常微分方程教程习题解

August 17,2020

目录

Chapter 1

基本概念

1.1 微分方程及其解的定义

1. 验证下列函数是右侧相应微分方程的解或通解:

(1)$y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}:y''-4y=0$;

(2)$y=\dfrac{\sin x}{x}:xy'+y=\cos x$;

(3)$y=x\left(\int x^{-1}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x+C\right):xy'-y=x\mathrm{e}^x$;

(4)$y=\begin{cases}-\frac{1}{4}(x-C_1)^2, & -\infty<x<C_1,\\ 0, & C_1\le x\le C_2,\\ +\frac{1}{4}(x-C_2)^2, & C_2<x<+\infty,\end{cases} \quad :y'=\sqrt{|y|}$

证明: (1)$y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}\Rightarrow y'=2C_1\mathrm{e}^{2x}-2C_2\mathrm{e}^{-2x}\Rightarrow y''=4C_1\mathrm{e}^{2x}+4C_2\mathrm{e}^{-2x}\Rightarrow y''-4y=0$

(2)$y=\frac{\sin x}{x}\Rightarrow y'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\Rightarrow xy'+y=\frac{x\cos x-\sin x}{x}+\frac{\sin x}{x}=\cos x$

(3)$y=x\left(\int x^{-1}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x+C\right)\Rightarrow y'=\int x^{-1}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x+C+\mathrm{e}^x\Rightarrow xy'-y=x(\int x^{-1}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x+C)+x\mathrm{e}^x-y=x\mathrm{e}^x$

(4) 当 $x<C_1$ 时,$y'=-\frac{1}{2}(x-C_1)$, 而 $\sqrt{|y|}=\sqrt{\frac{1}{4}(x-C_1)^2}=\frac{1}{2}(C_1-x)$, 故 $y'=\sqrt{|y|}(x<C_1)$, 其他两段同理可以验证. □

2. 求下列初值问题的解:

(1)$y'''=x,y(0)=a_0,y'(0)=a_1,y''(0)=a_2$;

(2)$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x),y(0)=0$(这里 $f(x)$ 是一个连续函数);

(3)$\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=-aR,R(0)=1$(这里 $a>0$ 是一个常数);

(4) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 + y^2, y(x_0) = y_0$.

解: (1)$y(x) = \frac{1}{24}x^4 + \frac{a_2}{2}x^2 + a_1 x + a_0$;
(2)$y(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$;
(3)$R(t) = \mathrm{e}^{-at}$;
(4)$y(x) = \tan(x + \arctan y_0 - x_0)$. □

3. 求出:
(1) 曲线族 $y = Cx + x^2$ 所满足的微分方程;
(2) 曲线族 $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2 x\mathrm{e}^x$ 所满足的微分方程;
(3) 平面上以原点为中心的一切圆所满足的微分方程;
(4) 平面上一切圆所满足的微分方程.

解: (1) 求导得 $y' = C + 2x$, 联立方程消去 C 得 $y + x^2 - xy' = 0$.
(2) 求两次导得 $\begin{cases} y = C_1\mathrm{e}^x + C_2 x\mathrm{e}^x \\ y' = C_1\mathrm{e}^x + C_2(x+1)\mathrm{e}^x \\ y'' = C_1\mathrm{e}^x + C_2(x+2)\mathrm{e}^x \end{cases}$, 由前两个方程解得 $C_1 = \frac{(x+1)y - xy'}{\mathrm{e}^x}, C_2 = \frac{y'-y}{\mathrm{e}^x}$, 代入第三个方程得 $y'' - 2y' + y = 0$.
(3) 平面上以原点为中心的一切圆的参数方程为 $x^2 + y^2 = R^2$(R 为参数), 求导得 $x + yy' = 0$.
(4) 平面上一切圆的参数方程为 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$(a, b, R为参数) $\Rightarrow x - a + (y-b)y' = 0 \Rightarrow 1 + (y')^2 + (y-b)y'' = 0 \Rightarrow 2y'y'' + y'y'' + (y-b)y''' = 0 \Rightarrow 3y'(y'')^2 - [1 + (y')^2]y''' = 0$. □

4. 证明: 设 $y = g(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$ 是一个充分光滑的函数族, 其中 x 是自变量, 而 C_1,C_2,$\cdots$,C_n 是 n 个独立的参数 (任意常数), 则存在一个形如 (1.1) 的 n 阶微分方程, 使得它的通解恰好是上述函数族.

证明: 已知

$$(*)\begin{cases} y = g(x, C_1, C_2, \cdots, C_n) \\ y' = g^{(1)}(x, C_1, C_2, \cdots, C_n) \\ \cdots \\ y^{(n-1)} = g^{(n-1)}(x, C_1, C_2, \cdots, C_n) \\ y^{(n)} = g^{(n)}(x, C_1, C_2, \cdots, C_n) \end{cases}$$

因为 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 独立, 所以 Jacobi 行列式

$$\frac{D[g, g^{(1)}, \cdots, g^{(n-1)}]}{D[C_1, C_2, \cdots, C_n]} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial C_1} & \frac{\partial g}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial C_n} \\ \frac{\partial g^{(1)}}{\partial C_1} & \frac{\partial g^{(1)}}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial g^{(1)}}{\partial C_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g^{(n-1)}}{\partial C_1} & \frac{\partial g^{(n-1)}}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial g^{(n-1)}}{\partial C_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

由隐函数存在定理[1]知可由方程组 $(*)$ 的前 n 个方程解出

$$C_i = C_i(x, y, \cdots, y^{(n-1)})(i = 1, 2, \cdots, n)$$

将之代入方程组 $(*)$ 最后一个方程中得

$$y^{(n)} = g^{(n)}(x, C_1(x, y, \cdots, y^{(n-1)}), \cdots, C_n(x, y, \cdots, y^{(n-1)}))$$

上式即为所求的 n 阶微分方程. □

1.2 微分方程及其解的几何解释

1. 作出如下微分方程的线素场:

(1)$y' = \dfrac{xy}{|xy|}$;

(2)$y' = (y-1)^2$;

(3)$y' = x^2 + y^2$.

解: (1) 奇异点集合为 $\{(x, y)|x = 0或y = 0\}$, 线素场如图 (Matlab 制图)

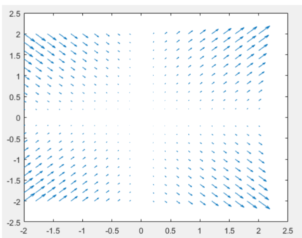


图 1.1: (1) 题图

(2) 等斜线为 $(y-1)^2 = k \Rightarrow y = 1 \pm \sqrt{k}$, 线素场如图

(3) 等斜线为 $x^2 + y^2 = k$, 线素场如图 □

[1]参见陈纪修数学分析第三版下册 P160

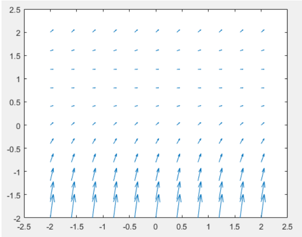


图 1.2: (2) 题图

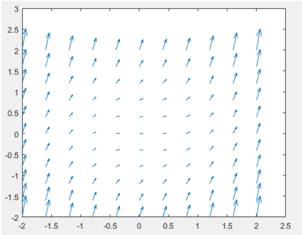


图 1.3: (3) 题图

2. 略.
3. 略.

Chapter 2

初等积分法

2.1 恰当方程

判断下列方程是否为恰当方程; 并且对恰当方程求解.

(1)$(3x^2-1)\,\mathrm{d}x+(2x+1)\,\mathrm{d}y=0$.

(2)$(x+2y)\,\mathrm{d}x+(2x-y)\,\mathrm{d}y=0$.

(3)$(ax+by)\,\mathrm{d}x+(bx+cy)\,\mathrm{d}y=0$.

(4)$(ax-by)\,\mathrm{d}x+(bx-cy)\,\mathrm{d}y=0(b\neq 0)$.

(5)$(t^2+1)\cos u\,\mathrm{d}u+2t\sin u\,\mathrm{d}t=0$.

(6)$(y\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x+y^2)\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x+2xy)\,\mathrm{d}y=0$.

(7)$\left(\dfrac{y}{x}+x^2\right)\,\mathrm{d}x+(\ln x-2y)\,\mathrm{d}y=0$.

(8)$(ax^2+by^2)\,\mathrm{d}x+cxy\,\mathrm{d}y=0$.

(9)$\dfrac{2s-1}{t}\,\mathrm{d}s+\dfrac{s-s^2}{t^2}\,\mathrm{d}t=0$.

(10)$xf(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x+yf(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y=0$, 其中 $f(\cdot)$ 是连续可微的.

解: (1)$\frac{\partial P}{\partial y}=0,\frac{\partial Q}{\partial x}=2$, 故不是恰当方程.

(2)$\frac{\partial P}{\partial y}=2,\frac{\partial Q}{\partial x}=2$, 故是恰当方程, 因为

$$(x+2y)\,\mathrm{d}x+(2x-y)\,\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2+2xy-\frac{1}{2}y^2\right)$$

所以通积分为

$$\frac{1}{2}x^2+2xy-\frac{1}{2}y^2=C$$

(3)$\frac{\partial P}{\partial y}=b=\frac{\partial Q}{\partial x}$, 故是恰当方程, 因为

$$(ax+by)\,\mathrm{d}x+(bx+cy)\,\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}ax^2+bxy+\frac{1}{2}cy^2\right)$$

所以通积分为

$$\frac{1}{2}ax^2+bxy+\frac{1}{2}cy^2=C$$

(4)$\frac{\partial P}{\partial y}=-b\neq\frac{\partial Q}{\partial x}=b$, 故不是恰当方程.
(5)$\frac{\partial P}{\partial t}=2t\cos u=\frac{\partial Q}{\partial u}$, 故是恰当方程, 因为

$$(t^2+1)\cos u\,\mathrm{d}u+2t\sin u\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}\left((t^2+1)\sin u\right)$$

所以通积分为

$$(t^2+1)\sin u=C$$

(6)$\frac{\partial P}{\partial y}=\mathrm{e}^x+2y=\frac{\partial Q}{\partial x}$, 故是恰当方程, 因为

$$(y\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x+y^2)\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x+2xy)\,\mathrm{d}y=\mathrm{d}(y\mathrm{e}^x+xy^2+2\mathrm{e}^x)$$

所以通积分为

$$y\mathrm{e}^x+xy^2+2\mathrm{e}^x=C$$

(7)$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{x}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, 故是恰当方程, 因为

$$\left(\frac{y}{x}+x^2\right)\mathrm{d}x+(\ln x-2y)\,\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(y\ln x+\frac{1}{3}x^3-y^2\right)$$

所以通积分为

$$y\ln x+\frac{1}{3}x^3-y^2=C$$

(8)$\frac{\partial P}{\partial y}=2by, \frac{\partial Q}{\partial x}=cy$, 因此当 $2b=c$ 时方程为恰当方程, 此时

$$(ax^2+by^2)\,\mathrm{d}x+cxy\,\mathrm{d}y=(ax^2+by^2)\,\mathrm{d}x+2bxy\,\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}ax^3+bxy^2\right)$$

所以通积分为

$$\frac{1}{3}ax^3+bxy^2=C$$

当 $2b\neq c$ 时方程不是恰当方程.
(9)$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{1-2s}{t^2}=\frac{\partial Q}{\partial s}$, 故是恰当方程, 因为

$$\frac{2s-1}{t}\,\mathrm{d}s+\frac{s-s^2}{t^2}\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}\left(\frac{s^2-s}{t}\right)$$

所以通积分为

$$\frac{s^2-s}{t}=C$$

(10)$\frac{\partial P}{\partial y}=2xyf'(x^2+y^2)=\frac{\partial Q}{\partial x}$, 故是恰当方程, 且通积分为

$$F(x^2+y^2)=C,\text{其中}F\text{是}f\text{的不定积分}$$

□

2.2 变量分离的方程

1. 求解下列微分方程, 并指出这些方程在 Oxy 平面上有意义的区域:

(1)$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x^2}{y}$;

(2)$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x^2}{y(1+x^3)}$;

(3)$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y^2\sin x=0$;

(4)$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+x+y^2+xy^2$;

(5)$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(\cos x\cos 2y)^2$;

(6)$x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1-y^2}$;

(7)$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x-\mathrm{e}^x}{y+\mathrm{e}^y}$.

解: (1)$y^2=\frac{2}{3}x^3+C, y\neq 0$;

(2)$y^2=\frac{2}{3}\ln|1+x^3|+C, y\neq 0, x\neq -1$;

(3)$\frac{1}{y}+\cos x=C$, 特解: $y=0$;

(4)$y=\tan(x+\frac{1}{2}x^2+C)$;

(5) 当 $\cos 2y\neq 0$ 时, 原方程等价于 $\frac{\mathrm{d}y}{\cos^2 2y}=\sec^2 2y\,\mathrm{d}y=\cos^2 x\,\mathrm{d}x$, 积分得 $2x+\sin 2x-2\tan 2y=C$, 当 $\cos 2y=0$ 时, 有特解 $y=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$;

(6)$\arcsin y=\ln|x|+C$, 特解:$y=\pm 1$;

(7)$y^2-x^2+2(\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-x})=C(y+\mathrm{e}^y\neq 0)$. □

2. 求解下列微分方程的初值问题:

(1)$\sin 2x\,\mathrm{d}x+\cos 3y\,\mathrm{d}y=0, y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{3}$;

(2)$x\,\mathrm{d}x+y\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}y=0, y(0)=1$;

(3)$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=r, r(0)=2$;

(4)$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\ln|x|}{1+y^2}, y(1)=0$;

(5)$\sqrt{1+x^2}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy^3, y(0)=1$.

解: (1) 积分得 $-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\sin 3y+C=0$, 由 $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$ 得 $C=-\frac{1}{2}$, 因此原方程的解为 $2\sin 3y-3\cos 2x-3=0$.

(2) 原方程等价于 $x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y=0$, 积分得 $(x-1)\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}y^2+C=0$, 代入初值条件 $y(0)=1$ 得 $C=\frac{1}{2}$, 因此原方程的解为 $2(x-1)\mathrm{e}^x+y^2+1=0$.

(3) 由初值条件知 $r\neq 0$, 故 $\frac{\mathrm{d}r}{r}=\mathrm{d}\theta$, 积分得 $r=C\mathrm{e}^\theta(C\neq 0)$, 代入初值条件得 $C=2$, 因此原方程的解为 $r=2\mathrm{e}^\theta$.

(4)$(1+y^2)\,\mathrm{d}y = \ln|x|\,\mathrm{d}x$, 积分得 $y+\frac{1}{3}y^3 = x(\ln|x|-1)+C$, 代入初值条件得 $C=1$, 因此原方程的解为 $y+\frac{1}{3}y^3 = x(\ln|x|-1)+1$.
(5) 由初值条件知 $y\neq 0$, 故原方程等价于 $\frac{\mathrm{d}y}{y^3} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$, 积分得 $-\frac{1}{2}y^{-2} = \sqrt{1+x^2}+C$, 代入初值条件得 $C=-\frac{3}{2}$, 因此原方程的解为 $2\sqrt{1+x^2}+y^{-2}-3=0$. □

3. 求解下列微分方程, 并作出相应积分曲线族的简图:
(1)$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos x$;
(2)$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ay(a\neq 0$为常数$)$;
(3)$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1-y^2$;
(4)$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^n(n=\dfrac{1}{3},1,2)$.

解: (1)$y=\sin x+C$, 积分曲线族如图:

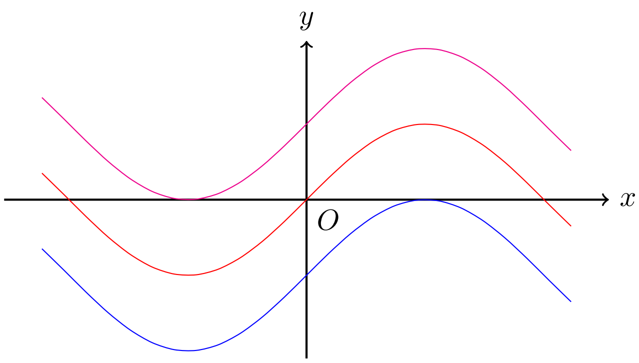


图 2.1: $y=\sin x+C$

(2)$y=0$ 为特解, 当 $y\neq 0$ 时, 积分得 $y=C\mathrm{e}^{ax}(C\neq 0)$, 积分曲线族如图 (以 $a>0$ 为例):
(3)$y=\pm 1$ 为特解, 当 $y\neq\pm 1$ 时, $\frac{\mathrm{d}y}{1-y^2} = \mathrm{d}x$, 积分得 $y=\frac{C\mathrm{e}^{2x}-1}{C\mathrm{e}^{2x}+1}(C\neq 0)$, 当 $C>0$ 时, 函数图像位于直线 $y=1$ 和 $y=-1$ 之间且单调递增; 当 $C<0$ 时, 存在间断点 $x_0=\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{1}{C}\right)$, $y=y(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减且当 $x\to x_0-$ 时 $y\to-\infty$, 在 (x_0,∞) 上单调递减且当 $x\to x_0+$ 时 $y\to+\infty$, 积分曲线族如图:
(4) 下述三种情形积分曲线族都易作出 (略去).

(i) $n=\frac{1}{3}$ 时, 通解为 $\frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}} = x+C(x\geq -C)$, 特解为 $y=0$

(ii) $n=1$ 时, 通解为 $y=C\mathrm{e}^x(C\in\mathbb{R})$

(iii) $n=2$ 时, 通解为 $y=\frac{1}{-x+C}(C\in\mathbb{R})$, 特解为 $y=0$.

□

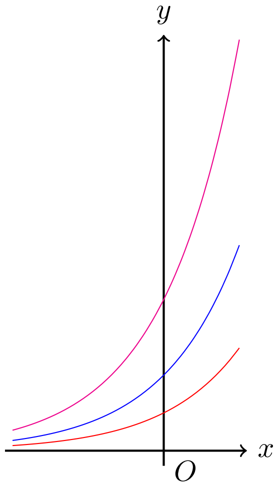


图 2.2: $y = C\mathrm{e}^{ax}$

4. 跟踪: 设某 A 从 Oxy 平面上的原点出发, 沿 x 轴正方向前进; 同时某 B 从点 $(0,b)$ 开始跟踪 A, 即 B 的运动方向永远指向 A 并与 A 保持等距 b. 试求 B 的光滑运动轨迹.

解: 设 B 的运动轨迹方程为 $y=y(x)$, 记某时刻 B 的位置为 $(x,y(x))$, 则此时 A 相应的位置为 $\left(x-\frac{y(x)}{y'(x)},0\right)$, 由于 A 与 B 保持等距, 故

$$\left(\frac{y}{y'}\right)^2+y^2=b^2 \Rightarrow \mathrm{d}x=-\frac{\sqrt{b^2-y^2}}{y}\,\mathrm{d}y$$

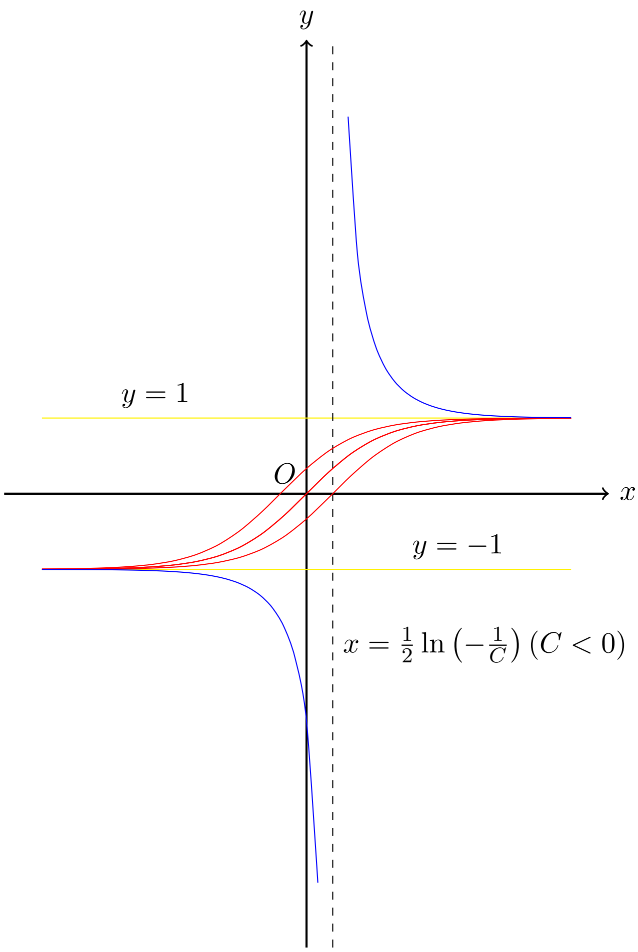
积分得

$$\begin{aligned}
x&=-\int\frac{\sqrt{b^2-y^2}}{y}\,\mathrm{d}y(y=b\cos\theta)\\
&=-\int\frac{b\sin\theta}{b\cos\theta}(-b\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\\
&=b\int(\sec\theta-\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta\\
&=b\ln|\sec\theta+\tan\theta|-b\sin\theta+C\\
&=b\ln\frac{b+\sqrt{b^2-y^2}}{y}-\sqrt{b^2-y^2}+C
\end{aligned}$$

由初值条件 $y(0)=b$ 得 $C=0$, 故 B 的光滑运动轨迹方程为 $x=b\ln\frac{b+\sqrt{b^2-y^2}}{y}-\sqrt{b^2-y^2}$. □

5. 设微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(y)$$



y
x
O
y = 1
y = −1
x = ½ ln(−1/C) (C < 0)

其中 $f(y)$ 在 $y=a$ 的某邻域 (例如区间 $|y-a|\le\varepsilon$) 内连续, 而且 $f(y)=0$ 当且仅当 $y=a$. 证明: 在直线 $y=a$ 上的每一点, 上述方程的解是局部唯一的, 当且仅当瑕积分

$$\left|\int_a^{a\pm\varepsilon}\frac{\mathrm{d}y}{f(y)}\right|=\infty(\text{发散}).$$

解: $(\Leftarrow)$ 显然, $y=a$ 是方程的一个解, 用反证法, 设 $y=y(x)$ 是方程的另一个解, 它与直线 $y=a$ 相交. 不妨设 (x_0,a) 是它们的一个交点, 且存在区间 $I=(x_0,x_0+\delta)$ 或 $I=(x_0-\delta,x_0)$, 使得当 $x\in I$ 时,$y(x)\ne a$, 从而

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{f(y(x))}=\mathrm{d}x,x\in I$$

积分得

$$\int_a^y\frac{\mathrm{d}y}{f(y)}=\int_{x_0}^x\frac{\mathrm{d}y(x)}{f(y(x))}=\int_{x_0}^x\mathrm{d}x=x-x_0<\infty$$

矛盾.

$(\Rightarrow)$ 用反证法, 设 $\left|\int_a^{a\pm\varepsilon}\frac{\mathrm{d}y}{f(y)}\right|<+\infty$, 则由

$$\int_a^y\frac{\mathrm{d}y}{f(y)}=x-x_0$$

定义的函数是方程的解, 且通过点 (x_0,a), 而 $y=a$ 也是过点 (x_0,a) 的解, 矛盾. □

6. 利用上题结果, 作出下列微分方程积分曲线族的草图:

$$(1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{|y|};(2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\begin{cases}y\ln|y|, & y\ne0\\0, & y=0\end{cases}$$

解: (1) 因为 $\int_0^{\pm\varepsilon}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{|y|}}$ 收敛, 故解不是局部唯一的, 微分方程的通解为

$$y=\begin{cases}\frac{1}{4}(x+C)^2 & x\ge -C\\-\frac{1}{4}(x+C)^2 & x\le -C\end{cases}$$

另外特解为 $y=0$, 积分曲线族容易作出.

(2) 因为 $\int_0^{\pm\varepsilon}\frac{\mathrm{d}y}{y\ln|y|}$ 发散, 所以解是局部唯一的, 微分方程的通解为

$$y=\pm\mathrm{e}^{C\mathrm{e}^x}(C\in\mathbb{R})$$

另外特解为 $y=0$, 积分曲线族容易作出. □

2.3 一阶线性方程

$$\text{通解公式}: \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)\Longrightarrow y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\left(C+\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right)$$

1. 求解微分方程:

(1)$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=x\mathrm{e}^{-x}$;

(2)$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y\tan x=\sin(2x)$;

(3)$x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=\sin x, y(\pi)=\dfrac{1}{\pi}$;

(4)$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{1}{1-x^2}y=1+x, y(0)=1$.

解: (1)

$$y=\mathrm{e}^{-\int 2\,\mathrm{d}x}\left(C+\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\int 2\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right)=C\mathrm{e}^{-2x}+(x-1)\mathrm{e}^{-x}$$

(2)

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{-\int \tan x\,\mathrm{d}x}\left(C+\int \sin(2x)\mathrm{e}^{\int \tan x\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right)\\&=|\cos x|\left(C+\int\frac{\sin(2x)}{|\cos x|}\,\mathrm{d}x\right)=C|\cos x|-2\cos^2 x\end{aligned}$$

(3)

$$y=\mathrm{e}^{-\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x}\left(C+\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{x^2}(C+\sin x-x\cos x)$$

代入初值条件得 $C=0$, 故解为

$$y=\frac{\sin x}{x^2}-\frac{\cos x}{x}$$

(4)

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x}\left(C+\int(1+x)\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right)=\left|\frac{x+1}{x-1}\right|^{\frac{1}{2}}\left(C+\int(1+x)\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x\right)\\&=\begin{cases}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\left(C+\int\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x\right)=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\left(C+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|\right), & |x|>1\\ \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\left(C+\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\right)=\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\left(C+\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\right), & |x|<1\end{cases}\end{aligned}$$

□

2. 把下列微分方程化为线性微分方程:

(1)$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x^2+y^2}{2y}$;

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x+y^2}$;

(3) $3xy^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y^3+x^3=0$;

(4) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\cos y}+x\tan y$.

解: (1) 令 $u=y^2$, 则 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+u$.

(2) 将 x 看作 y 的函数, 即 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{x}{y}+y$.

(3) 令 $u=y^3$, 则 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=3y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{u}{x}-x^2$.

(4) 原方程变形为 $\cos y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+x\sin y$, 令 $u=\sin y$, 即得 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+xu$. □

3. 设 $y=\varphi(x)$ 满足微分不等式

$$y'+a(x)y\le 0(x\ge 0).$$

证明

$$\varphi(x)\le\varphi(0)\mathrm{e}^{-\int_0^x a(s)\,\mathrm{d}s}(x\ge 0)$$

证明: 在不等式两边同时乘以 $\mathrm{e}^{\int_0^x a(s)\,\mathrm{d}s}$, 得

$$\mathrm{e}^{\int_0^x a(s)\,\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a(x)y\mathrm{e}^{\int_0^x a(s)\,\mathrm{d}s}\le 0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\left(\varphi(x)\mathrm{e}^{\int_0^x a(s)\,\mathrm{d}s}\right)}{\mathrm{d}x}\le 0$$

将上式从 0 到 x 积分得

$$\varphi(x)\mathrm{e}^{\int_0^x a(s)\,\mathrm{d}s}-\varphi(0)\le 0\Rightarrow\varphi(x)\le\varphi(0)\mathrm{e}^{-\int_0^x a(s)\,\mathrm{d}s}.$$ □

4. 用常数变易法求解非齐次线性方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)$, 即: 假设方程有形如 $y=C\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ 的解, 但其中的常数 C 变易为 x 的一个待定函数 $C(x)$. 然后将这种形式的解代入原方程, 再去确定 $C(x)$.

