

2021/09/25

Functional Analysis Solutions

作者: 正寅

教材: 泛函分析讲义 (许全华, 马涛, 尹智著 第一版)

$$\rho := \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$$

目录

第 1 章 拓扑空间简介	4
第 2 章 完备度量空间	11
第 3 章 赋范空间和连续线性映射	23
第 4 章 Hilbert 空间	47
第 5 章 连续函数空间	69
第 6 章 Baire 定理及其应用	76
第 7 章 拓扑向量空间	84
第 8 章 Hahn-Banach 定理	90

拓扑空间简介

定理 1.3.2 的证明

证明: (\Rightarrow)(反证法) 假设 $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, 则

$$\left(\bigcap_{i \in I} F_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} F_i^c = E,$$

也即 E 存在开覆盖 $(F_i^c)_{i \in I}$, 由 E 为紧集可知存在有限集 $J \subset I$ 使得

$$E = \bigcup_{i \in J} F_i^c.$$

故 $\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$, 这与闭集族 $(F_i)_{i \in I}$ 的有限交性质相矛盾, 所以假设不成立.

(\Leftarrow) 同理可证. □

定理 1 (距离越小, 拓扑越小) 设 (E, d_1) 和 (E, d_2) 都是度量空间, 且 d_1 诱导的拓扑为 τ_1 , d_2 诱导的拓扑为 τ_2 , 若 $d_1 \leq d_2$, 则 $\tau_1 \subset \tau_2$; 若存在正常数 C_1, C_2 使得 $C_1 d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq C_2 d_2(x, y), \forall x, y \in E$, 则 $\tau_1 = \tau_2$. 换言之, 若两个度量等价, 则其诱导出的拓扑是相同的.

证明: 事实上只需要证明后半部分, 因为前半部分是后半部分的推论.

$$\begin{aligned} U \in \tau_1 &\Leftrightarrow \forall x \in U, \exists r > 0, \text{ 使得 } \{y \in E \mid d_1(x, y) < r\} \subset U \\ &\Leftrightarrow \forall x \in U, \exists r > 0, \text{ 使得 } \left\{ y \in E \mid \frac{1}{C_2} d_1(x, y) < \frac{r}{C_2} \right\} \subset U \\ &\Rightarrow \forall x \in U, \exists r > 0, \text{ 使得 } \left\{ y \in E \mid d_2(x, y) < \frac{r}{C_2} \right\} \subset U \\ &\Leftrightarrow U \in \tau_2. \end{aligned}$$

所以 $\tau_1 \subset \tau_2$, 同理可证明 $\tau_2 \subset \tau_1$, 故 $\tau_1 = \tau_2$. 在这里, 我们要建立起一个清醒的认识, 那就是度量越大, 其所对应的相同半径的开球越小. \square

求证: 设 d 是 E 上的度量, 则 $d, \min\{1, d\}, rd(r > 0)$ 都诱导出 E 上相同的拓扑.

证明: 记三者诱导的拓扑分别为 τ_1, τ_2, τ_3 , 要证明 $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$, 由上述性质知 $\tau_1 = \tau_3$ 显然成立, 故只需要证明 $\tau_1 = \tau_2$. 由 $d \geq \min\{1, d\}$ 知 $\tau_2 \subset \tau_1$. 又因为

$$\begin{aligned} U \in \tau_1 &\Leftrightarrow \forall x \in U, \exists r \in (0, 1), \text{ 使得 } \{y \in E \mid d(x, y) < r\} \subset U \\ &\Rightarrow \forall x \in U, \exists r \in (0, 1), \text{ 使得 } \{y \in E \mid \min\{1, d(x, y)\} < r\} \subset U \\ &\Rightarrow U \in \tau_2, \end{aligned}$$

所以 $\tau_1 \subset \tau_2$, 从而 $\tau_1 = \tau_2$. 显然 d 与 $\min\{1, d\}$ 不是等价的度量, 由此可见不等价的度量也可以诱导出相同的拓扑. \square

1. 证明定理 1.1.22.

证明: (1) 显然.

(2) 要证 $E \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{E \setminus A}$, 即证 $\overset{\circ}{A} = E \setminus (\overline{E \setminus A})$, 而

$$\begin{aligned} x \in E \setminus (\overline{E \setminus A}) &\Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{N}(x), \text{ s.t. } U \cap (E \setminus A) = \emptyset \\ &\Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{N}(x), \text{ s.t. } U \subset A \\ &\Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{A}. \end{aligned}$$

故结论得证.

(3) 因为 $A \subset A \cup B$, 所以 $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$, 同理 $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, 故 $\overline{A \cup B} \subset \overline{A \cup B}$, 又 $\overline{A \cup B} \supset A \cup B \Rightarrow \overline{(\overline{A \cup B})} = \overline{A \cup B} \supset \overline{A \cup B}$, 结合双向包含关系可得 $\overline{A \cup B} = \overline{A \cup B}$, 同理可证 $\widehat{\overline{A \cap B}} = \overset{\circ}{A \cap B}$. \square

2. (a) 设 (E, d) 是一个度量空间, $F \subset E$. 证明 d 在 F 上诱导的拓扑和 d 在 E 上诱导的拓扑空间在 F 上的限制一致.

(b) 设 E 是一个拓扑空间, F 是 E 的拓扑子空间, $A \subset F$. 用实例说明 A 是 F 中闭集但是在 E 中不一定是闭集, 以及 A 在 F 中是开集但在 E 中不一定是开集.

证明: (a) 记 d 在 F 上诱导的拓扑为 τ , 在 E 上诱导的拓扑为 τ' , 则需要证明 $\tau'|_F = \tau$.

$$\begin{aligned} U \in \tau'|_F &\Leftrightarrow \exists V \in \tau', \text{ s.t. } U = V \cap F \\ &\Leftrightarrow \forall x \in U, \exists r > 0, \text{ s.t. } B(x, r) \subset V \text{ 且 } U = V \cap F \\ &\Leftrightarrow \forall x \in U, \exists r > 0, \text{ s.t. } B(x, r) \cap F \subset U \\ &\Leftrightarrow U \in \tau \end{aligned}$$

故 $\tau'|_F = \tau$.

(b) 取 E 为二维欧氏空间, F 为一维欧氏空间, 则 F 中的开集和闭集在 E 中分别不再是开集和闭集. \square

3. 设 E 是 $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 和另外两个不同的点构成的并集, 如 $E = \mathbb{R}^* \cup \{-\infty, +\infty\}$. 并设 τ 是 E 中满足如下条件的子集 U 构成的族:

- (i) 在 \mathbb{R}^* 的拓扑下, $U \cap \mathbb{R}^*$ 在 \mathbb{R}^* 中是开的.
- (ii) 若 $-\infty \in U$ 或 $+\infty \in U$, 则 U 包含一个形如 $\mathbb{R}^* \cap V$ 的集合, 其中 V 是 \mathbb{R} 中零点的一个邻域.

证明:

- (a) τ 是 E 上的拓扑.
- (b) τ 不是 Hausdorff 空间.
- (c) 任一点 $x \in E$ 的所有邻域的交集为 $\{x\}$.

证明: (a)

- 显然 $\emptyset, E \in \tau$
- 任意并性质: 设 $(U_i)_{i \in I} \subset \tau$, 需要证明 $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$. 首先验证其满足条件 (i): 对于每个 $i \in I$, 因为 $U_i \cap \mathbb{R}^*$ 在 \mathbb{R}^* 中是开的, 所以存在 \mathbb{R} 中的开集 U_i^* 使得 $U_i \cap \mathbb{R}^* = U_i^* \cap \mathbb{R}^*$, 故

$$\left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \cap \mathbb{R}^* = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap \mathbb{R}^*) = \left(\bigcup_{i \in I} U_i^* \right) \cap \mathbb{R}^* \text{ 在 } \mathbb{R}^* \text{ 中是开的.}$$

再验证其满足条件 (ii): 不妨设 $-\infty \in \bigcup_{i \in I} U_i$, 则存在某个 $i_0 \in I$, s.t. $-\infty \in U_{i_0}$, 则 U_{i_0} 包含一个形如 $\mathbb{R}^* \cap V$ 的集合, V 是 \mathbb{R} 中零点的一个邻域, 从而 $\bigcup_{i \in I} U_i$ 必然包含此 $\mathbb{R}^* \cap V$.

- 有限交性质: 验证方法与上面方法类似.

(b) 考虑 $+\infty$ 和 $-\infty$ 这两个特殊的点, 由条件 (ii) 可知 $+\infty$ 与 $-\infty$ 不存在不相交的开邻域, 故 τ 不是 Hausdorff 空间.

(c) 若 $x \in \mathbb{R}^*$, 则由于 \mathbb{R}^* 是 Hausdorff 空间, 故 x 的所有邻域的交集为 $\{x\}$; 若 $x \in E \setminus \mathbb{R}^*$, 如 $x = -\infty$, 取 $-\infty$ 的一系列邻域 $(-\infty \cap ((-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \cap \mathbb{R}^*))_{n \geq 1}$. 显然

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\infty \cap \left(\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \cap \mathbb{R}^* \right) \right) = -\infty.$$

因此 $-\infty$ 的所有邻域的交集必为单点集 $\{-\infty\}$. \square

4. 证明: 紧空间中的任一序列均有凝聚点.

证明: 设 E 是紧空间, $(x_n)_{n \geq 1} \subset E$ 为任一序列.

当 $(x_n)_{n \geq 1}$ 为有限集时, $(x_n)_{n \geq 1}$ 从某一项开始必为常值, 此常值即为 $(x_n)_{n \geq 1}$ 的凝聚点.

当 $(x_n)_{n \geq 1}$ 为无限集时, 假设 $(x_n)_{n \geq 1}$ 没有凝聚点, 则对任意 $x \in E$, 存在 $V_x \in \mathcal{N}(x)$ 使得

$$V_x \cap (x_n)_{n \geq 1} \setminus \{x\} = \emptyset.$$

因为 E 为紧空间, 所以 E 的开覆盖 $\bigcup_{x \in E} V_x$ 存在有限子覆盖 $\bigcup_{i=1}^n V_{x_i} = E$. 然而 $\bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$ 至多包含 $(x_n)_{n \geq 1}$ 中的有限个点, 这与 $(x_n)_{n \geq 1}$ 为无限集相矛盾. \square

5. 证明: 有限维的赋范空间是局部紧的.

证明: 设 E 为有限维赋范空间, 教材注 3.1.12 (2) 表明在有限维空间中有界闭集为紧集. 任取 $x \in E$, $\overline{B(x, 1)}$ 即为 x 的紧邻域, 故有限维的赋范空间是局部紧的. \square

6. 设 (E, τ) 是一个局部紧的但不是紧的 Hausdorff 空间. 我们在 E 上增加一个点, 记作 ∞ , 然后定义 $\hat{E} = E \cup \{\infty\}$. 在 \hat{E} 上定义集族 $\hat{\tau}$, $U \in \hat{\tau}$ 当且仅当 $U \in \tau$ 或者存在 E 中的紧集 K , 使得 $U = \hat{E} \setminus K$. 证明:

- (a) $\hat{\tau}$ 是 \hat{E} 上的拓扑.
- (b) $\hat{\tau}$ 在 E 上的限制等于 τ , 即 (E, τ) 是 $(\hat{E}, \hat{\tau})$ 的拓扑子空间.
- (c) $(\hat{E}, \hat{\tau})$ 是一个紧 Hausdorff 空间.
- (d) E 在 \hat{E} 中稠密.

注 拓扑空间 $(\hat{E}, \hat{\tau})$ 通常被称为 (E, τ) 的 Alexandorff 紧化空间 (Alexandorff compactification or one-point compactification).

证明: (a) 显然 $\emptyset, \hat{E} \in \hat{\tau}$.

下面验证任意并性质: 设 $(U_i)_{i \in I} \subset \hat{\tau}$, 要证明 $\bigcup_{i \in I} U_i \in \hat{\tau}$, 分三种情况讨论:

(1) 当 $(U_i)_{i \in I} \subset \tau$ 时, $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \hat{\tau}$. (2) 当对任意 $i \in I$, $U_i = \hat{E} \setminus K_i$ 时, 其中 K_i 为 E 中紧集. 注意到 $\bigcap_{i \in I} K_i$ 仍为 E 中紧集且

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} \hat{E} \setminus K_i = \hat{E} \setminus \left(\bigcap_{i \in I} K_i \right),$$

因此 $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$. (3) 存在非空真子集 $J \subset I$ 使得当 $i \in J$ 时, $U_i = \hat{E} \setminus K_i$, K_i 为 E 中紧集; 当 $i \in I \setminus J$ 时, $U_i \in \tau$, 则

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} U_i &= \left(\bigcup_{i \in J} \hat{E} \setminus K_i \right) \cup \left(\bigcup_{i \in I \setminus J} U_i \right) = \left(\hat{E} \setminus \bigcap_{i \in J} K_i \right) \cup \left(\hat{E} \setminus \bigcap_{i \in I \setminus J} U_i^c \right) \\ &= \hat{E} \setminus \left(\left(\bigcap_{i \in J} K_i \right) \cap \left(\bigcap_{i \in I \setminus J} U_i^c \right) \right). \end{aligned}$$

而 $(\bigcap_{i \in J} K_i) \cap (\bigcap_{i \in I \setminus J} U_i^c)$ 是 E 中紧集, 故 $\bigcup_{i \in I} U_i \in \hat{\tau}$.

再验证有限交性质: 只需要考虑两个开集 $V_1, V_2 \in \hat{\tau}$ 即可. 分三种情形:

(1) 若 $V_1, V_2 \in \tau$, 则 $V_1 \cap V_2 \in \tau \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \hat{\tau}$. (2) 若 $V_1 = \hat{E} \setminus K_1, V_2 = \hat{E} \setminus K_2$, 其中 K_1 和 K_2 是 E 中的紧集, 则 $V_1 \cap V_2 = (\hat{E} \setminus K_1) \cap (\hat{E} \setminus K_2) = \hat{E} \setminus (K_1 \cup K_2)$. 由于 $K_1 \cup K_2$ 为 E 中紧集, 故 $V_1 \cap V_2 \in \hat{\tau}$. (3) 若 $V_1 \in \tau$ 且 $V_2 = \hat{E} \setminus K_2$, 其中 K_2 是 E 中紧集, 则 $V_1 \cap V_2 = V_1 \cap (\hat{E} \setminus K_2) = V_1 \cap (E \setminus K_2) \in \tau$. 由此可知有限交性质成立.

(b) 往证 $\hat{\tau}|_E = \tau$.

对于任意 $U \in \tau$, 有 $U \in \hat{\tau}$, 故 $U = U \cap E \in \hat{\tau}|_E$, 从而 $\tau \subset \hat{\tau}|_E$.

对于任意 $U \in \hat{\tau}|_E$, 存在 $\hat{U} \in \hat{\tau}$ 使得 $U = \hat{U} \cap E$. 当 $\hat{U} \in \tau$ 时, $U = \hat{U} \cap E = \hat{U} \in \tau$; 当 $\hat{U} = \hat{E} \setminus K$ 时, $U = (\hat{E} \setminus K) \cap E = E \setminus K \in \tau$, 从而 $\hat{\tau}|_E \subset \tau$.

因此 $\hat{\tau}|_E = \tau$.

(c) 首先证明 $(\hat{E}, \hat{\tau})$ 是紧空间. 设 $\{U_i \mid i \in I\}$ 为 \hat{E} 的开覆盖, 则存在 $i_0 \in I$ 使得 $\infty \in U_{i_0}$ 且 $U_{i_0} = \hat{E} \setminus K_{i_0}$, 其中 K_{i_0} 为 E 中紧集. 由于 $\{U_i \cap E \mid i \in I, i \neq i_0\}$ 为 K_{i_0} 的开覆盖, 故存在 K_{i_0} 的有限子覆盖 $\{U_i \cap E\}_{i=1}^n$, 那么 $\{U_{i_0}, U_1, \dots, U_n\}$ 即为 \hat{E} 的有限子覆盖.

然后证明 $(\hat{E}, \hat{\tau})$ 为 Hausdorff 空间. 事实上, 只需要证明 $\forall x \in E$ 与 ∞ 存在不相交的开邻域即可. 由于 E 局部紧, 所以存在开集 V 使得 $x \in V \subset E$ 且 \bar{V} 为紧集. 因此, 取 x 的开邻域 V 和 ∞ 的开邻域 $\hat{E} \setminus \bar{V}$ 即可. \square

7. 设 E 是一个局部紧的 Hausdorff 空间, 则 E 中每一点都有一个紧邻域基.

证明: 对于 E 中任意一点 x , 由 E 局部紧可知 x 点处存在紧邻域 W . 对于点 x 的任意开邻域 G , 我们的目标是寻找紧集 \bar{V} 使得 $x \in \bar{V} \subset G$.

若 $W \subset G$, 取 $\bar{V} = W$ 即可;

若 $W \not\subset G$, 记 $A = W \cap G^c$, 显然 A 是非空紧集. $\forall y \in A$, 由 Hausdorff 条件可知 y 与 x 存在不相交的开邻域 U_y 和 W_y 使得 $W_y \subset W$. 因为 A 为紧集, 所以存在 $y_1, y_2, \dots, y_k \in A$, 使得 $A \subset \bigcup_{i=1}^k U_{y_i}$, 令

$$U = \bigcup_{i=1}^k U_{y_i}, \quad V = \bigcap_{i=1}^k W_{y_i},$$

则 U 和 V 都是开集并且 $U \cap V = \emptyset$, 这意味着 $\bar{V} \cap U = \emptyset$, 从而有

$$\bar{V} \cap G^c = \bar{V} \cap (W \cap G^c) = \bar{V} \cap A \subset \bar{V} \cap U = \emptyset,$$

故 $\bar{V} \subset G$, 此时的 \bar{V} 就是我们要寻找的紧集. \square

8. 证明注 1.4.2 中的命题 (1), (3) 和 (4).

命题 (1) 证明: 记所有基础开集的并集构成的集合为 τ , 下面证明 τ 是 E 上的拓扑.

(i) 显然 $\emptyset, E \in \tau$

(ii) 任意并性质: 设 $(V_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subset \tau$, 则每个 V_α 可以表为:

$$V_\alpha = \bigcup_{\beta \in \Lambda_\alpha} O_\beta = \bigcup_{\beta \in \Lambda_\alpha} \left(\prod_{i \in J_\beta} U_i \times \prod_{i \in I \setminus J_\beta} E_i \right) \quad (J_\beta \text{ 有限})$$

故

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \bigcup_{\beta \in \Lambda_\alpha} \left(\prod_{i \in J_\beta} U_i \times \prod_{i \in I \setminus J_\beta} E_i \right)$$

上式仍为基础开集的并, 故 $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha \in \tau$

(iii) 有限交性质: 设 $(V_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subset \tau$, 其中 $\Lambda = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 为有限指标集, 则

$$V_\alpha = \bigcup_{\beta \in \Lambda_\alpha} O_\beta$$

故

$$\begin{aligned} \bigcap_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha &= \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \bigcup_{\beta \in \Lambda_\alpha} O_\beta \\ &= \left(\bigcup_{\beta_1 \in \Lambda_{\alpha_1}} O_{\beta_1} \right) \cap \left(\bigcup_{\beta_2 \in \Lambda_{\alpha_2}} O_{\beta_2} \right) \cap \dots \cap \left(\bigcup_{\beta_n \in \Lambda_{\alpha_n}} O_{\beta_n} \right) \\ &= \bigcup_{\beta_1 \in \Lambda_{\alpha_1}} \bigcup_{\beta_2 \in \Lambda_{\alpha_2}} \dots \bigcup_{\beta_n \in \Lambda_{\alpha_n}} (O_{\beta_1} \cap O_{\beta_2} \cap \dots \cap O_{\beta_n}) \end{aligned}$$

注意到有限个基础开集的交仍为基础开集, 故上式为基础开集的并, 因此

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha \in \tau.$$

□

命题 (3) 证明: 记 \mathbb{R}^n 上的自然拓扑为 τ_1 , $\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ 上的乘积拓扑为 τ_2 , 为叙述方便, 记 $E := \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$.

首先证明 $\tau_1 \subset \tau_2$. 只需证明 (E, τ_1) 中的任意开球为 (E, τ_2) 中的开集即可. 任取 $x \in E$ 和开球 $B(x, r)$, 选取 (E, τ_2) 中含 x 的开集 $O = \prod_{i=1}^n B_i(x_i, \frac{r}{\sqrt{n}})$, 则对于任意 $y \in O$, 有 $(x_i - y_i)^2 < \frac{r^2}{n}$, 从而

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 < r \right)^{1/2} \Rightarrow y \in B(x, r),$$

故 $O \subset B(x, r)$, 因此 $\tau_1 \subset \tau_2$.

然后证明 $\tau_2 \subset \tau_1$. 只需证明 (E, τ_2) 中任意基础开集为 (E, τ_1) 中的开集即可. 任取 $x \in E$ 和 (E, τ_2) 中的基础开集 $O = \prod_{i=1}^n B_i(x_i, r_i)$. 令 $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$, 取 (E, τ_1) 中的开球 $B(x, r)$, 则对于任意 $y \in B(x, r)$, 有 $\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 < r^2$, 从而对任意 $1 \leq i \leq n$ 有

$$(x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 < r^2 \leq r_i^2,$$

所以 $y_i \in B_i(x_i, r_i) \Rightarrow y \in O$, 故 $B(x, r) \subset O$, 因此 $\tau_2 \subset \tau_1$. □

命题 (4) 证明: 因为

$$\left(\prod_{i \in I} F_i \right)^c = \bigcup_{i_0 \in I} \left(F_{i_0}^c \times \bigcup_{i \in I \setminus \{i_0\}} F_i \right) \text{ 为开集,}$$

所以 $\prod_{i \in I} F_i$ 为 E 中闭集. □

9. 把定理 1.4.9 中的距离换成下面的距离

$$\delta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n).$$

证明由 δ 诱导的拓扑也与乘积拓扑相同.

10. 证明一列紧度量空间的乘积空间 (赋予乘积拓扑) 是紧的可度量化空间.

11. 设 $E = \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \mid \forall n \geq 1, x_n = 0 \text{ 或 } 1\} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$. 对每个 $x = (x_n)_{n \geq 1} \in E$, 令

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x_n}{3^n}.$$

在 $\{0, 1\}$ 上赋予离散拓扑 (这实际上对应着自然的距离 $d(0, 1) = 1$), 则在 E 上有相应的乘积拓扑. 证明 ϕ 是 E 到 \mathbb{R} 的紧子集 $C = \phi(E)$ 上的同胚.

完备度量空间

推论 (推论 2.5.7) 若度量空间 (E, d) 完备, 则 $A \subset E$ 是相对紧的当且仅当 A 是预紧的.

证明: (\Rightarrow) 设 $A \subset E$ 相对紧, 则 \bar{A} 是 E 中紧集, 故 \bar{A} 预紧, 从而 $A \subset \bar{A}$ 也是预紧的.

(\Leftarrow) 设 A 是预紧的, 则对任意 $\epsilon > 0$, A 存在有限的 $\frac{\epsilon}{2}$ -网 $\{x_i\}_{i=1}^n$, 故 $A \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \frac{\epsilon}{2})$. 注意到有限个闭集的并仍为闭集, 故

$$\bar{A} \subset \bigcup_{i=1}^n \overline{B(x_i, \frac{\epsilon}{2})} \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \epsilon).$$

所以 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 为 A 的有限 ϵ -网, 从而 \bar{A} 预紧 (从上述证明过程中可以看出 A 预紧 $\iff \bar{A}$ 预紧). 由于完备度量空间的闭子集完备, 故 \bar{A} 完备, 结合 \bar{A} 完备和预紧即知 \bar{A} 为紧集, 从而 A 相对紧. \square

1. 完备性不是一个拓扑概念, 我们用两个例子说明这一点.

(a) 设有函数 $\phi(x) = \frac{x}{1+|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, 并定义

$$d(x, y) = |\phi(x) - \phi(y)|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

证明由此定义的 d 是 \mathbb{R} 上的距离并和 \mathbb{R} 上通常意义下的拓扑一致, 但 d 不完备.

(b) 更一般地, 设 O 是完备度量空间 (E, d) 上的开子集, 且 $O \neq E$. 映射 $\phi: O \rightarrow E \times \mathbb{R}$ 定义为

$$\phi(x) = \left(x, \frac{1}{d(x, O^c)} \right) := (x, \rho(x)), \quad \forall x \in O.$$

证明 ϕ 是从 O 到 $E \times \mathbb{R}$ 的一个闭子集上的同胚. 并由此导出 O 上存在一个完备的距离, 由其所诱导的拓扑和 d 在 O 上所诱导的拓扑一致 (注意, (O, d_O) 一般并不完备).

证明: (a) 易知 $\phi(x)$ 是严格单调递增函数且 $-1 < \phi(x) < 1, |\phi'(x)| \leq 1$

- $d(x, y) \geq 0$ 且 $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$
- $d(x, y) = |\phi(x) - \phi(y)| = |\phi(y) - \phi(x)| = d(y, x)$
- $d(x, y) = |\phi(x) - \phi(y)| \leq |\phi(x) - \phi(z)| + |\phi(y) - \phi(z)| = d(x, z) + d(y, z)$

因此, d 是一个距离.

下证两拓扑一致 (距离越小, 拓扑越小, 下面第一个包含关系的推导是自然的), 记 τ 为自然拓扑, τ_d 为由 d 诱导的拓扑. 一方面,

$$\begin{aligned} U \in \tau_d &\Leftrightarrow \forall x \in U, \exists r > 0, s.t. \{y \mid |\phi(x) - \phi(y)| < r\} \subset U \\ &\Rightarrow \forall x \in U, \exists r > 0, s.t. \{y \mid |x - y| < r\} \subset U \\ &\Rightarrow U \in \tau. \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} U \in \tau &\Leftrightarrow \forall x \in U, \exists r > 0, s.t. \{y \mid |y - x| < r\} \subset U \\ &\Rightarrow \forall x \in U, \text{取 } s = \min\{\phi(x) - \phi(x - r), \phi(x + r) - \phi(x)\}, \text{则 } \{y \mid |\phi(y) - \phi(x)| < s\} \subset U \\ &\Rightarrow U \in \tau_d. \end{aligned}$$

综合两个方向知 $\tau = \tau_d$.

最后证明 d 不完备. 取集列 $\{A_n\}_{n=1}^\infty (A_n = [n, +\infty))$, 则

$$\text{diam } A_n = \sup_{x, y \in A_n} |\phi(x) - \phi(y)| = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

但 $\bigcap_{n \geq 1} A_n = \emptyset$, 由完备性的等价推论知 d 不完备.

(b) 由于

- ϕ 是连续的一一对应. $\phi_1 = \text{id}_O : x \mapsto x$ 是连续的, 且 $\phi_2 = \rho(x) : x \mapsto \frac{1}{d(x, O^C)}$ 是连续的, 故 ϕ 连续, 由 ϕ_1 是一一对应知 ϕ 是一一对应.
- $\phi(O)$ 是闭集. 只需证明 $\phi(O)$ 完备, 任取 $\phi(O)$ 中的 Cauchy 序列 $\{(x_n, \rho_n)\}$, 设其在 $E \times \mathbb{R}$ 中收敛到 (x, ρ) , 由 Cauchy 序列的有界性知存在 $M > 0$, 使得 $0 \leq \rho_n < M$, 且 $x \in \overline{O}$, 则 $x \in O$ 或者 $x \in \partial O$. 若 $x \in \partial O$, 则 $d(x, O^C) = 0$, 故存在 n_0 , 使得 $d(x_{n_0}, O^C) < \frac{1}{M} \Rightarrow \rho_{n_0} > M$, 矛盾. 所以 $x \in O$, 因此 $(x, \rho) \in \phi(O)$, 故 $\phi(O)$ 完备.
- ϕ^{-1} 连续. 由 $(x_n, \rho_n) \rightarrow (x, \rho)$ 显然得到 $x_n \rightarrow x$, 故 ϕ^{-1} 连续

综上得知, ϕ 是从 O 到 $E \times \mathbb{R}$ 上的闭子集的同胚.

记 $E \times \mathbb{R}$ 上的度量为 δ , 定义 d^* 为 $d^*(x_1, x_2) = \delta(\phi(x_1), \phi(x_2))$, 容易验证 d^* 是 O 上的一个完备的距离, 记 d^* 诱导的拓扑为 τ^* , d 诱导的拓扑为 τ , 则: 由 $d(x, y) \leq d^*(x, y) = \max\{d(x, y), |\rho(x) - \rho(y)|\}$ 知 $\tau \subset \tau^*$, 又: 另一个方向待完善. \square

2. 证明度量空间 (E, d) 是完备的充分必要条件是: 对 E 中任意序列 (x_n) , 若对任一个 $n \geq 1$ 有 $d(x_n, x_{n+1}) \leq 2^{-n}$, 则序列 (x_n) 收敛.

证明: $(\Rightarrow) \forall \varepsilon > 0$, 取 $N = [1 - \log_2 \varepsilon]$, 对于任意 $m, n > N$ 有

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{m-1}} < \varepsilon,$$

所以 (x_n) 是 Cauchy 序列, 因 (E, d) 完备, 故 (x_n) 在 E 中收敛.

(\Leftarrow) 任取 (E, d) 中的 Cauchy 序列 $(x_n)_{n \geq 1}$. 对于 $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$, 存在 N_1 , 使得对于 $\forall m, n \geq N_1$ 有 $d(x_m, x_n) < \frac{1}{2}$; 对于 $\varepsilon_2 = \frac{1}{2^2}$, 存在 $N_2 > N_1$, 使得对于 $\forall m, n \geq N_2$ 有 $d(x_m, x_n) < \frac{1}{2^2}$; 依次进行下去可得 $(x_n)_{n \geq 1}$ 的子列 $(x_{N_k})_{k \geq 1}$ 且此子列满足对于任意 $k \geq 1$ 有 $d(x_{N_k}, x_{N_{k+1}}) < 2^{-k}$. 由假设条件知 $(x_{N_k})_{k \geq 1}$ 收敛, 因此 $(x_n)_{n \geq 1}$ 也收敛, 由此证明 (E, d) 完备. \square

3. 设 (E, d) 是度量空间, (x_n) 是 E 中的 Cauchy 序列, 并有 $A \subset E$. 假设 A 的闭包 \bar{A} 在 E 中完备并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, A) = 0$. 证明 (x_n) 在 E 中收敛.

证明: 先证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \bar{A}) = 0$. 任取 $x \in A, y \in \bar{A}$, 有

$$d(x_n, y) \leq d(x_n, x) + d(x, y),$$

上述不等式关于 $x \in A$ 取下确界得

$$d(x_n, y) \leq d(x_n, A) + \inf_{x \in A} d(x, y) = d(x_n, A),$$

上述不等式再关于 $y \in \bar{A}$ 取下确界得

$$d(x_n, \bar{A}) \leq d(x_n, A).$$

令 $n \rightarrow \infty$ 即得 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \bar{A}) = 0$.

