НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет
Кафедра: Математика и компьютерные науки

Тлепбергенова Дарья Дулатовна

Отчет по вычислительному практикуму

# Решение уравнения переноса с помощью неявной схемы бегущего счета. Вариант 12.

3 курс, группа 16121

Преподаватель:
Махоткин Олег Александрович

Новосибирск, 2018 г.

# 1 Постановка задачи

Дано уравнение переноса в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + C(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ 0 \le x \le 1, 0 \le t \le 1 \\ u(x,0) = \varphi_0(x) \end{cases} \tag{1}$$

С помощью неявной схемы бегущего счета:

$$\frac{u_k^{j+1} - u_k^j}{\tau} + C\frac{u_k^{j+1} - u_{k-1}^{j+1}}{h} = 0, \text{при } C \ge 0 \tag{2}$$

$$\frac{u_k^{j+1} - u_k^j}{\tau} - C\frac{u_k^{j+1} - u_{k-1}^{j+1}}{h} = 0, \text{при } C < 0 \tag{3}$$

Для:

$$\begin{cases} u(x,t) = -(t-0.3)^3 + cos(\pi x) + 2\pi x, \\ \varphi_0(x) = cos(\pi x) + 0.027 + 2\pi x, \\ u(0,t) = t \\ C(x,t) = \frac{3(t-0.3)^2}{2\pi - \pi sin(\pi x)}, \end{cases}$$

Выполнить следующие пункты:

1. Исследовать данную схему на точность и устойчивость.
2. Найти решение уравнения переноса в узлах сетки.
3. Вывести на экран графики приближенного и точного решения для значений t от 0 до 1 с шагом 0.1 и для $x = 0.5$.

# 2 Описание вычислительного метода

Перейдем к дискретной постановке задачи: разобьем наши промежутки по $x$ и по $t$ на $N_x$ и $N_t$ равных частей соответственно. Тогда задача (1) с учетом (2):

$$\begin{cases} \frac{u_k^{j+1} - u_k^j}{\tau} + C_k^{j+1}\frac{u_k^{j+1} - u_{k-1}^{j+1}}{h} = 0, \text{при } C_k^{j+1} \ge 0 \\ \frac{u_k^{j+1} - u_k^j}{\tau} - C_k^{j+1}\frac{u_k^{j+1} - u_{k-1}^{j+1}}{h} = 0, \text{при } C_k^{j+1} < 0 \\ \left\{x_k = kh : h = \frac{1}{N_x}, k = 0..N_x\right\} \\ \left\{t_j = j\tau : \tau = \frac{1}{N_t}, j = 0..N_t\right\} \\ u_k^0 = \varphi_0(x_k) \\ u_0^j = u_0(t_j) \end{cases} \tag{4}$$

данный метод соответствует графической схеме:

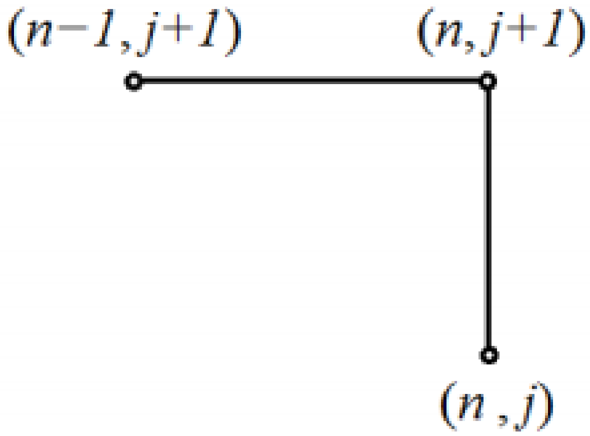



Рис. 1: Шаблон для схемы бегущего счета

# 3 Исследование данной схемы на точность и устойчивость

## 3.1 Погрешность аппроксимации

В данном случае разностный оператор $L_{h\tau}$ будет иметь вид:

$$L_{h\tau}u = \frac{u_k^{j+1} - u_k^j}{\tau} + C_k^{j+1}\frac{u_k^{j+1} - u_{k-1}^{j+1}}{h}$$

и выражение $L_{h\tau}u$ апроксимирует $Lu$ в точке $(x_k, t_{j+1})$ с погрешностью $O(\tau + h)$:

$$L_{h\tau}u = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + C(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x_k, t_{j+1}} + O(\tau + h)$$

