

REPORT 21/04/2018

FRA501 Principles of Model-based Design in Robotics

อาจารย์รัชชา ชูพจน์เจริญ

# Quadrotor Dynamic Modelling

## การโมเดลระบบของอากาศยานสี่ใบพัด

### Member

นายจุฬภัทร จิรชัย	57340500013
นายเจตน์นัท หอมจันทนากุล	57340500015
นายวุฒิภัทร ไชคอนันตทรัพย์	57340500067

Institute of Field Robotics, KMUTT



ชื่อหัวข้อ	Quadrotor Dynamic Modelling การโมเดลระบบของอากาศยานสี่ใบพัด
รายวิชา	FRA501 Principles of Model-based Design in Robotics
สาขาวิชา	วิศวกรรมหุ่นยนต์และระบบอัตโนมัติ
คณะ	สถาบันวิทยาการหุ่นยนต์ภาคสนาม
สถาบัน	มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี
ปีการศึกษา	2560

## บทคัดย่อ

งานวิทยานิพนธ์นี้เป็นงานที่เกี่ยวกับการออกแบบและจัดทำแพลตฟอร์มหุ่นยนต์ฮิวมานอยด์ด้วยเครื่องพิมพ์สามมิติ จุดประสงค์คือเพื่อ

## สารบัญ

เรื่อง	หน้า
บทคัดย่อ .....	ก
สารบัญ .....	ข
บทที่ 1 Introduction .....	1
บทที่ 2 System Description .....	2
2.1 Quadroter mathematical model.....	2
2.1.1 Preliminar notions .....	2
2.1.2 Euler angles .....	4
2.1.3 Qaudroter mathematical model.....	5
2.2 Explicit MPC Control.....	6
บทที่ 3 Simulation .....	7
บทที่ 4 Analysis/Discussion.....	8
บทที่ 5 Conclusion.....	9
เอกสารอ้างอิง.....	9

## บทที่ 1

### Introduction

อากาศยานสี่ใบพัด (quadrotor) คือเฮลิคอปเตอร์หลายใบพัด (multi-helicopter) ที่มีลักษณะใบพัดเรียงตัวกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก หรือเป็นรูปทรงที่มีความสมมาตร เพื่อใช้ในการพยุงพาหนะและควบคุมทิศทางได้อย่างเป็นอิสระมากขึ้นเมื่อเทียบกับเฮลิคอปเตอร์ทั่วไป โดยในปัจจุบัน อากาศยานสี่ใบพัดได้ถูกนำมาประยุกต์ใช้งานในหลากหลายรูปแบบ ยกตัวอย่างเช่น ด้านเกษตรกรรม(ใช้ในการฉีดยาป้องกันศัตรูพืชหรือตรวจสอบผลผลิตผลเพื่อช่วยเกษตรกร) ด้านอุตสาหกรรม(ใช้สำรวจรอยรั่วที่หลังคาของโรงงาน บ้านเรือน) ด้านการทหาร(ใช้ในการสำรวจพื้นที่ ตรวจสอบที่ตั้งของศัตรู) ด้านกู้ภัยฉุกเฉิน(ใช้ในการหาพื้นที่ประสบภัย ไฟไหม้) ด้านการบันเทิง(ใช้แปรรหัสเป็นรูปภาพและเคลื่อนไหวในรูปแบบต่างๆ) เป็นต้น ซึ่งจะเห็นได้ว่าอากาศยานสี่ใบพัดนั้นสามารถนำไปใช้ได้หลากหลายทาง แต่ด้วยจำนวนของใบพัดที่มีมาก ทำให้ระบบมีกลไกและกระบวนการในการควบคุมที่มีความซับซ้อนมากขึ้น ทางคณะผู้จัดทำจึงสนใจที่จะทำโครงการเกี่ยวกับอากาศยานสี่ใบพัด เพื่อศึกษาพลศาสตร์และ ออกแบบระบบควบคุม รวมไปถึงการจำลองการเคลื่อนที่ของอากาศยาน โดยทำผ่านโปรแกรมจำลอง และนำความรู้ทั้งหมดไปใช้ในการพัฒนาการทำงานของอากาศยานสี่ใบพัดต่อไปในอนาคต

