Zasadnicze transmitancję w URA i funkcje wrażliwości

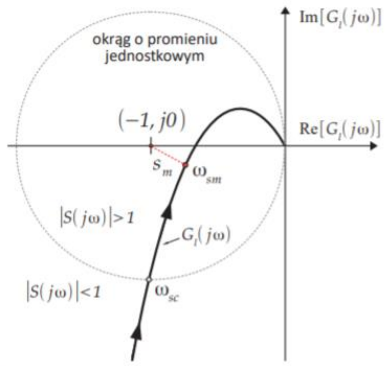
$$\frac{G_R G_o}{1+G_R G_o}, \qquad \frac{G_o}{1+G_R G_o}, \qquad \frac{G_R}{1+G_R G_o}, \qquad \frac{1}{1+G_R G_o}$$

$$\underbrace{\frac{G_R(j\omega)G_o(j\omega)}{1+G_R(j\omega)G_o(j\omega)}}_{T(j\omega)} + \underbrace{\frac{1}{1+G_R(j\omega)G_o(j\omega)}}_{S(j\omega)} = 1 \quad \forall\omega \in [0;\infty)$$

- Funkcja wrażliwości

$$S(j\omega) = \frac{1}{1+G_R(j\omega)G_o(j\omega)} = \frac{1}{1+G_l(j\omega)}$$

Moduł funkcji wrażliwości określa miarę odporności jakości sterowania w URA i określa miarę względnej efektywności tłumienia wpływu zewnętrznego zaburzenia D w URA.



$$\boxed{s_m \triangleq \frac{1}{M_S}}, \qquad M_S \triangleq \max_{\omega\in[0;\infty)} |S(j\omega)| = \max_{\omega\in[0;\infty)} \left|\frac{1}{1+G_l(j\omega)}\right|$$

- Komplementarna funkcja wrażliwości

$$T \overset{(6)}{=} 1 - S = 1 - \frac{1}{1+G_R G_o} = \frac{G_R G_o}{1+G_R G_o} \equiv G_c \Rightarrow \boxed{\frac{Y(j\omega)}{Y_r(j\omega)} = T(j\omega)}$$

Określa miarę jakości regulacji w URA. Moduł jej określa miarę odporności stabilności URA na duże zaburzenia modelu obiektu.

Górne ograniczenie dopuszczalnej względnej zmiany transmitancji obiektu regulacji:

$$\boxed{t_m \triangleq \frac{1}{M_T}}, \qquad M_T \triangleq \max_{\omega\in[0;\infty)} |T(j\omega)| = \max_{\omega\in[0;\infty)} \left|\frac{G_R(j\omega)G_o(j\omega)}{1+G_R(j\omega)G_o(j\omega)}\right|$$

- Pasmo przenoszenia

$$\boxed{[0;\omega^*], \qquad \omega^* \in \{\omega_b, \omega_c, \omega_{bt}\} > 0}$$

- ω_b – określa pasmo przenoszenia URA z perspektywy funkcji $S(j\omega)$ – przejście $\mathrm{Lm}(S(j\omega))$ **od dołu** przez wartość $-3dB \;\Rightarrow\; |S(j\omega_b)| = 1/\sqrt{2} \approx 0.707)$
- ω_c – pulsacja, dla której $\mathrm{Lm}(G_l(j\omega_c)) = 0dB \;\Rightarrow\; |G_l(j\omega_c)| = 1 \quad (G_l(j\omega) \triangleq G_R(j\omega)G_o(j\omega))$
- ω_{bt} – określa pasmo przenoszenia URA z perspektywy funkcji $T(j\omega)$ – przejście $\mathrm{Lm}(T(j\omega))$ **od góry** przez wartość $-3dB \;\Rightarrow\; |T(j\omega_{bt})| = 1/\sqrt{2} \approx 0.707)$

Dla większości systemów praktycznych zachodzi relacja: $\boxed{\omega_b \leqslant \omega_c \leqslant \omega_{bt}}$.

Wskaźniki jakości sterowania

- ustalony (uśredniony) uchyb regulacji

$$|e(\infty)| = \lim_{t\to\infty} |e(t)| \qquad \text{lub} \qquad |e(t \geqslant \bar{t})| \qquad \text{lub} \qquad m \triangleq \frac{1}{N}\sum_{i=N_1}^{N_2} e^*(iT_p) \tag{15}$$

dla: $\bar{t} \gg 0, \quad \bar{t} \leqslant T_pN_1 \ll T_pN_2 < \infty, \quad N = N_2 - N_1.$

Przy braku pomiarowych zakłóceń losowych $d_p(t)$ stan 'ustalony' w praktyce określa się dla $\bar{t} \geqslant 5T$, gdzie $T > 0$ jest dominującą stałą czasową odpowiedzi $y(t)$. W obecności zakłóceń losowych $d_p(t)$ wyznacza się wartość średnią m dla sygnału $e^* \triangleq e - d_p$.