令 $(y_n)_{n \geq 1}$ 为 \bar{A} 中满足 $d(x_n, y_n) = d(x_n, \bar{A})$ 的序列, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$ 及 $(x_n)_{n \geq 1}$ 是 Cauchy 序列有

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall m, n > N, d(x_n, y_n) < \varepsilon/3, d(x_n, x_m) < \varepsilon/3.$$

故

$$d(y_n, y_m) \leq d(y_n, x_n) + d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) < \varepsilon.$$

从而 $(y_n)_{n \geq 1}$ 是 Cauchy 序列, 由 \bar{A} 的完备性知 $(y_n)_{n \geq 1}$ 收敛, 记为 $y_n \rightarrow y$, 故

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall n > M, d(y_n, y) < \varepsilon/2, d(x_n, y_n) < \varepsilon/2.$$

因此 $d(x_n, y) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, y) < \varepsilon$, 从而说明 $x_n \rightarrow y$. \square

4. 设 (E, d) 是度量空间, $\alpha > 0$. 假设 $A \subset E$ 满足对任意 $x, y \in A$ 且 $x \neq y$, 必有 $d(x, y) \geq \alpha$. 证明 A 是完备的.

证明: 任取 A 中的 Cauchy 序列 $(x_n)_{n \geq 1}$, 由定义知对于题给常数 α , $\exists N > 0$, 使得对于 $\forall m, n > N$, 有 $d(x_m, x_n) < \alpha$, 结合条件知 $\forall m, n > N, x_m = x_n$, 因此序列 $(x_n)_{n \geq 1}$ 收敛, 故 A 完备. \square

5. 设 (E, d) 是度量空间且 $A \subset E$. 假设 A 中任一 Cauchy 序列在 E 中收敛, 证明 A 的闭包 \bar{A} 是完备的.

证明: 任取 \bar{A} 中的 Cauchy 序列 $(x_n)_{n \geq 1}$. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在序列 $(y_n)_{n \geq 1} \subset A$ 使得对于 $\forall n \geq 1$ 有

$$d(x_n, y_n) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

因为 $(x_n)_{n \geq 1}$ 是 Cauchy 序列, 所以对于上述 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \geq 1$, 使得对于 $\forall m, n \geq N$ 有

$$d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{3},$$

于是

$$d(y_m, y_n) \leq d(y_m, x_m) + d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) < \varepsilon,$$

所以 $(y_n)_{n \geq 1}$ 是 A 中的 Cauchy 序列, 由题目条件知 $y_n \rightarrow y \in \bar{A}$, 于是对于上述 $\varepsilon > 0$, 存在 $M \geq 1$, 使得当 $n \geq M$ 时 $d(y_n, y) < \frac{2}{3}\varepsilon$, 从而 $d(x_n, y) < d(x_n, y_n) + d(y_n, y) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon$. 所以 $x_n \rightarrow y \in \bar{A}$, 由完备性定义知 \bar{A} 完备. \square

6. 设 (E, d) 是度量空间, 而 (x_n) 是 E 中发散的 Cauchy 序列. 证明

(a) 任取 $x \in E$, 序列 $(d(x, x_n))$ 收敛于一个正数, 记为 $g(x)$.

(b) 函数 $x \mapsto \frac{1}{g(x)}$ 是从 E 到 \mathbb{R} 的连续函数.

(c) 上面的函数无界.

证明: (a) 由 $(x_n)_{n \geq 1}$ 是 Cauchy 序列和三角不等式得

$$|d(x, x_m) - d(x, x_n)| \leq d(x_m, x_n) \rightarrow 0, \quad m, n \rightarrow \infty,$$

故序列 $(d(x, x_n))_{n \geq 1}$ 是 \mathbb{R} 中的 Cauchy 序列, 由 \mathbb{R} 的完备性知 $(d(x, x_n))_{n \geq 1}$ 收敛, 记收敛值为 $g(x)$.

显然 $g(x) \geq 0$, 若 $g(x) = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = 0$, 故 $x_n \rightarrow x$, 与 $(x_n)_{n \geq 1}$ 发散相矛盾, 因此 $g(x) > 0$.

(b) 只需证明 $g(x)$ 连续即可. 任意取定 $x_0 \in E$, 则

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x_0)| &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_0, x_n) \right| \\ &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} (d(x, x_n) - d(x_0, x_n)) \right| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_0) \\ &= d(x, x_0), \end{aligned}$$

上述不等式表明 $g(x)$ 为连续函数.

(c) 假设 $\frac{1}{g(x)}$ 有界, 即存在 $M > 0$, 使得 $\frac{1}{g(x)} < M \Rightarrow g(x) > \frac{1}{M} (\forall x \in E)$. 因为 $(x_n)_{n \geq 1}$ 是 Cauchy 序列, 所以存在 $N \geq 1$, 当 $\forall n > N$ 时, $d(x_n, x_N) < \frac{1}{M}$, 故 $g(x_N) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_N) \leq \frac{1}{M}$, 矛盾, 因此 $\frac{1}{g(x)}$ 无界. \square

7. 设 (E, d) 和 (F, δ) 都是度量空间, $f: (E, d) \rightarrow (F, \delta)$ 是一致连续的双射并且逆映射 f^{-1} 也是一致连续的. 证明对任意 $A \subset E$, $f(A)$ 完备当且仅当 A 完备.

证明: (\Leftarrow) 假设 A 完备, 要证明 $f(A)$ 完备. 任取 $f(A)$ 中的 Cauchy 序列 $(y_n)_{n \geq 1}$, 记 $f^{-1}(y_n) = x_n$, 从而得到 A 中的序列 $(x_n)_{n \geq 1}$, 由 f^{-1} 一致连续知对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\theta > 0$, 使得当 $\delta(y_m, y_n) < \theta$ 时, 有 $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. 对于上述的 $\theta > 0$, 存在 $N \geq 1$, 当 $m, n > N$ 时, $\delta(y_m, y_n) < \theta$, 此时 $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. 从而 $(x_n)_{n \geq 1}$ 是 A 中的 Cauchy 序列, 由 A 完备知 $(x_n)_{n \geq 1}$ 收敛, 记 $x_n \rightarrow x \in A$, 故 $y_n = f(x_n) \rightarrow f(x) \in f(A)$, 因此 $f(A)$ 是完备的.

(\Rightarrow) 由 f 的一致连续性可证, 证法同充分性. \square

8. 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是一致连续函数. 证明存在两个非负常数 a 和 b , 使得

$$|f(x)| \leq a\|x\| + b,$$

这里 $\|x\|$ 是 x 的欧氏范数.

证明: 为强调自变量为 \mathbb{R}^n 中向量, 下面记 $x \in \mathbb{R}^n$ 为 \vec{x} .

因为 $f(\vec{x})$ 一致连续, 所以对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $\|\vec{x} - \vec{y}\| < \delta$ 时, 有 $|f(\vec{x}) - f(\vec{y})| < \varepsilon$.

固定 ε 和 δ , 取定某 $0 < \delta' < \delta$. 则对于任意 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, 可将其表为

$$\vec{x} = \delta' \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \cdot N + \vec{x}_0, \quad \|\vec{x}_0\| < \delta',$$

其中 $N = \frac{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|}{\delta'}$. 可以将 $f(\vec{x})$ 进行如下和式分解:

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^N \left[f\left(\delta' \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} k + \vec{x}_0\right) - f\left(\delta' \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} (k-1) + \vec{x}_0\right) \right] + f(\vec{x}_0),$$

并且注意到 $\|\vec{x}_0\| = \|\vec{x}_0 - \vec{0}\| < \delta' < \delta$, 所以 $|f(\vec{x}_0) - f(\vec{0})| < \varepsilon$, 即 $f(\vec{0}) - \varepsilon < f(\vec{x}_0) < f(\vec{0}) + \varepsilon$, 记 $M = \max\{|f(\vec{0}) - \varepsilon|, |f(\vec{0}) + \varepsilon|\}$. 从而

$$\begin{aligned} |f(\vec{x})| &\leq \sum_{k=1}^N \left| f\left(\delta' \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} k + \vec{x}_0\right) - f\left(\delta' \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} (k-1) + \vec{x}_0\right) \right| + |f(\vec{x}_0)| \\ &\leq N \cdot \varepsilon + M \\ &= \frac{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|}{\delta'} \cdot \varepsilon + M \\ &\leq \frac{\|\vec{x}\| + \|\vec{x}_0\|}{\delta'} \cdot \varepsilon + M \\ &< \frac{\varepsilon}{\delta'} \|\vec{x}\| + (M + \varepsilon). \end{aligned}$$

记 $a = \frac{\varepsilon}{\delta'}$ 且 $b = M + \varepsilon$, 则上述不等式表明

$$|f(\vec{x})| \leq a\|\vec{x}\| + b. \quad \square$$

9. 设 $f: E \rightarrow F$ 是两个度量空间之间的连续映射, 并设 f 在 E 的每个有界子集上一致连续.

(a) 证明若 $(x_n)_{n \geq 1}$ 是 E 中的 Cauchy 序列, 则 $(f(x_n))_{n \geq 1}$ 也是 F 中的 Cauchy 序列.

(b) 设 E 在度量空间 E' 中稠密并且 F 是完备的, 证明 f 可以唯一地拓展成从 E' 到 F 的连续映射.

证明: (a) 因为 $(x_n)_{n \geq 1}$ 是 Cauchy 序列, 所以 $(x_n)_{n \geq 1}$ 为有界序列. 又 f 在 E 的有界子集上一致连续且一致连续映射将 Cauchy 序列映为 Cauchy 序列, 故 $(f(x_n))_{n \geq 1}$ 是 F 中的 Cauchy 序列.

(b) 记 E 上的度量为 d , F 上的度量为 δ .

首先构造 f 的一个扩展映射. 由于 E 在 E' 中稠密, 故对于 $\forall x \in E'$, 存在 $(x_n)_{n \geq 1} \subset E$ 使得 $(x_n)_{n \geq 1}$ 收敛于 x . 显然 $(x_n)_{n \geq 1}$ 为 Cauchy 序列, 故由 (a) 知 $(f(x_n))_{n \geq 1}$ 为 F 中的 Cauchy 序列, 又因 F 完备, 故存在 $y \in F$, 使得 $(f(x_n))_{n \geq 1}$ 收敛于 y . 定义 $\tilde{f}(x) = y$. 由于 E 中收敛于 x 的序列不唯一, 故需证明这一定义不依赖 $(x_n)_{n \geq 1}$ 的选择. 设 $(x'_n)_{n \geq 1}$ 也收敛于 x , 相应地, 定义 $y' = \tilde{f}(x'_n)$. 由于 $(x_n)_{n \geq 1}$ 和 $(x'_n)_{n \geq 1}$ 都收敛于 x , 故存在 $r > 0$ 使得 $(x_n)_{n \geq 1} \subset B(x, r)$ 且 $(x'_n)_{n \geq 1} \subset B(x, r)$. 由于 f 在有界集 $B(x, r)$ 上一致连续, 故对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 使得当 $d(x_n, x'_n) < \eta$ 时, 有 $\delta(f(x_n), f(x'_n)) < \varepsilon$. 对于上述 $\eta > 0$, 存在 N , 当 $n > N$ 时, 有 $d(x_n, x'_n) < \eta$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(f(x_n), f(x'_n)) = 0$. 由度量的连续性即得 $\delta(y, y') = 0$, 故 $y = y'$. 显然 $\tilde{f}|_E = f$, 故 \tilde{f} 为 f 的一个扩展. \square

10. 构造一个反例说明: 在不动点定理中, 如果我们将映射 f 满足的条件减弱为

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y), \quad \forall x, y \in E \text{ 且 } x \neq y,$$

则结论不成立.

证明: 取函数 $f(x) = (x^2 + 1)^{1/2}$, 不妨设 $x > y$, 则由下面推导过程:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1} < x - y &\Leftrightarrow 2 - 2\sqrt{x^2 + 1}\sqrt{y^2 + 1} < -2xy \\ &\Leftrightarrow 1 + xy < \sqrt{x^2 + 1}\sqrt{y^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow 1 + x^2y^2 + 2xy < x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow 0 < (x - y)^2, \end{aligned}$$

可知 $f(x)$ 满足题给条件, 显然 $f(x)$ 没有不动点. □

11. 设 (E, d) 是一个完备的度量空间, f 是其上的映射, 并满足 $f^n = f \circ \cdots \circ f$ (n 次幂) 是压缩映射. 证明 f 有唯一的不动点, 并给出例子说明 f 可以不连续.

证明: 因为 f^n 是压缩映射, 所以 f^n 存在唯一的不动点 $x_0 \in E$, 即 $f^n(x_0) = x_0$. 那么就有

$$f^n(f(x_0)) = f(f^n(x_0)) = f(x_0).$$

这说明 $f(x_0)$ 也是 f^n 的不动点, 而由不动点的唯一性知 $f(x_0) = x_0$, 即 x_0 为 f 的不动点.

下证 f 的不动点唯一, 假设 f 存在另一个不动点 y_0 , 即 $f(y_0) = y_0$, 则由归纳法可推出 $f^n(y_0) = y_0$. 由 f^n 的不动点的唯一性知 $y_0 = x_0$.

综上所述, f 的不动点存在且唯一. □

12. 记区间 $I = (0, \infty)$ 上通常的拓扑为 τ .

(a) 证明 τ 可由如下完备的距离 d 诱导:

$$d(x, y) = |\log x - \log y|.$$

(b) 设函数 $f \in C^1(I)$ 满足对某个 $\lambda < 1$, 任取 $x \in I$, 都有 $|f'(x)| \leq \lambda f(x)$. 证明 f 在 I 上存在唯一的不动点.

证明: (a) 将距离 d 诱导的拓扑记为 τ_d .

$$\begin{aligned} U \in \tau &\Leftrightarrow \forall x \in U, \exists r > 0, \text{ s.t. } \{y > 0 \mid |y - x| < r\} \subset U \\ &\Rightarrow \forall x \in U, \exists r^* = \ln\left(\frac{r}{x} + 1\right) > 0, \text{ s.t. } \{y > 0 \mid |\log y - \log x| < r^*\} \subset U \\ &\Rightarrow U \in \tau_d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U \in \tau_d &\Leftrightarrow \forall x \in U, \exists r > 0, s.t. \{y > 0 \mid |\log y - \log x| < r\} \subset U \\
&\Rightarrow \forall x \in U, \exists r^* = x(1 - e^{-r}) > 0, s.t. \{y > 0 \mid |y - x| < r^*\} \subset U \\
&\Rightarrow U \in \tau
\end{aligned}$$

因而 τ 可由距离 d 诱导, 下面证明距离 d 是完备的:

任取 (I, d) 中的 Cauchy 序列 $(x_n)_{n \geq 1}$, 记 $y_n = \log x_n \in \mathbb{R}$, 则

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall m, n > N, |\log x_m - \log x_n| < \varepsilon$$

也即

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall m, n > N, |y_m - y_n| < \varepsilon$$

故 $(y_n)_{n \geq 1}$ 是 $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ 中的 Cauchy 序列 ($d_{\mathbb{R}}$ 表示自然距离), 由 $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ 的完备性知

$$\exists y \in \mathbb{R}, s.t. y_n \rightarrow y$$

令 $x = e^y \in I$, 则有 $d(x_n, x) = |\log x_n - \log x| = |y_n - y| \rightarrow 0$, 从而说明 (I, d) 完备.

(b) 首先, 应该声明 f 恒大于零, 否则, 取 $f \equiv 0$, 此时 f 满足题目条件但是显然 f 没有不动点. 在度量空间 (I, d) 中, f 的导数为:

$$\begin{aligned}
\forall x_0 \in I, f^{(1)}(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{d(f(x), f(x_0))}{d(x, x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|\log f(x) - \log f(x_0)|}{|\log x - \log x_0|} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\left| \frac{\log f(x) - \log f(x_0)}{x - x_0} \right|}{\left| \frac{\log x - \log x_0}{x - x_0} \right|} = \frac{x_0 |f'(x_0)|}{f(x_0)}.
\end{aligned}$$

结合题目条件 $x|f'(x)| \leq \lambda f(x)$ 知对 $\forall x \in I$, 有 $|f^{(1)}(x)| \leq \lambda < 1$, 这表明 f 在度量空间 (I, d) 中为压缩映射. 又因为 (I, d) 是完备度量空间, 因此 f 在 I 上存在唯一的不动点. \square

13. 设 E 是可数集, 其元素记为 a_1, a_2, \dots . 定义

$$d(a_p, a_p) = 0 \text{ 且当 } p \neq q \text{ 时, } d(a_p, a_q) = 10 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

(a) 证明 d 是 E 上的距离并且 E 成为一个完备的度量空间.

(b) 设 $f: E \rightarrow E$ 定义为 $f(a_p) = a_{p+1}$. 证明当 $p \neq q$ 时, 有

$$d(f(a_p), f(a_q)) < d(a_p, a_q),$$

但是 f 没有不动点.

证明: (a) 由 d 的定义容易验证其满足正定性、对称性以及三角不等式, 因此 d 是 E 上的距离. 并且对任意 $p \neq q$, 有 $d(a_p, a_q) > 10$, 由第四题结论, 可知 (E, d) 是完备度量空间.

(b) 当 $p \neq q$ 时, $d(f(a_p), f(a_q)) = d(a_{p+1}, a_{q+1}) = 10 + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} < d(a_p, a_q)$. 假设 f 存在不动点 a_k , 则 $f(a_k) = a_k = a_{k+1}$, 因此 $d(a_k, a_{k+1}) = 0$, 矛盾, 故 f 没有不动点. \square

14. 本习题的目的是给不动点定理一个新的证明方法. 设 (E, d) 是非空的完备度量空间, $f: E \rightarrow E$ 是压缩映射. 任取 $R \geq 0$, 设

$$A_R = \{x \in E \mid d(x, f(x)) \leq R\}.$$

(a) 证明 $f(A_R) \subset A_{\lambda R}$.

(b) 证明当 $R > 0$ 时, A_R 是 E 中的非空闭子集.

(c) 证明任取 $x, y \in A_R$, 有 $d(x, y) \leq 2R + d(f(x), f(y))$. 并由此导出

$$\text{diam}(A_R) \leq 2R/(1 - \lambda).$$

(d) 证明 A_0 非空.

证明: (a) 任取 $y \in f(A_R)$, 存在 $x \in A_R$, 使得 $y = f(x)$, 则

$$d(y, f(y)) = d(f(x), f(f(x))) \leq \lambda d(x, f(x)) \leq \lambda R,$$

故 $y \in A_{\lambda R}$, 因此 $f(A_R) \subset A_{\lambda R}$.

(b) 先证明 A_R 非空. 取定某 $x_0 \in E$, 若 $x_0 = f(x_0)$, 则 $x_0 \in A_R$; 若 $x_0 \neq f(x_0)$, 则 $d(x_0, f(x_0)) > 0$, 取正整数 $N \geq \log_{\lambda} \frac{R}{d(x_0, f(x_0))}$. 通过 $x_{n+1} = f(x_n)$ ($n \geq 0$) 构造序列 $(x_n)_{n \geq 0}$, 则

$$d(x_1, f(x_1)) = d(f(x_0), f(f(x_0))) \leq \lambda d(x_0, f(x_0)),$$

$$d(x_2, f(x_2)) = d(f(x_1), f(f(x_1))) \leq \lambda^2 d(x_0, f(x_0)),$$

由归纳法可得

$$d(x_n, f(x_n)) \leq \lambda^n d(x_0, f(x_0)).$$

当 $n \geq N$ 时, 有 $d(x_n, f(x_n)) \leq R$, 因此 A_R 非空.

再证明 A_R 为闭集. 任取 A_R 中的收敛序列 $(x_n)_{n \geq 1}$, 记其收敛值为 x . 则对任意 $n \geq 1$ 有 $d(x_n, f(x_n)) \leq R$, 令 $n \rightarrow \infty$, 由度量的连续性以及 f 的连续性得 $d(x, f(x)) \leq R$, 即得 $x \in A_R$, 因此 A_R 为闭集.

(c) 任取 $x, y \in A_R$, 由度量的三角不等式得

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, f(x)) + d(f(x), f(y)) + d(f(y), y) \\ &\leq 2R + d(f(x), f(y)). \end{aligned}$$

于是 $d(x, y) \leq 2R + \lambda d(x, y)$, 即 $d(x, y) \leq 2R/(1 - \lambda)$. 关于 $x, y \in A_R$ 取上确界即得 $\text{diam}(A_R) \leq 2R/(1 - \lambda)$.

(d) 取 $R_n = \frac{1}{n}$, 则 $(A_{R_n})_{n \geq 1}$ 为单调下降的非空闭集列且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(A_{R_n}) = 0$, 由 **定理 2.2.6** 知 $A_0 = \bigcap_{n \geq 1} A_{R_n}$ 为单点集. \square

15. 设 (E, d) 是完备度量空间, f 和 g 是 E 上两个可交换的压缩映射 (即 $f \circ g = g \circ f$). 证明 f 和 g 有唯一的、共同的不动点.

证明: 因 f 是压缩映射, 故 f 有唯一的不动点 x , 即 $f(x) = x$. 因为 $f \circ g = g \circ f$, 所以

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = g \circ f(x) = g(x),$$

从而 $g(x)$ 也是 f 的不动点, 而由不动点唯一性知 $g(x) = x$, 这说明 x 也为 g 的不动点. \square

16. 本习题的目的是把上一习题的结论推广到更一般的情形, 在某种意义上说是非交换的压缩映射不动点定理. 设 (E, d) 是完备的度量空间. 定义联系于集合 $A \subset E$ 的距离函数 d_A 如下:

$$d_A(x) := d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}.$$

并设 \mathcal{C} 表示 E 的所有紧子集构成的集族. 对任意的 $A, B \in \mathcal{C}$, 定义

$$h(A, B) = \sup_{x \in E} |d_A(x) - d_B(x)|.$$

(a) 证明 h 是 \mathcal{C} 上的一个距离.

(b) 任取 $F \subset E$, 令 $F_\varepsilon = \{x \in E \mid d_F(x) \leq \varepsilon\}$. 证明

$$h(A, B) = \inf\{\varepsilon \geq 0 \mid A \subset B_\varepsilon, B \subset A_\varepsilon\}.$$

(c) 证明 (\mathcal{C}, h) 完备.

(d) 现在令 f_1, \dots, f_n 是 E 上的 n 个压缩映射. 定义 (\mathcal{C}, h) 上的映射 T 为

$$T(A) = \bigcup_{k=1}^n f_k(A), \quad A \in \mathcal{C}.$$

证明 T 是压缩映射. 并由此导出存在唯一的一个紧子集 K , 使得 $T(K) = K$.

证明: (a) 由 Housdorff 空间的紧子集是闭集知 \mathcal{C} 里面的任意元素都是闭集, 当 $h(A, B) = 0$ 时, 我们有

$$\forall x \in E, d_A(x) = d_B(x).$$

故当 $x \in A$ 时, 有 $d_B(x) = d_A(x) = 0 \Rightarrow x \in B \Rightarrow A \subset B$, 同理可得 $B \subset A$, 因此 $h(A, B) = 0 \Rightarrow A = B$. 又显然 $A = B \Rightarrow h(A, B) = 0$, 因此 $h(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$, 故 h 满足正定性, 并且容易验证 d 满足对称性和三角不等式, 所以 h 是 \mathcal{C} 上的一个距离 (实际上, h 称为 Housdorff 度量).

(b) 记 $Q = \{\varepsilon \geq 0 \mid A \subset B_\varepsilon, B \subset A_\varepsilon\}$.

任取 $\varepsilon \in Q$, 下面用反证法证明 $\varepsilon \geq h(A, B)$.

假设 $\varepsilon < h(A, B) = \sup_{x \in E} |d_A(x) - d_B(x)|$, 则存在 $x \in E$, 使得 $|d_A(x) - d_B(x)| > \varepsilon$, 不妨设 $d_A(x) - d_B(x) > \varepsilon$, 由 A, B 为闭集知存在 $a \in A$ 和 $b \in B$, 使得 $d_A(x) = d(a, x)$, $d_B(x) = d(b, x)$, 且存在 $a' \in A$, 使得 $d_A(b) = d(a', b) \leq \varepsilon$, 因此

$$\begin{aligned} d(x, b) + \varepsilon &= d_B(x) + \varepsilon < d_A(x) = d(x, a) \\ &\leq d(x, a') \leq d(x, b) + d(b, a') \leq d(x, b) + \varepsilon. \end{aligned}$$

矛盾, 故 $\varepsilon \geq h(A, B)$.

任取 $r > h(A, B)$, 下证 r 不是集合 Q 的下界. 事实上, 存在 s , 使得 $r > s > h(A, B)$, 故 $\forall x \in E, |d_A(x) - d_B(x)| < s$, 因此 $\forall x \in A, d_B(x) < s$ 且 $\forall x \in B, d_A(x) < s$, 从而 $A \subset B_s, B \subset A_s$, 这说明 $s \in Q$, 从而 r 不是集合 Q 的下界.

综合两点知 $h(A, B) = \inf Q = \inf\{\varepsilon \geq 0 \mid A \subset B_\varepsilon, B \subset A_\varepsilon\}$.

(c) 任取 \mathcal{C} 中的 Cauchy 序列 $(A_n)_{n \geq 1}$, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, s.t. \forall m, n > N, h(A_m, A_n) < \varepsilon/2$.

定义集合 A 为:

$$A = \{x \mid \text{存在序列 } (x_k) s.t. x_k \in A_k \text{ 且 } x_k \rightarrow x\}.$$

$\forall x \in A, \exists (x_k) (x_k \in A_k), s.t. x_k \rightarrow x$ 故 $\exists N_2 > 0, \forall k > N_2, d(x_k, x) < \varepsilon/2$

若 $k > \max\{N_1, N_2\}$, 则 $h(A_k, A_n) < \varepsilon/2$, 故 $\exists y \in A_n, s.t. d(x_k, y) < \varepsilon/2$, 故 $d(y, x) \leq d(x_k, y) + d(x_k, x) < \varepsilon \Rightarrow x \in (A_n)_\varepsilon \Rightarrow A \subset (A_n)_\varepsilon$

另一方面, $\forall y \in A_n$, 选取一系列整数 $n = k_1 < k_2 < \dots$ 使得

$$h(A_{k_j}, A_m) < 2^{-j}\varepsilon (\forall m \geq k_j)$$

然后我们如下定义序列 $(y_k)_{k \geq 1} (y_k \in A_k)$: $k < n$ 时, y_k 任意选取, 选择 $y_n = y$, 如果 y_{k_j} 已经选择了, 且 $k_j < k \leq k_{j+1}$, 选择 $y_k \in A_k, s.t. d(y_{k_j}, y_k) < 2^{-j}\varepsilon$, 则 $(y_k)_{k \geq 1}$ 是

Cauchy 序列, 故 $y_k \rightarrow x \in A$ 由

$$d(y, x) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(y, y_k) = \lim_{j \rightarrow \infty} d(y, y_{k_j}) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} (2^{-1}\varepsilon + \cdots + 2^{-j+1}\varepsilon) = \varepsilon$$

知 $y \in (A)_\varepsilon \Rightarrow A_n \subset (A)_\varepsilon$, 所以 $h(A, A_n) < \varepsilon$, 这就证明了 $A_n \xrightarrow{h} A$

下面还需证明 A 是紧的, 为此, 需要证明 A 是闭集且完全有界:

i) 假设 $x \in \bar{A}$, 则 $\forall n \geq 1, \exists y_n \in A, s.t. d(x, y_n) < 2^{-n}$, 又因为 $\forall n \geq 1, \exists z_n \in A_n, s.t. d(z_n, y_n) \leq h(A_n, A)$, 故

$$d(z_n, x) \leq d(z_n, y_n) + d(y_n, x) < h(A_n, A) + 2^{-n} \rightarrow 0$$

所以 $z_n \rightarrow x$, 故 $x \in A$, 因而 A 是闭集.

ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists n \geq 1, s.t. h(A_n, A) < \varepsilon/3$, 由于 A_n 紧, 故 A_n 存在有限的 $\varepsilon/3$ 网, 即存在 $\{y_1, y_2, \cdots, y_m\} \subset A_n, s.t. A_n \subset \bigcup_{i=1}^m B(y_i, \varepsilon/3), \forall y_i, \exists x_i \in A, s.t. d(x_i, y_i) < \varepsilon/3$, 我们断言 $\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 构成了 A 的一个有限 ε 网 (反证法: 假设 $\exists x_0 \in A, s.t. d(x_0, x_i) \geq \varepsilon (\forall i = 1, 2, \cdots, m)$, 设 x_0 与 A_n 中的 y_0 距离最近, 且 y_0 所在的开球球心为 y_i , 则 $d(x_0, x_i) \leq d(x_0, y_0) + d(y_0, y_i) + d(y_i, x_i) < \varepsilon$, 矛盾) 因此 A 是完全有界的.

(d) 将 $\{f_i\}$ 的压缩系数分别记为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 令 $\lambda = \max\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$, 下面证明 T 是以 λ 为压缩系数的压缩映射, 即证: $\forall A, B \in C, h(T(A), T(B)) \leq \lambda h(A, B)$

任取 $r > h(A, B), \forall x \in T(A), \exists 1 \leq i \leq n, a \in A, s.t. x = f_i(a)$, 因为 $h(A, B) < r$, 所以 $\exists b \in B, s.t. d(a, b) < r$, 令 $y = f_i(b) \in T(B)$, 我们有

$$d(x, y) = d(f_i(a), f_i(b)) \leq \lambda_i d(a, b) < \lambda r$$

所以

$$d(x, T(B)) < \lambda r \Rightarrow \sup_{x \in T(A)} d(x, T(B)) \leq \lambda r$$

同理可得

$$\sup_{y \in T(B)} d(y, T(A)) \leq \lambda r$$

因此 $h(T(A), T(B)) \leq \lambda r$, 令 $r \rightarrow h(A, B)$, 即得 $h(T(A), T(B)) \leq \lambda h(A, B)$, 从而说明 T 是压缩映射. \square

赋范空间和连续线性映射

1. 设 $C([0, 1], \mathbb{R})$ 表示 $[0, 1]$ 上的所有连续实函数构成的空间. 定义

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)| \quad \text{且} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$$

(a) 证明 $\|\cdot\|_{\infty}$ 和 $\|\cdot\|_1$ 都是 $C([0, 1], \mathbb{R})$ 上的范数.

(b) 证明 $C([0, 1], \mathbb{R})$ 关于范数 $\|\cdot\|_{\infty}$ 是完备的.

(c) 证明 $C([0, 1], \mathbb{R})$ 关于范数 $\|\cdot\|_1$ 不完备.