解: 因为

$$y=C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C'(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}+C(x)(-p(x))\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=C'(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

故有

$$C'(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}=q(x)$$

解之得

$$C(x)=\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C$$

代回即得原方程的解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\left(C+\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right). \qquad \square$$

5. 考虑方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x),$$

其中 $p(x)$ 和 $q(x)$ 都是以 $\omega>0$ 为周期的连续函数. 试证:

(1) 若 $q(x)\equiv 0$, 则方程的任一非零解以 ω 为周期, 当且仅当函数 $p(x)$ 的平均值

$$\bar{p}=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}p(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

(2) 若 $q(x)$ 不恒为零, 则方程有唯一的 ω 周期解, 当且仅当 $\bar{p}\neq 0$. 试求出此解.

证明: (1) 若 $q(x)\equiv 0$, 则方程的通解为

$$y=C\mathrm{e}^{-\int_0^x p(s)\,\mathrm{d}s}$$

从而

$$y(x)=y(x+\omega)\Leftrightarrow\int_0^x p(s)\,\mathrm{d}s=\int_0^{x+\omega}p(s)\,\mathrm{d}s\Leftrightarrow\int_0^{\omega}p(x)\,\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\bar{p}=0$$

(2) 若 $q(x)$ 不恒为零, 则方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int_0^x p(s)\,\mathrm{d}s}\left(C+\int_0^x q(s)\mathrm{e}^{\int_0^s p(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}s\right)$$

下面求常数 C 使得 $y(x)$ 为 ω 周期解, 即

$$y(x)=y(x+\omega),\forall x\in\mathbb{R}$$

可以断言若 $y(x)$ 是原方程的解且满足 $y(0)=y(\omega)$, 则 $y(x)$ 是原方程的 ω 周期解, 事实上, 因 $y(x)$ 是原方程的解, 则 $y(x+\omega)$ 也是原方程的解, 令 $u(x)=y(x+\omega)-y(x)$, 则 $u(x)$ 是相应齐次线性方程的解, 又因为 $u(0)=0$, 故 $u(x)\equiv 0$.

现将 $y(0)=y(\omega)$ 代入通解表达式得

$$C=\mathrm{e}^{-\int_0^{\omega}p(s)\,\mathrm{d}s}\left(C+\int_0^{\omega}q(s)\mathrm{e}^{\int_0^s p(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}s\right)$$

解得

$$C = \frac{1}{\mathrm{e}^{\int_0^\omega p(s)\,\mathrm{d}s} - 1} \int_0^\omega q(s)\mathrm{e}^{\int_0^s p(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}s$$

故方程有唯一的 ω 周期解当且仅当 $\int_0^\omega p(s)\,\mathrm{d}s \neq 0 \Leftrightarrow \bar{p} \neq 0$, 下面求 $y(x)$ 的表达式:
因为

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + p(x)y(x) = q(x)$$

在等式两边同时乘以 $\mathrm{e}^{\int_0^x p(t)\,\mathrm{d}t}$, 得

$$\mathrm{e}^{\int_0^x p(t)\,\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + \mathrm{e}^{\int_0^x p(t)\,\mathrm{d}t}p(x)y(x) = \mathrm{e}^{\int_0^x p(t)\,\mathrm{d}t}q(x)$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y(x)\mathrm{e}^{\int_0^x p(t)\,\mathrm{d}t}\right) = \mathrm{e}^{\int_0^x p(t)\,\mathrm{d}t}q(x)$$

将上式从 x 到 $x+\omega$ 积分, 利用 $y(x)$ 及 $p(x)$ 的周期性得

$$\begin{aligned} y(x+\omega)\mathrm{e}^{\int_0^{x+\omega} p(t)\,\mathrm{d}t} - y(x)\mathrm{e}^{\int_0^x p(t)\,\mathrm{d}t} &= y(x)\mathrm{e}^{\int_0^x p(t)\,\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{\int_x^{x+\omega} p(t)\,\mathrm{d}t} - 1\right) \\ &= y(x)\mathrm{e}^{\int_0^x p(t)\,\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{\int_0^{\omega} p(t)\,\mathrm{d}t} - 1\right) \\ &= \int_x^{x+\omega} \mathrm{e}^{\int_0^s p(t)\,\mathrm{d}t}q(s)\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

从而

$$y(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\int_0^\omega p(t)\,\mathrm{d}t} - 1} \int_x^{x+\omega} \mathrm{e}^{\int_x^s p(t)\,\mathrm{d}t}q(s)\,\mathrm{d}s. \qquad \square$$

6. 设连续函数 $f(x)$ 在区间 $-\infty < x < +\infty$ 上有界. 证明: 方程

$$y' + y = f(x)$$

在区间 $-\infty < x < +\infty$ 上有并且只有一个有界解, 试求出这个有界解, 并进而证明: 当 $f(x)$ 还是以 ω 为周期的周期函数时, 这个有界解也是一个以 ω 为周期的周期函数.

证明: 方程的通解为

$$y = \mathrm{e}^{-x}\left(C + \int_0^x f(s)\mathrm{e}^s\,\mathrm{d}s\right)$$

当 $x \to -\infty$ 时,$\mathrm{e}^{-x} \to +\infty$, 要使得解有界, 必有

$$C + \int_0^x f(s)\mathrm{e}^s\,\mathrm{d}s \to 0(x \to -\infty)$$

故取

$$C = \int_{-\infty}^0 f(s)\mathrm{e}^s\,\mathrm{d}s$$

此时解为

$$y(x)=\int_{-\infty}^{x}f(s)\mathrm{e}^{s-x}\,\mathrm{d}s$$

因为 $f(x)$ 有界, 所以存在 $M>0$, 使得 $|f(x)|\le M(\forall x\in\mathbb{R})$, 故

$$|y(x)|\le M\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{s-x}\,\mathrm{d}s=M$$

说明 $y(x)$ 的确是有界解. 当 $f(x)$ 以 ω 为周期时, 有

$$\begin{aligned}y(x+\omega)&=\int_{-\infty}^{x+\omega}f(s)\mathrm{e}^{s-(x+\omega)}\,\mathrm{d}s(令t=s-\omega)\\&=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{e}^{t-x}\,\mathrm{d}t\\&=y(x)\end{aligned}$$

所以 $y(x)$ 也是以 ω 为周期的周期函数. □

8. 令集合 $H^0=\{f(x)|f是以2\pi为周期的连续函数\}$, 易知 H^0 关于实数域构成一个线性空间. 对于任意 $f\in H^0$, 定义它的模

$$\|f\|=\max_{0\le x\le 2\pi}|f(x)|.$$

证明 H^0 是 Banach 空间, 利用下式

$$y(x)=\frac{1}{\mathrm{e}^{2a\pi}-1}\int_{x}^{x+2\pi}\mathrm{e}^{-a(x-s)}f(s)\,\mathrm{d}s$$

可以在空间 H^0 中定义一个变换 φ, 它把 f 变到 y. 试证:φ 是有界线性算子.

证明: 任取 H^0 中的 Cauchy 序列 $(f_n)_{n\ge1}$, 即

$$\forall\epsilon>0,\exists N>0,s.t.\forall m,n>N,\|f_m-f_n\|<\epsilon,i.e.\max_{0\le x\le 2\pi}|f_m(x)-f_n(x)|<\epsilon$$

故对于 $\forall x\in\mathbb{R}$,$(f_n(x))_{n\ge1}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 序列, 故收敛, 记为 $f_n(x)\to f(x)$, 这样就得到了一个函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 容易验证 $f(x)$ 是 2π 周期函数, 且

$$\|f_n-f\|=\max_{0\le x\le 2\pi}|f_n(x)-f(x)|\to 0(n\to\infty)$$

故 $f_n\to f(n\to\infty)$, 所以 H^0 是 Banach 空间, 下面证明 φ 是有界线性算子: 线性性显然, 有界性如下

$$\begin{aligned}\|\varphi(f)\|&=\max_{0\le x\le 2\pi}\left|\frac{1}{\mathrm{e}^{2a\pi}-1}\int_{x}^{x+2\pi}\mathrm{e}^{-a(x-s)}f(s)\,\mathrm{d}s\right|\\&\le\|f\|\cdot\left|\frac{1}{\mathrm{e}^{2a\pi}-1}\int_{x}^{x+2\pi}\mathrm{e}^{-a(x-s)}\,\mathrm{d}s\right|=\frac{1}{a}\|f\|\end{aligned}$$

证毕. □

2.4 初等变换法

1. 求解下列微分方程:

(1)$y' = \dfrac{2y-x}{2x-y}$;

(2)$y' = \dfrac{2y-x+5}{2x-y-4}$;

(3)$y' = \dfrac{x+2y+1}{2x+4y-1}$;

(4)$y' = x^3y^3 - xy$.

解: (1) 令 $u = \frac{y}{x}$, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{2u-1}{2-u}$$

当 $u \neq \pm 1$ 时, 上式化为

$$\frac{2-u}{u^2-1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

积分得 $y - x = C(x+y)^3 (C \neq 0)$, 当 $u = 1$ 时, 特解 $y = x$ 可以令 $C = 0$ 合并到通解之中, 当 $u = -1$ 时特解为 $x + y = 0$.

综上, 原方程的通解为 $y - x = C(x+y)^3 (C \in \mathbb{R})$, 特解为 $x + y = 0$.

(2) 令 $\begin{cases} 2\beta - \alpha + 5 = 0 \\ 2\alpha - \beta - 4 = 0 \end{cases}$, 解得 $\alpha = 1, \beta = -2$, 故作变量代换 $\begin{cases} x = \xi + 1 \\ y = \eta - 2 \end{cases}$, 则原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = \frac{2\eta - \xi}{2\xi - \eta}$$

由 (1) 知上述方程的通解为 $\eta - \xi = C(\xi + \eta)^3 (C \in \mathbb{R})$, 特解为 $\xi + \eta = 0$, 因此原方程的通解为 $y - x + 3 = C(x + y + 1)^3 (C \in \mathbb{R})$, 特解为 $x + y + 1 = 0$.

(3) 令 $v = x + 2y$, 则原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 1 + 2\frac{v+1}{2v-1} = \frac{4v+1}{2v-1}$$

当 $4v + 1 \neq 0$ 时, 上述方程等价于

$$\frac{2v-1}{4v+1}\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$$

积分并代回原变量得通解 $8y - 4x - 3\ln|4x + 8y + 1| = C$, 当 $4v + 1 = 0$ 时, 得特解 $4x + 8y + 1 = 0$.

(4) 此方程为伯努利方程, 当 $y \neq 0$ 时, 在方程两边同时乘以 $-2y^{-3}$, 得

$$-2y^{-3}y' = -2x^3 + 2xy^{-2}$$

令 $u = y^{-2}$, 则上式化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -2y^{-3}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xu - 2x^3$$

解得

$$u(x)=\mathrm{e}^{\int 2x\,\mathrm{d}x}\left(C+\int -2x^3\mathrm{e}^{\int -2x\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right)=C\mathrm{e}^{x^2}+x^2+1$$

代回变量即得原方程的通解为 $y^2=\left(C\mathrm{e}^{x^2}+x^2+1\right)^{-1}$, 另外 $y=0$ 为特解. □

2. 利用适当的变换, 求解下列方程:

(1)$y'=\cos(x-y)$;

(2)$(3uv+v^2)\,\mathrm{d}u+(u^2+uv)\,\mathrm{d}v=0$;

(3)$(x^2+y^2+3)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x\left(2y-\dfrac{x^2}{y}\right)$;

(4)$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2x^3+3xy^2-7x}{3x^2y+2y^3-8y}$.

解: (1) 令 $u=x-y$, 则

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1-\cos u$$

当 $1-\cos u\neq 0$ 即 $x-y\neq 2k\pi(k\in\mathbb{Z})$ 时, 上述方程化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{1-\cos u}=\mathrm{d}x$$

积分并代回原变量得通解为 $\cot\frac{x-y}{2}+x+C=0$, 当 $1-\cos u=0$ 时, 有特解 $y=x+2k\pi(k\in\mathbb{Z})$.

(2) 可以用齐次方程的标准解法求解, 但是也可以用积分因子法, 在方程两边同时乘以 u, 得

$$(3u^2v+uv^2)\,\mathrm{d}u+(u^3+u^2v)\,\mathrm{d}v=0$$

分组得

$$(3u^2v\,\mathrm{d}u+u^3\,\mathrm{d}v)+(uv^2\,\mathrm{d}u+u^2v\,\mathrm{d}v)=\mathrm{d}\left(u^3v+\frac{1}{2}u^2v^2\right)=0$$

故通解为 $u^3v+\frac{1}{2}u^2v^2=C$.

(3) 原方程等价于

$$\frac{2y\,\mathrm{d}y}{2x\,\mathrm{d}x}=\frac{4y^2-2x^2}{x^2+y^2+3}\text{即}\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}=\frac{4y^2-2x^2}{x^2+y^2+3}$$

令 $v=x^2,u=y^2$, 则上述方程化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=\frac{4u-2v}{u+v+3}$$

令 $\begin{cases}4u-2v=0\\ u+v+3=0\end{cases}$, 解得 $u=-1,v=-2$, 故作变换 $\begin{cases}v=\xi-2\\ u=\eta-1\end{cases}$, 则方程化为

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}=\frac{4\eta-2\xi}{\eta+\xi}$$

令 $\beta=\frac{\eta}{\xi}$, 则当 $\beta\neq 1$ 且 $\beta\neq 2$ 时,

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}=\beta+\xi\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\xi}=\frac{4\beta-2}{\beta+1}\Rightarrow\frac{\beta+1}{(\beta-1)(\beta-2)}\,\mathrm{d}\beta=-\frac{1}{\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

积分并代回原变量得 $\left(y^2-2x^2-3\right)^3=C\left(y^2-x^2-1\right)^2(C\neq 0)$.
当 $\beta=1$ 时, 得特解 $y^2=x^2+1$, 当 $\beta=2$ 时, 得特解 $y^2-2x^2-3=0$, 显然这个特解可以合并到通解之中.
综上所述, 原方程的通解为 $\left(y^2-2x^2-3\right)^3=C\left(y^2-x^2-1\right)^2(C\in\mathbb{R})$, 特解为 $y^2=x^2+1$.
(4) 原方程等价于

$$\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}=\frac{2x^2+3y^2-7}{3x^2+2y^2-8}$$

令 $v=x^2,u=y^2$, 则上述方程化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=\frac{3u+2v-7}{2u+3v-8}$$

令 $\begin{cases}v=\xi+2\\ u=\eta+1\end{cases}$, 则

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}=\frac{3\eta+2\xi}{2\eta+3\xi}$$

令 $\beta=\frac{\eta}{\xi}$, 则当 $\beta\neq\pm1$ 时,

$$\beta+\xi\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\xi}=\frac{3\beta+2}{2\beta+3}\Rightarrow\frac{2\beta+3}{\beta^2-1}\,\mathrm{d}\beta=\frac{-2}{\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

积分并代回原变量得 $(y^2-x^2+1)^5=C(x^2+y^2-3)(C\neq 0)$.
当 $\beta=1$ 时, 得特解 $y^2-x^2+1=0$, 显然此特解可合并到通解之中, 当 $\beta=-1$ 时得特解 $x^2+y^2-3=0$. □

3. 求解下列微分方程:
(1)$y'=-y^2-\dfrac{1}{4x^2}$;
(2)$x^2y'=x^2y^2+xy+1$.

解: (1) 这是 Riccati 方程, 由定理 2.3 中的做法, 令 $z=xy$, 则原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{-\frac{1}{4}+z-z^2}{x}=\frac{-\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}{x}$$

当 $z=\frac{1}{2}$ 时得特解 $y=\frac{1}{2x}$, 当 $z\neq\frac{1}{2}$ 时, 上述方程化为

$$\frac{\mathrm{d}z}{-\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

积分得通解为 $y=\frac{1}{2x}+\frac{1}{Cx+x\ln|x|}$.
(2) 这是 Riccati 方程, 容易观察出一个特解为 $y=-\frac{1}{x}$, 令 $y=u-\frac{1}{x}$, 其中 u 是新的未知函数, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x^2}=\left(u-\frac{1}{x}\right)^2+\frac{1}{x}\left(u-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}=u^2-\frac{u}{x}+\frac{1}{x^2}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{u}{x}=u^2$$

这是伯努利方程, 当 $u=0$ 时, 得特解 $xy+1=0$, 当 $u\neq 0$ 时, 在方程两边同时乘以 $-u^{-2}$, 得

$$-u^{-2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\frac{u^{-1}}{x}=-1$$

令 $z=u^{-1}$, 则上述方程化为一阶线性方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{z}{x}=-1$$

解得

$$\begin{aligned} z&=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\left(C+\int -\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right)\\ &=|x|\left(C+\int\frac{-1}{|x|}\,\mathrm{d}x\right)=|x|\left(C-\ \mathrm{sgn}x\cdot\ln|x|\right)=Cx-x\ln|x| \end{aligned}$$

故原方程的通解为 $y=-\frac{1}{x}+\frac{1}{Cx-x\ln|x|}$. □

4. 试把二阶微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

化成一个里卡蒂方程.

解: 令 $y=\mathrm{e}^{\int u\,\mathrm{d}x}$, 即得 Riccati 方程

$$u'+u^2+p(x)u+q(x)=0.$$ □

5. 求一曲线, 使得过这曲线上任意点的切线与该点向径的夹角等于 $\frac{\pi}{4}$.

解: 设曲线方程为 $y=y(x)$, 则

$$\tan\frac{\pi}{4}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{y}{x}}{1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{y}{x}}=1\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y}{x-y}$$

解得 $2\arctan\frac{y}{x}-\ln(x^2+y^2)=C$. □

6. 探照灯的反光镜 (旋转曲面) 应具有何种形状, 才能使点光源发射的光束反射成平行线束.

解: 设所求曲面由曲线 $y = y(x)(y \geq 0)$ 绕 x 轴旋转而成, 并且不妨将点光源置于原点, 且平行光线沿 x 轴正方向射出 (所以下面要保证 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} > 0$), 则由几何关系得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{y}{x} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{1 + \frac{y}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$$

化简为

$$\frac{y}{x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{y}{x} = 0$$

故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}}{\frac{y}{x}} = \frac{-x \pm \operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$$

为了使得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} > 0$, 取

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$$

当 $x > 0$ 时, 上述方程等价于

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}}{\frac{y}{x}}$$

令 $u = \frac{y}{x}$, 则

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{-1 + \sqrt{1 + u^2}}{u} \Rightarrow \frac{u}{1 + u^2 - \sqrt{1 + u^2}}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

积分并代回原变量得通解 $y^2 = C(2x + C)(C > 0, x > 0)$.
当 $x < 0$ 时, 上述方程等价于

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-1 - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}}{\frac{y}{x}}$$

令 $u = \frac{y}{x}$, 则

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{-1 - \sqrt{1 + u^2}}{u} \Rightarrow \frac{u}{1 + u^2 + \sqrt{1 + u^2}}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

积分并代回原变量得通解 $y^2 = C(2x + C)(C > 0, -C/2 \leq x < 0)$.
综上, 原方程的通解为 $y^2 = C(2x + C)(C > 0, x \geq -C/2)$, 因此旋转曲面的方程为 $y^2 + z^2 = C(2x + C)(C > 0)$, 由此可知该曲面是一个旋转抛物面. □

2.5 积分因子法 (Integrating Factor)

1. 求解下列微分方程:

(1)$(3x^2y + 2xy + y^3)\,\mathrm{d}x + (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y = 0$;

(2)$y\,\mathrm{d}x+(2xy-\mathrm{e}^{-2y})\,\mathrm{d}y=0$;
(3)$\left(3x+\dfrac{6}{y}\right)\,\mathrm{d}x+\left(\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{3y}{x}\right)\,\mathrm{d}y=0$;
(4)$y\,\mathrm{d}x-(x^2+y^2+x)\,\mathrm{d}y=0$;
(5)$2xy^3\,\mathrm{d}x+(x^2y^2-1)\,\mathrm{d}y=0$;
(6)$y(1+xy)\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y=0$;
(7)$y^3\,\mathrm{d}x+2(x^2-xy^2)\,\mathrm{d}y=0$;
(8)$\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cot y+2y\cos y)\,\mathrm{d}y=0$.

解: (1) 因为 $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=3$, 故取积分因子 $\mu(x)=\mathrm{e}^{3x}$, 得全微分方程:

$$\mathrm{e}^{3x}(3x^2y+2xy+y^3)\,\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{3x}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y=0$$

即

$$\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{3x}x^2y+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}y^3\right)=0$$

故通解为 $\mathrm{e}^{3x}(3x^2y+y^3)=C$.
(2) 因为 $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=2-\frac{1}{y}$, 故取积分因子 $\mu(y)=\frac{\mathrm{e}^{2y}}{y}$, 得全微分方程:

$$\mathrm{e}^{2y}\,\mathrm{d}x+\left(2x\mathrm{e}^{2y}-\frac{1}{y}\right)\,\mathrm{d}y=0$$

即

$$\mathrm{d}\left(x\mathrm{e}^{2y}-\ln|y|\right)=0$$

故通解为 $x\mathrm{e}^{2y}-\ln|y|=C$, 另外特解为 $y=0$.
(3) 在方程两边同时乘以 xy, 得

$$3x^2y\,\mathrm{d}x+6x\,\mathrm{d}x+x^3\,\mathrm{d}y+3y^2\,\mathrm{d}y=0$$

即

$$\mathrm{d}(x^3y+y^3+3x^2)=0$$

故通解为 $x^3y+y^3+3x^2=C$.
(4) 在方程两边同时乘以 $\frac{1}{x^2+y^2}$, 得

$$\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}-\,\mathrm{d}y=\,\mathrm{d}\left(-\arctan\frac{y}{x}-y\right)=0$$

故通积分为 $\arctan\frac{y}{x}+y=C$(或者写成$\arctan\frac{x}{y}-y=C$), 另有特解 $y=0$.
(5) 因为 $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=\frac{-2}{y}$, 故取积分因子 $\mu(y)=\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{y}\,\mathrm{d}y}=\frac{1}{y^2}$, 得全微分方程:

$$2xy\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y-\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y=\,\mathrm{d}\left(x^2y+\frac{1}{y}\right)=0$$

故通解为 $x^2y+\frac{1}{y}=C$, 另外有特解 $y=0$.
(6) 因为 $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=\frac{-2}{y}$, 故取积分因子 $\mu(y)=\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{y}\,\mathrm{d}y}=\frac{1}{y^2}$, 得全微分方程:

$$\left(\frac{1}{y}+x\right)\mathrm{d}x-\frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{x}{y}\right)=0$$

故通解为 $\frac{1}{2}x^2+\frac{x}{y}=C$, 另外有特解 $y=0$.
(7) 设方程有积分因子 $\mu=x^my^n$, 则得全微分方程:

$$x^my^{n+3}\,\mathrm{d}x+2(x^{m+2}y^n-x^{m+1}y^{n+2})\,\mathrm{d}y=0$$

于是

$$\frac{\partial\left(x^my^{n+3}\right)}{\partial y}=\frac{\partial\left(2\left(x^{m+2}y^n-x^{m+1}y^{n+2}\right)\right)}{\partial x}$$

即

$$(n+3)x^my^{n+2}=2(m+2)x^{m+1}y^n-2(m+1)x^my^{n+2}$$

比较系数得 $2(m+2)=0, n+3=-2(m+1)$, 解得 $m=-2, n=-1$, 故方程有积分因子 $\mu=\frac{1}{x^2y}$, 因而得全微分方程:

$$\frac{y^2}{x^2}\,\mathrm{d}x+2\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{x}\right)\,\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(\ln y^2-\frac{y^2}{x}\right)=0$$

故通解为 $\ln y^2-\frac{y^2}{x}=C$, 另外有特解 $x=0, y=0$.
注: 对于 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 都是关于 x,y 的多项式的情形, 使用这种方法比较好.
(8) 因为 $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=\cot y$, 故取积分因子 $\mu(y)=\sin y$, 得全微分方程:

$$\mathrm{e}^x\sin y\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y+2y\sin y\cos y)\,\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\sin y+\frac{1}{4}\sin 2y-\frac{1}{2}y\cos 2y\right)=0$$

故通解为 $\mathrm{e}^x\sin y+\frac{1}{4}\sin 2y-\frac{1}{2}y\cos 2y=C$. □

2. 证明方程 $P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0$ 有形如 $\mu=\mu(\varphi(x,y))$ 的积分因子的充要条件是

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q\frac{\partial\varphi}{\partial x}-P\frac{\partial\varphi}{\partial y}}=f(\varphi(x,y))$$

并写出这个积分因子. 然后将结果应用到下述各种情形, 得出存在每一种类型积分因子的充要条件:

(1)$\mu=\mu(x\pm y)$;

(2)$\mu=\mu(x^2+y^2)$;

(3)$\mu=\mu(xy)$;

(4)$\mu=\mu(\frac{y}{x})$;

(5)$\mu=\mu(x^\alpha y^\beta)$.

证明:

$$\begin{aligned}
&\text{有积分因子}\mu=\mu(\varphi(x,y))\\
&\Longleftrightarrow \frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}\\
&\Longleftrightarrow \left(Q\frac{\partial\varphi}{\partial x}-P\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=\varphi(x,y)}=\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mu\\
&\Longleftrightarrow \frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q\frac{\partial\varphi}{\partial x}-P\frac{\partial\varphi}{\partial y}}=\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=\varphi(x,y)}=:f(\varphi(x,y))
\end{aligned}$$

此时有积分因子 $\mu=\mathrm{e}^{\int f(s)\,\mathrm{d}s}|_{s=\varphi(x,y)}$, 于是

(1) 有积分因子 $\mu=\mu(x\pm y)\Longleftrightarrow\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q\mp P}=f(x\pm y)$;

(2) 有积分因子 $\mu=\mu(x^2+y^2)\Longleftrightarrow\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{2xQ-2yP}=f(x^2+y^2)$;

(3) 有积分因子 $\mu=\mu(xy)\Longleftrightarrow\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{yQ-xP}=f(xy)$;

(4) 有积分因子 $\mu=\mu(\frac{y}{x})\Longleftrightarrow\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{-\frac{y}{x^2}Q-\frac{1}{x}P}=f(\frac{y}{x})$;

(5) 有积分因子 $\mu=\mu(x^\alpha y^\beta)\Longleftrightarrow\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{\frac{\alpha}{x}Q-\frac{\beta}{y}P}=f(x^\alpha y^\beta)$. □

3. 证明齐次方程 $P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0$ 有积分因子 $\mu=\frac{1}{xP+yQ}$.