## 3.2 Погрешность решения

Погрешность $\xi_k^j$ решения разностной схемы (2), обусловленная погрешностью начальных данных, будет удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned}
&L_{\tau,h}\xi^{\tau,h} = \psi^{\tau,h}\\
&\xi_k^j = u_k^j - u(x_k, t_j)\\
&\xi_k^{j+1} = \xi_k^j - \frac{c\tau}{h}(\xi_k^{j+1} - \xi_{k-1}^{j+1})
\end{aligned}$$

Разложим сеточную функцию $\xi_k^j$ в ряд по $e^{iqx_k}$

$$\xi_k^j = \sum_q \xi_{k,q}^j = \sum_q C_q^j e^{iqx_k}$$

Так как схема (2) является линейной двухслойной схемой с постоянными коэффициентами, то на слое $(j+1)$ погрешность будет иметь вид

$$\xi_k^{j+1} = \sum_q \xi_{k,q}^{j+1} = \sum_q \lambda_q C_q^j e^{iqx_k} \text{ где } \lambda_q\text{- множители роста}$$

Введем обозначения $r = \frac{c\tau}{h}$ и $\alpha_q = qh$. Тогда, рассматривая уравнения для каждой гармоники $\xi_{k,q}^j$ в отдельности, получаем:

$$\xi_k^{j+1} = \xi_k^j - r(\xi_k^{j+1} - \xi_{k-1}^{j+1})$$

Или, что тоже самое,

$$\lambda_q C_q^j e^{i\alpha_q k} = C_q^j e^{i\alpha_q k} - r(\lambda_q C_q^j e^{i\alpha_q k} - \lambda_q C_q^j e^{i\alpha_q (k-1)})$$

Сокращая на $C_q^j e^{i\alpha_q k}$, и выполнив несколько несложных преобразований, получаем:

$$\frac{\lambda_q - 1}{\tau} + c\lambda_q \frac{1 - e^{-i\alpha_q}}{h} = 0,$$

Откуда получаем:

$$\lambda_q = \frac{1}{1 + r - re^{-i\alpha_q}} = \frac{1}{\beta_q}, \text{ где } \beta_q = 1 + r - re^{-i\alpha_q},$$

Спектр $\lambda_q(\alpha_q)$ оператора перехода со слоя на слой в рассматриваемой задаче представляет собой окружность на комплексной плоскости с центром в точке $1-r$ и радиусом $|r|$. Так как $\lambda_q(\alpha_q)$ не зависит от $\tau$ явным образом, то спектральное условие устойчивости схемы принимает вид:

$$|\lambda_q| \leq 1, \forall q. \tag{5}$$

Следовательно, для того чтобы схема (2) была устойчивой по начальным данным, необходимо и достаточно, чтобы спектр оператора перехода со слоя на слой полностью содержался в круге единичного радиуса с центром в нуле на комплексной плоскости.

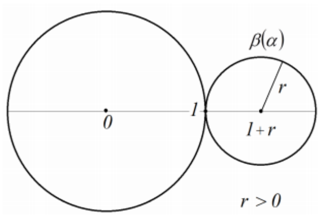



Рис. 2: Спектр оператора перехода со слоя на слой в схеме (2) при $c \geq 0$, $0 \leq r \leq 1$

Очевидно, что условие (5) выполняется, если $|\beta_q| \geq 1$. При изменении параметра $\alpha_q$ от минус до плюс бесконечности значения функции $\beta_q(\alpha_q)$ пробегают окружность радиуса $|r|$ с центром в точке $1 + r$ на комплексной плоскости.

При $c > 0$ параметр $r$ также положителен. Следовательно, окружность, заполняемая значениями $\beta_q$, расположена вне единичного круга с центром в начале координат и касается единичной окружности в точке 1 ((2)). Это означает, что $|\beta_q| \geq 1$. при любом соотношении $\tau$ и $h$, то есть при положительном $c$ схема (2) безусловно устойчива по начальным данным.

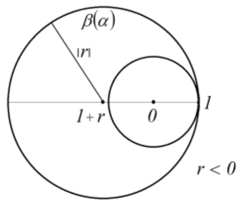



Рис. 3: Спектр оператора перехода со слоя на слой в схеме (2) при $c \leq 0$

Если скорость переноса $c$ отрицательна, то и параметр $r$ отрицателен, и условие $|\beta_q| \geq 1$ устойчивости схемы (2) будет выполнено при $|r| \geq 1$ ((3)). Следовательно, при $c < 0$ схема (2) является условно устойчивой по начальным данным, и условие ее устойчивости имеет вид $|c|\tau \geq h$ .

