tr}(\mathbf{K}_p^T \mathbf{X}), \\ \mathbf{X} \mathbf{1}_{n_2} = \mathbf{1}_{n_1}, \mathbf{X}^T \mathbf{1}_{n_1} \leq \mathbf{1}_{n_2}, \mathbf{X} \in \{0, 1\}^{n_1 \times n_2}, \end{cases} \quad (2)$$

其中 \mathbf{F}_i 和 \mathbf{F}_j 代表两图各自的(加权)邻接矩阵,而 \mathbf{K}_p 则刻画了两图之间点与点的相似度。

进一步注意到,近年来一些基于高阶相似度信息的高阶图匹配方法^[28-32]突破了传统二阶相似度的限制,试图考察3个乃至更多节点构成的超边间的相似度,以此来引导更鲁棒的图匹配过程。通过引入张量,高阶图匹配问题可以被表述为克罗内克积形式^[33]:

$$J(\mathbf{x}) = \mathbf{H} \otimes_1 \mathbf{x} \cdots \otimes_p \mathbf{x}, \quad (3)$$

其中: \mathbf{H} 为相似度张量,而 p 则是相似度张量的阶数。一个常见的高阶图匹配技术是采用迭代方式,在每次迭代时,近似求解一个二阶图匹配问题。文献^[34]采用ADMM(alternating direction method of multipliers)算法求解超图匹配问题。而在文献^[35]中,作者提出了一种基于 $L_{1/2}$ 范数迭代重加权的高阶张量图匹配算法,力求在所构建的非凸非光滑问题上获得稀疏解且具有一定的噪声鲁棒性。而在文献^[36]中,作者提出了基于蚁群优化的高阶图匹配方法。该算法首先通过包含高阶相似度张量值计算启发因子,随后采用蚁群优化算法进行优化求解。

在求解图匹配问题时,等距(isometric)、同构(isomorphisms)和同胚(homeomorphisms)是从拓扑角度建模图匹配问题的3种主要方式。文献^[37]提出了一

种在欧式空间下将这3种图匹配问题的统一化模型. 在实验中, 作者引入了机器学习的方法获得一阶、二阶和高阶相似度的权重. 近期的工作^[38]使用图之间的函数变换建模二图匹配问题. 该工作将参数规模从 $O(m^2n^2)$ 降低到了 $O(mn)$ (m, n 分别为源图和目标图的节点数), 显著地提升了匹配效率. 而文献^[39]受到文献^[40]中最大池抗躁技术方法的启发, 提出了基于最大池图匹配的形变目标跟踪算法.

值得注意的是, 大多数图匹配工作会使用超参数指定图结构, 同时采用事先固定的相似度函数来计算与刻画点和边间的相似度. 例如在二阶图匹配工作^[25]中, 作者采用了固定已知参数的高斯核来建模相似度:

$$K_{ia,jb}(\sigma) = \exp\left(\frac{(d_{ij} - d_{ab})^2}{-\sigma^2}\right), \quad (4)$$

其中的边属性 d_{ij} , d_{ab} 往往采用欧几里得距离所定义的边长来记录. 而用于记录节点间相似度的对角线元素, 在计算机视觉领域往往采用图像特征点的描述子间的距离来刻画. 在传统方法中, 这里的超参数 σ 也是事先给定的. 近年来的一些工作^[26, 41-42]试图采用机器学习的方法去优化相似度函数中相关的超参数. 其中一个工作^[43]在总结前人研究基础上, 提出了一种较为一般的图结构相似度参数学习模型. 首先将点边相似度 $\Phi(\mathcal{G}, \mathcal{G}', \pi)$ 表述为如下形式:

$$\Phi = [\cdots s_v(a_i, a_{\pi(i)}) \cdots s_e(a_{ij}, a_{\pi(i)\pi(j)}) \cdots]^T, \quad (5)$$

其中: s_v , s_e 分别代表节点和边的相似度函数, a_i 和 a_{ij} 分别代表点和边的属性, 而 π 则代表节点对应关系, 基于上述模型, 文献^[43]将参数化相似度函数写为

$$S(\mathcal{G}, \mathcal{G}', \pi, \beta) = \beta \Phi(\mathcal{G}, \mathcal{G}', \pi),$$

其中 β 即为相似度函数的权值参数.

值得注意的是, 上述模型中的点边属性是事先给定的, 而非通过学习得到的属性. 文献^[44]则开创性地提出了在端到端深度学习框架下的点边特征提取网络训练模型. 该方法以真值匹配关系作为监督信息, 对匹配偏差进行后向传播, 更新底层特征提取的网络权值. 为了应对大规模匹配的复杂度挑战, 该工作进一步利用了相似度矩阵分解^[45], 双随机矩阵化等技术来实现可行的网络训练算法.

2.2 优化算法(Optimization algorithms)

2.2.1 连续域松弛(Continuous relaxation method)

为了避免直接在离散域求解带约束问题的困难, 很多松弛技术被提出, 以下简述3种典型策略:

- 1) 对指派矩阵进行谱松弛^[23, 46]: $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$;
- 2) 对指派矩阵进行双随机松弛^[23-24, 27]. 根据式(1), 定义域被松弛为如下连续域空间:

$$\mathbf{X} \mathbf{1}_{n_2} = \mathbf{1}_{n_1}, \mathbf{X}^T \mathbf{1}_{n_1} \leq \mathbf{1}_{n_2}, \mathbf{X} \in [0, 1]^{n_1 \times n_2}. \quad (6)$$

3) 半正定规划^[47-48]. 文献^[48]的形式如下:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{Y}} \text{tr}(\mathbf{Q}\mathbf{Y}), \\ & \text{s.t.} \begin{cases} \mathbf{Y} \succeq \mathbf{0}, \\ \text{tr}(\mathbf{A}_i \mathbf{Y}) = c_i, \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

其中约束通过一系列引入的常数矩阵 \mathbf{A}_i 和 c_i 来表达. 该模型的一个局限是新衍生变量 \mathbf{Y} 规模过大加重了复杂度:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{x}^T \\ \mathbf{x} & \mathbf{x}\mathbf{x}^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_1n_2+1) \times (n_1n_2+1)}.$$

2.2.2 离散域方法(Discrete methods)

不同于上述连续域的近似方法, 离散域方法试图直接在离散域求解带约束的组合优化问题. Leordeanu等人^[24]提出了整数固定投影点算法, 该算法试图在每次迭代中都获得可行域中的一个离散解. 一些更直接的算法则通过在离散域采样^[49-50]、禁忌搜索^[51]等启发式策略来求解.