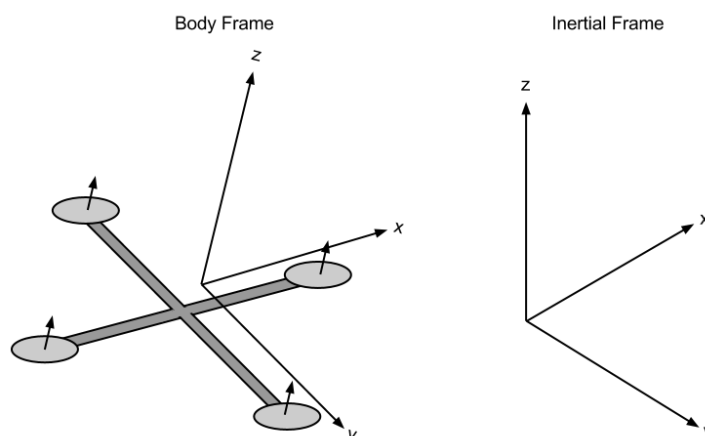
## บทที่ 2

### System Description

#### 2.1 Quadrotor mathematical model

##### 2.1.1 Preliminar notions

โดรนเป็นอากาศยานชนิดหนึ่งที่มีมอเตอร์เป็นตัวขับเคลื่อนอยู่ 4 ตัว มีบอร์ดควบคุมและสั่งการอยู่ตรงกลางระหว่างมอเตอร์ทั้งสี่ ก่อนจะหาสมการคณิตศาสตร์ของโดรนนั้น จะต้องเริ่มจากรู้จักเฟรมอ้างอิงก่อน เฟรมอ้างอิงนี้จะช่วยบอกได้ว่าตัวโดรนนั้นอยู่ที่ตำแหน่งไหน เอียงอย่างไรอยู่ เฟรมอ้างอิงของโดรนนั้นใช้เพียง 2 เฟรมด้วยกัน คือเฟรมที่อยู่กับที่ไม่ขยับไปไหน และเฟรมที่เคลื่อนที่ไปมา เฟรมแรกคือเฟรมที่อยู่กับที่นั่นมีชื่อว่า “Inertial frame” เฟรมนี้เอาไว้สำหรับใช้ในการอ้างอิงพื้นโลก โดยที่ทิศทางของแรงโน้มถ่วง (gravity) จะมีทิศทางไปทางแกน -Z ของ “Inertial frame” ส่วนเฟรมอีกอันคือ “Body frame” เฟรมนี้เอาไว้ใช้สำหรับในการบอกตำแหน่งและการเอียงของตัวโดรน โดยการบอกนั้นจะบอกเทียบกับ “Inertial frame” การตั้งเฟรมนี้นั้นจะให้แกน +Z ชี้ไปตามทิศของมอเตอร์ทั้งสี่ ดังรูปที่ 2.1