- kres górny bezwzględnej wartości uchybu quasi-ustalonego

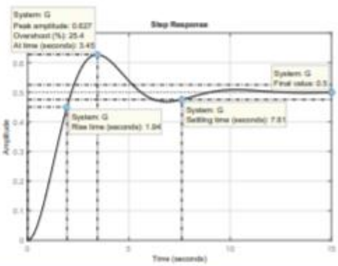
$$\sup_{t\in[t_1;t_2]} |e(t)| \quad \text{dla} \quad \bar{t} \leqslant t_1 \ll t_2 < \infty \tag{16}$$

Stosowane w przypadku ustalonych oscylacji uchybu w otoczeniu zera pomimo braku pomiarowych zakłóceń losowych.

- empiryczna wariancja uchybu quasi-ustalonego

$$\sigma^2 = \frac{1}{N_2 - N_1 - 1}\sum_{i=N_1}^{N_2} [e^*(iT_p) - m]^2, \qquad \bar{t} \leqslant T_pN_1 \ll T_pN_2 < \infty \tag{17}$$

- czas narastania T_r – czas pierwszego osiągnięcia 90% wartości $y(\infty)$
- czas ustalania $T_{s\alpha\%}$ do tunelu $\alpha\%$ – czas wejścia w tunel $\pm\alpha\%$ wokół wartości $y(\infty)$
- przeregulowanie względne: $\kappa_{\%} \triangleq \frac{\bar{y} - |y(\infty)|}{|y(\infty)|}100\%, \quad \bar{y} \triangleq \sup_{t\in[t_0,\infty)} |y(t)|$
- dekrement tłumienia: $\rho \triangleq \frac{y_2}{y_1}, \quad y_1 \equiv \bar{y},\; y_2$ – druga amplituda wychylenia ponad $|y(\infty)|$
- energia uchybu w horyzoncie czasowym $(t_2 - t_1) > 0$: $\quad J_e \triangleq \int_{t_1}^{t_2} e^2(t)dt$
- koszt sterowania w horyzoncie czasowym $(t_2 - t_1) > 0$: $\quad J_u \triangleq \int_{t_1}^{t_2} u^2(t)dt$



Terminologia anglojęzyczna:
T_r (rise time), $T_{s\alpha\%}$ (settling time), $\kappa_{\%}$ (relative overshoot), ρ (decay ratio), J_e (error energy), J_u (control cost)

Popularne zakresy projektowe

- $1\% \leqslant \alpha \leqslant 5\%$
- $\kappa_{\%} \leqslant 20\%$
- $\rho \leqslant 0.3$

- maksymalna wrażliwość

$$M_S \triangleq \max_{\omega\in[0;\infty)} |S(j\omega)| = \max_{\omega\in[0;\infty)} \left|\frac{1}{1 + G_R(j\omega)G_o(j\omega)}\right| \tag{18}$$

- maksymalna komplementarna wrażliwość

$$M_T \triangleq \max_{\omega\in[0;\infty)} |T(j\omega)| = \max_{\omega\in[0;\infty)} \left|\frac{G_R(j\omega)G_o(j\omega)}{1 + G_R(j\omega)G_o(j\omega)}\right| \tag{19}$$

- margines stabilności s_m oraz górne ograniczenie t_m dopuszczalnej względnej zmiany G_o

$$s_m \triangleq \frac{1}{M_S}, \qquad t_m \triangleq \frac{1}{M_T} \tag{20}$$

- zapas modułu GM (*Gain Margin*) i zapas fazy PM (*Phase Margin*) – związki z M_S i M_T

$$\mathrm{GM} \geqslant \frac{M_S}{M_S - 1}, \qquad \mathrm{PM} \geqslant 2\arcsin\left(\frac{1}{2M_S}\right) \tag{21}$$

$$\mathrm{GM} \geqslant \frac{M_T + 1}{M_T}, \qquad \mathrm{PM} \geqslant 2\arcsin\left(\frac{1}{2M_T}\right) \tag{22}$$

(Np. dla $M_S = 1.7$ mamy $\mathrm{GM} \geqslant 2.4$ i $\mathrm{PM} \geqslant 34°$, dla $M_T = 1.1$ mamy $\mathrm{GM} \geqslant 1.9$ i $\mathrm{PM} \geqslant 54°$)

Fundamentalne ograniczenia

- Niekompensowalność zer w RHP oraz opóźnienia transportowego.
- Ograniczenie wzmocnienia regulatora z powodu zer w RHP- można dojść do utraty stabilności
- Początkowe podregulowanie z powodu zera w RHP
- Całka Bodego

$$\int_0^{\infty} \ln|S(j\omega)|\,\mathrm{d}\omega = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad \tau > 0 \\ -\mu\frac{\pi}{2} & \text{dla} \quad \tau = 0 \end{cases}, \qquad \text{gdzie} \qquad \mu \triangleq \lim_{s\to\infty} sH_l(s).$$

- Skuteczność FFr przy nieznajomości modelu obiektu

Koszt sterowania

$$J_u \triangleq \int_{t_1}^{t_2} u^2(t)dt, \qquad 0 \leqslant t_1 < t_2 < \infty$$