2.2.3 路径追踪算法(Path-following paradigm)

从优化的角度来看, 路径追踪技术(又叫延拓法)也受到了很多研究的关注. Gold和Rangarajan的经典工作^[27]开创性地提出了一个确定性的模拟退火方法, 使得在连续域的解不断向离散域靠拢. 基于该思想, 一些工作在这基础上做了进一步的创新和提升^[4, 45, 52].

2.3 总结讨论(Conclusion and discussion)

在上述连续域松弛的几个方法中, 半正定规划方法由于引入了更大规模的衍生变量导致计算复杂度大增, 影响了算法的流行性. 相比之下, 谱松弛技术非常高效但精度较低. 而双随机松弛则在效率与精度之间取得了一定的平衡, 故而成为目前主流的松弛技术之一. 然而这类方法的一个缺陷是往往需要一个独立的后处理步骤, 将连续域解强行转化成离散域解. 为了避免或者缓解离散化带来的不利影响, 离散域方法试图直接在连续域求解. 最后, 路径追踪算法则试图通过调控相关参数的形式, 使得迭代过程中获得的解自动从连续域向离散域转化. 然而这样的迭代往往是较为耗时的. 随着计算能力的增强, 路径跟踪的算法因为其求解精度的优势, 正得到越来越多的关注和进一步发展.

3 多图协同匹配(Multi-graph matching)

现有的多图匹配方法大多围绕匹配一致性这一概念展开. 匹配一致性基于一个直观事实: 两图 \mathcal{G}_1 和 \mathcal{G}_2 之间直接匹配的结果应该与通过第3方图 \mathcal{G}_3 所传递的对应结果一致, 即 $\mathbf{X}_{12} = \mathbf{X}_{13}\mathbf{X}_{32}$. 在很多文献中, 该性质又被称为循环一致性(cycle consistency). 对于任意两图之间满足一一对应的多图匹配问题来说, 上述

循环一致性显然是真值匹配结果的必要条件,进而该性质被用于反映匹配精度.事实上,由于噪声和形变的存在,传统二图匹配求解过程中所遵循的相似度函数与实际问题中的真实相似度发生偏差,甚至出现真值匹配结果并不是相似度函数对应优化问题的最优值情况.除了上述数据质量的影响之外,另一个深层原因是在构建相似度函数时,难免需要进行若干超参数的人工设定,且相似度函数本身的形式也往往基于人为的模型选择.这些建模过程中带来的偏差进一步导致了相似度函数的失真.基于上述原因,匹配一致性成为了相似度之外用于评估匹配精度的一个重要指标.

本文将现有的多图匹配工作归纳为4大类:第1类方法将多图匹配问题通过迭代求解的方式转换为每次迭代中的二图匹配问题,进而可以使用现有的二图匹配算法进行迭代求解;第2类方法利用二图两两匹配的结果作为初始值,后通过后处理来满足或者逼近循环一致性的性质;第3类工作通过低秩,聚类等方式来看待多图匹配问题;第4类研究则聚焦于在线的增量式多图匹配.

3.1 基于二图匹配的迭代算法(Iterative pairwise matching based methods)

如前所述,该类方法通常显式地定义关于匹配一致性的具体指标.而文献[53–54]给出了定义:

定义 1 给定包含 N 个图样本的集合 $\{\mathcal{G}_k\}_{k=1}^N$ 以及在此基础上的一组两两匹配解

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{X}_{ij}\}_{i=1, j=i+1}^{N-1, N},$$

对于图 \mathcal{G}_k ,其单阶一致性 $C_u(k, \mathcal{X}) \in (0, 1]$ 定义为

$$C_u(k, \mathcal{X}) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \|\mathbf{X}_{ij} - \mathbf{X}_{ik} \mathbf{X}_{kj}\|_F / 2}{nN(N-1)/2}, \quad (8)$$

其中 $\|\cdot\|_F$ 是Frobenius范数.

定义 2 给定 N 个图 $\{\mathcal{G}_k\}_{k=1}^N$ 和一组两两匹配结果 \mathcal{X} ,对于给定的匹配对 $(\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_j)$,定义两两匹配一致性 $C_p(\mathbf{X}_{ij}, \mathcal{X}) \in (0, 1]$ 如下:

$$C_p(\mathbf{X}_{ij}, \mathcal{X}) = 1 - \frac{\sum_{k=1}^N \|\mathbf{X}_{ij} - \mathbf{X}_{ik} \mathbf{X}_{kj}\|_F}{2nN}. \quad (9)$$

基于上述两个定义,本文进一步介绍两个具有代表性的多图匹配方法^[53–54].其他相关方法还包括文献[15, 19]中的方法等.

3.1.1 中心化方法(Centralized methods)

该工作首先在会议论文版本^[18]被提出,后经改进扩展为期刊论文^[53].给定 N 个图样本,将多图匹配问

题形式化为如下目标函数:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^* = \arg \max_{\mathcal{X}} & \sum_{i,j=1, i \neq j}^N \mathbf{x}_{ij}^T \mathbf{K}_{ij} \mathbf{x}_{ij}, \\ \text{s.t.} & \begin{cases} \mathbf{X}_{ij} \mathbf{1}_n = \mathbf{1}_n, \\ \mathbf{1}_n^T \mathbf{X}_{ij} = \mathbf{1}_n^T, \\ \mathbf{X}_{ij} = \mathbf{X}_{ji}^T \in \{0, 1\}^{n \times n}, \\ |\mathcal{X}| = N(N-1). \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

上述表达式包含了所有两两匹配变量.为了避免冗余,引入由一个参考图 \mathcal{G}_r 所决定的一组基变量 $\{\mathbf{X}_{rk}\}_{k=1, k \neq r}^N$,则任意匹配关系可以被表达为

$$\mathbf{X}_{ij} = \mathbf{X}_{ir} \mathbf{X}_{rj}.$$

其向量形式如下:

$$\mathbf{x}_{uf} = \mathbf{F} \mathbf{x}_{ur}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{X}_{fr} \otimes \mathbf{I}. \quad (11)$$

基于上述定义,文献[18]给出了基于交替更新的多图匹配求解策略,每次迭代中更新基变量 \mathbf{x}_{ur} :

$$J(\mathbf{x}_{ur}) = \mathbf{x}_{ur}^T \mathbf{K}_{ur} \mathbf{x}_{ur} + \sum_{f=1, f \neq r, u}^N \mathbf{x}_{uf}^T \mathbf{K}_{uf} \mathbf{x}_{uf}, \quad (12)$$

根据式(11),上式可以被记作如下的二次指派形式:

$$J(\mathbf{x}_{ur}) = \mathbf{x}_{ur}^T \left(\mathbf{K}_{ur} + \sum_{f=1, f \neq r, u}^N \mathbf{F}_{fr}^T \mathbf{K}_{uf} \mathbf{F}_{fr} \right) \mathbf{x}_{ur}. \quad (13)$$

从上式可以看到,每次迭代等价求解一个标准的二图匹配问题,可以由现有的二图匹配算法直接求解:每次迭代确定要选取的更新候选图 \mathcal{G}_u ,并对其与参考图间的匹配变量 \mathbf{x}_{ur} 进行求解,直至算法收敛或者迭代次数超过某个阈值.

