1 Baudynamik

1.1 Motivation

Die Beurteilung des dynamischen Tragverhaltens hat im Bauwesen in den letzten Jahren an Bedeutung gewonnen.

- **Leichtbau:** leichte Bauwerke sind besonders schwingungsanfällig, z.B. Fußgängerbrücken und Membrane unter Windbelastung.
- **Extreme dynamische Erregungen:** An- oder Aufprallasten, Erdbeben, Explosionsdruck.
- **Gebrauchstauglichkeit:** Wohlbefinden des Menschen (Brücken, Türme, Hochhäuser), höchste Anforderungen z.B. bei Chip-Fabriken, Fundamenten lasergesteuerter Maschinen.
- **Hohes Sicherheitsbedürfnis:** Kernkraftwerke, Chemieanlagen.

In diesen Fällen ist eine quasi-statische Modellierung unzulässig. Die Lasten F(t) und die Tragwerksantwort u(t) sind zeitabhängig. Massen- und Dämpfungseinflüsse müssen berücksichtigt werden.

Typische Erdbebenschäden entstehen aus zu geringer Steifigkeit der Bauwerke in horizontaler Richtung („Pancake-Effekt“, Abbildung 1.1 links) oder bei anderen nicht erdbebengerechten Konstruktionen (heterogenes Tragverhalten durch nachträglichen Anbau, Abbildung 1.2 rechts).

Die Erdbebenschäden in Abbildung 1.2 sind aus Relativbewegungen des Baugrunds bei Einfeldträgern (links) und zu geringer Umschnürung der Bewehrung, die aufgrund der Biegebeanspruchung ausknickte (rechts), entstanden. Beim Hanshin Expressway in Kobe waren außerdem die hohen Massen auf eingespannten Stützen (kopflastig) ungünstig.

Abb. 1.1: Erdbebenschäden in Izmit, Türkei (1999)

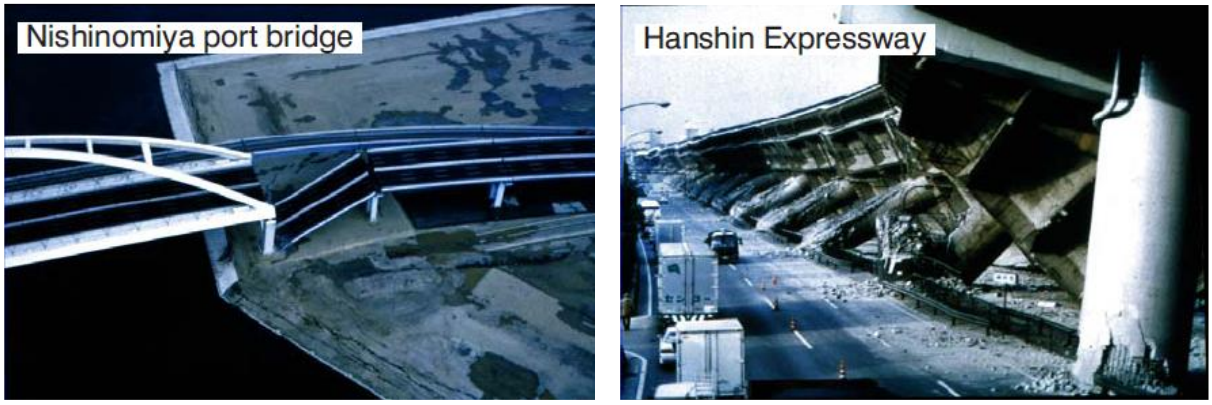


Abb. 1.2: Erdbebenschäden in Kobe, Japan (1995)

Neben den notwendigen Nachweisen ist für die Vorsorge gegen Bauwerksversagen bei dynamischer Erregung, insbesondere bei Erdbeben, eine geeignete Konstruktion maßgebend. Dynamische Beanspruchungen aus Trägheitseffekten (Masse mal Beschleunigung) können z.B. durch Gewichtseinsparung reduziert werden. Es ist grundsätzlich günstig, wenn der Baukörper möglichst gleichmäßig ist (Abbildung 1.3).

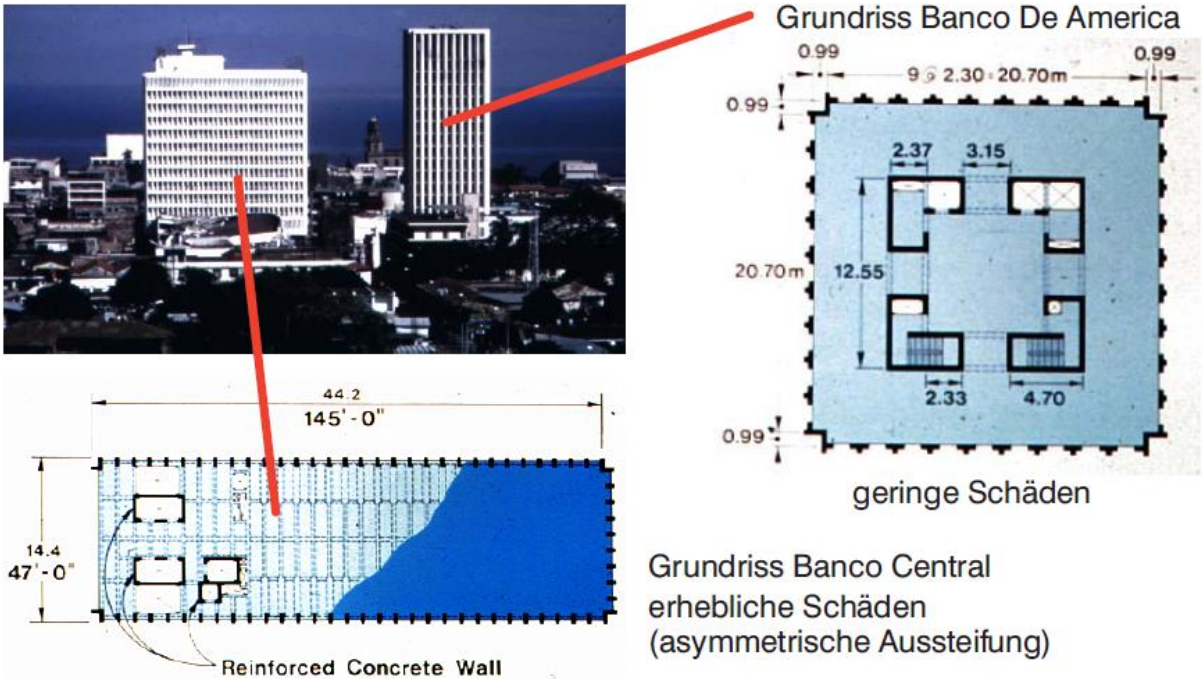


Abb. 1.3: Erdbeben Managua (Nicaragua) 1972

Abb. 1.4: Erdbeben Imperial Valley (California) 1979

Abb. 1.5: Erdbeben auf der Schwäbischen Alb (3. September 1978)

Im Hinblick auf ein günstiges Verhalten bei Erdbeben, muss für eine genügende Bauwerks-, Querschnitts- und Materialduktilität gesorgt werden: ausreichende Komponenten zur Energieaufnahme, genügend Verformungsmöglichkeiten („Crash-Zone“) ohne Systemversagen („Fail Safe“), z.B. Verlagern der Schwachstellen in nicht tragrelevante Bereiche.

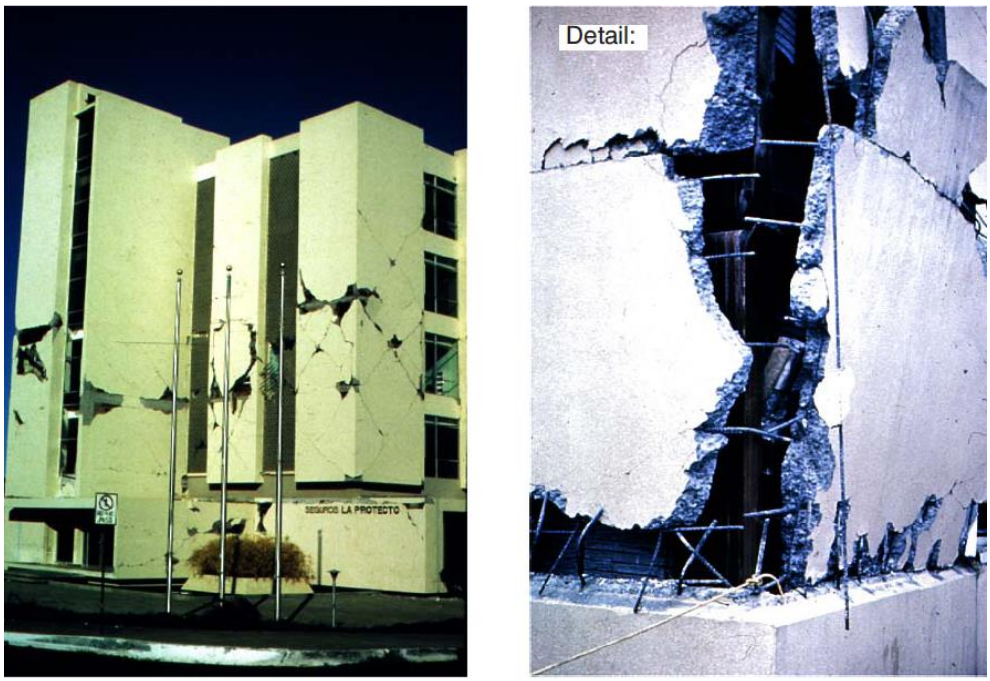


Abb. 1.6: Energiedissipation durch Schubrisse, die nicht zum Tragwerksversagen führen

1.2 Modellbildung

Noch mehr als in der Statik, wo man sich im Wesentlichen um die Verteilung der Steifigkeiten im System kümmert, spielt die Modellbildung in der Dynamik eine Rolle. Hier kommen hinzu:

- die Abbildung von Masse und Dämpfung, sowie
- die Berücksichtigung der Zeitabhängigkeiten.

Auch hier ist das *mathematische (mechanische) Modell* vom *Rechen- bzw. Simulationsmodell* zu unterscheiden (Abbildung 1.7).

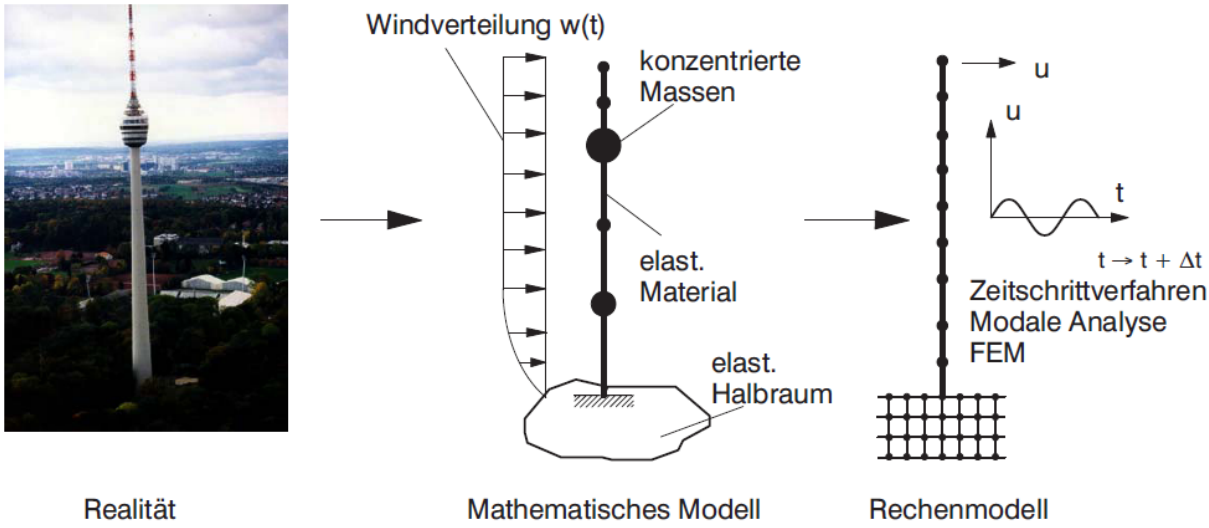


Abb. 1.7: Modellbildung in der Dynamik

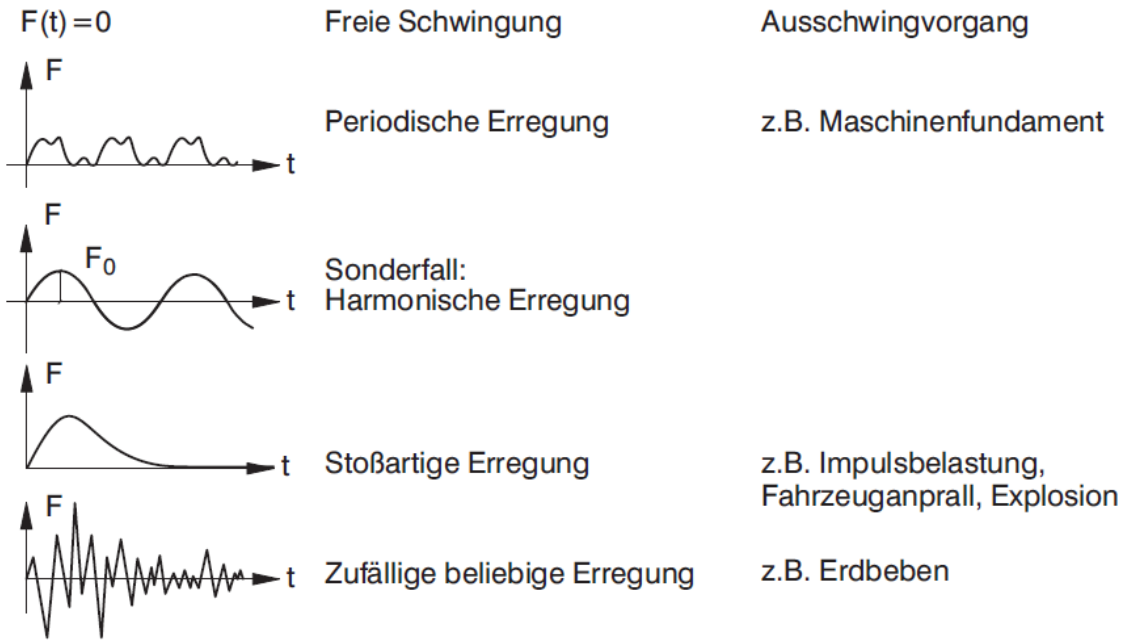


Abb. 1.8: Dynamische Erregung F(t)

Die mathematische Modellierung eines dynamischen Problems erfordert also neben den üblichen Annahmen für statische Randbedingungen, Tragwerksmodelle (z.B. Balken, Scheibe, Platte), Querschnitts- und Materialeigenschaften auch Überlegungen bezüglich der Massenverteilung, der Dämpfungseigenschaften, sowie dynamische Lasten (Abbildung 1.8), Rand- und Anfangsbedingungen. Analog zu Verschiebungslastfällen in der Statik (z.B. Stützensen-

kung, Setzung) können in der Dynamik Fußpunkterregungen als Einwirkungen auftreten (z.B. vorgegebene Beschleunigungen bei Erdbeben).

Als Systemantwort werden die

- Verschiebungen $u(x,t)$
- Geschwindigkeiten $\dot{u}(x,t)$ $\qquad \frac{d(\ )}{dt} = (\dot{\ })$
- Beschleunigungen $\ddot{u}(x,t)$

betrachtet.

Das Diagramm in Abbildung 1.9 zeigt die vertikale Auslenkung eines mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Punktes auf einer Kreisscheibe in Abhängigkeit der Zeit. Dieser Verlauf entspricht einer *harmonischen Schwingung* $u(t)$.

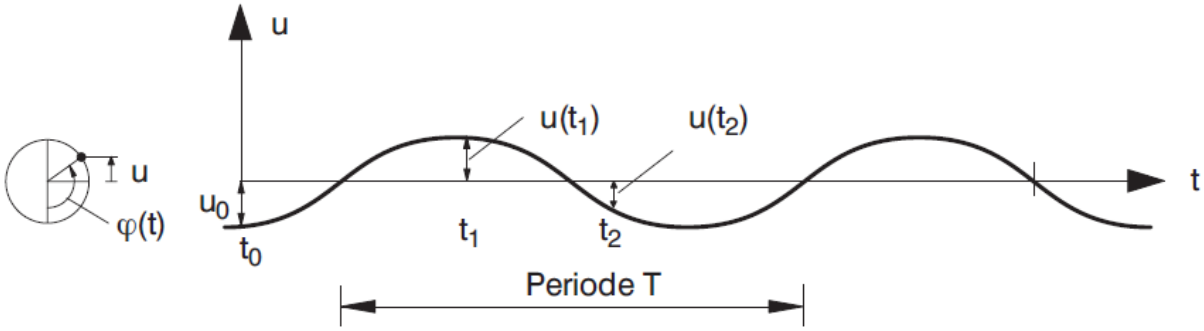


Abb. 1.9: Harmonische Bewegung eines Punktes auf einer rotierenden Kreisscheibe

Folgende charakteristische Größen werden zur Beschreibung einer harmonischen Schwingung verwendet:

- Periodendauer *T*
- Frequenz *f*: $\qquad f = \frac{1}{T} \quad \left[\frac{1}{s}\right]$ (Einheit: Hertz, [Hz])
- Winkelgeschwindigkeit ω: $\qquad \omega = \frac{\text{Winkel}}{\text{Zeit}} = \frac{\varphi}{\text{t}}$

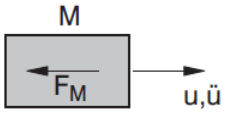
Die Winkelgeschwindigkeit wird bei harmonischen Schwingungen auch als *Kreisfrequenz* bezeichnet, da sie die Anzahl der Kreisumläufe pro Zeiteinheit angibt: Bei $\varphi = 2\pi$ ist $\text{t}=\text{T}$, also $\omega = \frac{2\pi}{\text{T}} = 2\pi f$.