证明: (证法 1): 设 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 是 m 次齐次函数, 即

$$P(tx,ty)=t^mP(x,y),Q(tx,ty)=t^mQ(x,y)$$

两边对 t 求导并取 $t=1$, 得

$$x\frac{\partial P}{\partial x}+y\frac{\partial P}{\partial y}=mP,x\frac{\partial Q}{\partial x}+y\frac{\partial Q}{\partial y}=mQ$$

为了证明 $\frac{1}{xP+yQ}$ 是齐次方程的积分因子, 只需要证明

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{xP+yQ}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{xP+yQ}\right).$$

通过计算可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{xP+yQ}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{xP+yQ}\right)\\
=&\frac{\frac{\partial P}{\partial y}(xP+yQ)-P\left(x\frac{\partial P}{\partial y}+Q+y\frac{\partial Q}{\partial y}\right)}{(xP+yQ)^2}\\
&-\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}(xP+yQ)-Q\left(P+x\frac{\partial P}{\partial x}+y\frac{\partial Q}{\partial x}\right)}{(xP+yQ)^2}\\
=&\frac{1}{(xP+yQ)^2}\left[Q\left(x\frac{\partial P}{\partial x}+y\frac{\partial P}{\partial y}\right)-P\left(y\frac{\partial Q}{\partial y}+x\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right]\\
=&\frac{1}{(xP+yQ)^2}(mQP-mPQ)=0.
\end{aligned}
$$

故 $\mu=\frac{1}{xP+yQ}$ 是积分因子.
(证法 2) 设 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 是 m 次齐次函数, 即

$$P(tx,ty)=t^mP(x,y),Q(tx,ty)=t^mQ(x,y)$$

令 $y=ux$, 则 $\mathrm{d}y=u\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}u$, 于是方程变为

$$
\begin{aligned}
&P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y\\
=&P(x,ux)\,\mathrm{d}x+Q(x,ux)(u\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}u)\\
=&x^m\left[P(1,u)+uQ(1,u)\right]\,\mathrm{d}x+x^{m+1}Q(1,u)\,\mathrm{d}u=0
\end{aligned}
$$

上式为变量分离的方程, 有积分因子

$$\mu=\frac{1}{x^{m+1}[P(1,u)+uQ(1,u)]}$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代回, 即得原方程有积分因子 $\mu=\frac{1}{xP+yQ}$. □

4. 证明定理 2.6 及其逆定理: 在定理 2.6 的假定下, 若 μ_1 是微分方程 $P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0$ 的另一个积分因子, 则 μ_1 必可表为 $\mu_1=\mu g(\Phi)$ 的形式, 其中函数 g 和 Φ 的意义与在定理 2.6 中的相同.

证明: 由

$$
\begin{aligned}
&\mu(x,y)g(\Phi(x,y))P(x,y)\,\mathrm{d}x+\mu(x,y)g(\Phi(x,y))Q(x,y)\,\mathrm{d}y\\
=&g(\Phi(x,y))\,\mathrm{d}\Phi(x,y)=\mathrm{d}G(\Phi(x,y))
\end{aligned}
$$

即证, 其中 $G(s)=\int g(s)\,\mathrm{d}s$. 下面证明其逆定理:
设

$$\mu_1P(x,y)\,\mathrm{d}x+\mu_1Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\mathrm{d}\Psi$$

因为

$$\frac{D[\varPhi,\varPsi]}{D[x,y]}=\begin{vmatrix}\mu P & \mu Q\\ \mu_1 P & \mu_1 Q\end{vmatrix}=0$$

所以 $\varPhi$ 和 $\varPsi$ 函数相关, 故

$$\frac{\mu_1}{\mu}=\frac{\mathrm{d}\varPsi}{\mathrm{d}\varPhi}$$

可以表示为 $\varPhi$ 的函数. □

5. 设函数 $P(x,y),Q(x,y),\mu_1(x,y)$ 和 $\mu_2(x,y)$ 都是连续可微的,μ_1 和 μ_2 是微分方程

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0$$

的两个积分因子, 而且 $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ 不恒为常数. 试证:$\frac{\mu_1(x,y)}{\mu_2(x,y)}=C$ 是方程 $P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0$ 的一个通积分.

证明: 先证明一个引理: 设 $P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0$ 是恰当方程, 且 $\mu(x,y)\neq C$ 为其积分因子, 则 $\mu(x,y)=C$ 是其一个通解. 理由如下:
因为 $\mu(x,y)$ 为其积分因子, 所以

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$$

即

$$P\frac{\partial\mu}{\partial y}+\mu\frac{\partial P}{\partial y}=Q\frac{\partial\mu}{\partial x}+\mu\frac{\partial Q}{\partial x}$$

又因为 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, 故

$$P\frac{\partial\mu}{\partial y}=Q\frac{\partial\mu}{\partial x}$$

在原方程两边同时乘以 $\frac{\partial\mu}{\partial y}$, 得

$$P\frac{\partial\mu}{\partial y}\,\mathrm{d}x+Q\frac{\partial\mu}{\partial y}\,\mathrm{d}y=Q\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial\mu}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)=Q\,\mathrm{d}\mu=0\Rightarrow\mu(x,y)=C$$

故 $\mu(x,y)=C$ 是其一个通解, 引理证毕. 下证本题定理:
因为 μ_1,μ_2 是 $P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0$ 两个积分因子, 故 $\mu_1P(x,y)\,\mathrm{d}x+\mu_1Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0$ 为恰当方程, 且 $\frac{\mu_2}{\mu_1}\neq C$ 为其积分因子, 故由引理结论知 $\frac{\mu_1(x,y)}{\mu_2(x,y)}=C$ 是方程 $P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0$ 的一个通积分. □

2.6 应用举例

1. 求下列各曲线族的正交轨线族:

(1)$x^2+y^2=Cx$;

(2)$xy=C$;

(3)$y^2=ax^3$;

(4)$x^2+C^2y^2=1$.

解: (1) 联立 $x^2+y^2=Cx$ 与 $(2x-C)\,\mathrm{d}x+2y\,\mathrm{d}y=0$, 消去 C 得曲线族满足微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2-x^2}{2xy}$, 故正交曲线族的微分方程为:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2xy}{x^2-y^2}$$

解得 $x^2+y^2=Ky(K\neq 0)$.

(2) 曲线族 $xy=C$ 满足的微分方程为 $y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y=0$, 故正交曲线族的微分方程为:

$$-x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y=0$$

解得 $x^2-y^2=K$.

(3) 联立 $y^2=ax^3$ 与 $2y\,\mathrm{d}y=3ax^2\,\mathrm{d}x$, 消去 a 得曲线族满足微分方程 $3y\,\mathrm{d}x-2x\,\mathrm{d}y=0$, 故正交曲线族的微分方程为:

$$2x\,\mathrm{d}x+3y\,\mathrm{d}y=0$$

解得 $x^2+\frac{3}{2}y^2=K$.

(4) 联立 $x^2+C^2y^2=1$ 与 $2x\,\mathrm{d}x+2C^2y\,\mathrm{d}y=0$, 消去 C^2 得曲线族满足微分方程 $xy\,\mathrm{d}x-(x^2-1)\,\mathrm{d}y=0$, 故正交曲线族的微分方程为:

$$(x^2-1)\,\mathrm{d}x+xy\,\mathrm{d}y=0$$

解得 $x^2+y^2-\ln x^2=K$, 特解 $x=0$. □

2. 求与下列各曲线族相交成 $\frac{\pi}{4}$ 角的曲线族:

(1)$x-2y=C$;

(2)$xy=C$;

(3)$y=x\ln ax$;

(4)$y^2=4ax$.

解: (1)

$$\tan\frac{\pi}{4}=\frac{y'-y_1'}{1+y'y_1'}=1\Rightarrow y_1'=\frac{y'-1}{y'+1}=\frac{1}{2}\Rightarrow y'=3$$

积分得等角轨线族为 $y = 3x + K$.

(2)$xy = C$ 满足的微分方程为 $y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0$, 故

$$y_1' = \frac{y'-1}{y'+1} = -\frac{y}{x} \Rightarrow (x-y)\,\mathrm{d}x - (x+y)\,\mathrm{d}y = 0$$

积分得等角轨线族为 $x^2 - y^2 - 2xy = K$.

(3) 联立 $y = x\ln ax$ 与 $\mathrm{d}y = (\ln ax+1)\,\mathrm{d}x$ 消去 a 得曲线族 $y = x\ln ax$ 满足微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}+1$, 故

$$y_1' = \frac{y'-1}{y'+1} = \frac{x+y}{x} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-2x}{y} - 1$$

积分得等角轨线族为 $\ln(y^2 + xy + 2x^2) - \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\frac{2y+x}{\sqrt{7}x} = K$.

(4)$y^2 = 4ax$ 满足的微分方程为 $y\,\mathrm{d}x - 2x\,\mathrm{d}y = 0$, 故

$$y_1' = \frac{y'-1}{y'+1} = \frac{y}{2x} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x+y}{2x-y}$$

积分得等角轨线族为 $\ln(y^2 - xy + 2x^2) - \frac{6}{\sqrt{7}}\arctan\frac{2y-x}{\sqrt{7}x} = K$. □

3. 给定双曲线族 $x^2 - y^2 = C$(其中 C 是任意常数). 设有一个动点 P 在平面 (x, y) 上移动, 它的轨迹与和它相交的每条双曲线均成 $\frac{\pi}{6}$ 角, 又设此动点从 $P_0(0, 1)$ 出发, 求出动点的轨迹.

解: 双曲线族 $x^2-y^2 = C$ 满足的微分方程为 $x\,\mathrm{d}x-y\,\mathrm{d}y = 0$, 设动点的轨迹方程为 $y = y(x)$, 则

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{y' - y_1'}{1 + y'y_1'}$$

从上式解得

$$y_1' = \frac{\sqrt{3}y' - 1}{y' + \sqrt{3}} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{3}x + y}{\sqrt{3}y - x}$$

令 $u = \frac{y}{x}$, 则

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{3} + u}{\sqrt{3}u - 1} \Rightarrow \left(\frac{\frac{1}{2}}{u - \sqrt{3}} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}u + 1}\right)\mathrm{d}u = -\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

积分得 $\sqrt{3}y^2 - 2xy - \sqrt{3}x^2 = C \neq 0$, 带入初值 $P_0(0, 1)$ 得 $C = \sqrt{3}$, 故动点轨迹方程为 $\sqrt{3}(x^2 - y^2 + 1) + 2xy = 0$. □

*4. **追线**: 设在 Oxy 平面上, 有某物 P 从原点 O 出发, 以常速 $a > 0$ 沿 x 轴的正方向运动. 同时又有某物 Q 以常速 b 从点 $(0, 1)$ 出发追赶 P. 设 $b > a$, 且 Q 的运动方向永远指向 P. 试求 Q 的运动轨迹与追上 P 的时间.

解: 设点 Q 的运动轨迹方程为 $y=y(x)$, 记某时刻 Q 的坐标为 $(x,y(x))$, 则相应地点 P 的坐标为 $\left(x-\frac{y(x)}{y'(x)},0\right)$, 由时间关系得

$$\frac{\int_0^x \sqrt{1+(y'(t))^2}\,\mathrm{d}t}{b}=\frac{x-\frac{y(x)}{y'(x)}}{a}$$

将上式对 x 求导得

$$\frac{1}{b}\sqrt{1+(y'(x))^2}=\frac{1}{a}\left(1-\frac{(y'(x))^2-y(x)y''(x)}{(y'(x))^2}\right)=\frac{y(x)y''(x)}{a(y'(x))^2}$$

即

$$\frac{a}{b}\sqrt{1+(y')^2}=\frac{yy''}{(y')^2}$$

令 $p=y'$, 则 $y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 从而上式化为

$$\frac{a}{b}\sqrt{1+p^2}=\frac{yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}}{p^2}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}p}{p\sqrt{1+p^2}}=\frac{a}{b}\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

注意到 $p<0$, 故

$$\frac{a}{b}\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{-\frac{1}{p^2}\,\mathrm{d}p}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{p}\right)^2}}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{p}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{p}\right)^2}}$$

积分得

$$\ln\left(\frac{1}{p}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{p}\right)^2}\right)=\frac{a}{b}(\ln y+\ln C)$$

因此

$$\frac{1}{p}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{p}\right)^2}=(Cy)^{\frac{a}{b}}$$

当 $y=1$ 时,$\frac{1}{p}=0$, 故代入初值条件得 $C=1$, 故

$$\frac{1}{p}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{p}\right)^2}=y^{\frac{a}{b}}$$

取倒数得

$$-\frac{1}{p}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{p}\right)^2}=y^{-\frac{a}{b}}$$

两式相减可得变量分离的方程

$$\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(y^{\frac{a}{b}}-y^{-\frac{a}{b}}\right)\mathrm{d}y$$

积分得

$$x = \frac{b}{2(a+b)} y^{\frac{a+b}{b}} - \frac{b}{2(b-a)} y^{\frac{b-a}{b}} + C_1$$

代入初值条件 $(x, y) = (0, 1)$ 得 $C_1 = \frac{ab}{b^2-a^2}$, 故点 Q 的运动轨迹为

$$x = \frac{b}{2(a+b)} y^{\frac{a+b}{b}} - \frac{b}{2(b-a)} y^{\frac{b-a}{b}} + \frac{ab}{b^2-a^2}$$

当 Q 追上 P 时, 重合点的横坐标为 $x_1 = \frac{ab}{b^2-a^2}$, 故时间为 $t = \frac{x_1}{a} = \frac{b}{b^2-a^2}$. □

我们可以在本题的基础上讨论更一般的问题: 在正 n 边形的每个顶点上分别有一个物体, 按逆时针方向每一个物体都以不变的速度 v 跟踪与它相邻的物体, 那么如何求每个物体的运动轨迹.

以 $n = 4$ 为例, 设 $t = 0$ 时四个物体 A, B, C 和 D 分别在二维平面上的 $(1, 1), (-1, 1), (-1, -1)$ 和 $(1, -1)$ 处, 从此刻开始 A, B, C, D 分别以不变的速度 v 追赶 B, C, D, A. 求物体 A 的运动轨迹.

解: 设 A 的轨迹方程为 $y = y(x)$, 记某时刻 A 的坐标为 $(x, y(x))$, 则此时 B 的坐标为 $(-y(x), x)$, 由于 A 的运动方向指向 B, 故

$$y'(x) = \frac{y(x) - x}{x + y(x)}$$

此为齐次方程容易解得

$$2 \arctan \frac{y}{x} + \ln\left(x^2 + y^2\right) = \frac{\pi}{2} + \ln 2$$ □

5. **逃逸速度**: 假设地球的半径为 $R = 6437\,\mathrm{km}$, 地面上的重力加速度为 $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$, 又设质量为 M 的火箭在地面以初速 v_0 垂直上升. 假设不计空气阻力和其他任何星球的引力. 试求火箭的逃逸速度, 即: 使火箭一去不复返的最小初速度 v_0.

解: 逃逸速度又称为第二宇宙速度, 取沿地球径向向外为正方向, 记地球质量为 M_1, 记火箭的速度函数为 $v = v(t)$, 位移函数为 $s = s(t)$, 则由牛顿第二定律知

$$M \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{G M_1 M}{s^2}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{G M_1}{s^2}$$

由黄金代换 $G M_1 = g R^2$ 得

$$-\frac{g R^2}{s^2} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$$

分离变量得

$$v\,\mathrm{d}v = -gR^2\frac{\mathrm{d}s}{s^2}$$

积分并代入初值条件得

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{gR^2}{s} + \left(\frac{1}{2}v_0^2 - gR\right)$$

要使得火箭从地球逃逸, 就必须始终有 $v > 0$, 因此

$$\frac{1}{2}v_0^2 - gR \geq 0 \Rightarrow v_0 \geq \sqrt{2gR} = 11.2\mathrm{km/s}$$ □

6. 设某社会的总人数为 N, 当时流行一种传染病, 得病人数为 x. 设传染病人数的扩大率是与得病人数和未得病人数的乘积成正比. 试讨论传染病人数的发展趋势, 并以此解释对传染病人进行隔离的必要性.

解: 设比例常数为 k, 则依题意得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kx(N-x)$$

上式为变量分离的方程, 容易解得 $x(t) = \frac{CN\mathrm{e}^{kNt}}{1+C\mathrm{e}^{kNt}}$, 当 $t \to +\infty$ 时,$x(t) \to N$, 因此对传染病人进行隔离是有必要的. □

Chapter 3

存在和唯一性定理

3.1 皮卡存在和唯一性定理

1. 利用右端函数的性质讨论下列微分方程满足初值条件 $y(0)=0$ 的解的唯一性问题:
(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=|y|^{\alpha}(\alpha>0)$;
(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\begin{cases}0, & \text{当} y=0,\\ y\ln|y|, & \text{当} y\neq 0.\end{cases}$

解: (1) 显然 $y=0$ 是满足初值条件的解, 当 $0<\alpha<1$ 时, 由下式

$$\int_0^y \frac{\mathrm{d}y}{|y|^{\alpha}}=x$$

确定的函数 $\Phi(x,y)$ 是满足初值条件的解, 且当 $x\neq 0$ 时,$y\neq 0$, 故此时解不唯一.
当 $\alpha\geq 1$ 时, 满足初值条件的解是唯一的, 用反证法, 假设还存在另一解 $y=y(x), y(0)=0$, 则必存在 x_0 和 ϵ 使得 $y(x_0)=0$, 且当 $x_0<x<x_0+\epsilon$ 时,$y(x)\neq 0$, 故

$$\frac{1}{|y(x)|^{\alpha}}\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}=1, x_0<x<x_0+\epsilon$$

因此

$$\int_0^{y(x)}\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{\alpha}}=\int_{x_0}^{x}\frac{1}{|y(x)|^{\alpha}}\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=x-x_0<\infty$$

矛盾, 故满足初值条件的解是唯一的. 综上, 当 $0<\alpha<1$ 时, 解不唯一; 当 $\alpha\geq 1$ 时, 解唯一.
(2) 显然 $y=0$ 是满足初值条件的解, 下面用反证法证明满足初值条件的解是唯一的, 假设还存在另一解 $y=y(x), y(0)=0$, 则必存在 x_0 和 ϵ 使得 $y(x_0)=0$,
且当 $x_0<x<x_0+\epsilon$ 时,$y(x)\neq 0$, 故

$$\frac{1}{y(x)\ln|y(x)|}\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}=1, x_0<x<x_0+\epsilon$$

因此

$$\int_0^{y(x)} \frac{\mathrm{d}y}{y\ln|y|} = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{y(x)\ln|y(x)|} \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = x - x_0 < \infty$$

矛盾, 故满足初值条件的解是唯一的. □

2. 试求初值问题:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + y + 1, y(0) = 0$$

的皮卡序列, 并由此取极限求解.

解: 利用皮卡序列迭代公式

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_n(x))\,\mathrm{d}x$$

知

$$y_1(x) = \int_0^x (x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + x$$

$$y_2(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1\right)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3!} + x^2 + x$$

$$y_3(x) = \int_0^x \left(\frac{x^3}{3!} + x^2 + 2x + 1\right)\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4!} + \frac{x^3}{3} + x^2 + x$$

$$y_4(x) = \int_0^x \left(\frac{x^4}{4!} + \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x + 1\right)\mathrm{d}x = \frac{x^5}{5!} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + x^2 + x$$

观察规律并用归纳法可证得

$$y_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{2x^n}{n!} + \frac{2x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + \frac{2x^2}{2} + x$$

故

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = 2\mathrm{e}^x - x - 2$$

□

*3. 设连续函数 $f(x,y)$ 对 y 是递减的, 则初值问题 (E) 在右侧 (即 $x \geq x_0$) 的解是唯一的.(试问: 在左侧 (即 $x \leq x_0$) 的解是否唯一? 能举一个反例吗?)

证明: (反证法) 假设初值问题有两个解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$, 且存在 $x_1 > x_0$ 使得 $y_1(x_1) \neq y_2(x_1)$, 不妨设 $y_1(x_1) > y_2(x_1)$, 记

$$\bar{x} = \sup\{x_0 \leq x < x_1 : y_1(x) = y_2(x)\}$$

显然有 $x_0 \leq \bar{x} < x_1$, 令 $r(x) = y_1(x) - y_2(x)$, 则 $r(\bar{x}) = 0$ 且当 $\bar{x} < x < x_1$ 时 $r(x) > 0$, 又

$$r'(x) = y_1'(x) - y_2'(x) = f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)) < 0, \bar{x} < x < x_1$$

所以 $r(x) \le 0(\bar{x} < x < x_1)$, 矛盾, 故假设不成立, 即证初值问题在右侧的解是唯一的, 左侧的解不唯一, 例如方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$, 其解为 $y^2 = (-x+C)^3$ 以及特解 $y=0$, 显然过 x 轴上每一点的左侧解不是唯一的.

注: 若 $f(x,y)$ 对 y 是递增的, 同理可以证明初值问题 (E) 在左侧的解是唯一的. □

3.2 佩亚诺存在定理

1. 利用 Ascoli 引理证明: 若一函数序列在有限区间 I 上是一致有界和等度连续的, 则在 I 上它至少有一个一致收敛的子序列.

证明: 若 $I=[a,b]$ 是有界闭区间, 则即为 Ascoli 定理, 下面假设函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在有界开区间 (a,b) 上是一致有界和等度连续的, 即假设:

(i) (一致有界) 存在正常数 $M>0$, 使得

$$|f_n(x)| \le M, \forall x \in (a,b), \forall n = 1,2,\cdots$$

(ii) (等度连续)$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$, 使得 $\forall x_1, x_2 \in (a,b), |x_1 - x_2| < \delta$, 有

$$|f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \epsilon, \forall n = 1,2,\cdots$$

由 Cauchy 收敛原理:

$$\lim_{x\to a+} f_n(x)\text{存在} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in \{x|0 < x - a < \delta\}, |f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \epsilon$$

结合 $\{f_n(x)\}$ 等度连续知对于每一个 n, 单侧极限 $\lim\limits_{x\to a+} f_n(x)$ 存在, 同理单侧极限 $\lim\limits_{x\to b-} f_n(x)$ 存在. 定义函数序列

$$F_n(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to a+} f_n(x), & x = a, \\ f_n(x), & x \in (a,b), n = 1,2,\cdots \\ \lim\limits_{x\to b-} f_n(x), & x = b. \end{cases}$$

则 $\{F_n(x)\}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致有界且等度连续, 因此其在区间 $[a,b]$ 上至少有一个一致收敛的子序列, 由此可知 $\{f_n(x)\}$ 在 (a,b) 上至少有一个一致收敛的子序列. □

2. 试举例说明, 当 I 是无限区间时上面的结论不成立.

解: 取定义在 $[0,+\infty)$ 上的函数序列

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{n}, & 0 \le x \le n, \\ 1, & x > n. \end{cases}$$

容易验证 $\{f_n(x)\}$ 是一致有界且等度连续的, 下面证明 $\{f_n(x)\}$ 没有一致收敛的子序列 $\{f_{n_k}(x)\}$, 首先若 $\{f_{n_k}(x)\}$ 一致收敛, 则必收敛到 0, 但是

$$\lim_{k\to\infty} d(f_{n_k},0)=\lim_{k\to\infty}\sup_{x\in[0,+\infty)}|f_{n_k}(x)-0|=1\neq 0$$

矛盾, 故 $\{f_n(x)\}$ 没有一致收敛的子序列. □

3. 我们知道: 皮卡序列满足 Ascoli 引理的条件. 试问: 能用皮卡序列来证明佩亚诺的存在定理吗? 说明理由.

解: 不能. 因为在定义皮卡序列的积分式中:

$$y_{n+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_n(x))\,\mathrm{d}x$$

$y_{n+1}(x)$ 通过 $y_n(x)$ 表示出来, 一旦限制在子序列上, 这种表示法就失效了. □

4. 对于与初值问题 (E) 等价的积分方程

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y(x))\,\mathrm{d}x$$

在区间 $I=[x_0,x_0+h]$ 上 (其中正数 h 的意义同定理 3.3) 构造序列 $y_n(x)$ 如下: 任给正整数 n, 令 $x_k=x_0+kd_n$, 其中 $d_n=h/n, k=0,1,\cdots,n$. 则分点

$$x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n(=x_0+h)$$

把区间 I 分成 n 等份. 从 $[x_0,x_1]$ 到 $[x_1,x_2]$, 再从 $[x_1,x_2]$ 到 $[x_2,x_3],\cdots$, 最后从 $[x_{n-2},x_{n-1}]$ 到 $[x_{n-1},x_0+h]$ 用递推法定义下面的函数:

$$y_n(x)=\begin{cases} y_0, & x\in[x_0,x_1];\\ y_0+\int_{x_0}^{x-d_n} f(s,y_n(s))\,\mathrm{d}s, & x\in[x_1,x_0+h].\end{cases}$$

称序列 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x),\cdots(x\in I)$ 为 Tonelli 序列, 试用 Tonelli 序列和 Ascoli 引理证明佩亚诺存在定理.

证明: 由定义式可知 $y_n(x)$ 是如下递推得到的:
当 $x\in[x_0,x_1]$ 时

$$y_n(x)=y_0$$

当 $x\in[x_1,x_2]$ 时

$$y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x-d_n} f(s,y_n(s))\,\mathrm{d}s=y_0+\int_{x_0}^{x-d_n} f(s,y_0)\,\mathrm{d}s$$

当 $x \in [x_2, x_3]$ 时

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x-d_n} f(s, y_n(s))\,\mathrm{d}s = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(s, y_0)\,\mathrm{d}s + \int_{x_1}^{x-d_n} f(s, y_n(s))\,\mathrm{d}s$$

(其中上式中最右侧积分式里的 $y_n(s)$ 为当 $x \in [x_1, x_2]$ 时已经得到的 $y_n(x)$)
这样不断地递推下去, 即可得到 $y_n(x)$ 在区间 $[x_0, x_0 + h]$ 上面的表达式, 容易验证 $\{y_n(x)\}$ 在区间 $[x_0, x_0 + h]$ 上面连续, 且由 $y_n(x) - y_0 = 0, x \in [x_0, x_1]$ 和

$$|y_n(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x-d_n} f(s, y_n(s))\,\mathrm{d}s \right| \leq M(x - d_n - x_0)(x_1 \leq x \leq x_0 + h)$$

知 $\{(x, y_n(x)) | x \in [x_0, x_0 + h]\} \subset R$.
对于 $\forall x, \tilde{x} \in [x_0, x_0 + h]$, 不妨设 $x < \tilde{x}$, 则 $\max\{\tilde{x} - d_n, x_0\} \geq \max\{x - d_n, x_0\}$, 由定义知

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{\max\{x-d_n, x_0\}} f(s, y_n(s))\,\mathrm{d}s$$

$$y_n(\tilde{x}) = y_0 + \int_{x_0}^{\max\{\tilde{x}-d_n, x_0\}} f(s, y_n(s))\,\mathrm{d}s$$

故

$$\begin{aligned} |y_n(\tilde{x}) - y_n(x)| &= \left| \int_{\max\{x-d_n, x_0\}}^{\max\{\tilde{x}-d_n, x_0\}} f(s, y_n(s))\,\mathrm{d}s \right| \\ &\leq M(\max\{\tilde{x} - d_n, x_0\} - \max\{x - d_n, x_0\}) \leq M(\tilde{x} - x) \end{aligned}$$

因此 $\{y_n(x)\}$ 在区间 $[x_0, x_0 + h]$ 上等度连续, 由 Ascoli 定理知 $\{y_n(x)\}$ 有一致收敛的子序列 $\{y_{n_k}(x)\}$ 且 $y_{n_k}(x) \rightrightarrows \phi(x)$, 在下面定义式中

$$y_{n_k}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{\max\left\{x-d_{n_k}, x_0\right\}} f(s, y_{n_k}(s))\,\mathrm{d}s$$

取极限 $k \to \infty$, 注意到 $\max\{x - d_{n_k}, x_0\} \to x$, 即得

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \phi(s))\,\mathrm{d}s$$

故 $\phi(x)$ 是初值问题 (E) 的一个解. □

5. 题目有问题, 跳过此题.