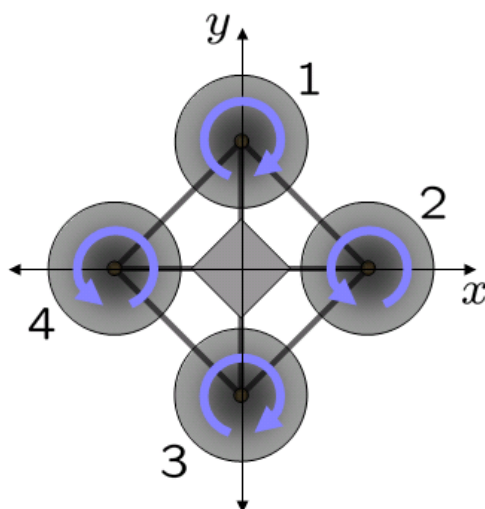


รูปที่ 2.1: เฟรมอ้างอิงของโดรน

การควบคุมตำแหน่งและท่าทางของโดรนนั้น เราสามารถควบคุมได้โดยการสั่งให้มอเตอร์ทั้งสี่ตัวมีความเร็วที่แตกต่างกัน เมื่อมอเตอร์หมุนด้วยความเร็วไม่เท่ากันจะทำให้เกิดแรงและโมเมนต์ขึ้นที่ตัวโดรน แรงยกนั้นจะเกิดขึ้นจากการหมุนมอเตอร์ทั้งหมด ส่วนการเอียง Pitch (หมุนรอบแกน Y ของ Body frame), Roll (หมุนรอบแกน X ของ Body frame) จะเกิดจากความแตกต่างระหว่างแรงยกของมอเตอร์ทั้งสี่ตัว แรงโน้มถ่วงของโลก และ Yaw (หมุนรอบแกน Z ของ Body frame) เกิดจากการที่มอเตอร์หมุนด้วยความเร็วที่ไม่สมดุลกัน โดรนจะไม่หมุน Yaw หากมีมอเตอร์หมุนไปในทิศทางตรงกันข้ามกัน ดังนั้นทำให้เราสามารถแบ่งใบพัดของโดรนออกเป็น 2 กลุ่ม แต่ละกลุ่มจะมีทิศทางการหมุนตรงข้ามกันและอยู่ฝั่งตรงกันข้ามกัน

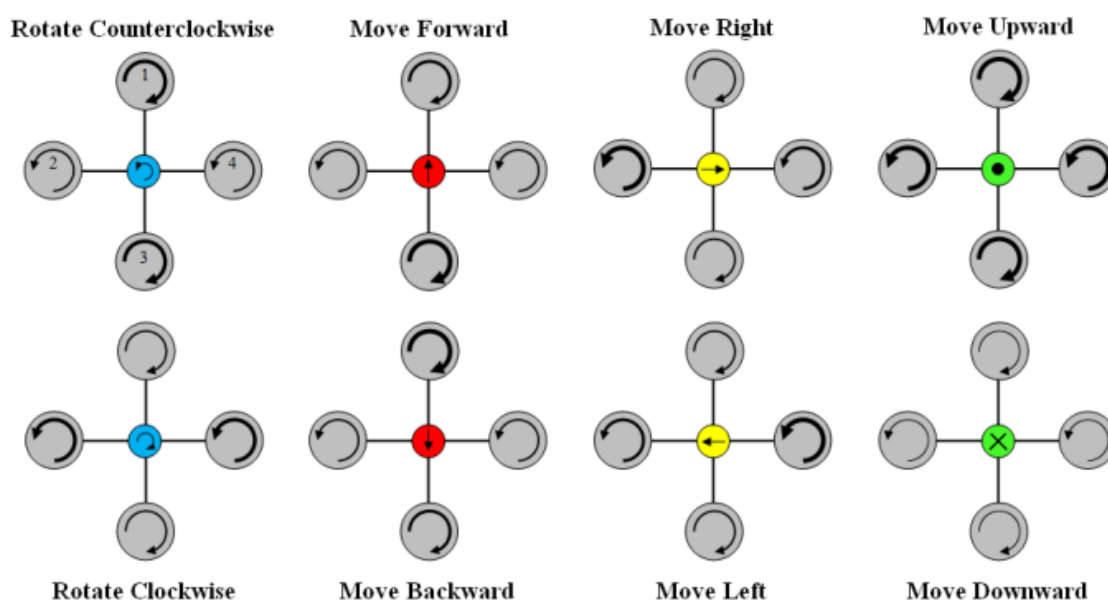
- ใบพัด หน้า และ หลัง (เลข 2 และเลข 4 ในรูปที่ 2.2 ) จะหมุนทวนเข็มนาฬิกา CCW
- ใบพัด ซ้าย และ ขวา (เลข 1 และเลข 3 ในรูปที่ 2.2 ) จะหมุนตามเข็มนาฬิกา CW