Но в силу того, что в нашем случае при $c < 0$ мы выбираем зеркальный аналог сахемы, который наоборот безусловно устойчив при $c < 0$ и условно устойчив иначе получаем, что для такой комбинированной схемы имеем безусловную устойчивость на всем промежутке.

Метод гармоник применим только для схем с постоянными коэффициентами. Для исследования на устойчивость разностных схем для уравнений с переменными коэффициентами широко используют прием «замораживания» коэффициентов уравнения. При этом на устойчивость исследуется схема с постоянными коэффициентами, равными своим значениям в какой-то выбранной точке. Схему с переменными коэффициентами считают устойчивой, если условие устойчивости выполняется для соответствующей схемы с постоянными коэффициентами независимо от того, в какой точке были «заморожены» коэффициенты.

# 4 Проверим, что $u(x,t)$ - решение системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} = -3(t-0.3)^2 + \frac{3(t-0.03)^2}{2\pi - \pi sin(\pi x)}(2\pi - \pi sin(\pi x)) = 0 \text{ - верно}$$

$$u(x,0) = -(-0.3)^3 + cos(\pi x) + 2\pi x = \varphi_0(x) \text{ - верно}$$

$$u(0,t) = -(t-0.3)^3 + 1 \neq u_0(t)$$

$\Rightarrow$ Неверное граничное условие. Будем пользоваться $u(0,t) = -(t-0.3)^3 + 1$

# 5 Описание алгоритма

- Main class
  - Создаем поля для разбиения сетки, коэффициента для второй производной (main class для простоты замены начальных данных)
  - Создаем функции краевых условий и решения (main class для простоты замены начальных данных)
  - В main функции обращаемся к методу решения уравнения переноса и запускаем визуализацию на питоне сначала для приближенного решения, потом для точного решения
- ConvectionEquation class
  - создаем поля для шага по $t, x$
  - функция для решения уравнения переноса:
    * создаем двумерный массив для записи решения
    * заполняем первую строку и столбец начальными значениями
    * далее в зависимости от знака функции $C$ находим оставшиеся значения дискретной приближенной функции
    * после нахождения всех коэффициентов матрицы решений, записываем ее в текстовый файл для графического вывода, подсчитываем максимальную ошибку (через максимум модуля) и печатаем ее.

# 6 Код программы (на Java)

## 6.1 Класс ConvectEquation

```
package ru.nsu.mmf.g16121.ddt.math;

import java.io.FileNotFoundException;
import java.io.PrintWriter;

import static ru.nsu.mmf.g16121.ddt.main.Main.*;

public class ConvectionEquation {
private static final double stepX = (rightBound - leftBound) /
NUMBERS_COUNT_OF_GRID_BY_X;
private static final double stepT = (rightBound - leftBound) /
NUMBERS_COUNT_OF_GRID_BY_T;

private static void writeForPython
(String fileName, double[][] u, boolean func) {
```

```
try (PrintWriter writer = new PrintWriter(fileName)) {
writer.print("[[" + (int) leftBound + ", " + (int) rightBound
+ ", " + (NUMBERS_COUNT_OF_GRID_BY_X + 1) + "],");
writer.print("[" + (int) leftBound + ", " + (int) rightBound
+ ", " + (NUMBERS_COUNT_OF_GRID_BY_T + 1) + "],");

double x;
double t = leftBound;

writer.print("[");
for (int i = 0; i <= NUMBERS_COUNT_OF_GRID_BY_T; i++) {
x = leftBound;
writer.print("[");
for (int j = 0; j < NUMBERS_COUNT_OF_GRID_BY_X; j++) {
if (func) {
writer.print(u(x, t) + ",");
} else {
writer.print(u[i][j] + ",");
}
x += stepX;
}
if (func) {
writer.print(u(rightBound, t));
} else {
writer.print(u[i][NUMBERS_COUNT_OF_GRID_BY_X]);
}
if (i == NUMBERS_COUNT_OF_GRID_BY_T) {
writer.print("]");
} else {
writer.print("],");
}
t += stepT;
}
writer.print("]]");
} catch (FileNotFoundException e) {
e.printStackTrace();
}
}

private static double maxError(double[][] u, double[][] error) {
double t = leftBound;
double max = 0;
for (int i = 0; i <= NUMBERS_COUNT_OF_GRID_BY_T; i++) {
double x = leftBound;
```

```
for (int j = 0; j <= NUMBERS_COUNT_OF_GRID_BY_X; j++) {
error[i][j] = Math.abs(u(x, t) - u[i][j]);
if (error[i][j] > max) {
max = error[i][j];
}
x += stepX;
}
t += stepT;
}
return max;
}

public static void solveConvectionEquation() {
double[][] u = new double[NUMBERS_COUNT_OF_GRID_BY_T + 1]
[NUMBERS_COUNT_OF_GRID_BY_X + 1];

//The first row of the matrix is filled by the initial data
for (int i = 0; i <= NUMBERS_COUNT_OF_GRID_BY_X; i++) {
u[0][i] = fi0(i * stepX);
}

//The first column are filled with source data
for (int j = 0; j <= NUMBERS_COUNT_OF_GRID_BY_T; j++) {
u[j][0] = u0(j * stepT);
}

for (int j = 0; j < NUMBERS_COUNT_OF_GRID_BY_T; ++j) {
for (int i = 1; i <= NUMBERS_COUNT_OF_GRID_BY_X; ++i) {
double currant = C(i * stepX, j * stepT) * stepT / stepX;
if (currant >= eps) {
u[j + 1][i] = (u[j][i] + currant * u[j + 1][i - 1]) / (1 + currant);
} else {
u[j + 1][i] = (u[j][i] - currant * u[j + 1][i - 1]) / (1 - currant);
}
}
}

double[][] error = new double
[NUMBERS_COUNT_OF_GRID_BY_T + 1][NUMBERS_COUNT_OF_GRID_BY_X + 1];
//write in the txt for display the result
writeForPython("mainFunc.txt", u, true);
writeForPython("result.txt", u, false);
System.out.println("Max error = " + maxError(u, error));
//        writeForPython("error.txt", error, false);
```

```
}
}
```