证明: (a) 由

- $\|f\|_{\infty} = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)| \geq 0$, 且 $\|f\|_{\infty} = 0$ 当且仅当 $f \equiv 0$
- $\|\lambda f\|_{\infty} = \sup_{0 \leq t \leq 1} |\lambda f(t)| = |\lambda| \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)| = |\lambda| \cdot \|f\|_{\infty}$
- $\|f + g\|_{\infty} = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t) + g(t)| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} (|f(t)| + |g(t)|) = \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty}$

和

- $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt \geq 0$ 且 $\|f\|_1 = 0$ 当且仅当 $f \equiv 0$
- $\|\lambda f\|_1 = \int_0^1 |\lambda f(t)| dt = |\lambda| \cdot \|f\|_1$
- $\|f + g\|_1 = \int_0^1 |f(t) + g(t)| dt \leq \int_0^1 |f(t)| dt + \int_0^1 |g(t)| dt = \|f\|_1 + \|g\|_1$

知 $\|\cdot\|_{\infty}$ 和 $\|\cdot\|_1$ 都是 $C([0, 1], \mathbb{R})$ 上的范数.

(b) 任取 $C([0, 1], \mathbb{R})$ 中的 Cauchy 序列 $(f_n)_{n \geq 1}$, 即对于 $\forall \epsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 对于 $\forall m, n > N$, 有

$$\|f_m - f_n\|_{\infty} = \max_{0 \leq x \leq 1} |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon,$$

所以对任意 $t \in [0, 1]$, 序列 $(f_n(t))_{n \geq 1}$ 为 Cauchy 序列, 其必收敛. 令

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t).$$

这样就定义了一个 $[0, 1]$ 上的实值函数.

下面证明 f 是连续函数且 $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ (即 $(f_n)_{n \geq 1}$ 一致收敛到 f). 而我们只需要证明 $(f_n)_{n \geq 1}$ 一致收敛到 f 即可, 事实上, 由一致收敛级数的连续性定理可知, 如果 $(f_n)_{n \geq 1}$ 一致收敛到 f , 则 f 必为连续函数.

任意给定 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon) > 0$, 使得对于 $\forall m, n > N$ 和 $\forall t \in [0, 1]$ 都有

$$|f_m(t) - f_n(t)| < \varepsilon.$$

任意固定 $n > N$ 并令 $m \rightarrow \infty$ 可得对于 $\forall n > N$ 和 $\forall t \in [0, 1]$ 有

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon.$$

所以 $(f_n)_{n \geq 1}$ 一致收敛到 f .

(c) 我们只需寻找范数 $\|\cdot\|_1$ 意义下的柯西列使其不收敛即可. 定义折线段:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ n(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}), & \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

则

$$\|f_m - f_n\|_1 = \int_0^1 |f_m(x) - f_n(x)| dx = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| \rightarrow 0 (m, n \rightarrow \infty)$$

故 $(f_n)_{n \geq 1}$ 是 Cauchy 序列, 但是其没有极限. □

注 证明度量空间的完备性基本都是转化为基本的完备空间 (如 $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$) 来考虑.

2. 设 E 是 \mathbb{R} 上所有的实系数多项式构成的向量空间. 对任意 $P \in E$, 定义

$$\|P\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} |P(x)|.$$

(a) 证明 $\|\cdot\|_\infty$ 是 E 上的范数.

(b) 任取一个 $a \in \mathbb{R}$ 定义线性映射 $L_a : E \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $L_a(P) = P(a)$. 证明 L_a 连续当且仅当 $a \in [0, 1]$, 并且给出该连续线性映射的范数.

(c) 设 $a < b$ 并定义 $L_{a,b} : E \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$L_{a,b}(P) = \int_a^b P(x) dx.$$

给出 a, b 的范围, 使其成为 $L_{a,b}$ 连续的充分必要条件, 然后确定 $L_{a,b}$ 的范数.

证明: (a) 由

- $\|P\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \max_{x \in [0,1]} |P(x)| = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0 (\forall x \in [0,1]) \Leftrightarrow P = 0$
- $\|\lambda P\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |\lambda P(x)| = |\lambda| \max_{x \in [0,1]} |P(x)| = |\lambda| \|P\|_\infty$
- $\|P + Q\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |(P + Q)(x)| \leq \max_{x \in [0,1]} (|P(x)| + |Q(x)|) = \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$

知 $\|\cdot\|_\infty$ 是 E 上的范数.

(b)(\Leftarrow) 当 $a \in [0,1]$ 时, 对于任意 $P \in E$, 有

$$|L_a(P)| = |P(a)| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |P(x)| = \|P\|_\infty,$$

故 L_a 为连续线性映射.

(\Rightarrow)(直接法) 由 L_a 为连续线性映射知, 存在常数 $C \geq 0$, 使得对于 $\forall P \in E$, 有

$$|L_a(P)| = |P(a)| \leq C \|P\|_\infty = C \max_{0 \leq x \leq 1} |P(x)|.$$

取 $P(x) = x^{2n}$, 则 $a^{2n} \leq C$, 故 $-1 \leq a \leq 1$. 再取 $P(x) = (1-x)^{2n}$, 则 $(1-a)^{2n} \leq C$, 故 $0 \leq a \leq 2$. 因此 $0 \leq a \leq 1$.

综上所述: L_a 连续 $\Leftrightarrow a \in [0,1]$, 且

$$\|L_a\| = \sup_{P \in E, P \neq 0} \frac{|P(a)|}{\max_{0 \leq x \leq 1} |P(x)|} = 1 (P \equiv 1 \text{ 时可取到最大值}).$$

(c) $L_{a,b}$ 连续的充要条件是 $0 \leq a < b \leq 1$, 理由如下:

(\Leftarrow) 当 $0 \leq a < b \leq 1$ 时, 对于任意 $P \in E$, 有

$$\begin{aligned} |L_{a,b}(P)| &= \left| \int_a^b P(x) dx \right| \leq \int_a^b |P(x)| dx \\ &\leq \int_0^1 |P(x)| dx \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |P(x)| = \|P\|_\infty. \end{aligned}$$

故 $L_{a,b}$ 为连续线性映射且 $\|L_{a,b}\| \leq 1$.

(\Rightarrow) 先给出一个结论 (\star): 设 $b > 1$ 且 $a < b$, 则数列 $\left(\frac{b^n - a^n}{n}\right)_{n \geq 1}$ 必有子列为正无穷大量. 事实上, 当 $1 < a < b$ 时, 由 Stolz 定理可得该数列为正无穷大量; 当 $-1 \leq a \leq 1$ 时, 该数列显然为正无穷大量; 当 $a < -1$ 时, 子列 $\left(\frac{b^{2n+1} - a^{2n+1}}{2n+1}\right)_{n \geq 1}$ 为正无穷大量.

因为 $L_{a,b}$ 连续, 所以存在常数 $C \geq 0$ 使得对于任意 $P \in E$, 有

$$|L_{a,b}(P)| = \left| \int_a^b P(x) dx \right| \leq C \max_{0 \leq x \leq 1} |P(x)|.$$

取 $P(x) = x^n$, 则 $\left|\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}\right| \leq C$, 即数列 $\left(\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}\right)_{n \geq 1}$ 有界. 假设 $b > 1$, 则由上述结论 (\star) 知 $\left(\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}\right)_{n \geq 1}$ 存在子列为正无穷大量, 矛盾, 因此 $b \leq 1$.

再取 $P(x) = (1-x)^n$, 则 $\left| \frac{(1-a)^{n+1} - (1-b)^{n+1}}{n+1} \right| \leq C$, 同理可知 $1-a \leq 1$, 即 $a \geq 0$. 从而当 $L_{a,b}$ 连续时, 有 $0 \leq a < b \leq 1$.

综上得知 $L_{a,b}$ 连续 $\Leftrightarrow 0 \leq a < b \leq 1$, 且

$$\|L_{a,b}\| = \sup_{P \in E, P \neq 0} \frac{|\int_a^b P(x) dx|}{\max_{0 \leq x \leq 1} |P(x)|} = b-a \quad (P \equiv 1 \text{ 时可取到最大值}). \quad \square$$

3. 设 $(E, \|\cdot\|_\infty)$ 是习题 2 中定义的赋范空间. 设 E_0 是 E 中没有常数项的多项式构成的向量空间 (即多项式 $P \in E_0$ 等价于 $P(0) = 0$).

- (a) 证明 $N(P) = \|P'\|_\infty$ 定义了 E_0 上的一个范数, 并且对任意 $P \in E_0$, 有 $\|P\|_\infty \leq N(P)$.
- (b) 证明 $L(P) = \int_0^1 \frac{P(x)}{x} dx$ 定义了 E_0 关于 N 的连续线性泛函, 并求它的范数.
- (c) 上面定义的 L 是否关于范数 $\|\cdot\|_\infty$ 连续?
- (d) 范数 $\|\cdot\|_\infty$ 和 N 在 E_0 上是否等价?

证明: (a) 由

- $N(P) = \|P'\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} |P'(x)| \geq 0$ 且 $N(P) = 0$ 当且仅当 $P \equiv 0$
- $N(\lambda P) = \max_{0 \leq x \leq 1} |\lambda P'(x)| = |\lambda| \max_{0 \leq x \leq 1} |P'(x)| = |\lambda| N(P)$
- $N(P+Q) = \max_{0 \leq x \leq 1} |P'(x) + Q'(x)| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} (|P'(x)| + |Q'(x)|) = N(P) + N(Q)$

知 $N(\cdot)$ 是 E_0 上的范数.

由中值定理知: $P(x) - P(0) = P(x) = xP'(\theta), \forall x \in (0, 1], \exists \theta \in (0, x)$. 故

$$|P(x)| \leq |P'(\theta)| \Rightarrow \max_{0 \leq x \leq 1} |P(x)| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |P'(x)| \Rightarrow \|P\|_\infty \leq N(P).$$

(b) 由

$$\begin{aligned} L(\lambda P + Q) &= \int_0^1 \frac{\lambda P(x) + Q(x)}{x} dx \\ &= \lambda \int_0^1 \frac{P(x)}{x} dx + \int_0^1 \frac{Q(x)}{x} dx = \lambda L(P) + L(Q) \end{aligned}$$

知 L 是线性映射. 又因为

$$\begin{aligned} |L(P)| &= \left| \int_0^1 \frac{P(x)}{x} dx \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{P(x)}{x} \right| dx \leq \left\| \frac{P(x)}{x} \right\|_\infty \\ &= \left| \frac{P(x_0)}{x_0} \right| \quad (\exists x_0 \in [0, 1]) \\ &= \left| \frac{P(x_0) - P(0)}{x_0 - 0} \right| = |P'(\theta)| \leq \|P'\|_\infty = N(P), \end{aligned}$$

即 $|L(P)| \leq N(P)$. 故 L 是 E_0 关于 N 的连续线性泛函, 且 $\|L\| = 1$.

(c) 对于 $\forall C > 0$, 取 $M > \frac{3}{2}C - \frac{1}{2}$, 令 $\delta = e^{-M} \in (0, 1)$, 取

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\delta}, & 0 \leq x \leq \delta \\ \frac{1}{x}, & \delta \leq x \leq 1. \end{cases}$$

由 Weierstrass 多项式逼近定理知, 存在多项式函数 $p_n(x) \in P_n$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq 1} |p_n(x) - f(x)| = 0.$$

故 $\exists N$, 使得对于 $\forall n > N$, 有 $-\frac{1}{2} < p_n(x) - f(x) < \frac{1}{2}$, 记 $q_n(x) = xp_n(x) \in E_0$, 则:

$$|L(q_n)| = \left| \int_0^1 p_n(x) dx \right| > \int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{2} + M.$$

而

$$\|q_n\|_\infty < \|x(f(x) + \frac{1}{2})\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} \left| x(f(x) + \frac{1}{2}) \right| = \frac{3}{2}.$$

所以 $|L(q_n)| > C\|q_n\|_\infty$, 故 L 关于范数 $\|\cdot\|_\infty$ 不连续.

(d) $\|\cdot\|_\infty$ 与 N 在 E_0 上不等价. 反证法证明: 假设存在常数 C_1 和 C_2 使得对于 $\forall P \in E_0$ 有 $C_1 N(p) \leq \|p\|_\infty \leq C_2 N(p)$. 取 $n > \frac{1}{C_1}$ 且 $p(x) = x^n$, 则

$$N(p) = \max_{0 \leq x \leq 1} |nx^{n-1}| = n > \frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_1} \|p\|_\infty.$$

矛盾, 证毕. □

4. 设 E 是由 $[0, 1]$ 上所有连续函数构成的向量空间. 定义 E 上的两个范数分别为 $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$ 和 $N(f) = \int_0^1 x|f(x)| dx$.

(a) 验证 N 的确是 E 上的范数并且 $N \leq \|\cdot\|_1$.

(b) 设函数 $f_n(x) = n - n^2x$, 若 $x \leq \frac{1}{n}$; $f_n(x) = 0$, 其它. 证明函数列 $(f_n)_{n \geq 1}$ 在 (E, N) 上收敛到 0. 它在 $(E, \|\cdot\|_1)$ 中是否收敛? 由这两个范数在 E 上诱导的拓扑是否相同?

(c) 设 $\alpha \in (0, 1]$, 并令 $B = \{f \in E : f(x) = 0, \forall x \in [0, \alpha]\}$. 证明这两个范数在 B 上诱导相同的拓扑.

证明: (a) 由

- $N(f) = \int_0^1 x|f(x)| dx \geq 0$ 且 $N(f) = 0 \Leftrightarrow x|f(x)| \equiv 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv 0$ (这里利用了 $f(x)$ 的连续性)
- $N(\lambda f) = \int_0^1 x|\lambda f(x)| dx = |\lambda| \int_0^1 x|f(x)| dx = |\lambda| N(f)$

$$\bullet N(f+g) = \int_0^1 x|f(x)+g(x)|dx \leq \int_0^1 x(|f(x)|+|g(x)|)dx = N(f)+N(g)$$

知 N 是 E 上的范数, $N \leq \|\cdot\|_1$ 是显然的.

(b) 因

$$N(f_n) = \int_0^{\frac{1}{n}} x(n - n^2x) dx = \frac{1}{6n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty),$$

故 $(f_n)_{n \geq 1}$ 在 (E, N) 中收敛到 0. 假设函数列在 $(E, \|\cdot\|_1)$ 中收敛, 即存在 $g(x) \in E$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n(x) - g(x)| dx = 0 \Rightarrow f_n(x) - g(x) = 0 \text{ a.e. } (n \rightarrow \infty).$$

又 $f_n(x) = 0$ a.e. $(n \rightarrow \infty)$, 故 $g(x) = 0$, 也就是说如果收敛只能收敛到 0, 但

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - 0\|_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{n}} (n - n^2x) dx = \frac{1}{2} \neq 0.$$

矛盾, 故 $(f_n)_{n \geq 1}$ 在 $(E, \|\cdot\|_1)$ 中不收敛.

两范数在 E 上诱导的拓扑不同, 理由如下:

记 $\|\cdot\|_1$ 诱导的拓扑为 τ_1 , N 诱导的拓扑为 τ_2 , 相应的距离分别记为 d_1, d_2 . 由 $N \leq \|\cdot\|_1$ 知 $\tau_2 \subset \tau_1$, 故我们实际需要证明 τ_2 是 τ_1 的真子集, 即

$$\exists V \in \tau_1, \text{ 但 } V \notin \tau_2.$$

取 τ_1 中开球 $B_{d_1}(0, \frac{1}{3}) \in \tau_1$, 假设 $B_{d_1}(0, \frac{1}{3}) \in \tau_2$. 因为 $0 \in B_{d_1}(0, \frac{1}{3})$, 所以 $\exists \delta > 0$, s.t. $B_{d_2}(0, \delta) \subset B_{d_1}(0, \frac{1}{3})$. 取前面给出的 $(f_n)_{n \geq 1}$, 由 $d_2(f_n, 0) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 知

$$\exists M > 0, \text{ s.t. } f_M \in B_{d_2}(0, \delta) \subset B_{d_1}(0, \frac{1}{3})$$

但是 $d_1(f_M, 0) = \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, 矛盾, 故假设不成立, 即 $B_{d_1}(0, \frac{1}{3}) \notin \tau_2$.

(c) 对于 $\forall f \in B$, 有

$$\begin{aligned} N(f) &= \int_0^1 x|f(x)| dx = \int_a^1 x|f(x)| dx \\ &\geq a \int_a^1 |f(x)| dx = a \int_0^1 |f(x)| dx = a\|f\|_1, \end{aligned}$$

结合 (a) 中给出的 $N \leq \|\cdot\|_1$ 知两范数等价, 因此必在 B 上诱导相同的拓扑. \square

5. 设 $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 是连续函数并且不恒等于 1. 设 $\alpha \in \mathbb{R}$, 定义 $C([0, 1], \mathbb{R})$ 上的映射 T 为

$$T(f)(x) = \alpha + \int_0^x f(\varphi(t)) dt.$$

证明 T 是压缩映射.

根据以上结论证明下面的方程存在唯一解:

$$f(0) = \alpha, \quad f'(x) = f(\varphi(x)), \quad x \in [0, 1].$$

证明: 取 $C([0, 1])$ 上的范数 $\|\cdot\|$, 定义为

$$\|f\| = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| e^{-Mx}.$$

由 $\varphi([0, 1]) \subset [0, 1]$ 知

$$\sup_{t \in [0, 1]} |f(\varphi(t)) - g(\varphi(t))| e^{-M\varphi(t)} \leq \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| e^{-x} = \|f - g\|.$$

因此

$$\begin{aligned} \|T(f) - T(g)\| &= \sup_{x \in [0, 1]} \left| \int_0^x (f(\varphi(t)) - g(\varphi(t))) dt \right| e^{-Mx} \\ &= \sup_{x \in [0, 1]} \left| \int_0^x (f(\varphi(t)) - g(\varphi(t))) e^{-M\varphi(t)} e^{M\varphi(t)} dt \right| e^{-Mx} \\ &\leq \|f - g\| \cdot \sup_{x \in [0, 1]} \int_0^x e^{M\varphi(t)} dt \cdot e^{-Mx}. \end{aligned}$$

下面我们说明通过选取合适的 $M > 0$, 可以使得

$$\lambda := \sup_{0 \leq x \leq 1} \int_0^x e^{M\varphi(t)} dt \cdot e^{-Mx} < 1.$$

令函数

$$h(x) := \int_0^x e^{M\varphi(t)} dt \cdot e^{-Mx}.$$

因 $h(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 故 $h(x)$ 在 $[0, 1]$ 上存在最大值点, 记之为 x_0 .

若 $x_0 < 1$, 则

$$h(x_0) = \int_0^{x_0} e^{M\varphi(t)} dt \cdot e^{-Mx_0} \leq x_0 e^{M(1-x_0)},$$

取 $0 < M < \frac{-\ln x_0}{1-x_0}$, 则 $h(x_0) < 1$.

若 $x_0 = 1$, 注意到 φ 不恒等于 1, 则

$$h(x_0) = \int_0^1 e^{M\varphi(t)} dt \cdot e^{-M} < e^M \cdot e^{-M} = 1.$$

综上得知, 通过选择合适的 $M > 0$, 可以使得映射 T 为 $C([0, 1])$ 上的压缩映射. 且由 $e^{-M}\|f\|_\infty \leq \|f\| \leq \|f\|_\infty$ 知 $(C([0, 1]), \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间, 故根据不动点定理知存在唯一 $f \in C([0, 1])$ 使得 $T(f) = f$, 即:

$$\alpha + \int_0^x f(\varphi(t)) dt = f(x) \Leftrightarrow f(0) = \alpha \text{ 且 } f'(x) = f(\varphi(x)). \quad \square$$

6. 设 $\alpha \in \mathbb{R}, a > 0, b > 1$. 考察下面的微分方程

$$f(0) = \alpha, \quad f'(x) = af(x^b), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (*)$$

(a) 令 $M > 0$. 验证 $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ 上赋予范数

$$\|f\| = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|e^{-Mx}$$

后成为一个 Banach 空间.

(b) 设 $g(x) = \alpha + \int_0^x af(t^b) dt$, 定义映射 $T: E \rightarrow E$ 为 $T(f) = g$. 证明选择合适的 M , 可使 T 为压缩映射.

(c) 证明方程 (*) 有唯一解.

证明: (a) 容易验证 $\|\cdot\|$ 是 $C([0, 1], \mathbb{R})$ 上的范数, 并且

$$e^{-M} \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| \leq \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|e^{-Mx} \leq \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|,$$

即

$$e^{-M} \|f\|_{\infty} \leq \|f\| \leq \|f\|_{\infty}.$$

因此 $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ 赋予范数 $\|\cdot\|$ 是 Banach 空间.

(b) 因为

$$(T(f_1) - T(f_2))(x) = \int_0^x a(f_1(t^b) - f_2(t^b)) dt,$$

所以

$$\begin{aligned} \|T(f_1) - T(f_2)\| &= \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| \int_0^x a(f_1(t^b) - f_2(t^b)) dt \right| \cdot e^{-Mx} \\ &\leq a \sup_{0 \leq x \leq 1} \int_0^x |f_1(t^b) - f_2(t^b)| e^{-Mt^b} \cdot e^{Mt^b} dt \cdot e^{-Mx} \\ &\leq \|f_1 - f_2\| \cdot a \sup_{0 \leq x \leq 1} \int_0^x e^{Mt^b} dt \cdot e^{-Mx} \\ &\leq \|f_1 - f_2\| \cdot a \sup_{0 \leq x \leq 1} \int_0^x e^{Mt} dt \cdot e^{-Mx} \\ &= \|f_1 - f_2\| \cdot \sup_{0 \leq x \leq 1} \frac{a(1 - e^{-Mx})}{M} \leq \frac{a}{M} \|f_1 - f_2\|. \end{aligned}$$

故当 $M > a$ 时, $\|T(f_1) - T(f_2)\| < \|f_1 - f_2\|$, 也就是此时 T 是压缩映射.

(c) 压缩映射有唯一不动点, 即存在唯一 $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ 使得

$$\alpha + \int_0^x af(t^b) dt = f(x),$$

而上述方程等价于方程 (*), 证毕. □

7. 设 E 是数域 \mathbb{K} 上的无限维向量空间. 设 $(e_i)_{i \in I}$ 是 E 中的一组向量, 若 E 中任一向量可用 $(e_i)_{i \in I}$ 中的有限个向量唯一线性表示, 即对任意 $x \in E$, 存在唯一一组 $(\alpha_i)_{i \in I} \subset \mathbb{K}$, 使得仅有有限多个 α_i 不等于零且 $x = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i$, 则称 $(e_i)_{i \in I}$ 是 E 中的 Hamel 基.

(a) 由 Zorn 引理证明 E 有一组 Hamel 基.

(b) 假设 E 还是一个赋范空间, 证明 E 上必存在不连续的线性泛函.

(c) 证明在任一无限维赋范空间上, 一定存在一个比原来的范数严格强的范数 (即新范数诱导的拓扑一定比原来的范数诱导的拓扑强且不相同).

证明: (a) 首先构造一个偏序集 (\mathcal{F}, \subset) , 这里的 \mathcal{F} 是 E 中一些子集构成的集族, 满足若 $F \in \mathcal{F}$, 则 F 中任意有限多个向量都线性无关, \subset 表示集合间的包含关系.

任取 \mathcal{F} 的一个链 \mathcal{A} , 令 $G = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, 则 $G \in \mathcal{F}$, 即 G 是 \mathcal{A} 的上界. 由 Zorn 引理知 \mathcal{F} 有极大元, 记为 B . 如果存在 $x \in E$, x 不能由 B 中任意有限多个向量线性表达, 则 $B \cup \{x\} \in \mathcal{F}$, 这与 B 是极大元矛盾, 故这个极大元 B 就是 E 的 Hamel 基.

(b) 设 B 是 E 上的一个 Hamel 基, 若 E 还是一个赋范空间, 则不妨设 Hamel 基中的任一向量 e 的范数为 1, 由于 E 中的任意向量关于 Hamel 基的线性表达是唯一的, 故 E 上的线性泛函 f 由其在 Hamel 基中每一个元素上的取值 $f(e)$ 决定, 显然 Hamel 基是无限集, 故我们可以选取一个序列 $(e_n) \in B$, 令 $f(e_n) = n$; 当 $e \in B \setminus (e_n)$ 时, $f(e) = 1$, 则线性泛函 f 在 E 上不连续.

注: 和课本定理 3.2.9 对比体会有限维和无限维的区别.

(c) 仍考虑 (b) 中约定的 Hamel 基 B , 并记 E 上原有的范数为 $\|\cdot\|$, 接下来定义 E 上的新范数 $\|\cdot\|_1$, 取 $(e_n) \in B$, 令 $\|e_n\|_1 = n, n \geq 1$; 当 $e \in B \setminus (e_n)$ 时, 令 $\|e\|_1 = \|e\|$, 任取 $x \in E$, 则 $x = \sum_{j \in J} \lambda_j e_j, J \subset I$ 是有限集, 注意这种表达式唯一, 令

$$\|x\|_1 = \sum_{j \in J} |\lambda_j| \|e_j\|_1$$

容易验证 $\|\cdot\|_1$ 确实是 E 上的范数, 并且由三角不等式有

$$\|x\| = \left\| \sum_{j \in J} \lambda_j e_j \right\| \leq \sum_{j \in J} |\lambda_j| \|e_j\| \leq \sum_{j \in J} |\lambda_j| \|e_j\|_1 = \|x\|_1$$

故 $\|\cdot\|_1$ 是在 E 上比 $\|\cdot\|$ 强的范数. 另一方面 (b) 约定的线性泛函 f 满足

$$|f(x)| \leq \sum_{j \in J} |\lambda_j| |f(e_j)| = \sum_{j \in J} |\lambda_j| \|e_j\|_1 = \|x\|_1$$

但是 f 关于原来的范数 $\|\cdot\|$ 不连续, 这意味着 $\|\cdot\|$ 一定是比 $\|\cdot\|_1$ 严格强的范数. \square

8. 设 E 为数域 \mathbb{K} 上有限维向量空间, 其维数 $\dim E = n$. $\{e_1, \dots, e_n\}$ 表示 E 上的一组基, 任取 $u \in \mathcal{L}(E)$, 令 $[u]$ 表示 u 在这组基下对应的矩阵.

(a) 证明映射 $u \mapsto [u]$ 建立了从 $\mathcal{L}(E)$ 到所有 $n \times n$ 矩阵构成的向量空间 $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ 之间的同构映射.

(b) 假设 $E = \mathbb{K}^n$ 且 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是经典基 (即 $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, 对应于第 k 个向量, 它仅在第 k 个位置取 1, 其他位置取 0). 并约定 $E = \mathbb{K}^n$ 赋予欧氏范数. 证明若 u (或等价地 $[u]$) 可对角化, 则 $\|u\| = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$, 这里 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是 u 的特征值.

(c) $\{e_1, \dots, e_n\}$ 如上, 试由 $[u]$ 中的元素分别确定在 $p = 1$ 和 $p = \infty$ 时的范数 $\|u : (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p) \rightarrow (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)\|$.

证明: (a) 记

$$u(e_k) = \sum_{m=1}^n u_{mk} e_m, \quad k = 1, \dots, n$$

并记矩阵 $[u] = (u_{mk}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, 则 $(u(e_1), \dots, u(e_n)) = (e_1, \dots, e_n)[u]$. 任取 $x \in E$, 存在唯一的一组数 x_1, \dots, x_n 使得 $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$. 则

$$u(x) = \sum_{k=1}^n x_k u(e_k) = (e_1, \dots, e_n)[u] \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

由此说明映射 $u \mapsto [u]$ 建立了从 $\mathcal{L}(E)$ 到所有 $n \times n$ 矩阵构成的向量空间 $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ 之间的同构映射.

(b) 注: 这一问的题目条件稍微改一下, 将 u 可对角化改为 u 可酉对角化, 即存在酉矩阵 P 使得 $P[u]P^* = \Lambda$, 其中 $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

由题意知此时 E 为有限维赋范空间, 故由定理 3.2.9 知 $\mathcal{L}(E) = \mathcal{B}(E)$, 即对于任意 $u \in \mathcal{L}(E)$, 都有 u 为有界线性算子. 对于任意 $x \in E = \mathbb{K}^n$, 由 (a) 知 $u(x)$ 在 e_1, \dots, e_n

下的坐标为 $[u]x$, 故

$$\begin{aligned}
 \|u(x)\|^2 &= x^*[u]^*[u]x \\
 &= x^*P^*\Lambda^*PP^*\Lambda Px \\
 &= (Px)^*\Lambda^*\Lambda(Px) \\
 &= (Px)^*\begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix}(Px) \\
 &\leq \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}^2 \|Px\|^2 \\
 &= \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}^2 \|x\|^2,
 \end{aligned}$$

故 $\|u(x)\| \leq \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\} \|x\|$, 因此 $\|u\| \leq \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$.

设 $\max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\} = |\lambda_k|$, 取 $Px = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$, $\|x\| = 1$, 其中 1 位于第 k 个坐标位置, 则

$$\|u(x)\|^2 = |\lambda_k|^2 \|x\|^2 \Rightarrow \|u(x)\| = |\lambda_k| \|x\|$$

综上知 $\|u\| = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$.

(c) 记 $\|u\|_p = \|u : (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p) \rightarrow (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)\|$, $p = 1, \infty$.

(i) 当 $p = 1$ 时, 任取 $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{K}^n$, 则

$$\begin{aligned}
 \|u(x)\|_1 &= \|[u]x\|_1 = \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^n u_{ji}x_i \right| \\
 &\leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |u_{ji}| \cdot |x_i| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |u_{ji}| \cdot |x_i| \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(|x_i| \sum_{j=1}^n |u_{ji}| \right) \leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |u_{ji}| \right) \|x\|_1,
 \end{aligned}$$

故

$$\|u\|_1 \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |u_{ji}|.$$

设 $\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |u_{ji}| = \sum_{j=1}^n |u_{jk}|$, 取 $x = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$, $\|x\|_1 = 1$, 其中 1 位于第 k 个坐标位置, 则

$$\|u(x)\|_1 = \left(\sum_{j=1}^n |u_{jk}| \right) \|x\|_1.$$

综上得知

$$\|u\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |u_{ji}|.$$

(ii) 当 $p = \infty$ 时, 同理可证明:

$$\|u\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |u_{ji}|.$$

□

9. 设 E 是 Banach 空间.

(a) 设 $u \in \mathcal{B}(E)$ 且 $\|u\| < 1$. 证明 $I_E - u$ 在 $\mathcal{B}(E)$ 中可逆.

(b) 设 $GL(E)$ 表示 $\mathcal{B}(E)$ 中可逆元构成的集合. 证明 $GL(E)$ 关于复合运算构成一个群且是 $\mathcal{B}(E)$ 中的开集.

(c) 证明 $u \rightarrow u^{-1}$ 是 $GL(E)$ 上的同胚映射.