3.3 解的延伸

1. 利用定理 3.5 证明: 线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=a(x)y+b(x)(x\in I)$$

的每一个解 $y=y(x)$ 的 (最大) 存在区间为 I, 这里假设 $a(x)$ 和 $b(x)$ 在区间 I 上是连续的.

证明: 显然

$$|a(x)y+b(x)|\leq|a(x)||y|+|b(x)|$$

令 $A(x)=|a(x)|\geq 0, B(x)=|b(x)|\geq 0$, 则 $A(x)$ 和 $B(x)$ 都是 I 上的连续函数, 由定理 3.5 知每一个解的最大存在区间为 I. □

2. 讨论下列微分方程解的存在区间:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x^2+y^2}$;

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y(y-1)$;

(3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\sin(xy)$;

(4) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+y^2$.

解: (1) 因为 $\frac{1}{x^2+y^2}$ 在区域 $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ 上连续, 故由解的延伸定理知任意积分曲线必延伸到 $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ 的边界. 设 $y=y(x), x\in J$ 为一个饱和解, 则

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x^2+y^2(x)}>0$$

故存在反函数 $x=x(y)$, 且 $x(y)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}x(y)}{\mathrm{d}y}=x^2(y)+y^2$$

由教材例 1 知 $x=x(y)$ 的存在区间有限, 不妨记为 (c,d), 则当 $y\to c+$ 或 $y\to d-$ 时,$x(y)\to\infty$, 也就说明 $y(x)$ 有界, 故其存在区间为 $(-\infty,+\infty)$ 或 $(-\infty,0)$ 或 $(0,+\infty)$.

注: 对照教材例 1 可以证明一般结论: 微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=af(x)+by^2(f(x)\uparrow>0,ab>0)$$

任一解的存在区间都是有界的.

(2) 这是变量分离的方程, 容易解得方程的通解为 $y(x)=\dfrac{1}{1-C\mathrm{e}^x}(C\in\mathbb{R})$, 另外有特解 $y=0$.

当 $C<0$ 时,$0<y(x)<1$ 且 $y(x)$ 单调减, 当 $x\to-\infty$ 时,$y(x)\to 1$, 当 $x\to+\infty$ 时,$y(x)\to 0$;

当 $C=0$ 时,$y(x)=1$;

当 $C>0$ 时, 分母有零点 $x_c=-\ln C$, 当 $x\in(-\infty,x_c)$ 时,$y(x)>0$ 单调增,$x\to-\infty$ 时,$y(x)\to 1$,$x\to x_c$ 时,$y(x)\to+\infty$; 当 $x\in(x_c,+\infty)$ 时,$y(x)<0$ 单调增,$x\to x_c$ 时,$y(x)\to-\infty$,$x\to+\infty$ 时,$y(x)\to 0$.
综上, 解的存在区间为 $(-\infty,+\infty)$ 或 $(-\infty,-\ln C)$ 或 $(-\ln C,+\infty)$.
(3) 因为 $y\sin(xy)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, 且 $|y\sin(xy)|\le|y|$, 故由定理 3.5 知解的存在区间为 $(-\infty,+\infty)$.
(4) 原方程的解为 $x=\arctan y+C$, 故解的存在区间为 $(C-\frac{\pi}{2},C+\frac{\pi}{2})$. □

3. 考虑对称形式的微分方程 $x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y=0$, 它的定义域为 $G=\{(x,y):x^2+y^2>0\}$. 则单位圆 $(x^2+y^2=1)$ 是一条积分曲线, 它在区域 G 的内部; 它并没有延伸到 G 的边界, 这一点是否与解的延伸定理相矛盾? 为什么?

解: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y}$, 因为 $-\frac{x}{y}$ 在区域 G 上不连续, 故不能运用延伸定理. □

4. 设初值问题

$$(E):\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(y^2-2y-3)\mathrm{e}^{(x+y)^2},y(x_0)=y_0$$

的解的最大存在区间为:$a<x<b$, 其中 (x_0,y_0) 是平面上任一点. 则 $a=-\infty$ 和 $b=\infty$ 中至少有一个成立.

证明: 因为 $f(x,y)=(y^2-2y-3)\mathrm{e}^{(x+y)^2}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, 且对 y 有连续的偏导数, 故经过任一点的积分曲线唯一, 显然 $y=3$ 和 $y=-1$ 是两个特解, 其他积分曲线不与其二者相交, 故:
(1)$y_0<-1$ 时,$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}>0$, 故解 $y=y(x)$ 严格单调增, 但不能与 $y=-1$ 相交, 故必有 $b=+\infty$.
(2)$-1<y_0<3$ 时,$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}<0$, 故解 $y=y(x)$ 严格单调减, 但不能与 $y=-1$ 和 $y=3$ 相交, 故必有 $a=-\infty,b=+\infty$.
(3)$y_0>3$ 时,$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}>0$, 故解 $y=y(x)$ 严格单调增, 但不能与 $y=3$ 相交, 故必有 $a=-\infty$.
(4)$y_0=-1$ 或 $y_0=3$ 时, 显然 $a=-\infty,b=+\infty$. □

5. 设初值问题

$$(E):\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x^2-y^2)f(x,y),y(x_0)=y_0$$

其中函数 $f(x,y)$ 在全平面连续且满足 $yf(x,y)>0,$当$y\neq 0$. 则对于任意的 (x_0,y_0), 当 $x_0<0$ 和 $|y_0|$ 适当小时 (E) 的解可延拓到 $-\infty<x<+\infty$.

证明: 显然 $y=\pm x$ 是线素场的水平等斜线, 由 $f(x,y)$ 连续以及 $yf(x,y)>0,$当$y\neq 0$ 可知 $f(x,0)=0$, 故 $y=0$ 为方程的特解. 当 $x_0<0$ 且 $|y_0|<|x_0|$ 时 (以 $y_0>0$ 为例), 解 $y=y(x)$ 在区域 $\{(x,y)|0\le y<-x,x<0\}$ 单调增加, 故可向左延伸至 $-\infty$, 向右穿过 $y=-x$ 后单调减, 必与 $y=x$ 相交, 穿过直线 $y=x$ 后单调增加且不能再次穿过 $y=x$, 故可向右延拓至 $+\infty$. □

3.4 比较定理及其应用

1. 设初值问题 (E), 矩形区域 R, 和正数 h 的意义同定理 3.1. 试证在 (E) 的最小解 $y=W(x)$ 和最大解 $y=Z(x)$ 之间充满了 (E) 的其它解, 即任取一点 (x_1,y_1), 其中

$$|x_1-x_0|\le h, W(x_1)\le y_1\le Z(x_1),$$

则 (E) 在 $|x-x_0|\le h$ 上至少有一个解 $y=u(x)$ 满足:$u(x_1)=y_1$.

证明: 为证明简单以 $x_1\in(x_0,x_0+h]$ 为例, 由解的延伸定理知初值问题:

$$(E_1):\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y),y(x_1)=y_1$$

的解 $y=\phi(x)$ 必与 $y=W(x)$ 或 $y=Z(x)$ 相交, 不妨设与 $y=W(x)$ 相交于点 $(\xi,W(\xi))$ 且两曲线在交点处相切, 令

$$u(x)=\begin{cases}W(x), & x_0-h\le x\le\xi\\ \phi(x), & \xi<x\le x_0+h\end{cases}$$

则 $y=u(x)$ 为 (E) 的解且满足 $u(x_1)=y_1$. □

2. 证明 (第二比较定理) 设函数 $f(x,y)$ 与 $F(x,y)$ 都在平面区域 G 内连续且满足

$$f(x,y)\le F(x,y),(x,y)\in G;$$

又设函数 $y=\phi(x)$ 与 $y=\varPhi(x)$ 在区间 $a<x<b$ 上分别是初值问题

$$(E_1):\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y),y(x_0)=y_0$$

与

$$(E_2):\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=F(x,y),y(x_0)=y_0$$

的解 $[(x_0,y_0)\in G]$, 并且 $y=\phi(x)$ 是 (E_1) 的右行最小解和左行最大解 (或者: $y=\varPhi(x)$ 是 (E_2) 的右行最大解和左行最小解), 则有如下比较关系:

$$\phi(x)\le\varPhi(x),x_0\le x<b;$$

$$\phi(x)\ge\varPhi(x),a<x\le x_0.$$

证明: 不妨设 $\varPhi(x)$ 是最大右行解和最小左行解, 为证当 $x_0\le x<b$ 时, $\phi(x)\le\varPhi(x)$, 只需证明 $\forall c\in(x_0,b)$, 有

$$\phi(x)\le\varPhi(x),x\in[x_0,c]$$

考虑初值问题

$$(E_n^*): \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(x,y) + \frac{1}{n}, y(x_0) = y_0, n = 1, 2, \cdots$$

由 Peano 存在定理和解的延伸定理知 (E_n^*) 在 $[x_0, c]$ 上有解, 取其中一解记为 $\Phi_n(x)$, 由第一比较定理得 $\phi(x) < \Phi_n(x) < \Phi_{n-1}(x), x_0 \le x \le c$, 即

$$\Phi_1(x) > \Phi_2(x) > \cdots > \Phi_n(x) > \cdots > \phi(x), x_0 \le x \le c$$

显然 $\{\Phi_n(x)\}$ 在 $[x_0, c]$ 上一致有界, 且由

$$|\Phi_n(x_1) - \Phi_n(x_2)| \le \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(F(x, \Phi_n(x)) + \frac{1}{n} \right) \mathrm{d}x \right| \le (M+1)|x_1 - x_2|$$

知 $\{\Phi_n(x)\}$ 等度连续, 故其有一致收敛的子列, 不妨设其一致收敛:

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(x) = \Phi_*(x)$$

在下式

$$\Phi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \left(F(x, \Phi_n(x)) + \frac{1}{n} \right) \mathrm{d}x$$

中令 $n \to \infty$, 得

$$\Phi_*(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x, \Phi_*(x))\,\mathrm{d}x$$

故 $\Phi_*(x)$ 是 (E_2) 的解, 因此

$$\phi(x) \le \lim_{n\to\infty} \Phi_n(x) = \Phi_*(x) \le \Phi(x), x_0 \le x \le c$$

同理可证 $\phi(x) \ge \Phi(x), a < x \le x_0$. □

3. 设初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + (y+1)^2, y(0) = 0$$

的解在右侧的最大存在区间为 $[0, \beta)$, 试证:$\frac{\pi}{4} < \beta < 1$.

证明: 首先初值问题的解存在且唯一 (记为 $\phi(x)$) 并可延伸到包含坐标原点的任意区域的边界, 下面分三步证明 $\frac{\pi}{4} < \beta < 1$.

(1) 证明:$\frac{\pi}{4} \le \beta \le 1$.

当 $|x| \le 1$ 时, 显然有

$$(y+1)^2 \le x^2 + (y+1)^2 \le 1 + (y+1)^2$$

□

Chapter 4

奇解

4.1 一阶隐式微分方程

4.1.1 证明与总结

考虑方程: $F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0 \cdots\cdots (*)$
(I)$(*) \Rightarrow y = f(x, p)$, 则

$$p = f'_x(x, p) + f'_p(x, p)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

若解出 $p = u(x, C)$, 则 $y = f(x, u(x, C))$;
若解出 $x = v(p, C)$, 则 $\begin{cases} x = v(p, C) \\ y = f(v(p, C), p) \end{cases}$ (p视作参变量).
(II)$(*)$ 为 $F(y, p) = 0$, 即不显含自变量 ($F(x, p) = 0$ 同理), 设 $y = g(t), p = h(t)$, 则

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\,\mathrm{d}y = \frac{g'(t)}{h(t)}\,\mathrm{d}t \Rightarrow x = \int \frac{g'(t)}{h(t)}\,\mathrm{d}t$$

故通解为 $x = \int \frac{g'(t)}{h(t)}\,\mathrm{d}t, y = g(t)$.
(III) 设 $x = f(u, v), y = g(u, v), p = h(u, v)$, 由 $\mathrm{d}y = p\,\mathrm{d}x$ 若能解出 $v = Q(u, C)$, 则通解为 $x = f(u, Q(u, C)), y = g(u, Q(u, C))$.

4.1.2 习题

1. 求解下列微分方程:
(1)$2y = p^2 + 4px + 2x^2 \left(p = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$;
(2)$y = px\ln x + (xp)^2$;
(3)$2xp = 2\tan y + p^3\cos^2 y$.

证明: (1)$2y=p^2+4px+2x^2(*)\Rightarrow 2p=2p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+4p+4x\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+4x\Rightarrow(p+2x)\left(\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+1\right)=0$, 故

当 $p+2x=0$ 时, 代入 $(*)$ 得特解 $y=-x^2$;

当 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=-1$ 时,$p=-x+C$, 代入 $(*)$ 得通解 $y=-\frac{1}{2}x^2+Cx+\frac{1}{2}C^2$.

(2)$y=px\ln x+(xp)^2(*)\Rightarrow p=x\ln x\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+p(\ln x+1)+2xp\left(p+x\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)\Rightarrow\left(x\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+p\right)(\ln x+2xp)=0$, 故

当 $x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+p=0$ 时, $p=\frac{C}{x}$, 代入 $(*)$ 得通解 $y=C\ln x+C^2$;

当 $\ln x+2xp=0$ 时, $p=-\frac{\ln x}{2x}$, 代入 $(*)$ 得特解 $y=-\frac{1}{4}(\ln x)^2$.

(3) 当 $p=0$ 时得特解 $y=k\pi(k\in\mathbb{Z})$;

当 $p\neq 0$ 时,$2xp=2\tan y+p^3\cos^2 y(*)\Rightarrow x=\dfrac{\tan y}{p}+\dfrac{1}{2}p^2\cos^2 y\Rightarrow\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{p^2}\left(\sec^2 y\cdot p-\tan y\cdot\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right)+p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cos^2 y-p^2\sin y\cos y\Rightarrow\left(\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p\tan y\right)\left(p^3\cos^2 y-\tan y\right)=0$, 故

当 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p\tan y=0$ 时, 解得 $p=\frac{1}{C\cos y}(C\neq 0)$, 代入 $(*)$ 得通解 $x=C\sin y+\frac{1}{2C^2}$;

当 $p^3\cos^2 y-\tan y=0$ 时, $p=\frac{\tan^{\frac{1}{3}}y}{\cos^{\frac{2}{3}}y}$, 代入 $(*)$ 得特解 $x=\frac{3}{2}\sin^{\frac{2}{3}}y$. □

2. 用参数法求解下列微分方程:

(1)$2y^2+5\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=4$;

(2)$x^2-3\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=1$;

(3)$\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+y-x^2=0$;

(4)$x^3+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3=4x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

证明: (1) 令 $y=\sqrt{2}\sin t,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{\sqrt{5}}\cos t$, 则

当 $\mathrm{d}y=0$ 时, 得特解 $y=\pm\sqrt{2}$;

当 $\mathrm{d}y\neq 0$ 时, $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{5}}{2\cos t}\sqrt{2}\cos t\,\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}t\Rightarrow x=\sqrt{\frac{5}{2}}t+C$, 故通解为 $y=\sqrt{2}\sin\left(\sqrt{\frac{2}{5}}(x-C)\right)$.

(2) 令 $x=\sec t,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\sqrt{3}}\tan t$, 则 $\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^2 t\sec t\,\mathrm{d}t\Rightarrow y=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\sec t\tan t-\ln|\sec t+\tan t|)+C$, 故通解为

$$\begin{cases}x=\sec t\\ y=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\sec t\tan t-\ln|\sec t+\tan t|)+C\end{cases}$$

本题也可以利用恒等式:$\cosh^2 t-\sinh^2 t=1$, 得到另外一种通解表达式: $x=\cosh t,y=\frac{1}{4\sqrt{3}}(\sinh 2t-2t)+C$.

(3)$\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+y-x^2=0(*)\Rightarrow 2p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+p-2x=0\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x}{p}-\dfrac{1}{2}$, 令 $u=\frac{p}{x}\neq 0$, 则

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}-\frac{1}{2}\Rightarrow x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{2u^2+u-2}{2u}=0$$

(I) 当 $2u^2+u-2=0$ 即 $u=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$ 时, 若 $u=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$, 则 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}x\Rightarrow y=\frac{-1+\sqrt{17}}{8}x^2+C$, 将 $p=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}x$ 直接代入 $(*)$ 得 $y=\frac{-1+\sqrt{17}}{8}x^2$, 故原方程有特解 $y=\frac{-1+\sqrt{17}}{8}x^2$, 同理可得到另外一个特解 $y=\frac{-1-\sqrt{17}}{8}x^2$;
(II) 当 $2u^2+u-2\neq 0$ 时, $\frac{2u}{2u^2+u-2}\,\mathrm{d}u+\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=0$, 下面对该变量分离的方程进行不定积分:

$$\begin{aligned}
&\int\frac{2u}{2u^2+u-2}\,\mathrm{d}u+\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=0\\
\Rightarrow&\frac{1}{2}\ln|2u^2+u-2|-\frac{1}{2}\int\frac{1}{2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{17}{8}}\,\mathrm{d}u+\ln|x|=C\\
\Rightarrow&\frac{1}{2}\ln|2u^2+u-2|-\frac{1}{4}\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{17}{16}}\,\mathrm{d}u+\ln|x|=C\\
\Rightarrow&\frac{1}{2}\ln|2u^2+u-2|+\frac{1}{2\sqrt{17}}\ln\left|\frac{u+\frac{1+\sqrt{17}}{4}}{u+\frac{1-\sqrt{17}}{4}}\right|+\ln|x|=C\\
\Rightarrow&\frac{\sqrt{17}}{4}\ln|2p^2-2x^2+px|+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{p+\frac{1+\sqrt{17}}{4}x}{p+\frac{1-\sqrt{17}}{4}x}\right|=C_1\left(\text{记}\alpha=\frac{\sqrt{17}-1}{4},\beta=\frac{-\sqrt{17}-1}{4}\right)\\
\Rightarrow&(2(p-\alpha x)(p-\beta x))^{\frac{\sqrt{17}}{4}}\left(\frac{p-\beta x}{p-\alpha x}\right)^{\frac{1}{4}}=C_2\neq 0\\
\Rightarrow&(p-\alpha x)^{\alpha}=C_3(p-\beta x)^{\beta},C_3\neq 0
\end{aligned}$$

综上所述, 原方程有通解 $(p-\alpha x)^{\alpha}=C(p-\beta x)^{\beta}(C\neq 0)$ 以及两个特解 $y_1=\frac{1}{2}\alpha x^2,y_2=\frac{1}{2}\beta x^2$.
(4) 令 $p=tx$, 则 $x^3(1+t^3)=4tx^2\Rightarrow x=\frac{4t}{1+t^3},p=\frac{4t^2}{1+t^3}$, 故

$$\mathrm{d}y=p\,\mathrm{d}x=\frac{4t^2}{1+t^3}\frac{4(1+t^3)-4t\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{4t^2(4-8t^2)}{(1+t^3)^3}\,\mathrm{d}t$$

积分得

$$y=\int\frac{4t^2(4-8t^2)}{(1+t^3)^3}\,\mathrm{d}t=\frac{32}{3}\frac{1}{1+t^3}-\frac{8}{(1+t^3)^2}+C$$

故通解为

$$\begin{cases}x=\frac{4t}{1+t^3}\\ y=\frac{32}{3}\frac{1}{1+t^3}-\frac{8}{(1+t^3)^2}+C\end{cases}$$

□

4.2 奇解

1. 利用 $p-$ 判别式求下列微分方程的奇解:

(1)$y = x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2$;

(2)$y = 2x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2$;

(3)$(y-1)^2\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \dfrac{4}{9}y$;

解: (1) 令 $F(x,y,p) = y - xp - p^2$, 则 p-判别式为 $y - xp - p^2 = 0, -x - 2p = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x^2$, 经验证 $y = -\frac{1}{4}x^2$ 是原方程的解, 又

$$F'_y\left(x, -\frac{1}{4}x^2, -\frac{1}{2}x\right) = 1, F''_{pp}\left(x, -\frac{1}{4}x^2, -\frac{1}{2}x\right) = -2, F'_p\left(x, -\frac{1}{4}x^2, -\frac{1}{2}x\right) = 0$$

故 $y = -\frac{1}{4}x^2$ 是奇解.

(2) 令 $F(x,y,p) = y - 2xp - p^2$, 则 p-判别式为 $y - 2xp - p^2 = 0, -2x - 2p = 0 \Rightarrow y = -x^2$, 但是 $y = -x^2$ 不是原方程的解更不是奇解.

(3) 令 $F(x,y,p) = (y-1)^2p^2 - \frac{4}{9}y$, 则 p-判别式为 $(y-1)^2p^2 - \frac{4}{9}y = 0, 2(y-1)^2p = 0 \Rightarrow y = 0$, 经验证 $y = 0$ 是原方程的解, 又

$$F'_y(x,0,0) = -\frac{4}{9}, F''_{pp}(x,0,0) = 2, F'_p(x,0,0) = 0$$

故 $y = 0$ 是原方程的奇解. □

2. 举例说明, 在定理 4.2 的条件 (4.28) 中的两个不等式是缺一不可的.

解: 分别考虑方程 $\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - y^2 = 0$ 与 $\sin\left(y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = y$. □

3. 研究下面的例子, 说明定理 4.2 的条件 (4.29) 是不可缺少的:

$$y = 2x + y' - \frac{1}{3}(y')^3$$

解: p-判别式为: $y = 2x + p - \frac{1}{3}p^2, 0 = 1 - p^2 \Rightarrow y = 2 \pm \frac{2}{3}$, 经检验 $y = 2x + \frac{2}{3}$ 不是原方程的解, $y = 2x - \frac{2}{3}$ 是原方程的解, 但不是特解.

令 $F(x,y,p) = y - 2x + \frac{1}{3}p^3 - p$, 则

$$F'_y\left(x, 2x - \frac{2}{3}, 2\right) = 1, F''_{pp}\left(x, 2x - \frac{2}{3}, 2\right) = 4, F'_p\left(x, 2x - \frac{2}{3}, 2\right) = 3 \neq 0$$

故条件 $F'_p(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$ 不可缺少. □

4.3 包络

1. 试求克莱罗方程的通解及其包络.

解: 克莱罗方程为: $y = xp + f(p)\left(p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$, 其中 $f''(p) \neq 0$.

$$y = xp + f(p) \Rightarrow (x + f'(p))\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$$

由 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$ 即 $p = C$ 得通解 $y = Cx + f(C)$, C 判别式为

$$\begin{cases} y = Cx + f(C) \\ x + f'(C) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -f'(C) = \varphi(C) \\ y = -Cf'(C) + f(C) = \psi(C) \end{cases} \qquad (*)$$

令 $V(x, y, C) = Cx + f(C) - y$, 则 $V_x'(\varphi(C), \psi(C), C) = C, V_y'(\varphi(C), \psi(C), C) = -1$, 故 $(V_x', V_y') \neq (0, 0)$, 又 $(\varphi'(C), \psi'(C)) = (-f''(C), -Cf''(C)) \neq (0, 0)$, 故 $(*)$ 是曲线族 $y = Cx + f(C)$ 的一支包络. □

2. 试求一微分方程, 使它有奇解为 $y = \sin x$.

解: 考虑克莱罗方程 $y = xp + f(p)$, 将 $y = \sin x$ 代入得

$$\sin x = x\cos x + f(\cos x)$$

令 $\cos x = p$, 得

$$\sqrt{1 - p^2} = p \arccos p + f(p)$$

故

$$f(p) = -p\arccos p + \sqrt{1 - p^2}$$

容易验证 $y = \sin x$ 是方程 $y = xp - p\arccos p + \sqrt{1 - p^2}$ 的奇解. □

Chapter 5

高阶微分方程

5.1 几个例子

1. 利用线性单摆方程测量你所在地的重力常数 g.

解: 利用单摆周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 即得 $g = \frac{4\pi^2}{T^2}l$, 测量摆长以及单摆完成一个周期运动的时间即可得出所在地的重力常数 g. □

2. 如果在非线性单摆方程中取 $\sin x$ 的三次近似, 即

$$\sin x \sim x - \frac{x^3}{6},$$

则有单摆的三次近似方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + a^2\left(x - \frac{x^3}{6}\right) = 0.$$

由此证明单摆振动是不等时的, 而且它的相图说明可以发生进动.

证明: 将方程变形然后两边同时乘以 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 即得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = a^2\left(\frac{x^3}{6} - x\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

积分得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = a\left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{C}{2}$$

设单摆的振幅为 A, 则

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{a^2\left(\frac{x^4}{12} - x^2\right) + C} = \pm\sqrt{a^2\left(\frac{x^4}{12} - x^2\right) - a^2\left(\frac{A^4}{12} - A^2\right)}$$

故周期 T 满足

$$\frac{T}{4}=\int_0^A \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2\left(\frac{x^4}{12}-x^2-\frac{A^4}{12}+A^2\right)}}$$

因此

$$T=\frac{4}{a}\int_0^1 \frac{A\,\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{A^4}{12}(u^4-1)-A^2(u^2-1)}}=\frac{4}{a}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u^2-1)\left(\frac{A^2}{12}(u^2+1)-1\right)}}$$

由于 T 与 A 有关, 故单摆的振动是不等时的. □

3. 在悬链线问题中当 $L=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ 时如何处理?

解: 此时悬链线即为直线段, 其方程为 $y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1(x_1\leq x\leq x_2)$. □

4. 微分方程 (5.20) 表示二体问题的运动方程. 在上面求解过程中, 试适当选择积分常数, 使运动 $(x(t),y(t),z(t))$ 的轨道在一条直线上并且趋向 O 点 (即二体发生碰撞); 或者使轨道是一圆周.

解: (i) 运动 $(x(t),y(t),z(t))$ 的轨道在一条直线上并且趋向 O 点 (即二体发生碰撞) 时, $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=0$, 由 (5.28) 知 $C_3=0$, 再由 (5.27) 知 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-\sqrt{\frac{2\mu}{r}+C_4}$.
(ii) 运动 $(x(t),y(t),z(t))$ 的轨道是一圆周时, $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=0$, 故 $r=r_0$, 由 (5.27) 知 $C_4=\left(r_0\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2-\frac{2\mu}{r_0}$, 又由 (5.28) 知 $r_0^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-C_3$, 故 $C_4=\frac{C_3^2}{r_0^2}-\frac{2\mu}{r_0}$. □

5.2 n 维线性空间中的微分方程

1. 把单摆方程 (5.7), 悬链线方程 (5.15) 和二体运动方程 (5.20) 分别写成标准微分方程组.

解:

(i) 单摆方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+a^2\sin x=0$$

令 $x_1=x,x_2=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, 则标准微分方程组为

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_2\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=-a^2\sin x_1\end{cases}$$

(ii) 悬链线方程

$$y''=a\sqrt{1+(y')^2}$$

令 $y_1=y,y_2=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 则标准微分方程组为

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=y_2\\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}=a\sqrt{1+y_2^2}\end{cases}$$

(iii) 二体运动方程

$$\begin{cases}\ddot{x}=-\frac{Gm_sx}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}\\ \ddot{y}=-\frac{Gm_sy}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}\\ \ddot{x}=-\frac{Gm_sz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}\end{cases}$$

令 $s_1=x,s_2=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},s_3=y,s_4=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},s_5=z,s_6=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$, 则标准微分方程组为

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}t}=s_2\\ \frac{\mathrm{d}s_2}{\mathrm{d}t}=-\frac{Gm_ss_1}{(\sqrt{s_1^2+s_3^2+s_5^2})^3}\\ \frac{\mathrm{d}s_3}{\mathrm{d}t}=s_4\\ \frac{\mathrm{d}s_4}{\mathrm{d}t}=-\frac{Gm_ss_3}{(\sqrt{s_1^2+s_3^2+s_5^2})^3}\\ \frac{\mathrm{d}s_5}{\mathrm{d}t}=s_6\\ \frac{\mathrm{d}s_6}{\mathrm{d}t}=-\frac{Gm_ss_5}{(\sqrt{s_1^2+s_3^2+s_5^2})^3}\end{cases}$$

□

2. 对 n 维向量形式的微分方程, 叙述相应的皮卡存在和唯一性定理以及佩亚诺存在定理, 并写出证明的主要步骤.