## 6.2 Класс Main

```
package ru.nsu.mmf.g16121.ddt.main;

import java.io.IOException;

import static ru.nsu.mmf.g16121.ddt.math.
ConvectionEquation.solveConvectionEquation;

public class Main {
public static final double leftBound = 0;
public static final double rightBound = 1;

public static final int NUMBERS_COUNT_OF_GRID_BY_X = 500;
public static final int NUMBERS_COUNT_OF_GRID_BY_T = 500;

public static final double eps = 0.1E-6;

public static double u(double x, double t) {
return -Math.pow(t - 0.3, 3) + Math.cos(Math.PI * x) + 2.0 * Math.PI * x;}

public static double C(double x, double t) {
return 3.0 * Math.pow(t - 0.3, 2) /
(2.0 * Math.PI - Math.PI * Math.sin(Math.PI * x));}

public static double fi0(double x) {
return Math.cos(Math.PI * x) + 0.027 + 2.0 * Math.PI * x;
}

public static double u0(double t) {
return -Math.pow(t - 0.3, 3) + 1;
}

public static void main(String[] args) throws IOException {
solveConvectionEquation();
Runtime.getRuntime().exec("python3 vizualization.py");
Runtime.getRuntime().exec("python3 vizualization2.py");
//        Runtime.getRuntime().exec("python3 vizualization3.py");
}
}
```

# 7 Графический вывод (Тесты)

## 7.1 Для $\tau = 0.2$ и $h = 0.2$

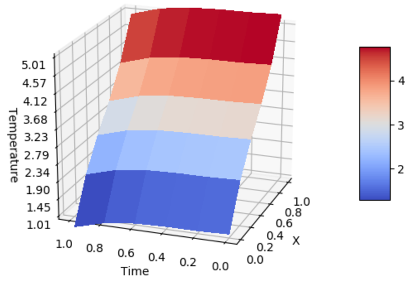



Рис. 4: Точное решение

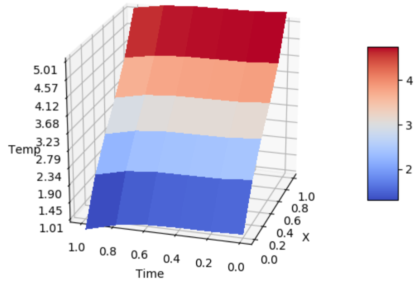



Рис. 5: Приближенное решение методом бегущего счета

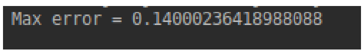



Рис. 6: Максимальная погрешность решения

## 7.2 Для $\tau = 0.1$ и $h = 0.1$

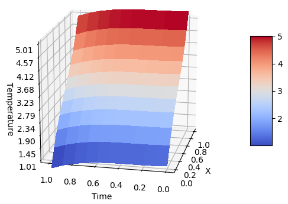


Рис. 7: Точное решение

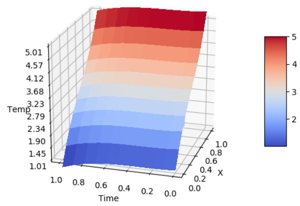


Рис. 8: Приближенное решение методом бегущего счета

```
Max error = 0.08073029752277794
```

Рис. 9: Максимальная погрешность решения

Таким образом, при увеличении $\tau$ и $h$ в 2 раза погрешность решения уменьшилась примерно в 1,7 раз.