证明: 因为 $\|u\| < 1$, 且 $\|u^n\| \leq \|u\|^n$, 所以级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \|u^n\|$ 收敛, 又因为 $\mathcal{B}(E)$ 完备, 故 $\sum_{n=0}^{\infty} u^n$ 收敛, 记

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \in \mathcal{B}(E).$$

则

$$(I_E - u)v = \lim_{k \rightarrow \infty} (I_E - u) \sum_{n=0}^k u^n = I_E.$$

同理可证 $v(I_E - u) = I_E$, 因此 $I_E - u$ 在 $\mathcal{B}(E)$ 中可逆.

(b)

- $(uv)w = u(vw)$, 即满足结合律
- 恒等映射 id 即为单位元
- 任意元 u 都存在 $u^{-1} \in GL(E)$, s.t. $u \circ u^{-1} = id$

故 $GL(E)$ 关于复合运算构成一个群, 下证 $GL(E)$ 是 $\mathcal{B}(E)$ 中的开集: 任意 $u \in GL(E)$, 考虑 u 的开球 $B(u, \|u^{-1}\|^{-1})$, 则 $\forall v \in B(u, \|u^{-1}\|^{-1})$, 有 $\|v - u\| < \|u^{-1}\|^{-1}$, 故 $\|u^{-1}(u - v)\| \leq \|u^{-1}\| \cdot \|u - v\| < 1$, 从而

$$I - u^{-1}(u - v) = u^{-1}v \in GL(E).$$

由群中元素运算封闭性知

$$u \cdot u^{-1}v = v \in GL(E).$$

故

$$B(u, \|u^{-1}\|^{-1}) \in GL(E).$$

由开集的定义知 $GL(E)$ 是 $\mathcal{B}(E)$ 中的开集.

(c) 记 $\Phi: GL(E) \rightarrow GL(E), u \mapsto u^{-1}$.

- 显然映射 $\Phi: u \mapsto u^{-1}$ 是 $GL(E)$ 上的双射;
- Φ 连续: 由前面的证明过程知 $\forall v \in B(u, \|u^{-1}\|^{-1})$ 有

$$(I - u^{-1}(u - v))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (u^{-1}(u - v))^n.$$

故

$$v^{-1} = (u - (u - v))^{-1} = (u(I - u^{-1}(u - v)))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (u^{-1}(u - v))^n u^{-1}.$$

因此

$$\begin{aligned} \|v^{-1} - u^{-1}\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (u^{-1}(u - v))^n u^{-1} \right\| \\ &\leq \|u^{-1}\| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (\|u - v\| \cdot \|u^{-1}\|)^n \\ &= \frac{\|u^{-1}\|^2 \|u - v\|}{1 - \|u^{-1}\| \cdot \|u - v\|}. \end{aligned}$$

当 $\|u - v\| \rightarrow 0$ 时, $\|u^{-1} - v^{-1}\| \rightarrow 0$, 所以 Φ 连续;

- $\Phi = \Phi^{-1}$

综上知 Φ 是 $GL(E)$ 上的同胚. □

10. 设 $f \in L_2(\mathbb{R})$, $g(x) = \frac{1}{x} \mathbb{1}_{[1, \infty)}(x)$, 证明 $fg \in L_1(\mathbb{R})$. 给出例子说明 $f_1, f_2 \in L_1(\mathbb{R})$, 但是 $f_1 f_2 \notin L_1(\mathbb{R})$.

证明: (1) 因为

$$g(x) = \frac{1}{x} \cdot \mathbb{1}_{[1, +\infty)}(x),$$

所以

$$\int_{\mathbb{R}} g^2(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1.$$

故 $g \in L_2(\mathbb{R})$, 又 $f \in L_2(\mathbb{R})$, 所以 $fg \in L_1(\mathbb{R})$.

(2) 取

$$f_1(x) = f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbb{1}_{(0,1)}(x),$$

则

$$\int_{\mathbb{R}} |f_1(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} |f_2(x)| dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2,$$

但是

$$\int_{\mathbb{R}} |f_1(x)f_2(x)| dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = +\infty. \quad \square$$

11. 设 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 为有限测度空间, 即有 $\mu(\Omega) < \infty$.

(a) 证明若 $0 < p < q \leq \infty$, 则 $L_q(\Omega) \subset L_p(\Omega)$. 用反例说明当 $\mu(\Omega) = \infty$ 时, 结论不成立.

(b) 证明若 $f \in L_\infty(\Omega)$, 则 $f \in \bigcap_{p < \infty} L_p(\Omega)$ 且 $\|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p$.

(c) 设 $f \in \bigcap_{p < \infty} L_p(\Omega)$ 且满足 $\limsup_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p < \infty$, 证明 $f \in L_\infty(\Omega)$.

证明: (a) 因 $0 < p < q \leq \infty$, 故可设 $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, 其中 $r > 0$. 因 $\mu(\Omega) < \infty$, 故 $\int_\Omega 1^r d\mu = \mu(\Omega) < \infty \Rightarrow 1 \in L_r(\Omega)$. 任取 $f \in L_q(\Omega)$, 由 Hölder 不等式可得 $f = f \cdot 1 \in L_p(\Omega)$, 且

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q \|1\|_r = \|f\|_q \cdot (\mu(\Omega))^{1/r},$$

因此 $L_q(\Omega) \subset L_p(\Omega)$.

当 $\mu(\Omega) = \infty$ 时, $L_q(\Omega) \subset L_p(\Omega)$ 不一定成立, 例如取 $f(x) = \frac{1}{x}$, 则 $f \in L_2([1, \infty))$, 但 $f \notin L_1([1, \infty))$.

(b) 对于任意 $p < \infty$, 有 $\frac{1}{p} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{p}$. 又因为 $f \in L_\infty(\Omega)$, $1 \in L_p(\Omega)$, 所以由 Hölder 不等式知 $f = f \cdot 1 \in L_p(\Omega)$, 从而 $f \in \bigcap_{p < \infty} L_p(\Omega)$. 又因

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_\Omega \|f\|_\infty^p d\mu \right)^{1/p} = \|f\|_\infty (\mu(\Omega))^{1/p},$$

故

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty. \quad (\star)$$

任意固定 $\delta > 0$, 令 $\Omega_\delta = \{x \mid |f(x)| > \|f\|_\infty - \delta\}$, 则 $\mu(\Omega_\delta) > 0$, 否则的话, 假设 $\mu(\Omega_\delta) = 0$, 则由本性上确界的定义知 $\|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty - \delta$, 矛盾. 故

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{1/p} \geq \left(\int_{\Omega_\delta} (\|f\|_\infty - \delta)^p d\mu \right)^{1/p} = (\|f\|_\infty - \delta) (\mu(\Omega_\delta))^{1/p},$$

两侧取下极限并结合 δ 的任意性, 得

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty. \quad (\star\star)$$

由 $(\star)(\star\star)$ 得 $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

(c) 假设 $f \notin L_\infty(\Omega)$, 则对任意 $M > 0$, 存在 $A \in \mathcal{A}$, 使得 $\mu(A) > 0$ 且在 A 上 $|f| > M$, 则

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \geq \left(\int_A M^p d\mu \right)^{1/p} = M \cdot (\mu(A))^{1/p},$$

于是

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \geq M.$$

由于 M 是任意的, 故上式与 $\limsup_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p < \infty$ 相矛盾. \square

12. 设 $0 < p < q \leq \infty$, $0 \leq \theta \leq 1$. 并令

$$\frac{1}{s} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

证明若 $f \in L_p(\Omega) \cap L_q(\Omega)$, 则

$$f \in L_s(\Omega) \quad \text{且} \quad \|f\|_s \leq \|f\|_p^\theta \|f\|_q^{1-\theta}.$$

证明: $\theta = 0$ 与 $\theta = 1$ 的情形是平凡的, 故只需考虑 $0 < \theta < 1$. 因 $f \in L_p(\Omega)$, 故 $f^\theta \in L_{\frac{p}{\theta}}(\Omega)$. 又因 $f \in L_q(\Omega)$, 故 $f^{1-\theta} \in L_{\frac{q}{1-\theta}}(\Omega)$. 而 $\frac{1}{s} = \frac{1}{p/\theta} + \frac{1}{q/(1-\theta)}$, 故由 Hölder 不等式知 $f = f^\theta f^{1-\theta} \in L_s(\Omega)$ 且

$$\|f\|_s \leq \|f^\theta\|_{\frac{p}{\theta}} \|f^{1-\theta}\|_{\frac{q}{1-\theta}} = \|f\|_p^\theta \|f\|_q^{1-\theta}. \quad \square$$

13. (广义 Minkowski 不等式) 设 $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ 和 $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ 是两个测度空间, $0 < p < q < \infty$. 证明对任意可测函数 $f : (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \rightarrow \mathbb{K}$, 有

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} |f(x_1, x_2)|^p d\mu_1(x_1) \right)^{\frac{q}{p}} d\mu_2(x_2) \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \left(\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} |f(x_1, x_2)|^q d\mu_2(x_2) \right)^{\frac{p}{q}} d\mu_1(x_1) \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

证明: 首先由 Fubini 定理可得

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} |f(x_1, x_2)|^p d\mu_1(x_1) \right)^{\frac{q}{p}} d\mu_2(x_2) \\ & = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} |f(x_1, x_2)|^p d\mu_1(x_1) \right)^{\frac{q}{p}-1} \left(\int_{\Omega_1} |f(x_1, x_2)|^p d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2) \\ & = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} |f(x_1, x_2)|^p d\mu_1(x_1) \right)^{\frac{q}{p}-1} \cdot |f(x_1, x_2)|^p d\mu_2(x_2) d\mu_1(x_1). \end{aligned}$$

然后由 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} |f(x_1, x_2)|^p d\mu_1(x_1) \right)^{\frac{q}{p}-1} \cdot |f(x_1, x_2)|^p d\mu_2(x_2) \\ & \leq \left[\int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} |f(x, x_2)|^p d\mu_1(x_1) \right)^{\frac{q}{p}} d\mu_2(x_2) \right]^{\frac{q-p}{q}} \left(\int_{\Omega_2} |f(x_1, x_2)|^q d\mu_2(x_2) \right)^{\frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} |f(x_1, x_2)|^p d\mu_1(x_1) \right)^{\frac{q}{p}} d\mu_2(x_2) \\ & \leq \left[\int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} |f(x, x_2)|^p d\mu_1(x_1) \right)^{\frac{q}{p}} d\mu_2(x_2) \right]^{\frac{q-p}{q}} \cdot \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} |f(x_1, x_2)|^q d\mu_2(x_2) \right)^{\frac{p}{q}} d\mu_1(x_1). \end{aligned}$$

即

$$\left[\int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} |f(x_1, x_2)|^p d\mu_1(x_1) \right)^{\frac{q}{p}} d\mu_2(x_2) \right]^{\frac{p}{q}} \leq \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} |f(x_1, x_2)|^q d\mu_2(x_2) \right)^{\frac{p}{q}} d\mu_1(x_1).$$

因此

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} |f(x_1, x_2)|^p d\mu_1(x_1) \right)^{\frac{q}{p}} d\mu_2(x_2) \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \left(\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} |f(x_1, x_2)|^q d\mu_2(x_2) \right)^{\frac{p}{q}} d\mu_1(x_1) \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad \square$$

14. 设 $0 < p < \infty$.

(a) 对任意 $x = (x_n) \in \ell_p$ 定义 $(0, 1)$ 上如下的函数

$$T(x)(t) = \sum_{n \geq 1} [n(n+1)]^{\frac{1}{p}} x_n \mathbb{1}_{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})}(t).$$

证明 T 是 ℓ_p 到 $L_p(0, 1)$ 的线性等距同构映射.

(b) 假设 $p \geq 1$ 且 q 是 p 的共轭数. 对任意 $f \in L_p(0, 1)$, 定义

$$S(f)_n = [n(n+1)]^{\frac{1}{q}} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(t) dt, \quad \forall n \geq 1$$

证明 S 定义了从 $L_p(0, 1)$ 到 ℓ_p 上的线性映射并且 $S \circ T$ 等于 ℓ_p 上的单位映射.

证明: (a)

•

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |T(x)(t)|^p dt &= \int_0^1 \left| \sum_{n \geq 1} [n(n+1)]^{\frac{1}{p}} x_n \mathbb{1}_{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})}(t) \right|^p dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \left| [n(n+1)]^{\frac{1}{p}} x_n \right|^p dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) n(n+1) |x_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty
\end{aligned}$$

故 $T(x)(t) \in L_p(0, 1)$.

• 线性:

$$T(\lambda x + y)(t) = \sum_{n \geq 1} [n(n+1)]^{\frac{1}{p}} (\lambda x_n + y_n) \mathbb{1}_{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})}(t) = \lambda \cdot T(x) + T(y)$$

• 等距: 由第一条知 $\forall x, y \in \ell_p$:

$$\|T(x - y)(t)\|_p = \left(\int_0^1 (T(x - y)(t))^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x - y\|_p$$

故 T 是等距映射

注意: 题目有一小问题, T 不是同构, 因为不满足满射, 例如 $f(x) = x \in L_p(0, 1)$ 不存在原像.

(b)

•

$$\sum_{i=1}^n |S(f)_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} [n(n+1)]^{\frac{p}{q}} \left| \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(t) dt \right|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} [n(n+1)]^{p-1} \left(\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} |f(t)| dt \right)^p$$

(i) 当 $p = 1$ 时:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |S(f)_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} |f(t)| dt = \int_0^1 |f(t)| dt < \infty$$

故 $(S(f)_n)_{n \geq 1} \in \ell_1$

(ii) 当 $p > 1$ 时:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |S(f)_n|^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \cdot (n(n+1))^p \cdot \left(\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} |f(t)| dt \right)^p \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \left(\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} n(n+1) |f(t)| dt \right)^p
\end{aligned}$$

由 Hölder 不等式得:

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} n(n+1)|f(t)| dt \leq \left(\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} (n(n+1))^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

故

$$\begin{aligned} \left(\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} n(n+1)|f(t)| dt \right)^p &\leq \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} |f(t)|^p dt \cdot \left((n(n+1))^q \frac{1}{n(n+1)} \right)^{\frac{p}{q}} \\ &= \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} |f(t)|^p dt \cdot (n(n+1))^{(p-1)(q-1)} \\ &= n(n+1) \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} |f(t)|^p dt \end{aligned}$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} |S(f)_n|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} |f(t)|^p dt = \int_0^1 |f(t)|^p dt < \infty$$

综上知 S 确实将 $L_p(0, 1)$ 中得元素映到 ℓ_p 中

• 线性:

$$S(\lambda f + g)_n = [n(n+1)]^{\frac{1}{q}} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} (\lambda f(t) + g(t)) dt = \lambda S(f)_n + S(g)_n$$

• 单位映射: $\forall x \in \ell_p$, 有

$$((S \circ T)(x))_n = (S(T(x)(t)))_n = [n(n+1)]^{\frac{1}{q}} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} [n(n+1)]^{\frac{1}{p}} x_n dt = x_n$$

故 $(S \circ T)(x) = x$, 即 $S \circ T$ 是 ℓ_p 上的单位映射.

证毕. □

15. (a) 证明: 若 (E, d) 是可分的度量空间, $F \subset E$, 则 (F, d) 也是可分的度量空间.

(b) 证明: $\mathbb{R}^n, c_0, \ell_p, 1 \leq p < \infty, C([a, b], \mathbb{R}), C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 和 $L_p(0, 1), 1 \leq p < \infty$, 都是可分的.

(c) 设 $C = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ 是 ℓ_{∞} 的子集, 它由所有的每项是 1 或 -1 的序列构成. 首先验证若 x 和 y 是 C 中两个不同序列, 则 $\|x - y\|_{\infty} = 2$. 再证明 C 不可数, 由此导出 ℓ_{∞} 不可分. 类似证明 $L_{\infty}(0, 1)$ 不可分.

证明: (a) 因 (E, d) 可分, 故有可数稠密子集 A , 令 $B = A \cap F$, 则 B 为 (F, d) 的可数稠密子集, 从而 (F, d) 可分.

(b) 令 $\mathbb{Q}^n = \{(q_1, \dots, q_n) \mid q_i \in \mathbb{Q}, 1 \leq i \leq n\}$, 则 \mathbb{Q}^n 为 \mathbb{R}^n 的可数稠密子集.

c_0 可分: 令 $S_k = \{(a_0, \dots, a_k, 0, \dots) \mid a_i \in \mathbb{Q}, 1 \leq i \leq k\}$, $S = \bigcup_{k \geq 1} S_k$, 则 S 为可数集. 任取 $y = (y_n)_{n \geq 1} \in c_0$, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n| = 0$, 故对任意 $\epsilon > 0$, 存在 N , 使得当 $n > N$ 时, $|y_n| < \epsilon$. 由 \mathbb{Q} 在 \mathbb{R} 中稠密可知存在 $x = (x_1, \dots, x_N, 0, \dots) \in S_N$, 使得 $|x_i - y_i| < \epsilon (1 \leq i \leq N)$, 从而 $\|x - y\|_\infty < \epsilon$, 从而 S 在 c_0 中稠密.

(c) 我们先说明一个引理: 设 (E, d) 为度量空间, $U \subset E$ 为不可数子集且存在 $r > 0$, 使得对任意 $x, y \in U$, $x \neq y$, 有 $d(x, y) \geq r$, 则 E 不可分.

引理证明: 假设 E 存在可数稠密子集 C , 即 $C = (x_n)_{n \geq 1}$ 且 $\overline{C} = E$. 首先我们有 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_n, \frac{r}{2})$, 事实上, 任取 $x \in E = \overline{C}$, 由闭包的性质知 $B(x, \frac{r}{2}) \cap C \neq \emptyset$, 即存在 C 中某 x_n 使得 $x_n \in B(x, \frac{r}{2})$, 而 $x_n \in B(x, \frac{r}{2}) \Leftrightarrow x \in B(x_n, \frac{r}{2})$, 因此 $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_n, \frac{r}{2})$, 从而 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_n, \frac{r}{2})$. (从过程可看出, 这里的 $\frac{r}{2}$ 可替换为任意的正常数, 只不过为下面导出矛盾, 故选择 $\frac{r}{2}$).

于是 $U \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_n, \frac{r}{2})$, 而 U 为不可数子集, 故必存在不同两点 $x, y \in U$ 包含于同一个球 $B(x_n, \frac{r}{2})$ 中, 那么 $d(x, y) < r$, 矛盾. 这就说明 E 不可分. \square

ℓ_∞ 不可分: 考虑 ℓ_∞ 的子集 $C = \{1, -1\}^{\mathbb{N}}$, 若 $x = (x_n)_{n \geq 1}$ 与 $y = (y_n)_{n \geq 1}$ 是 C 中两个不同序列, 则必存在某 $n_0 \geq 1$, 使得 $x_{n_0} \neq y_{n_0} \Rightarrow |x_{n_0} - y_{n_0}| = 2$, 从而 $\|x - y\|_\infty = 2$. 根据实变函数中的技巧, 将 C 中元素与无限小数表示对应可证 C 的基数为 c , 即 C 不可数. 因此 ℓ_∞ 不可分.

$L_\infty(0, 1)$ 不可分: 考虑 $L_\infty(0, 1)$ 的子集 $A = (\mathbb{1}_{(0, r)})_{0 < r < 1}$, 显然 A 为不可数子集, 且对于任意的 $r_1 \neq r_2$, 有 $\|\mathbb{1}_{(0, r_1)} - \mathbb{1}_{(0, r_2)}\|_\infty = 1$, 故 $L_\infty(0, 1)$ 不可分. \square

16. (卷积) 在实数集 \mathbb{R} 上取 Lebesgue σ -代数及 Lebesgue 测度, 并设 $f, g \in L_1(\mathbb{R})$.

(a) 证明

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(u)g(v) \, du \, dv &= \left[\int_{\mathbb{R}} f(u) \, du \right] \left[\int_{\mathbb{R}} g(v) \, dv \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) \, dy \right] \, dx. \end{aligned}$$

由此导出函数 $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) \, dy$ 在 \mathbb{R} 上几乎处处有定义.

(b) 我们定义 f 和 g 的卷积 $f * g$ 为

$$f * g(x) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) \, dy, & \text{当积分存在,} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

证明 $f * g \in L_1(\mathbb{R})$ 且 $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

(c) 取 $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$, 计算 $f * f$.

证明: 首先容易验证 $f(x-y)g(y)$ 为可测函数, 故由 Tonelli 定理得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |f(x-y)g(y)| \, d(x, y) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)| \, dx \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| \, dx \, dy \\ &= \|f\|_{L_1} \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \, dy = \|f\|_{L_1} \|g\|_{L_1} < \infty. \end{aligned}$$

故 $f(x-y)g(y)$ 在 \mathbb{R}^2 上可积, 由 Fubini 定理立即可得对于几乎处处的 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) \, dy < \infty,$$

也即函数 $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) \, dy$ 在 \mathbb{R} 上几乎处处有定义.

(b) 由 (a) 中结论知

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f * g(x)| \, dx &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) \, dy \right| \, dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)| \, dy \, dx \\ &= \|f\|_{L_1} \|g\|_{L_1} < \infty. \end{aligned}$$

故 $f * g \in L_1(\mathbb{R})$ 且 $\|f * g\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_1} \|g\|_{L_1}$.

(c) 由定义

$$\begin{aligned} f * f(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)f(y) \, dy = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,1]}(x-y) \mathbb{1}_{[0,1]}(y) \, dy \\ &= \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,1]}(x-y) \, dy. \end{aligned}$$

分类讨论可得, 当 $x < 0$ 时, $f * f(x) = 0$; 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f * f(x) = x$; 当 $1 < x \leq 2$ 时, $f * f(x) = 2 - x$; 当 $x > 2$ 时, $f * f(x) = 0$. \square

17. 在 \mathbb{R} 上考虑 Borel σ -代数和 Lebesgue 测度. 设 $1 < p < \infty$ 且 $f \in L_p(0, +\infty)$. 定义

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \, dt, \quad \forall x > 0.$$

本题的目标是证明 Hardy 不等式:

$$\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p, \quad \forall f \in L_p(0, +\infty). \quad (\star)$$

(a) 首先说明 F 在 $(0, +\infty)$ 上的定义是合理的, 并且

$$|x_1 F(x_1) - x_2 F(x_2)| \leq |x_1 - x_2|^{\frac{1}{q}} \|f\|_p, \quad \forall x_1, x_2 > 0.$$

这里 q 是 p 的共轭数. 并由此证明 F 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 故可测.

(b) 假设 f 是有紧支撑的连续函数且 $f \geq 0$. 证明 F 在 $(0, \infty)$ 上连续可导且有

$$(p-1) \int_0^{+\infty} F(x)^p dx = p \int_0^{+\infty} F(x)^{p-1} f(x) dx.$$

并由此导出公式 (\star) .

(c) 证明公式 (\star) 对所有的 $f \in L_p(0, +\infty)$ 成立.

(d) 用反例说明当 $p=1$ 时, (\star) 不成立, 即不存在任何常数 $C > 0$, 使得

$$\|F\|_p \leq C \|f\|_p, \quad \forall f \in L_p(0, +\infty).$$

(e) 证明 $\frac{p}{p-1}$ 是使得 (\star) 式成立的最优常数. 也就是说, 若有 $C > 0$ 使得

$$\|F\|_p \leq C \|f\|_p, \quad \forall f \in L_p(0, +\infty),$$

则 $C \geq \frac{p}{p-1}$.

提示: 考虑函数 $f(x) = x^{-\frac{1}{p}} \mathbb{1}_{[1, n]}(x)$ 和极限

$$\|F \mathbb{1}_{[1, n]}(x)\|_p / \|f\|_p, \quad n \rightarrow \infty.$$

证明: (a) 不妨设 $x_1 \leq x_2$, 则

$$\begin{aligned} |x_1 f(x_1) - x_2 f(x_2)| &= \left| \int_0^{x_1} f(t) dt - \int_0^{x_2} f(t) dt \right| \\ &= \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \right| \\ &\leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t)| dt \\ &\leq \left(\int_{x_1}^{x_2} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{x_1}^{x_2} 1 dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq |x_1 - x_2|^{\frac{1}{q}} \|f\|_p. \end{aligned}$$

(b) 注意到 $(xF(x))' = f(x)$, 故由分部积分得

$$\begin{aligned}
 p \int_0^{+\infty} F(x)^{p-1} f(x) dx &= p \int_0^{+\infty} F(x)^{p-1} d(xF(x)) \\
 &= pxF(x)^p|_0^{+\infty} - p \int_0^{+\infty} xF(x)(p-1)F(x)^{p-2} dF(x) \\
 &= -p(p-1) \int_0^{+\infty} xF(x)^{p-1} dF(x) \\
 &= -(p-1) \int_0^{+\infty} x dF(x)^p \\
 &= -(p-1)x F(x)^p|_0^{+\infty} + (p-1) \int_0^{+\infty} F(x)^p dx \\
 &= (p-1) \int_0^{+\infty} F(x)^p dx.
 \end{aligned}$$

□

18. 令 $2 \leq p < \infty$, 在本题中 $L_p(\mathbb{R})$ 简单记作 L_p .

(a) 我们的第一个目标是证明 **Clarkson 不等式**:

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_p^p \leq \frac{1}{2} (\|f\|_p^p + \|g\|_p^p), \quad \forall f, g \in L_p.$$

(i) 任取 $s, t \in [0, +\infty)$, 证明 $s^p + t^p \leq (s^2 + t^2)^{\frac{p}{2}}$.

(ii) 任取 $a, b \in \mathbb{R}$, 证明

$$\left| \frac{a+b}{2} \right|^p + \left| \frac{a-b}{2} \right|^p \leq \frac{1}{2} (|a|^p + |b|^p).$$

(iii) 导出 Clarkson 不等式.

(b) 设 C 是 L_p 空间中的非空凸集, 且 $f \in L_p$, 并记 $d = d(f, C)$. 我们的第二个目标是证明: 存在唯一的函数 $g_0 \in C$, 使得 $d = \|f - g_0\|_p$.

(i) 解释为什么存在 C 中的序列 $(g_n)_{n \geq 1}$, 使得

$$\|f - g_n\|_p^p \leq d^p + \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(ii) 运用 Clarkson 不等式证明

$$\left\| \frac{g_n - g_m}{2} \right\|_p^p \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2m}, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}^*.$$

(iii) 导出: 存在函数 $g_0 \in C$, 使得 $d(f, C) = \|f - g_0\|_p$.

(iv) 证明这样的函数 $g_0 \in C$ 是唯一的. 当证明了该命题后, 将 g_0 记为 $P_C(f)$.

(c) 最后我们的目标是证明映射 $P_C : L_p \rightarrow C$ 的连续性.

(i) 证明

$$\|g - P_C(g)\|_p \leq \|f - g\|_p + \|f - P_C(f)\|_p, \quad \forall f, g \in L_p.$$

(ii) 运用 Clarkson 不等式, 证明

$$\left\| \frac{P_C(f) - P_C(g)}{2} \right\|_p^p \leq \frac{1}{2} \|f - P_C(g)\|_p^p - \frac{1}{2} \|f - P_C(f)\|_p^p, \quad \forall f, g \in L_p.$$

(iii) 最后导出 P_C 的连续性.

证明: (a)(i) 当 $t = 0$ 时不等式显然成立, 当 $t \neq 0$ 时, 原不等式等价于

$$\left(\frac{s}{t}\right)^p + 1 \leq \left(\left(\frac{s}{t}\right)^2 + 1\right)^{\frac{p}{2}}.$$

令 $f(x) = (x^2 + 1)^{\frac{p}{2}} - x^p$, $x \geq 0$, 则 $f'(x) = px(x^2 + 1)^{\frac{p}{2}-1} - px^{p-1} \geq 0$, 故 $f(x) \geq f(0) = 1$, 此蕴含所证不等式.

(ii) 由 (i) 中结论和 $x \mapsto x^{\frac{p}{2}}$ 的凸性得

$$\begin{aligned} \left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p &\leq \left(\left|\frac{a+b}{2}\right|^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2\right)^{\frac{p}{2}} = \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{p}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2} \left[(a^2)^{\frac{p}{2}} + (b^2)^{\frac{p}{2}}\right] = \frac{1}{2}(|a|^p + |b|^p). \end{aligned}$$

(iii) 由 (ii) 中结论可得

$$\begin{aligned} \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(x)+g(x)}{2} \right|^p + \left| \frac{f(x)-g(x)}{2} \right|^p dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p + |g(x)|^p dx \\ &= \frac{1}{2} (\|f\|_p^p + \|g\|_p^p). \end{aligned}$$

(b)(i) 因 $d^p = d^p(f, C) = \inf\{\|f - g\|_p^p \mid g \in C\}$, 故由下确界的定义知对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 存在 $g_n \in C$, 使得

$$\|f - g_n\|_p^p \leq d^p + \frac{1}{n}.$$

(ii) 由于

$$\|f - g_m\|_p^p \leq d^p + \frac{1}{m}, \quad \|f - g_n\|_p^p \leq d^p + \frac{1}{n}.$$

故结合 Clarkson 不等式得

$$\left\| f - \frac{g_m + g_n}{2} \right\|_p^p + \left\| \frac{g_m - g_n}{2} \right\|_p^p \leq \frac{1}{2} (\|f - g_m\|_p^p + \|f - g_n\|_p^p) \leq d^p + \frac{1}{2m} + \frac{1}{2n}.$$

因 C 为凸集, 故 $\frac{g_m + g_n}{2} \in C$, 从而 $\|f - \frac{g_m + g_n}{2}\|_p^p \geq d^p$, 代入上述不等式得

$$\left\| \frac{g_m - g_n}{2} \right\|_p^p \leq \frac{1}{2m} + \frac{1}{2n}.$$

(iii) 由 (ii) 知 $\|\frac{g_n - g_m}{2}\|_p^p \rightarrow 0$ ($m, n \rightarrow \infty$), 故 $(g_n)_{n \geq 1}$ 为 C 中 Cauchy 序列. 注意到 C 为 Banach 空间 L_p 的闭子集, 故 C 完备, 从而 $(g_n)_{n \geq 1}$ 在 C 中收敛, 记收敛值为 g_0 . 在 $\|f - g_n\|_p^p \leq d^p + \frac{1}{n}$ 两侧取极限, 即得 $\|f - g_0\|_p = d$.

(iv) 假设存在 $g_1 \in C$, 使得 $d(f, C) = \|f - g_1\|_p$, 则由 Clarkson 不等式得

$$\begin{aligned} d^p &= \frac{1}{2} (\|f - g_0\|_p^p + \|f - g_1\|_p^p) \\ &\geq \left\| f - \frac{g_0 + g_1}{2} \right\|_p^p + \left\| \frac{g_0 - g_1}{2} \right\|_p^p \geq d^p + \left\| \frac{g_0 - g_1}{2} \right\|_p^p. \end{aligned}$$

故 $g_0 = g_1$, 唯一性得证.