解: (Picard 存在和唯一性定理) 设初值问题

$$(E):\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y}_0$$

其中函数 $\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y})$ 在矩阵区域

$$R:|x-x_0|\le a,\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\|\le b$$

内连续, 而且对 $\boldsymbol{y}$ 满足 Lipschitz 条件, 则初值问题 (E) 在区间 $I=[x_0-h,x_0+h]$ 上有且只有一个解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\phi}(x)$, 其中 $h=\min\left\{a,\dfrac{b}{M}\right\},M=\max\limits_{(x,\boldsymbol{y})\in R}\|\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y})\|$

Proof:(一) 初值问题 (E) 等价于积分方程

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_0+\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}x$$

(二) 用逐次迭代法构造皮卡序列

$$\boldsymbol{y}_{n+1}(x)=\boldsymbol{y}_0+\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}_n(x))\,\mathrm{d}x(x\in I)(n=0,1,2,\cdots)$$

其中 $\boldsymbol{y}_0(x)=\boldsymbol{y}_0$, 因为 $\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}_0(x))$ 在 I 上连续, 故

$$\boldsymbol{y}_1(x)=\boldsymbol{y}_0+\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}_0(x))\,\mathrm{d}x$$

在 I 上连续可微, 而且满足不等式

$$\|\boldsymbol{y}_1(x)-\boldsymbol{y}_0\|\le\left|\int_{x_0}^{x}\|\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}_0(x))\|\right|\le M|x-x_0|$$

这就是说在 I 上 $\|\boldsymbol{y}_1(x)-\boldsymbol{y}_0\|\le Mh\le b$.
因此, $\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}_1(x))$ 在 I 上是连续的, 故

$$\boldsymbol{y}_2(x)=\boldsymbol{y}_0+\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}_1(x))\,\mathrm{d}x$$

在 I 上连续可微, 而且满足不等式

$$\|\boldsymbol{y}_2(x)-\boldsymbol{y}_0\|\le\left|\int_{x_0}^{x}\|\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}_1(x))\|\right|\le M|x-x_0|$$

这就是说在 I 上 $\|\boldsymbol{y}_2(x)-\boldsymbol{y}_0\|\le Mh\le b$. 由归纳法可证: Picard 序列 $\{\boldsymbol{y}_n(x)\}$ 在区间 I 上连续可微并且满足不等式

$$\|\boldsymbol{y}_n(x)-\boldsymbol{y}_0\|\le M|x-x_0|(n=0,1,2,\cdots)$$

(三)Picard 序列 $\{\boldsymbol{y}_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛到积分方程的解
$\{\boldsymbol{y}_n(x)\}$ 的收敛性等价于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\boldsymbol{y}_n(x)-\boldsymbol{y}_{n-1}(x)]$$

的收敛性, 利用归纳法证明不等式

$$\|\boldsymbol{y}_n(x)-\boldsymbol{y}_{n-1}(x)\|\le\frac{M}{L}\frac{(L|x-x_0|^n)}{n!}(n=1,2,\cdots)$$

上述不等式意味着级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\boldsymbol{y}_n(x)-\boldsymbol{y}_{n-1}(x)]$ 一致收敛, 故 Picard 序列 $\{\boldsymbol{y}_n(x)\}$ 一致收敛, 因此极限函数

$$\boldsymbol{\phi}(x)=\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{y}_n(x)$$

在 I 上连续, 在关系式

$$\boldsymbol{y}_{n+1}(x)=\boldsymbol{y}_0+\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}_n(x))\,\mathrm{d}x$$

两侧取极限 $n \to \infty$, 得

$$\boldsymbol{\phi}(x) = \boldsymbol{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{\phi}(x))\,\mathrm{d}x$$

故 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\phi}(x)$ 是积分方程的连续解.

(四) 解的唯一性

设积分方程有两个解 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\phi}(x)$ 和 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\psi}(x)$. 设两个解的共同存在区间为 $J = [x_0 - d, x_0 + d]$, 则

$$\boldsymbol{\phi}(x) - \boldsymbol{\psi}(x) = \int_{x_0}^{x} (\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{\phi}(x)) - \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{\psi}(x)))\,\mathrm{d}x (x \in J)$$

故利用李氏条件有

$$\|\boldsymbol{\phi}(x) - \boldsymbol{\psi}(x)\| \le L \left| \int_{x_0}^{x} \|\boldsymbol{\phi}(x) - \boldsymbol{\psi}(x)\|\,\mathrm{d}x \right| (*)$$

注意在区间 J 上, $\|\boldsymbol{\phi}(x) - \boldsymbol{\psi}(x)\|$ 是连续有界的, 故可取其一个上界 K, 则

$$\|\boldsymbol{\phi}(x) - \boldsymbol{\psi}(x)\| \le LK|x - x_0|$$

将其代入 $(*)$ 右端, 有

$$\|\boldsymbol{\phi}(x) - \boldsymbol{\psi}(x)\| \le K \frac{(L|x - x_0|)^2}{2}$$

利用归纳法可得

$$\|\boldsymbol{\phi}(x) - \boldsymbol{\psi}(x)\| \le K \frac{(L|x - x_0|)^n}{n!} (x \in J)$$

令 $n \to \infty$, 即得

$$\boldsymbol{\phi}(x) = \boldsymbol{\psi}(x) (x \in J)$$

故积分方程的解是唯一的. □

(佩亚诺存在定理) 定理的叙述和证明可参考教材.

3. 对 n 阶线性微分方程组的初值问题, 试叙述并证明解的存在和唯一性定理.

解: 设 $\boldsymbol{A}(x)$ 和 $\boldsymbol{f}(x)$ 在区间 $a < x < b$ 上连续, 则初值问题

$$(E) : \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x), \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$$

的解 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(x)$ 在区间 $a < x < b$ 上存在且唯一, 其中 $a < x_0 < b, \boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Proof: 只需要证明 $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x)$ 满足 Lipschitz 条件即可, $\forall \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\|\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}_1) - \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}_2)\| = \|\boldsymbol{A}(x)(\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2)\| \le \|\boldsymbol{A}(x)\| \cdot \|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2\|$$ □

Chapter 6

线性微分方程组

6.1 一般理论

6.1.1 证明与总结

P159 证明: $H(C_1\boldsymbol{y}_1^0+C_2\boldsymbol{y}_2^0)=C_1H(\boldsymbol{y}_1^0)+C_2H(\boldsymbol{y}_2^0)$.

证明: 首先显然 $H(C_1\boldsymbol{y}_1^0+C_2\boldsymbol{y}_2^0)\in\mathcal{S}$, 又由引理 6.1 知 $C_1H(\boldsymbol{y}_1^0)+C_2H(\boldsymbol{y}_2^0)\in\mathcal{S}$. 然后又因为

$$\left(H(C_1\boldsymbol{y}_1^0+C_2\boldsymbol{y}_2^0)\right)(x_0)=C_1\boldsymbol{y}_1^0+C_2\boldsymbol{y}_2^0$$
$$\left(C_1H(\boldsymbol{y}_1^0)+C_2H(\boldsymbol{y}_2^0)\right)(x_0)=C_1\boldsymbol{y}_1^0+C_2\boldsymbol{y}_2^0$$

由解的唯一性知 $H(C_1\boldsymbol{y}_1^0+C_2\boldsymbol{y}_2^0)=C_1H(\boldsymbol{y}_1^0)+C_2H(\boldsymbol{y}_2^0)$.

注意解矩阵的行列式就是其对应的解组的 Wronsky 行列式. □

推论 6.2 的证明:

证明: (1) 记 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{c}_1,\cdots,\boldsymbol{c}_n)$, 则 $\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}_1,\cdots,\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}_n)$, 由 (6.15) 式知 $\forall 1\le i\le n,\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}_i$ 是方程 (6.2) 的解, 也即 $\{\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}_i|1\le i\le n\}$ 为 (6.2) 的解组. 记 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 对应的基本解组的 Wronsky 行列式为 $W(x)$, 则 $\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{C}$ 对应的解组的 Wronsky 行列式为:

$$W_1(x)=|\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}_1\cdots\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}_n|=|\boldsymbol{\Phi}(x)|\cdot|\boldsymbol{C}|=W(x)|\boldsymbol{C}|\neq 0$$

故 $\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{C}$ 也是基解矩阵.
(2)$\boldsymbol{\Phi}(x)$ 和 $\boldsymbol{\Psi}(x)$ 都是基解矩阵, 设 $\boldsymbol{\Phi}(x)=(\boldsymbol{y}_1(x),\cdots,\boldsymbol{y}_n(x)),\boldsymbol{\Psi}(x)=(\boldsymbol{y}_1^*(x),\cdots,\boldsymbol{y}_n^*(x))$. 因为

$\boldsymbol{\Phi}(x)$ 是基解矩阵, 所以 $\boldsymbol{y}_1(x),\cdots,\boldsymbol{y}_n(x)$ 是 (6.2) 的基本解组, 故存在 $\{c_{ij}|1\le i,j\le n\}$ 使得

$$\boldsymbol{y}_i^*(x)=\sum_{j=1}^{n}c_{ji}\boldsymbol{y}_j(x),1\le i\le n$$

即

$$(\boldsymbol{y}_1^*(x),\cdots,\boldsymbol{y}_n^*(x))=(\boldsymbol{y}_1(x),\cdots,\boldsymbol{y}_n(x))\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix}$$

也即

$$\boldsymbol{\Psi}(x)=\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{C}$$

其中 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$, 在上述等式两边同时取行列式得 $|\boldsymbol{\Psi}|=|\boldsymbol{\Phi}|\cdot|\boldsymbol{C}|$, 由 $|\boldsymbol{\Psi}|\neq 0,|\boldsymbol{\Phi}|\neq 0$ 知 $|\boldsymbol{C}|\neq 0$. □

6.1.2 习题

1. 求出齐次线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{y}$$

的通解, 其中 $\boldsymbol{A}(t)$ 分别为:

(1)$\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}\frac{1}{t}&0\\0&\frac{1}{t}\end{pmatrix},t\neq 0$;

(2)$\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$;

(3)$\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$;

(4)$\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

解: (1)$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{t}&0\\0&\frac{1}{t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$, 分量形式为 $\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=\frac{y_1}{t},\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}=\frac{y_2}{t}$, 解得 $y_1=kt,y_2=kt$, 不妨取基解矩阵为 $\begin{pmatrix}0&t\\t&0\end{pmatrix}$, 则通解为

$$\boldsymbol{y}(t)=C_1\begin{pmatrix}0\\t\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix}$$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, 分量形式为 $\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = y_1 + y_2, \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = y_2$, 由 $\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = y_2$ 解得 $y_2 = C\mathrm{e}^t$, 先取 $y_2 = 0$ 得 $y_1 = C\mathrm{e}^t$, 再取 $y_2 = \mathrm{e}^t$ 得 $y_1 = C\mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t$, 不妨取基解矩阵为 $\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & t\mathrm{e}^t \\ 0 & \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$, 则通解为

$$\boldsymbol{y}(t) = C_1\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} t\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, 分量形式为 $\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = y_2, \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = -y_1$, 故 $\dfrac{\mathrm{d}^2y_1}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = -y_1 \Rightarrow$ $y_1 = C_1\sin t + C_2\cos t, y_2 = C_1\cos t - C_2\sin t$, 不妨取基解矩阵为 $\begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}$, 则通解为

$$\boldsymbol{y}(t) = C_1\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

(4) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, 分量形式为 $\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = y_3, \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = y_2, \dfrac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}t} = y_1$, 由 $\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = y_2$ 得 $y_2 = C\mathrm{e}^t$, 又 $\dfrac{\mathrm{d}^2y_1}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}t} = y_1 \Rightarrow y_1 = C_1\mathrm{e}^t + C_2\mathrm{e}^{-t}$, 取 $y_1 = \mathrm{e}^t$, 得 $y_3 = \mathrm{e}^t$, 取 $y_1 = \mathrm{e}^{-t}$, 得 $y_3 = -\mathrm{e}^{-t}$, 不妨取基解矩阵为 $\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & 0 & \mathrm{e}^{-t} \\ 0 & \mathrm{e}^t & 0 \\ \mathrm{e}^t & 0 & -\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$, 则通解为

$$\boldsymbol{y}(t) = C_1\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ 0 \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^t \\ 0 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ 0 \\ -\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$$ □

2. 求解非齐次线性微分方程组的初值问题:

(1) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 - \frac{2}{t}x, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + y - 1 + \frac{2}{t}x (t > 0), \\ x(1) = \frac{1}{3}, y(1) = -\frac{1}{3}; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2t}{1+t^2}x, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{t}y + x + t (t > 0), \\ x(1) = 0, y(1) = \frac{4}{3}. \end{cases}$.

解: (1) 由 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 - \frac{2}{t}x$ 得 $x = \mathrm{e}^{-\int \frac{2}{t}\mathrm{d}t}\left(C + \int \mathrm{e}^{\int \frac{2}{t}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right) = \frac{t}{3} + \frac{C}{t^2}$, 代入初值条件 $x(1) = \frac{1}{3}$ 得 $x(t) = \frac{t}{3}$. 又 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x+y) = x + y$ 且 $(x+y)(1) = 0$, 故 $x + y \equiv 0$, 故 $y(t) = -\frac{t}{3}$.

(2) 由 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2t}{1+t^2}x$ 得 $x(t) = C(1+t^2)$, 代入初值条件 $x(1) = 0$ 得 $x(t) \equiv 0$, 故 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{y}{t} + t$, 解得 $y(t) = \frac{C}{t} + \frac{t^2}{3}$, 代入初值条件 $y(1) = \frac{4}{3}$ 得 $y(t) = \frac{1}{t} + \frac{t^2}{3}$. □

3. 试证向量函数组

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

在任意区间 $a < x < b$ 上线性无关.(显然, 它们的朗斯基行列式 $W(x) \equiv 0$. 对照定理 6.2 可知, 上述三个线性无关的向量函数不可能同时满足任意一个三阶的齐次线性微分方程组.)

证明: 设 k_1, k_2, k_3 满足

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}, a < x < b$$

即 $k_1 + k_2 x + k_3 x^2 = 0, a < x < b$, 显然必有 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, 故该向量函数组线性无关. □

4. 试证基解矩阵完全决定齐次线性微分方程组, 即如果方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} \quad 与 \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{B}(x)\boldsymbol{y}$$

有一个相同的基解矩阵, 则 $\boldsymbol{A}(x) \equiv \boldsymbol{B}(x)$.

证明: 设相同的基解矩阵为 $\boldsymbol{\Phi}(x)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{\Phi}(x) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{\Phi}(x) = \boldsymbol{B}(x)\boldsymbol{\Phi}(x)$$

由于 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 可逆, 故 $\boldsymbol{A}(x) \equiv \boldsymbol{B}(x)$. □

5. 设 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 是齐次线性微分方程组 (6.2) 的一个基解矩阵, 并且 n 为向量函数 $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ 在区域 $E(a < x < b, |y| < \infty)$ 上连续. 则求解初值问题

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}), \\ \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0 \end{cases}$$

等价于求解 (向量形式的) 积分方程

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x_0)\boldsymbol{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{y}(s))\,\mathrm{d}s,$$

其中 $x_0 \in (a, b)$.

证明: 由 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)\boldsymbol{\Phi}(x)=\boldsymbol{I}$, 求导得

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}(x)}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{\Phi}(x)=\mathbf{0}$$

又

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}(x)}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{\Phi}(x)$$

故

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)\boldsymbol{A}(x)+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)}{\mathrm{d}x}=\mathbf{0}$$

设 $\boldsymbol{y}(x)$ 是初值问题的解, 则

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}(x)}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}(x)+\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}(x)),\boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y}_0\\
\Leftrightarrow&\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}(x)}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}(x)+\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}(x)),\boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y}_0\\
\Leftrightarrow&\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{y}(x)=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}(x)),\boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y}_0\\
\Leftrightarrow&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)\boldsymbol{y}(x)\right)=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}(x)),\boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y}_0\\
\Leftrightarrow&\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)\boldsymbol{y}(x)=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x_0)\boldsymbol{y}_0+\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{y}(s))\,\mathrm{d}s\\
\Leftrightarrow&\boldsymbol{y}(x)=\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x_0)\boldsymbol{y}_0+\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{y}(s))\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{y}(x)$ 是初值问题的解等价于 $\boldsymbol{y}(x)$ 是积分方程的解. □

6. 设当 $a<x<b$ 时, 非齐次线性微分方程组 (6.1) 中的 $\boldsymbol{f}(x)$ 不恒为零. 证明 (6.1) 有且至多有 $n+1$ 个线性无关解.

证明: (i) 设 $\boldsymbol{\phi}_1(x),\cdots,\boldsymbol{\phi}_n(x)$ 为相应的齐次线性微分方程组的一个基本解组, $\boldsymbol{\phi}_*(x)$ 为 (6.1) 的一个特解, 则 $\boldsymbol{y}_0(x)=\boldsymbol{\phi}_*(x),\boldsymbol{y}_1(x)=\boldsymbol{\phi}_1(x)+\boldsymbol{\phi}_*(x),\cdots,\boldsymbol{y}_n(x)=\boldsymbol{\phi}_n(x)+\boldsymbol{\phi}_*(x)$ 是 (6.1) 的 $n+1$ 个解, 下证这 $n+1$ 个解线性无关, 设

$$\sum_{i=0}^{n}k_i\boldsymbol{y}_i(x)=\sum_{i=1}^{n}k_i\boldsymbol{\phi}_i(x)+\left(\sum_{i=0}^{n}k_i\right)\boldsymbol{\phi}_*(x)=\mathbf{0}\cdots(*)$$

对上式求导得

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}k_1\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{\phi}_i(x)+\left(\sum_{i=0}^{n}k_i\right)(\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{\phi}_*(x)+\boldsymbol{f}(x))\\
=&\boldsymbol{A}(x)\left(\sum_{i=1}^{n}k_i\boldsymbol{\phi}_i(x)+\left(\sum_{i=0}^{n}k_i\right)\boldsymbol{\phi}_*(x)\right)+\left(\sum_{i=0}^{n}k_i\right)\boldsymbol{f}(x)\\
=&\left(\sum_{i=0}^{n}k_i\right)\boldsymbol{f}(x)=\mathbf{0}\Rightarrow\sum_{i=0}^{n}k_i=0
\end{aligned}$$

代回 (*) 式得 $\sum_{i=1}^{n} k_i \boldsymbol{\phi}_i(x) = 0$, 故 $k_i = 0(i = 0, 1, \cdots, n)$, 从而这 $n+1$ 个解线性无关.
(ii) 设 $\boldsymbol{\phi}(x)$ 是 (6.1) 的任意一个解, 则 $\boldsymbol{\phi}(x) - \boldsymbol{y}_0(x), \cdots, \boldsymbol{\phi}(x) - \boldsymbol{y}_n(x)$ 是相应的齐次线性微分方程组的 $n+1$ 个解, 故其必线性相关, 即存在不全为零的 $k_0, k_1, \cdots, k_n$ 使得

$$\sum_{i=0}^{n} k_i(\boldsymbol{\phi}(x) - \boldsymbol{y}_i(x)) = \left(\sum_{i=0}^{n} k_i\right) \boldsymbol{\phi}(x) - \sum_{i=0}^{n} k_i \boldsymbol{y}_i(x) = 0$$

显然 $\sum_{i=0}^{n} k_i \neq 0$, 否则与 $\boldsymbol{y}_0(x), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x)$ 的线性无关性矛盾, 故

$$\boldsymbol{\phi}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{k_j}{\sum_{i=0}^{n} k_i} \boldsymbol{y}_j(x)$$

因此线性无关解个数不超过 $n+1$. □

6.2 常系数线性微分方程组

6.2.1 证明与总结

证明: $(\mathcal{M}, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间.

证明: 设 $\{A_n\}_{n\geq 1}$ 是 $\mathcal{M}$ 中的 Cauchy 序列, 即 $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \forall m, n > N$, 有

$$\|A_m - A_n\| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}^m - a_{ij}^n| < \epsilon$$

故对任意给定的 i, j, 序列 $\left\{a_{ij}^n\right\}_{n\geq 1}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 序列, 故收敛, 记为 $a_{ij}^n \to a_{ij}(n \to \infty)$, 则 $A_n \to A = (a_{ij})_{n\times n}$, 因此 $(\mathcal{M}, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间. □

命题 1 证明:

证明:

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{E}\| + \|\boldsymbol{A}\| + \|\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2\| + \cdots + \|\frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^k\| + \cdots \\
\leq &\|\boldsymbol{E}\| + \|\boldsymbol{A}\| + \frac{1}{2!}\|\boldsymbol{A}\|^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\|\boldsymbol{A}\|^k + \cdots \\
= &n + \mathrm{e}^{\|\boldsymbol{A}\|} - 1 < \infty
\end{aligned}$$

故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的幂级数 $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^k + \cdots$ 绝对收敛.
结合泛函分析中定理: 赋范空间完备当且仅当绝对收敛级数必收敛. 故幂级数 $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^k + \cdots$ 收敛, 将其和记为 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}$. □

命题 2 证明:

证明: (1)

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{B}^k}{k!}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i+j=k}\frac{\boldsymbol{A}^i}{i!}\frac{\boldsymbol{B}^j}{j!}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\frac{\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{B}^{k-i}}{i!(k-i)!}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{k!}C_k^i\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{B}^{k-i}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^k=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}$$

(2) 由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $-\boldsymbol{A}$ 可交换, 故

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{0}}=\boldsymbol{E}$$

所以 $\left(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\right)^{-1}=\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}}$.

(3)

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{PAP}^{-1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\boldsymbol{PAP}^{-1}\right)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{PA}^k\boldsymbol{P}^{-1}}{k!}=\boldsymbol{P}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{P}^{-1}$$ □

本节引进新的概念: 矩阵指数函数 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}$, 容易证明 $\mathrm{e}^{x\boldsymbol{A}}$ 是常系数齐次线性微分方程组 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{Ay}$ 的标准基解矩阵, 然后利用若尔当标准型找到实际计算基解矩阵 $\mathrm{e}^{x\boldsymbol{A}}$ 的一个方法:

$$\mathrm{e}^{x\boldsymbol{A}}=\mathrm{e}^{x\boldsymbol{PJP}^{-1}}=\boldsymbol{P}\mathrm{e}^{x\boldsymbol{J}}\boldsymbol{P}^{-1}$$

从而

$$\mathrm{e}^{x\boldsymbol{A}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\mathrm{e}^{x\boldsymbol{J}}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{x\boldsymbol{J}_1}&&&\\&\mathrm{e}^{x\boldsymbol{J}_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\mathrm{e}^{x\boldsymbol{J}_m}\end{pmatrix}$$

也是常系数齐次线性微分方程组的一个基解矩阵, 但是上述结果计算量较大, 将之再细致分析, 得到下面求基解矩阵的具体计算方法:

由 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$ 求出特征值 λ, 分两种情况:

(I) 若全为单根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, 则基解矩阵为 $(x)=\left(\mathrm{e}^{\lambda_1 x}\boldsymbol{r}_1,\mathrm{e}^{\lambda_2 x}\boldsymbol{r}_2,\cdots,\mathrm{e}^{\lambda_n x}\boldsymbol{r}_n\right)$, 其中 $\boldsymbol{r}_i$ 是与 λ_i 对应的特征向量.

(II) 若有重根, 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 相应的重数分别为 $n_1,\cdots,n_s$, 则由 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})^{n_i}\boldsymbol{r}=0$ 算出 n_i 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{r}_{10}^{(i)},\cdots,\boldsymbol{r}_{n_i0}^{(i)}$, 再由

$$\boldsymbol{r}_{jk}^{(i)}=(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}_{j,k-1}^{(i)}(k=1,2,\cdots,n_i-1;j=1,2,\cdots,n_i;i=1,2,\cdots,s)$$

算出其它所需向量, 则基解矩阵为

$$\left(e^{\lambda_1 x}P_1^{(1)}(x),\cdots,e^{\lambda_1 x}P_{n_1}^{(1)}(x);\cdots;e^{\lambda_s x}P_1^{(s)}(x),\cdots,e^{\lambda_s x}P_{n_s}^{(s)}(x)\right)$$

其中 $P_j^{(i)}(x)=\boldsymbol{r}_{j0}^{(i)}+\dfrac{x}{1!}\boldsymbol{r}_{j1}^{(i)}+\dfrac{x^2}{2!}\boldsymbol{r}_{j2}^{(i)}+\cdots+\dfrac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\boldsymbol{r}_{j,n_i-1}^{(i)}$.

6.2.2 习题

1. 求出常系数齐次线性微分方程组 (6.25) 的通解, 其中的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分别为:

(1) $\begin{pmatrix}3&4\\5&2\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}0&a\\-a&0\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\1&0&-4\end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix}-5&-10&-20\\5&5&10\\2&4&9\end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&-\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\end{pmatrix}$; (6) $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$.

解: (1)$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=(\lambda-7)(\lambda+2)=0\Rightarrow\lambda=7$ 或 $\lambda=-2$.

当 $\lambda=7$ 时, $\begin{pmatrix}-4&4\\5&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$, 取特征向量为 $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

当 $\lambda=-2$ 时, $\begin{pmatrix}5&4\\5&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}5&4\\0&0\end{pmatrix}$, 取特征向量为 $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$

故基解矩阵为

$$\boldsymbol{\varPhi}(x)=\begin{pmatrix}e^{7x}&4e^{-2x}\\e^{7x}&-5e^{-2x}\end{pmatrix}$$

故通解为

$$\boldsymbol{y}=C_1\begin{pmatrix}e^{7x}\\e^{7x}\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}4e^{-2x}\\-5e^{-2x}\end{pmatrix}$$

(2)$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\lambda^2+a^2=0\Rightarrow\lambda=\pm a\mathrm{i}$.

当 $\lambda=a\mathrm{i}$ 时, $\begin{pmatrix}-a\mathrm{i}&a\\-a&-a\mathrm{i}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-\mathrm{i}&1\\0&0\end{pmatrix}$, 取特征向量为 $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}1\\\mathrm{i}\end{pmatrix}$.

当 $\lambda=-a\mathrm{i}$ 时, $\begin{pmatrix}a\mathrm{i}&a\\-a&a\mathrm{i}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\mathrm{i}&1\\0&0\end{pmatrix}$, 取特征向量为 $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}$.

