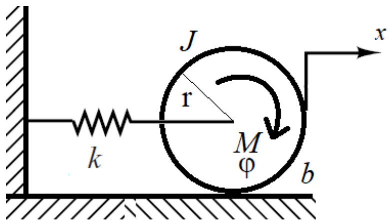
Zadania powtórzeniowe przed kolokwium

Poniżej przedstawiam zestaw zadań, które pozwolą powtórzyć większość materiału z zajęć. Nie należy jednak traktować go jako „przykładowe zaliczenie". To odbędzie się w pełni na kartkach, a zadania będą krótkie, dotyczące różnych zagadnień i obiektów – aby niewykonanie jednego z poleceń nie pociągało za sobą brak kolejnych. Poniższe da się też wykonać w programie, co polecam zrobić, by usystematyzować wiedzę.

Przygotowując się do zaliczenia, proszę zwrócić uwagę na rzeczy, które zaznaczałem na zajęciach podczas omawiania wspólnego wyników. Rozumiejąc to, co się tam działo, na pewno nie będzie problemu. ☺

Zadania da się wykonać w programie Octave, przy załadowaniu przybornika `pkg load control`.

Zadanie 1. Dany jest układ pokazany schematycznie poniżej. Składa się z toczącego się walca połączonego sprężyną ze ścianą. Zakłada się, że dla $x = 0$ sprężyna jest nienaciągnięta oraz ruch odbywa się bez poślizgu. Moment M jest sygnałem wymuszającym, a pomiarem jest przemieszczenie liniowe x.



Układ składa się z walca o momencie bezwładności J i promieniu r poruszającego się z tarciem (działającym w miejscu styku powierzchni), połączonego sprężyną z krawędzią. Jego przemieszczenie wynosi x, wymuszeniem układu jest moment siły M.

Z dokumentacji odczytać można równanie różniczkowe obiektu, wiążące wejście z wyjściem:

$$2\ddot{x} + 0.5\dot{x} + 3x = M$$

1. Na podstawie równania różniczkowego wyznacz transmitancję operatorową $G(s)$ oraz macierzowe równania stanu obiektu.

   → Sprawdź odpowiedź skokową, charakterystyki Bodego oraz wartości biegunów układu (funkcje `step`, `bode`, `eig`). Określ, jaki to będzie człon automatyki.

   → Zastanów się, jaki byłby charakter odpowiedzi, gdyby przyjąć zerowy współczynnik sprężystości, a jaki dla zerowego współczynnika tarcia.

2. Stosując liniowe przekształcenie, zmodyfikuj równania stanu tak, aby zmienne stanu były związane nie z ruchem postępowym, a obrotowym. Wykorzystaj własność miary łukowej kąta $x = r\varphi$. Z dokumentacji odczytano, że promień walca $r = 0.5$ m.

   → Znając sens fizyczny zmiennych stanu, zaproponuj macierz transformacji $\boldsymbol{P}$ przekształcającą zmienne stanu ze współrzędnych x na φ (przemieszczenie i prędkość kątowa) i wyznacz w programie macierze nowego układu.

   → Zdefiniuj nowe równania stanu i sprawdź, czy zachowanie układu (odpowiedź) oraz wartości biegunów pozostały takie same. Wyznacz transmitancję dla nowych równań stanu (funkcja `ss2tf` lub `tf(sys)` dla zdefiniowanego obiektu `sys`).

   → Za pomocą funkcji `[y,t,x] = step(sys)` sprawdź przebieg zmiennych stanu dla układu podstawowego i po transformacji. Czy przebiegi są takie same?

   W kolejnych punktach działaj na układzie po transformacji.

3. Zapisz dwie możliwe postacie macierzy stanu diagonalnej dla tego układu. Czy odpowiedź skokowa układu diagonalnego byłaby taka sama jak dwie poprzednie? Czy po diagonalizacji z wykorzystaniem wektorów własnych zmienne stanu miałyby nadal sens fizyczny?

4. Wykreśl w programie charakterystykę statyczną układu i odczytaj z niej, jakie wzmocnienie statyczne układ posiada, porównując odczyt z wynikiem odpowiedzi skokowej.

5. Wykreśl trajektorię fazową zmiennych stanu. Przeanalizuj jej przebieg w oparciu o odpowiedź skokową.

6. Dokonaj w programie dyskretyzacji układu metodą Tustina (funkcja `c2d` z ostatnim argumentem `'tustin'`) oraz wyznacz ręcznie macierze dyskretne metodą ekstrapolacyjną Eulera. Zaimplementuj działanie układu w pętli `for`, wyświetlając przebieg czasowy wyjścia, a także zmiennych stanu (trzeba je w każdym kroku zapisywać).

   → Którą z tych metod lepiej wykorzystać, mając do dyspozycji urządzenie słabe obliczeniową (wolno przetwarzające dane) i dlaczego? Poprzyj odpowiedź symulacyjnie.

   → Dlaczego w praktyce najchętniej wykorzystywana jest jednak metoda δ?