(c)(i) 由 Minkowski 不等式得

$$\|g - P_C(g)\|_p \leq \|g - P_C(f)\|_p \leq \|f - g\|_p + \|f - P_C(f)\|_p.$$

(ii) 由 Clarkson 不等式知

$$\left\| f - \frac{P_C(f) + P_C(g)}{2} \right\|_p^p + \left\| \frac{P_C(f) - P_C(g)}{2} \right\|_p^p \leq \frac{1}{2} (\|f - P_C(f)\|_p^p + \|f - P_C(g)\|_p^p).$$

结合 $\left\| f - \frac{P_C(f) + P_C(g)}{2} \right\|_p^p \geq \|f - P_C(f)\|_p^p$, 即得

$$\left\| \frac{P_C(f) - P_C(g)}{2} \right\|_p^p \leq \frac{1}{2} \|f - P_C(g)\|_p^p - \frac{1}{2} \|f - P_C(f)\|_p^p.$$

(iii)

□

Hilbert 空间

1. 设 $u: H \rightarrow K$ 是两个实内积空间之间的映射, 且有

$$\|u(x) - u(y)\| = \|x - y\|, \quad \forall x, y \in H \text{ (也就是说, } u \text{ 是一个等距映射)}.$$

证明 $u - u(0)$ 是线性的.

证明: 记 $v = u - u(0)$, 则 $v(0) = 0$, $\|v(x) - v(y)\| = \|x - y\|$ ($\forall x, y \in H$), 即 v 保距离 (特别地, v 还保范数), 将上式平方得

$$\|v(x)\|^2 + \|v(y)\|^2 - 2\langle v(x), v(y) \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle.$$

故

$$\langle v(x), v(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

因此 v 保内积, 下面证明 v 是线性的:

• $v(x + y) = v(x) + v(y)$ ($\forall x, y \in H$):

$$\begin{aligned} & \langle v(x + y) - v(x) - v(y), v(x + y) - v(x) - v(y) \rangle \\ &= \|v(x + y)\|^2 + \|v(x)\|^2 + \|v(y)\|^2 - 2\langle v(x + y), v(x) \rangle - 2\langle v(x + y), v(y) \rangle + 2\langle v(x), v(y) \rangle \\ &= \|x + y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x + y, x \rangle - 2\langle x + y, y \rangle + 2\langle x, y \rangle \\ &= \|x + y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x + y\|^2 + 2\langle x, y \rangle \\ &= 0 \\ &\Rightarrow v(x + y) = v(x) + v(y). \end{aligned}$$

- $v(\lambda x) = \lambda v(x) \ (\forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in H)$:

$$\begin{aligned}
 & \langle v(\lambda x) - \lambda v(x), v(\lambda x) - \lambda v(x) \rangle \\
 &= \|v(\lambda x)\|^2 + \lambda^2 \|v(x)\|^2 - 2\lambda \langle v(\lambda x), v(x) \rangle \\
 &= \|\lambda x\|^2 + \lambda^2 \|x\|^2 - 2\lambda \langle \lambda x, x \rangle \\
 &= 0 \\
 &\Rightarrow v(\lambda x) = \lambda v(x).
 \end{aligned}$$

根据上面两点知 v 是线性的. □

注 保距离 + 保原点 \rightarrow 保内积.

2. 设 A 是 ℓ_2 的子集, 其元素 $x = (x_n)_{n \geq 1}$ 满足 $|x_n| \leq \frac{1}{n}, n \geq 1$. 证明 A 是紧集.

证明: 我们证明 A 序列紧, 即证 A 中任意序列有收敛子列, 任取 A 中的序列 $(x^{(m)})_{m \geq 1}$, 记

$$x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}, \dots) \quad m = 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned}
 & (x_1^{(m)})_{m \geq 1} \text{ 为有界序列, 有收敛子列 } (x_1^{(m_k^1)})_{k \geq 1}; \\
 & (x_2^{(m_k^1)})_{k \geq 1} \text{ 为有界序列, 有收敛子列 } (x_2^{(m_k^2)})_{k \geq 1}; \\
 & \dots\dots\dots \\
 & (x_n^{(m_k^{n-1})})_{k \geq 1} \text{ 为有界序列, 有收敛子列 } (x_n^{(m_k^n)})_{k \geq 1}; \\
 & \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

根据对角线法选取指标列 $(m_k^k)_{k \geq 1}$, 由此得到 $(x^{(m)})_{m \geq 1}$ 的子列 $(x^{(m_k^k)})_{k \geq 1}$, 不妨将其简记为 $(x^{(m_k)})_{k \geq 1}$, 其每一个坐标分量都是收敛的, 记 $(x^{(m_k)})_{k \geq 1}$ 依坐标收敛于 $x = (x_n)$, 且有 $|x_n| \leq \frac{1}{n}$, 故 $x = (x_n) \in \ell_2$, 下面证明 $(x^{(m_k)})_{k \geq 1}$ 依 ℓ_2 范数收敛到 x : 事实上, 对于每个 $k \geq 1$, 都有 $|x_n^{(m_k)}| \leq \frac{1}{n}$, 故

$$|x_n^{(m_k)} - x_n| \leq \frac{2}{n}.$$

那么, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \geq 1$, 使得

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n^{(m_k)} - x_n|^2 \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{4}{n^2} < \varepsilon.$$

另一方面, 因为 $(x^{(m_k)})_{k \geq 1}$ 依坐标收敛于 $x = (x_n)$, 故存在 $k_0 \geq 1$, 使得当 $k \geq k_0$ 时, 有

$$\sum_{n=1}^N |x_n^{(m_k)} - x_n|^2 \leq \sum_{n=1}^N \frac{\varepsilon}{N} = \varepsilon.$$

因此

$$\|x^{(m_k)} - x\|_{\ell_2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{(m_k)} - x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < (2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}.$$

即说明 $(x^{(m_k)})_{k \geq 1}$ 依 ℓ_2 范数收敛到 x , 故 A 是紧集. \square

注 从证明过程可以看出题目条件中的控制项 $\frac{1}{n}$ 可以换成任意 (a_n) , 只要其满足 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛即可.

3. 设 E 和 F 是内积空间 H 的两个向量子空间. 证明存在常数 $\alpha \geq 0$ 使得

$$|\langle x, y \rangle| = \alpha \|x\| \|y\|, \quad \forall x \in E, \forall y \in F$$

的充分必要条件是或者 $\dim E = \dim F = 1$, 或者 $\alpha = 0$ (即 E 与 F 正交).

证明: (\Leftarrow) 充分性显然.

(\Rightarrow) 已知存在 $\alpha \geq 0$, 使得 $|\langle x, y \rangle| = \alpha \|x\| \cdot \|y\|$ ($\forall x \in E, y \in F$). 当 $\alpha = 0$ 时, 显然 E 与 F 正交; 当 $\alpha > 0$ 时, 需证 $\dim E = \dim F = 1$, 反证法, 当 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 时, 假设 $\dim F \geq 2$, 取 F 中两个不共线的单位向量 e_1, e_2 , 取 E 中一个单位向量 e , 则 $\langle e, e_1 \rangle = \langle e, e_2 \rangle = \alpha$, 且

$$\langle e, e_1 + e_2 \rangle = 2\alpha = \alpha \|e_1 + e_2\|,$$

因此 $\|e_1 + e_2\| = \|e_1\| + \|e_2\|$, 于是 e_1 与 e_2 共线, 矛盾. \square

4. 设 E 和 F 是内积空间 H 的两个向量子空间. 假设 E 和 F 都不等于集合 $\{0\}$. 定义 E 和 F 之间的夹角 θ 为

$$\cos \theta = \sup \left\{ \frac{|\langle x, y \rangle|}{\|x\| \|y\|} : x \in E, y \in F \right\}, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right].$$

证明: $\theta > 0$ 当且仅当存在一个常数 $c > 0$, 使得

$$\|x + y\|^2 \geq c(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad \forall x \in E, y \in F.$$

证明: (\Rightarrow) 记 $m = \cos \theta$, 则 $\theta > 0 \iff 0 \leq m < 1$. 由夹角的定义知

$$|\langle x, y \rangle| \leq m \|x\| \|y\| \leq \frac{m}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2),$$

故

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle \geq \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 |\langle x, y \rangle| \\ &\geq \|x\|^2 + \|y\|^2 - m (\|x\|^2 + \|y\|^2) \\ &= (1 - m) (\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

在上式中取 $c = 1 - m > 0$ 即得所证.

(\Leftarrow) 注意到

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \sup \left\{ \frac{|\langle x, y \rangle|}{\|x\| \|y\|} : x \in E, y \in F \right\} \\ &= \sup \{ |\langle x, y \rangle| : \|x\| = \|y\| = 1, x \in E, y \in F \}.\end{aligned}$$

故只需证 $\sup \{ |\langle x, y \rangle| : \|x\| = \|y\| = 1, x \in E, y \in F \} < 1$.

对任意 $x \in E, y \in F$, 且 $\|x\| = \|y\| = 1$, 由条件 $\|x + y\|^2 \geq c(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (不妨设 $0 < c < 1$) 得 $\operatorname{Re} \langle x, y \rangle \geq c - 1$. 当 $\|x\| = 1$ 时, 亦有 $\| -x \| = 1$, 故

$$\operatorname{Re} \langle x, y \rangle = -\operatorname{Re} \langle -x, y \rangle \leq 1 - c.$$

因此

$$\begin{aligned}|\langle x, y \rangle| &= \operatorname{sgn} \langle x, y \rangle \cdot \langle x, y \rangle \\ &= \langle \operatorname{sgn} \langle x, y \rangle \cdot x, y \rangle \quad (\text{real number}) \\ &= \operatorname{Re} \langle \operatorname{sgn} \langle x, y \rangle \cdot x, y \rangle \\ &\leq 1 - c.\end{aligned}$$

从而 $\sup \{ |\langle x, y \rangle| : \|x\| = \|y\| = 1, x \in E, y \in F \} \leq 1 - c < 1$, 由此即得 $\theta > 0$. \square

5. 设 H 是 Hilbert 空间, (A_n) 是 H 中递减的闭凸非空子集列. 任取 $x \in H$, 令 $d_n(x) = d(x, A_n)$ 且 $d(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n(x)$.

(a) 证明: 若对某一个 $x \in H$, 有 $d(x) < \infty$, 则对所有的 $x \in H$, $d(x) < \infty$. 我们在下面假设该命题成立, 并用 $A(x, \varepsilon, n)$ 表示中心在 x 、半径为 $d(x) + \varepsilon$ 的闭球与 A_n 的交集, 即 $A(x, \varepsilon, n) = A_n \cap \overline{B}(x, d(x) + \varepsilon)$.

(b) 证明

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \operatorname{diam}(A(x, \varepsilon, n)) = 0.$$

(c) 证明所有 A_n 的交集 A 非空并且 $d(x) = d(x, A)$.

证明: (a) 假设存在 $x_0 \in H$, s.t. $d(x_0) < \infty$, 记 $y_n = P_{A_n}(x_0)$, 则

$$d_n(x_0) = d(x_0, A_n) = d(x_0, y_n) < \infty$$

故 $\forall x \in H$

$$d_n(x) = d(x, A_n) \leq d(x, y_n) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y_n) < \infty$$

因此 $d(x) < \infty (\forall x \in H)$.

(b) 仍记 $y_n = P_{A_n}(x)$, 则 $d_n(x) = d(x, y_n) \leq d(x)$, 因此 $y_n \in A_n \cap \overline{B}(x, d(x) + \varepsilon)$. 由于 $d_n(x) = d(x, y_n) \leq d(x) < \infty$, 故对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), s.t. \forall n \geq N(\varepsilon), d(x) < d_n(x) + \varepsilon$. 因此对 $\forall z, w \in A_n \cap \overline{B}(x, d(x) + \varepsilon), \forall n \geq N(\varepsilon)$, 有:

$$d_n(x) \leq d(x, z) \leq d(x) + \varepsilon \leq d_n(x) + 2\varepsilon$$

$$d_n(x) \leq d(x, w) \leq d(x) + \varepsilon \leq d_n(x) + 2\varepsilon$$

由 A_n 及 $\overline{B}(x, d(x) + \varepsilon)$ 均为凸集知 $\frac{z+w}{2} \in A_n \cap \overline{B}(x, d(x) + \varepsilon)$, 从而:

$$d_n(x) \leq d\left(x, \frac{z+w}{2}\right)$$

结合以上三式并根据平行四边形公式得:

$$\begin{aligned} d_n(x)^2 + \frac{1}{4}\|z - w\|^2 &\leq \left\|x - \frac{z+w}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{z-w}{2}\right\|^2 \\ &= 2\left(\left\|\frac{x-z}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-w}{2}\right\|^2\right) \\ &\leq (d_n(x) + 2\varepsilon)^2 \end{aligned}$$

即

$$\|z - w\|^2 \leq 16\varepsilon(d_n(x) + \varepsilon)$$

对所有的 $z, w \in A(x, \varepsilon, n)$ 取上确界得:

$$\text{diam } A(x, \varepsilon, n) \leq 16\varepsilon(d_n(x) + \varepsilon)(n \geq N(\varepsilon))$$

从而

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \text{diam } A(x, \varepsilon, n) = 0$$

(c) 取 H 中集列 $(A(x, \frac{1}{n}, n))_{n \geq 1}$, 则

- $(A(x, \frac{1}{n}, n))_{n \geq 1}$ 是单调递减的闭集列
- $(A(x, \frac{1}{n}, n))_{n \geq 1}$ 非空
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } (A(x, \frac{1}{n}, n))_{n \geq 1} = 0$ (在 (b) 中取 $\varepsilon = 1/n$ 知此式成立)

因为 H 是完备的, 所以

$$\bigcap_{n \geq 1} A\left(x, \frac{1}{n}, n\right) \text{ 是单点集}$$

又 $(A(x, \frac{1}{n}, n)) \subset A_n$, 故 $A = \bigcap_{n \geq 1} A_n$ 非空.

下证 $d(x) = d(x, A)$:

因为 $d_n(x) = d(x, A_n) \leq d(x, A)$, 所以 $d(x) \leq d(x, A)$, 假设 $d(x) < d(x, A)$, 则存在 $\delta, s.t. d(x, A_n) \leq d(x) < \delta < d(x, A)$, 同理可知:

$$\bigcap_{n \geq 1} A \left(x, \frac{\delta - d(x)}{n}, n \right) = \bigcap_{n \geq 1} \left(A_n \cap \overline{B} \left(x, d(x) + \frac{\delta - d(x)}{n} \right) \right) \text{ 是单点集}$$

故

$$\bigcap_{n \geq 1} (A_n \cap \overline{B}(x, \delta)) = A \cap \overline{B}(x, \delta) \text{ 非空}$$

但事实是

$$A \cap \overline{B}(x, \delta) = \emptyset$$

故假设不成立, 即得 $d(x) = d(x, A)$. □

6. 设 H 是内积空间, $x_n, x \in H$. 并假设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\| \quad \text{且} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle y, x_n \rangle = \langle y, x \rangle, \forall y \in H.$$

证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$.

证明: 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, x_n \rangle = \langle x, x \rangle \cdots (1)$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle y, x_n \rangle = \langle y, x \rangle$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, x_n \rangle = \langle x, x \rangle \cdots (2)$

两式相减得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n - x, x_n \rangle = 0$, 另外由第二式可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n - x, x \rangle = 0$.

故

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n - x, x_n - x \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n - x, x_n \rangle - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n - x, x \rangle \\ &= 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$. □

7. 设 (x_n) 是 Hilbert 空间 H 中的有界序列. 证明存在 (x_n) 的子序列 (x_{n_k}) 及 $x \in H$, 使得对任意 $y \in H$, 有 $\lim_k \langle y, x_{n_k} \rangle = \langle y, x \rangle$.

证明: (本题考查对角线选择法和 Riesz 表示定理) 设 $\|x_n\| \leq M (\forall n \in \mathbb{N}^*)$, 故对任意 $m, n \in \mathbb{N}^*$, $|\langle x_m, x_n \rangle| \leq \|x_m\| \cdot \|x_n\| \leq M^2$, 考虑下面的一族有界内积序列

$$\begin{array}{ccccccc} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle & \cdots & & \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2, x_n \rangle & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ \langle x_m, x_1 \rangle & \langle x_m, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_m, x_n \rangle & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \end{array}$$

第一行序列 $(\langle x_1, x_n \rangle)_{n \geq 1}$ 存在收敛子列 $(\langle x_1, x_{n_k^1} \rangle)_{k \geq 1}$

第二行子列 $(\langle x_2, x_{n_k^1} \rangle)_{k \geq 1}$ 存在收敛子列 $(\langle x_2, x_{n_k^2} \rangle)_{k \geq 1}$

.....

第 m 行子列 $(\langle x_m, x_{n_k^{m-1}} \rangle)_{k \geq 1}$ 存在收敛子列 $(\langle x_m, x_{n_k^m} \rangle)_{k \geq 1}$

依此下来, 并运用对角线选择法取出 (x_n) 的子列 $(x_{n_k})_{k \geq 1}$, 不妨将其简记为 $(x_{n_k})_{k \geq 1}$.

设 $E = \text{span}((x_n)_{n \geq 1})$, 则任意 $y \in E, (\langle y, x_{n_k} \rangle)_{k \geq 1}$ 收敛, 进一步容易验证对 $\forall y \in \overline{E}, (\langle y, x_{n_k} \rangle)_{k \geq 1}$ 收敛, 最后任意 $y \in H$, 由正交分解定理得 $y = y_1 + y_2, y_1 \in \overline{E}, y_2 \in E^\perp$, 故

$$\langle y, x_{n_k} \rangle = \langle y_1, x_{n_k} \rangle + \langle y_2, x_{n_k} \rangle = \langle y_1, x_{n_k} \rangle.$$

因此对任意 $y \in H, \lim_{k \rightarrow \infty} \langle y, x_{n_k} \rangle$ 存在, 而且

$$\left| \lim_{k \rightarrow \infty} \langle y, x_{n_k} \rangle \right| \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} |\langle y, x_{n_k} \rangle| \leq M \|y\|.$$

因此 $y \mapsto \lim_{k \rightarrow \infty} \langle y, x_{n_k} \rangle$ 是连续线性泛函, 由 Riesz 表示定理知存在 $x \in H$ 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle y, x_{n_k} \rangle = \langle y, x \rangle (\forall y \in H)$. \square

8. 设 A 和 B 都是 Hilbert 空间 H 的非空闭凸子集, 并设它们其中一个有界. 证明存在 $a \in A$ 和 $b \in B$, 使得 $d(a, b) = d(A, B)$, 这里

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

证明: 不妨设 A 有界, 由距离的定义知对任意 $n \geq 1, \exists x_n \in A$ 使得

$$d(x_n, B) < d(A, B) + \frac{1}{n}.$$

因为 $(x_n)_{n \geq 1}$ 是有界序列, 故由上一题结论知存在 $a \in H$ 及 $(x_n)_{n \geq 1}$ 的子列 (不妨仍记为 $(x_n)_{n \geq 1}$) 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle = \langle a, y \rangle, \quad \forall y \in H.$$

下面证明 $a \in A$, 由投影的性质知

$$\begin{aligned} \|a - P_A(a)\|^2 &= \langle a - P_A(a), a - P_A(a) \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle a - P_A(a), x_n - P_A(a) \rangle \quad (\text{注意到虚部的极限为 } 0) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Re} \langle a - P_A(a), x_n - P_A(a) \rangle \leq 0. \end{aligned}$$

故 $a = P_A(a)$, 从而 $a \in A$, 又

$$\begin{aligned}\|x_n - P_B(x_n)\|^2 &= \|x_n - a + a - P_B(a) + P_B(a) - P_B(x_n)\|^2 \\ &= \|a - P_B(a)\|^2 + \|x_n - a + P_B(a) - P_B(x_n)\|^2 \\ &\quad + 2\langle a - P_B(a), x_n - a \rangle + 2\langle a - P_B(a), P_B(a) - P_B(x_n) \rangle \\ &\geq \|a - P_B(a)\|^2 + 2\langle a - P_B(a), x_n - a \rangle\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}(d(A, B))^2 &\leq \|a - P_B(a)\|^2 \leq \|x_n - P_B(x_n)\|^2 - 2\langle a - P_B(a), x_n - a \rangle \\ &< \left(d(A, B) + \frac{1}{n}\right)^2 - 2\langle a - P_B(a), x_n - a \rangle \rightarrow (d(A, B))^2 (n \rightarrow \infty)\end{aligned}$$

因此 $\|a - P_B(a)\| = d(A, B)$, 记 $b = P_B(a) \in B$, 即得 $d(a, b) = d(A, B)$. \square

9. 将上一习题中的条件换成 A 和 B 无界, 但假设 $\|x\|$ 和 $\|y\|$ 都趋向 ∞ 时, 必有 $d(x, y)$ 趋向 ∞ . 证明结论仍然成立. 在 \mathbb{R}^2 中用反例说明若条件不符合假设时, 结论不成立.

证明: 反例: 取 \mathbb{R}^2 中的区域 $A = \{(x, y) \mid xy \leq -1, x < 0\}$, $B = \{(x, y) \mid xy \geq 1, x > 0\}$, 则 $d(A, B) = 0$, 但是不存在 $a \in A, b \in B$ 使得 $d(a, b) = 0$. \square

10. (a) 设 H 是 Hilbert 空间, $D_n = \{-1, 1\}^n$. 证明

$$\frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_k) \in D_n} \|\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2, \quad \forall x_1, \cdots, x_n \in H.$$

(b) 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间, 并假设有一个 X 上的内积范数 $|\cdot|$ 等价于 $\|\cdot\|$. 证明存在正常数 a 和 b , 使得

$$a \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 \leq \frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_k) \in D_n} \left\| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k \right\|^2 \leq b \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2, \quad \forall x_1, \cdots, x_n \in X.$$

(c) 设 $1 \leq p \neq 2 \leq \infty$, 证明空间 c_0, ℓ_p 和 $L_p(0, 1)$ 没有等价的内积范数.

证明: (a) 原等式等价于

$$\sum_{(\varepsilon_k) \in D_n} \|\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n\|^2 = 2^n (\|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2).$$

上式左边

$$\begin{aligned}
 \text{RHS} &= \sum_{(\varepsilon_k) \in D_n} \left\langle \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i, \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\rangle \\
 &= \sum_{(\varepsilon_k) \in D_n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_j \langle x_i, x_j \rangle \\
 &= \sum_{(\varepsilon_k) \in D_n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \langle x_i, x_i \rangle + \sum_{(\varepsilon_k) \in D_n} \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \varepsilon_i \varepsilon_j \langle x_i, x_j \rangle \\
 &= \sum_{(\varepsilon_k) \in D_n} \sum_{i=1}^n \langle x_i, x_i \rangle + \sum_{(\varepsilon_k) \in D_n} \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \varepsilon_i \varepsilon_j \langle x_i, x_j \rangle \\
 &= 2^n \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 + \sum_{(\varepsilon_k) \in D_n} \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \varepsilon_i \varepsilon_j \langle x_i, x_j \rangle.
 \end{aligned}$$

观察最后一项中 $\langle x_i, x_j \rangle$ 的系数: $\varepsilon_i = \varepsilon_j = 1$ 有 2^{n-2} 项, $\varepsilon_i = \varepsilon_j = -1$ 有 2^{n-2} 项, $\varepsilon_i = 1, \varepsilon_j = -1$ 有 2^{n-2} 项, $\varepsilon_i = -1, \varepsilon_j = 1$ 有 2^{n-2} 项, 因此

$$\langle x_i, x_j \rangle \text{ 的系数} = 2 \cdot 2^{n-2} - 2 \cdot 2^{n-2} = 0.$$

于是即证所需.

(b) 由于 $|\cdot|$ 等价于 $\|\cdot\|$, 故存在正常数 C_1 和 C_2 使得 $C_1 \|\cdot\| \leq |\cdot| \leq C_2 \|\cdot\|$. 由 (a) 知

$$\frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_k) \in D_n} \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k \right|^2 = \sum_{k=1}^n |x_k|^2.$$

故

$$\sum_{k=1}^n C_2^2 \|x_k\|^2 \geq \sum_{k=1}^n |x_k|^2 = \frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_k) \in D_n} \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k \right|^2 \geq \frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_k) \in D_n} C_1^2 \left\| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k \right\|^2,$$

因此

$$\frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_k) \in D_n} \left\| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k \right\|^2 \leq \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2.$$

故取 $b = \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2$ 即得

$$\frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_k) \in D_n} \left\| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k \right\|^2 \leq b \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2.$$

同理取 $a = \left(\frac{C_1}{C_2}\right)^2$ 可得左半边不等式. \square

11. 设 (C_n) 是 Hilbert 空间 H 中的一个递增的非空闭凸子集列, C 是所有 C_n 的并集的闭包. 证明

$$P_C(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{C_n}(x), \quad \forall x \in H.$$

证明: 首先容易验证 C 是闭凸集, 从而 $P_C(x)$ 是有定义的, 接下来证明 $P_C(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{C_n}(x)$ ($\forall x \in H$), 分几步进行:

$d(x, C) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, C_n)$: 因为对于每个 n , $d(x, C) \leq d(x, C_n)$, 故 $d(x, C) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, C_n)$, 假设 $d(x, C) < \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, C_n)$, 则存在 $y \in C$, 使得 $d(x, y) < \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, C_n)$, 不妨设 $y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, 也就是说存在 n_0 使得 $y \in C_{n_0}$, 从而 $d(x, y) \geq d(x, C_{n_0}) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, C_n)$, 矛盾, 故 $d(x, C) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, C_n)$.

$(P_{C_n}(x))_{n \geq 1}$ 收敛: 因为 $(d(x, C_n))_{n \geq 1}$ 单调递减趋于 $d(x, C)$, 故对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N \geq 1$, 使得当 $n > N$ 时, $d(x, C_n) < d(x, C) + \varepsilon$, 故 $\forall m, n > N$, 有

$$\begin{aligned} 4(d(x, C) + \varepsilon)^2 &\geq 2(\|x - P_{C_n}(x)\|^2 + \|x - P_{C_m}(x)\|^2) \\ &= 4\left\|x - \frac{P_{C_n}(x) + P_{C_m}(x)}{2}\right\|^2 + \|P_{C_n}(x) - P_{C_m}(x)\|^2 \\ &\geq 4d(x, C)^2 + \|P_{C_n}(x) - P_{C_m}(x)\|^2. \end{aligned}$$

由上式知 $(P_{C_n}(x))_{n \geq 1}$ 是 Cauchy 序列, 由 C 的完备性知其在 C 中收敛, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{C_n}(x) = y \in C$.

$y = P_C(x)$: 对于任意 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N \geq 1$, 使得对 $\forall n > N$, 有 $d(y, P_{C_n}(x)) < \varepsilon$, $d(x, C_n) < d(x, C) + \varepsilon$, 故

$$d(x, y) \leq d(y, P_{C_n}(x)) + d(x, C_n) < d(x, C) + 2\varepsilon,$$

由 ε 的任意性知 $d(x, y) \leq d(x, C)$, 又因为 $y \in C$, 故 $d(x, y) = d(x, C)$, 由投影的唯一性知 $y = P_C(x)$, 证毕. \square

12. 设 H 是内积空间. (x_1, \dots, x_n) 是 H 中的任一向量组, 称矩阵 $(\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$ 的行列式为向量组 (x_1, \dots, x_n) 的 Gram 行列式, 记作 $G(x_1, \dots, x_n)$.

(a) 证明 $G(x_1, \dots, x_n) \geq 0$; 且 $G(x_1, \dots, x_n) > 0$ 当且仅当向量组 (x_1, \dots, x_n) 线性独立.

(b) 假设向量组 (x_1, \dots, x_n) 线性独立. 令 $E = \text{span}(x_1, \dots, x_n)$. 证明

$$d(x, E)^2 = \frac{G(x, x_1, x_2, \dots, x_n)}{G(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \quad \forall x \in H.$$

证明: (参考《高等代数与解析几何》陈志杰习题 6.3.13 及 6.4.6)

(a) 设 $W = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ 且 $\dim W = k$, 取 W 的规范正交基 $(e_i)_{1 \leq i \leq k}$. 由于

$$x_i = \sum_{m=1}^k \langle x_i, e_m \rangle e_m, \quad x_j = \sum_{m=1}^k \langle x_j, e_m \rangle e_m,$$

故

$$\begin{aligned} \langle x_i, x_j \rangle &= \left\langle \sum_{m=1}^k \langle x_i, e_m \rangle e_m, \sum_{m=1}^k \langle x_j, e_m \rangle e_m \right\rangle \\ &= \sum_{m=1}^k \langle x_i, e_m \rangle \langle x_j, e_m \rangle = \sum_{m=1}^k \langle x_i, e_m \rangle \overline{\langle e_m, x_j \rangle}. \end{aligned}$$

记

$$M = \begin{pmatrix} \langle x_1, e_1 \rangle & \cdots & \langle x_1, e_k \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle x_n, e_1 \rangle & \cdots & \langle x_n, e_k \rangle \end{pmatrix}_{n \times k}.$$

则

$$M^T = \begin{pmatrix} \overline{\langle e_1, x_1 \rangle} & \cdots & \overline{\langle e_1, x_n \rangle} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{\langle e_k, x_1 \rangle} & \cdots & \overline{\langle e_k, x_n \rangle} \end{pmatrix}_{k \times n},$$

且 $(\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n} = MM^T$, 从而 $G(x_1, \dots, x_n) = \det(MM^T)$.

若 $k < n$, 则 $\text{rank}(M) \leq k < n$, 故 $\text{rank}(\langle x_i, x_j \rangle) < n$, 故 $|G(x_1, \dots, x_n)| = 0$.

若 $k = n$, 则 x_1, \dots, x_n 线性无关, 即关于 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 的方程

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$$

只有零解. 考虑关于 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 的齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda_1 \langle x_1, e_1 \rangle + \cdots + \lambda_n \langle x_n, e_1 \rangle = 0 \\ \cdots \\ \lambda_1 \langle x_1, e_n \rangle + \cdots + \lambda_n \langle x_n, e_n \rangle = 0. \end{cases}$$

上述方程组的系数矩阵即为 M^T , 将上述方程组的第 i ($1 \leq i \leq n$) 个方程乘以 e_i 并求和即得

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0,$$

于是 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, 因此 $\det(M) \neq 0$, 从而

$$G(x_1, \cdots, x_n) = \det(MM^T) = \det(M) \det(M^T) = (\det(M))^2 > 0.$$

(b) 略. □

13. 设 $E = C([0, 1])$ 上装备有如下的内积

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt.$$

并设 E_0 表示在 $[0, 1]$ 上积分为 0 的函数组成的 E 的向量子空间. 考虑 E 的向量子空间:

$$H = \{f \in E : f(1) = 0\} \text{ 且 } H_0 = E_0 \cap H.$$

(a) 验证 H_0 是 H 的闭的真向量子空间.

(b) 设 $h(t) = t - \frac{1}{2}, t \in [0, 1]$. 证明

(i) $E = \text{span}(H, h)$ 且有 $E_0 = \text{span}(H_0, h)$;

(ii) h 属于 H_0 在 E 中的闭包.

(c) 证明 $H_0^\perp = \{0\}$. 解释所得结果蕴含的意义.