การเคลื่อนที่ในปริภูมิของโดรนนั้นเราสามารถแบ่งได้ออกเป็น 2 ส่วนคือ การเคลื่อนที่ตามแนวแกน และการเคลื่อนที่หมุนรอบแกน ในการอธิบายการเคลื่อนที่ของโดรนนั้น หากนับองศาอิสระจะได้ทั้งหมดเป็น 6 องศาอิสระ โดย 6 องศาอิสระนี้คือ การเคลื่อนที่ตามแนวแกน 3 แกน (X Y Z) และการเคลื่อนที่หมุนรอบแกน (Roll Pitch Yaw) การควบคุมการเคลื่อนที่ใน 6 องศาอิสระนั้นสามารถทำได้โดยปรับความเร็วการหมุนของมอเตอร์ให้มีความแตกต่างกัน การเคลื่อนที่ไปข้างหน้า ถอยหลัง ไปด้านข้าง ขึ้นลง หมุนรอบ Roll Pitch Yaw, ที่โดรนสามารถหมุนรอบแกน Yaw ได้นั้นเกิดจากทอร์ค



รูปที่ 2.2: ทิศทางการหมุนของแต่ละใบพัด

ของมอเตอร์ทั้งสี่ ผลรวมของทอร์คจะส่งผลต่อความเร็วในการหมุนรอบแกน Yaw หากมอเตอร์ทุกตัวหมุนด้วยความเร็วเท่ากัน ผลรวมทอร์คจะมีค่าเท่ากับศูนย์ทำให้โดรนไม่หมุน แต่ถ้ามอเตอร์หมุนด้วยความเร็วไม่เท่ากัน จะทำให้ผลรวมทอร์คมีค่าไม่เท่ากับศูนย์จะส่งผลให้โดรนเกิดการหมุนรอบแกน Yaw ได้ ถ้ามอเตอร์ทุกตัวหมุนด้วยความเร็วเพิ่มขึ้นหรือลดลงพร้อมกันจะทำให้โดรนเคลื่อนที่ขึ้นหรือลงตามแนวดิ่ง และด้วยการที่เรามี 4 Inputs แต่มี 6 Outputs นั้นทำให้การควบคุมโดรนเป็นแบบ Underactuated ซึ่งมีความซับซ้อนพอสมควร เพื่อที่จะคอนโทรลโดรนได้นั้น ให้สมมติว่าตัวโดรนเป็นวัตถุชิ้นเดียว (Rigid body) โครงสร้างมีความสมมาตร (Symmetric) ความเร็วของแต่ละมอเตอร์ จะทำให้ใบพัดมีแรงยก เราสามารถบอกลักษณะการเคลื่อนที่ของโดรนได้ ดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3: ทิศทางการเคลื่อนที่ของโดรนเมื่อมอเตอร์หมุนด้วยความเร็วต่างๆ

### 2.1.2 Euler angles

มุมออยเลอร์เป็นมุม 3 มุมที่คิดโดย Leonhard Euler เพื่อที่จะเอาไว้ใช้อธิบายการเอียงของวัตถุในปริภูมิ ใช้ตัวแปรเพียงแค่ 3 ตัวเท่านั้น การบอกมุมออยเลอร์สามารถบอกได้หลายวิธี ในที่นี้เราใช้ ZYX Euler angles ในการอธิบายมุมเอียงของเฟรมอ้างอิงที่เราสนใจเทียบกับเฟรมอ้างอิงเฟรมอื่น มุมออยเลอร์เกิดจากการหมุนเฟรมรอบแกนสามแกน มาหมุนเรียงต่อกัน ต่อไปจะเป็นการรวมเมทริกการหมุนสามแกนเข้าด้วยกัน

$$R_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c(\phi) & -s(\phi) \\ 0 & s(\phi) & c(\phi) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