文献[53]一改文献[18]随机选取参考图 \mathcal{G}_r 和更新候选图 \mathcal{G}_u 的做法,提出了一个新的自适应方法:首先,参考图 \mathcal{G}_r 由最大化单图一致性指标 $C_u(k, \mathcal{X})$ (见式(8))对应的图来选取,而交替更新顺序则由最大化两两一致性 $C_p(\mathbf{X}_{ij}, \mathcal{X})$ (见式(8))所对应的图对所选取,即遵循一个假设:越“不一致”的匹配对,其匹配错误越大,越需要提早更新纠正以防止误差积累.

然而,上述星型中心式框架具有根深蒂固的脆弱性:所有信息要通过参考图来进行传递,参考图的质量影响整体匹配精度.

3.1.2 分布式合成方法(Distributed composition methods)

为了突破上述条件的限制,一个分布式协同匹配框架在文献[54]被提出.与前述中心式框架类似,该框架也采用了迭代更新的策略.不同之处在于该框架中不存在固定的中心参考图.同时,匹配一致性的约束不再是刚性约束,而是通过正则项的模式来体现,以此增强模型的灵活性.其多图匹配整体目标函数如下

式所示:

$$k^* = \arg \max_{k=1}^N (1-\lambda)J(\mathbf{X}_{ik}\mathbf{X}_{kj}) + \lambda C_p(\mathbf{X}_{ik}\mathbf{X}_{kj}, \mathcal{X}), \quad (14)$$

其中 $J(\mathbf{X}) = \text{vec}(\mathbf{X})^T \mathbf{K} \text{vec}(\mathbf{X})$ 是相似度项, 而另一项则是一致性正则项. 这里采用了匹配结果合成的方法来生成新的候选解并通过上式来评价解的质量.

事实上存在着更高效的变体. 例如采用单图一致性替代两两一致性(见文献[54]中式(8)), 可以得到

$$k^* = \arg \max_{k=1}^N (1-\lambda)J(\mathbf{X}_{ik}\mathbf{X}_{kj}) + \lambda C_u(k, \mathcal{X}). \quad (15)$$

式(15)带来的计算效率提升来源于在每次迭代中, $\{C_u(k, \mathcal{X}^{(t-1)})\}_{k=1}^N$ 只需要被预先计算一次.

值得注意的是上述模型并没有依赖特定的二图匹配求解算法, 而是采用通用的框架来生成候选解进行评估. 在该框架下, 文献[54]进一步发展了一个简洁的外点对抗技术.

为了更好地介绍相关细节, 首先引入文献[54]中所定义的单阶匹配一致性以及单阶相似度如下:

定义 3 给定图样本集合 $\{\mathcal{G}_k\}_{k=1}^N$ 以及两两匹配结果集 \mathcal{X} , 对于图 \mathcal{G}_k 中单个节点 $\{\mathcal{N}_{u^k}\}_{u^k=1}^n$, 其关于匹配结果集合 \mathcal{X} 的一致性定义为

$$C_n(u^k, \mathcal{X}) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \|\mathbf{Y}(u^k, :)\|_{\text{F}/2}}{N(N-1)/2} \in (0, 1],$$

其中 $\mathbf{Y} = \mathbf{X}_{kj} - \mathbf{X}_{ki}\mathbf{X}_{ij}$, 而 $\mathbf{Y}(u^k, :)$ 是矩阵 \mathbf{Y} 中的第 u^k 行.

定义 4 给定 $\{\mathcal{G}_k\}_{k=1}^N, \mathcal{X}, \mathcal{K}$, 对于 \mathcal{G}_k 中各个图样本所有节点集合 $\{\mathcal{N}_{u^k}\}_{u^k=1}^n$, 单个节点 u^k 关于 \mathcal{X}, \mathcal{K} 相似度定义为

$$S_n(u^k, \mathcal{X}, \mathcal{K}) = \sum_{i=1, i \neq k}^N \text{vec}(\mathbf{X}_{ki}^{u^k})^T \mathbf{K}_{ki} \text{vec}(\mathbf{X}_{ki}),$$

其中 \mathbf{X}^{u^k} 代表仅第 u^k 取自 \mathbf{X} 对应行, 其他位置皆置为零.

假设已知公共节点数目为 $\bar{n} \leq n$, 则通过对双射矩阵 $\mathbf{X} \in \{0, 1\}^{n \times n}$ 中不存在对应关系的外点所相关的行列元素置零(类似掩码操作), 可以得到包含 \bar{n} 个非零元素的新指派矩阵 $\psi(\mathbf{X})$. 对于如何有效辨别外点的关键问题, 文献[54]给出了一个判别标准: 即单阶一致性或者相似度相对较低的节点为外点, 反之该指标最高的 \bar{n} 个节点为公共内点. 进而给出了关于公共内点的单阶一致性处理后新指派矩阵 $\psi_c(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \bar{n})$ 与相似度处理后的新指派矩阵 $\psi_a(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \bar{n})$. 相应地, 对于公共节点敏感的相似度目标函数被表述为

$$J^{\psi_a}(\mathbf{X}) = \text{vec}(\psi_a(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \bar{n}))^T \mathbf{K} \text{vec}(\psi_a(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \bar{n})). \quad (16)$$

而式(8)–(9)定义的一致性项则相应改写为

$$C_u^{\psi_c}(k, \mathcal{X}, \bar{n}) = \frac{\sum_{i=1, j=i+1}^{N-1, N} \|\psi_c(\mathbf{X}_{ij} - \mathbf{X}_{ik}\mathbf{X}_{kj}, \mathcal{X}, \bar{n})\|_{\text{F}}}{\bar{n}N(N-1)}, \quad (17)$$

$$C_p^{\psi_c}(\mathbf{X}_{ij}, \mathcal{X}, \bar{n}) = \frac{\sum_{k=1}^N \|\psi_c(\mathbf{X}_{ij} - \mathbf{X}_{ik}\mathbf{X}_{kj}, \mathcal{X}, \bar{n})\|_{\text{F}}}{2\bar{n}N}. \quad (18)$$

值得注意的是, 现有大多工作并没有给出估计公共内点数目有效方法, 而往往假设 \bar{n} 事先给定.