Bei numerischen Lösungsmethoden, wie der FEM wird für das Rechenmodell neben der räumlichen Diskretisierung eine zeitliche Diskretisierung (schrittweise Berechnung, numerische Zeitintegration) benötigt. Zeitliche und räumliche Diskretisierung sollten aufeinander abgestimmt sein, d.h. ein feines räumliches FE-Netz erfordert eine feine Zeitdiskretisierung (kleine Schritte). Ist man nur an den Grundschwingungen eines Tragwerks interessiert, sollte das Modell so wenig Freiheitsgrade wie möglich aufweisen, da numerische Verfahren im hohen Frequenzbereich keine zuverlässigen Ergebnisse produzieren.

Tragwerke sind in der Regel kontinuierliche Systeme, d.h. Masse und Dämpfung sind kontinuierlich verteilt. Dennoch werden die Massen häufig aus Gründen eines vereinfachten Rechenverfahrens bereits im mathematischen Modell konzentriert angeordnet (vgl. konsistente Knotenlasten bei der FEM).

Die Ermittlung der Masse und ihrer Verteilung bereitet im Allgemeinen keine Schwierigkeiten. Durch die Anregung der Massen entstehen beschleunigungsproportionale Trägheitskräfte (Newton-Gesetz: Kraft = Masse x Beschleunigung).

$$F_M = M \cdot \ddot{u}$$



Die Trägheitskräfte (Momente) bei den Drehfreiheitsgraden sind proportional zu den *Rotationsträgheitsmomenten*.

Aus der Gewichtskraft folgt die Masse:

$$M = \frac{\text{Gewicht}}{\text{Gravitationsbeschleunigung}} \quad \left[1\text{kg} = 1\frac{\text{Ns}^2}{\text{m}}\right]$$

Zur Masse eines Körpers zählt neben seiner Eigenmasse auch die Masse der mitschwingenden Gewichtsbelastungen (z.B. Dachbegrünung, Schnee, Flüssigkeiten).

Die Ermittlung der Dämpfung ist wesentlich schwieriger. Hinter dem Begriff verbirgt sich eine häufig sehr grobe und verschmierte Abbildung unterschiedlicher mechanischer Phänomene (Reibung, Viskosität, Dämpfung des umgebenden Mediums etc.), die von der Geschwindigkeit abhängen. Die geschwindigkeitsproportionale Dämpfung wird auch als viskose Dämpfung bezeichnet.

$$F_C = C \cdot \dot{u}$$

Dämpfungskoeffizient $\left[\frac{\text{Ns}}{\text{m}}\right]$

Da die Dämpfung in Bauwesen zwar gering ist, aber dennoch eine zentrale Bedeutung hat, ist man hier auf sehr sorgfältige Abschätzungen und Grenzwertuntersuchungen angewiesen.

Kontinuierliche Systeme werden durch sinnvolle Modellannahmen wie in der Statik auf eine endliche Anzahl von Freiheitsgraden reduziert (Abbildung 1.11). Während in der Statik die Verdrehfreiheitsgrade eine ebenso große Rolle spielen wie die Verschiebungen, sind in der Dynamik die Translationsmassen häufig vorrangig vor den rotatorischen Anteilen; diese Freiheitsgrade werden deshalb häufig herauskondensiert. Die verbleibenden Freiheitsgrade werden als dynamische Freiheitsgrade bezeichnet (Abbildung 1.10).

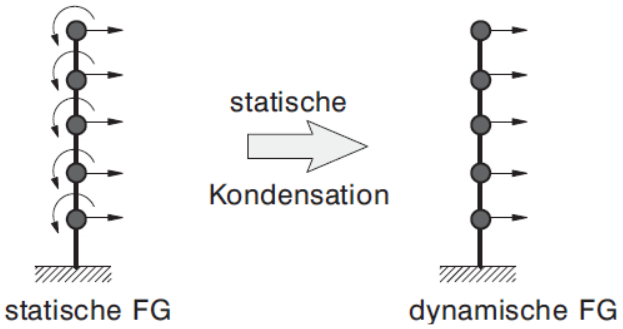


Abb. 1.10: Kondensation von Drehfreiheitsgraden, dynamische Freiheitsgrade

Die Rotationsträgheiten werden vernachlässigt, d.h. die Massenmatrix berücksichtigt nur die translatorischen Anteile. Bei einer konzentrierten Massenverteilung ist die Zuordnung zu den Freiheitsgraden offensichtlich. Aber auch Systeme mit verteilten Massen lassen sich auf we-

nige Freiheitsgrade zurückführen, wenn die Schwingungsform bekannt ist bzw. angenähert wird.

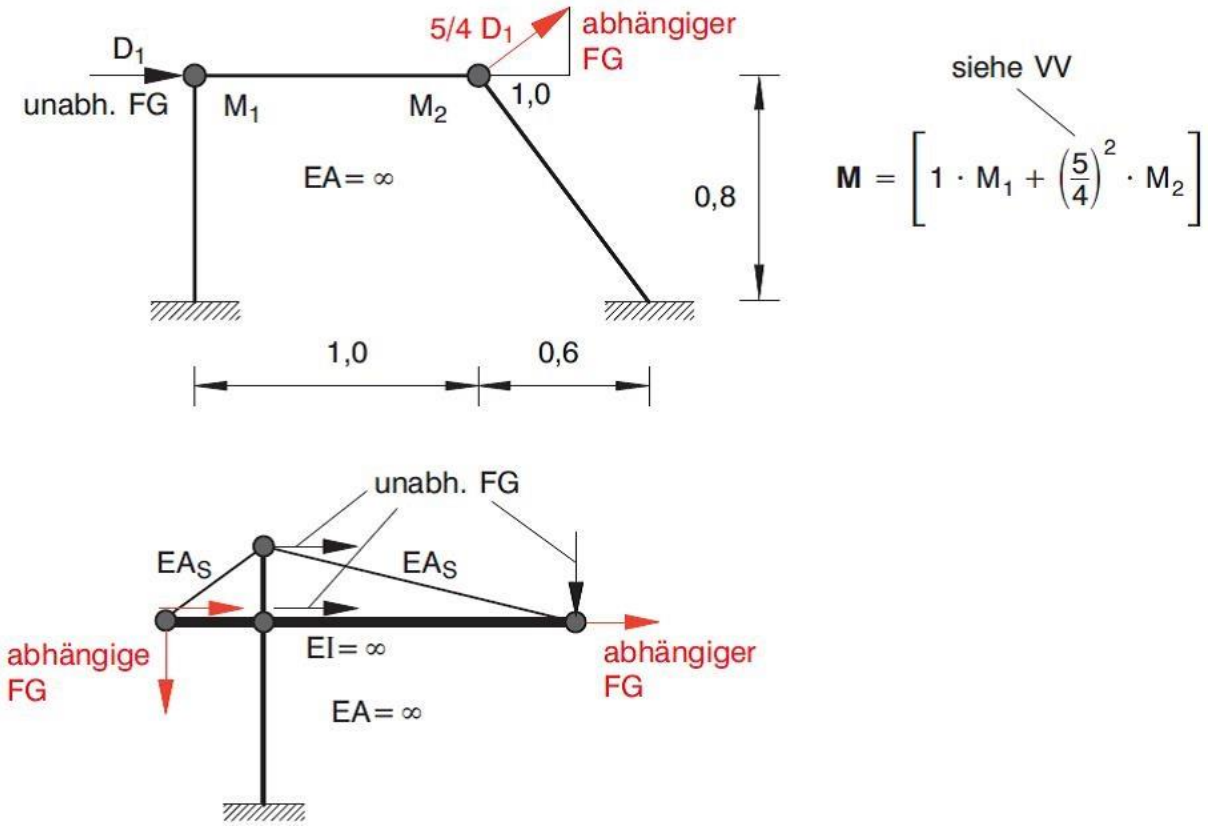


Abb. 1.11: Reduktion der Freiheitsgrade durch typische Annahmen (vgl. Statik)

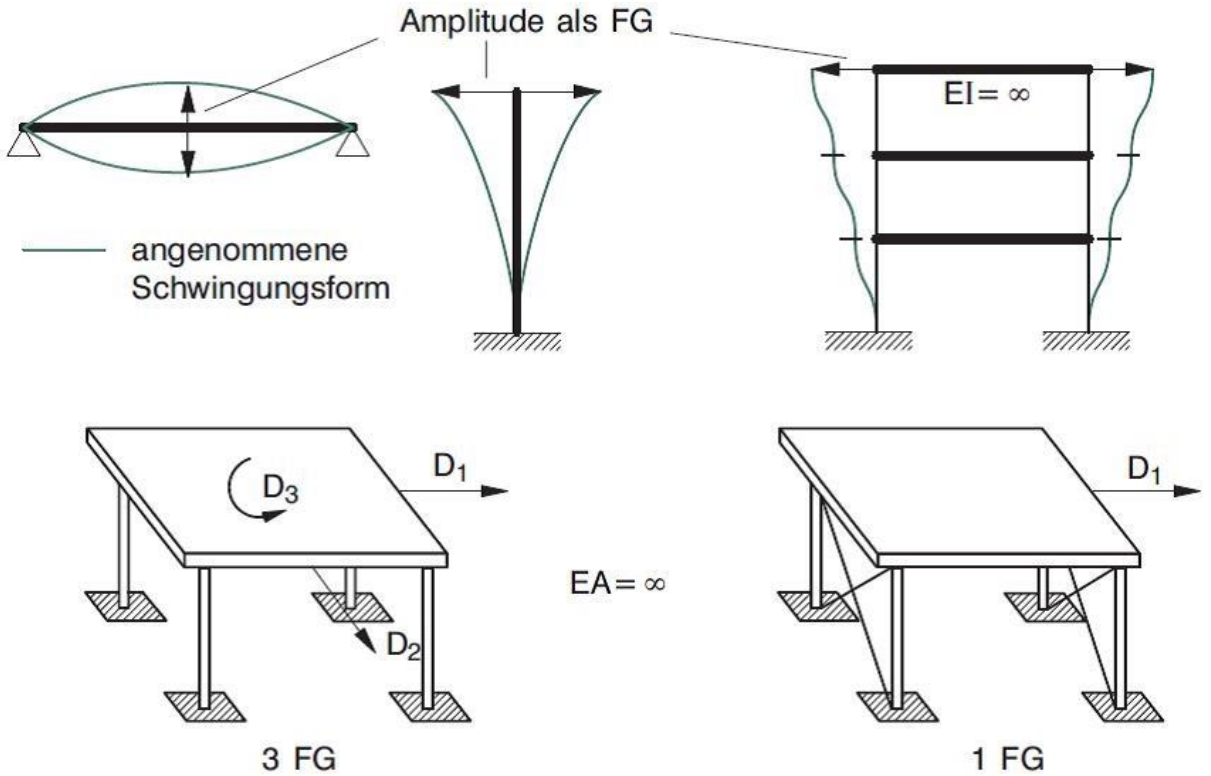


Abb. 1.12: Schwingungsformen als verallgemeinerte Freiheitsgrade

Man unterscheidet Systeme mit einem Freiheitsgrad (*Einmassenschwinger*, Abbildung 1.13) und mehreren Freiheitsgraden (Abbildung 1.14). Im Folgenden werden zunächst Systeme mit einem Freiheitsgrad, später dann Systeme mit mehreren Freiheitsgraden behandelt.

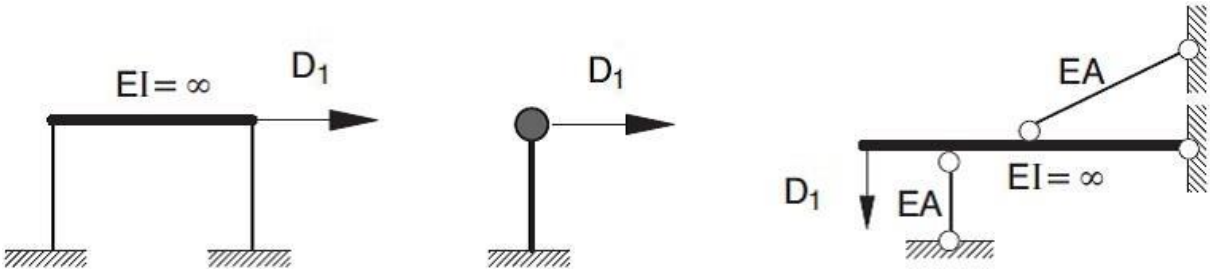


Abb. 1.13: Systeme mit einem Freiheitsgrad, verallgemeinerte Einmassenschwinger

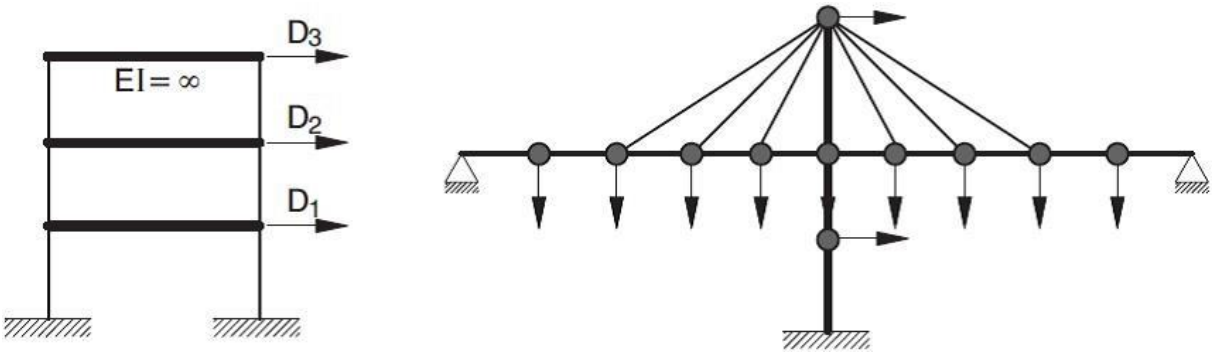


Abb. 1.14: Systeme mit mehreren Freiheitsgraden

1.3 Bewegungsgleichung für Systeme mit einem Freiheitsgrad

Systeme, deren Verhalten durch nur eine Verschiebungsgröße beschrieben werden kann, werden als *Ein-Freiheitsgrad-System* bezeichnet. Ihre charakteristischen Systemgrößen sind die Steifigkeit K, die Masse M und die Dämpfung C. Symbolisch lassen sie sich als Feder-Masse-Dämpfer-Systeme abbilden (Abbildung 1.16).

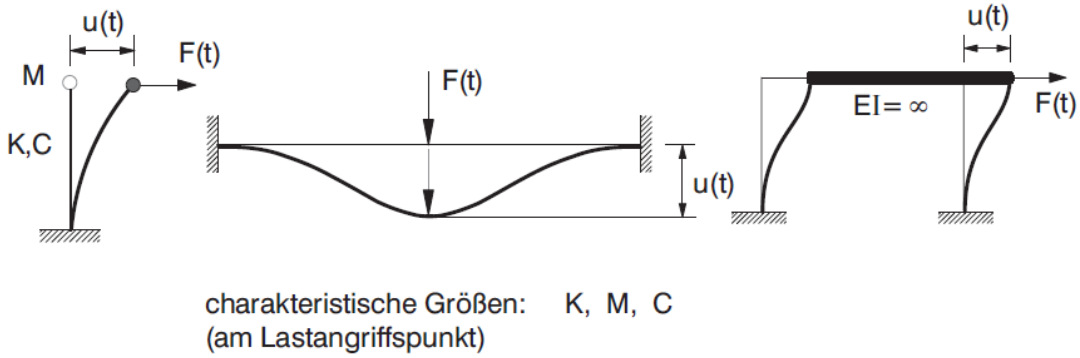


Abb. 1.15: Beispiele für Ein-Freiheitsgrad-Systeme

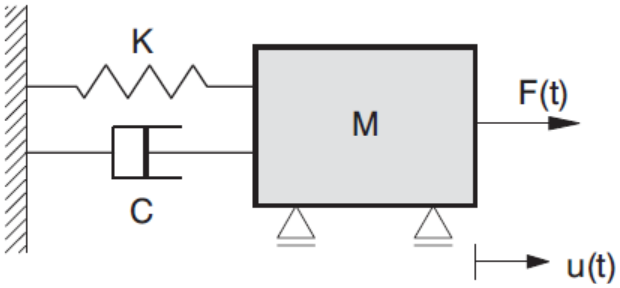
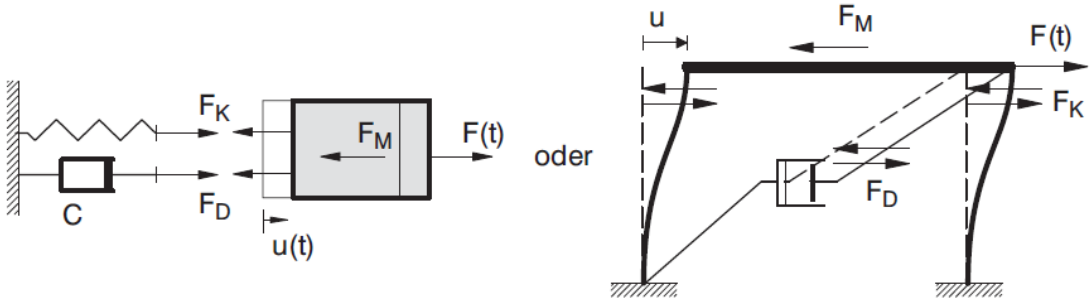


Abb. 1.16: Rheologisches Modell des gedämpften Einmassenschwingers

Die *Bewegungsgleichung* beschreibt das dynamische Gleichgewicht:



$$F_M + F_C + F_K = F(t)$$

Trägheitskraft Dämpfungskraft Federkraft Erregung

$$\boxed{M\,\ddot{u}(t) + C\,\dot{u}(t) + K\,u(t) = F(t)}$$

Neben der Lasterregung F(t) können auch Erregungen über die Fußpunkte auftreten, z.B. im Erdbebenfall (Abbildung 1.17).