7. Wyznacz za pomocą funkcji `place` wzmocnienia sprzężenia od stanu tak, aby nadać układowi własności dwuinercyjne, nieoscylacyjne.

   → W praktyce układ nie może osiągać nieograniczonej prędkości. Sprawdź moduły biegunów w oryginalnym układzie (funkcja `abs`) i ulokuj bieguny układu zamkniętego na wartościach rzeczywistych o podobnych modułach. Tak, aby nie uszkodzić obiektu przez próbę nadania zbyt szybkiej dynamiki.

   → Zdefiniuj nowy układ (zamknięty), uaktualniając macierz stanu $\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_x$. Sprawdź, podobnie jak wcześniej, wartości jego biegunów, charakterystykę statyczną oraz trajektorię fazową.

   → Zrealizuj układ za pomocą solvera do rozwiązywania równań różniczkowych `ode45`, implementując w nim oryginalny obiekt, ale doprowadzając do niego na wymuszeniu sygnał ze sprzężenia, zgodnie z: $u = u' + \boldsymbol{K}_x \cdot \underline{x}$ (jak na zajęciach).

   W praktyce bowiem obiekt jest czymś rzeczywistym i nie można zmienić jego parametrów wewnętrznych, jak w poprzednim punkcie. Zmianę dynamiki uzyskuje się poprzez podanie informacji z obiektu do sygnału sterującego torem sprzężenia.

   Podpowiedź: Wyjście nie stanowi bezpośrednio zmiennej stanu, ale jest kombinacją liniową. Najłatwiej tutaj, rysując wynik poza funkcją, przeskalować daną zmienną, by uzyskać $y = \underline{c}^T \underline{x}$. Solver zwraca tylko zmienne stanu $\underline{x}$.

   → Wróć do dyskretnej realizacji systemu, w pętli. Dodaj tam teraz do poprzedniego sygnału sterującego u' również informacje na temat zmiennych stanu, zgodnie z równaniem:

$$u^{(k)} = u' + k_1 x_1^{(k-1)} + k_2 x_2^{(k-1)}$$

   gdzie współczynniki k_i są wzmocnieniami sprzężenia $\boldsymbol{K}_x = [k_1, k_2]$.

   Czy sprzężenie od stanu działa poprawnie również w układzie dyskretnym?

8. Wyznacz odwrotny model odniesienia dla obiektu o równaniach po transformacji. Narysuj schemat analogowy realizujący sterowanie obiektem ze sprzężeniem od stanu oraz sprzężeniem wyprzedzającym.

9. W programie Simulink / Xcos, za pomocą bloku `Transfer Fcn`, zdefiniuj obiekt (współczynniki transmitancji zostały wyznaczone w punkcie 1). Dodaj do wyjścia zaszumienie (blok `Random Number`). W praktyce obiekt jest to *black box* – mamy możliwość zbierania pomiarów wyjścia, ale wielkości wewnętrzne możemy estymować dzięki znajomości modelu – w tym przypadku równanie z parametrami było dane w dokumentacji.

   → Zauważ, że na wyjściu układu jest przemieszczenie liniowe. Wykonaliśmy liniowe przekształcenie, ponieważ potrzebna była nam znajomość kąta obrotu ciała, którym mamy możliwość sterować z użyciem sprzężenia od stanu – od kąta właśnie zależy teraz stan.
   Zbuduj obserwator stanu, estymujące wielkości $\underline{x}^T = [\varphi, \dot{\varphi}]$. Za pomocą funkcji `acker` dobierz jego wzmocnienia, ustalając równanie charakterystyczne $(s + \omega_0)^2 = 0$. Dobierz wartość pulsacji granicznej.

   → Zmień lekko współczynniki odpowiadające za obiekt w schemacie blokowym obserwatora, uzyskując niepełną znajomość dynamiki; możesz zmienić warunki początkowe w integratorach. Czy dla wybranych nastaw obserwator nadal jest zbieżny do wartości rzeczywistych? W razie potrzeby dostrój parametr ω_0.

   → W tym przypadku zmienne stanu są wybrane jako $x_1 = \varphi$ oraz $x_2 = \dot{\varphi}$, zatem $x_2 = \dot{x}_1$. Można byłoby estymować x_1 na podstawie odwrotnego równania wyjścia (bo ono tylko od tej zmiennej zależy), natomiast z powyższego wyliczać $\hat{x}_2^{(k)} = \frac{\hat{x}_1^{(k)} - \hat{x}_1^{(k-1)}}{T_p}$. Jakie problemy odtwarzania sygnałów mógłby powodować taki sposób?

   → Mając dokonaną syntezę układu (wyznaczone wzmocnienia obserwatora, a wcześniej wzmocnienia sprzężenia i model odwrotny), zrealizuj na powstałym schemacie sterowanie ze sprzężeniem wyprzedzającym (najlepiej skopiować schemat, by zachować też obserwację w układzie otwartym).
   W rzeczywistości mamy dostęp pomiarowy tylko do wyjścia obiektu – na tym przykładzie widać, że stan może oznaczać zupełnie inne wielkości. Do odtworzenia tego stanu posłużył obserwator, z którego zmienne stanu wejdą do sprzężenia i będą porównywane z wielkościami z modelu odniesienia.