3.2 全局一致性复原方法 (Global consistency recovery based methods)

不同于迭代方案, 另一类工作试图从给定的两两匹配解中直接复原出全局一致的匹配结果. 谱方法^[3, 17, 55]通常试图求解由两两匹配矩阵构成的混合矩阵最大特征值对应的特征向量作为全局匹配结果. 在一个奠基工作^[55]中, 作者给出了精确复原所需先决条件的理论分析: 当所有两两匹配关系均为循环一致时, 前述混合矩阵为低秩且半正定矩阵.

上述思想进一步推动了凸松弛方法的发展, 其基本想法是试图找到距离初始给定混合指派矩阵最近的半正定矩阵来进行求解. 文献[21]进一步假定混合矩阵的秩可以被精确估计, 进而使得其模型一方面可以求解更为灵活的情形: 每个图样本仅与其他图样本存在部分节点的对应关系即局部匹配; 另一方面, 算法的鲁棒性得到提升, 可以处理初始两两匹配解存在大量噪声的情形.

出于本文完整性, 在陈述具体算法之前, 首先介绍一些数学记号和相关概念. 在文献[21, 55]中, 定义了一个具有 n^+ 个节点的虚拟全集, 对一组待匹配的图样本, 每个图中节点都可以在该虚拟全集中找到对应节点. 故而每个两两匹配矩阵可以被分解为 $\mathbf{X}_{ij} = \mathbf{P}_i \mathbf{P}_j^T$, 其中 $\mathbf{P}_i \in \{0, 1\}^{n_i \times n^+}$. 该变量可以被直观诠释为图样本 \mathcal{G}_i 到全集的映射 ($n_i \leq n^+$).

遵照前人的习惯, 本文同样给出混合矩阵 $\mathbf{X} \in \{0, 1\}^{M \times M}$ 的概念, 其中 $M = \sum_{i=1}^N n_i$ 代表了所有 N 个图样本中总的节点数目. 作者进一步将 \mathbf{P}_i 合并为 $\mathbf{P} \in \{0, 1\}^{M \times n^+}$.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12} & \cdots & \mathbf{X}_{1N} \\ \mathbf{X}_{21} & \mathbf{X}_{22} & \cdots & \mathbf{X}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{X}_{N1} & \mathbf{X}_{N2} & \cdots & \mathbf{X}_{NN} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_N \end{pmatrix}. \quad (19)$$

这里混合矩阵中的每个元素 $\mathbf{X}_{ij} \in \{0, 1\}^{n_i \times n_j}$ 代表了两两的匹配指派矩阵. 类似地可以定义一个由其元素 $\bar{\mathbf{X}}_{ij}$ 实际计算得到的混合矩阵 $\bar{\mathbf{X}}$. 相关工作^[17, 55]

已经证明, 对于两两解的循环一致性, 当且仅当混合矩阵满足分解性质 $\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{P}^T$. 这也同时引出了半正定与低秩性质:

$$\mathbf{X} \succeq 0, \text{rank}(\mathbf{X}) = n^+. \quad (20)$$

上述模型有效地刻画了循环一致性. 而全集概念的引入使得局部匹配^[21]成为可能.

如图1所示, 现有多图匹配问题设定基本可以分为3大类: 1) 双射; 2) 局部匹配; 3) 公共部分匹配. 需要注意的是, 这里并没有考虑一对多或者多对多的节点对应关系. 通俗地说, 双射是指每个图样本中的任意节点均能在其他任意图样本中找到对应, 即所有节点均为内点. 而局部匹配则允许一些节点仅能在部分图上找到对应点. 而公共部分匹配则更强调每个图中存在一组节点, 各个图中这组对应节点之间存在双射.

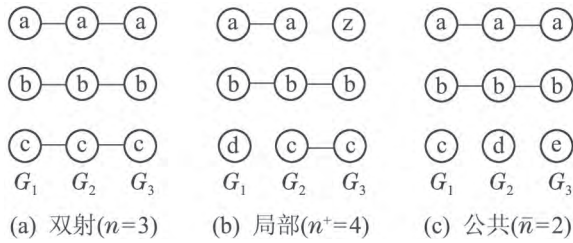


图1 多图匹配的3个典型场景

Fig. 1 Three representative situations of multi-graph matching

3.2.1 双射复原(Recovery under bijection)

在此情形下, 对于给定的初始两两匹配结果 $\bar{\mathbf{X}}$ 与待求解最终结果 \mathbf{X} , 得到下述优化问题:

$$\max_{\mathbf{X} \succeq 0, \mathbf{X}_{ij} \in \mathcal{P}} \langle \bar{\mathbf{X}}, \mathbf{X} \rangle, \quad (21)$$

其中: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 代表矩阵内积, 而 \mathcal{P} 则代表排列矩阵空间. 由于直接在离散空间求解上述问题非常困难, 松弛技术被提出并使用. 文献[17]提出的谱聚类方法将矩阵 \mathbf{X} 松弛到秩为 N 的对称矩阵空间中. 为了计算这一广义瑞利问题, 该方法计算矩阵 $\bar{\mathbf{X}}$ 的前 N 个特征向量 \mathbf{v}_i (假设 $N \leq n$), 进而得到连续域松弛解

$$\mathbf{V} = N \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T.$$

最后对连续解 \mathbf{V} 采用匈牙利算法等方法进行离散化得到最后匹配结果 \mathbf{X} . 而在另一工作^[55]中, 作者提出了基于扩展拉格朗日方法的更紧凑的凸松弛技术, 使得半正定约束得以保留.

3.2.2 局部匹配复原(Recovery under partial matching)

在文献[21]中, 作者提出了最早用于求解非完全多图匹配问题算法之一的MatchLift算法. 对式(21), 为了更好地利用全集节点数目总和 n^+ 这一信息, 文献[21]在略去关于指派矩阵 \mathbf{X} 的双随机约束后, 将原

来关于 \mathbf{X} 的半正定约束提升为如下形式:

$$\begin{bmatrix} k & \mathbf{1}^T \\ \mathbf{1} & \mathbf{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}^T \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} [\mathbf{1} \ \mathbf{P}^T] \succeq 0, \quad (22)$$

作者进一步给出了一个基于交替方向乘子法的优化算法求解上述优化问题.