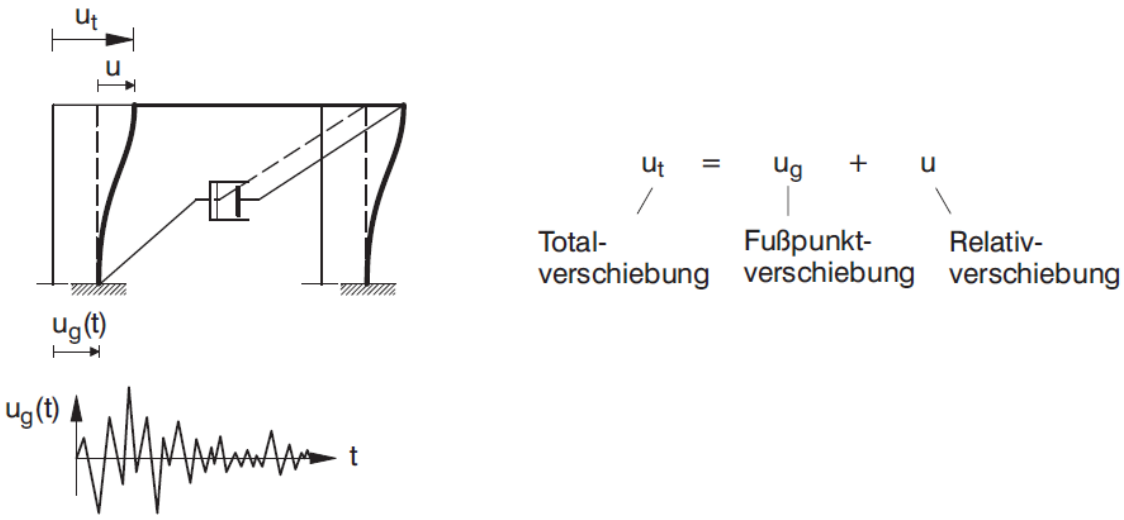


Abb. 1.17: Fußpunkterregung

Das dynamische Gleichgewicht lautet damit (für F(t) = 0)

$$M\,\ddot{u}_t + C\,\dot{u} + K\,u = 0$$

Je nachdem ob die Fußpunktverschiebung und -geschwindigkeit oder die Fußpunktbeschleunigung vorgegeben ist, sind verschiedene Formen der Bewegungsgleichung üblich.

Sind die Fußpunktverschiebung $u_g(t)$ und die Fußpunktgeschwindigkeit $\dot{u}_g(t)$ gegeben, dann ist es sinnvoll, die gesamte Fußpunktverschiebung u_t als Unbekannte zu wählen.

$$M\,\ddot{u}_t + C\,\overbrace{(\dot{u}_t - \dot{u}_g)}^{\dot{u}} + K\,\overbrace{(u_t - u_g)}^{u} = 0$$

Nach Umstellen der Gleichung erhält man eine Differentialgleichung in der Totalverschiebung u_t des Fußpunkts mit einer Funktion der (bekannten) Fußpunktverschiebungen $u_g(t)$ und -geschwindigkeiten $\dot{u}_g(t)$ als Ersatzlast auf der rechten Seite.

$$M\,\ddot{u}_t + C\,\dot{u}_t + K\,u_t = \underbrace{C\,\dot{u}_g + K\,u_g}_{F_{eff}}$$

Ist die Fußpunktbeschleunigung $\ddot{u}_g(t)$ gegeben, ist es sinnvoll, die Relativverschiebung als Unbekannte zu wählen.

$$M\,\overbrace{(\ddot{u}_g + \ddot{u})}^{\ddot{u}_t} + C\,\dot{u} + K\,u = 0$$

oder $$M\,\ddot{u} + C\,\dot{u} + K\,u = \underbrace{-\,M\ddot{u}_g}_{F_{eff}}$$

Damit können Erregungen über die Fußpunkte wie Lasterregungen behandelt werden.

Im Folgenden werden nacheinander folgende Sonderfälle behandelt:

- freie, ungedämpfte Schwingung,
- freie, gedämpfte Schwingung,
- erzwungene, ungedämpfte Schwingung und
- erzwungene, gedämpfte Schwingung.

1.4 Freie Schwingung

1.4.1 Freie, ungedämpfte Schwingung

Schwingungen von Systemen ohne dynamische Belastung $F(t)$ werden *freie Schwingungen* genannt. Bei ungedämpften freien Schwingungen (C=0) ist die Bewegungsgleichung

$$M\,\ddot{u} + K\,u = 0 \tag{1.1}$$

bzw.

$$\ddot{u} + \frac{K}{M}\,u = 0$$

Der Koeffizient $\frac{K}{M} = \omega^2$ entspricht dem Quadrat der Eigenkreisfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$.

Die Lösung der Differentialgleichung ergibt sich aus dem Ansatz $u := Ae^{rt}$. Einsetzen in die Differentialgleichung führt auf die charakteristische Gleichung

$$\underbrace{(r^2 + \omega^2)}_{=0}\;\underbrace{A\,e^{rt}}_{\neq 0} = 0$$

Die nicht triviale Lösung

$$r = \pm\sqrt{-\omega^2} = \pm\,i\,\omega$$

führt auf

$$u(t) = A_1\,e^{i\omega t} + A_2\,e^{-i\omega t}$$

Mit $e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t$ wird die Gesamtlösung zu:

$$u = \underbrace{(A_1 + A_2)}_{A} \cos \omega t + \underbrace{(A_1 - A_2)}_{B} i \sin \omega t$$

$$\boxed{u = A \cos \omega t + B \sin \omega t} \qquad (1.2)$$

Alternativ lässt sich diese Lösung auch so darstellen:

$$\boxed{u = G \cos (\omega t - \Theta)} \qquad (1.3)$$

mit: $G^2 = A^2 + B^2$ Amplitude der Gesamtschwingung

$\tan \Theta = \frac{B}{A}$ Phasenwinkel

Diese Bewegung wird als harmonische Schwingung oder Eigenschwingung eines Systems bezeichnet (Abbildung 1.18). Die Konstanten A und B werden aus den Anfangsbedingungen der Schwingung ermittelt und bestimmen auch deren größte Auslenkung, d.h. die Amplitude der Eigenschwingung.

Hat das System zur Zeit t=0 die Auslenkung u_0 und die Anfangsgeschwindigkeit $\dot{u}_0$

$$u(t = 0) = u_0 \qquad ; \qquad \dot{u}(t = 0) = \dot{u}_0$$

erhält man

$$A = u_0 \quad ; \quad B = \frac{\dot{u}_0}{\omega} \rightarrow \boxed{u = u_0 \cos \omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin \omega t} \qquad (1.4)$$

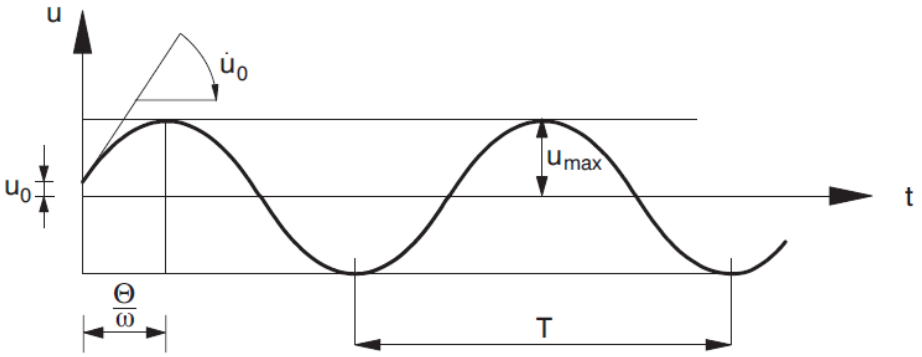


Abb. 1.18: Harmonische Schwingung

Bei der harmonischen Schwingung gelten folgende Formeln für wichtige Kenngrößen:

Amplitude der Schwingung: $u_{max} = \sqrt{u_0^2 + \frac{\dot{u}_0^2}{\omega^2}}$

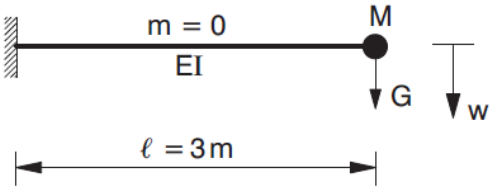
Periode der Eigenschwingung: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}$ [s] (1.5)

Eigenfrequenz des Systems: $$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\,\pi} = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{K}{M}} \qquad (1.6)$$

[1/s] oder [Hz]

Periode und Eigenfrequenz sind nur von den Systemeigenschaften abhängig, nicht von den Anfangsbedingungen.

Abbildung 1.19 zeigt einen (masselosen) Kragträger mit einer Punktmasse am Ende, den wir im Folgenden als Zahlenbeispiel betrachten.



$G = 30$ kN

$E = 2{,}1 \cdot 10^8$ kN/m²

$I = 5700$ cm⁴ (HEB 200)

$EI = 1{,}197 \cdot 10^4$ kNm²

Abb. 1.19: Kragträger mit Einzelmasse

Zunächst werden die charakteristischen Größen des Einmassenschwingers ermittelt.

Masse $M = \frac{G}{g} = \frac{30}{9{,}81} = 3{,}06\ \frac{\text{kN s}^2}{\text{m}}$ (= 3060 kg) .

Steifigkeit K (= Kraft für Einheitsverschiebung w=1):

$$w = \frac{\ell^3}{3\ EI}\ F \quad \Rightarrow \quad K = \frac{3\ EI}{\ell^3}\ 1 = \frac{3 \cdot 1{,}197 \cdot 10^4}{3^3} = 1{,}33 \cdot 10^3\ \text{kN/m}$$

Die statische Durchbiegung ist damit

$$w_{stat} = \frac{G}{K} = \frac{30}{1{,}33 \cdot 10^3} = 0{,}0226\ \text{m}$$

und die Eigenkreisfrequenz und die Frequenz betragen

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{1{,}33 \cdot 10^3}{3{,}06}} = 20{,}8\ \text{rad/s} \qquad f = \frac{\omega}{2\,\pi} = 3{,}32\ 1/\text{s} = 3{,}32\ \text{Hz}$$

Daraus ergibt sich eine Periodendauer von $T = \frac{1}{f} = 0{,}30$ s.

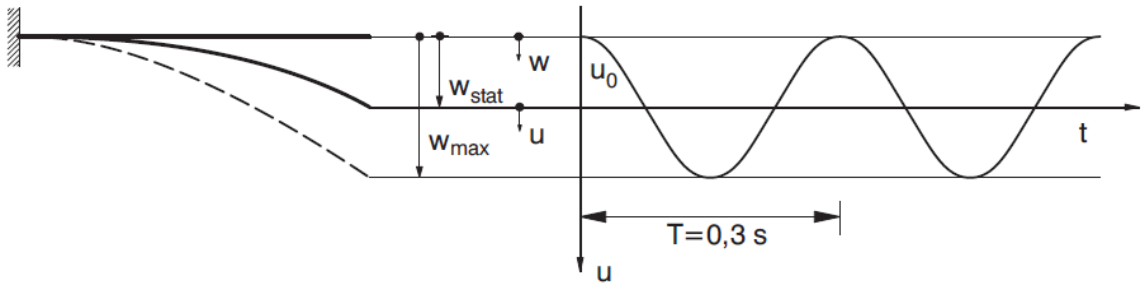


Abb. 1.20: Schwingung eines Kragarms bei plötzlicher Belastung

Wird der Kragarm aus der unausgelenkten Lage plötzlich losgelassen, ergibt sich der in Abbildung 1.20 dargestellte Verschiebungsverlauf.

Anfangsbedingungen: $u_0 = -\,w_{stat}$, $\dot{u}_0 = 0$.

Verschiebungsverlauf: $u(t) = u_0 \cdot \cos \omega t = -0{,}023 \cdot \cos 20{,}8\ t$

$$u_{max} = \sqrt{u_0^2} = w_{stat} = 0{,}023\ m$$

$$w_{max} = w_{stat} + u_{max} = 2\ w_{stat} = 0{,}046\ m$$

Die Verformungen und Schnittgrößen aus dynamischer Beanspruchung sind hier wegen des Einflusses der kinetischen Energie gerade doppelt so groß wie die Größen aus statischer Beanspruchung.

1.4.2 Freie, gedämpfte Schwingung

Die Bewegungsgleichung der gedämpften Eigenschwingung eines Systems ist

$$M\ \ddot{u} + C\ \dot{u} + K\ u = 0$$

$$\ddot{u} + \frac{C}{M}\ \dot{u} + \omega^2\ u = 0$$

Der Lösungsansatz $u = A\ e^{rt}$ führt nach Einsetzen in die Differentialgleichung auf die charakteristische Gleichung

$$r^2 + \frac{C}{M} \cdot r + \omega^2 = 0$$

mit der Lösung

$$r_{1,2} = -\frac{C}{2\ M} \pm \sqrt{\left(\frac{C}{2\ M}\right)^2 - \omega^2}$$

Für die Verschiebung erhält man damit

$$u = A_1\ e^{r_1 t} + A_2\ e^{r_2 t}$$

$$u = e^{-\frac{C}{2M} t}\ [\ A_1\ e^{(\sqrt{\ldots})\, t} + A_2\ e^{-(\sqrt{\ldots})\, t}\ ] \qquad (1.7)$$

Diese Bewegung wird als gedämpfte Eigenschwingung eines Systems bezeichnet. A_1 und A_2 sind endliche Konstanten, die aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden. Drei Lösungsfälle für verschiedene Werte der Wurzel sind zu unterscheiden, die im Weiteren für ein System mit allgemeinen Anfangsbedingungen gezeigt werden.

Kritische Dämpfung: Der Wert des Dämpfungsparameters C, für den der Radikand verschwindet, definiert den Grenzzustand der *kritischen Dämpfung*.

$$\sqrt{\ldots} = 0\ : \qquad \left(\frac{C_{kr}}{2\ M}\right)^2 = \omega^2 \longrightarrow C_{kr} = 2\ M\ \omega$$

Damit ist die Lösung

$$u = A\ e^{-\omega t} + B\ t\ e^{-\omega t}$$

Mit den Anfangsbedingungen für Verschiebung und Geschwindigkeit erhält man

$$A = u_0$$

$$B = \omega\ u_0 + \dot{u}_0$$

Die Gleichung für die Eigenschwingung bei kritischer Dämpfung lautet damit

$$u = [\ u_0 + (u_0\ \omega + \dot{u}_0)\ t\ ] \cdot e^{-\omega t} \tag{1.8}$$

Am Verlauf der Auslenkung in Abbildung 1.21 kann festgestellt werden, dass dies keine Schwingung mehr ist, sondern sich eine aperiodische Bewegung einstellt. Die Schwingung wird in der kürzest möglichen Zeit bis zur Ruhe gedämpft, was z.B. dem Idealfall eines Stoßdämpfers entspricht. Im Bauwesen tritt dieser Fall in der Regel nicht auf, da Tragwerke einen sehr viel geringeren Dämpfungskoeffizienten $C \ll C_{kr}$ besitzen.

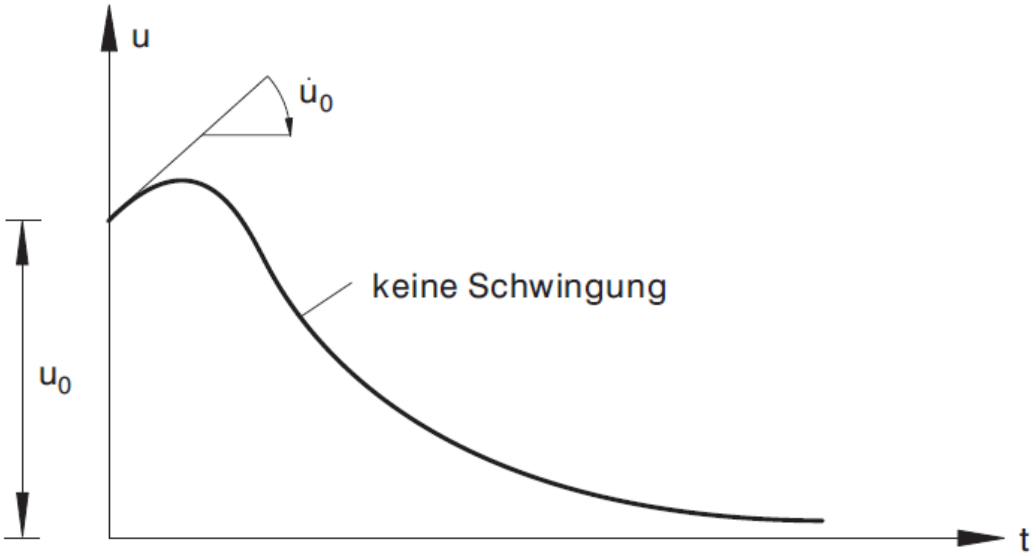


Abb. 1.21: Verlauf der Auslenkung bei kritischer Dämpfung

Zur Beurteilung des Dämpfungsvermögens eines Tragwerks wird allerdings der Wert C_{kr} als Bezugswert benutzt und damit das *Lehrsche Dämpfungsmaß* eingeführt

$$\boxed{\xi = \frac{C}{C_{kr}} = \frac{C}{2\ M\ \omega}} \tag{1.9}$$

Für Tragwerke gilt

- im linear elastischen Bereich $\xi \approx 0{,}002 - 0{,}05$,
- im nichtlinearen Bereich $\xi \approx 0{,}2$, wobei die Dämpfung durch plastische Verformungen eingebracht wird.

