НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет
Кафедра: Математика и компьютерные науки

Тлепбергенова Дарья Дулатовна

Отчет по вычислительному практикуму

Решение двумерного эллиптического уравнения методом конечных разностей. Вариант 14.

3 курс, группа 16121

Преподаватель:
Махоткин Олег Александрович

Новосибирск, 2018 г.

1. Постановка задачи.

С помощью 5-точечной схемы свести уравнение задачи Дирихле

$$-a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), (x,y) \in D$$

$$u(x,y) = \varphi(x,y), (x,y) \in \partial D$$

в области D к решению системы линейных алгебраических уравнений $Az = F$. Использовать разностную схему с шагами:

$$h_x = h_y = h = \frac{1}{m}$$

$$-a\frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{h^2} - b\frac{U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}}{h^2} = f_{i,j}$$

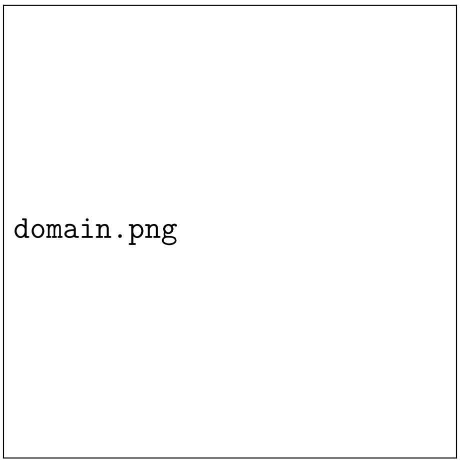
Для

$$a = 1; b = 1$$

$$f(x,y) = 2\pi^2 sin(\pi x) sin(\pi x),$$

$$\varphi(x,y) = sin(\pi x) sin(\pi x)$$

Область D выглядит следующим образом:



1) Найти погрешность аппроксимации разностной схемы на решении краевой задачи.

2) Проверить, что функция $\varphi(x,y)$ является точным решением краевой задачи.

3) Для небольшого числа узлов сетки и двух вариантов нумерации внутренних узлов выписать в симметрическом виде матрицы A. Убедиться, что они являются симметричными и разреженными.

4) Записать полученные матрицы в упакованном виде (по строкам).

5) Найти максимальное и минимальное собственное значения матрицы A для нескольких значений m степенным методом.

6) Используя собственные значения оператора $(Lv)_i = v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}, i = 1,...,m-1, v_0 = v_m = 0$, найти собственные значения двумерного разностного оператора рассматриваемой задачи для $D = Q^2 = [0,1]^2$. Сравнивать полученное значение $\lambda_{min}(h)$ с λ_{min} для дифференциальной задачи. Получить асимптотическое разложение $\lambda_{min}(h)$ по h.

7) Найти решение системы уравнений $Az = F$ методом установления и методом верхней релаксации.

8) Для нескольких значений числа интервалов m найти относительные погрешности разностного решения $\Delta = < |U(x,y) - \varphi(x,y)| > / < |\varphi(x,y)| >$.

   Здесь $< |g(x,y)| >= \sum_{i,j}[(i,j) =\in D]|g(x_i,y_j)|$.

9) Вывести на экран разностное решение $U(x,y)$ и погрешность $U(x,y) - \varphi(x,y)$.

2. Исследование данной схемы на точность и устойчивость.

2.1. Погрешность аппроксимации.

Оценим погрешность аппроксимации данной задачи, для этого, Приблизим оператор Лапласа разностным оператором:

$$\Lambda u = \Lambda_1 u + \Lambda_2 u = u_{x,x} + u_{y,y}$$

Тогда с помощью разложения в ряд Тейлора получаем:

$$\Lambda_1 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(h^4)$$

$$\Lambda_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + O(h^4)$$

Тогда

$$\Lambda u - \Delta v = \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + O(h^4)$$

Отсюда следует, что

$$\Lambda u - \Delta v = O(h^2)$$

Таким образом, данный разностный оператор аппроксимирует оператор Лапласа со вторым порядком аппроксимации на регулярном шаблоне "крест".

3. Описание вычислительного метода. Алгоритм решения программы.

- Изобразим шаблон нашей схемы:

scheme.jpg

- Наложим на нашу область равномерную сетку с шагом h и пронумеруем узлы сетки следующим образом:

normal.png

- С помощью отдельной функции, отделим точки, принадлежащие границе области D, точки, лежащие строго внутри области D и точки не принадлежащие области.
- Для граничных точек сразу вычисляем значения искомой функции
- Для всех внутренних точек выполняем разностную схему и ищем их значения, как решение СЛАУ.На основе этого получаем матрицу.
- Записываем эту матрицу в упакованном виде

- Ищем у полученной матрицы max и min числа
- Решаем матрицу (СЛАУ) с помощью метода верхней релаксации и методом установления
- Заносим оставшиеся значения в матрицу решений и выводим полученный график

4. Код программы (на Pyton).

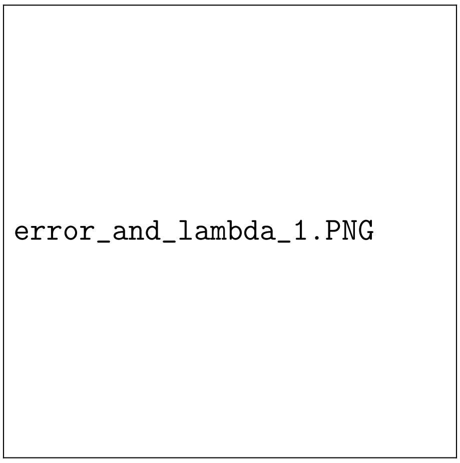
5. Графический вывод (Тесты)

При $h = 0.25$

graph_u_1.png

Рис. 1. график $u(x, y)$ при $h = 0.25$

Тогда максимальная ошибка и значения собственных чисел:
При $h = 0.625$:
Тогда максимальная ошибка 0.01444



6. Выводы.

Таким образом мы исследовали задачу Дерихле в ограниченной области и изучили ход ее решения. Убедились в том, что при увеличении шага, погрешность решения уменьшается примерно в 2 раза.

Этот метод не очень прост в реализации: в нем участвуют сразу несколько дополнительных методов для поиска собственных чисел и решения системы линейных уравнений.Таким образом,данный метод можно разными способами модифицировать, что так же является плюсом метода.

graph_u_2.png

Рис. 2. график $u(x,y)$ при $h = 0.125$

error_and_lambda_2.png