而在文献[56]中, 作者提出了MatchALS算法. 该算法基于下述同时包含稀疏正则和核范数正则的目标函数, 并将解空间松弛到连续域 $[0, 1]$:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{X}} - \underbrace{\sum_{i,j} \langle \mathbf{S}_{ij}, \mathbf{X}_{ij} \rangle}_{\text{节点相似度, 即 } \langle \mathbf{S}, \mathbf{X} \rangle} + \underbrace{\alpha \langle \mathbf{1}, \mathbf{X} \rangle}_{\text{稀疏}} + \underbrace{\lambda \|\mathbf{X}\|_*}_{\text{低秩}}, \\ \mathbf{X}_{ii} = \mathbf{I}_{n_i}, \mathbf{X}_{ij} = \mathbf{X}_{ij}, \mathbf{0} \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{1}, \end{cases} \quad (23)$$

同时, 该方法对指派矩阵 \mathbf{P}_{ij} 施加了双随机约束.

这里值得注意的是, $\mathbf{S}_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$ 只包含了一阶点与点之间的相似度, 而没有加入边相似度信息. 而 $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{M \times M}$ 则包含了各个相似度对 \mathbf{S}_{ij} . 另外, 由于已经施加了矩阵秩约束, 文献[56]丢弃了对 \mathbf{X}_{ij} 施加的半正定约束, 并最终设计了一个快速交替最小化算法来求解上述模型.

基于该思路, 文献[57]提出了具有解析解的MatchEIG算法. 一项最新的工作^[58]同时考虑了图内部的自对称信息与多图间的匹配复原问题, 能够处理多个自对称物体匹配的情况.

3.2.3 公共内点复原(Recovery under common inner elicitation)

上述基于局部匹配复原的工作^[21, 56-57]的一个弊端是需要处理维度规模为 n^+ (全集节点总数) 的相关变量, 这使得算法整体复杂度更高. 一个自然的想法是类似文献[54], 首先试图辨别出在各个图中共享的公共节点集合, 其节点数目 $\bar{n} < n^+$.

基于上述观察, 文献[59]中, 作者提出了如下所示的目标函数, 其中 $\mathbf{P} \in \{0, 1\}^{M \times \bar{n}}$. 注意这里省略了式(23)中所采用的的相似项, 这是因为此处求解分解矩阵 \mathbf{P} 而非式(19)中的 \mathbf{X} :

$$\min_{\mathbf{P} \in \mathcal{P}_i^{n_i \times \bar{n}}, \text{rank}(\mathbf{Z}) \leq \bar{n}} \underbrace{\frac{1}{4} \|\bar{\mathbf{X}} - \mathbf{P}\mathbf{P}^T\|_F^2}_{\text{与初始输入 } \bar{\mathbf{X}} \text{ 的偏差}} + \underbrace{\frac{\lambda}{2} \|\mathbf{C}_i \mathbf{P}_i - \mathbf{Z}_i\|_F^2}_{\text{正射投影}}, \quad (24)$$

其中 \mathcal{P} 代表非完整排列矩阵空间:

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{P}_i \leq \mathbf{1}, \mathbf{P}_i^T \mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

当所有 \bar{n} 个公共节点可以在每个图样本中找到对应点时, 上式等式成立. 注意其中第2项是关于正射投影约束, 其涉及一常数矩阵 $\mathbf{C}_i \in \mathbb{R}^{2 \times n_i}$, 该常数矩阵来源于运动中恢复结构相关研究^[60]中所谓的测量矩阵. 而子矩阵 $\mathbf{Z}_i \in \mathbb{R}^{2 \times \bar{n}}$ 则代表辅助变量 $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{2n \times \bar{n}}$ 中的第 $2i-1$ 和第 $2i$ 行. 在最新的工作中^[59], 作者提出了一个基于

块坐标下降技术的高效优化算法用以求解上述问题。

3.2.4 分布式多图匹配 (Distributed multi-graph matching)

上述第3.2节中方法的一个重要局限是需要引入大规模混合矩阵 \mathbf{X} 进行相关计算. 一个自然的想法是将该混合矩阵切分为多个(相互重叠的)子矩阵, 并随之得到相应的图样本交叉分组. 在文献[61]中作者进行了循环一致性和图样本重叠分组 $\bigcup_i \mathcal{V}_i$ 间关系的理论分析, 并给出了如下的分布式版本多图匹配目标函数(非分布式版本原模型见前文式(23)或文献[56]中式(6)):

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{X}} \sum_i (\langle \alpha \mathbf{1}_{\mathcal{V}_i} - \mathbf{S}_{\mathcal{V}_i}, \mathbf{X}_{\mathcal{V}_i} \rangle + \lambda \|\mathbf{X}_{\mathcal{V}_i}\|_*), \\ \text{s.t. } \mathbf{X}_{\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j} = \mathbf{X}_{\mathcal{V}_j \cap \mathcal{V}_i}, \forall i, j, \end{cases} \quad (25)$$

其中: $\mathcal{V}_i^{i \cap j}$ 代表集合 \mathcal{V}_i 中与分组 \mathcal{V}_j 重合的部分, 类似地定义同样适用于 $\mathcal{V}_j^{i \cap j}$. 而约束则保证了每个分组 $\mathbf{X}_{\mathcal{V}_i}$ 内的全局一致性能够引出整个图样本集合的全局一致性: 即混合矩阵 \mathbf{X} 满足循环一致性的性质(由于篇幅空间的限制, 这里在字面省略了式(23)中的约束). 文献[61]进一步给出了一个基于贪婪算法来构建有效分组的 \mathcal{V}_j 的策略. 而另一工作^[62]则提出了一个中心式谱方法^[17]的分布式版本. 然而该方法类似于^[17], 要求任意两图之间节点存在双射关系. 相比之下, 式(25)的模型则可以处理局部匹配的情形, 这与式(23)中模型的处理场景类似.

3.3 秩-1型/聚类方法(Rank-1/Clustering methods)

秩-1型方法: 这类方法通过构建图节点特征向量量矩阵中行(列)排序, 使得最终对齐后的节点特征矩阵中各个行(列)均相同, 进而得到秩为1的对齐后节点特征矩阵. 基于这一思路, 低秩-稀疏分解模型^[63]被用于上述问题的求解. 然而, 该类方法的一大局限是要求各个图两两之间必须满足双射关系. 从优化的角度来看, 上述模型亦对初始值较为敏感. 在下面的介绍中读者将看到, 通过引入聚类技术, 则可以放宽对秩-1型约束的严格要求.