Überkritische Dämpfung entsteht, wenn $(C/2\ M)^2 - \omega^2 > 0$, d.h. wenn die Wurzel in der charakteristischen Gleichung reell wird und sich somit keine harmonische Schwingung einstellt. Das Lehrsche Dämpfungsmaß ist in diesem Fall $\xi > 1$.

Die Bestimmungsgleichung für die Verschiebung lässt sich dann in der Form

$$u = e^{-\xi\,\omega\,t}\ [\ A_1\ e^{\omega\sqrt{\xi^2-1}\,t} + A_2\ e^{-\omega\sqrt{\xi^2-1}\,t}\ ] \tag{1.10}$$

darstellen. Es handelt sich hier ebenfalls um eine aperiodische Bewegung. Die ausgelenkte Masse nähert sich wie bei der kritischen Dämpfung ihrer Gleichgewichtslage, ohne sie theoretisch je zu erreichen. Auch dieser Fall hat keine baupraktische Bedeutung.

Unterkritische Dämpfung liegt vor, wenn $(C/2\ M)^2 - \omega^2 < 0$, d.h. wenn der Wurzelausdruck in der charakteristischen Gleichung komplexe Anteile enthält und damit zu einer echten Schwingung führt.

$$\omega^2 - \left(\frac{C}{2\,M}\right)^2 > 0 \quad \text{bzw.} \quad 1 - \xi^2 > 0$$

Damit lautet die Lösung

$$u = e^{-\xi\omega t}\,[\,A_1 \cdot e^{i\omega\sqrt{1-\xi^2}\,t} + A_2 \cdot e^{-i\omega\sqrt{1-\xi^2}\,t}\,]$$

bzw. nach Umformung

$$u = e^{-\xi\omega t}\,[\,\underbrace{(A_1 + A_2)}_{A}\cos\left(\omega\sqrt{1-\xi^2}\;t\right) + \underbrace{i\,(A_1 - A_2)}_{B}\sin\left(\omega\sqrt{1-\xi^2}\;t\right)\,]$$

Die Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung ist

$$\boxed{\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}} \tag{1.11}$$

Damit ist die Schwingungsantwort

$$\boxed{u = e^{-\xi\omega t}\,[\,A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t\,]} \tag{1.12}$$

mit $A = u_0$

$$B = \frac{1}{\omega_D}\,[\,\xi\,\omega\,u_0 + \dot{u}_0\,]$$

Bei geringer Dämpfung $(\xi < 0,2 \rightarrow 1 - \xi^2 \approx 1)$ kann die Eigenkreisfrequenz ω_D mit der des ungedämpften Systems gleichgesetzt werden $(\omega_D \approx \omega)$, vgl. Abbildung 1.22.

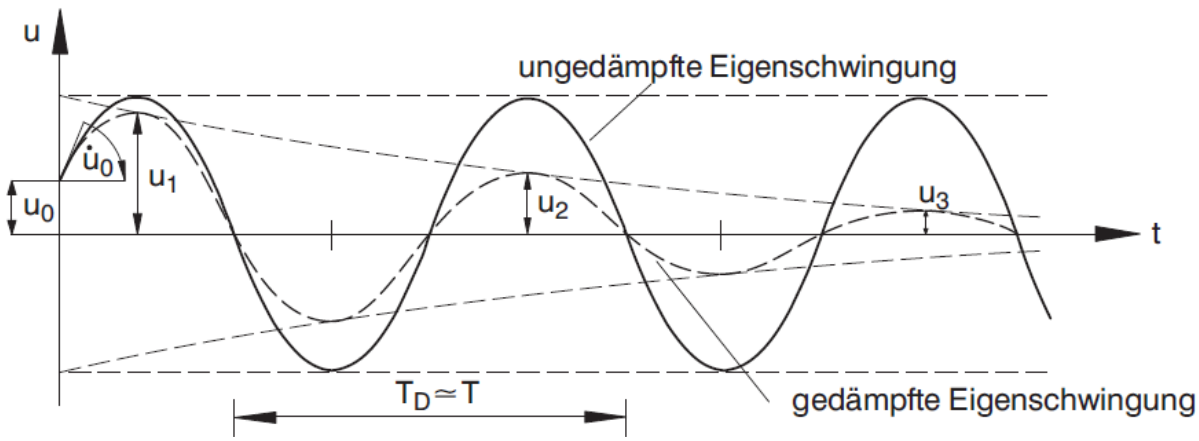


Abb. 1.22: Eigenschwingung bei unterkritischer Dämpfung

Damit ist der zweite Teil der Schwingungsgleichung identisch mit der Gleichung der freien Schwingung eines ungedämpften Systems. Somit ist auch die Periode der gedämpften Schwingung für ein Tragwerk praktisch gleich der einer freien Schwingung, d.h. $(T_D \approx T)$. Das Abklingen der Kurve (die Dämpfung) hängt von den Werten ξ und ω ab.

Zur Kennzeichnung der Schwingung bei unterkritischer Dämpfung wird auch das *logarithmische Dekrement* δ verwendet. Das logarithmische Dekrement ist eine charakteristische Größe für das Verhältnis zweier aufeinander folgender Amplituden einer gedämpften Schwingung.

$$\delta = \ln \frac{u_n}{u_{n+1}} \tag{1.13}$$

Bei n Schwingungen gilt

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{u_0}{u_n} \tag{1.14}$$

wobei u_0 die Amplitude der ungedämpften Schwingung darstellt. Zwischen dem logarithmischen Dekrement und dem Lehrschen Dämpfungsmaß ξ kann mit

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{e^{-\xi\,\omega\,t_n}}{e^{-\xi\,\omega\,(t_n+T_D)}} = e^{\xi\,\omega\,T_D} = e^{\xi\,\omega\,\frac{2\pi}{\omega_D}} = e^{\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

ein Zusammenhang hergestellt werden.

$$\boxed{\delta = \frac{2\,\pi\,\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \tag{1.15}$$

Näherung $\xi \ll 1$

$$\boxed{\delta = 2\,\pi\,\xi} \tag{1.16}$$

Durch Messungen der Werte u_n und u_{n+1} bzw. u_0 und u_n kann so für ein bestehendes Tragwerk das logarithmische Dekrement δ und daraus über (1.15) bzw. (1.16) das Lehrsche Dämpfungsmaß ermittelt werden. In Tabelle 1.1 sind typische Werte für δ angegeben

Material	Struktur	δ
Stahl	Brücken (50 m Spannweite)	0,07 – 0,09
	Brücken (40 m Spannweite)	0,1
	Brücken (12 m Spannweite)	2,5
	Hochbau	0,08 – 0,10
	Turbinenfundamente	0,15
	Federn	0,05
Stahlbeton	Hochbau	0,1 – 0,3
	rahmenartige Turbinenfundamente	0,35 – 0,4
Baugrund		0,15 – 2,0
zum Vergleich: Autostoßdämpfer		2,0 – 4,0

Tab. 1.1: Typische Werte für das logarithmische Dekrement δ

Wie man bei den Werten für Stahlbrücken erkennt, steigen die Werte von δ mit kleiner werdender Spannweite sehr schnell an. Die Ursache liegt darin, dass bei kleinen Brücken die

Schwingung durch Lagerreibung und den mit der übrigen Konstruktion zusammenhängenden Oberbau gedämpft wird.

Ziegelmauerwerk, weist etwa die gleiche Dämpfung wie Beton auf, die Werte liegen eher darunter.

Die Größe der Dämpfung kann in der Praxis mit verschiedenen Koeffizienten angegeben werden. Dies kann der Koeffizient C, das logarithmische Dekrement δ oder das Lehrsche Dämpfungsmaß ξ sein.

$$\delta = 2\pi\,\xi = 2\pi\frac{C}{2\,M\,\omega} \qquad \text{vgl. } \omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

1.5 Erzwungene Schwingungen

Unregelmäßige Belastungen entstehen z.B. durch sich bewegende Menschen und Maschinen, durch Wind, wenn er in unregelmäßigen Böen wirkt oder durch Fahrzeuge, die über Brücken fahren und auf Unebenheiten stoßen. Erdbeben verursachen kurzfristige, unregelmäßige, stoßartige Belastungen.

Manchmal wiederholt sich die Belastung in regelmäßigen Zeitabständen. Dies bezeichnet man dann als periodische Belastung. Sie entsteht beispielsweise durch nicht voll ausgewuchtete rotierende Maschinenteile, Menschen im Gleichschritt, Glocken oder auch durch den Wind, wenn sich Luftwirbel in regelmäßigen Zeitabständen ablösen.

1.5.1 Harmonische Erregung, ungedämpftes System

Wir betrachten zunächst harmonisch veränderliche Belastungen (Abbildung 1.23). Durch Linearkombination von harmonischen Belastungen kann jede beliebige periodische Belastung erhalten werden.

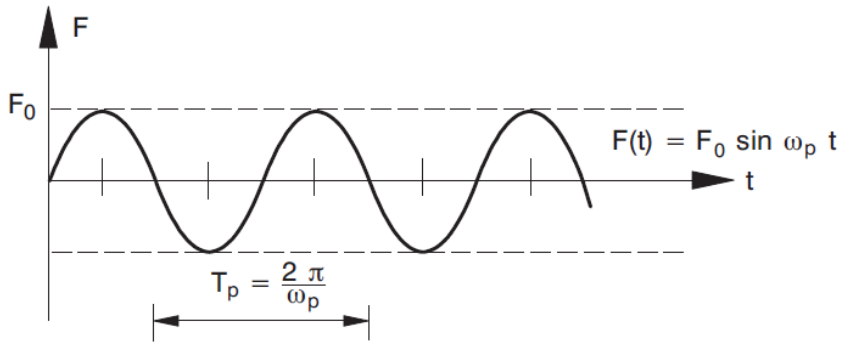


Abb. 1.23: Harmonisch veränderliche Belastung

Die charakteristischen Werte für die Erregung sind

- die Periode $\quad T_P = \dfrac{2\pi}{\omega_P}$,
- die Erregerfrequenz $\quad f_P = \dfrac{\omega_P}{2\pi}$.

Als Amplitude der Erregerschwingung wird die Last F_0 angesetzt, die z.B. der Größe der Zentrifugalkraft eines rotierenden Schwingers entspricht.

Die Bewegungsgleichung lautet

$$M\,\ddot{u} + K\,u = F_0 \sin\omega_p t \qquad \text{bzw.} \qquad \ddot{u} + \omega^2\,u = \frac{F_0}{M}\sin\omega_p t.$$

Die Lösung der nicht homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung wird in zwei Teile aufgespalten:

$$u = u_h + u_p$$

Der homogene Anteil entspricht der Lösung der freien Schwingung:

$$u_h = A\ \cos\omega t + B\ \sin\omega t$$

Für die partikulare Lösung wird ein Ansatz über die rechte Seite für die Verschiebung gemacht.

$$u_p = A_p\ \sin\omega_p t$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung folgt

$$-A_p\ \omega_p^2\ \sin\omega_p t + A_p\ \omega^2\ \sin\omega_p t = \frac{F_0}{M}\sin\omega_p t$$

Der Koeffizientenvergleich liefert

$$A_p\ (\omega^2 - \omega_p^2) = \frac{F_0}{M}$$

$$A_p = \frac{F_0}{M}\ \frac{1}{\omega^2 - \omega_p^2} = \frac{F_0}{M\ \omega^2}\ \left[\frac{1}{1 - (\frac{\omega_p}{\omega})^2}\right]$$

mit

$$K = M\ \omega^2 \quad \text{und} \quad \boxed{\frac{\omega_p}{\omega} = \beta}$$

$$A_p = \frac{F_0}{K}\ \left[\frac{1}{1 - \beta^2}\right]$$

Damit lautet die Lösung für die erzwungene Schwingung ohne Dämpfung

$$\boxed{u = A\ \cos\omega t + B\ \sin\omega t + \frac{F_0}{K}\left[\frac{1}{1 - \beta^2}\right]\ \sin\omega_p t} \tag{1.17}$$

Die Konstanten A und B werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt.

$$u_0 \quad \rightarrow \quad A = u_0$$

$$\dot{u}_0 \quad \rightarrow \quad B = \frac{\dot{u}_0}{\omega} - \frac{F_0}{K}\ \frac{\omega_p}{\omega}\ \left[\frac{1}{1 - \beta^2}\right]$$

Für den Fall, dass bei t = 0 die Verschiebung und die Geschwindigkeit bekannt sind, ergibt sich damit für den Verschiebungs-Zeit-Verlauf

$$u = u_0\ \cos\omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega}\ \sin\omega t + \underbrace{\frac{F_0}{K}\left[\frac{1}{1 - \beta^2}\right]\ [\ \sin\omega_p t - \beta\ \sin\omega t\ ]}_{\text{stationärer Anteil}}$$

Dies ist eine nicht harmonische Bewegung, die auch als instationäre oder transiente Schwingung bezeichnet wird.

Der partikulare Anteil der Lösung aus der Erregung

$$u_p = \frac{F_0}{K}\left[\frac{1}{1-\beta^2}\right]\sin\omega_p t$$

wird auch als stationäre Schwingung bezeichnet. Sie ist für gedämpfte Systeme (siehe Abschnitt 1.5.2) von wesentlicher Bedeutung.

Wenn das System bei Beginn der Belastung in Ruhe ist $(u_0 = 0;\ \dot{u}_0 = 0)$, vereinfacht sich die Lösung zu

$$\boxed{u = \frac{F_0}{K}\left[\frac{1}{1-\beta^2}\right]\left[\sin\omega_p t - \beta\sin\omega t\right]} \tag{1.18}$$

Dabei entspricht der Koeffizient F_0/K gerade der statischen Verschiebung

$$u_{st} = \frac{F_0}{K}$$

so dass sich die Bewegungsgleichung einer Masse unter dynamischer Beanspruchung als Produkt der statischen Verschiebung mit einem sogenannten *Dynamischen Lastfaktor* (DLF) für den zeitlich veränderlichen Teil darstellen lässt.

$$u(t) = u_{st}\ DLF(t)$$

wobei:

$$\boxed{DLF(t) = \left[\frac{1}{1-\beta^2}\right]\left[\sin\omega_p t - \beta\sin\omega t\right]} \tag{1.19}$$

Für dynamische Beanspruchungen ist der Maximalwert des dynamischen Lastfaktors DLF wichtig. Dieser Maximalwert wird auch als *dynamischer Vergrößerungsfaktor* D bezeichnet. Da ω_P und ω unabhängige Größen sind, kann man diesen Maximalwert für ungedämpfte Schwingungen direkt berechnen. Im ungünstigsten Fall gibt es einen Zeitpunkt t_{max} für den

$$\sin\omega_p\ t_{max} = +1,0 \quad ; \quad \sin\omega\ t_{max} = -1,0$$

gilt. Damit ist

$$D = \max DLF = \frac{1}{1-\beta^2}(1+\beta)$$

$$\boxed{D = \frac{1}{1-\beta}} \tag{1.20}$$

Bei Betrachtung des dynamischen Lastfaktors können 3 Grenzfälle unterschieden werden.

1. Langsame Erregung (Abbildung 1.24): $\omega \gg \omega_P$: $\beta \ll 1$

Abb. 1.24: Langsame Erregung

Bei einer langsamen Erregung strebt der dynamische Vergrößerungsfaktor gegen D = 1. Die erzwungene Schwingung (stationäre Schwingung) überwiegt, und die Eigenschwingung hat keinen Einfluss auf die Auslenkung. Die max. Auslenkung entspricht dabei der Auslenkung infolge einer statischen Last, und das Tragwerk muss auch dafür bemessen werden.

2. Schnelle Erregung (Abbildung 1.25): $\omega \ll \omega_P: \quad \beta \gg 1$

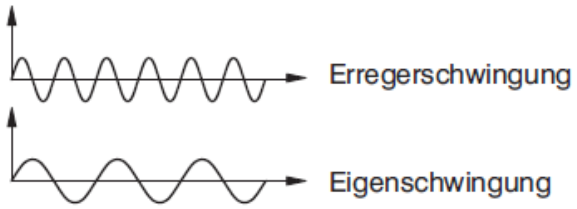


Abb. 1.25: Schnelle Erregung

Bei verhältnismäßig schnellen Erregungen strebt D gegen Null. Es ergeben sich praktisch keine Auslenkungen, weil sie durch die Trägheit des Systems verhindert werden. Das Tragwerk muss in diesem Fall für die statische Last bemessen werden.

3. Resonanz (Abbildung 1.26) $\omega = \omega_P: \quad \beta \to 1$

Entspricht die Erregerfrequenz der Frequenz der Eigenschwingung, wächst der dynamische Vergrößerungsfaktor über alle Grenzen. Diese Erscheinung bezeichnet man als *Resonanz* (die Erregerfrequenz liegt mit der Eigenfrequenz des Systems in Resonanz).

In der Formel für den Verlauf der Auslenkung über die Zeit, Gleichung (1.18), taucht für den Resonanzfall eine Nulldivision auf. Den Verlauf der Schwingung berechnet man über eine Grenzwertbetrachtung nach der l'Hôpitalschen Regel durch Ableiten von Zähler und Nenner nach β.

$$u = \frac{F_0}{K}\left[\frac{1}{1-\beta^2}\right]\left[\sin\omega_p t - \beta\sin\omega t\right]; \qquad \omega_p = \beta\,\omega$$

$$u = \frac{F_0}{K}\lim_{\beta\to 1}\frac{\sin\beta\omega t - \beta\sin\omega t}{1-\beta^2} = \frac{F_0}{K}\frac{(\omega\, t\cos\omega t - \sin\omega t)}{-2} =$$

$$= -\frac{F_0}{K}\Big(\underbrace{\frac{1}{2}\,\omega\, t\cos\omega t}_{y_1} - \underbrace{\frac{1}{2}\sin\omega t}_{y_2}\Big)$$

Dabei wächst der Koeffizient des ersten Terms (y_1) proportional mit der Zeit *t*, während der Koeffizient des zweiten Terms (y_2) konstant bleibt und deshalb früh an Bedeutung verliert.