故基解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} & \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax}\\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax}\end{pmatrix}\Rightarrow\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}(x)=\begin{pmatrix}\cos ax & \sin ax\\ -\sin ax & \cos ax\end{pmatrix}$$

从而通解为

$$\boldsymbol{y}=C_1\begin{pmatrix}\cos ax\\ -\sin ax\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}\sin ax\\ \cos ax\end{pmatrix}$$

(3) 由 $\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}=-y_2$, 得 $y_2=C_1\mathrm{e}^{-x}$; 再由 $\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}=-y_1+y_2=-y_1+C_1\mathrm{e}^{-x}$, 得

$$y_1=\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\left(C_2+\int C_1\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right)=C_1x\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-x}$$

再由 $\dfrac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}x}=y_1-4y_3=-4y_3+C_1x\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-x}$, 得

$$y_3=\mathrm{e}^{-\int 4\,\mathrm{d}x}\left(C_3+\int\left(C_1x\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{e}^{\int 4\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right)=C_1\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{9}\right)\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{3}C_2\mathrm{e}^{-x}+C_3\mathrm{e}^{-4x}$$

故通解为

$$\boldsymbol{y}=C_1\begin{pmatrix}x\\ 1\\ \frac{x}{3}-\frac{1}{9}\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-x}+C_2\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-x}+C_3\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-4x}$$

(4)$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-5-\lambda & -10 & -20\\ 5 & 5-\lambda & 10\\ 2 & 4 & 9-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-5)(\lambda^2-4\lambda+5)=0\Rightarrow\lambda=5,2\pm\mathrm{i}.$

当 $\lambda=5$ 时, $\begin{pmatrix}-10 & -10 & -20\\ 5 & 0 & 10\\ 2 & 4 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, 取特征向量为 $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$.

当 $\lambda=2+\mathrm{i}$ 时, $\begin{pmatrix}-7-\mathrm{i} & -10 & -20\\ 5 & 3-\mathrm{i} & 10\\ 2 & 4 & 7-\mathrm{i}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2}(3+\mathrm{i})\\ 0 & 1 & \frac{1}{2}(2-\mathrm{i})\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$(这里的矩阵行变换也不是很复杂, 主要就是凑出 1), 取特征向量为 $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}3+\mathrm{i}\\ 2-\mathrm{i}\\ -2\end{pmatrix}$, 故对于特征值 $\lambda=2-\mathrm{i}$ 可以取到特征向量 $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}3-\mathrm{i}\\ 2+\mathrm{i}\\ -2\end{pmatrix}$.

故基解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=\begin{pmatrix}2\mathrm{e}^{5x} & (3+\mathrm{i})\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})x} & (3-\mathrm{i})\mathrm{e}^{(2-\mathrm{i})x}\\ 0 & (2-\mathrm{i})\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})x} & (2+\mathrm{i})\mathrm{e}^{(2-\mathrm{i})x}\\ -\mathrm{e}^{5x} & -2\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})x} & -2\mathrm{e}^{(2-\mathrm{i})x}\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}(x)\begin{pmatrix}2\mathrm{e}^{5x} & (3\cos x-\sin x)\mathrm{e}^{2x} & (\cos x+3\sin x)\mathrm{e}^{2x}\\ 0 & (2\cos x+\sin x)\mathrm{e}^{2x} & (-\cos x+2\sin x)\mathrm{e}^{2x}\\ \mathrm{e}^{5x} & -2\cos x\mathrm{e}^{2x} & -2\sin x\mathrm{e}^{2x}\end{pmatrix}$$

从而通解为

$$\boldsymbol{y}=C_1\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{5x}+C_2\begin{pmatrix}3\cos x-\sin x\\2\cos x+\sin x\\-2\cos x\end{pmatrix}\mathrm{e}^{2x}+C_3\begin{pmatrix}\cos x+3\sin x\\-\cos x+2\sin x\\-2\sin x\end{pmatrix}\mathrm{e}^{2x}$$

(5) $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{2}{3}-\lambda & \frac{1}{3}\\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3}-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^3=0\Rightarrow\lambda_{1,2,3}=1$, 由于 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^3=\mathbf{0}$, 故由 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^3\boldsymbol{r}=\mathbf{0}$ 得到三个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{r}_{10}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{r}_{20}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{r}_{30}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{r}_{11}=\boldsymbol{r}_{12}=\mathbf{0},\boldsymbol{r}_{21}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix},\boldsymbol{r}_{22}=\mathbf{0},\boldsymbol{r}_{31}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix},\boldsymbol{r}_{32}=\mathbf{0}$.

故基解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{x} & \frac{2}{3}x\mathrm{e}^{x} & -\frac{2}{3}x\mathrm{e}^{x}\\ 0 & \left(1-\frac{1}{3}x\right)\mathrm{e}^{x} & \frac{1}{3}x\mathrm{e}^{x}\\ 0 & -\frac{1}{3}x\mathrm{e}^{x} & \left(1+\frac{1}{3}x\right)\mathrm{e}^{x}\end{pmatrix}$$

故通解为

$$\boldsymbol{y}=C_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\mathrm{e}^{x}+C_2\begin{pmatrix}\frac{2}{3}x\\1-\frac{1}{3}x\\-\frac{1}{3}x\end{pmatrix}\mathrm{e}^{x}+C_3\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}x\\\frac{1}{3}x\\1+\frac{1}{3}x\end{pmatrix}\mathrm{e}^{x}$$

(6)$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-2)^3=0\Rightarrow\lambda_{1,2,3}=2,\lambda_4=-2.$

当 $\lambda=2$ 时, $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^3=\begin{pmatrix}-16 & 16 & 16 & 16\\ 16 & -16 & -16 & -16\\ 16 & -16 & -16 & -16\\ 16 & -16 & -16 & -16\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, 由 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^3\boldsymbol{r}=0$ 得到三个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{r}_{10}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{r}_{20}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{r}_{30}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{r}_{ij}=\boldsymbol{0}(i=1,2,3;j=1,2)$.

当 $\lambda=-2$ 时, $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 3 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, 由 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$ 得特征向量 $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

故基解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{2x} & -\mathrm{e}^{-2x}\\ \mathrm{e}^{2x} & 0 & 0 & \mathrm{e}^{-2x}\\ 0 & \mathrm{e}^{2x} & 0 & \mathrm{e}^{-2x}\\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{-2x}\end{pmatrix}$$

故通解为

$$\boldsymbol{y}=C_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\mathrm{e}^{2x}+C_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\mathrm{e}^{2x}+C_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{2x}+C_4\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-2x}.$$ □

2. 求出常系数非齐次线性微分方程组 (6.24) 的通解, 其中:

(1)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}, \boldsymbol{f}(x)=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$;

(2)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -n^2\\ -n^2 & 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{f}(x)=\begin{pmatrix}\cos nx\\ \sin nx\end{pmatrix}$;

(3)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{f}(x)=\begin{pmatrix}0\\ 2\mathrm{e}^x\end{pmatrix}$;

(4)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}, \boldsymbol{f}(x)=\begin{pmatrix}2-x\\ 0\\ 1-x\end{pmatrix}$;

(5)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}, \boldsymbol{f}(x)=\begin{pmatrix}x^2\\ 2x\\ x\end{pmatrix}$.

解: (1)$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=(\lambda-2)^2=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=2$. 由 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{r}=0$ 得到两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{r}_{10}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{r}_{20}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{r}_{11}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{r}_{21}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$, 故基解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{2x} & x\mathrm{e}^{2x}\\ 0 & \mathrm{e}^{2x}\end{pmatrix}$$

通解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}&=\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}+\boldsymbol{\Phi}(x)\int\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)\boldsymbol{f}(x)\,\mathrm{d}x\\ &=C_2\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\mathrm{e}^{2x}+C_2\begin{pmatrix}x\\ 1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{2x}-\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(2)$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\lambda^2-n^4=0\Rightarrow\lambda=\pm n^2$.

当 $\lambda=n^2$ 时, $\begin{pmatrix}-n^2 & -n^2\\ -n^2 & -n^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 取特征向量为 $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$.

当 $\lambda=-n^2$ 时, $\begin{pmatrix}n^2 & -n^2\\ -n^2 & n^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 取特征向量为 $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.

故基解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{n^2x} & \mathrm{e}^{-n^2x}\\ -\mathrm{e}^{n^2x} & \mathrm{e}^{-n^2x}\end{pmatrix}$$

其逆矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-n^2x} & -\mathrm{e}^{-n^2x}\\ \mathrm{e}^{n^2x} & \mathrm{e}^{n^2x}\end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{\Phi}(x)^{-1}\boldsymbol{f}(x)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-n^2x}\cos nx-\mathrm{e}^{-n^2x}\sin nx\\ \mathrm{e}^{n^2x}\cos nx+\mathrm{e}^{n^2x}\sin nx\end{pmatrix}$$

利用积分公式

$$\begin{cases}\displaystyle\int \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\,\mathrm{d}x=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\mathrm{e}^{\alpha}\sin\beta x-\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x+C\\ \displaystyle\int \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\,\mathrm{d}x=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\mathrm{e}^{\alpha}\cos\beta x+\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x+C\end{cases}$$

得

$$\int\boldsymbol{\Phi}(x)^{-1}\boldsymbol{f}(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{n+1}{n^3+n}\mathrm{e}^{-n^2x}\sin nx+\frac{-n+1}{n^3+n}\mathrm{e}^{-n^2x}\cos nx\\ \frac{n+1}{n^3+n}\mathrm{e}^{n^2x}\sin nx+\frac{n-1}{n^3+n}\mathrm{e}^{n^2x}\cos nx\end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{\Phi}(x)\int\boldsymbol{\Phi}(x)^{-1}\boldsymbol{f}(x)\,\mathrm{d}x=\begin{pmatrix}\frac{n+1}{n^3+n}\sin nx\\ \frac{n-1}{n^3+n}\cos nx\end{pmatrix}$$

因此通解为

$$\boldsymbol{y}=C_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{n^2x}+C_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-n^2x}+\begin{pmatrix}\frac{n+1}{n^3+n}\sin nx\\ \frac{n-1}{n^3+n}\cos nx\end{pmatrix}$$

(3)$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2=0\Rightarrow\lambda=1$, 由 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{r}=0$ 得到两个线性无关得特征向量 $\boldsymbol{r}_{10}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{r}_{20}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{r}_{11}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{r}_{21}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$.

故基解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=\begin{pmatrix}(x+1)\mathrm{e}^x & -x\mathrm{e}^x\\ x\mathrm{e}^x & (1-x)\mathrm{e}^x\end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{\Phi}(x)\int\boldsymbol{\Phi}(x)^{-1}\boldsymbol{f}(x)\,\mathrm{d}x=\begin{pmatrix}-x^2\mathrm{e}^x\\ (-x^2+2x)\mathrm{e}^x\end{pmatrix}$$

故通解为

$$\boldsymbol{y}=C_1\begin{pmatrix}x+1\\x\end{pmatrix}\mathrm{e}^x+C_2\begin{pmatrix}-x\\-x+1\end{pmatrix}\mathrm{e}^x+\begin{pmatrix}-x^2\mathrm{e}^x\\ (-x^2+2x)\mathrm{e}^x\end{pmatrix}$$

(4)$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & -2\\ -1 & -\lambda & 0\\ 1 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)(\lambda^2+1)=0\Rightarrow\lambda=1,\pm\mathrm{i}.$

当 $\lambda=1$ 时, $\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&-1&0\\1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, 取特征向量为 $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

当 $\lambda=\mathrm{i}$ 时, $\begin{pmatrix}2-\mathrm{i}&1&-2\\-1&-\mathrm{i}&0\\1&1&-1-\mathrm{i}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&\mathrm{i}\\0&0&0\end{pmatrix}$, 取特征向量为 $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}1\\\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}$.

当 $\lambda=-\mathrm{i}$ 时, 可取特征向量为 $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\1\\\mathrm{i}\end{pmatrix}$(注意共轭特征向量为共轭特征值的特征向量).

故基解矩阵为

$$\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}(x)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^x&\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}&\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\\-\mathrm{e}^x&\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}&\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\\0&\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}&\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\end{pmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{\Phi}(x)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^x&\cos x&\sin x\\-\mathrm{e}^x&-\sin x&\cos x\\0&\cos x&\sin x\end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-x}&0&-\mathrm{e}^{-x}\\-\sin x&-\sin x&\sin x+\cos x\\\cos x&\cos x&\sin x-\cos x\end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)\boldsymbol{f}(x)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-x}\\(1-x)\cos x-\sin x\\(1-x)\sin x+\cos x\end{pmatrix}\Rightarrow\int\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)\boldsymbol{f}(x)\,\mathrm{d}x=\begin{pmatrix}-\mathrm{e}^{-x}\\(1-x)\sin x\\(x-1)\cos x\end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{\Phi}(x)\int\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)\boldsymbol{f}(x)\,\mathrm{d}x=\begin{pmatrix}-1\\x\\0\end{pmatrix}$$

故通解为

$$\boldsymbol{y}=C_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\mathrm{e}^x+C_2\begin{pmatrix}\cos x\\-\sin x\\\cos x\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}\sin x\\\cos x\\\sin x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\x\\0\end{pmatrix}$$

(5)$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=-(\lambda+1)^3=0\Rightarrow\lambda_{1,2,3}=-1$.

由 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^3\boldsymbol{r}=0$ 得到三个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{r}_{10}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{r}_{20}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{r}_{30}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, 且

$$\boldsymbol{r}_{11}=\boldsymbol{r}_{12}=\boldsymbol{r}_{22}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{r}_{21}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{r}_{31}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{r}_{32}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

故基解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-x} & -x\mathrm{e}^{-x} & \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x}\\0 & \mathrm{e}^{-x} & -x\mathrm{e}^{-x}\\0 & 0 & \mathrm{e}^{-x}\end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{x} & x\mathrm{e}^{x} & \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{x}\\0 & \mathrm{e}^{x} & x\mathrm{e}^{x}\\0 & 0 & \mathrm{e}^{x}\end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)\boldsymbol{f}(x)=\begin{pmatrix}3x^2\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^3\mathrm{e}^x\\2x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x\\x\mathrm{e}^x\end{pmatrix}\Rightarrow\int\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)\boldsymbol{f}(x)\,\mathrm{d}x=\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-3x+3\right)\mathrm{e}^x\\x^2\mathrm{e}^x\\(x-1)\mathrm{e}^x\end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{\Phi}(x)\int\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)\boldsymbol{f}(x)\,\mathrm{d}x=\begin{pmatrix}x^2-3x+3\\x\\x-1\end{pmatrix}$$

故通解为

$$\boldsymbol{y}=C_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-x}+C_2\begin{pmatrix}-x\\1\\0\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-x}+C_3\begin{pmatrix}x^2\\-2x\\2\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-x}+\begin{pmatrix}x^2-3x+3\\x\\x-1\end{pmatrix}\qquad\square$$

3. 求出微分方程组 (6.24) 满足初值条件 $\boldsymbol{y}(0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解, 其中:

(1)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-5 & -1\\1 & -3\end{pmatrix},\boldsymbol{f}(x)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^x\\\mathrm{e}^{2x}\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$;

(2)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -2\\2 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{f}(x)=\begin{pmatrix}3x\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$;

(3)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -3\\2 & -1\end{pmatrix},\boldsymbol{f}(x)=\begin{pmatrix}\sin x\\-2\cos x\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$;

(4)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}16 & 14 & 38\\-9 & -7 & -18\\-4 & -4 & -11\end{pmatrix},\boldsymbol{f}(x)=\begin{pmatrix}-2\mathrm{e}^{-x}\\-3\mathrm{e}^{-x}\\2\mathrm{e}^{-x}\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

解: (1)$|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{E}|=(\lambda+4)^2=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=-4$.
由 $(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{r}=0$ 得两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{r}_{10}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{r}_{20}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{r}_{11}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{r}_{21}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.
故基解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=\begin{pmatrix}(1-x)\mathrm{e}^{-4x} & -x\mathrm{e}^{-4x}\\ x\mathrm{e}^{-4x} & (1+x)\mathrm{e}^{-4x}\end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)=\begin{pmatrix}(1+x)\mathrm{e}^{4x} & x\mathrm{e}^{4x}\\ -x\mathrm{e}^{4x} & (1-x)\mathrm{e}^{4x}\end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)\boldsymbol{f}(x)=\begin{pmatrix}(1+x)\mathrm{e}^{5x}+x\mathrm{e}^{6x}\\ -x\mathrm{e}^{5x}+(1-x)\mathrm{e}^{6x}\end{pmatrix} \Rightarrow \int \boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)\boldsymbol{f}(x)\,\mathrm{d}x=\begin{pmatrix}\frac{4}{25}\mathrm{e}^{5x}+\frac{1}{5}x\mathrm{e}^{5x}-\frac{1}{36}\mathrm{e}^{6x}+\frac{1}{6}x\mathrm{e}^{6x}\\ -\frac{1}{5}x\mathrm{e}^{5x}+\frac{1}{25}\mathrm{e}^{5x}+\frac{7}{36}\mathrm{e}^{6x}-\frac{1}{6}x\mathrm{e}^{6x}\end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{\Phi}(x)\int \boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)\boldsymbol{f}(x)\,\mathrm{d}x=\begin{pmatrix}\frac{4}{25}\mathrm{e}^{x}-\frac{1}{36}\mathrm{e}^{2x}\\ \frac{1}{25}\mathrm{e}^{x}+\frac{7}{36}\mathrm{e}^{2x}\end{pmatrix}$$

故通解为

$$\boldsymbol{y}=C_1\begin{pmatrix}(1-x)\mathrm{e}^{-4x}\\ x\mathrm{e}^{-4x}\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-x\mathrm{e}^{-4x}\\ (1+x)\mathrm{e}^{-4x}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{4}{25}\mathrm{e}^{x}-\frac{1}{36}\mathrm{e}^{2x}\\ \frac{1}{25}\mathrm{e}^{x}+\frac{7}{36}\mathrm{e}^{2x}\end{pmatrix}$$

结合初值条件:

$$C_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{4}{25}-\frac{1}{36}\\ \frac{1}{25}+\frac{7}{36}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

得 $C_1=\frac{781}{900}, C_2=\frac{-211}{900}$, 故初值问题的解为

$$\boldsymbol{y}=\frac{781}{900}\begin{pmatrix}1-x\\ x\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-4x}+\frac{-211}{900}\begin{pmatrix}-x\\ 1+x\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-4x}+\begin{pmatrix}\frac{4}{25}\mathrm{e}^{x}-\frac{1}{36}\mathrm{e}^{2x}\\ \frac{1}{25}\mathrm{e}^{x}+\frac{7}{36}\mathrm{e}^{2x}\end{pmatrix}.$$

(2)$|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{E}|=\lambda^2+4=0 \Rightarrow \lambda=\pm 2\mathrm{i}$.
当 $\lambda=2\mathrm{i}$ 时, $\begin{pmatrix}-2\mathrm{i} & -2\\ 2 & -2\mathrm{i}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -\mathrm{i}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 取特征向量为 $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}$.

当 $\lambda=-2\mathrm{i}$ 时, 取特征向量为 $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}$.

故基解矩阵为

$$\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}(x)=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} & \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\\ \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} & \mathrm{i}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\end{pmatrix}\Rightarrow \boldsymbol{\Phi}(x)=\begin{pmatrix}\cos 2x & -\sin 2x\\ \sin 2x & \cos 2x\end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)=\begin{pmatrix}\cos 2x & \sin 2x\\ -\sin 2x & \cos 2x\end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)\boldsymbol{f}(x)=\begin{pmatrix}3x\cos 2x+4\sin 2x\\ -3x\sin 2x+4\cos 2x\end{pmatrix}\Rightarrow\int\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)\boldsymbol{f}(x)\,\mathrm{d}x=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}x\sin 2x-\frac{5}{4}\cos 2x\\ \frac{3}{2}x\cos 2x+\frac{5}{4}\sin 2x\end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{\Phi}(x)\int\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)\boldsymbol{f}(x)\,\mathrm{d}x=\begin{pmatrix}-\frac{5}{4}\\ \frac{3}{2}x\end{pmatrix}$$

故通解为

$$\boldsymbol{y}=C_1\begin{pmatrix}\cos 2x\\ \sin 2x\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-\sin 2x\\ \cos 2x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{5}{4}\\ \frac{3}{2}x\end{pmatrix}$$

结合初值条件:

$$C_1\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{5}{4}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$$

得 $C_1=\frac{13}{4},C_2=3$, 故初值问题的解为

$$\boldsymbol{y}=\frac{13}{4}\begin{pmatrix}\cos 2x\\ \sin 2x\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-\sin 2x\\ \cos 2x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{5}{4}\\ \frac{3}{2}x\end{pmatrix}$$

(3)$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=(\lambda-1)(\lambda-2)=0\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=2.$

当 $\lambda=1$ 时, $\begin{pmatrix}3 & -3\\ 2 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 取特征向量为 $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.

当 $\lambda=2$ 时, $\begin{pmatrix}2 & -3\\ 2 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 取特征向量为 $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$.

故基解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{x} & 3\mathrm{e}^{2x}\\ \mathrm{e}^{x} & 2\mathrm{e}^{2x}\end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)=\begin{pmatrix}-2\mathrm{e}^{-x} & 3\mathrm{e}^{-x}\\ \mathrm{e}^{-2x} & -\mathrm{e}^{-2x}\end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)\boldsymbol{f}(x)=\begin{pmatrix}-2\mathrm{e}^{-x}\sin x-6\mathrm{e}^{-x}\cos x\\ \mathrm{e}^{-2x}\sin x+2\mathrm{e}^{-2x}\cos x\end{pmatrix}\Rightarrow\int\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)\boldsymbol{f}(x)\,\mathrm{d}x=\begin{pmatrix}-2\mathrm{e}^{-x}\sin x+4\mathrm{e}^{-x}\cos x\\ -2\mathrm{e}^{-2x}\cos x\end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{\Phi}(x)\int\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)\boldsymbol{f}(x)\,\mathrm{d}x=\begin{pmatrix}-2\sin x+\cos x\\ -2\sin x+2\cos x\end{pmatrix}$$

故通解为

$$\boldsymbol{y}=C_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{x}+C_2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\mathrm{e}^{2x}+\begin{pmatrix}-2\sin x+\cos x\\ -2\sin x+2\cos x\end{pmatrix}$$

结合初值条件:

$$C_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

得 $C_1=-4,C_2=1$, 故初值问题的解为

$$\boldsymbol{y}=-4\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{x}+\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\mathrm{e}^{2x}+\begin{pmatrix}-2\sin x+\cos x\\ -2\sin x+2\cos x\end{pmatrix}$$

(4)$(-2x,-3x,2x)\mathrm{e}^{-x}$. □

4. 求解微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

其中 a 和 b 为实常数, 而且 $b\neq 0$.

解: $\begin{vmatrix}a-\lambda & -b\\ b & a-\lambda\end{vmatrix}=(a-\lambda)^2+b^2=0\Rightarrow\lambda=a\pm b\mathrm{i}$.

当 $\lambda=a+b\mathrm{i}$ 时, $\begin{pmatrix}-b\mathrm{i} & -b\\ b & -b\mathrm{i}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\mathrm{i} & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 取特征向量为 $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}$.

当 $\lambda=a-b\mathrm{i}$ 时, 取特征向量为 $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}$.

故基解矩阵为

$$\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}(t)=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\mathrm{e}^{(a+b\mathrm{i})t} & \mathrm{e}^{(a-b\mathrm{i})t}\\ \mathrm{e}^{(a+b\mathrm{i})t} & \mathrm{i}\mathrm{e}^{(a-b\mathrm{i})t}\end{pmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{at}\cos bt & -\mathrm{e}^{at}\sin bt\\ \mathrm{e}^{at}\sin bt & \mathrm{e}^{at}\cos bt\end{pmatrix}$$

故通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{at}\cos bt \\ \mathrm{e}^{at}\sin bt \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{at}\sin bt \\ \mathrm{e}^{at}\cos bt \end{pmatrix}. \qquad \square$$

5. 证明: 常系数齐次线性微分方程组 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ 的任何解当 $x \to +\infty$ 时都趋于零, 当且仅当它的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征根都具有负的实部.

证明: 方程的基解矩阵为

$$\left(\mathrm{e}^{\lambda_1 x}P_1^{(1)}(x), \cdots, \mathrm{e}^{\lambda_1 x}P_{n_1}^{(1)}(x); \cdots; \mathrm{e}^{\lambda_s x}P_1^{(s)}(x), \cdots, \mathrm{e}^{\lambda_s x}P_{n_s}^{(s)}(x)\right)$$

故

$$\begin{aligned} &\text{当}x \to +\infty\text{时任何解都趋于零} \\ \Longleftrightarrow\ &\mathrm{e}^{\lambda_i x} \to 0(x \to +\infty)(i = 1, 2, \cdots, s) \\ \Longleftrightarrow\ &\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0(i = 1, 2, \cdots, s) \end{aligned}$$

证毕. $\square$

6.3 高阶线性微分方程

6.3.1 证明与总结

高阶线性微分方程: $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$.
令 $y_1 = y, y_2 = y', \cdots, y_n = y^{(n-1)}$, 记 $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$ 则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & -a_{n-2}(x) & \cdots & -a_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix}$$

(I) 齐次方程: 有 n 个线性无关的解 $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$, 解组的朗斯基行列式

$$W(x) = W(x_0)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} a_1(s)\,\mathrm{d}s}$$

(一个运用: 二阶齐次线性微分方程组 $y'' + p(x)y' + q(x) = 0$ 若知道一个特解可以求出通解).
(II) 非齐次方程: 通解为 $y = C_1\varphi_1(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x) + \varphi^*(x)$, 其中 $\varphi^*(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{W_k(s)}{W(s)} f(s)\,\mathrm{d}s$,

此公式既可以用前面的公式 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}(x)\left(\boldsymbol{c} + \displaystyle\int_{x_0}^{x} \boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\,\mathrm{d}s\right)$ 取第一个分量导出, 也可以用常数变易法导出 (见习题 6).

esp: 常系数高阶线性微分方程, 其系数矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}$$

由 $|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ 算出特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$, 其重数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_s(n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n)$, 则齐次方程基本解组为:

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, x\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \cdots, x^{n_1-1}\mathrm{e}^{\lambda_1 x}; \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{e}^{\lambda_s x}, x\mathrm{e}^{\lambda_s x}, \cdots, x^{n_s-1}\mathrm{e}^{\lambda_s x} \end{cases}$$

对于非齐次方程, 还需要求出特解, 一般用上述特解求解公式, 在 $f(x)$ 形式特殊时, 可以用待定系数法:

$f(x) = P_m(x)\mathrm{e}^{\mu x} \Rightarrow \varphi^*(x) = x^k Q_m(x)\mathrm{e}^{\mu x}$($\mu$ 为 k 重特征根);

$f(x) = [A_m(x)\cos(\beta x) + B_l(x)\sin(\beta x)]\mathrm{e}^{\alpha x} \Rightarrow \varphi^*(x) = x^k[C_n(x)\cos(\beta x) + D_n(x)\sin(\beta x)]\mathrm{e}^{\alpha x}$($\alpha \pm \mathrm{i}\beta$ 为 k 重特征根,$n = \max\{m, l\}$).

6.3.2 习题

1. 证明函数组

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} x^2, & 当x \geq 0, \\ 0, & 当x < 0; \end{cases} \varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & 当x \geq 0, \\ x^2, & 当x < 0 \end{cases}$$

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上线性无关, 但它们的朗斯基行列式恒等于零. 这与本节的定理 6.2* 是否矛盾? 如果并不矛盾, 那么它说明了什么?

证明: 设 $k_1\varphi_1(x) + k_2\varphi_2(x) = 0(\forall x)$, 当 $x \geq 0$ 时, $k_1x^2 = 0 \Rightarrow k_1 = 0$, 当 $x < 0$ 时, $k_2x^2 = 0 \Rightarrow k_2 = 0$, 故 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上线性无关, 不矛盾, 这说明不存在二阶齐次线性微分方程使得它以 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 为解组. □

2. 证明命题 5.