证明: (a) 任取一系列 $(f_n) \subset E_0$ 且 $f_n \rightarrow f$, 则 $\int_0^1 f_n(t) dt = 0, \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|^2 dt \rightarrow 0$, 故 $f_n(t) - f(t) = 0$ a.e. ($n \rightarrow \infty$), 因此 $\int_0^1 f(t) dt = 0$, 也即 $f \in E_0$, 从而说明 E_0 是闭子空间, 故 $H_0 = E_0 \cap H$ 是 H 的闭子空间. 取 $f(t) = 1 - t$, 显然 $f(t) \in H$, 但是 $f(t) \notin H_0$, 故 H_0 是 H 的真子空间.

(b)(i) 对于 $\forall f \in E$, 令 $g(t) = f(t) - 2f(1)h(t)$, 则 $g(1) = 0$, 故 $g \in H$, 所以 $E = \text{span}(H, h)$.

对于 $\forall f \in E_0$, 令 $g(t) = f(t) - 2f(1)h(t)$, 则 $g(1) = 0, \int_0^1 g(t) dt = 0$, 即 $g \in H_0$, 所以 $E_0 = \text{span}(H_0, h)$.

(ii) 取 $g_n(t) = \sin 2\pi n t$, 则 $g_n \in H_0$, 由于 h 关于点 $(1/2, 0)$ 对称, 故 h 的 Fourier 展开式中只含有形如 g_n 的项, 因此 $h \in \bar{H}_0$ □

14. 仍设 E 为上一习题中的内积空间, 并令 $0 < c < 1$. 记

$$F = \{f \in E : f|_{[0, c]} = 0\}.$$

(a) 验证 F 是 E 的闭的真向量子空间.

(b) 证明 $F \oplus F^\perp \neq E$. 解释所得结果蕴含的意义.

15. (a) 设 E 和 F 是 Hilbert 空间 H 的两个正交向量子空间. 证明 $E + F$ 是闭的当且仅当 E 和 F 都是闭的.

(b) (e_n) 表示 ℓ_2 中的标准正交基. 设 E 是 $\{e_{2n} : n \geq 1\}$ 的线性扩张的闭包, 而 F 是 $\{e_{2n} + \frac{1}{n}e_{2n+1} : n \geq 1\}$ 的线性扩张的闭包. 证明 $E \cap F = \{0\}$ 并且 $E + F$ 在 ℓ_2 中不是闭的.

证明: (a) 由 E 与 F 正交知 $E + F = E \oplus F$, 即任取 $z \in E + F$, 存在唯一的 $x \in E$ 和 $y \in F$, 使得 $z = x + y$.

(\Rightarrow) 任取 E 中收敛列 $(x_n)_{n \geq 1}$, 设 $x_n \rightarrow x \in E + F$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$. 由于 $x \in E + F$, 故存在 $x' \in E, x'' \in F$, 使得 $x = x' + x''$, 那么

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x' - x''\|^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x'\|^2 + \|x''\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x_n - x', x'' \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x'\|^2 + \|x''\|^2 = 0. \end{aligned}$$

故必有 $x'' = 0$, 从而 $x = x' \in E$, 因此 E 为闭集. 同理可证 F 为闭集.

(\Leftarrow) 任取 $E + F$ 中 Cauchy 序列 $(z_n)_{n \geq 1}$, 设 $z_n = x_n + y_n$, 其中 $x_n \in E, y_n \in F$, 则

$$\begin{aligned} \|z_m - z_n\|^2 &= \|x_m + y_m - x_n - y_n\|^2 \\ &= \|x_m - x_n\|^2 + \|y_m - y_n\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x_m - x_n, y_m - y_n \rangle \\ &= \|x_m - x_n\|^2 + \|y_m - y_n\|^2 \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

故 $(x_n)_{n \geq 1}$ 和 $(y_n)_{n \geq 1}$ 分别为 E 和 F 中的 Cauchy 序列, 而 E, F 皆完备, 故设 $x_n \rightarrow x \in E, y_n \rightarrow y \in F$. 令 $z = x + y \in E + F$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$\|z_n - z\|^2 = \|x_n + y_n - x - y\|^2 = \|x_n - x\|^2 + \|y_n - y\|^2 \rightarrow 0.$$

即 $z_n \rightarrow z \in E + F$, 故 $E + F$ 完备, 从而为闭集.

(b) 任取 $x \in E \cap F$, 由于 E 是 Hilbert 空间, 且 $\{e_{2n} : n \geq 1\}$ 是 E 的一组规范正交基, 故存在唯一的系数列 $(x_n)_{n \geq 1}$, 使得 $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_{2n}$. 类似地, F 为 Hilbert 空间, 且规范化后的 $\{\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}(e_{2n} + \frac{1}{n}e_{2n+1}) : n \geq 1\}$ 是 F 的一组规范正交基, 故存在唯一的系数列 $(y_n)_{n \geq 1}$, 使得 $x = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}(e_{2n} + \frac{1}{n}e_{2n+1})$. 于是对任意 $n \geq 1$, 有

$$x_n = y_n \cdot \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}, \quad \frac{y_n}{\sqrt{n^2+1}} = 0 \implies x_n = y_n = 0.$$

故 $x = 0$, 因此 $E \cap F = \{0\}$. 下证 $E + F$ 不是闭集, 取 $x^{(m)} = \sum_{n=1}^m -e_{2n} \in E$, $y^{(m)} = \sum_{n=1}^m (e_{2n} + \frac{1}{n}e_{2n+1}) \in F$, 则

$$x^{(m)} + y^{(m)} = \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} e_{2n+1} \in E + F$$

且

$$x^{(m)} + y^{(m)} \xrightarrow{\ell_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_{2n+1}.$$

但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_{2n+1} \notin E+F$, 事实上, 若存在 $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_{2n} \in E$ 和 $y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} (e_{2n} + \frac{1}{n} e_{2n+1}) \in F$, 使得 $x + y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_{2n+1}$, 则

$$x_n + \frac{ny_n}{\sqrt{n^2+1}} = 0, \quad \frac{y_n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{n} \implies x_n = -1, y_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}.$$

但此时 $x = \sum_{n=1}^{\infty} -e_{2n} \notin \ell_2$, 矛盾. \square

16. 设 H 是 Hilbert 空间, E 是 H 的非零的闭量子空间. 设 P 是 H 到 E 的投影 (投影意味着 P 是 H 上的线性算子且满足 $P^2 = P$). 证明以下命题等价:

- (a) $P = P_E$.
- (b) $\|P\| = 1$.
- (c) $|\langle x, P(x) \rangle| \leq \|x\|^2, \forall x \in H$.

证明: (a) \Rightarrow (b) 显然.

(b) \Rightarrow (c) 由 $\|P\| = 1$ 知 $\|P(x)\| \leq \|x\|$, 故 $|\langle x, P(x) \rangle| \leq \|x\| \cdot \|P(x)\| \leq \|x\|^2$.

(c) \Rightarrow (a) 分三步进行

- $\forall y \in E, P(y) = y$: 任意 $y \in E, \exists x \in H, s.t. P(x) = y$, 故 $P(y) = P(P(x)) = P(x) = y$.
- $\forall y \in E^\perp, P(y) = 0$: 根据 P 的线性性知:

$$P(y + nP(y)) = (n+1)P(y).$$

故结合条件得

$$|\langle y + nP(y), (n+1)P(y) \rangle| \leq \|y + nP(y)\|^2 = \|y\|^2 + n^2\|P(y)\|^2.$$

又

$$|\langle y + nP(y), (n+1)P(y) \rangle| = |\langle nP(y), (n+1)P(y) \rangle| = (n^2 + n)\|P(y)\|^2.$$

结合两式得

$$\|P(y)\|^2 \leq \frac{1}{n}\|y\|^2.$$

上式对于任意正整数 n 成立, 故只能有 $P(y) = 0$.

- $\forall x \in H, P(x) = P_E(x)$: 根据前两步的结果可知

$$P(x) = P(P_E(x)) + P(x - P_E(x)) = P_E(x). \quad \square$$

17. 设 H 是 Hilbert 空间, E 是 H 的向量子空间. 设 F 为赋范空间, $u: E \rightarrow F$ 是连续线性映射. 证明 u 有连续的线性延拓 $\hat{u}: H \rightarrow F$, 且 $\|\hat{u}\| = \|u\|$.

证明: 假设 F 为 Banach 空间, 由定理 3.2.13 知连续线性映射 $u: E \rightarrow F$ 可以唯一地扩展为连续线性映射 $\tilde{u}: \overline{E} \rightarrow F$ 且 $\|\tilde{u}\| = \|u\|$. 对任意 $x \in H$, 定义

$$\hat{u}(x) := \tilde{u}(P_{\overline{E}}(x)).$$

若 $x \in E$, 则 $\hat{u}(x) = \tilde{u}(x) = u(x)$, 故 \hat{u} 为 u 的扩展映射.

\hat{u} 为连续映射: 对任意 $x, y \in H$ 和 $\lambda \in \mathbb{K}$, 由 \tilde{u} 和 $P_{\overline{E}}$ 的线性性得

$$\begin{aligned} \hat{u}(\lambda x + y) &= \tilde{u}(P_{\overline{E}}(\lambda x + y)) \\ &= \tilde{u}(\lambda P_{\overline{E}}(x) + P_{\overline{E}}(y)) \\ &= \lambda \tilde{u}(P_{\overline{E}}(x)) + \tilde{u}(P_{\overline{E}}(y)) \\ &= \lambda \hat{u}(x) + \hat{u}(y). \end{aligned}$$

\hat{u} 为有界映射: 对任意 $x \in H$, 有

$$\|\hat{u}(x)\| = \|\tilde{u}(P_{\overline{E}}(x))\| \leq \|\tilde{u}\| \|P_{\overline{E}}\| \|x\| = \|u\| \|x\|.$$

故 $\|\hat{u}\| \leq \|u\|$, 又

$$\|u\| = \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \in H, x \neq 0} \frac{\|\hat{u}(x)\|}{\|x\|} = \|\hat{u}\|,$$

所以 $\|\hat{u}\| = \|u\|$. □

18. 设 $[0, 1]$ 上赋予 Lebesgue 测度, $H = L_2(0, 1)$. 并假设 $K \in L_2([0, 1] \times [0, 1])$. 我们定义

$$T_K(f)(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) dy, \quad f \in H, x \in [0, 1].$$

(a) 证明 $T_K(f)$ 在 $[0, 1]$ 上几乎处处有定义.

(b) 证明 $T_K \in \mathcal{B}(H)$ 且

$$\|T_K\| \leq \|K\|_{L_2([0, 1] \times [0, 1])}.$$

(c) 设 $\tilde{K}(x, y) = \overline{K(y, x)}$, $x, y \in [0, 1]$. 证明 $T_K^* = T_{\tilde{K}}$.

(d) 定义

$$T(f)(x) = \int_0^x f(1-y) dy, \quad f \in H, x \in [0, 1].$$

证明 $T \in \mathcal{B}(H)$ 且有 $T^* = T$. 最后给出 T 的非零特征值并证明相应的特征子空间两两正交.

证明: (a) 任意固定 x , 将 $K(x, y)$ 看作关于 y 的一元函数, 由 Cauchy-Schwarz 不等式得:

$$\begin{aligned} |\langle K, \bar{f} \rangle|^2 &= \left| \int_0^1 K(x, y) f(y) dy \right|^2 \\ &\leq \int_0^1 |K(x, y)|^2 dy \cdot \int_0^1 |f(y)|^2 dy. \end{aligned}$$

因为 $f \in L_2(0, 1)$, 所以

$$\int_0^1 |f(y)|^2 dy < \infty.$$

因为 $K \in L_2([0, 1] \times [0, 1])$, 所以

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(x, y)|^2 dy dx < \infty \Rightarrow \int_0^1 |K(x, y)|^2 dy < \infty, \text{ a.e.}$$

结合以上三式得

$$\left| \int_0^1 K(x, y) f(y) dy \right|^2 < \infty, \text{ a.e.}$$

也就证明了 $T_K(f)$ 在 $[0, 1]$ 上几乎处处有定义.

(b) 由 (a) 中结论知: $\forall f \in H, T_K(f) \in H$.

首先, T_K 为线性算子. 对于任意 $f, g \in H$ 和 $\lambda \in \mathbb{K}$, 有

$$T_K(\lambda f + g) = \int_0^1 K(x, y)(\lambda f(y) + g(y)) dy = \lambda T_K(f) + T_K(g).$$

其次, T_K 为有界算子. 对于任意 $f \in H$, 有

$$\begin{aligned} \|T_K(f)\|^2 &= \int_0^1 |T_K(f)(x)|^2 dx \\ &= \int_0^1 \left| \int_0^1 K(x, y) f(y) dy \right|^2 dx \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(x, y)|^2 dy \cdot \int_0^1 |f(y)|^2 dy \right) dx \\ &= \int_0^1 |f(y)|^2 dy \cdot \int_0^1 \int_0^1 |K(x, y)|^2 dx dy \\ &= \|f\|^2 \cdot \|K\|_{L_2([0, 1] \times [0, 1])}^2. \end{aligned}$$

故 T_K 为有界算子且 $\|T_K\| \leq \|K\|_{L_2([0, 1] \times [0, 1])}$.

(c) 对于 $\forall f, g \in H$, 有

$$\begin{aligned}
 \langle T_{\tilde{K}}(f), g \rangle &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \tilde{K}(x, y) f(y) \, dy \right) \overline{g(x)} \, dx \\
 &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \overline{K(y, x)} f(y) \, dy \right) \overline{g(x)} \, dx \\
 &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \overline{K(x, y)} f(x) \, dx \right) \overline{g(y)} \, dy \\
 &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \overline{K(x, y) g(y)} f(x) \, dx \right) \, dy \\
 &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \overline{K(x, y) g(y)} f(x) \, dy \right) \, dx \\
 &= \int_0^1 f(x) \overline{\left(\int_0^1 K(x, y) g(y) \, dy \right)} \, dx \\
 &= \langle f, T_K(g) \rangle.
 \end{aligned}$$

因此由伴随算子的定义知 $T_K^* = T_{\tilde{K}}$.

(d) $T(f)(x) = \int_0^x f(1-y) \, dy = \int_{1-x}^1 f(y) \, dy$, 取:

$$K(x, y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq y \leq 1-x, \\ 1, & 1-x < y \leq 1. \end{cases}$$

显然 $K(x, y) \in L_2([0, 1] \times [0, 1])$, 且

$$T_K(f)(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) \, dy = \int_{1-x}^1 f(y) \, dy = T(f)(x).$$

即在此情形下 T_K 和 T 是同一个算子, 利用 (b) 中结论知 $T \in \mathcal{B}(H)$.

由 $K(x, y)$ 的定义知 $\tilde{K}(x, y) = \overline{K(y, x)} = K(y, x) = K(x, y)$, 所以由 (c) 中结论知:

$$T^* = T_K^* = T_{\tilde{K}} = T_K = T.$$

因为 $T^* = T$, 所以 T 的特征值全部都为实数, 任取两个特征值 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 任取两个相应的特征向量 $f, g \in H$, 即 $T(f) = \lambda f, T(g) = \mu g$, 则:

$$\mu \langle f, g \rangle = \langle f, \mu g \rangle = \langle f, T(g) \rangle = \langle T(f), g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle.$$

从而

$$(\mu - \lambda) \langle f, g \rangle = 0.$$

故 $\langle f, g \rangle = 0$, 因此相应的特征子空间两两正交.

下面具体求特征值. 任取非零特征值 λ 及其相应的特征向量 f , 则

$$T(f)(x) = \int_{1-x}^1 f(y) dy = \lambda f(x), \quad \forall x \in [0, 1].$$

故 $f(0) = 0$ 且 $\lambda f(1) = \int_0^1 f(y) dy$. 将上式求导一次得

$$f(1-x) = \lambda f'(x) \implies f(x) = \lambda f'(1-x). \quad (\star)$$

再将上式求导一次得

$$-f'(1-x) = \lambda f''(x). \quad (\star\star)$$

结合 $(\star)(\star\star)$ 两式即得 ODE

$$f''(x) + \frac{1}{\lambda^2} f(x) = 0.$$

上述常微分方程的解为 $f(x) = C_1 \cos \frac{x}{\lambda} + C_2 \sin \frac{x}{\lambda}$. 由 $f(0) = 0$, 得 $f(x) = C_2 \sin \frac{x}{\lambda}$, 再由 $\lambda f(1) = \int_0^1 f(x) dx$ 得

$$\lambda C_2 \sin \frac{1}{\lambda} = \int_0^1 C_2 \sin \frac{x}{\lambda} dx.$$

由上式直接解得 $\sin \frac{1}{\lambda} + \cos \frac{1}{\lambda} = 1$, 故 $\lambda = \frac{1}{2k\pi}$ ($k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$) 或 $\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ ($k \in \mathbb{Z}$). \square

19. 和上一习题一样, 令 $H = L_2(0, 1)$; 并设 $(e_n)_{n \geq 1}$ 是 H 中的规范正交集. 证明: $(e_n)_{n \geq 1}$ 是 H 上的规范正交基的充分必要条件是

$$\sum_{n \geq 1} \left| \int_0^x e_n(t) dt \right|^2 = x, \quad \forall x \in [0, 1].$$

证明: (\Rightarrow) 取 $f_x = \mathbb{1}_{(0, x)}$, 由 Parseval 恒等式得

$$\|f_x\|_{L_2}^2 = \sum_{n \geq 1} |\langle f_x, e_n \rangle|^2, \quad (\star)$$

换个马甲即为

$$x = \sum_{n \geq 1} \left| \int_0^x e_n(t) dt \right|^2.$$

(\Leftarrow) 将 $(e_n)_{n \geq 1}$ 扩展成为 $L_2(0, 1)$ 的规范正交基 $(e_n)_{n \geq 1} \cup (\tilde{e}_n)_{n \geq 1}$, 则由 Parseval 恒等式得

$$\|f_x\|_{L_2}^2 = \sum_{n \geq 1} |\langle f_x, e_n \rangle|^2 + \sum_{n \geq 1} |\langle f_x, \tilde{e}_n \rangle|^2.$$

而由 (\star) 式得 $\sum_{n \geq 1} |\langle f_x, \tilde{e}_n \rangle|^2 = 0$, 即对任意的 $n \geq 1$, 有

$$\langle f_x, \tilde{e}_n \rangle = \int_0^x \tilde{e}_n(t) dt = 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

故 $\tilde{e}_n = 0, \forall n \geq 1$, 从而 $(e_n)_{n \geq 1}$ 为 $L_2(0, 1)$ 的规范正交基. \square

20. 设 Ω 是复数域 \mathbb{C} 中的开集, 约定 \mathbb{C} 上的测度为 \mathbb{R}^2 上的 Lebesgue 测度, 记为 $d\lambda(z)$. 令

$$H_\Omega = \{f \in L_2(\Omega) : f \text{ 是 } \Omega \text{ 上的全纯函数}\}.$$

对任一点 $z \in \Omega$, δ_z 表示 z 处在 H_Ω 上的演化, 即有 $\delta_z(f) = f(z), f \in H_\Omega$.

(a) 若 $\overline{B}(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| \leq r\} \subset \Omega$, 证明

$$f(z) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{\overline{B}(z, r)} f(w) d\lambda(w), \quad \forall f \in H_\Omega.$$

(b) 证明

$$f \in H_\Omega, z \in \Omega, d(z, \Omega^c) > r \implies |f(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}r} \|f\|_2.$$

(c) 证明: 当在 $L_2(\Omega)$ 上赋予内积运算时, H_Ω 是一个可分的 Hilbert 空间.

21. 设 H 是一个 Hilbert 空间, 并设 $T \in \mathcal{B}(H)$ 且 $\|T\| \leq 1$. 证明:

(a) $T(x) = x$ 当且仅当 $T^*(x) = x, x \in H$.

(b) $\ker(I - T) = \ker(I - T^*)$.

(c) $H = \ker(I - T) \oplus \overline{(I - T)(H)}$.

证明: (a) 由伴随算子的性质知 $\|T^*\| = \|T\| \leq 1$. 当 $T(x) = x$ 时,

$$\begin{aligned} \|T^*(x) - x\|^2 &= \|T^*(x)\|^2 + \|x\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle T^*, x \rangle \\ &= \|T^*(x)\|^2 + \|x\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x, T(x) \rangle \\ &= \|T^*(x)\|^2 + \|x\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x, x \rangle \\ &= \|T^*(x)\|^2 - \|x\|^2 \\ &\leq \|T^*\|^2 \|x\|^2 - \|x\|^2 \leq 0, \end{aligned}$$

故 $T^*(x) = x$. 同理可证当 $T^*(x) = x$ 时有 $T(x) = x$.

(b) $x \in \ker(I - T) \Leftrightarrow x - T(x) = 0 \Leftrightarrow x - T^*(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \ker(I - T^*)$, 故 $\ker(I - T) = \ker(I - T^*)$.

(c) 由正交分解定理, 只需证明:

$$\ker(I - T) = [(I - T)(H)]^\perp$$

先证: $(I - T)^* = I - T^*$. 对于任意 $x, y \in H$, 有

$$\langle (I - T)(x), y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle T(x), y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle x, T^*(y) \rangle = \langle x, (I - T^*)(y) \rangle,$$

故 $(I - T)^* = I - T^*$.

再证: $\ker(I - T) = (I - T)(H)^\perp$. 一方面, 对任意 $x \in (I - T)(H)^\perp$ 和 $y \in H$, 有

$$\langle (I - T^*)(x), y \rangle = \langle (I - T)^*(x), y \rangle = \langle x, (I - T)(y) \rangle = 0.$$

由 y 的任意性知 $x \in \ker(I - T^*) = \ker(I - T)$, 故 $(I - T)(H)^\perp \subset \ker(I - T)$. 另一方面, 对任意 $x \in \ker(I - T) = \ker(I - T^*)$ 和 $(I - T)(y) \in (I - T)(H)$, 有

$$\langle x, (I - T)(y) \rangle = \langle (I - T)^*(x), y \rangle = \langle (I - T^*)(x), y \rangle = 0,$$

故 $\ker(I - T) \subset (I - T)(H)^\perp$. □

22. 设 H 是 Hilbert 空间. 称映射 $A \in \mathcal{B}(H)$ 为压缩算子, 若 $\|A\| \leq 1$; 称 A 是正的, 若对任一 $x \in H$, 有 $\langle A(x), x \rangle \geq 0$.

(a) 证明 H 上任意压缩正算子 A 满足

$$\|x - A(x)\|^2 \leq \|x\|^2 - \|A(x)\|^2, \quad x \in H.$$

证明: (a) 先证明 A 是自伴算子, 即 $\langle A(x), y \rangle = \langle x, A(y) \rangle, \forall x, y \in H$. 因

$$\langle A(x + y), x + y \rangle = \langle A(x), x \rangle + \langle A(y), y \rangle + \langle A(y), x \rangle + \langle A(x), y \rangle \in \mathbb{R},$$

故 $\langle A(y), x \rangle + \langle A(x), y \rangle \in \mathbb{R}$, 故

$$\langle A(y), x \rangle + \langle A(x), y \rangle = \overline{\langle A(y), x \rangle} + \overline{\langle A(x), y \rangle} = \langle x, A(y) \rangle + \langle y, A(x) \rangle. \quad (\star)$$

又因

$$\langle A(x - iy), x - iy \rangle = \langle A(x), x \rangle + \langle A(y), y \rangle + i \langle A(x), y \rangle - i \langle A(y), x \rangle \in \mathbb{R},$$

故 $i \langle A(x), y \rangle - i \langle A(y), x \rangle \in \mathbb{R}$, 故

$$i(\langle A(x), y \rangle - \langle A(y), x \rangle) = (-i)(\langle y, A(x) \rangle - \langle x, A(y) \rangle),$$

从而

$$\langle A(x), y \rangle - \langle A(y), x \rangle = \langle x, A(y) \rangle - \langle y, A(x) \rangle. \quad (\star\star)$$

结合 $(\star)(\star\star)$ 即得 $\langle A(x), y \rangle = \langle x, A(y) \rangle$.

再证明 $I - A$ 是正算子, 从而是自伴算子. 对任意 $x \in H$, 由 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$\langle A(x), x \rangle \leq \|A(x)\| \|x\| \leq \|A\| \|x\|^2 \leq \|x\|^2 = \langle x, x \rangle,$$

即 $\langle (I - A)(x), x \rangle \geq 0$, 故 $I - A$ 是正算子.

原不等式 $\|x - A(x)\|^2 \leq \|x\|^2 - \|A(x)\|^2$ 等价于 $\langle A(x), (I - A)(x) \rangle \geq 0$, 故只需证后者即可, 由 $I - A$ 为自伴算子得

$$\begin{aligned} \langle A(x), (I - A)(x) \rangle &= \langle (I - A)A(x), x \rangle \\ &= \langle (I - A)A(x), (I - A)(x) + A(x) \rangle \\ &= \langle (I - A)A(x), (I - A)(x) \rangle + \langle (I - A)A(x), A(x) \rangle \\ &= \langle A(I - A)(x), (I - A)(x) \rangle + \langle (I - A)A(x), A(x) \rangle \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

最后用到了 A 和 $I - A$ 皆为正算子, 证毕. \square

注 从 (a) 可以得到一个结论: 正算子必为自伴算子. 事实上, 我们也可以用极化恒等式证明此结论, 但这里所说的极化恒等式是广义的极化恒等式, 设 H 为 \mathbb{C} 上的向量空间, 映射 $S: H \times H \rightarrow \mathbb{C}$, $(x, y) \rightarrow S(x, y)$ 关于第一个变量是线性的, 关于第二个变量是共轭线性的, 则我们有极化恒等式

$$4S(x, y) = \sum_{k=0}^3 i^k S(x + i^k y, x + i^k y).$$

证明很容易, 将上式右侧展开验证即可. 特别地, 取 S 为内积, 则得到经典的极化恒等式

$$4\langle x, y \rangle = \sum_{k=0}^3 i^k \|x + i^k y\|^2.$$

如果假设 S 关于第一个变量是共轭线性的而关于第二个变量是线性的, 则也有相应的极化恒等式

$$4S(x, y) = \sum_{k=0}^3 (-i)^k S(x + i^k y, x + i^k y).$$

在本问题中, 定义 $\mathcal{S}(x, y) = \langle A(x), y \rangle$ 和 $\mathcal{T}(x, y) = \langle x, A(y) \rangle$, 则 \mathcal{S} 和 \mathcal{T} 都关于第一个变量为线性且关于第二个变量为共轭线性, 由极化恒等式得

$$4\mathcal{S}(x, y) = \sum_{k=0}^3 i^k \mathcal{S}(x + i^k y, x + i^k y),$$

$$4\mathcal{T}(x, y) = \sum_{k=0}^3 \mathrm{i}^k \mathcal{T}(x + \mathrm{i}^k y, x + \mathrm{i}^k y).$$

即

$$4\langle A(x), y \rangle = \sum_{k=0}^3 \mathrm{i}^k \langle A(x + \mathrm{i}^k y), x + \mathrm{i}^k y \rangle,$$

$$4\langle x, A(y) \rangle = \sum_{k=0}^3 \mathrm{i}^k \langle x + \mathrm{i}^k y, A(x + \mathrm{i}^k y) \rangle.$$

结合 A 为正算子即得 $\langle A(x), y \rangle = \langle x, A(y) \rangle$.

连续函数空间

1. 对任意 $x \in [0, 1]$, 设 $f_n(x) = x^n$. 在 $[0, 1]$ 上的哪些点处, $(f_n)_{n \geq 1}$ 等度连续?

解: 因为 $(f_n)_{n \geq 1}$ 在区间 $[0, 1]$ 上一致收敛到常值函数 $f \equiv 0$, 所以 $(f_n)_{n \geq 1}$ 在 $[0, 1]$ 上等度连续, 并且容易看出 $(f_n)_{n \geq 1}$ 在 $x = 1$ 处不是等度连续的. \square

2. 设 K 是度量空间, E 是赋范空间, $(f_n)_{n \geq 1}$ 是一列从 K 到 E 的连续函数. 证明若 $(f_n)_{n \geq 1}$ 在一个点 x 处等度连续, 则对任一收敛到 x 的点列 $(x_n)_{n \geq 1}$, 都有 $(f_n(x) - f_n(x_n))_{n \geq 1}$ 收敛到 0. 进而证明如果 $(f_n(x))_{n \geq 1}$ 在 E 中收敛到 y , 那么对任一收敛到 x 的点列 $(x_n)_{n \geq 1}$, $(f_n(x_n))_{n \geq 1}$ 也收敛到 y .

取 $f_n(x) = \sin(nx)$. 证明 $(f_n)_{n \geq 1}$ 在 \mathbb{R} 上每一点都不等度连续.

证明: (1) 若 $(f_n)_{n \geq 1}$ 在点 x 处等度连续, 则对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $d(x, y) < \delta$ 时, 对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n(x) - f_n(y)\| < \varepsilon$. 且对任意收敛到 x 的点列 $(x_n)_{n \geq 1}$, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, $d(x_n, x) < \delta$, 故此时对任意正整数 k , $\|f_k(x) - f_k(x_n)\| < \varepsilon$. 取 $k = n$, 得 $\|f_n(x) - f_n(x_n)\| < \varepsilon$.

综上, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, $\|f_n(x) - f_n(x_n)\| < \varepsilon$, 这就是说 $(f_n(x) - f_n(x_n))_{n \geq 1}$ 收敛到 0.

(2) 由于 $(f_n(x))_{n \geq 1}$ 在 E 中收敛到 y , 故对 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N_1$ 时, $\|f_n(x) - y\| < \frac{\varepsilon}{2}$, 又根据 (1), 设 $(x_n)_{n \geq 1}$ 收敛于 x , 则存在 $N_2 \in \mathbb{N}^*$, 使得 $n > N_2$ 时, $\|f_n(x) - f_n(x_n)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时,

$$\|f_n(x_n) - y\| \leq \|f_n(x_n) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - y\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

故 $f_n(x_n)_{n \geq 1}$ 也收敛到 y .

(3) 若 $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, 则取 $x_n = k\pi + \frac{1}{n}$, 注意到 $f_n(k\pi) = \sin(nk\pi) = 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(k\pi) = 0$, 而

$$\begin{aligned} f_n(x_n) &= \sin\left(n\left(k\pi + \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \sin(nk\pi + 1) \\ &= \sin(nk\pi) \cos 1 + \cos(nk\pi) \sin 1 \\ &= \cos(nk\pi) \sin 1. \end{aligned}$$

从而 $|f_n(x_n)| = \sin 1$ 对任意正整数 n 都成立, 因此 $f_n(x_n)$ 在 n 趋于 ∞ 时极限不可能为 0. 由 (2) 知 $(f_n)_{n \geq 1}$ 在 $x = k\pi$ 处不等度连续.