Die jeweils maximale Auslenkung erscheint bei $\omega t = \pi, 2\pi, 3\pi$

mit
$$u_{max} = u_{st}\cdot\frac{1}{2}(n\pi\cdot 1 - 0)$$
$$= u_{st}\frac{n\pi}{2}$$

Der Verschiebungsverlauf ist in Abbildung 1.26 dargestellt.

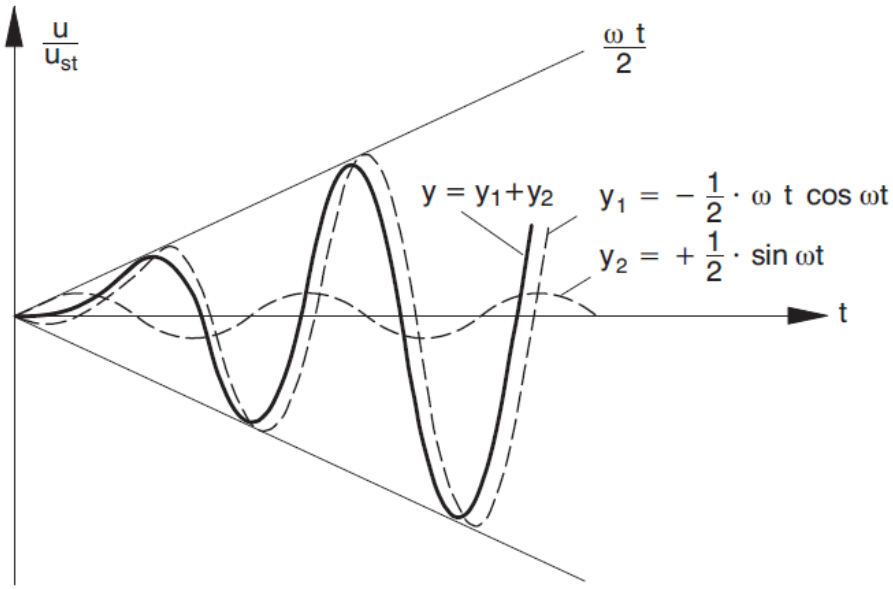


Abb. 1.26: Schwingungsverlauf im Resonanzfall bei ungedämpften Schwingungen

Zwischen der Verschiebung u und dem dynamischen Vergrößerungsfaktor D besteht der folgende Zusammenhang.

$$u(t) = \frac{F_0}{K}\,DLF(t); \quad u_{max} = \frac{F_0}{K}\,D; \quad D = \frac{1}{1-\beta}$$

Die Abhängigkeit der maximalen Amplitude der Schwingung u_{max}, und damit des dynamischen Vergrößerungsfaktors D, vom Verhältnis der Erreger- zur Systemfrequenz ω_P/ω lässt sich in einem Diagramm darstellen (Abbildung 1.27). Dies ist die einfachste Form eines sogenannten *Antwortspektrums*, in dem in der Regel der Betrag von D (gestrichelte Linie) über β dargestellt wird. Auch die Auftragung über den Kehrwert $1/\beta$ ist üblich (Abbildung 1.28).

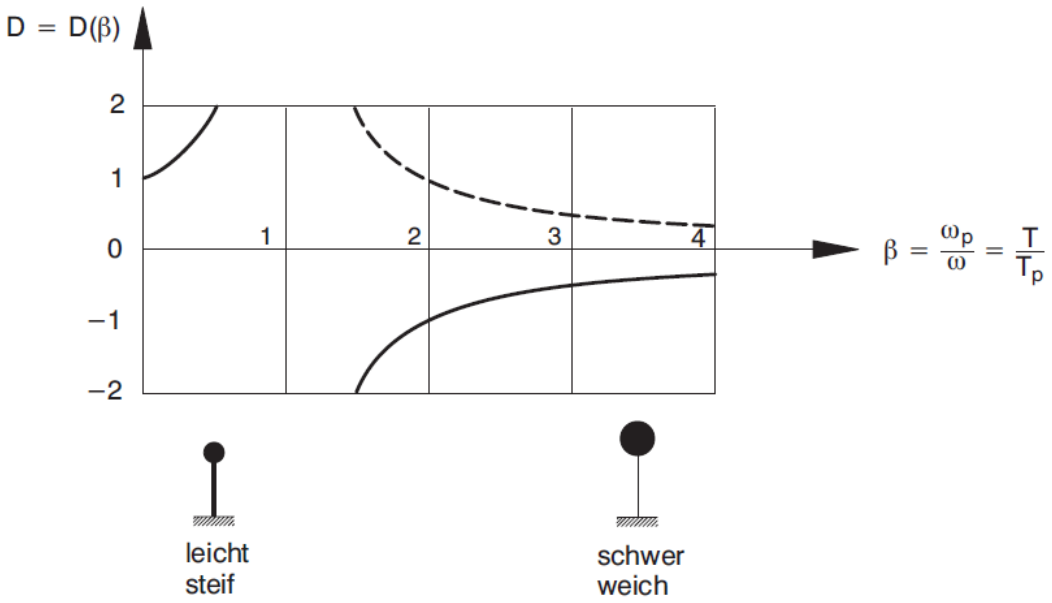


Abb. 1.27: Antwortspektrum, D über dem Verhältnis von Erregerfrequenz zu Eigenfrequenz

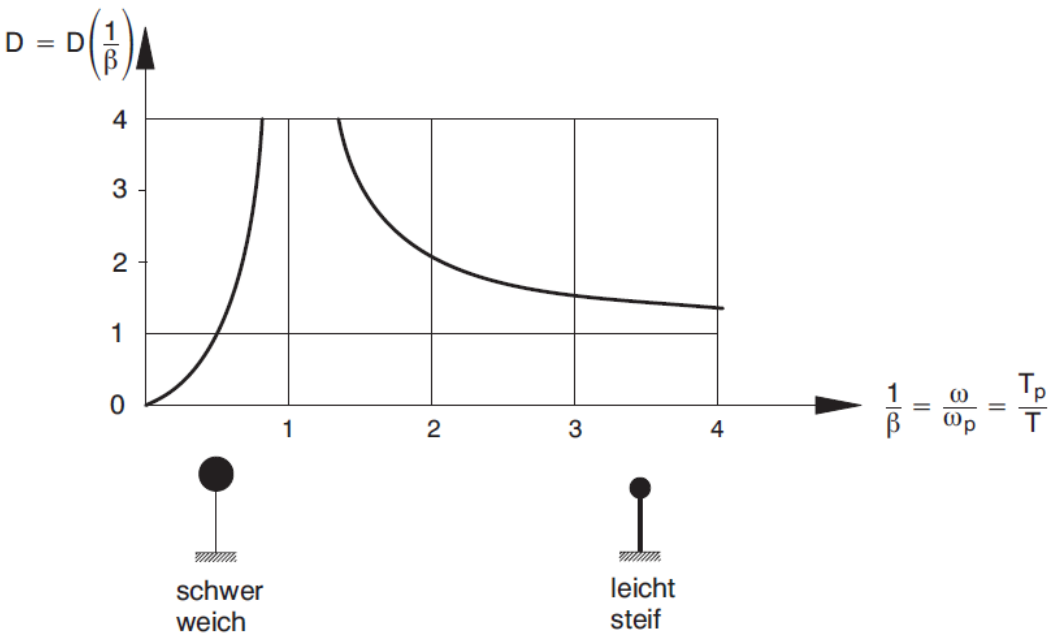


Abb. 1.28: Antwortspektrum, D über dem Verhältnis von Eigenfrequenz zu Erregerfrequenz

Aus einem solchen Antwortspektrum lässt sich für ein bestimmtes System mit der Eigenfrequenz ω die Vergrößerung gegenüber der statischen Lösung für Erregungen mit verschiedenen Frequenzen ω_P ablesen.

Abbildung 1.29 zeigt beispielhaft ein System mit seinen charakteristischen Eigenschaften (Masse, Steifigkeit und die daraus ableitbaren Größen), sowie zwei verschiedene Erregungen. Die Frequenz von Erregung 1 ist etwas höher als die Systemfrequenz ($\beta > 1$), Erregung 2 ist etwas langsamer ($\beta < 1$).

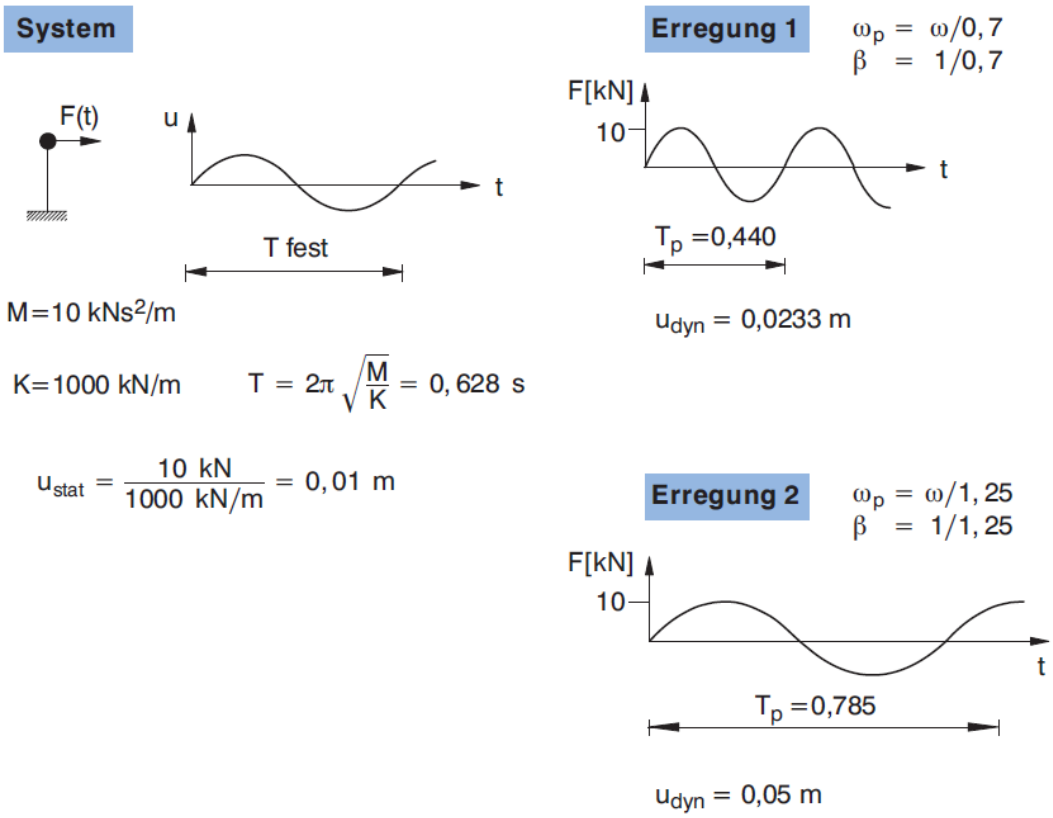


Abb. 1.29: System (Einmassenschwinger) mit verschiedenen Erregungen

Aus dem Antwortspektrum kann für die jeweilige Erregung der entsprechende dynamische Vergrößerungsfaktor abgelesen werden (Abbildung 1.30). Das Antwortspektrum entspricht also dem Ergebnis eines Experiments, bei dem für ein gegebenes System das gesamte Erregerspektrum durchlaufen wird. Die Polstelle bei $\omega/\omega_P \approx 1$ zeigt, dass dieser Bereich in der Praxis unbedingt gemieden werden muss, d.h. die Erregerfrequenz sollte sich möglichst von der Eigenfrequenz des Systems unterscheiden, wenn maßgebende dynamische Kräfte F_0 auftreten.

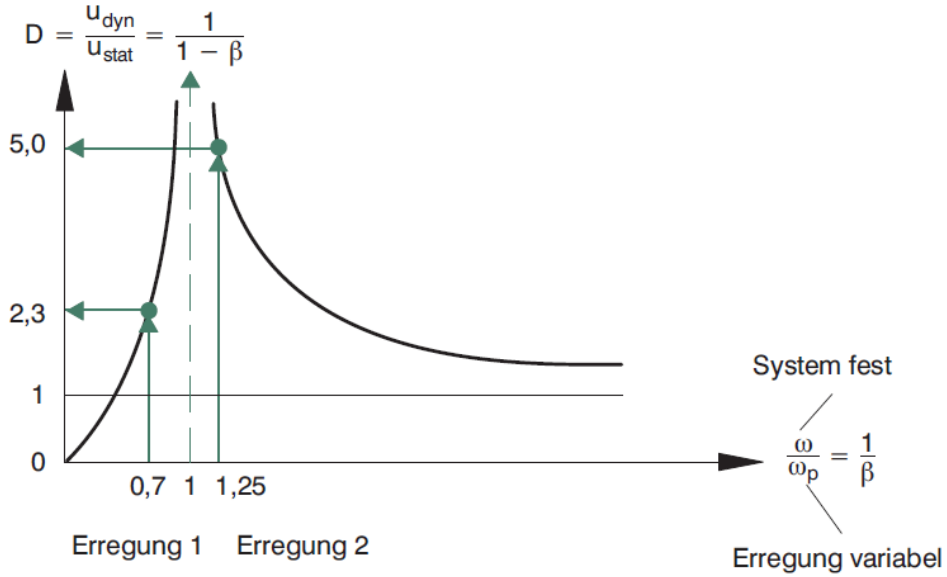


Abb. 1.30: Anwendung des Antwortspektrums für ein gegebenes System

Das Antwortspektrum lässt sich aber auch anders deuten. Dazu betrachten wir eine bestimmte Erregung ω_P, die auf verschiedene Systeme aufgebracht wird (Abbildung 1.31).

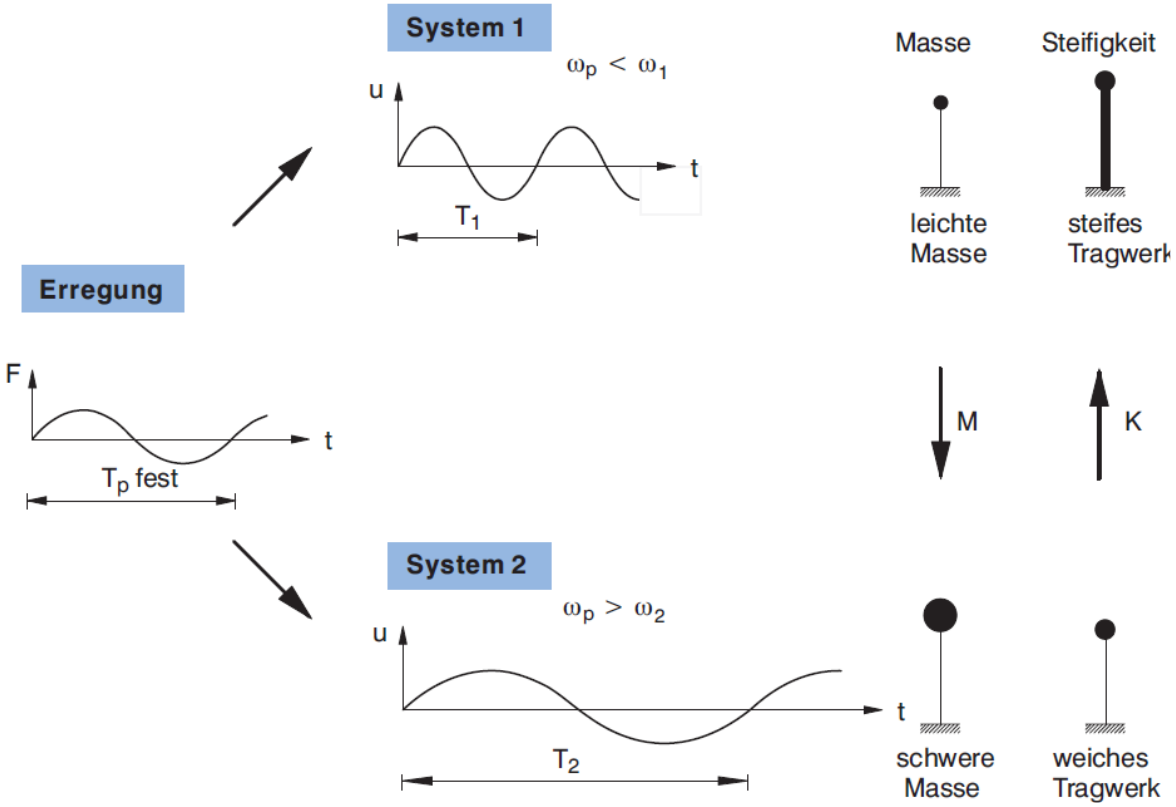


Abb. 1.31: Erregung auf verschiedene Systeme

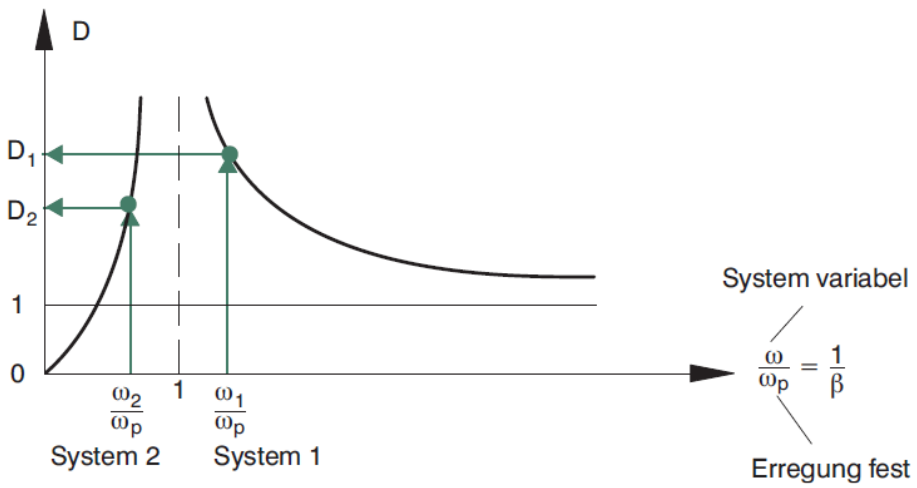


Abb. 1.32: Anwendung des Antwortspektrums für eine gegebene Erregung

1.5.2 Harmonische Erregung, gedämpftes System

Wir betrachten hier nur den baupraktisch interessanten Fall der *unterkritischen Dämpfung*. Die Bewegungsgleichung für das System lautet:

$$M\,\ddot{u} + C\,\dot{u} + K\,u = F_0 \sin\omega_P t$$

bzw. mit $\xi = C/2\,M\,\omega$ und $\omega^2 = K/M$

$$\ddot{u} + 2\,\xi\,\omega\,\dot{u} + \omega^2 u = \frac{F_0}{K}\,\omega^2 \sin\omega_P t$$