证明: ($\Rightarrow$) 显然

($\Leftarrow$) 设 $k_1\varphi_1(x)+\cdots+k_n\varphi_n(x)=0$, 则

$$k_1\varphi_1'(x)+\cdots+k_n\varphi_n'(x)=0$$

$$\cdots$$

$$k_1\varphi_1^{(n-1)}(x)+\cdots+k_n\varphi_n^{(n-1)}(x)=0$$

由向量函数组线性无关即得 $k_i=0(i=1,2,\cdots,n)$, 故 $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 线性无关. □

3. 考虑微分方程: $y''+q(x)y=0$.

(1) 设 $y=\varphi(x)$ 与 $y=\psi(x)$ 是它的两个解, 试证 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的朗斯基行列式恒等于一个常数.

(2) 设已知方程有一个特解为 $y=\mathrm{e}^x$, 试求这方程的通解, 并确定 $q(x)=?$

解: (1)$W(x)=W(x_0)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^x 0\,\mathrm{d}s}=W(x_0)$.

(2) 将 $y=\mathrm{e}^x$ 代入原方程得 $q(x)=-1$, 即原方程为 $y''-y=0$, 解得通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$. □

4. 考虑微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)=0\cdots(*)$$

其中 $p(x)$ 和 $q(x)$ 是区间 $I:a<x<b$ 上的连续函数.

(1) 设 $y=\varphi(x)$ 是方程 $(*)$ 在区间 I 上的一个非零解 (即 $\varphi(x)$ 在区间 I 上不恒等于零), 试证 $\varphi(x)$ 在区间 I 上只有简单零点 (即: 如果存在 $x_0\in I$, 使得 $\varphi(x_0)=0$, 那么必有 $\varphi'(x_0)\neq 0$). 并由此进一步证明, $\varphi(x)$ 在任意有限闭区间上至多有有限个零点, 从而每一个零点都是孤立的.

(2) 在例 1 中, 对一般的情形证明相应的结论.

解:

(1) 假设存在 $x_0\in I$ 使得 $\varphi(x_0)=\varphi'(x_0)=0$, 则由解的存在唯一性定理知方程只有零解 $y=\varphi(x)=0$, 与 $\varphi(x)$ 是非零解相矛盾, 故 $\varphi(x)$ 在区间 I 上只有简单零点.

设 J 是 I 中有限闭区间, 且 $\varphi(x)$ 在区间 J 上有无限个零点, 记为 $\{x_n\}_{n\geq 1}$, 由 Bolzano-Weierstrass 定理知 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 有收敛子列, 不妨就设其本身收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0\in J$, 由连续性知 $\varphi(x_0)=0$, 故

$$\varphi'(x_0)=\lim_{x_n\to x_0}\frac{\varphi(x_n)-\varphi(x_0)}{x_n-x_0}=0$$

由存在唯一性定理知 $\varphi(x)\equiv 0$, 矛盾, 故 $\varphi(x)$ 的每一个零点都是孤立的.

(2) 情形 1: $\varphi(x)$ 在区间 I 上恒不为零, 设 $y=y(x)$ 是方程的任意一个解, 则由刘维尔公式得

$$\begin{vmatrix}\varphi & y\\ \varphi' & y'\end{vmatrix}=\varphi y'-\varphi' y=C_2\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^x p(t)\,\mathrm{d}t}$$

在上式两边同时乘以 $\frac{1}{\varphi^2}$, 则得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{\varphi}\right)=\frac{C_2}{\varphi^2}\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\,\mathrm{d}t}$$

将上式从 x_0 到 x 积分得

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{y}{\varphi}\right)\mathrm{d}s=\frac{y(x)}{\varphi(x)}-C_1=\int_{x_0}^{x}\frac{C_2}{\varphi^2(s)}\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{s}p(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}s$$

故

$$y(x)=\varphi(x)\left[C_1+C_2\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\varphi^2(s)}\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{s}p(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}s\right]$$

其中 C_1,C_2 是任意常数.

情形 2: $\varphi(x)$ 是非零解, 由 (1) 知 $\varphi(x)$ 的每一个零点都是孤立的, 利用 $\varphi(x)$ 的零点将区间 (a,b) 分割为开区间之并. □

5. 设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的一个基本解组, 试证:
(1) 方程的系数函数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 能由这个基本解组唯一地确定.
(2)$u(x)$ 和 $v(x)$ 没有共同的零点.

证明: (1) 依题意得 $\begin{cases}p(x)u'+q(x)u=-u''\\ p(x)v'+q(x)v=-v''\end{cases}$, 又 $\begin{vmatrix}u' & u\\ v' & v\end{vmatrix}=-W[u(x),v(x)]\neq 0$, 故

$$p(x)=\frac{\begin{vmatrix}-u'' & u\\ -v'' & v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}u' & u\\ v' & v\end{vmatrix}}=\frac{u''v-uv''}{W[u(x),v(x)]},q(x)=\frac{\begin{vmatrix}u' & -u''\\ v' & -v''\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}u' & u\\ v' & v\end{vmatrix}}=\frac{u'v''-u''v'}{W[u(x),v(x)]}$$

也即 $p(x)$ 和 $q(x)$ 能由这个基本解组唯一地确定.

(2) 假设 $u(x)$ 和 $v(x)$ 有共同的零点 x_0, 则 $W[u(x_0),v(x_0)]=0$, 与 $u(x)$ 和 $v(x)$ 为基本解组相矛盾, 故 $u(x)$ 和 $v(x)$ 没有共同的零点. □

6. 试用常数变易法证明定理 6.3*.

证明: 设非齐次线性微分方程的通解为

$$y=C_1(x)\varphi_1(x)+\cdots+C_n(x)\varphi_n(x)$$

则

$$y'=C_1'(x)\varphi_1(x)+\cdots+C_n'(x)\varphi_n(x)+C_1(x)\varphi_1'(x)+\cdots+C_n(x)\varphi_n'(x)$$

令 $C_1'(x)\varphi_1(x)+\cdots+C_n'(x)\varphi_n(x)=0$, 则

$$y'=C_1(x)\varphi_1'(x)+\cdots+C_n(x)\varphi_n'(x)$$

故

$$y''=C_1'(x)\varphi_1'(x)+\cdots+C_n'(x)\varphi_n'(x)+C_1(x)\varphi_1''(x)+\cdots+C_n(x)\varphi_n''(x)$$

令 $C_1'(x)\varphi_1'(x)+\cdots+C_n'(x)\varphi_n'(x)=0$, 则

$$y''=C_1(x)\varphi_1''(x)+\cdots+C_n(x)\varphi_n''(x)$$

$\cdots$

同理可得

$$y^{(n-1)}=C_1(x)\varphi_1^{(n-1)}(x)+\cdots+C_n(x)\varphi_n^{(n-1)}(x)$$

$$y^{(n)}=C_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x)+\cdots+C_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x)+C_1(x)\varphi_1^{(n)}(x)+\cdots+C_n(x)\varphi_n^{(n)}(x)$$

将 $y,y',\cdots,y^{(n)}$ 的表达式代入 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$ 得

$$\begin{aligned}C_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x)+\cdots+C_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x)+\sum_{i=1}^{n}C_i(x)\Big(\varphi_i^{(n)}(x)\\+a_1(x)\varphi_i^{(n-1)}(x)+\cdots+a_n(x)\varphi_i(x)\Big)=f(x)\end{aligned}$$

而

$$\sum_{i=1}^{n}C_i(x)\left(\varphi_i^{(n)}(x)+a_1(x)\varphi_i^{(n-1)}(x)+\cdots+a_n(x)\varphi_i(x)\right)=0$$

故

$$C_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x)+\cdots+C_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x)=f(x)$$

再根据前面所得有

$$\begin{cases}C_1'(x)\varphi_1(x)+\cdots+C_n'(x)\varphi_n(x)=0\\C_1'(x)\varphi_1'(x)+\cdots+C_n'(x)\varphi_n'(x)=0\\\cdots\cdots\\C_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x)+\cdots+C_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x)=f(x)\end{cases}$$

上述方程组的系数行列式即为 $W(x)$, 故

$$C_1'(x)=\frac{1}{W(x)}\begin{vmatrix}0&\varphi_2(x)&\cdots&\varphi_n(x)\\0&\varphi_2'(x)&\cdots&\varphi_n'(x)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\f(x)&\varphi_2^{(n-1)}(x)&\cdots&\varphi_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}=\frac{W_1(x)}{W(x)}f(x)$$

同理可得 $C_i'(x)=\dfrac{W_i(x)}{W(x)}f(x)(i=2,3,\cdots,n)$, 积分得

$$C_i(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{W_i(s)}{W(s)}f(s)\,\mathrm{d}s+C_i$$

再代回最初的式子即得

$$y=C_1\varphi_1(x)+\cdots+C_n\varphi_n(x)+\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\int_{x_0}^{x}\frac{W_k(s)}{W(s)}f(s)\,\mathrm{d}s.$$ □

7. 设欧拉方程

$$x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}xy'+a_ny=0,$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是常数, $x>0$. 试利用适当的变换把它化成常系数的齐次线性微分方程.

解: 令 $x=\mathrm{e}^t$, 则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{-2t}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\end{aligned}$$

用归纳法可以证明

$$\frac{\mathrm{d}^ky}{\mathrm{d}x^k}=\mathrm{e}^{-kt}\left(\frac{\mathrm{d}^ky}{\mathrm{d}t^k}+\beta_1\frac{\mathrm{d}^{k-1}y}{\mathrm{d}t^{k-1}}+\cdots+\beta_{k-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\cdots(*)$$

其中 $\beta_1,\beta_2,\beta_{k-1}$ 都是常数. 将其代入原方程就得到常系数齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}t^n}+b_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+b_{n-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+b_ny=0,$$

其中 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是常数. 求解之, 再代回原变量, 便可得原方程通解. □

注: $(*)$ 式其实不太精细, 事实上, 利用归纳法容易证明下列关系式

$$x^k\frac{\mathrm{d}^ky}{\mathrm{d}x^k}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-1\right)\cdots\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-k+1\right)y$$

8. 求解有阻尼的弹簧振动方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+r\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=0,$$

其中 m,r,k 都是正的常数. 并就 $\Delta=r^2-4mk$ 大于, 等于和小于零的不同情况, 说明相应解的物理意义.

解: 特征方程为

$$m\lambda^2 + r\lambda + k = 0$$

特征根为

$$\lambda_1 = \frac{-r + \sqrt{r^2 - 4mk}}{2m}, \lambda_2 = \frac{-r - \sqrt{r^2 - 4mk}}{2m}$$

(i) $\Delta > 0$ 即大阻尼情形, $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, 通解为

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t},$$

其中 C_1, C_2 为任意常数. 此时 $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, 并且有

(a) 当常数 C_1 和 C_2 全为零时, 则 $x(t) \equiv 0$, 即弹簧静止;

(b) 当常数 C_1 和 C_2 有且只有一个为零时, 则 $x(t)$ 保持定号, 即弹簧不能振动;

(c) 当常数 C_1 和 C_2 都不为零时, 此时弹簧最多只能经过一次静止点, 亦即

$$x(t_0) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t_0} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t_0} = 0$$

当且仅当 $-1 < \frac{C_1}{C_2} < 0$ 异号, 而且 $t_0 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln\left(-\frac{C_1}{C_2}\right)$.

(ii) $\Delta < 0$ 即小阻尼情形, 此时 $\lambda_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta, \lambda_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$, 其中 $\alpha = -\frac{r}{2m} < 0, \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2m} > 0$, 通解为

$$x(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}(C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t) = A\mathrm{e}^{\alpha t} \cos(\beta t - \theta_0)$$

故 $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, 且

(a) 当 $A = 0$ 时, 弹簧静止;

(b) 当 $A > 0$ 时, 弹簧振动.

(iii) $\Delta = 0$ 即临界阻尼情形, 有两个相等的特征根 $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{r}{2m}$, 通解为

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\frac{r}{2m}t}(C_1 + C_2 t)$$

此时 $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ 且 $x(t)$ 至多有一个零点, 故弹簧不振动.

□

9. 求解弹簧振子在无阻尼下的强迫振动方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + kx = p\cos\omega t,$$

其中 m, k, p 和 ω 都是正的常数. 并对外加频率 $\omega \neq \omega_0$ 和 $\omega = \omega_0$ 两种不同的情况, 说明解的物理意义, 这里 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 是弹簧振子的固有频率.

解: 特征方程为

$$m\lambda^2 + k = 0$$

解得特征根为 $\lambda = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\mathrm{i} = \pm\omega_0\mathrm{i}$, 故相应齐次线性微分方程的解为

$$x(t) = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t$$

当 $\omega \neq \omega_0$ 时, 方程有特解 $x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, 代入原方程得 $A = \frac{p}{k-m\omega^2}, B = 0$, 故原方程通解为

$$x(t) = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t + \frac{p}{k - m\omega^2}\cos\omega t$$

当 $\omega = \omega_0$ 时, 方程有特解 $x(t) = t(A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t)$, 代入原方程得 $A = 0, B = \frac{p}{2m\omega_0}$, 故原方程通解为

$$x(t) = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t + \frac{p}{2m\omega_0}t\sin\omega_0 t$$

此时发生了共振. □

10. 求解下列常系数线性微分方程:

(1)$y'' + y' - 2y = 2x, y(0) = 0, y'(0) = 1$;

(2)$2y'' - 4y' - 6y = 3\mathrm{e}^{2x}$;

(3)$y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$;

(4)$y''' + 3y' - 4y = 0$;

(5)$y''' - 2y'' - 3y' + 10y = 0$;

(6)$y''' - 3ay'' + 3a^2y' - a^3y = 0$;

(7)$y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 3y = 0$;

(8)$y^{(5)} + 2y''' + y' = 0$;

(9)$y^{(4)} + 2y'' + y = \sin x, y(0) = 1, y'(0) = -2, y''(0) = 3, y'''(0) = 0$;

(10)$y^{(4)} + y = 2\mathrm{e}^x, y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 1$;

(11)$y'' - 2y' + 2y = 4\mathrm{e}^x\cos x$;

(12)$y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)\mathrm{e}^{-x}$;

(13)$x^2y'' + 5xy' + 13y = 0(x > 0)$;

(14)$(2x+1)^2y'' - 4(2x+1)y' + 8y = 0$.

解: (1)$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$, 设方程的特解为 $y = ax + b$, 代入原方程得 $a = -1, b = -\frac{1}{2}$, 故原方程的通解为

$$y = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^x - x - \frac{1}{2}$$

代入初值条件得 $C_1=-\frac{1}{2},C_2=1$, 故原方程的解为

$$y=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{x}-x-\frac{1}{2}$$

(2)$2\lambda^2-4\lambda-6=0\Rightarrow\lambda_1=3,\lambda_2=-1$, 设方程的特解为 $y=a\mathrm{e}^{2x}$, 代入原方程得 $a=-\frac{1}{2}$, 故原方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$$

(3)$\lambda^2+2\lambda=0\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=-2$, 设特解为 $y=Ax+B\cos 2x+C\sin 2x$, 代入原方程得 $A=\frac{3}{2},B=C=-\frac{1}{2}$, 故原方程通解为

$$y=C_1+C_2\mathrm{e}^{-2c}+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}(\sin 2x+\cos 2x)$$

(4)$\lambda^3+3\lambda-4=0\Rightarrow\lambda=1,\frac{-1\pm\sqrt{15}\mathrm{i}}{2}$, 故方程的实基本解组为 $\mathrm{e}^{x},\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{15}}{2}x,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{15}}{2}x$, 故通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{x}+\left(C_2\cos\frac{\sqrt{15}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{15}}{2}x\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$$

(5)$\lambda^3-2\lambda^2-3\lambda+10=0\Rightarrow\lambda=-2,2\pm\mathrm{i}$, 故实基本解组为 $\mathrm{e}^{-2x},\mathrm{e}^{2x}\cos x,\mathrm{e}^{2x}\sin x$, 故通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+(C_2\cos x+C_3\sin x)\mathrm{e}^{2x}$$

(6)$\lambda^3-3a\lambda^2+3a^2\lambda-a^3=(\lambda-a)^3=0\Rightarrow\lambda_{1,2,3}=a$, 故通解为

$$y=\left(C_1+C_2x+C_3x^2\right)\mathrm{e}^{ax}$$

(7)$\lambda^4-4\lambda^3+8\lambda^2-8\lambda+3=(\lambda-1)^2(\lambda^2-2\lambda+3)=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=1,\lambda_3=1+\sqrt{2}\mathrm{i},\lambda_4=1-\sqrt{2}\mathrm{i}$, 故通解为

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{x}+(C_3\cos\sqrt{2}x+C_4\sin\sqrt{2}x)\mathrm{e}^{x}$$

(8)$\lambda^5+2\lambda^3+\lambda=\lambda(\lambda^2+1)^2=0\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_{2,3}=\mathrm{i},\lambda_{4,5}=-\mathrm{i}$, 故复基本解组为 $1,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x},x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x},\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x},x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$, 相应的实基本解组为 $1,\cos x,\sin x,x\cos x,x\sin x$, 故通解为

$$y=C_1+(C_2+C_3x)\cos x+(C_4+C_5x)\sin x$$

(9)$\lambda^4+2\lambda^2+1=(\lambda^2+1)^2=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=\mathrm{i},\lambda_{3,4}=-\mathrm{i}$, 故对应齐次方程的通解为

$$\varphi(x)=C_1\sin x+C_2\cos x+C_3x\sin x+C_4x\cos x$$

设特解为 $\varphi^*(x)=x^2(A\cos x+B\sin x)$, 则

$$\begin{aligned}(\varphi^*(x))'&=2x(A\cos x+B\sin x)+x^2(-A\sin x+B\cos x)\\(\varphi^*(x))''&=(2-x^2)(A\cos x+B\sin x)+4x(-A\sin x+B\cos x)\\(\varphi^*(x))'''&=-6x(A\cos x+B\sin x)+(6-x^2)(-A\sin x+B\cos x)\\(\varphi^*(x))^{(4)}&=(x^2-12)(A\cos x+B\sin x)-8x(-A\sin x+B\cos x)\end{aligned}$$

故 $(x^2-12+4-2x^2+x^2)(A\cos x+B\sin x)+(-8x+8x)(-A\sin x+B\cos x)=-8(A\cos x+B\sin x)=\sin x\Rightarrow A=0,B=-\frac{1}{8}$, 故 $\varphi^*(x)=-\frac{1}{8}x^2\sin x$, 故原方程的通解为

$$y=C_1\sin x+C_2\cos x+C_3x\sin x+C_4x\cos x-\frac{1}{8}x^2\sin x$$

再代入初值条件 $y(0)=C_2=1,y'(0)=C_1+C_4=-2,y''(0)=-C_2+2C_3=3,y'''(0)=-C_1-3C_4-\frac{3}{4}=0$, 解得 $C_1=-\frac{21}{8},C_2=1,C_3=2,C_4=\frac{5}{8}$, 故原方程的解为

$$y=\left(-\frac{1}{8}x^2+2x-\frac{21}{8}\right)\sin x+\left(\frac{5}{8}x+1\right)\cos x$$

(10)$\lambda^4+1=0\Rightarrow\lambda=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}k\pi\right)}(k=0,1,2,3)$, 也即 $\lambda_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i},\lambda_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i},\lambda_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i},\lambda_4=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$, 故相应的齐次线性微分方程的解为

$$\varphi(x)=\left(C_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}+\left(C_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}$$

设原方程的特解为 $\varphi^*(x)=A\mathrm{e}^x$, 代入原方程得 $A=1$, 故特解为 $\varphi^*(x)=\mathrm{e}^x$, 因此原方程的通解为

$$y=\left(C_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}+\left(C_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}+\mathrm{e}^x$$

结合初值条件知 $C_i=0(i=1,2,3,4)$, 故原方程满足初值条件的解为 $y=\mathrm{e}^x$.
(11)$\lambda^2-2\lambda+2=0\Rightarrow\lambda=1\pm\mathrm{i}$, 故相应齐次线性微分方程的通解为

$$\varphi(x)=(C_1\cos x+C_2\sin x)\mathrm{e}^x$$

设原方程的特解为 $\varphi^*(x)=x(A\cos x+B\sin x)\mathrm{e}^x$, 代入原方程得 $A=0,B=2$, 故特解为 $\varphi^*(x)=2x\mathrm{e}^x\sin x$, 故原方程的通解为

$$y=(C_1\cos x+C_2\sin x)\mathrm{e}^x+2x\mathrm{e}^x\sin x$$

(12)$\lambda^2-5\lambda+6=0\Rightarrow\lambda_1=2,\lambda_2=3$, 故相应齐次线性微分方程的通解为

$$\varphi(x)=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{3x}$$

设原方程的特解为 $\varphi^*(x)=(Ax+B)\mathrm{e}^{-x}$, 代入原方程得 $A=1,B=0$, 故特解为 $\varphi^*(x)=x\mathrm{e}^{-x}$, 因此原方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{3x}+x\mathrm{e}^{-x}$$

(13) 令 $x=\mathrm{e}^t$, 则原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-1\right)y+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y+13y=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+13y=0$$

特征方程为 $\lambda^2+4\lambda+13=0\Rightarrow\lambda=-2\pm3\mathrm{i}$, 故实基本解组为 $\mathrm{e}^{-2t}\cos3t,\mathrm{e}^{-2t}\sin3t$, 代回原变量即得基本解组为 $\frac{1}{x^2}\cos(3\ln x),\frac{1}{x^2}\sin(3\ln x)$, 故通解为

$$y=\frac{1}{x^2}(C_1\cos(3\ln x)+C_2\sin(3\ln x))$$

(14) 令 $u=2x+1$, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=4\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2}$$

故原方程化为

$$u^2\cdot4\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2}-4u\cdot2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}+8y=0\Rightarrow u^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2}-2u\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}+2y=0$$

令 $u=\mathrm{e}^t$, 则上述方程化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-1\right)y-2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y+2y=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2y=0$$

特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+2=0\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=2$, 故通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{2t}=C_1u+C_2u^2=C_1(2x+1)+C_2(2x+1)^2$$ □

Chapter 7

幂级数解法

7.1 柯西定理

图 7.1: 柯西定理图示

$$
\begin{tikzcd}
(E):\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y),y(x_0)=y_0 \arrow[r, "\text{形式解}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{在 } R_0 \text{ 内 } F(x,y) \text{ 是 } f(x,y) \text{ 的优函数}"] & y=y_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n(x-x_0)^n \arrow[d, leftrightarrow, "|C_n|\leq\widehat{C}_n"] \\
(\widehat{E}):\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=F(x,y),y(x_0)=y_0 \arrow[r, "\text{形式解}"] \arrow[d, bend right] \arrow[dr, bend right, "\text{真实解}"] & y=y_0+\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{C}_n(x-x_0)^n \\
\frac{M}{\left(1-\frac{x-x_0}{a}\right)\left(1-\frac{y-y_0}{b}\right)} & y=y_0+b-b\sqrt{1+\frac{2aM}{b}\ln\left(1-\frac{x-x_0}{a}\right)}(|x-x_0|<\rho)
\end{tikzcd}
$$

1. 陈述并详细证明解析微分方程组的柯西定理.

柯西定理: 考虑微分方程组的初值问题

$$
(E):\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}=f_1(x,y_1,\cdots,y_n),y_1(0)=0\\ \cdots\\ \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x}=f_n(x,y_1,\cdots,y_n),y_n(0)=0\end{cases}
$$

其中函数 $f_k(k=1,2,\cdots,n)$ 在区域 $R:|x|\leq\alpha,|y_1|\leq\beta,\cdots,|y_n|\leq\beta$ 内可以展成收敛的幂级数

$$
f_k(x,y_1,\cdots,y_n)=\sum_{i,j_1,\cdots,j_n=0}^{\infty}a_{i,j_1,\cdots,j_n}^{(k)}x^iy_1^{j_1}\cdots y_n^{j_n}
$$

则初值问题 (E) 在邻域 $|x|<\rho$ 内有唯一的解析解 $y_k=y_k(x)$, 其中 $\rho=a\left(1-\mathrm{e}^{\frac{-b}{(n+1)aM}}\right),a<\alpha,b<\beta$.

证明: 因为 $f_k(x,y_1,\cdots,y_n)$ 在区域 R 上可以展成收敛的幂级数

$$f_k(x,y_1,\cdots,y_n)=\sum_{i,j_1,\cdots,j_n=0}^{\infty}a_{i,j_1,\cdots,j_n}^{(k)}x^iy_1^{j_1}\cdots y_n^{j_n}$$

故对任意的正数 $a<\alpha,b<\beta$, 正项级数

$$\sum_{i,j_1,\cdots,j_n=0}^{\infty}a_{i,j_1,\cdots,j_n}^{(k)}a^ib^{j_1+\cdots+j_n}$$

收敛, 故其通项有界, 即存在 $M>0$ 使得

$$\left|a_{i,j_1,\cdots,j_n}^{(k)}\right|a^ib^{j_1+\cdots+j_n}\le M\Rightarrow\left|a_{i,j_1,\cdots,j_n}^{(k)}\right|\le\frac{M}{a^ib^{j_1+\cdots+j_n}}\cdots(*)$$

考虑下述函数在区域 $R_0:|x|<a,|y_1|<b,\cdots,|y_n|<b$ 上的展开式

$$G(x,y_1,\cdots,y_n)=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y_1}{b}\right)\cdots\left(1-\frac{y_n}{b}\right)}=\sum_{i,j_1,\cdots,j_n=0}^{\infty}\frac{M}{a^ib^{j_1+\cdots+j_n}}x^iy_1^{j_1}\cdots y_n^{j_n}$$

由 $(*)$ 知在 R_0 上 $G(x,y_1,\cdots,y_n)$ 是 $f_k(x,y_1,\cdots,y_n)$ 的优函数.
我们考虑初值问题

$$(\widehat{E}):\frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}x}=G(x,y_1,\cdots,y_n),y_k(0)=0(k=1,2,\cdots,n)$$

注意到上述方程组的右端函数与 k 无关, 故只要标量函数 y 的初值问题

$$(\widetilde{E}):\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)^n},y(0)=0$$

有解 $y=y(x)$, 则 $y_i=y(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 就是 $(\widehat{E})$ 的解. 容易求得 $(\widetilde{E})$ 的解为

$$y=b-b\sqrt[n+1]{1+\frac{(n+1)aM}{b}\ln\left(1-\frac{x}{a}\right)}$$

可以证明当 $|x|<\rho=a\left(1-\mathrm{e}^{\frac{-b}{(n+1)aM}}\right)$ 时, 上述解可以展开成收敛的幂级数, 故初值问题 (E) 在 $|x|<\rho$ 上有唯一的解析解. □

2. 设初值问题

$$(E):y''+p(x)y'+q(x)=0,y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y_0',$$

其中 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在区间 $|x-x_0|<a$ 内可以展成 $(x-x_0)$ 的收敛的幂级数, 则 (E) 的解析解 $y=y(x)$ 在 $|x-x_0|<a$ 内存在且唯一.