10. Za pomocą bloku `To Workspace` podłączonego do sygnału wyjściowego w Simulinku, zapisz w postaci wektora przebieg sygnału pomiarowego. W opcji bloku format zapisu należy zmienić na `Array`. Tutaj działaj na układzie otwartym z p. 9.

   → Na podstawie danych pomiarowych zaimplementuj algorytm filtru Kalmana, estymujący zmienne stanu. Zmień lekko macierze obiektu w algorytmie KF, by zasymulować niepewną jego znajomość i móc podobierać nastawy.

   → Jako dane wzorowe możesz potraktować zapisane przebiegi zmiennych stanu z dobrze nastrojonego obserwatora.

   → Zastanów się, jak w praktyce można zrealizować dyskretny algorytm sterowania wykorzystujący nie tylko informacje pomiarowe, ale i wewnętrzny stan systemu.
   Podpowiedź: opis w pliku na samym dole kursu.

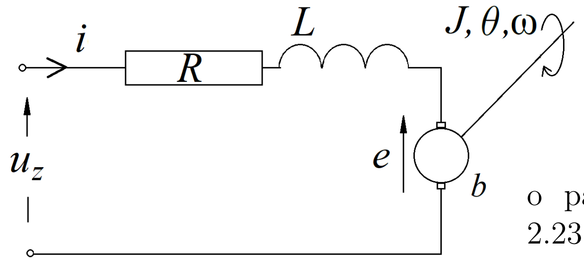
Zadanie 2. Załóżmy teraz, że w obiekcie mamy bardziej złożony model siły tarcia, a nowe równanie różniczkowe ma postać:

$$2\ddot{x} + 0.5\dot{x}|\dot{x}| + 3x = M$$

- → Zapisz nieliniowe równania stanu dla tego układu, przyjmując zmienne fazowe.
- → Przyjmij funkcję Lapunowa $V(\underline{x}) = 0.5(x^2 + k\dot{x}^2)$, gdzie k jest parametrem projektowym. Wyznacz pochodną funkcji oraz wartość parametru k, jaką należy nadać, by zapewnić stabilność asymptotyczną.
- → Wykreśl, używając funkcji `plot3`, przebieg energii oraz jej pochodnej $V(\underline{x})$, $\dot{V}(\underline{x})$.

  Sprawdź przebiegi i spełnienie warunków Lapunowa dla parametru wyznaczonego w poprzednim punkcie, oraz dla innej, dowolnej wartości.
- → Zastanów się, jak należałoby wykonać dyskretyzację dla układu danego nieliniowymi równaniami. Czy dałoby się zastosować w tym celu wszystkie znane metody w taki sam sposób (działania na macierzach)?

Zadanie 3. Dany jest obiekt w postaci silnika prądu stałego, opisany równaniami różniczkowymi:



$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{d\omega}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{k\phi}{L} \\ \frac{k\phi}{J} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u_z \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix} \end{cases}$$

o parametrach $R = 3$ [Ω], $L = 0.05$ [H], $k\phi = 2.23$ [V · s²], $J = 0.11$ [N · m²], $b = 0.35$ [Nm · s].

Zmiennymi stanu są odpowiednio prąd na wale oraz prędkość kątowa wału silnika. Wymuszeniem układu jest napięcie zasilania, które było stałe podczas pomiarów i wynosiło $u_z = 300$ [V]. Sygnałem mierzonym jest prąd uzwojenia i.

- → Zdefiniuj obiekt w postaci zmiennych stanu i zasymuluj jego działanie (obserwując przebiegi wyjścia oraz zmiennych stanu). Jaki jest charakter tego układu?
- → Jak należałoby zmodyfikować równania, gdyby była potrzeba wyprowadzenia na wyjście położenia kątowego? (W zmiennych stanu dostępna jest tylko prędkość.)
- → Wykreśl trajektorię fazową wyjścia (prąd oraz jego pochodną na wykresie).

  Uwaga! W układzie są dwie zmienne stanu, pochodzące odpowiednio od części elektrycznej i mechanicznej. Aby wykreślić trajektorię, potrzebujemy układu w postaci zmiennych fazowych. W tym celu należy z dwóch równań stanu przejść do równania drugiego rzędu – przekształć dwa równania, by uzyskać zależność prąd – napięcie, bez jawnej zależności ω. Najłatwiej wyznaczyć ω z pierwszego równania i podstawić do drugiego, w odpowiednim miejscu też je różniczkując. Dla takiego równania wyznacz równania stanu, przyjmując $x_1 = i$, $x_2 = \frac{di}{dt}$. W przypadku sterowania prądowego mogłoby tak też być łatwiej z zadaniem wartości zmiennych – dla prądu to zadana wartość, dla jego zmian – zero.
- → Wyznacz transmitancję układu pierwotnego i układu o zmiennych fazowych. Czy są one równoważne?