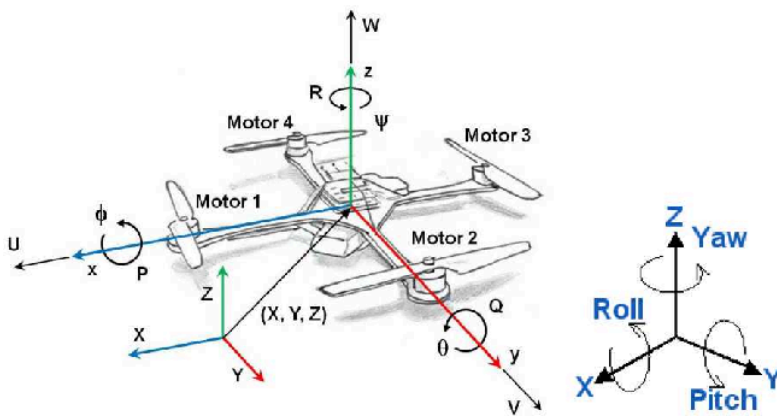
$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} c(\theta) & 0 & s(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -s(\theta) & 0 & c(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$R_z(\psi) = \begin{bmatrix} c(\psi) & -s(\psi) & 0 \\ s(\psi) & c(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

โดยที่  $c(\phi) = \cos(\phi)$ ,  $s(\phi) = \sin(\phi)$ ,  $c(\theta) = \cos(\theta)$ ,  $s(\theta) = \sin(\theta)$ ,  $c(\psi) = \cos(\psi)$ ,  $s(\psi) = \sin(\psi)$  จากเมทริกการหมุนแสดงให้เห็นว่า “Inertial frame” และ “Body frame” มีความสัมพันธ์กันเป็นเมทริกการหมุนคือ  $R_{zyx}(\phi, \theta, \psi)$

$$\begin{aligned} R_{zyx}(\phi, \theta, \psi) &= R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi) \\ &= \begin{bmatrix} c(\theta)c(\psi) & s(\phi)s(\theta)c(\psi) - c(\phi)s(\psi) & c(\phi)s(\theta)c(\psi) + s(\phi)s(\psi) \\ c(\theta)s(\psi) & s(\phi)s(\theta)s(\psi) + c(\phi)c(\psi) & c(\phi)s(\theta)s(\psi) - s(\phi)c(\psi) \\ -s(\theta) & s(\phi)c(\theta) & c(\phi)c(\theta) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.4)$$

เมทริกจากสมการที่ 2.4 เป็นเมทริกที่อธิบายถึงการหมุนจาก “Body frame” ไปยัง “Inertial frame” ดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4: ภาพแสดงการบอกเมทริกการหมุนของ Body frame

### 2.1.3 Qaudroter mathematical model

ในส่วนนี้จะเป็นการอธิบายสมการการเคลื่อนที่ของโดรน โดยใช้สมการของ Newton และ Euler มาช่วยในการอธิบายพลวัต (Dynamics) ของโดรน เพื่อใช้ทำแบบจำลอง (Simulating) และควบคุม (Controlling) ทำทางของโดรนด้วย เริ่มจากให้  $[x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi]^T$  เป็นเวกเตอร์ที่บอกตำแหน่งและมุม (linear/angular position) ของโดรนโดยเทียบจากเฟรมโลก (Inertial frame) และ  $[u \ v \ w \ p \ q \ r]^T$  เป็นเวกเตอร์ที่บอกความเร็วเชิงเส้นและความเร็วเชิงมุม (linear/angular velocity) ของโดรนโดยเทียบจากเฟรมโดรน (Body frame) พลวัตของโดรนจะเปิดจากเฟรมอ้างอิงสองเฟรมนี้มีความสัมพันธ์กัน