Die Lösung besitzt wieder einen homogenen und einen partikularen Anteil:

$$u = u_h + u_p,$$

wobei der homogene Anteil der Eigenschwingung eines gedämpften Systems entspricht.

$$u_h = e^{-\xi\omega t}\,(A\,\cos\omega_D t + B\,\sin\omega_D t)$$

Für den partikularen Anteil führt ein Ansatz

$$u_p = (A_p\,\cos\omega_p t + B_p\,\sin\omega_p t)$$

auf die Konstanten:

$$A_p = -\frac{\frac{F_0}{K}\,\omega^2\,2\,\xi\,\omega_p\,\omega}{[\,(\omega^2-\omega_p^2)^2 + (2\,\xi\,\omega\,\omega_p)^2\,]}$$

$$B_p = \frac{\frac{F_0}{K}\,\omega^2\,(\omega^2-\omega_p^2)}{[\,(\omega^2-\omega_p^2)^2 + (2\,\xi\,\omega\,\omega_p)^2\,]}$$

Somit gilt für den Partikularanteil:

$$u_p = -\frac{F_0}{K}\,\frac{2\,\xi\,\beta}{[\,1-\beta^2\,]^2 + [\,2\,\xi\,\beta\,]^2}\,\cos\omega_p t + \frac{F_0}{K}\,\frac{[\,1-\beta^2\,]}{[\,1-\beta^2\,]^2 + [\,2\,\xi\,\beta\,]^2}\,\sin\omega_p t$$

Beide Teile werden zur Gesamtlösung überlagert.

$$\boxed{u = \underbrace{e^{-\xi\omega t}\,[\,A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t\,]}_{\text{transienter Anteil}} + \underbrace{\frac{F_0}{K}\,\frac{[\,1-\beta^2\,]\sin\omega_p t - 2\,\xi\,\beta\cos\omega_p t}{[\,1-\beta^2\,]^2 + [\,2\,\xi\,\beta\,]^2}}_{\text{stationärer Anteil}}} \tag{1.21}$$

Für den Fall, dass das System zu Beginn der Belastung in Ruhe war, ist die Lösung:

$$u = \frac{F_0}{K}\left\{\overbrace{\frac{(\,1-\beta^2\,)\sin\omega_p t - 2\,\xi\,\beta\cos\omega_p t}{(\,1-\beta^2\,)^2 + (\,2\,\xi\,\beta\,)^2}}^{\text{stationärer (erzwungener) Anteil}} + \underbrace{e^{-\xi\omega t}\,\frac{\frac{\omega_p}{\omega_D}\,(\,2\,\xi^2+\beta^2-1\,)\sin\omega_D t + 2\,\xi\,\beta\cos\omega_D t}{(\,1-\beta^2\,)^2 + (\,2\,\xi\,\beta\,)^2}}_{\text{transienter Anteil (Eigenschwingungsanteil)}}\right\} \tag{1.22}$$

Wie beim ungedämpften System wird der dynamische Lastfaktor DLF(t) eingeführt.

$$u_0 = \frac{F_0}{K}\,\mathrm{DLF}(t)$$

Der transiente Anteil entspricht einer gedämpften, freien Schwingung und klingt mit der Zeit ab. Für die Betrachtung von Dauerschwingungen mit nicht zu geringer Dämpfung genügt daher die Untersuchung des stationären Anteils des dynamischen Lastfaktors DLF.

$$\mathrm{DLF}_S = \frac{(\,1-\beta^2\,)\sin\omega_p t - 2\,\xi\,\beta\cos\omega_p t}{(\,1-\beta^2\,)^2 + (\,2\,\xi\,\beta\,)^2}$$

umgeformt:

$$\mathrm{DLF}_S = \frac{1}{\sqrt{(\,1-\beta^2\,)^2 + (\,2\,\xi\,\beta\,)^2}}\,\sin\,(\,\omega_p t - \theta_S\,) \tag{1.23}$$

$$\theta_S = \tan^{-1}\frac{2\,\xi\,\beta}{1-\beta^2} \tag{1.24}$$

Damit entspricht der dynamische Vergrößerungsfaktor $\max\,\mathrm{DLF} = \mathrm{D}$ dem Wert der Amplitude $1/\sqrt{\cdots}$. Dieser Wert wird häufig als Abschätzung der maximalen Beanspruchung bei einer harmonischen Belastung verwendet.

Für die Untersuchung des *Einschwingvorgangs* kann diese Abschätzung weit auf der unsicheren Seite liegen, wie das Diagramm in Abbildung 1.33 zeigt. Bei schwacher Dämpfung kann sich der Einschwingvorgang über einen längeren Zeitraum erstrecken. Für diesen Fall ist eine genauere Lösung erforderlich. Auch für sie wird für kleine Dämpfung $(\xi < 0,2)$ eine gewisse Näherung eingeführt, die auf den folgenden, vereinfachten Ausdruck für den dynamischen Vergrößerungsfaktor führt (hier ohne Herleitung angegeben):

$$\boxed{D = \frac{1 + \beta\,e^{-\frac{\xi\pi}{|\beta-1|}}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\,\xi\,\beta)^2}}} \tag{1.25}$$

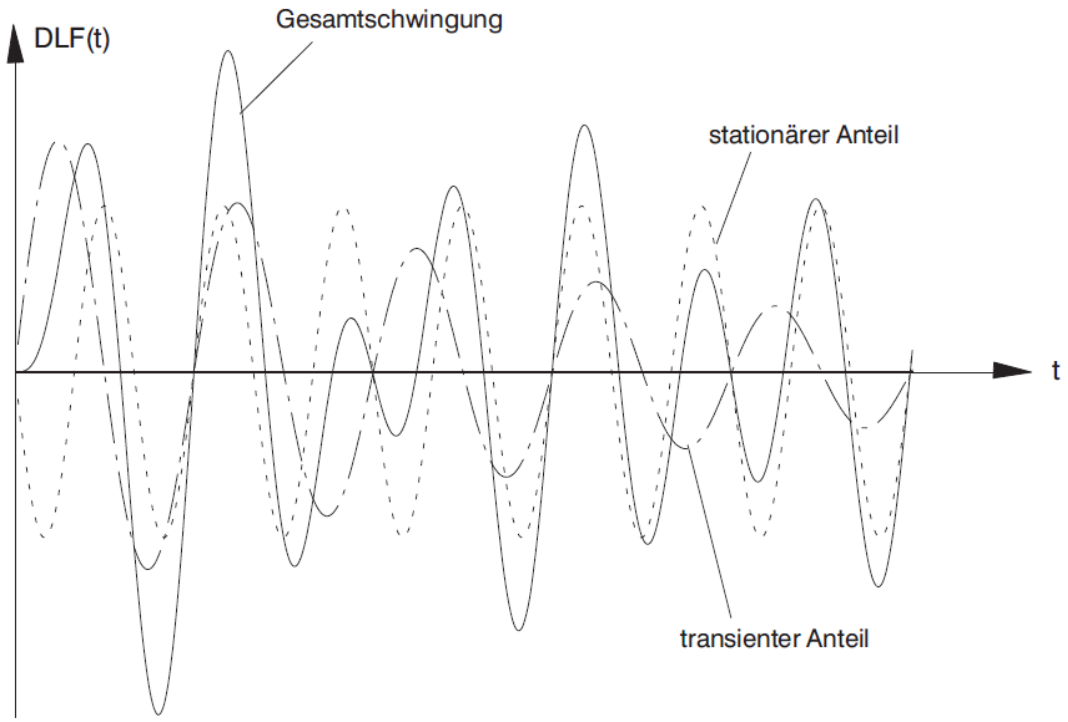


Abb. 1.33: Einschwingphase bei einer harmonischen Erregung mit $\beta = 1,5$, $\xi = 0,05$

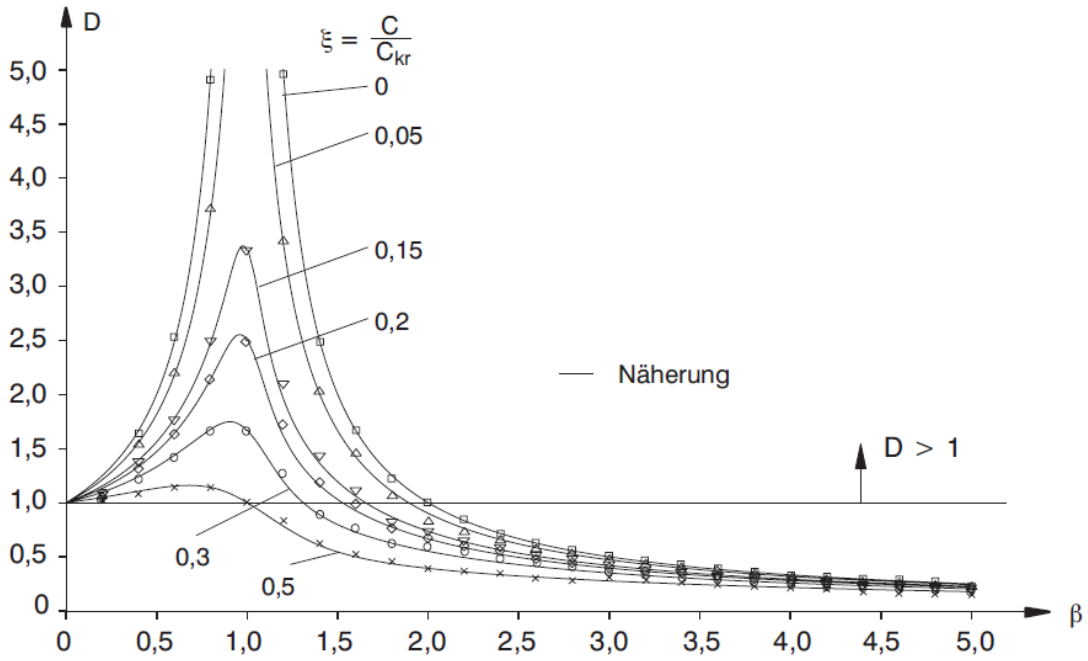


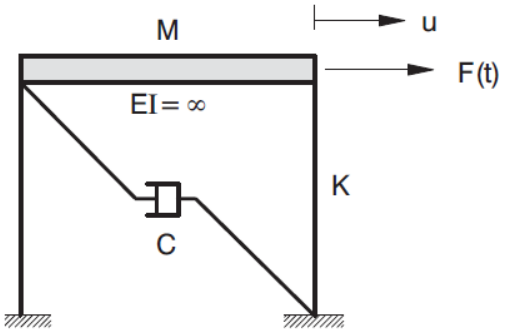
Abb. 1.34: Dynamischer Vergrößerungsfaktor D – Vergleich exakter Werte mit der Näherung

Abbildung 1.34 zeigt einige mit Gleichung (1.25) ermittelte, genäherte Antwortspektren für verschiedene Werte des Lehrschen Dämpfungsmaßes ξ. Der Vergleich mit den punktweise eingetragenen exakten Lösungen zeigt, dass die Näherung selbst für stark gedämpfte Systeme recht gute Werte liefert. Praktisch sind nur die Fälle mit $D > 1$ von Bedeutung.

Man erkennt außerdem, dass alle Verläufe $D(\beta)$ für $\beta = 1$ (Resonanz) ein ausgeprägtes Maximum haben, das vom Dämpfungswert ξ stark beeinflusst wird. Aus (1.25) erhält man:

$$\boxed{\max D = \frac{1}{2\,\xi} \quad \text{für} \quad \beta = 1} \tag{1.26}$$

Allerdings lässt sich nur im Bereich, in dem die Erregerfrequenz sich um etwa 50% und weniger von der Eigenfrequenz unterscheidet, eine deutliche Beeinflussung der Schwingungsamplitude durch die Dämpfung erreichen $(0,5 \leq \beta \leq 1,5)$. Für kleine β nähert sich die Schwingungsantwort der statischen Lösung $(D = 1)$, für große β nähert sich die Amplitude dem Wert 0, das System reagiert auf hochfrequente Erregungen gar nicht.



Gemessene Werte bei einem Versuch:

Die Ruhebelastung F = 1,0 kN führt zu u_o = 2 cm Auslenkung.

Freie Schwingung (gedämpftes System):

u_1 = 1,33 cm — Auslenkung nach einer Schwingung

T_D = 0,889 s — Schwingungsdauer

Abb. 1.35: Einstöckiger Rahmen mit Dämpfung

Als Zahlenbeispiel betrachten wir das System in Abbildung 1.35. Das System wird mit $F(t) = F_0 \sin\omega_p t$ belastet. Die Amplitude der Last ist $F_0 = 1$ kN.

Gesucht sind die maximalen Auslenkungen u_{max} für $f_p = 0,95$ Hz und für den Resonanzfall.

Zunächst werden die Systemwerte berechnet.

Steifigkeit:

$$K = \frac{F}{u_0} = \frac{1,0}{0,02} = 50 \text{ kN/m}$$

Eigenfrequenz des gedämpften Systems:

$$f_D = \frac{1}{T_D} = \frac{1,0}{0,889} = 1,125 \text{ Hz}$$

Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems:

$$\omega_D = 2\pi f_D = 7,07 \text{ rad/s}$$

Logarithmisches Dekrement:

$$\delta = \ln\frac{u_0}{u_1} = \ln\frac{0,02}{0,0133} = 0,408$$

Lehrsches Dämpfungsmaß:

$$\xi \approx \frac{\delta}{2\pi} = \frac{0,408}{2\pi} = 0,065 = 6,5\%$$

Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems:

$$\omega = \frac{\omega_D}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{7,07}{\sqrt{1-0,065^2}} = 7,08 \approx \omega_D$$

Masse:

$$M = \frac{K}{\omega^2} = \frac{50}{7,08^2} = 0,996 \text{ kN } \frac{s^2}{m} = 0,996 \text{ kg}$$

Dämpfungskonstante:

$$C = \xi\, C_{kr} = \xi \cdot 2 \cdot M \cdot \omega = 0,065 \cdot 2 \cdot 0,996 \cdot 7,08 = 0,92 \text{ kN } \frac{s}{m}$$

Maximale Auslenkung bei Belastung F(t):

1. Fall: $f_p = 0,95 \text{ Hz}$

$$\omega_p = 2\pi f_p = 2\pi \cdot 0,95 = 5,97 \text{ rad/s}$$

$$\beta = \frac{\omega_p}{\omega} = \frac{5,97}{7,08} = 0,843$$

$$D = \frac{1+\beta\, e^{-\xi \frac{\pi}{|1-\beta|}}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\,\xi\,\beta)^2}}$$

$$D = \frac{1+0,843\, e^{-0,065 \frac{\pi}{1-0,843}}}{\sqrt{(1-0,843^2)^2 + (2 \cdot 0,065 \cdot 0,843)^2}} = 3,97$$

ohne Dämpfung: $D = \frac{1}{1-\beta} = 6,37$

$$u_{max} = \frac{F_0}{K} D = 0,02 \cdot 3,97 = 0,079 \text{ m} = 7,9 \text{ cm}$$

2. Fall: Resonanz

$$\omega_p = \omega = 7,08 \rightarrow f_p = 1,127 \text{ Hz}$$

$$D = \frac{1}{2\,\xi} = \frac{1}{2 \cdot 0,065} = 7,69$$

$$u_{max} = 0,02 \cdot 7,69 = 0,154 \text{ m} = 15,4 \text{ cm}$$

1.6 Allgemeine periodische Belastungen

Als Belastung sei eine periodische Funktion F(t) mit der Periode T_p gegeben.