聚类方法: 在文献[64]中, 作者提出了一个在图节点特征空间进行聚类的方法来求解多图协同匹配问

题. 与 K 均值算法类似, 该算法试图在每次迭代中计算属于同一组的节点及该组所有点特征的平均值, 并以此对节点的分组进行迭代更新. 与 K 均值不同的是, 这里还要满足一个额外约束, 即每个分组需由来自不同图样本的节点组成, 不允许来自同一图样本的节点出现多次, 这使得该问题的求解变得非常困难. 基于上述聚类视角, 文献[65]提出了一个基于密度估计的 QuickMatch 算法, 该算法采用 QuickShift^[66]非参数估计密度分布估计方法发现聚类簇. 该方法不需要事先给定全集的节点数目, 公共节点数目等信息, 并天然支持非完整匹配.

另外值得注意的是, 上述两个方法^[63, 65]并没有显式地对二阶乃至高阶边相似度信息进行建模, 而仅仅采用单阶点特征及其相似度信息.

3.4 增量式匹配(Incremental graph matching)

在线增量式匹配是多图匹配领域里的一个重要场景. 在实际应用中, 数据经常会随时间不断增加(例如监控视频数据), 现有的多图匹配算法都没有办法高效地处理这种情况. 因此, 在线增量图匹配算法具有非常重要的现实意义. **如何在得到当前图样本匹配结果的基础上, 更高效精确地对新增样本进行匹配是一个亟待更多关注的重要问题.** 文献[67]提出了一个基于单阶节点相似度的增量式匹配算法. 而更近的工作^[68]则处理了更一般的图匹配增量匹配场景. 该方法通过行列式点过程(determinant point process, DPP)来对图样本集合进行分组, 以此保证各分组内样本的多样性. **而在增量匹配过程中, 则通过DPP的随机特性来随机重组, 提高了增量匹配的鲁棒性.** 算法通过一个自动选取的参考图, 在分组间传递多图匹配的循环一致性信息. 随着新的数据输入, 增量式多图匹配的精度逐渐提升.

3.5 总结讨论(Conclusion and discussion)

作者进一步用表1来对近期主要的多图匹配方法进行了汇总与比较. 总体来说, **基于二图局部迭代匹配的算法属于启发式方法**, 理论基础较为薄弱. 相比之下, 全局一致性的方法在数学上有更多深入分析. **而增量式方法, 对于应用来说具有更大的实用价值,** 是一个亟待投入更多研究的重要发展方向.

表 1 多图匹配方法汇总

Table 1 Summary of multi-graph matching algorithms

方法名称	多图匹配	二阶信息	循环一致性	局部匹配	内点自适应	输出结果
Star-MGM ^[53]	是	是	是	是	否	连续
MatchALS ^[56]	是	否	否	是	否	稀疏
MatchEIG ^[57]	是	否	否	是	否	连续
QuickMatch ^[65]	是	否	是	是	是	离散
MapSymSync ^[58]	是	是	否	是	否	连续

表1整理了近期多图匹配领域的主要工作,并对多图匹配算法主要指标进行横向对比.表格中,“二阶信息”代表在多图优化中考虑图的二阶特征.“循环一致性”表示算法输出的结果严格地遵循循环一致性.“局部匹配”表示算法支持非满射的匹配.“内点自适应”代表算法能够自动计算公共内点数目,不需要将它作为超参数手工输入.“输出结果”表示算法输出结果是连续、稀疏或离散的.稀疏和离散的输出往往不需要后处理步骤,通常对应着更精确的匹配结果.

4 总结和展望(Conclusion and outlook)

本文在介绍基本的二图匹配概念和方法的基础上,重点阐述了多图协同匹配问题及其近期发展动向.更多的图样本信息的引入,突破了传统二图匹配问题的设定,由此为新理论、模型、算法的研究提供了新的空间.然而,计算机视觉中的图匹配技术实用化还面临诸多挑战,特别是有效的图结构构建与大规模节点匹配这两方面,亟待新理论和新方法的出现.

在图结构构建方面,目前的研究多集中在给定图结构的基础上进行匹配.即使一些研究采用机器学习的方法学习图结构相似度相关参数^[43]或者图结构中点边属性特征^[44],也往往依赖高质量细粒度的节点对应标记信息,给实际的图结构信息抽取造成了诸多不便.作者认为利用多图协同匹配时的一致性思想,融合多个图结构信息,进行弱监督或者非监督图结构学习,是一个潜在的重要研究方向.在大规模节点匹配方面,图上节点信息的向量化及其相关的大规模图嵌入技术^[69]成为了一个潜在的有效方案.除了直接采用现有的节点向量化技术,一个需要进一步深入研究的问题是**如何求解各自变换,将多个图样本各自的节点向量空间共同映射到一个公共空间**^[70],使得其上的匹配变得便捷和精准.作者认为,在应对上述两个挑战时,多图信息的协同学习,将成为提高方法鲁棒性、降低标记代价的一个关键因素.

参考文献(References):