若 $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, 取 $x_n = x + \frac{\pi}{n}$, 从而

$$\begin{aligned} \|f_n(x) - f_n(x_n)\| &= |\sin(nx) - \sin(nx + \pi)| \\ &= |\sin(nx) - \sin(nx) \cos \pi - \cos(nx) \sin \pi| \\ &= 2|\sin nx|. \end{aligned}$$

下面我们说明当 $x \neq k\pi$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin nx$ 不存在. 事实上, 设 $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin nx$ 存在, 那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x)) = 0.$$

由和差化积, 我们知道 $\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x) = 2 \sin x \cos nx$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos nx = 0.$$

接着注意到 $\cos((n+1)x) = \cos nx \cos x - \sin nx \sin x$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin nx = 0,$$

而这与 $\sin^2 nx + \cos^2 nx = 1$ 矛盾! 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin nx$ 不存在.

因此当 n 趋近于 ∞ 时, $\|f_n(x) - f_n(x_n)\|$ 极限不存在, 由 (1) 知 $(f_n)_{n \geq 1}$ 在 $x \neq k\pi$ 处不等度连续.

综上, $(f_n)_{n \geq 1}$ 在 \mathbb{R} 上每一点都不等度连续. □

3. 设 K 是拓扑空间, (E, d) 是度量空间. 证明: 若 (f_n) 在 $C(K, E)$ 中依一致范数收敛, 则 (f_n) 等度连续.

证明: 设 $(f_n)_{n \geq 1}$ 一致收敛到 f , 容易验证 $f \in C(K, E)$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, s.t. \forall n > N, \sup_{x \in K} d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/3$, 任取 $x \in K$, 因为 $f \in C(K, E)$, 所以存在 $V \in \mathcal{N}(x)$,

使得当 $y \in V$ 时, $d(f(y), f(x)) < \varepsilon/3$

因此对于上述的 ε, N , 当 $n > N$ 且 $y \in V$ 时, 有

$$d(f_n(y), f_n(x)) \leq d(f_n(y), f(y)) + d(f(y), f(x)) + d(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$$

从而集合 $(f_n)_{n>N}$ 是等度连续的, 而增加有限个元素不改变等度连续性, 因此 $(f_n)_{n \geq 1}$ 等度连续. \square

4. 设 K 是拓扑空间, (E, d) 是度量空间, (f_n) 是 $C(K, E)$ 上等度连续序列. 证明所有使得 $(f_n(x))$ 是 Cauchy 序列的点 x 构成的集合是 K 中的闭子集.

证明: 记所有使得 $(f_n(x))$ 是 Cauchy 序列的点 x 构成的集合为 B , 要证明 B 为闭集, 只需证明其任意收敛序列的极限点仍在其中. 设 $(x_k)_{k \geq 1}$ 是 B 中任意一个收敛的序列, 且 $x_k \rightarrow x$.

因为 $f_n \in C(K, E)$, 所以 $\forall \varepsilon > 0, \exists K, \forall k > K, d(f_n(x_k), f_n(x)) < \varepsilon$
又 $x_k \in B$, 所以 $(f_n(x_k))_{n \geq 1}$ 是 Cauchy 序列, 故对于上述 $\varepsilon > 0, \exists N, \forall m, n > N$, 有

$$d(f_n(x_k), f_m(x_k)) < \varepsilon$$

从而

$$d(f_n(x), f_m(x)) \leq d(f_n(x), f_n(x_k)) + d(f_n(x_k), f_m(x_k)) + d(f_m(x_k), f_m(x)) < 3\varepsilon$$

这说明 $(f_n(x))_{n \geq 1}$ 是 Cauchy 序列, 故 $x \in B$, 所以 B 是闭集. \square

5. 考虑函数序列 (f_n) , 这里 $f_n(t) = \sin(\sqrt{t + 4(n\pi)^2})$, $t \in [0, \infty)$.

(a) 证明 (f_n) 等度连续并且逐点收敛到 0 函数.

(b) $C_b([0, \infty), \mathbb{R})$ 表示 $[0, \infty)$ 上所有有界连续实函数构成的空间, 并赋予范数

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \geq 0} |f(t)|.$$

(f_n) 在 $C_b([0, \infty), \mathbb{R})$ 中是否相对紧?

证明: (a) 任意取定 $t_0 \geq 0$, 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = 4\pi\varepsilon$, 则当 $t \in B(t_0, \delta) \cap [0, +\infty)$ 时, 对于任意的 f_n 有

$$\begin{aligned} |f_n(t) - f_n(t_0)| &= \left| \sin(\sqrt{t + 4(n\pi)^2}) - \sin(\sqrt{t_0 + 4(n\pi)^2}) \right| \\ &\leq \left| \sqrt{t + 4(n\pi)^2} - \sqrt{t_0 + 4(n\pi)^2} \right| \\ &= \frac{|t - t_0|}{\sqrt{t + 4(n\pi)^2} + \sqrt{t_0 + 4(n\pi)^2}} \\ &\leq \frac{|t - t_0|}{4\pi} < \varepsilon. \end{aligned}$$

因此 (f_n) 等度连续. 对任意的 $t \in [0, \infty)$, 因为

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |\sin(\sqrt{t + 4(n\pi)^2}) - 0| &= \lim_{n \rightarrow \infty} |\sin(\sqrt{t + 4(n\pi)^2}) - \sin(2n\pi)| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{\sqrt{t + 4(n\pi)^2} + 2n\pi} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{4n\pi} = 0. \end{aligned}$$

故 (f_n) 逐点收敛到 0 函数.

(b) 注意到依范数 $\|\cdot\|_\infty$ 下的收敛即为在 $[0, \infty)$ 下的一致收敛, 假设 (f_n) 有依范数 $\|\cdot\|_\infty$ 收敛的子列, 则由 (a) 知该子列必一致收敛于 0 函数, 然而对于 $\forall n$,

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{t \geq 0} |\sin(\sqrt{t + 4(n\pi)^2})| = 1.$$

故 (f_n) 不存在依范数 $\|\cdot\|_\infty$ 收敛的子列, 因此 (f_n) 不是相对紧的. \square

10. 设 (K, d) 是紧度量空间. 证明所有从 K 到 \mathbb{R} 的 Lipschitz 函数构成的集合在 $(C(K, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ 中稠密.

证明: 记所有从 K 到 \mathbb{R} 的 Lipschitz 函数构成的集合为 \mathcal{A} .

- \mathcal{A} 是 $C(K, \mathbb{R})$ 的子代数: 容易验证 \mathcal{A} 中元素关于加法和数乘封闭, 下面说明关于乘法封闭, 任意 $f, g \in \mathcal{A}$, 存在 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ 使得对任意 $x, y \in K$, 有

$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda_1 d(x, y).$$

$$|g(x) - g(y)| \leq \lambda_2 d(x, y).$$

又因为 K 为紧集, 故存在 M_1, M_2 , 使得对于任意 $x \in K$, 有 $|f(x)| \leq M_1$, $|g(x)| \leq M_2$, 故

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &\leq |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &\leq M_1 \lambda_2 d(x, y) + M_2 \lambda_1 d(x, y) \\ &= (M_1 \lambda_2 + M_2 \lambda_1) d(x, y). \end{aligned}$$

从而 \mathcal{A} 中元素关于乘法封闭.

- 常值函数 $1 \in \mathcal{A}$.
- 任意取定 $y \in K$, 取 $f(x) = d(x, y) \in \mathcal{A}$, 则当 $x \neq y$ 时, $f(x) \neq f(y)$.

由 Stone-Weierstrass 定理知 \mathcal{A} 在 $C(K, \mathbb{R})$ 中稠密. \square

11. 设 K_1 和 K_2 都是紧 Hausdorff 空间. 对 $f \in C(K_1, \mathbb{C}), g \in C(K_2, \mathbb{C})$ 定义

$$f \otimes g(x_1, x_2) = f(x_1)g(x_2), \quad \forall (x_1, x_2) \in K_1 \times K_2.$$

并定义集合

$$\mathcal{A} = \left\{ \sum_{\text{有限和}} a_i f_i \otimes g_i : a_i \in \mathbb{C}, f_i \in C(K_1, \mathbb{C}), g_i \in C(K_2, \mathbb{C}) \right\}.$$

证明 \mathcal{A} 在 $C(K_1 \times K_2, \mathbb{C})$ 中稠密.

证明:

(i) $K_1 \times K_2$ 是紧的 Hausdorff 空间

(ii) \mathcal{A} 是 $C(K_1 \times K_2, \mathbb{C})$ 的子代数: 容易验证 \mathcal{A} 是向量空间, 下证 \mathcal{A} 关于乘法封闭:

任意 $\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{A}$, 记 $\ell_1 = \sum_{i \in I} a_i f_{1i} \otimes g_{1i}, \ell_2 = \sum_{j \in J} b_j f_{2j} \otimes g_{2j}$, 其中 I, J 都为有限指标集, 对任意 $(x_1, x_2) \in K_1 \times K_2$, 有

$$\begin{aligned} \ell_1(x_1, x_2) \cdot \ell_2(x_1, x_2) &= \left(\sum_{i \in I} a_i f_{1i}(x_1) g_{1i}(x_2) \right) \left(\sum_{j \in J} b_j f_{2j}(x_1) g_{2j}(x_2) \right) \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_i b_j (f_{1i} f_{2j})(x_1) \cdot (g_{1i} g_{2j})(x_2) \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_i b_j ((f_{1i} f_{2j}) \otimes (g_{1i} g_{2j}))(x_1, x_2) \end{aligned}$$

因此

$$\ell_1 \cdot \ell_2 = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_i b_j ((f_{1i} f_{2j}) \otimes (g_{1i} g_{2j}))$$

上式仍为有限和, 结合 $C(K_1, \mathbb{C}), C(K_2, \mathbb{C})$ 都为代数知 \mathcal{A} 关于乘法封闭

(iii) 常值函数 $1 \in \mathcal{A}$

(iv) 可分点: 设 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in K_1 \times K_2$ 且 $x \neq y$, 不妨设 $x_1 \neq y_1$, 因为 K_1 是紧 Hausdorff 空间, 所以由 Urysohn 引理知存在 $f \in C(K_1, [0, 1]) \subset C(K_1, \mathbb{C})$ 使得 $f(x_1) = 0, f(y_1) = 1$, 令 $g(x) \equiv 1 (\forall x \in K_2)$, 则

$$f \otimes g(x) = f \otimes g(x_1, x_2) = 0$$

$$f \otimes g(y) = f \otimes g(y_1, y_2) = 1$$

因此 \mathcal{A} 是可分点的

(v) \mathcal{A} 是自伴的

综上知 \mathcal{A} 在 $C(K_1 \times K_2, \mathbb{R})$ 中稠密. \square

12. $[0, 1]$ 上所有的偶多项式构成的集合 \mathcal{Q} 是否在 $C([0, 1], \mathbb{R})$ 上稠密? $[-1, 1]$ 上所有的偶多项式构成的集合 \mathcal{R} 是否在 $C([-1, 1], \mathbb{R})$ 上稠密?

解: \mathcal{Q} 在 $C([0, 1], \mathbb{R})$ 中稠密, 理由:

(i) \mathcal{Q} 是子代数.

(ii) $1 \in \mathcal{Q}$.

(iii) $\forall x, y \in [0, 1]$, 取 $f(x) = x^2$, 则 $f(x) \neq f(y)$.

但是 \mathcal{R} 在 $C([-1, 1], \mathbb{R})$ 中不稠密, 因为 $[-1, 1]$ 中的任意一个非零点和其相反数不可分. \square

13. 本习题的目的是证明 Bernstein 定理: 令 $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$, 并设

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

则 B_n 在 $[0, 1]$ 上一致收敛到 f .

(a) 首先导出对任一正整数 n , 有公式

$$\sum_{k=0}^n C_n^k k x^k (1-x)^{n-k} = nx \quad \text{和} \quad \sum_{k=0}^n C_n^k k^2 x^k (1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x.$$

并由此证明

$$\sum_{k=0}^n C_n^k (k - nx)^2 x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x).$$

(b) 对任意 $\varepsilon > 0$, 选择适当的 $\delta > 0$, 使得

$$x, y \in [0, 1], |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

对任意固定的 $x \in [0, 1]$, 令 $I = \{k : |x - \frac{k}{n}| < \delta\}$ 及 $J = \{k : |x - \frac{k}{n}| > \delta\}$. 证明

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(f)(x)| &< \varepsilon \sum_{k \in I} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &\quad + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} \sum_{k \in J} C_n^k \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k}. \end{aligned}$$

从而导出

$$|f(x) - B_n(f)(x)| < \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta} \frac{x(1-x)}{n}.$$

(c) 得出结论

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - B_n(f)\|_\infty = 0.$$

证明: (a) 引入二项分布 $X \sim B(n, x)$, 则:

$$\sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = E(X) = nx$$

$$\sum_{k=0}^n C_n^k k^2 x^k (1-x)^{n-k} = E(X^2) = \text{Var}(X) + E^2(X) = nx + n(n-1)x^2$$

$$\text{故 } \sum_{k=0}^n C_n^k (k - nx)^2 x^k (1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2 - 2nx \cdot nx + n^2 x^2 = nx(1-x)$$

(b)

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(f)(x)| &= \left| f(x) - \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^n C_n^k \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n C_n^k \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} \\ &< \varepsilon \sum_{k \in I} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k \in J} C_n^k \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \varepsilon \sum_{k \in I} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} \sum_{k \in J} C_n^k \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

由 (a) 知 $\sum_{k=0}^n C_n^k (x - k/n)^2 x^k (1-x)^{n-k} = x(1-x)/n$, 故

$$|f(x) - B_n(f)(x)| < \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} \frac{x(1-x)}{n}$$

(c) 由 (b) 中所得不等式知:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - B_n(f)\|_\infty &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - B_n(f)(x)| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq 1} \left(\varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} \frac{x(1-x)}{n} \right) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

由 ε 的任意性知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - B_n(f)\|_\infty = 0$$

□

Baire 定理及其应用

1. (a) 证明: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 是 \mathbb{R} 上的 \mathcal{G}_δ 集. 并导出 \mathbb{Q} 不是 \mathcal{G}_δ 集, 且不存在函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $\text{Cont}(f) = \mathbb{Q}$.

(b) 定义函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: 当 $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 时, 令 $f(x) = 0$; $f(0) = 1$; 若 x 是非零的有理数 $\frac{p}{q}$, 这里 $\frac{p}{q}$ 是 x 的不可约形式, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, 令 $f(x) = \frac{1}{q}$. 证明: $\text{Cont}(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(c) 设 $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$. 证明: f 不是第一纲的 (即不是任一函数列的极限函数), 但是存在一列第一纲的函数逐点收敛到 f .

证明: (a) 记 $\mathbb{Q} = \{r_k\}_{k=1}^\infty$, 对于每一个 k , 令

$$U_k = \mathbb{R} \setminus \{r_k\} = (-\infty, r_k) \cup (r_k, +\infty).$$

显然 U_k 是开集并且

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

因此 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 是 \mathbb{R} 上的 \mathcal{G}_δ 集. 假设 \mathbb{Q} 也是 \mathcal{G}_δ 集, 则存在一列开集 $\{V_k\}_{k=1}^\infty$, 使得

$$\mathbb{Q} = \bigcap_{k=1}^{\infty} V_k.$$

每个 V_k 包含 \mathbb{Q} , 故必在 \mathbb{R} 中稠密, 由 Baire 定理可知集合

$$\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k\right) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} V_k\right)$$

在 \mathbb{R} 中稠密, 然而

$$\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k\right) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} V_k\right) = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap \mathbb{Q} = \emptyset.$$

矛盾, 从而假设不成立, 说明 \mathbb{Q} 不是 \mathcal{G}_δ 集, 由于任一映射的连续点集都是 \mathcal{G}_δ 集, 所以不存在函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $\text{Cont}(f) = \mathbb{Q}$.

(b) 容易验证该函数是周期为 1 的函数, 因此只需要考虑该函数在区间 $[0, 1]$ 上的情况:

首先, f 在无理数点处连续: 任意取定 $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, 有 $f(x_0) = 0$. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 在 $[0, 1]$ 上至多只有有限个 $\frac{p}{q}$ 使得 $f(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q} \geq \varepsilon$, 取 $\delta > 0$, 使得 $U(x_0, \delta)$ 不包含上述有限个有理数 (这样的 δ 显然是可以取到的), 则当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时,

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x)| < \varepsilon.$$

其次, f 在有理数点处不连续: 同理可证.

因此 $\text{Cont}(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(c) 参见 Elements of functional analysis by Francis P65.

假设 $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ 是第一纲的, 则由定理 6.1.7 知 $\text{Cont}(f)$ 是 \mathbb{R} 中稠密的 \mathcal{G}_δ 集, 但是 f 在任意点处都不连续, 从而矛盾, 故 $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ 不是第一纲的. 取

$$f_m(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(m! \pi x)^{2n}.$$

由定义知 $(f_m)_{m \geq 1}$ 是一列第一纲的函数, 下面我们证明 $(f_m)_{m \geq 1}$ 逐点收敛到 f :

- 若 $x \in \mathbb{Q}$, 则可表示为 $x = \frac{p}{q}$, 当 $m \geq q$ 时, $m! \pi x = k\pi \Rightarrow f_m(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$.
- 若 $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, 必有 $\cos(m! \pi x) \in (-1, 1) \Rightarrow f_m(x) = 0 = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$.

综上知 $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$. □

2. 证明局部紧的 Hausdorff 空间是 Baire 空间.

证明: 设 X 是局部紧的 Hausdorff 空间, 我们来证明 X 是 Baire 空间:

已有定理: 局部紧的 Hausdorff 空间中每一点都有一个紧邻域基.

设 $\{U_n\}_{n \geq 1}$ 是一列在 X 中稠密的开子集, 且 $D = \bigcap_{n \geq 1} U_n$, 设 U 是任一非空开集, 需证 $D \cap U \neq \emptyset$

因为 $U \cap U_1$ 是非空开集, 所以存在非空开集 V_1 , 使得 \bar{V}_1 紧且

$$\bar{V}_1 \subset U \cap U_1$$

因为 $V_1 \cap U_2$ 是非空开集, 所以存在非空开集 V_2 , 使得 \bar{V}_2 紧且

$$\bar{V}_2 \subset V_1 \cap U_2 \subset U \cap U_1 \cap U_2$$

...

因为 $V_{n-1} \cap U_n$ 是非空开集, 所以存在非空开集 V_n , 使得 \bar{V}_n 紧且

$$\bar{V}_n \subset V_{n-1} \cap U_n \subset U \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n$$

依此可以得到一列开集 $\{V_n\}$ 使得 $\{\bar{V}_n\}$ 是单调递减的紧集列, 故

$$\bigcap_{n \geq 1} \bar{V}_n \neq \emptyset$$

所以

$$D \cap U = \left(\bigcap_{n \geq 1} U_n \right) \cap U \neq \emptyset$$

这就说明了 D 在 X 中稠密, 因此 X 是 Baire 空间. □

3. (a) 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是可微函数. 证明: $\text{Cont}(f')$ 是 \mathbb{R} 上稠密的 \mathcal{G}_δ 集.

(b) 设 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 连续且在 \mathbb{R}^2 上存在偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$. 证明: f 的可微点包含 \mathbb{R}^2 中一个稠密的 \mathcal{G}_δ 集.

证明: (a) 记

$$g_n(x) = n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right].$$

则 $(g_n)_{n \geq 1}$ 是 \mathbb{R} 上的连续函数序列且对于任意 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = f'(x).$$

由定理 6.1.7 知 $\text{Cont}(f')$ 是 \mathbb{R} 中稠密的 \mathcal{G}_δ 集.

(b) 因为

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(x + \frac{1}{n}, y\right) - f(x, y) \right] \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x, y).$$

且 $F_n(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$, 所以 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ 的连续点集是稠密的 \mathcal{G}_δ 集, 记为 G_x ; 同理 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ 的连续点集也是稠密的 \mathcal{G}_δ 集, 记为 G_y . 令 $G = G_x \cap G_y$, 则 G 也是稠密的 \mathcal{G}_δ 集, 并且 f 在 G 上可微. □

4. 证明: 完备度量空间中的任何一个可数子集至少含有一个孤立点.

6. 设 E 和 F 都是 Banach 空间, (u_n) 是 $\mathcal{B}(E, F)$ 的序列. 证明下列命题等价:

(a) $(u_n(x))$ 在每个 $x \in E$ 处收敛.

(b) $A \subset E$ 且 $\text{span}(A)$ 在 E 中稠密, $(u_n(a))$ 在每个 $a \in A$ 处收敛, 且 (u_n) 有界.

证明: $(a) \Rightarrow (b)$ 是显然的, 下证 $(b) \Rightarrow (a)$, 即证 $\forall x \in E \setminus A, (u_n(x))$ 收敛: 因为 $(u_n(a))$ 在每个 $a \in A$ 处收敛, 所以 $(u_n(a))$ 在每个 $a \in \text{span}(A)$ 处收敛, 因为 $\text{span}(A)$ 在 E 中稠密, 所以存在 $(x_m)_{m \geq 1} \subset \text{span}(A)$, 使得 $x_m \rightarrow x (m \rightarrow \infty)$, 显然 $(x_m)_{m \geq 1}$ 是 E 中的 Cauchy 序列.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \left(\lim_{m \rightarrow \infty} x_m \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} u_n(x_m) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x_m) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} y_m \end{aligned}$$

下面我们只需要证明 $\lim_{m \rightarrow \infty} y_m$ 存在, 结合 F 是 Banach 空间可知只需要证明 (y_m) 是 F 中 Cauchy 序列即可, 而这个结论通过下式即得:

$$\begin{aligned} \|y_m - y_k\| &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x_m) - \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x_k) \right\| \\ &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x_m - x_k) \right\| \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| \cdot \|x_m - x_k\| \quad (\text{注意 } (x_m)_{m \geq 1} \text{ 是 Cauchy 序列}) \end{aligned}$$

□

8. 设 E 是 $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ 的闭向量子空间, 并假设 E 中的元素都是 Lipschitz 函数.

(a) 设 $x, y \in [0, 1]$ 且 $x \neq y$, 定义泛函 $\Phi_{x,y} : E \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$\Phi_{x,y}(f) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

证明: $\{\Phi_{x,y} \mid x, y \in [0, 1], x \neq y\}$ 是 E^* 中的有界集.

(b) 导出 E 中闭单位球在 $[0, 1]$ 上等度连续, 且 $\dim E < \infty$.

证明: (a) 因为完备度量空间的闭子空间完备, 所以 E 是 Banach 空间, 容易验证 $\{\Phi_{x,y}\} \subset E^*$, 又因为对任意 $f \in E$, 有

$$\sup_{x,y \in [0,1], x \neq y} |\Phi_{x,y}(f)| = \sup_{x,y \in [0,1], x \neq y} \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq C.$$

这里的 C 是函数 f 的 Lipschitz 常数, 故由 Banach-Steinhaus 定理知

$$\sup_{x,y \in [0,1], x \neq y} \|\Phi_{x,y}\| < \infty.$$

也即 $\{\Phi_{x,y} \mid x, y \in [0, 1], x \neq y\}$ 是 E^* 中的有界集.

(b) 记 E 中的闭单位球为 $\overline{B_E}$, 则由 (a) 中结论知

$$\sup_{x,y \in [0,1], x \neq y} \sup_{f \in \overline{B_E}} \|\Phi_{x,y}(f)\| < \infty.$$

即

$$\sup_{x,y \in [0,1], x \neq y} \sup_{f \in \overline{B_E}} \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| < \infty.$$

这说明 $\overline{B_E}$ 在 $[0, 1]$ 上一致等度连续, 故必然等度连续. 又对任意 $x \in [0, 1]$, $\overline{B_E}$ 的轨道

$$\overline{B_E}(x) = \{f(x) : f \in \overline{B_E}\} = \{f(x) : \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| = 1\}$$

有界, 故由 Ascoli 定理知 $\overline{B_E}$ 在 E 中相对紧, 从而紧, 根据 Riesz 引理知 $\dim E < \infty$. \square

10. 设 E, F 都是 Banach 空间, $u \in \mathcal{B}(E, F)$ 并满足 $u(B_E)$ 在 B_F 中稠密.

(a) 计算 $\|u\|$.

(b) 证明: $u(B_E) = B_F$. 因此 u 是满射.

(c) 设 $v \in B(E/\ker u, F)$ 并满足 $v \circ q = u$, 这里 $q : E \rightarrow E/\ker u$ 是商映射. 证明: v 是从 $E/\ker u$ 到 F 上的等距映射.

证明: (a) 因为 $u(B_E)$ 在 B_F 中稠密, 所以 $B_F \subset \overline{u(B_E)} = \overline{B_F}$, 又由 u 连续知 $u(\overline{B_E}) \subset \overline{u(B_E)}$, 故

$$\|u\| = \sup_{x \in \overline{B_E}} \|u(x)\| = \sup_{u(x) \in u(\overline{B_E})} \|u(x)\| \leq \sup_{u(x) \in \overline{u(B_E)}} \|u(x)\| = \sup_{u(x) \in \overline{B_F}} \|u(x)\| = 1.$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $y \in B_F$, 使得 $\|y\| \geq 1 - \varepsilon$, 对于上述 $y \in B_F$, 存在 $x \in B_E$, 使得 $\|u(x) - y\| \leq \varepsilon$, 故

$$\|u(x)\| \geq \|y\| - \|u(x) - y\| \geq 1 - 2\varepsilon.$$

由 ε 的任意性知 $\|u\| = 1$.

(b) 由条件知, $u(B_E) \subset B_F$ 且 $B_F \subset \overline{u(B_E)}$. 我们采用和教材中开映射定理 6.3.1 类似的证明过程, 首先任取常数 $0 < \delta < 1$, 对任意 $y \in B_F$, 取 $x_0 \in B_E$, 使得

$$\|y - u(x_0)\| < \delta.$$

并设 $y_1 = \frac{1}{\delta}(y - u(x_0))$, 则 $y_1 \in B_F$. 再取 $x_1 \in B_E$, 使得

$$\|y_1 - u(x_1)\| < \delta.$$

再设 $y_2 = \frac{1}{\delta}(y_1 - u(x_1))$, 则 $y_2 \in B_F$. 依次下来, 可得一系列 $(y_n)_{n \geq 1} \subset B_F$ 及相应序列 $(x_n)_{n \geq 1} \subset B_E$, 满足

$$y_{n+1} = \frac{1}{\delta}(y_n - u(x_n)), \|y_n - u(x_n)\| < \delta, \quad n \geq 1.$$

由以上构造过程, 可得

$$\begin{aligned} y &= \delta y_1 + u(x_0) = \delta^2 y_2 + u(x_0) + \delta u(x_1) = \cdots \\ &= \delta^{n+1} y_{n+1} + u(x_0) + \delta u(x_1) + \delta^2 u(x_2) + \cdots + \delta^n u(x_n) \\ &= \delta^{n+1} y_{n+1} + u\left(\sum_{k=0}^n \delta^k x_k\right). \end{aligned} \quad (\star)$$

在上式中, $\sum_{k=0}^n \delta^k x_k$ 在 $n \rightarrow \infty$ 时收敛于某一点 $x \in E$, 且

$$\|x\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n \|x_n\| < \frac{1}{1-\delta}.$$

在 (\star) 式中取 $n \rightarrow \infty$, 得 $y = u(x)$, 故 $B_F \subset u(\frac{1}{1-\delta}B_E)$. 由 u 的线性性, 有 $(1-\delta)B_F \subset u(B_E)$. 任取 $y \in B_F$, 总可取到 $0 < \delta < 1$ 使得 $1-\delta > \|y\|$, 故 $y \in u(B_E)$, 从而 $B_F \subset u(B_E)$. 这样就证明了 $u(B_E) = B_F$.

(c) 对任意 $x \in E$, 用 $[x]$ 表示以 x 为代表元的等价类. 由定义可知, 若 $[x] = [y]$, 则 $u(x-y) = 0$. 而且, 由于 u 是连续的, 则 $\ker u$ 是 E 的闭向量子空间, $E/\ker u$ 自然成为一个赋范空间, 其上的范数 $\|\cdot\|$ 约定为

$$\|[x]\| = \inf_{y \in \ker u} \|x + y\| = \inf_{y \in [x]} \|y\|.$$

由于 $v \in \mathcal{B}(E/\ker u, F)$ 满足 $v \circ q = u$, 则 $v([x]) = u(x), \forall x \in E$. 因 u 是满射, 故 v 也是满射; 而 $[x] \neq [y]$ 等价于 $u(x) \neq u(y)$, 故 v 也是单射. 实际上, 由开映射定理立即得到, v 是 $E/\ker u$ 到 F 的线性同构映射.

任取 $[x] \in E/\ker u$, 设 $y = v([x])$, 则也有 $y = u(x)$. 那么由 $u(B_E) = B_F$, 可知对任意 $0 < \varepsilon < 1$, 存在 $x_0 \in B_E$, 使得 $u(x_0) = \varepsilon \frac{y}{\|y\|}$, 则又有 $y = u(\varepsilon^{-1}\|y\|x_0)$. 于是得 $u(x - \varepsilon^{-1}\|y\|x_0) = 0$, 这表明 $\varepsilon^{-1}\|y\|x_0 \in [x]$. 因此

$$\|[x]\| \leq \|\varepsilon^{-1}\|y\|x_0\| \leq \varepsilon^{-1}\|y\| = \varepsilon^{-1}\|v([x])\|.$$

由 ε 的任意性, 即得 $\|[x]\| \leq \|v([x])\|$.

另一方面, 对任意 $[x] \in E/\ker u$, 任取 $[x]$ 的代表元 y , 都有

$$\|v([x])\| = \|u(y)\| \leq \|u\| \cdot \|y\| = \|y\|.$$

对上式右边所有代表元的范数取下确界, 即得

$$\|v([x])\| \leq \inf_{y \in [x]} \|y\| = \|[x]\|.$$

综合以上讨论, 我们证明了 v 是从 $E/\ker u$ 到 F 上的等距同构映射.

另一种更直接的证明: 任取 $x \in B_E$, 则有 $\|[x]\| \leq \|x\| < 1$, 即

$$q(B_E) \subset B_{E/\ker u}.$$

反过来, 任取 $[x] \in B_{E/\ker u}$, 则必定存在代表元 $y \in [x]$, 使得 $\|[x]\| \leq \|y\| < 1$. 于是得 $y \in B_E$, 满足 $[x] = q(y) \in q(B_E)$, 也就有

$$B_{E/\ker u} \subset q(B_E).$$

因此, 我们得到 $B_{E/\ker u} = q(B_E)$. 再由 $u(B_E) = B_F$, 以及 $u = v \circ q$, 立即得到

$$v(B_{E/\ker u}) = B_F.$$

而且, 因 $v \in E/\ker u \rightarrow F$ 是同构映射, 故也有

$$v^{-1}(B_F) = B_{E/\ker u}.$$

由以上两式立即得到 $\|v\| = \|v^{-1}\| = 1$. 故 v 是从 $E/\ker u$ 到 F 上的等距同构映射. \square

14. 设 E 是 Banach 空间, F 和 G 都是 E 的闭向量子空间, 并且 $F + G$ 也是闭向量子空间. 证明: 存在一个常数 $C \geq 0$, 使得 $\forall x \in F + G$, 存在 $(f, g) \in F \times G$, 满足

$$x = f + g, \|f\| \leq C\|x\|, \|g\| \leq C\|x\|.$$

证明: 考虑乘积 Banach 空间 $F \times G$ (赋予范数 $\|(f, g)\| = \|f\| + \|g\|$) 和 Banach 空间 $F + G$ (范数即为 E 中范数). 映射

$$u: F \times G \rightarrow F + G, (f, g) \mapsto f + g$$

为连续线性的满射, 由开映射定理, $u(B_{F \times G}(0, 1))$ 为 $F + G$ 中含原点的开集, 取常数 $c > 0$, 使得 $B_{F+G}(0, c) \subset u(B_{F \times G}(0, 1))$. 则对于任意 $x \in F + G$ 且 $\|x\| < c$, 存在 $f \in F, g \in G$ 且 $\|f\| + \|g\| < 1$, 使得 $x = f + g$.