$$\begin{aligned}\nu &= R\nu_B \\ \omega &= T\omega_B\end{aligned}\tag{2.5}$$

โดยที่  $\nu = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$ ,  $\omega = [\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T$ ,  $\nu_B = [u \ v \ w]^T$ ,  $\omega_B = [p \ q \ r]^T$  และ  $T$  เป็นแมทริกซ์การแปลงมุมการหมุน (angular transformation)

$$T = \begin{bmatrix} 1 & s(\phi)t(\theta) & c(\phi)t(\theta) \\ 0 & c(\phi) & -s(\phi) \\ 0 & \frac{s(\phi)}{c(\theta)} & \frac{c(\phi)}{c(\theta)} \end{bmatrix}\tag{2.6}$$

โดยที่  $t(\theta) = \tan(\theta)$  ดังนั้นเราจะได้สมการจลศาสตร์ (Kinematic model) ของโดรนเป็น

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w[s(\phi)s(\psi) + c(\phi)c(\psi)s(\theta)] - v[c(\phi)s(\psi) - c(\psi)s(\phi)s(\theta)] + u[c(\psi)c(\theta)] \\ v[c(\phi)c(\psi) + s(\phi)s(\psi)s(\theta)] - w[c(\psi)s(\phi) - c(\phi)s(\psi)s(\theta)] + u[c(\theta)s(\psi)] \\ w[c(\phi)c(\theta)] - u[s(\theta)] + v[c(\theta)s(\phi)] \\ p + r[c(\phi)t(\theta)] + q[s(\phi)t(\theta)] \\ q[c(\phi)] - r[s(\phi)] \\ r\frac{c(\phi)}{c(\theta)} + q\frac{s(\phi)}{c(\theta)} \end{bmatrix}\tag{2.7}$$

จากกฎของนิวตันระดับความสัมพันธ์ของแรงรวมที่กระทำต่อโดรนดังเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$m(\omega_B \wedge \nu_B + \dot{\nu}_B) = \mathbf{f}_B\tag{2.8}$$

โดย  $m$  คือน้ำหนักของโดรน,  $\wedge$  คือ cross product และ  $\mathbf{f}_B = [f_x \ f_y \ f_z]^T \in \mathbf{R}^3$  คือแรงรวมจากสมการออยเลอร์ ให้แรงบิดรวมที่ใช้กับโดรน เป็นไปดังนี้

$$I\dot{\omega}_B + \omega_B \wedge (I\omega_B) = \mathbf{m}_B\tag{2.9}$$

โดย  $\mathbf{m}_B = [m_x \ m_y \ m_z]^T \in \mathbf{R}^3$  เป็นแรงบิดรวม และ  $I$  เป็นเมทริกซ์ของความเฉื่อย :

$$I = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \wedge \mathbf{R}^{3 \times 3}\tag{2.10}$$

ดังนั้น จะได้ dynamic model ของโดรนโดยอ้างอิง body frame ดังนี้

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m(\dot{u} + qw - rv) \\ m(\dot{v} - pw + ru) \\ m(\dot{w} + pv - qu) \\ \dot{p}I_x - qrI_y + qrI_z \\ \dot{q}I_y + prI_x - prI_z \\ \dot{r}I_z - pqI_x + pqI_y \end{bmatrix}\tag{2.11}$$



ซึ่งระบบต่าง ๆ จะเป็นไปตามสมการข้างต้นเมื่อกำหนดให้จุด origin และ body frame ตรงกับจุดเซนทรอยด์และ principal axes ของโดรน

## 2.2 Explicit MPC Control

## บทที่ 3

### Simulation

## บทที่ 4

### Analysis/Discussion

## บทที่ 5

### Conclusion