解: 令 $y_1=y, y_2=y'$, 则初值问题 (E) 等价于

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}=y_2=f_1(x,y_1,y_2), y_1(x_0)=y_0\\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}=-p(x)y_2-q(x)y_1=f_2(x,y_1,y_2), y_2(x_0)=y_0'\end{cases}$$

结合题给条件知 $f_i(x,y_1,y_2)(i=1,2)$ 在区域 $R:|x-x_0|<a, |y_1-y_0|<\infty, |y_2-y_0'|<\infty$ 上可以展开成收敛的幂级数, 由柯西定理知初值问题在 $|x-x_0|<\rho$ 上存在唯一的解析解, 其中

$$\rho=\tilde{a}\left(1-\mathrm{e}^{\frac{-b}{3\tilde{a}M}}\right), \tilde{a}<a, b<\infty$$

由于 $\lim\limits_{b\to\infty}\rho=\tilde{a}$, 又 $\tilde{a}<a$ 是任意的, 故 (E) 的解析解在 $|x-x_0|<a$ 上存在且唯一. □

3. 叙述并证明解析微分方程的解关于初值和参数的解析性定理.

7.2 幂级数解法

1. 求出下列微分方程在 $x=x_0$ 处展开的两个线性无关的幂级数解, 并写出相应的递推公式:

(1)$y''-xy'-y=0, x_0=0$;

(2)$y''-xy'-y=0, x_0=1$;

(3)$(1-x)y''+y=0, x_0=0$.

解: (1) 设方程有幂级数解

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

则

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

将之代入原方程得

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-(n+1)a_n]x^n=0$$

故递推公式为

$$(n+2)a_{n+2}-a_n=0(n=0,1,\cdots)$$

故 $a_{2n}=\frac{1}{(2n)!!}a_0, a_{2n+1}=\frac{1}{(2n+1)!!}a_1(n\geq 0)$, 从而得方程有幂级数解

$$y=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!!}+a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$$

分别取 $a_0=1,a_1=0$ 和 $a_0=0,a_1=1$ 得两个线性无关的幂级数解

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!!},y_2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$$

(2) 设方程有幂级数解

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$$

则

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x-1)^n$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n$$

将之代入原方程得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\big[(n+2)(n+1)a_{n+2}-(n+1)(a_{n+1}+a_n)\big](x-1)^n=0$$

故递推公式为

$$a_{n+2}=\frac{a_{n+1}+a_n}{n+2}(n=0,1,\cdots)$$

分别取 $a_0=1,a_1=0$ 和 $a_0=0,a_1=1$ 可得两个线性无关的解.

(3) 所设幂级数形式与 (1) 相同, 代入原方程可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-(n+1)na_{n+1}+a_n]x^n=0$$

故递推公式为

$$a_{n+2}=\frac{(n+1)na_{n+1}-a_n}{(n+2)(n+1)}(n=0,1,\cdots)$$

分别取 $a_0=1,a_1=0$ 和 $a_0=0,a_1=1$ 得两个线性无关的幂级数解

$$y_1=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{60}x^5-\cdots$$

$$y_2=x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{24}x^5-\cdots$$ □

2. 对于下列初值问题求出 $y''(x_0),y^{(3)}(x_0)$ 和 $y^{(4)}(x_0)$, 从而写出相应初值问题的解在 x_0 点的泰勒级数的前几项:

(1)$y''+xy'+y=0;\ y(0)=1,y'(0)=0;$

(2)$y''+(\sin x)y'+(\cos x)y=0;\ y(0)=0,y'(0)=1.$

解: (1)$y''(0)=-1, y^{(3)}(0)=0, y^{(4)}(0)=3, y=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{3}{4!}x^4+\cdots$;
(2)$y''(0)=0, y^{(3)}(0)=-2, y^{(4)}(0)=0, y=x-\frac{2}{3!}x^3+\cdots$. □

3. 求解 Hermite 方程

$$y''-2xy'+\lambda y=0(-\infty<x<\infty),$$

其中 λ 是常数.

解: 设方程有幂级数解

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

则

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

将之代入原方程得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+(\lambda-2n)a_n\right]x^n=0$$

故递推公式为

$$a_{n+2}=\frac{2n-\lambda}{(n+2)(n+1)}a_n(n=0,1,\cdots)$$

故

$$a_{2n}=\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(4k-\lambda)}{(2n)!}a_0(n\geq 1), a_{2n+1}=\frac{\prod_{k=1}^{n}(4k-2-\lambda)}{(2n+1)!}a_1(n\geq 1)$$

故方程的解为

$$y=a_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(4k-\lambda)}{(2n)!}x^{2n}\right]+a_1\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\prod_{k=1}^{n}(4k-2-\lambda)}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right]$$ □

4. 求微分方程

$$y''+(\sin x)y=0$$

在 $x=0$ 处展开的两个线性无关的幂级数解.

解: 设方程有幂级数解 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 将之代入方程得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)=0$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\right)=0$$

也即 (下面的式子可以通过观察前几项 $x^n(n\geq 3)$ 的系数归纳得到: $\left(a_2-\frac{1}{3!}a_0\right)x^3$, $\left(a_3-\frac{1}{3!}a_1\right)x^4, \left(a_4-\frac{1}{3!}a_2+\frac{1}{5!}a_0\right)x^5, \left(a_5-\frac{1}{3!}a_3+\frac{1}{5!}a_1\right)x^6$)

$$2a_2+(3\cdot 2a_3+a_0)x+(4\cdot 3a_4+a_1)x^2+\sum_{n=3}^{\infty}\left[\sum_{\substack{i=0\\ j=n-1-2i}}^{[(n-1)/2]}\frac{(-1)^i}{(2i+1)!}a_j+(n+2)(n+1)a_{n+2}\right]x^n=0$$

令 x 的同次幂系数为零得

$$\begin{aligned}&a_2=0, a_3=-\frac{1}{3!}a_0, a_4=-\frac{1}{3\cdot 4}a_1, a_5=\frac{1}{5!}a_0\\&a_6=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}a_1+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}a_0,\cdots\end{aligned}$$

故方程的幂级数解为

注意教材答案有误

$$y=a_0\left(1-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+\cdots\right)+a_1\left(x-\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}-\cdots\right)$$

分别取 $a_0=1, a_1=0$ 和 $a_0=0, a_1=1$ 可得两个线性无关的解. □

7.3 勒让德多项式

7.3.1 证明与总结

求证: $\mathrm{P}_n(1)=1, \mathrm{P}_n(-1)=(-1)^n$.

证明: 利用积函数求导的 Leibniz 公式得

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_n(x)&=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\\&=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left((x+1)^n(x-1)^n\right)\\&=\frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x+1)^n\right)\left(\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}(x-1)^n\right)\\&=\frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{n!}{(n-k)!}(x+1)^{n-k}\right)\left(\frac{n!}{k!}(x-1)^k\right)\\&=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2(x+1)^{n-k}(x-1)^k\end{aligned}$$

故 $\mathrm{P}_n(1)=1, \mathrm{P}_n(-1)=(-1)^n$. □

注: 结合本题结论, 我们已经得到 Legendre 多项式的三种表达形式:

$$\mathrm{P}_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2(x+1)^{n-k}(x-1)^k$$

7.3.2 习题

*1. 令函数

$$G(x,t)=(1-2xt+t^2)^{-1/2}$$

则 $G(x,t)$ 关于 t 展开的幂级数为

$$G(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{P}_n(x)t^n,$$

其中 $\mathrm{P}_n(x)$ 是勒让德多项式 (函数 $G(x,t)$ 称为勒让德多项式的母函数 Generating Function).

证明: 首先容易证明一个双重求和关系式

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}A(n,k)t^{n+k}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}A(n-k,k)t^n\cdots(*)$$

令 $u(x,t)=2xt-t^2$, 则由幂级数公式 $(1+x)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$ 知

$$\begin{aligned}
G(x,t) &= (1-u)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}u^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(2xt-t^2)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{(-1)^k(2n-1)!!}{(2n)!!}(2xt)^{n-k}t^{2k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n!(2n-1)!!}{k!(n-k)!(2n)!!}(2x)^{n-k}t^{n+k}(\text{according to }(*)) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k(n-k)!(2n-2k-1)!!}{k!(n-2k)!(2n-2k)!!}2^{n-2k}x^{n-2k}t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k(n-k)!(2n-2k-1)!!}{2^n k!(n-2k)!(2n-2k)!!}2^{2n-2k}x^{n-2k}t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k\left[2^{n-k}(n-k)!(2n-2k-1)!!\right]}{2^n k!(n-2k)!\left[(2n-2k)!!/2^{n-k}\right]}x^{n-2k}t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{P}_n(x)t^n
\end{aligned}$$

证毕. □

2. 利用上题中的 $G(x,t)$ 所满足的恒等式

$$(1-2xt+t^2)\frac{\partial G}{\partial t}=(x-t)G,$$

证明下述递推公式:

$$(n+1)\mathrm{P}_{n+1}(x)-(2n+1)x\mathrm{P}_n(x)+n\mathrm{P}_{n-1}(x)=0(n\geq 1).$$

证明: 因为

$$G(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{P}_n(x)t^n$$

所以

$$\frac{\partial G}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}n\mathrm{P}_n(x)t^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\mathrm{P}_{n+1}(x)t^n$$

又 $(1-2xt+t^2)\frac{\partial G}{\partial t}=(x-t)G$, 故

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\mathrm{P}_{n+1}(x)t^n-2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\mathrm{P}_{n+1}(x)t^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\mathrm{P}_{n+1}(x)t^{n+2}=x\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{P}_n(x)t^n-\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{P}_n(x)t^{n+1}$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\mathrm{P}_{n+1}(x)t^n-2x\sum_{n=0}^{\infty}n\mathrm{P}_n(x)t^n-x\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{P}_n(x)t^n+\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\mathrm{P}_{n-1}(x)t^n+\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}_{n-1}(x)t^n=0$$

也即

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\mathrm{P}_{n+1}(x)t^n-\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x\mathrm{P}_n(x)t^n+\sum_{n=1}^{\infty}n\mathrm{P}_{n-1}(x)t^n=0$$

故

$$(n+1)\mathrm{P}_{n+1}(x)-(2n+1)x\mathrm{P}_n(x)+n\mathrm{P}_{n-1}(x)=0(n\geq 1).$$ □

*3. 利用刘维尔公式求出勒让德方程的另一个与 $\mathrm{P}_n(x)$ 线性无关的解 $Q_n(x)$, 并且证明: 当 $x<1$ 而 $x\to 1$ 时, $|Q_n(x)|\to+\infty$.

证明: 由所学结论知

$$Q_n(x)=\mathrm{P}_n(x)\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\mathrm{P}_n^2(s)}\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{s}\frac{-2t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}s=\mathrm{P}_n(x)\int_{x_0}^{x}\frac{1-x_0^2}{\mathrm{P}_n^2(s)(1-s^2)}\,\mathrm{d}s$$

因为 $\mathrm{P}_n(1)=1$, 所以存在 $x_0\in(0,1)$ 使得当 $x\in[x_0,1]$ 时

$$\frac{1}{2}\leq\mathrm{P}_n(x)\leq 2$$

所以

$$Q_n(x)\geq\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{1-x_0^2}{4(1-s^2)}\,\mathrm{d}s=\frac{1-x_0^2}{16}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}-\ln\frac{1+x_0}{1-x_0}\right)\to+\infty(x\to 1-)$$

即

$$\lim_{x\to 1-}Q_n(x)=+\infty$$ □

7.4 广义幂级数解法

7.4.1 证明与总结

考虑微分方程

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0$$

设 x_0 为其奇点, 将方程变形为

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

若 $(x-x_0)p(x)$ 和 $(x-x_0)^2q(x)$ 在 x_0 附近解析, 则 x_0 是正则奇点, 此时方程有收敛的广义幂级数解

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-x_0)^{n+\rho}(C_0 \neq 0)$$

其中指标 ρ 的求解方程为: $\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0=0$, 其中 a_0, b_0 分别为下述方程中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 在 $x=x_0$ 处的取值:

$$(x-x_0)^2y'' + (x-x_0)P(x)y' + Q(x)y = 0.$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)(k+\rho-1)C_k(x-x_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)C_k(x-x_0)^k \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k \sum_{k=0}^{\infty} C_k(x-x_0)^k \\
=&\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)(k+\rho-1)C_k(x-x_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} a_j(k-j+\rho)C_{k-j}(x-x_0)^k \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} b_jC_{k-j}(x-x_0)^k = 0
\end{aligned}$$

故

$$(k+\rho)(k+\rho-1)C_k + \sum_{j=0}^{k} a_j(k-j+\rho)C_{k-j} + \sum_{j=0}^{k} b_jC_{k-j} = 0(k=0,1,\cdots)$$

当 $k=0$ 时, 即为 $C_0(\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0)=0$, 当 $k \geq 1$ 时, 即为

$$[(k+\rho)(k+\rho-1)+a_0(k+\rho)+b_0]\,C_k + \sum_{j=1}^{k}\left(a_j(k-j+\rho)+b_j\right)C_{k-j} = 0$$

记 $f_0(\rho)=\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0, f_j(\rho)=a_j\rho+b_j$, 则上式即为

$$C_kf_0(\rho+k)+\sum_{j=1}^{k}C_{k-j}f_j(\rho+k-j)=0(k\geq 1).$$

7.4.2 习题

1. 试判别 $x=-1,0,1$ 是下列微分方程的什么点 (常点, 正则奇点或非正则奇点)?

(1)$xy''+(1-x)y'+xy=0$;

(2)$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$;

(3)$2x^4(1-x^2)y''+2xy'+3x^2y=0$;

(4)$x^2(1-x^2)y''+2x^{-1}y'+4y=$;

(5)$y''+\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^2y'+3(1+x)^2y=0$.

解: (1)$x=\pm 1$ 为常点, $x=0$ 为正则奇点;

(2)$x=\pm 1$ 为正则奇点, $x=0$ 为常点;

(3)$x=\pm 1$ 为正则奇点, $x=0$ 为非正则奇点;

(4)$x=\pm 1$ 为正则奇点, $x=0$ 为非正则奇点;

(5)$x=0,x=1$ 为常点, $x=-1$ 为非正则奇点. □

2. 用广义幂级数求解下列微分方程:

(1)$2xy''+y'+xy=0$;

(2)$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{9}\right)y=0$;

(3)$2x^2y''-xy'+(1+x)y=0$;

(4)$xy''+y=0$;

(5)$xy''+y'-y=0$.

解: (1) 设广义幂级数解为

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}C_kx^{k+\rho}$$

将之代入方程得

$$\sum_{k=-1}^{\infty}\left((k+\rho+1)(2k+2\rho+1)C_{k+1}+C_{k-1}\right)x^{k+\rho}=0(C_{-2}=C_{-1}=0)$$

指标方程为: $\rho(2\rho-1)=0\Rightarrow\rho=0,\frac{1}{2}$.

当 $\rho=0$ 时, $(k+1)(2k+1)C_{k+1}+C_{k-1}=0\Rightarrow C_{k+1}=\frac{-C_{k-1}}{(k+1)(2k+1)}(k\geq 0)$, 故 $C_{2k+1}=0(k\geq 0)$

且

$$C_{2k}=\frac{-C_{2k-2}}{2k(4k-1)}=\frac{C_{2k-4}}{2k(4k-1)(2k-2)(2k-5)}=\cdots=\frac{(-1)^kC_0}{2^kk!3\cdot 7\cdot\cdots\cdot(4k-1)}(k\geq 1)$$

此时解为

$$y_1=C_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{2^nn!3\cdot 7\cdot\cdots\cdot(4n-1)}\right].$$

当 $\rho=\frac{1}{2}$ 时, $(k+\frac{3}{2})(2k+2)C_{k+1}+C_{k-1}=0\Rightarrow C_{k+1}=\frac{-C_{k-1}}{(2k+3)(k+1)}(k\geq 0)$, 故 $C_{2k+1}=0(k\geq 0)$ 且

$$C_{2k}=\frac{-C_{2k-2}}{2k(4k+1)}=\frac{C_{2k-4}}{2k(4k+1)(2k-2)(4k-3)}=\cdots=\frac{2^kC_0}{2^kk!5\cdot 9\cdot\cdots\cdot(4k+1)}(k\geq 1)$$

此时解为

$$y_2=C_0x^{\frac{1}{2}}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{2^nn!5\cdot 9\cdot\cdots\cdot(4n+1)}\right].$$

(2) 此方程为贝塞尔方程且对应的 $n=\frac{1}{3}$, 由教材讨论知此方程的解为

$$y_1=\mathrm{J}_{\frac{1}{3}}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma\left(k+\frac{4}{3}\right)\Gamma(k+1)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{3}}$$

$$y_2=\mathrm{J}_{-\frac{1}{3}}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma\left(k+\frac{2}{3}\right)\Gamma(k+1)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\frac{1}{3}}$$

(3) 设广义幂级数解为

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}C_kx^{k+\rho}$$

将之代入方程得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[((k+\rho)(2k+2\rho-3)+1)C_k+C_{k-1}\right]x^{k+\rho}=0(C_{-1}=0)$$

指标方程为: $\rho(2\rho-3)+1=0\Rightarrow\rho=1,\frac{1}{2}$.
当 $\rho=1$ 时, $((k+1)(2k-1)+1)C_k+C_{k-1}=0$, 故

$$C_k=\frac{-C_{k-1}}{k(2k+1)}=\frac{C_{k-2}}{k(2k+1)(k-1)(2k-1)}=\cdots=\frac{(-1)^kC_0}{k!(2k+1)!!}(k\geq 1)$$

此时解为

$$y_1=C_0x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{n!(2n+1)!!}\right].$$

当 $\rho = \frac{1}{2}$ 时, $((k+\frac{1}{2})(2k-2)+1)C_k + C_{k-1} = 0$, 故

$$C_k = \frac{-C_{k-1}}{k(2k-1)} = \frac{C_{k-2}}{k(2k-1)(k-1)(2k-3)} = \cdots = \frac{(-1)^k C_0}{k!(2k-1)!!}(k \geq 1)$$

此时解为

$$y_2 = C_0 x^{\frac{1}{2}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!(2n-1)!!}\right].$$

(4) 设广义幂级数解为

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+\rho}$$

将之代入方程得

$$\sum_{k=-1}^{\infty} ((k+\rho+1)(k+\rho)C_{k+1} + C_k)x^{k+\rho} = 0(C_{-1} = 0)$$

指标方程为: $\rho(\rho-1) = 0 \Rightarrow \rho = 0, 1$.
当 $\rho = 1$ 时, $(k+1)(k+2)C_{k+1} + C_k = 0 \Rightarrow C_{k+1} = \frac{-C_k}{(k+1)(k+2)}$, 故

$$C_k = \frac{-C_{k-1}}{k(k+1)} = \cdots = \frac{(-1)^k C_0}{k!(k+1)!}(k \geq 1)$$

此时解为

$$y = C_0 x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!(n+1)!}\right].$$

当 $\rho = 0$ 时, $(k+1)kC_{k+1} + C_k = 0$, 令 $k = 0$ 得 $C_0 = 0$, 不符合条件故舍去.
(5) 设广义幂级数解为

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+\rho}$$

将之代入方程得

$$\sum_{k=-1}^{\infty} \left[(k+\rho+1)^2 C_{k+1} - C_k\right] x^{k+\rho} = 0$$

指标方程为: $\rho^2 = 0 \Rightarrow \rho = 0$, 故 $(k+1)^2 C_{k+1} - C_k = 0$, 因此

$$C_k = \frac{C_{k-1}}{k^2} = \cdots = \frac{C_0}{(k!)^2}(k \geq 1)$$

故方程的解为

$$y = C_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}\right]. \qquad \square$$

3. 设超几何方程

$$x(1-x)y''+[\gamma-(1+\alpha+\beta)]y'-\alpha\beta y=0$$

其中 α,β,γ 是常数.
(1) 证明 $x=0$ 是一个正则奇点, 相应的指标根为

$$\rho_1=0 \quad 和 \quad \rho_2=1-\gamma;$$

(2) 证明 $x=1$ 也是一个正则奇点, 相应的指标根为

$$\rho_1=0 \quad 和 \quad \rho_2=\gamma-\alpha-\beta;$$

(3) 设 $1-\gamma$ 不是整数, 则超几何方程在 $x=0$ 的邻域内有一个幂级数解为

$$y_1=1+\frac{\alpha\beta}{\gamma\cdot 1!}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)2!}x^2+\cdots$$

(**超几何级数**). 试问它的收敛半径是什么?
(4) 设 $1-\gamma$ 不是整数, 则第二个解是

$$\begin{aligned}y_2=&x^{1-\gamma}\left[1+\frac{(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)}{(2-\gamma)1!}x\right.\\&\left.\frac{(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)(\beta-\gamma+1)(\beta-\gamma+2)}{(2-\gamma)(3-\gamma)2!}x^2+\cdots\right].\end{aligned}$$

证明: (1) 因为 $\frac{\gamma-(1+\alpha+\beta)x}{1-x}$ 和 $\frac{\alpha\beta x}{x-1}$ 在 $x=0$ 的邻域内解析, 所以 $x=0$ 是正则奇点, 原方程等价于

$$x^2y''+\frac{x[\gamma-(1+\alpha+\beta)x]}{1-x}y'-\frac{\alpha\beta x}{1-x}y=0$$

故 $a_0=\gamma, b_0=0$, 故指标方程为: $\rho(\rho-1)+\gamma\rho=0\Rightarrow\rho_1=0,\rho_2=1-\gamma$.
(2) 因为 $\frac{\gamma-(1+\alpha+\beta)x}{-x}$ 和 $\frac{\alpha\beta(x-1)}{x}$ 在 $x=1$ 的邻域内解析, 所以 $x=1$ 是正则奇点, 原方程等价于

$$(x-1)^2y''+(x-1)\frac{(1+\alpha+\beta)x-\gamma}{x}y'+\frac{x-1}{x}\alpha\beta y=0$$

故 $a_0=1+\alpha+\beta-\gamma, b_0=0$, 故指标方程为: $\rho(\rho-1)+(1+\alpha+\beta-\gamma)\rho=0\Rightarrow\rho_1=0,\rho_2=\gamma-\alpha-\beta$.
(3) 对于 $\rho_1=0$, 设方程的幂级数解为

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}C_kx^k$$

将之代入原方程得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+1)(k+\gamma)C_{k+1}-(k+\alpha)(k+\beta)C_k\right]x^k=0$$

故

$$C_{k+1}=\frac{(k+\alpha)(k+\beta)}{(k+1)(k+\gamma)}C_k(k\geq 0)$$

由此得到 (3) 中所示的一个解.

记 $a_n=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)n!}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\gamma+n)(n+1)}=1$$

故级数收敛半径为 1.

(4) 设 $\rho=1-\gamma$ 对应的广义幂级数解为

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n-\gamma+1}$$

则将之代入原方程得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\big[(n+1-\gamma)na_n-(\alpha+n-\gamma)(\beta+n-\gamma)a_{n-1}\big]x^{n-\gamma}=0$$

故

$$a_n=\frac{(\alpha+n-\gamma)(\beta+n-\gamma)}{(n+1-\gamma)n}a_{n-1}(n\geq 1)$$

所以

$$a_n=\frac{(\alpha-\gamma+1)\cdots(\alpha-\gamma+n)(\beta-\gamma+1)\cdots(\beta-\gamma+n)}{(2-\gamma)\cdots(n+1-\gamma)n!}a_0(n\geq 1)$$

取 $a_0=1$, 则得广义幂级数解

$$y=x^{1-\gamma}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha-\gamma+1)\cdots(\alpha-\gamma+n)(\beta-\gamma+1)\cdots(\beta-\gamma+n)}{(2-\gamma)\cdots(n+1-\gamma)n!}x^n\right].$$

□

7.5 贝塞尔函数

1. 试证:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-n}\mathrm{J}_n(x)\right]=-x^{-n}\mathrm{J}_{n+1}(x);$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{n}\mathrm{J}_n(x)\right]=x^{n}\mathrm{J}_{n-1}(x).$$

证明: 只证明第二式

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-n}\mathrm{J}_n(x)\right]\\
=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^n\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}\right)\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+n}(2k+2n)x^{2n+2k-1}\\
=&x^n\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(n+k)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n-1}\\
=&x^n\mathrm{J}_{n-1}(x).
\end{aligned}
$$

证毕. □

2. 证明半整数阶的贝塞尔函数为

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{J}_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x,\mathrm{J}_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x,\\
&\mathrm{J}_{n+\frac{1}{2}}(x)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}}(2x)^{n+\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}^n}{(\,\mathrm{d}x^2)^n}\frac{\sin x}{x},\\
&\mathrm{J}_{-n-\frac{1}{2}}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(2x)^{n+\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}^n}{(\,\mathrm{d}x^2)^n}\frac{\cos x}{x}(n=0,1,2,\cdots).
\end{aligned}
$$

证明:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_{\frac{1}{2}}(x)=&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}\\
=&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}\\
=&\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\\
=&\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_{-\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\left(k-\frac{1}{2}\right)\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_{n+\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma\left(n+k+\frac{3}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}+2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\left(n+k+\frac{1}{2}\right)\left(n+k-\frac{1}{2}\right)\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}+2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{n+\frac{1}{2}}(n+k)(n+k-1)\cdots(k+1)}{\sqrt{\pi}(2n+2k+1)!} x^{n+\frac{1}{2}+2k} \cdots (*)
\end{aligned}$$

将 $\frac{\sin x}{x}$ 展成幂级数并且令 $x^2 = t$, 得

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^k = \sum_{k=-n}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{(2n+2k+1)!} t^{n+k}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}^n}{(\mathrm{d}x^2)^n} \frac{\sin x}{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^n} \left(\sum_{k=-n}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{(2n+2k+1)!} t^{n+k} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}(n+k)(n+k-1)\cdots(k+1)}{(2n+2k+1)!} t^k$$

结合 $(*)$ 得

$$\mathrm{J}_{n+\frac{1}{2}}(x) == \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}} (2x)^{n+\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}^n}{(\mathrm{d}x^2)^n} \frac{\sin x}{x}$$

最后一式同理可证. □

3. 用贝塞尔函数表达微分方程

$$y'' + xy = 0$$

的通解.

解: 令 $x = \left(\frac{3}{2}u\right)^{\frac{2}{3}}, y = x^{\frac{1}{2}} v$, 则

$$u = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}, v = y x^{-\frac{1}{2}} \cdots (*)$$

对 x 求导得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\sqrt{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}y=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\sqrt{x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

上式两端乘以 x 并整理得

$$\sqrt{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y+x^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\cdots(**)$$

由 $(*)(**)$ 得

$$\sqrt{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}v+\frac{3}{2}u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\cdots(***)$$

上式对 x 求导得

$$\sqrt{x}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{1}{2}v+\frac{3}{2}u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\left[\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}+\frac{3}{2}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}+u\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2}\right)\right]\sqrt{x}$$

两端乘以 x 并结合 $(*)(***)$ 得

$$x^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}+\frac{1}{2}v\right)=\frac{3}{2}u\left(\frac{3}{2}u\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2}+2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)$$

故

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{2}{3u}\left(\frac{9}{4}u^2\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2}+\frac{9}{4}u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}-\frac{1}{4}v\right)$$

又

$$xy=\left(\frac{3}{2}u\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{2}u\right)^{\frac{1}{3}}v=\frac{3}{2}uv$$

故

$$\frac{2}{3u}\left(\frac{9}{4}u^2\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2}+\frac{9}{4}u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}-\frac{1}{4}v\right)+\frac{3}{2}uv=0$$

即

$$u^2\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2}+u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}+\left(u^2-\frac{1}{9}\right)v=0$$

因此

$$v=C_1\mathrm{J}_{\frac{1}{3}}(u)+C_2\mathrm{J}_{-\frac{1}{3}}(u)$$

从而原方程的解为

$$y=\sqrt{x}\left[C_1\mathrm{J}_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)+C_2\mathrm{J}_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\right].\qquad\square$$