对于一般的 $x \in F + G$, 任取 $0 < c' < c$, 由于 $x = \frac{\|x\|}{c'}(\frac{c'}{\|x\|}x)$, 其中 $\|\frac{c'}{\|x\|}x\| = c' < c$, 故存在 $f' \in F, g' \in G$, 使得 $\frac{c'}{\|x\|}x = f' + g'$ 且 $\|f'\| + \|g'\| < 1$. 令 $f = \frac{\|x\|}{c'}f', g = \frac{\|x\|}{c'}g'$, 则 $x = f + g$ 且

$$\|f\| + \|g\| = \frac{\|x\|}{c'}(\|f'\| + \|g'\|) < \frac{1}{c'}\|x\|.$$

由 c' 的任意性即得 $\|f\| + \|g\| \leq \frac{1}{c}\|x\|$. 再令 $C = \frac{1}{c}$ 即证所需. \square

15. 设 H 是 Hilbert 空间, 且线性映射 $u: H \rightarrow H$ 满足

$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle, \quad \forall x, y \in H.$$

证明: u 连续.

证明: 考虑线性泛函

$$f_x: H \rightarrow \mathbb{K}, y \mapsto \langle u(y), u(x) \rangle.$$

记 H 中的闭单位球为 $\overline{B_H}$, 对于任意 $y \in H$, 由 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$\sup_{x \in \overline{B_H}} |f_x(y)| = \sup_{x \in \overline{B_H}} |\langle u(y), u(x) \rangle| = \sup_{x \in \overline{B_H}} |\langle u(u(y)), x \rangle| \leq \|u(u(y))\| < \infty.$$

故由 Banach-Steinhaus 定理知

$$\sup_{x \in \overline{B_H}} \|f_x\| < \infty.$$

即

$$\sup_{x \in \overline{B_H}} \sup_{y \in \overline{B_H}} |\langle u(y), u(x) \rangle| < \infty.$$

因此

$$\|u\|^2 = \sup_{x \in \overline{B_H}} \|u(x)\|^2 = \sup_{x \in \overline{B_H}} \langle u(x), u(x) \rangle < \infty.$$

从而 u 为有界算子, 亦即为连续算子. □

拓扑向量空间

2. 设 E 是拓扑向量空间, $A, B \subset E$.

(a) 证明: 若 A 是开集, 则 $A + B$ 也是开集.

(b) 证明: 若 A 和 B 是紧的且 E 是一个 Hausdorff 空间, 则 $A + B$ 也是紧的.

(c) 构造 \mathbb{R}^2 上的例子, 说明 A 和 B 是闭集, 但 $A + B$ 不是闭集.

证明: (a) 因为

$$A + B = \bigcup_{y \in B} (A + y).$$

所以 $A + B$ 是开集.

(b) $\Phi: (x, y) \mapsto x + y$ 是连续映射, 因 A, B 紧, 故 $A \times B$ 紧, 故 $A + B = \Phi(A \times B)$ 紧.

(c) 取 $A = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{xy = 1 \mid x > 0\}$, 则 A 和 B 都是 \mathbb{R}^2 中闭集, 但是 $A + B$ 不是闭集. 事实上, $A + B$ 中序列

$$(-n, 0) + (n, \frac{1}{n}) = (0, \frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0),$$

但是 $(0, 0) \notin A + B$, 因此 $A + B$ 不是闭集. □

3. 设 E 是拓扑向量空间, f 是 E 到 F 的线性泛函 (f 不恒为 0). 并假设 $H = f^{-1}(0)$ 是闭集. 本题的目的是证明在该假设下 f 是连续的.

(a) 证明: 存在元素 $a \in E$, 使得 $f(a) = 1$.

(b) 证明: $E \setminus f^{-1}(1)$ 是含有原点的开集.

(c) 设 V 是包含于 $E \setminus f^{-1}(1)$ 的原点处的平衡邻域. 证明: $|f|$ 在 V 上被 1 严格控制, 进而导出 f 连续.

证明: (a) 由于 f 不恒为 0, 故存在 $x \in E$, 使得 $f(x) \neq 0$. 取 $a = \frac{x}{f(x)} \in E$, 则 $f(a) = 1$.

(b) 显然 $E \setminus f^{-1}(1)$ 包含原点, 下证其为开集. 任取 $x \in E \setminus f^{-1}(1)$, 则

$$f(x) \neq 1 \Rightarrow f(x-a) \neq 0 \Rightarrow x-a \in E \setminus f^{-1}(0).$$

而 $E \setminus f^{-1}(0)$ 为开集, 故存在开集 U 使得

$$x-a \in U \subset E \setminus f^{-1}(0).$$

那么 $a+U$ 也为开集且

$$x \in a+U \subset E \setminus f^{-1}(1).$$

因此 $E \setminus f^{-1}(1)$ 为开集.

(c) (反证法) 假设存在 $x \in V$, 使得 $|f(x)| = \lambda > 1$, 则由 V 是平衡的可得 $\frac{x}{\lambda} \in V$ 且 $|f(\frac{x}{\lambda})| = 1$, 这与 $V \subset E \setminus f^{-1}(1)$ 相矛盾. 因此在 V 上, $|f| < 1$, 由推论 7.1.11 知 f 连续. \square

5. 设 Ω 表示开圆盘 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 3\}$, K 表示闭单位圆盘 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$. 对 $f \in H(\Omega)$ 定义

$$p(f) = \sup_{z \in K} |f(z)|.$$

(a) 证明: p 是 $H(\Omega)$ 上的范数.

(b) 证明: 由 p 诱导的拓扑不同于在 Ω 的紧子集上一致收敛的拓扑. (提示: 可以考虑函数 $f_n(z) = e^{n(z-2)}$.)

证明: (a) 直接按定义验证.

(b)

\square

6. 设 A 是 $[0, 1]$ 的可数子集, 且映射 $\alpha: A \rightarrow (0, +\infty)$ 满足 $\sum_{t \in A} \alpha(t) < +\infty$. 对 $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ 定义

$$\|f\|_{A, \alpha} = \sum_{t \in A} \alpha(t) |f(t)|.$$

(a) 证明: $\|\cdot\|_{A, \alpha}$ 是 $C([0, 1], \mathbb{R})$ 上的半范数. 什么时候它是一个范数? 什么时候它等价于一致范数 $\|\cdot\|_{\infty}$?

(b) 证明: 两个半范数 $\|\cdot\|_{A, \alpha}$ 和 $\|\cdot\|_{A', \alpha'}$ 诱导相同的拓扑当且仅当 $A = A'$ 且

$$0 < \inf_{t \in A} \alpha'(t)/\alpha(t) \leq \sup_{t \in A} \alpha'(t)/\alpha(t) < \infty.$$

证明: (a) 首先由 $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$, 知 $\sup_{t \in A} |f(t)| < \infty$. 那么

$$\|f\|_{A, \alpha} = \sum_{t \in A} \alpha(t) |f(t)| \leq \sup_{t \in A} |f(t)| \sum_{t \in A} \alpha(t) < +\infty.$$

并且容易验证 $\|\cdot\|_{A, \alpha}$ 是满足半范数满足的其它公理. 而且可以看到, 若取 $A = \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$, 令映射 $\alpha: \frac{1}{n} \rightarrow \frac{1}{2^n}$, 并设 f 为在 A 上取 0 的“锯齿”函数, 则 $\|f\|_{A, \alpha} = 0$, 但 $f \neq 0$, 即 $\|\cdot\|_{A, \alpha}$ 不是一个范数.

由定义可知, $\|f\|_{A, \alpha} = 0$ 等价于 $f(t) = 0, t \in A$. 由此可以证明: $\|\cdot\|_{A, \alpha}$ 是一个范数当且仅当 A 在 $[0, 1]$ 中稠密.

实际上, 若 A 在 $[0, 1]$ 中稠密, 则由 $f(t) = 0, t \in A$, 及 f 的连续性, 得 $f(t) = 0, \forall t \in [0, 1]$. 反过来, 假设 A 在 $[0, 1]$ 中不稠密, 那么存在点 $t \in [0, 1]$ 及 t 的开邻域 I , 使得 $A \cap I = \emptyset$, 即 $A \subset [0, 1] \setminus I$. 那么可取 $[0, 1]$ 上的连续函数 f 在 $[0, 1] \setminus I$ 上为 0, 而在 I 上不为 0, 这与 $\|\cdot\|_{A, \alpha}$ 是一个范数相矛盾.

最后, 我们来证明: 对任意一个半范数 $\|\cdot\|_{A, \alpha}$, 它都不等价于一致范数 $\|\cdot\|_{\infty}$. 对可列集 A 中的元素排序, 记 $A = (t_i)_{i \geq 1}$. 由 $\sum_{t_i \in A} \alpha(t_i) < +\infty$, 存在 $N > 0$, 使得当 $i \geq N$ 时, 有 $\sum_{i \geq N} \alpha(t_i) < \varepsilon$. 接下来, 选择一个连续函数 f 满足 $\|f\|_{\infty} = 1$, 且

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t = t_i, i < N \\ 1, & t = t_{N+1} \end{cases}$$

那么

$$\|f\|_{A, \alpha} = \sum_{i > N} \alpha(t_i) |f(t_i)| \leq \sum_{i > N} \alpha(t_i) < \varepsilon,$$

这意味着一致范数 $\|\cdot\|_{\infty}$ 关于半范数 $\|\cdot\|_{A, \alpha}$ 不是有界的.

(b) 首先证明充分性. 设 $C_1 = \inf_{t \in A} \alpha'(t)/\alpha(t)$, $C_2 = \sup_{t \in A} \alpha'(t)/\alpha(t)$, 则由充分性条件知 $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$. 故

$$C_1 \|f\|_{A, \alpha} \leq \|f\|_{A', \alpha'} = \sum_{t \in A'} \alpha'(t) |f(t)| = \sum_{t \in A} \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} \alpha(t) |f(t)| \leq C_2 \|f\|_{A, \alpha}.$$

即证两个范数 $\|\cdot\|_{A, \alpha}$ 和 $\|\cdot\|_{A', \alpha'}$ 等价.

下面证明必要性, 我们先假设 $A \neq A'$. 不妨设存在 $t_{i_0} \in A$, 但 $t_{i_0} \notin A'$. 任取 $\varepsilon > 0$, 则存在 $N > 0$, 当 $i \geq N$ 时, 有 $\sum_{i \geq N} \alpha'(t'_i) < \varepsilon$. 取连续函数 f 满足 $\|f\|_{\infty} = 1$, 且

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t = t'_i, \forall i < N; \\ 1, & t = t_{i_0}. \end{cases}$$

则有

$$\|f\|_{A,\alpha'} = \sum_{i>N} \alpha'(t'_i) |f(t'_i)| < \varepsilon,$$

而

$$\|f\|_{A,\alpha} \geq \alpha(t_{i_0}),$$

这意味着两个半范数 $\|\cdot\|_{A,\alpha}$ 和 $\|\cdot\|_{A',\alpha'}$ 诱导的拓扑不同. 因此必有 $A = A'$.

接下来, 我们假设 $A = A' = (t_i)_{i \geq 1}$. 两个半范数 $\|\cdot\|_{A,\alpha}$ 和 $\|\cdot\|_{A',\alpha'}$ 诱导的拓扑相同, 意味着存在常数 $C_1, C_2 > 0$, 使得

$$C_1 \|f\|_{A,\alpha} \leq \|f\|_{A',\alpha'} \leq C_2 \|f\|_{A,\alpha}. \quad (\star)$$

任取一个 t_{i_0} , 则 $N > 0$, 使得当 $i \geq N$ 时, 有 $\sum_{i \geq N} \alpha(t_i) \leq \alpha(t_{i_0})$. 取连续函数 f 满足 $\|f\|_\infty = 1$, 且

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t = t_i, \forall i < N \text{ 且 } i \neq i_0; \\ 1, & t = t_{i_0}. \end{cases}$$

则有

$$\|f\|_{A,\alpha} \leq 2\alpha(t_{i_0}) \quad \text{且} \quad \|f\|_{A,\alpha'} \geq \alpha'(t_{i_0}).$$

综合上面的两个不等式以及 (\star) 式, 立即可得

$$\alpha'(t_{i_0}) \leq \|f\|_{A,\alpha'} \leq C_2 \|f\|_{A,\alpha} \leq 2C_2 \alpha(t_{i_0}).$$

因此对任意 $t \in A$, 有 $\alpha'(t)/\alpha(t) \leq 2C_2$. 类似上面的讨论, 也有

$$\alpha(t_{i_0}) \leq \frac{2}{C_1} \alpha'(t_{i_0}).$$

故结论成立. □

16. 令 $0 < p < 1$, 考虑空间 $L_p = L_p(0, 1)$, 并在 L_p 上赋予距离 $d_p(f, g) = \|f - g\|_p^p$. 本习题的目标是证明 L_p 不是局部凸的且没有非零线性泛函.

(a) 证明: L_p 是拓扑向量空间.

接下来, 我们先考虑 $p = \frac{1}{2}$ 的情形, 用 $B(r)$ 表示中心在原点、半径为 r 的 $L_{\frac{1}{2}}$ 中的闭单位球: $B(r) = \left\{ f \in L_{\frac{1}{2}} : \|f\|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \leq r \right\}$.

(b) 取 $f \in B(\sqrt{2}r)$. 证明: 存在 $t_0 \in (0, 1)$, 使得

$$\int_0^{t_0} |f(t)|^{\frac{1}{2}} dt = \frac{\|f\|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

(c) 定义

$$g(t) = \begin{cases} 2f(t), & 0 \leq t \leq t_0, \\ 0, & t_0 < t \leq 1, \end{cases} \quad \text{且} \quad h(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq t_0, \\ 2f(t), & t_0 < t \leq 1. \end{cases}$$

证明:

$$g, h \in B(r) \quad \text{且} \quad f = \frac{g}{2} + \frac{h}{2}.$$

(d) 由此导出 $B(\sqrt{2}r) \subset \text{conv}(B(r))$, 并有 $\text{conv}(B(r)) = L_{\frac{1}{2}}$.

(e) 得出 $L_{\frac{1}{2}}$ 是非局部凸的.

(f) 把以上结论推广到 $0 < p < 1$ 的情形.

(g) 证明: L_p 上只有零线性泛函是连续的.

证明: (a) 只证明映射 $\Phi: L_p \times L_p \rightarrow L_p, (f, g) \mapsto f + g$ 连续, 对于加法的连续性同理可证, 对于以 $f + g$ 为中心的任意开球 $V = B(f + g, r)$, 取 $U_1 = B(f, r/2), U_2 = B(g, r/2)$, 则对任意 $f_1 \in B(f, r/2), g_1 \in B(g, r/2)$, 有

$$\|f_1 - f\|_p^p < \frac{r}{2}, \|g_1 - g\|_p^p < \frac{r}{2}.$$

由距离的三角不等式有

$$\|(f_1 + g_1) - (f + g)\|_p^p \leq \|f_1 - f\|_p^p + \|g_1 - g\|_p^p < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

所以 $f_1 + g_1 \in V$, 故 $U_1 + U_2 \subset V$, 由定义知 Φ 连续.

(b) 令

$$\Phi(t) = \int_0^t |f(x)|^{\frac{1}{2}} dx.$$

则 $\Phi(0) = 0, \Phi(1) = \|f\|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$, 且 $\Phi(t)$ 是连续函数, 由介值性定理知存在 $t_0 \in (0, 1)$ 使得

$$\Phi(t_0) = \int_0^{t_0} |f(t)|^{\frac{1}{2}} dt = \frac{\|f\|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

(c) 因为

$$\|g\|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \int_0^1 |g(t)|^{\frac{1}{2}} dt = \int_0^{t_0} |2f(t)|^{\frac{1}{2}} dt = \sqrt{2} \cdot \frac{\|f\|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}r = r.$$

所以 $g \in B(r)$. 同理 $h \in B(r)$, 而 $f = \frac{g}{2} + \frac{h}{2}$ 是显然的.

(d) (注意, 在度量空间中, 球并不一定为凸集, 所以不要对本题中的 $B(r)$ 取凸包的操作感到惊讶! 但是在赋范空间中, 球一定为凸集.) 对任意的 $f \in B(\sqrt{2}r)$, 利用 (c) 中的构造方式得到 $g, h \in B(r)$ 使得 $f = \frac{g}{2} + \frac{h}{2}$, 故 $f \in \text{conv}(B(r))$, 因此

$$B(\sqrt{2}r) \subset \text{conv}(B(r)).$$

又

$$B(2r) \subset \text{conv}(B(\sqrt{2}r)) \subset \text{conv}(\text{conv}(B(r))) = \text{conv}(B(r)).$$

故对任意的 n , 有

$$B(2^n r) \subset \text{conv}(B(r)).$$

因此

$$L_{\frac{1}{2}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(2^n r) \subset \text{conv}(B(r)).$$

结合 $\text{conv}(B(r)) \subset L_{\frac{1}{2}}$ 知 $\text{conv}(B(r)) = L_{\frac{1}{2}}$.

(e) 由 (d) 知原点的凸开邻域只有 $L_{\frac{1}{2}}$, 因此 $L_{\frac{1}{2}}$ 是非局部凸的.

(f) 同 (c) 的构造亦可得 $L_p (0 < p < 1)$ 是非局部凸的.

(g) 设 $f: L_p \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续的线性泛函, 则 $\forall r > 0$, $(-r, r)$ 为 \mathbb{R} 中开凸集, 由 f 的线性性知 $f^{-1}((-r, r))$ 为 L_p 中凸集, 由 f 的连续性知 $f^{-1}((-r, r))$ 为 L_p 中的开集, 结合 (f) 中结论知

$$f^{-1}(-r, r) = L_p.$$

故

$$f^{-1}(0) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right) = L_p.$$

因此 $f \equiv 0$. □

Hahn-Banach 定理

1. 设 $1 \leq p \leq \infty$, 考虑 \mathbb{R}^2 上的 p 范数:

$$\|(x_1, x_2)\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad p < \infty; \quad \|(x_1, x_2)\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}.$$

设 $F = \mathbb{R} \times \{0\}$, 即由 $e_1 = (1, 0)$ 生成的向量子空间, 并设 $f: F \rightarrow \mathbb{R}$ 是线性泛函, 满足 $f(e_1) = 1$.

(a) 当 \mathbb{R}^2 上赋予 $\|\cdot\|_1$ 范数时, 确定 f 从 F 到 \mathbb{R}^2 的所有保范延拓.

(b) 当 \mathbb{R}^2 上赋予 $\|\cdot\|_p$ 范数时, 考虑同样的问题.

证明: (a) 首先 $\|f\| = \sup_{x=te_1, t \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_1} = \sup_{x=te_1, t \neq 0} \frac{|t|}{|t|} = 1$, 记 $e_2 = (0, 1)$, 则对任意 $x = x_1e_1 + x_2e_2 \in \mathbb{R}^2$, 有

$$\tilde{f}(x) = x_1f(e_1) + x_2\tilde{f}(e_2) = x_1 + x_2\tilde{f}(e_2).$$

则

$$\|\tilde{f}\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0} \frac{|\tilde{f}(x)|}{\|x\|_1} = \sup_{x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0} \frac{|x_1 + x_2\tilde{f}(e_2)|}{|x_1| + |x_2|}.$$

要使得 $\|\tilde{f}\| = \|f\| = 1$, 即

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0} \frac{|x_1 + x_2\tilde{f}(e_2)|}{|x_1| + |x_2|} = 1.$$

容易验证当 $|\tilde{f}(e_2)| \leq 1$ 时, 上面等式得以成立, 因此当 \mathbb{R}^2 上赋予 $\|\cdot\|_1$ 范数时, f 从 F 到 \mathbb{R}^2 的所有保范延拓为:

$$\left\{ \tilde{f}: \tilde{f}(x) = x_1 + x_2\tilde{f}(e_2), |\tilde{f}(e_2)| \leq 1 \right\}.$$

(b) 当 $1 < p < \infty$ 时, 此时目标是:

$$\|\tilde{f}\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0} \frac{|x_1 + x_2 \tilde{f}(e_2)|}{(|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}}} = 1.$$

为叙述简便, 记 $t = |\tilde{f}(e_2)|$, 则 $x_1 x_2 \tilde{f}(e_2) \geq 0$ 时

$$\begin{aligned} \frac{|x_1 + x_2 \tilde{f}(e_2)|}{(|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}}} \leq 1 &\Leftrightarrow \frac{|x_1| + |x_2| \cdot t}{(|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}}} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow (|x_1| + |x_2| \cdot t)^p \leq |x_1|^p + |x_2|^p (\text{不妨 } |x_2| \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{|x_1|}{|x_2|} + t\right)^p \leq \left(\frac{|x_1|}{|x_2|}\right)^p + 1 \\ &\Leftrightarrow (\alpha + t)^p \leq \alpha^p + 1 (0 \leq \alpha \leq \infty) \\ &\Leftrightarrow t = 0. \end{aligned}$$

因此保范延拓为 $\{\tilde{f} : \tilde{f}(x) = x_1\}$.

当 $p = \infty$ 时, 此时目标是:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0} \frac{|x_1 + x_2 \tilde{f}(e_2)|}{\max\{|x_1|, |x_2|\}} = 1 \Leftrightarrow \tilde{f}(e_2) = 0.$$

因此保范延拓为 $\{\tilde{f} : \tilde{f}(x) = x_1\}$.

综上知当 \mathbb{R}^2 上赋予 $\|\cdot\|_p (1 < p \leq \infty)$ 范数时, 所有的保范延拓为 $\{\tilde{f} : \tilde{f}(x) = x_1\}$. \square

2. 通过 \mathbb{R}^2 上的反例说明在几何形式的 Hahn-Banach 定理中, 一个凸子集是开集的条件是必要的.

证明: 将四个点 $(\pm 1, \pm 1)$ 围成的正方形用 x 轴分成两部分, 上半部分去掉线段 $\{(x, y) | -1 \leq x \leq 0, y = 0\}$, 得到区域 A , 下半部分去掉线段 $\{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$, 得到区域 B , 易知 A, B 无法被隔离. \square

3. 设 E 是数域 \mathbb{K} 上的赋范空间, $A \subset E$, 并设 $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ 以及常数 $\lambda \geq 0$. 证明: 存在 $\hat{f} \in E^*$, 使得 $\hat{f}|_A = f$ 且 $\|\hat{f}\| \leq \lambda$ 的充分必要条件是

$$\left| \sum_{k=1}^n \alpha_k f(a_k) \right| \leq \lambda \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k \right\|, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1, \dots, a_n) \in A^n, \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n.$$

证明: 必要性显然, 下面证明充分性. 由

$$\left| \sum_{k=1}^n \alpha_k f(a_k) \right| = \left| f \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k a_k \right) \right| \leq \lambda \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k \right\|.$$

知 f 是连续线性泛函, 由 Hahn-Banach 定理知存在 $\hat{f} \in E^*$, 使得 $\hat{f}|_A = f, \|\hat{f}\| \leq \lambda$. \square

4. 设 E 是 Hausdorff 拓扑向量空间, A 是 E 中包含原点的开凸集以及 $x_0 \in E \setminus A$.

(a) 证明: 存在 $f \in E^*$, 使得

$$\operatorname{Re} f(x_0) = 1, \text{ 且在 } A \text{ 上 } \operatorname{Re} f < 1.$$

(b) 假设 A 还是平衡的. 证明: 可以选择 $f \in E^*$, 使其满足

$$f(x_0) = 1, \text{ 且在 } A \text{ 上 } |f| < 1.$$

证明: (a) 由于 $\{x_0\}$ 为凸集, A 为开凸集且二者不相交, 故由 Hahn-Banach 定理知存在 $\tilde{f} \in E^*$ 和 $\alpha > 0$, 使得

$$\operatorname{Re} \tilde{f}(a) < \alpha \leq \operatorname{Re} \tilde{f}(x_0), \quad \forall a \in A.$$

令 $f = \frac{\tilde{f}}{\operatorname{Re} \tilde{f}(x_0)}$, 则 $\operatorname{Re} f(x_0) = 1$ 且对任意 $a \in A$, 有

$$\operatorname{Re} f(a) = \frac{\operatorname{Re} \tilde{f}(a)}{\operatorname{Re} \tilde{f}(x_0)} < \frac{\alpha}{\alpha} = 1.$$

(b) \tilde{f} 仍为 (a) 中所得有界线性泛函, 令 $f(x) = \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{f}(x_0)}$, 则 $f(x_0) = 1$, 且对任意 $a \in A$, 由 A 平衡可得

$$\begin{aligned} |f(a)| &= \left| \frac{\tilde{f}(a)}{\tilde{f}(x_0)} \right| = \frac{|\tilde{f}(a)|}{|\tilde{f}(x_0)|} = \frac{\tilde{f}(a) \operatorname{sgn} \tilde{f}(a)}{|\tilde{f}(x_0)|} \\ &= \frac{\tilde{f}(a \operatorname{sgn} \tilde{f}(a))}{|\tilde{f}(x_0)|} \leq \frac{\operatorname{Re} \tilde{f}(a \operatorname{sgn} \tilde{f}(a))}{\alpha} < \frac{\alpha}{\alpha} = 1. \end{aligned} \quad \square$$

5. 设 E 是 Hausdorff 局部凸空间, A 是 E 中包含原点的闭凸集以及 $x_0 \in E \setminus A$.

(a) 证明: 存在 $f \in E^*$, 使得

$$\operatorname{Re} f(x_0) > 1 \quad \text{且} \quad \sup_{x \in A} \operatorname{Re} f(x) \leq 1.$$

(b) 假设 A 还是平衡的. 证明: 可以选择 f , 使其满足

$$f(x_0) = 1 \quad \text{且} \quad \sup_{x \in A} |f(x)| \leq 1.$$

证明: (a) 由于 A 是包含原点的闭凸集, $\{x_0\}$ 是紧集, 且二者不相交, 故由 Hahn-Banach 定理知存在 $\tilde{f} \in E^*$ 和常数 $\alpha > 0$, 使得

$$\sup_{x \in A} \operatorname{Re} \tilde{f}(x) < \alpha < \operatorname{Re} \tilde{f}(x_0).$$

令 $f = \frac{\tilde{f}}{\alpha} \in E^*$, 则

$$\operatorname{Re} f(x_0) = \frac{\operatorname{Re} \tilde{f}(x_0)}{\alpha} > 1 \quad \text{且} \quad \sup_{x \in A} \operatorname{Re} f(x) = \sup_{x \in A} \frac{\operatorname{Re} \tilde{f}(x)}{\alpha} < 1.$$

(b) \tilde{f} 仍为 (a) 中所得有界线性泛函, 令 $f = \frac{\tilde{f}}{\tilde{f}(x_0)}$, 则 $f(x_0) = 1$, 且由 A 平衡可得

$$\begin{aligned} \sup_{x \in A} |f(x)| &= \sup_{x \in A} \left| \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{f}(x_0)} \right| = \sup_{x \in A} \frac{|\tilde{f}(x)|}{|\tilde{f}(x_0)|} \\ &< \frac{1}{\alpha} \sup_{x \in A} \operatorname{Re} \tilde{f}(x \operatorname{sgn} \tilde{f}(x)) < \frac{\alpha}{\alpha} = 1. \end{aligned} \quad \square$$

6. 设 E 是数域 \mathbb{K} 上的拓扑向量空间. 称 E 的向量子空间 H 是超平面, 若有某个 $x_0 \in E \setminus H$, 使得 $E = H + \mathbb{K}x_0$.

(a) 证明: 若 H 是超平面, 则对任意的 $x_0 \in E \setminus H$, $E = H + \mathbb{K}x_0$ 成立.

(b) 证明: 一个超平面或者是 E 的稠密集, 或者是闭集.

(c) 证明: H 是超平面当且仅当存在 E 上的一个非零线性泛函 f , 使得 $H = \ker f$. 因而 H 是闭的等价于 f 是连续的.

证明: (a) $\forall x_1 \in E \setminus H, x_1 = y_1 + \lambda x_0, y_1 \in H, \lambda \neq 0$, 故对 $\forall x \in E$,

$$x = y + kx_0 = y + k \frac{x_1 - y_1}{\lambda} = \left(y - \frac{k}{\lambda} y_1 \right) + \frac{k}{\lambda} x_1 \in H + \mathbb{K}x_1.$$

因此

$$E = H + \mathbb{K}x_1, \quad \forall x_1 \in E \setminus H.$$

(b) 由定理 7.1.6 知 \overline{H} 是向量子空间, 又 $\dim E \setminus H = 1$, 故只可能有两种情况:

- $\overline{H} = H$, 即 H 是闭集
- $\overline{H} = E$, 即 H 在 E 中稠密

(c) (\Leftarrow) 假设存在 E 上的非零线性泛函 f , 使得 $H = \ker f$, 首先因 $f \neq 0$, 故存在 $x_0 \in E \setminus \ker f$, s.t. $f(x_0) = 1$, 则 $\forall x \in E$, 有

$$x = x - f(x)x_0 + f(x)x_0$$

因为 $f(x - f(x)x_0) = f(x) - f(x)f(x_0) = 0$, 所以 $x - f(x)x_0 \in \ker f$, 并且 $f(x)x_0 \in \mathbb{K}x_0$, 又容易验证表示 $x = h + kx_0, h \in \ker f, k \in \mathbb{K}$ 是唯一的, 因此

$$E = H + \mathbb{K}x_0$$

也即 H 是超平面

(\Rightarrow) 因为 H 是超平面, 所以 $\exists x_0 \in E \setminus H, s.t. E = H + \mathbb{K}x_0$, 故 $\forall x \in E, x = h + kx_0$

定义泛函:

$$f : E \rightarrow \mathbb{K}, x = h + kx_0 \mapsto k$$

容易验证 f 是合理定义的线性泛函且 $\ker f = H$

当 f 连续时, 因为 $\{0\} \subset \mathbb{K}$ 是闭集, 所以 $H = \ker f = f^{-1}(0)$ 是闭集.

□