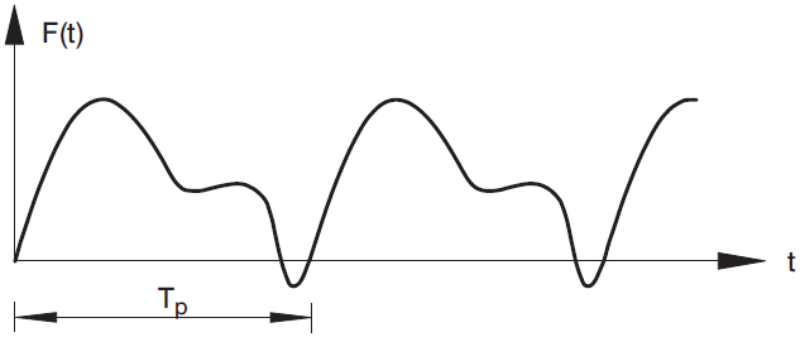


Abb. 1.36: Periodisch veränderliche Belastung

Durch eine harmonische Analyse kann F(t) in eine Fourier-Reihe entwickelt werden.

$$F(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \omega_{p,n} t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \omega_{p,n} t \tag{1.27}$$

$$A_0 = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} F(t)\, dt \quad ; \qquad \omega_{p,n} = \frac{2\pi\, n}{T_p}$$

$$A_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} F(t) \cos \omega_{p,n} t\, dt \quad ; \qquad B_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} F(t) \sin \omega_{p,n} t\, dt$$

Dieser Ausdruck wird in die Bewegungsgleichung eingesetzt, und diese wird dann getrennt für jedes Glied der Reihe gelöst. Die Ergebnisse werden nach dem Superpositionsprinzip addiert.

Betrachtet man den stationären Anteil der Schwingung und vernachlässigt den Einschwingvorgang, erhält man

1. für ungedämpfte und schwach gedämpfte Systeme:

$$u(t) = \frac{1}{K} \left[A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \beta_n^2} \left(A_n \cos \omega_{p,n} t + B_n \sin \omega_{p,n} t \right) \right] \tag{1.28}$$

mit:

$$\omega_{p,1} = \frac{2\,\pi}{T_p} \quad ; \quad \omega_{p,n} = n\, \omega_{p,1} \quad ; \quad \beta_n = \frac{\omega_{p,n}}{\omega} = n\, \beta_1$$

2. für stärker gedämpfte Systeme:

$$u(t) = \frac{1}{K} \left[A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n \sin \omega_{p,n} t + G_n \cos \omega_{p,n} t}{(1 - \beta_n^2)^2\, (2 \cdot \xi\, \beta_n)^2} \right] \tag{1.29}$$

$$E_n = A_n \cdot 2 \cdot \xi\, \beta_n + B_n\, (1 - \beta_n^2) \; ; \quad G_n = A_n\, (1 - \beta_n^2) - B_n \cdot 2 \cdot \xi\, \beta_n$$

1.7 Stoßbelastungen

1.7.1 Motivation

Neben periodischen Belastungen sind Stoßbelastungen im Bauwesen von Bedeutung. Zunächst soll eine sinusförmige Stoßbelastung betrachtet werden, die näherungsweise die Wirkung von Windstößen oder Anpralllasten repräsentiert.

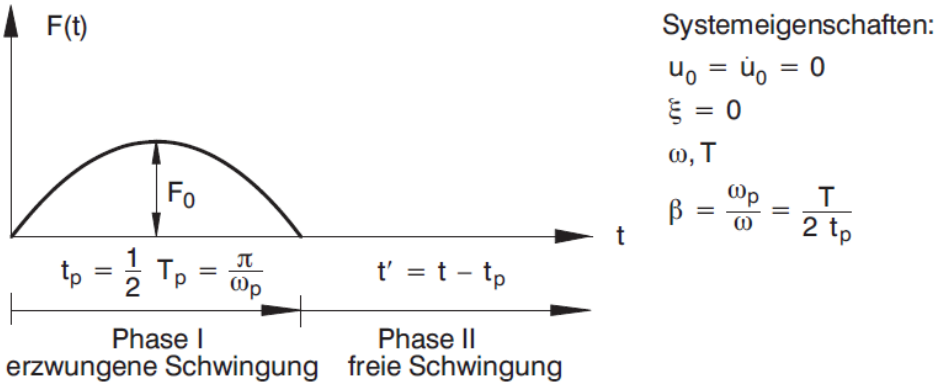


Abb. 1.37: Sinusförmige Kurzzeit-Belastung

In solchen Fällen werden 2 Phasen der Belastung unterschieden: Eine Phase I, in der die Belastung wirkt, und eine Phase II, in der das System frei schwingt.

Das System soll ungedämpft und zur Zeit t=0 in Ruhe sein, d.h. $\xi = 0;\ u_0 = \dot{u}_0 = 0$.

Eigenschaften: Kreisfrequenz ω, Periode T.

1.7.2 Phase I, erzwungene Schwingung

In der Zeit $t < t_p = \frac{\pi}{\omega_p}$ liegt eine erzwungene Schwingung mit einer harmonischen Erregung vor. Für den ungedämpften Fall kann die Verschiebung aus Gleichung (1.18) berechnet werden.

$$u = \frac{F_0}{K}\,\frac{1}{1-\beta^2}\,[\,\underbrace{\sin\omega_p t}_{a_1\,(t)} - \underbrace{\beta\,\sin\omega t}_{a_2\,(t)}\,]$$

Wir interessieren uns für die Maximalwerte von *u*(*t*) in Phase I. Dazu berechnen wird die Geschwindigkeit aus der ersten Ableitung von *u*

$$\dot{u} = \frac{F_0}{K}\,\frac{\omega_p}{1-\beta^2}\,[\,\cos\omega_p t - \cos\omega t\,] \tag{1.30}$$

deren Nullstellen den Extremalstellen von *u* entsprechen. Aus der Bedingung

$$\cos\ \omega_p t = \cos\omega t$$

folgt

$$\omega_p t = \pm\,\omega t + 2n\pi$$

wobei im allgemeinen $n \neq 0$ sein wird (außer für den Sonderfall der Resonanz). Der früheste Zeitpunkt, zu dem die maximalen Verschiebungen auftreten, ergibt sich demnach für n = 1 als

$$t_1 = \frac{2\,\pi}{\omega_p + \omega}$$

Dieser Zeitpunkt ist dann innerhalb der Belastungszeit (Phase I), wenn

$$t_1 = \frac{2\pi}{\omega_p + \omega} < t_p = \frac{\pi}{\omega_p} \quad\rightarrow\quad 2\,\omega_p < \omega_p + \omega \quad\rightarrow\quad \omega_p < \omega$$

gilt, d.h. immer dann wenn

$$\frac{\omega_p}{\omega} = \beta < 1 \quad \text{bzw.} \quad t_p = \frac{T_p}{2} > \frac{T}{2}$$

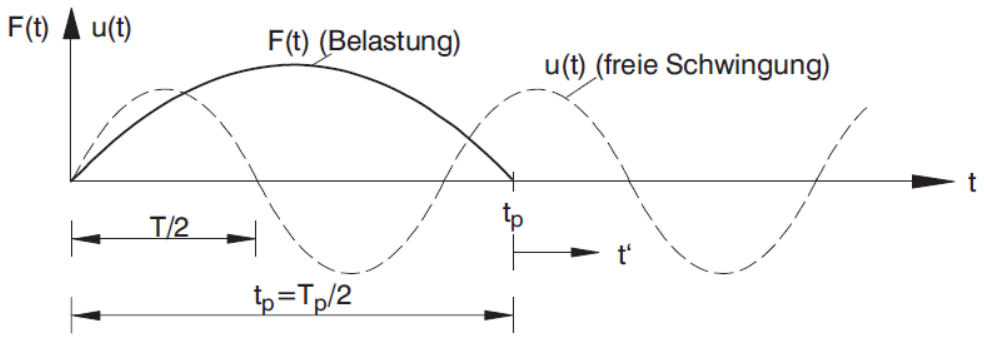


Abb. 1.38: Belastung und Eigenschwingung, Extremwert in der Belastungsphase

Die Zeit t_1 wird in die Gleichung (1.18) eingesetzt und führt auf die maximale Auslenkung:

$$\max u = \frac{F_0}{K}\frac{1}{1-\beta^2}\left[\sin\omega_p\frac{2\pi}{\omega_p+\omega} - \beta\sin\omega\frac{2\pi}{\omega_p+\omega}\right]$$

$$= \frac{F_0}{K}\frac{1}{1-\beta^2}\left[\underbrace{\sin\frac{2\pi\beta}{1+\beta}} - \beta\sin\frac{2\pi}{1+\beta}\right]$$

$$\sin\underbrace{\left(2\pi\frac{1+\beta-1}{1+\beta}\right)}_{\left(2\pi-\frac{2\pi}{1+\beta}\right)} = -\sin\frac{2\pi}{1+\beta}$$

$$\max u = \frac{F_0}{K}\frac{1}{\beta-1}\sin\frac{2\pi}{1+\beta}$$

dynamischer Vergrößerungsfaktor in Phase I: $\boxed{D^I = \frac{1}{\beta-1}\sin\frac{2\pi}{1+\beta}}$

D^I ist der maximale dynamische Lastfaktor, der beim frühesten Zeitpunkt innerhalb der Lasteinwirkung $t < t_p$ auftritt. Würde die harmonische Erregung über t_p hinaus fortgesetzt, läge der Zeitpunkt der Maximalantwort später und der dynamische Vergrößerungsfaktor wäre $D = \frac{1}{1-\beta}$ (Gleichung (1.20)).

1.7.3 Phase II, freie Schwingung

Nach Abklingen der Belastung, d.h. für

$$t > t_p = \frac{\pi}{\omega_p}$$

führt das System eine freie Schwingung durch. Zu Beginn dieser Phase II ist das System nicht in Ruhe, sondern hat die Auslenkung $u(t_p) = u_{tp}$ und die Geschwindigkeit $\dot{u}(t_p) = \dot{u}_{tp}$ aus Phase I.

Zur Ermittlung der Anfangsbedingungen für Phase II wird also $t_p = \frac{\pi}{\omega_p}$ in die Gleichungen (1.18) und (1.30) eingesetzt.

$$u_{tp} = \frac{F_0}{K}\frac{1}{1-\beta^2}\left(\sin\pi - \beta\sin\omega\frac{\pi}{\omega_p}\right) = \frac{F_0}{K}\frac{\beta}{\beta^2-1}\sin\frac{\pi}{\beta}$$

$$\dot{u}_{tp} = \frac{F_0}{K}\frac{\omega_p}{1-\beta^2}\left(\cos\pi - \cos\omega\frac{\pi}{\omega_p}\right) = \frac{F_0}{K}\frac{\omega_p}{\beta^2-1}\left(1+\cos\frac{\pi}{\beta}\right)$$

Die allgemeine Lösung der freien Schwingung lautet nach Gleichung (1.4)

$$u(t) = u_0\cos\omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega}\sin\omega t$$

Für eine einfache Anwendung dieser Formel auf eine Schwingung, die nicht bei $t = 0$ sondern bei $t = t_p$ beginnt, wird für Phase II ein eigenes Zeitkoordinatensystem eingeführt.

$$t' = t - t_p \quad \text{mit } u_0 = u_{tp} \text{ und } \dot{u}_0 = \dot{u}_{tp}$$

Damit ist die Verschiebungsfunktion in Phase II

$$u(t') = u_{tp}\cos\omega t' + \frac{\dot{u}_{tp}}{\omega}\sin\omega t'$$

und wir erhalten für die maximale Amplitude

$$\max u = \sqrt{u_{tp}^2 + \left(\frac{\dot{u}_{tp}}{\omega}\right)^2} = \frac{F_0}{K}\,\frac{\beta}{\beta^2-1}\,\underbrace{\sqrt{\left(\sin\frac{\pi}{\beta}\right)^2 + \left(1+\cos\frac{\pi}{\beta}\right)^2}}_{4\cdot\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{\beta}\right) = 4\cdot\cos^2\frac{\pi}{2\,\beta}}$$

$$\max u = \frac{F_0}{K}\,\frac{2\,\beta}{\beta^2-1}\,\cos\frac{\pi}{2\,\beta}$$

dynamischer Vergrößerungsfaktor in Phase II:

$$\boxed{D^{II} = \frac{2\,\beta}{\beta^2-1}\,\cos\frac{\pi}{2\,\beta}}$$

Diese Auslenkung ist auch der Maximalwert im gesamten Zeitbereich, wenn $\omega_p > \omega$ bzw. $\beta > 1$.

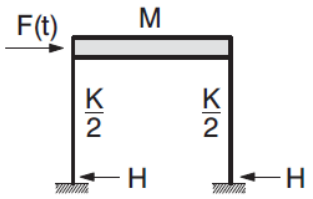
Für $\omega_p = \omega$ erhält man durch eine Grenzbetrachtung aus D^I oder D^{II}: $D = \pi/2$.

Zusammengefasst ist der Vergrößerungsfaktor D:

$$D = \begin{cases} \dfrac{2\,\beta}{\beta^2-1}\cos\dfrac{\pi}{2\,\beta} & \text{für } t_p < \dfrac{T}{2} \quad (\beta > 1)\,,\ u_{max} \text{ in Phase II} \\[2ex] \dfrac{\pi}{2} & \text{für } t_p = \dfrac{T}{2} \quad (\beta = 1)\,,\ u_{max} \text{ bei } t = t_p \\[2ex] \dfrac{1}{\beta-1}\sin\dfrac{2\,\pi}{1+\beta} & \text{für } t_p > \dfrac{T}{2} \quad (\beta < 1)\,,\ u_{max} \text{ in Phase I} \end{cases} \tag{1.31}$$

1.7.4 Zahlenbeispiel

Als Zahlenbeispiel betrachten wir wieder einen einstöckigen Rahmen unter horizontaler Belastung (Abbildung 1.39). Die Belastungsfunktion entspricht einer halben Sinuswelle.

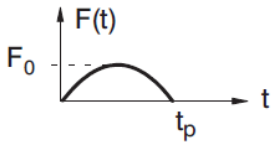


$M = 996$ kg

$K = 50$ kN/m

$\omega = 7{,}08\ \frac{rad}{s}$

$T = 0{,}887$ s



$F_0 = 1$ kN

Abb. 1.39: Einstöckiger Rahmen unter Stoßbelastung

Wir unterscheiden zwei verschiedene Fälle: Bei Fall a) liegt die Erregerfrequenz unterhalb der Systemfrequenz, bei Fall b) oberhalb.

Fall a): Die dynamische Erregung ist verhältnismäßig langsam bzw. dauert verhältnismäßig lange (bezogen auf die Eigenfrequenz des Systems). Die maximale Verschiebung tritt innerhalb der Belastungsphase (Phase I) auf (Abbildung 1.40).

$$\beta = \frac{\omega_p}{\omega} = \frac{2}{3} < 1$$

$$\omega_p = \frac{2}{3}\,\omega = 4{,}72\ \frac{rad}{s}\ ,\qquad t_p = \frac{T_p}{2} = \frac{1{,}331}{2} = 0{,}666\ s$$

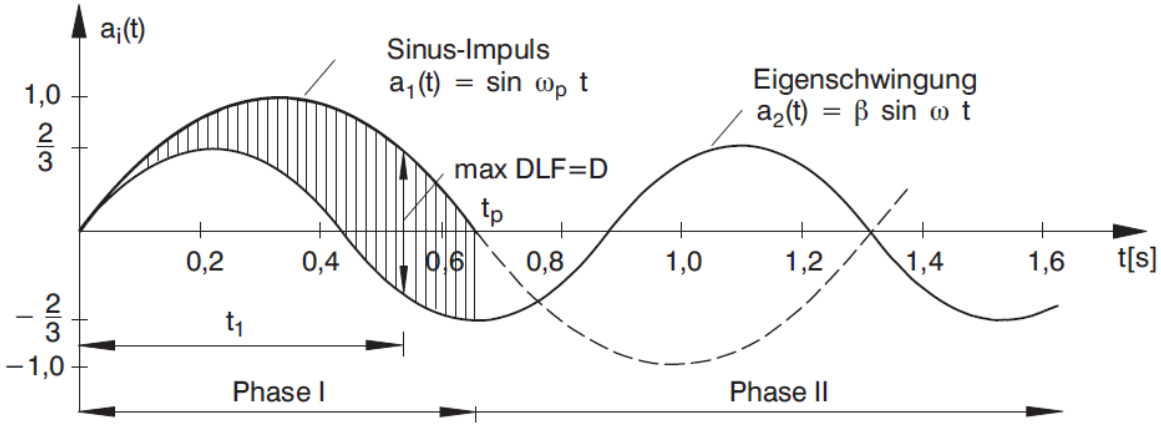


Abb. 1.40: Sinus-Impuls, Fall a) $t_p > T/2$

Für die Verschiebung in Phase I bekommen wir

$$u = \frac{F_0}{K}\,\frac{1}{1-\beta^2}\,[\,\sin\omega_p t - \beta\,\sin\omega t\,]\;; \qquad u_{tp} = \frac{F_0}{K}\cdot\frac{9}{5}\cdot[\,0 - \frac{2}{3}\,\sin 7{,}08\cdot 0{,}666\,] = 1{,}20\cdot\frac{F_0}{K}$$

$$\dot u = \frac{F_0}{K}\,\frac{\omega_p}{1-\beta^2}\,[\,\cos\omega_p t - \cos\omega t\,]\;; \qquad \dot u_{tp} = \frac{F_0}{K}\,4{,}72\cdot\frac{9}{5}\cdot[\,-1-0\,] = -8{,}50\cdot\frac{F_0}{K}$$

1. Maximum: $\dot u = 0$

$$t_1 = \frac{2\,\pi}{\omega_p + \omega} = \frac{2\,\pi}{(\,4{,}72 + 7{,}08\,)} = 0{,}532\ \text{s}$$

$$D = \frac{1}{1-\beta^2}\,[\,\sin\omega_p t_1 - \beta\,\sin\omega t_1\,] = \frac{9}{5}\cdot(\,\sin 4{,}72\cdot 0{,}532 - \frac{2}{3}\cdot\sin 7{,}08\cdot 0{,}532\,) = 1{,}76$$

$$u_{max} = 1{,}76\cdot\frac{1{,}0}{50} = 0{,}035\ \text{m}\ , \quad \Sigma\,H_{max} = 0{,}035\cdot 50 = 1{,}76\ \text{kN} \qquad \text{vgl. } D = \frac{1}{1-\beta} = 3$$