- [1] MUNKRES J. Algorithms for the assignment and transportation problems [J]. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1957, 5(1): 32 – 38.
- [2] DUCHENNE O, JOULIN A, PONCE J. A graph-matching kernel for object categorization [C] // *Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision*. Barcelona: IEEE, 2011: 1792 – 1799.
- [3] KIM V, LI W, MITRA N, et al. Exploring collections of 3d models using fuzzy correspondences [C] // *Proceedings of the ACM Special Interest Group on Computer Graphics and Interactive Techniques*. London: ACM, 2012, 31: 54.
- [4] ZASLAVSKIY M, BACH FR, VERT JP. A path following algorithm for the graph matching problem [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2009, 31(12): 2227 – 2242.
- [5] CAO X, ZHANG W, YU Y. Bootstrapping framework with interactive information modeling for network alignment [J]. *IEEE Access*, 2018, 6: 13685 – 13696.
- [6] BUNKE H. Graph matching: Theoretical foundations, algorithms, and applications [J]. *Vision Interface*, 2000: 82 – 88.
- [7] CONTE D, FOGGIA P, SANSONE C, et al. Thirty years of graph matching in pattern recognition [J]. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2004, 18(3): 265 – 298.
- [8] FOGGIA P, PERCANNELLA G, VENTO M. Graph matching and learning in pattern recognition in the last 10 years [J]. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2014, 28(1): 1450001.
- [9] VENTO M. A long trip in the charming world of graphs for pattern recognition [J]. *Pattern Recognition*, 2015, 48(2): 291 – 301.
- [10] YAN J, YIN X, LIN W, et al. A short survey of recent advances in graph matching [C] // *Proceedings of IEEE International Conference on Multimedia Retrieval*. Amsterdam: ACM, 2016: 167 – 174.
- [11] JIANG Bo, TANG Jin, LUO Bin. A survey on graph matching algorithms in computer vision [J]. *Journal of Anhui University (Natural Science Edition)*, 2017, 41(1): 29 – 36.
(江波, 汤进, 罗斌. 计算机视觉中的图匹配方法研究综述 [J]. 安徽大学学报(自然科学版), 2013, 41(1): 29 – 36.)
- [12] LIVI L, RIZZI A. The graph matching problem [J]. *Pattern Analysis and Applications*, 2013, 16(3): 253 – 283.
- [13] DE SANTO M, FOGGIA P, SANSONE C, et al. A large database of graphs and its use for benchmarking graph isomorphism algorithms [J]. *Pattern Recognition Letters*, 2003, 24(8): 1067 – 1079.
- [14] GAO X, XIAO B, TAO D, et al. A survey of graph edit distance [J]. *Pattern Analysis and Applications*, 2010, 13(1): 113 – 129.
- [15] DE SANTO M, FOGGIA P, SANSONE C, et al. Models and algorithms for computing the common labelling of a set of attributed graphs [J]. *Journal of Computer Vision and Image Understanding*, 2011, 115(7): 929 – 945.
- [16] HUANG Q, ZHANG G, GAO L, et al. An optimization approach for extracting and encoding consistent maps in a shape collection [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2012, 31(6): 167.
- [17] PACHAURI D, KONDOR R, VIKAS S. Solving the multi-way matching problem by permutation synchronization [C] // *Proceedings of Neural Information Processing Systems*. Lake Tahoe: NIPS, 2013: 1860 – 1868.
- [18] YAN J, TIAN Y, ZHA H, et al. Joint optimization for consistent multiple graph matching [C] // *Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision*. Sydney: IEEE, 2013: 1649 – 1656.
- [19] SOLÉ-RIBALTA A, SERRATOSA F. Graduated assignment algorithm for multiple graph matching based on a common labeling [J]. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2013, 27(1): 1350001.
- [20] YAN J, LI Y, LIU W, et al. Graduated consistency-regularized optimization for multi-graph matching [C] // *Proceedings of European Conference on Computer Vision*. Zurich: Springer, 2014: 407 – 422.
- [21] CHEN Y, GUIBAS L, HUANG Q. Near-optimal joint object matching via convex relaxation [C] // *Proceedings of IEEE International Conference on Machine Learning*. Beijing: IMLS, 2014: 100 – 108.
- [22] SHI X, LING H, HU W, et al. Tensor power iteration for multi-graph matching [C] // *Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Las Vegas: IEEE, 2016: 5062 – 5070.