## 7.3 Для $\tau = 0.05$ и $h = 0.05$

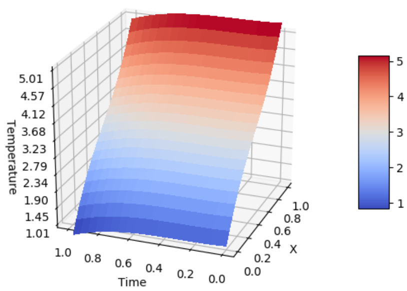



Рис. 10: Точное решение

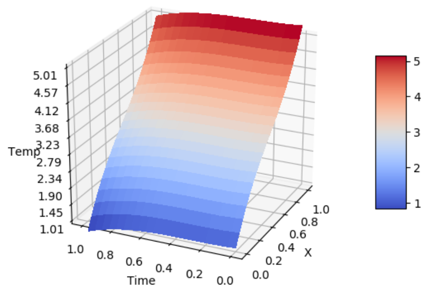
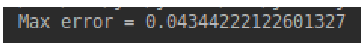



Рис. 11: Приближенное решение методом бегущего счета



```
Max error = 0.04344222122601327
```

Рис. 12: Максимальная погрешность решения

Таким образом, при увеличении $\tau$ и $h$ еще в 2 раза погрешность решения уменьшилась примерно в 1,86 раз

## 7.4 График приближенного и точного решения для значений $t$ от $0$ до $1$ с шагом $\tau = 0.1$ и для $x = 0.5$

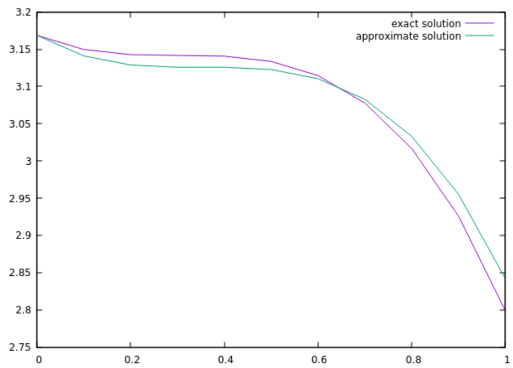



Рис. 13: Графики точного и приближенного решения при фиксированном $x = 0.5$

## 7.5 Для $\tau = 0.002$ и $h = 0.002$

Для достаточно большого числа разбиения графики практически неотличимы, но погрешность решения не нулевая.

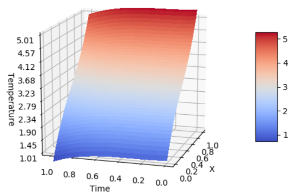



Рис. 14: Точное решение

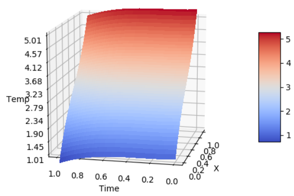



Рис. 15: Приближенное решение методом бегущего счета

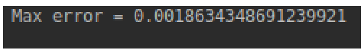

Max error = 0.0018634348691239921

Рис. 16: Максимальная погрешность решения

# 8 Выводы

Таким образом мы установили, что схема бегущего счета с модификацией для $C \leq 0$ является устойчивой, и не зависит от $\tau, h$ или $a$ как, например, половина этой схемы бегущего счета, но, с другой стороны при малых $\tau, h$ погрешность решения достаточно велика и, следовательно, решение не достаточно точное.

Этот метод прост для понимания и реализации, что является большим плюсом. Также убедились на практике, что данный метод при достаточно больших $\tau, h$ наше дискретное решение практически не отличимо от непрерывного, что значительно упрощает решения многих видов уравнений.

Мы увидели, что теоретическая погрешность, которую мы посчитали до прогонки решения, практически совпадает с действительной погрешностью, а значит мы можем выбрать нужную нам точность решения заранее, что не мало важно для методов вычислений.