- [23] LEORDEANU M, HEBERT M. A spectral technique for correspondence problems using pairwise constraints [C] // *Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision*. Beijing: IEEE, 2005: 1482 – 1489.
- [24] LEORDEANU M, HEBERT M, SUKTHANKAR R. An integer projected fixed point method for graph matching and map inference [C] // *Proceedings of Neural Information Processing Systems*. Vancouver: NIPS, 2009: 1114 – 1122.
- [25] CHO M, LEE J, LEE KM. Reweighted random walks for graph matching [C] // *Proceedings of European Conference on Computer Vision*. Heraklion: ECCV, 2010: 492 – 505.
- [26] LEORDEANU M, SUKTHANKAR R, HEBERT M. Unsupervised learning for graph matching [J]. *International Journal of Computer Vision*, 2012, 96(1): 28 – 45.
- [27] GOLD S, RANGARAJAN A. A graduated assignment algorithm for graph matching [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1996, 18(4): 377 – 388.
- [28] ZASS R, SHASHUA A. Probabilistic graph and hypergraph matching [C] // *Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Anchorage: IEEE, 2008: 1 – 8.
- [29] CHERTOK M, KELLER Y. Efficient high order matching [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2010, 32(12): 2205 – 2215.
- [30] DUCHENNE O, BACH F, KWEON I, et al. A tensor-based algorithm for high-order graph matching [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2011, 33(12): 2383 – 2395.
- [31] YAN J, ZHANG C, ZHA H, et al. Discrete hyper-graph matching [C] // *Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision*. Santiago: IEEE, 2015: 1520 – 1528.
- [32] NGOC Q, GAUTIER A, HEIN M. A flexible tensor block coordinate ascent scheme for hypergraph matching [C] // *Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Boston: IEEE, 2015: 5270 – 5278.
- [33] LEE J, CHO M, LEE K. Hyper-graph matching via reweighted random walks [C] // *Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Colorado Springs: IEEE, 2011: 1633 – 1640.
- [34] LÊ-HUU D, PARAGIOS N. Alternating direction graph matching [C] // *Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Honolulu, IEEE, 2017: 4914 – 4922.
- [35] XU Xianguo, HAN Lixin, SHI Bing. Higher-order tensor graph matching based on iterative reweight method [J]. *Microcomputer Applications*, 2018, 34(1): 60 – 63.
(徐夏国, 韩立新, 石冰. 基于迭代重加权的高阶张量图匹配算法 [J]. 微型电脑应用, 2018, 34(1): 60 – 63.)
- [36] YANG Siyan, CAO Wencan, LI Shiping. Second-order graph model ant and colony optimization based image matching [J]. *Journal of Xidian University (Natural Science Edition)*, 2017, 44(1): 159 – 164.
(杨思燕, 曹文灿, 李世平. 结合高阶图模型与蚁群优化的图像匹配方法 [J]. 西安电子科技大学学报(自然科学版), 2017, 44(1): 159 – 164.)
- [37] MCAULEY J, CAMPOS T, CAETANO T. Unified graph matching in Euclidean spaces [C] // *Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. San Francisco: IEEE, 2010: 1871 – 1878.
- [38] WANG F, XUE N, ZHANG Y, et al. Adaptively transforming graph matching [C] // *Proceedings of European Conference on Computer Vision*. Munich: Springer, 2018, arXiv: 1807.10160v1.
- [39] WANG Zhidan, JIANG Jianguo, QI Meibin. Deformable object tracking based on max-pooling graph matching [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2017, 45(3): 704 – 711.
(王治丹, 蒋建国, 齐美彬. 基于最大池图匹配的形变目标跟踪方法 [J]. 电子学报, 2017, 45(3): 704 – 711.)
- [40] CHO M, SUN J, DUCHENNE O, et al. Finding matches in a haystack: A max-pooling strategy for graph matching in the presence of outliers [C] // *Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Columbus: IEEE, 2014: 2091 – 2098.
- [41] CAETANO T, MCAULEY J, CHENG L, et al. Learning graph matching [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2009, 31(6): 1048 – 1058.
- [42] LEORDEANU M, ZANFIR A, SMINCHISESCU C. Semi-supervised learning and optimization for hypergraph matching [C] // *Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision*. Barcelona: IEEE, 2011: 2274 – 2281.
- [43] CHO M, ALAHARI K, PONCE J. Learning graphs to match [C] // *Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision*. Sydney: IEEE, 2013: 25 – 32.
- [44] ZANFIR A, SMINCHISESCU C. Deep learning of graph matching [C] // *Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Salt Lake City: IEEE, 2018: 2684 – 2693.
- [45] ZHOU F, TORRE F. Factorized graph matching [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2016, 38(9): 1774 – 1789.
- [46] COUR T, SRINIVASAN P, SHI J. Balanced graph matching [C] // *Proceedings of Neural Information Processing Systems*. Vancouver: NIPS, 2006: 313 – 320.
- [47] TORR PHS. Solving markov random fields using semidefinite programming [C] // *Proceedings of International Conference on Artificial Intelligence and Statistics*. Key West: AISTATS, 2003: 1 – 8.
- [48] SCHELLEWALD C, SCHNÖRR C. Probabilistic subgraph matching based on convex relaxation [C] // *Proceedings of Workshop on IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Beijing: ECCV, 2005: 171 – 186.
- [49] LEE J, CHO M, LEE K. A graph matching algorithm using data-driven markov chain monte carlo sampling [C] // *Proceedings of International Conference on Pattern Recognition*. Istanbul: IEEE, 2010: 2816 – 2819.
- [50] SUH Y, CHO M, LEE KM. Graph matching via sequential monte carlo [C] // *Proceedings of European Conference on Computer Vision*. Zurich: Springer, 2014: 624 – 637.
- [51] ADAMCZEWSKI K, SUH Y, LEE K. Discrete tabu search for graph matching [C] // *Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision*. Santiago: IEEE, 2015: 109 – 117.
- [52] LIU Z Y, QIAO H, XU L. An extended path following algorithm for graph-matching problem [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2012, 34(7): 1451 – 1456.
- [53] YAN J, WANG J, ZHA H, et al. Consistency-driven alternating optimization for multigraph matching: A unified approach [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2015, 24(3): 994 – 1009.
- [54] YAN J, CHO M, ZHA H, et al. Multi-graph matching via affinity optimization with graduated consistency regularization [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2015, 24(3): 994 – 1009.
- [55] HUANG Q, GUIBAS L. Consistent shape maps via semidefinite programming [C] // *Proceedings of Eurographics Symposium on Geometry Processing*. Milan, Italy: ACM, 2018: 177 – 186.
- [56] ZHOU X, ZHU M, DANIILIDIS K. Multi-image matching via fast alternating minimization [C] // *Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision*. Santiago: IEEE, 2015: 4032 – 4040.
- [57] MASET E, ARRIGONI F, FUSIELLO A. Practical and efficient multi-view matching [C] // *Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision*. Venice: IEEE, 2017: 4578 – 4586.

- [58] SUN Y, LIANG Z, HUANG X, et al. Joint map and symmetry synchronization [C] // *Proceedings of European Conference on Computer Vision*. Munich: Springer, 2018: 257 – 275.
- [59] WANG Q, ZHOU X, DANIILIDIS K. Multi-image semantic matching by mining consistent features [C] // *Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Salt Lake City: IEEE, 2018: 1 – 9.
- [60] TOMASI C, KANADE T. Shape and motion from image streams under orthography: A factorization method [J]. *International Journal of Computer Vision*, 1992, 9(2): 137 – 154.
- [61] HU N, HUANG Q, THIBERT B, et al. Distributable consistent multi-graph matching [C] // *Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Salt Lake City: IEEE, 2018: 1 – 10.
- [62] LEONARDOS S, ZHOU X, DANIILIDIS K. Distributed consistent data association [C] // *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Singapore: IEEE, 2017: 2645 – 2652.
- [63] ZENG Z, CHAN TH, JIA K, et al. Finding correspondence from multiple images via sparse and low-rank decomposition [C] // *Proceedings of European Conference on Computer Vision*. Florence: Springer, 2012: 325 – 339.
- [64] YAN J, REN Z, ZHA H, et al. A constrained clustering based approach for matching a collection of feature sets [C] // *Proceedings of IEEE International Conference on Pattern Recognition*. Cancun: IEEE, 2016: 3832 – 3837.
- [65] TRON R, ZHOU X, ESTEVES C, et al. Fast multi-image matching via density-based clustering [C] // *Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Honolulu: IEEE, 2017: 4057 – 4066.
- [66] VEDALDI A, SOATTO S. Quick shift and kernel methods for mode seeking [C] // *Proceedings of European Conference on Computer Vision*. Marseille: Springer, 2008: 705 – 718.
- [67] CHAKRABORTY A, DAS A, ROY-CHOWDHURY A K. Network consistent data association [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2016, 38(9): 1859 – 1871.
- [68] YU T, YAN J, LI B, et al. Incremental multi-graph matching via diversity and randomness based graph clustering [C] // *Proceedings of European Conference on Computer Vision*. Munich: Springer, 2018: 1 – 8.
- [69] GROVER A, LESKOVEC J. Node2vec: Scalable feature learning for networks [C] // *Proceedings of ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*. San Francisco: ACM, 2016: 855 – 864.
- [70] WANG L, LI Y, LAZEBNIK S. Learning deep structure-preserving image-text embeddings [C] // *Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Las Vegas: IEEE, 2016: 5005 – 5013.

作者简介:

严骏驰 (1985–), 男, 博士, 主要研究方向为模式识别、机器学习与计算机视觉, E-mail: yanjunchi@sjtu.edu.cn;

杨小康 (1972–), 男, 博士, 教授, 主要研究方向为深度学习与视频大数据分析、虚拟现实与增强现实、视频处理与质量评价, E-mail: xkyang@sjtu.edu.cn.