Die Verschiebung in Phase II ist

$$u(t') = u_{tp}\,\cos\omega t' + \frac{\dot u_{tp}}{\omega}\,\sin\omega t' = 1{,}2\,\cos 7{,}08\,t' - 1{,}2\,\sin 7{,}08\,t'$$

$$u(t') = 1{,}2\,\sqrt{2}\,\cos\,(\,7{,}08\,t' + \frac{\pi}{4}\,)\;; \quad t' = t - t_p$$

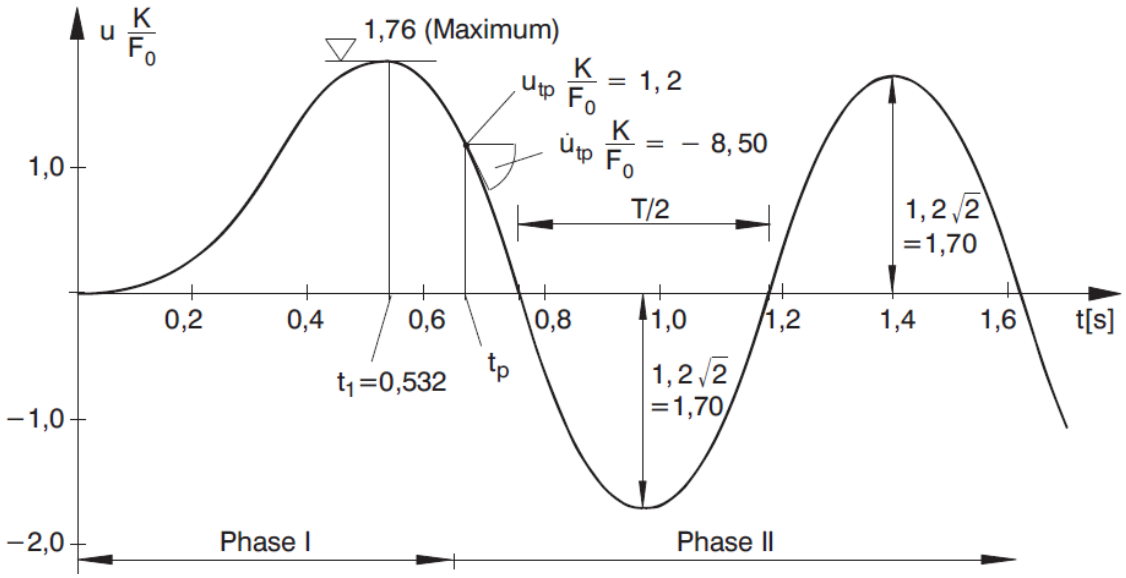


Abb. 1.41: Schwingungsverlauf im Fall a), β < 1, max u in Phase I

Abbildung 1.41 zeigt den gesamten Verschiebungsverlauf für Fall a). Der dynamische Vergrößerungsfaktor ist mit 1,76 < 3 deutlich kleiner als für den Fall einer andauernden sinusförmigen Belastung.

Fall b): Die dynamische Erregung ist verhältnismäßig schnell bzw. kurz. Die maximale Verschiebung tritt in Phase II auf.

$$\beta = \frac{\omega_p}{\omega} = \frac{4}{3} > 1$$

$$\omega_p = \frac{4}{3}\,\omega = 9,44\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\ ; \qquad t_p = \frac{T_p}{2} = \frac{0,666}{2} = 0,333\ \text{s}$$

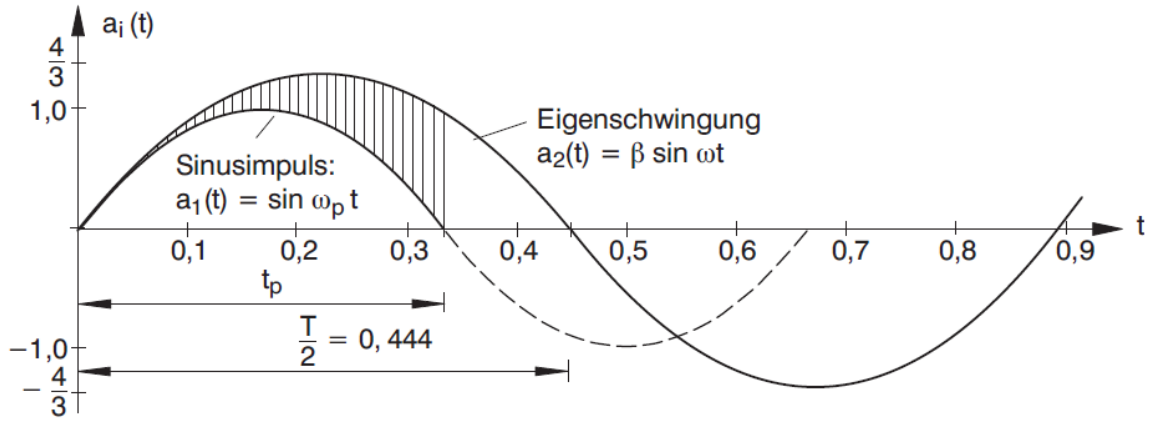


Abb. 1.42: Sinus-Impuls im Fall b), $t_p < T/2$

Die Verschiebung in Phase I ist

$$u = \frac{F_0}{K}\,\frac{1}{1-(\frac{4}{3})^2}\,[\,\sin 9,44\ t - \frac{4}{3}\ \sin 7,08\ t\,]\ ; \qquad u_{tp} = \frac{F_0}{K}\,(-\frac{9}{7})\,[\,0 - \frac{4}{3}\cdot 0,707\,] = 1,21\cdot\frac{F_0}{K}$$

$$\dot{u} = \frac{F_0}{K}\cdot 9,44\,(-\frac{9}{7})\,[\,\cos 9,44\ t - \cos 7,08\ t\,]\ ;\ \dot{u}_{tp} = \frac{F_0}{K}\,(-\frac{9}{7})\cdot 9,44\,(-1+0,707) = 3,55\cdot\frac{F_0}{K}$$

In Phase II gilt

$$u = \frac{F_0}{K}\,[\,1,21\ \cos 7,08\ t' + \frac{3,55}{7,08}\ \sin 7,08\ t'\,]$$

$$u = \frac{F_0}{K}\cdot 1,31\cdot\cos(\,7,08\ t' - 0,393\,)\ ; \qquad D = 1,31\ ; \qquad t' = t - t_p$$

$$u_{max} = 1,31\cdot\frac{1,0}{50} = 0,026\ \text{m}\ , \quad \Sigma\ H_{max} = 0,026\cdot 50 = 1,31\ \text{kN}$$

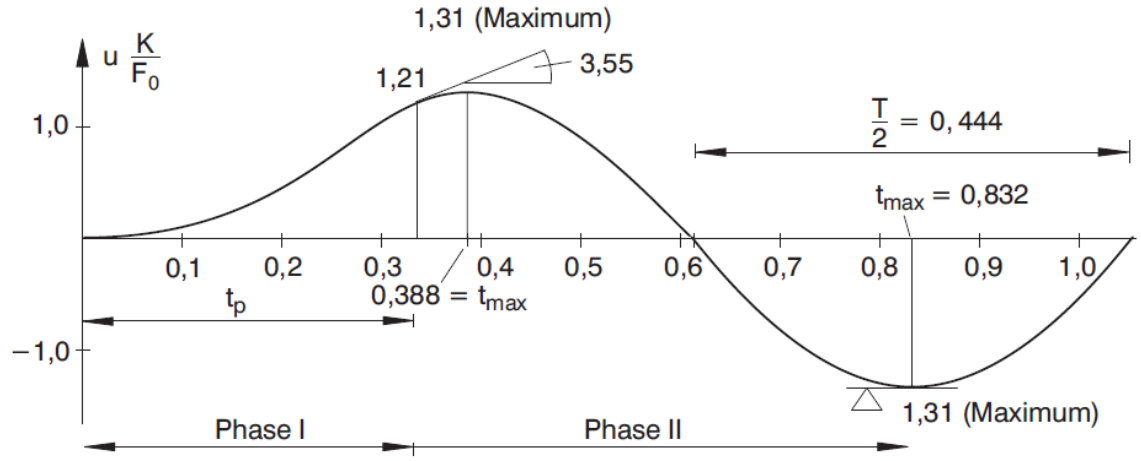


Abb. 1.43: Schwingungsverlauf im Fall b,) $\beta > 1,\ \max u$ *in Phase II.*

1.7.5 Unterschiedliche Verläufe von Stoßbelastungen

Die Methoden, die in den vorangegangenen Abschnitten für die Berechnung von Verschiebungen bei sinusförmigen Stoßbelastungen verwendet wurden, können auch auf andere Formen der Belastung angewandt werden. Trägt man den dynamischen Vergrößerungsfaktor D für verschiedene Belastungsformen mit gleicher Amplitude über der bezogenen Belastungszeit $2\ t_p/T$ auf, erhält man das Diagramm in Abbildung 1.44.

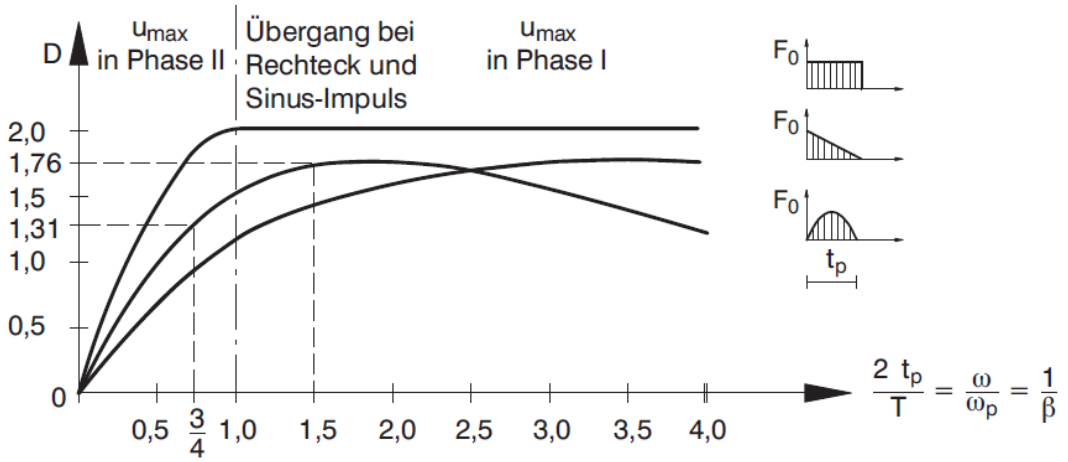


Abb. 1.44: Vergrößerungsfaktor D für unterschiedliche Formen bei Kurzzeit-Belastungen

Für kurze (schnelle, hochfrequente) Belastungen tritt das Maximum in Phase II auf, für längere Belastungen in Phase I. Die Grenze ist von der Belastungsform abhängig. Bei Rechteck- und Sinusbelastung ist die Grenze $t_p = 0,5\ T$ (β = 1), bei der Dreiecksbelastung $t_p = 0,4\ T$. Das Diagramm lässt sich als Verschiebungs-Antwortspektrum deuten, wenn für eine vorgegebene Erregerfrequenz die Eigenfrequenz variiert wird. Der Vergrößerungsfaktor D ist der Spektralwert der Verschiebung. Das Spektrum für eine harmonische Dauerbelastung ist bereits in Abbildung 1.34 ($\xi = 0$) aufgetragen worden. In Abbildung 1.45 sind die beiden Verläufe einander gegenübergestellt (Bezug ω/ω_p).

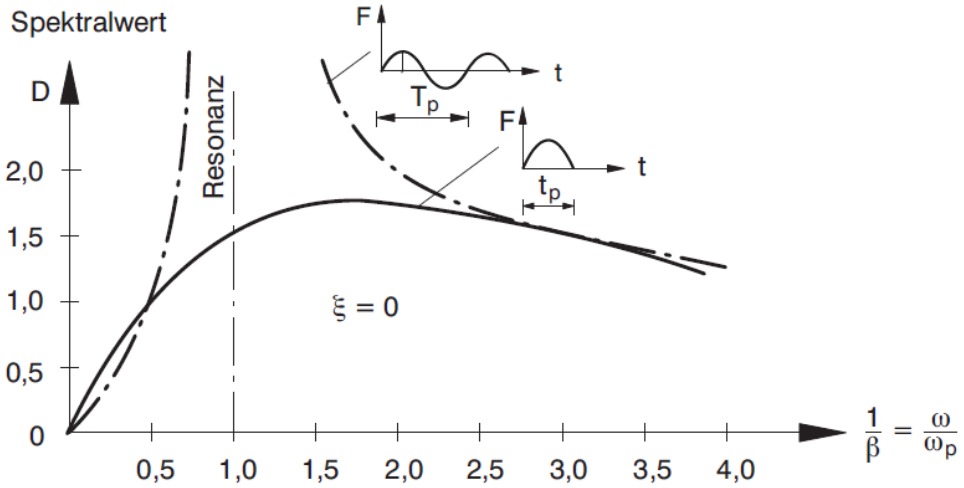


Abb. 1.45: Spektralwert D für harmonische Erregung und Sinus-Impuls

1.7.6 Kurzer Impuls, ungedämpftes System

Abbildung 1.44 zeigt einen fast linearen Anstieg für D im Anfangsbereich. Hält man nun nicht F_0 konstant, sondern den aufgebrachten Impuls $I = \int_0^{t_p} F(t)\,dt$ und trägt die bezogene Maximalauslenkung auf, ergibt sich das Diagramm in Abbildung 1.46.

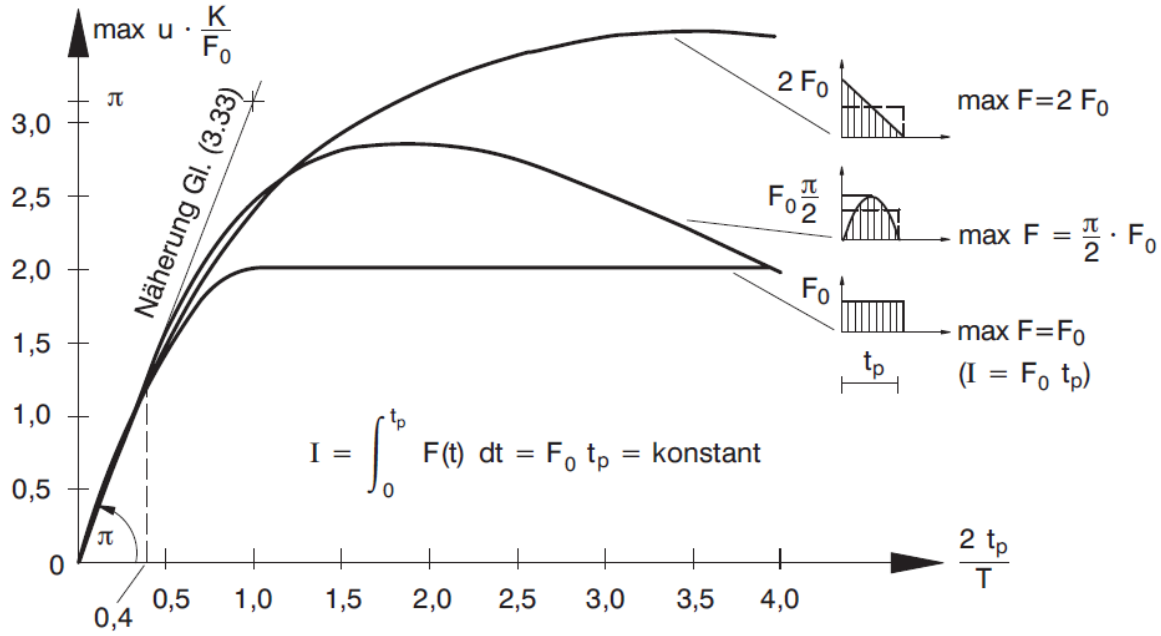


Abb. 1.46: Maximalauslenkung bei gleicher Impulsgröße

Man erkennt, dass sich die Kurven bei unterschiedlicher Belastungsform im Bereich $t_p/T \leq 0,2$ kaum voneinander unterscheiden. Maßgebend ist in diesem Bereich also nur die Impulsgröße, unabhängig von der Belastungsform

Für den Fall ohne Dämpfung gilt für das dynamische Gleichgewicht

$$M\,\ddot{u} = F(t) - K\,u \quad , \quad u_0 = \dot{u}_0 = 0$$

Für einen kurzen Impuls ($t < t_p$) gilt $u \approx 0$, d.h. während des Impulses gilt näherungsweise

$$M\,\ddot{u} \approx F(t)$$

Integration dieser Gleichung über den Belastungszeitraum liefert

$$M \underbrace{\int_0^{t_p} \ddot{u}\,dt}_{\dot{u}\,(t_p)} = \int_0^{t_p} F(t)\,dt = I \qquad (\dot{u}_0 = 0)$$

Die rechte Seite entspricht gerade dem Impuls I (Kraft mal Zeit). Damit hat man (annäherungsweiser) die Geschwindigkeit und die Verschiebung zum Zeitpunkt t_p

$$\dot{u}(t_p) = \frac{I}{M} \quad ; \quad u(t_p) \approx 0$$

d.h. am Ende der Belastungszeit und damit am Anfang von Phase II (Abbildung 1.47). Ein kurzer Stoß wird also, einfach ausgedrückt, so behandelt, dass die Anfangsgeschwindigkeit der freien Schwingung aus dem Quotienten des Impulses und der Masse ermittelt wird.

Nach dem Aufbringen des Impulses gilt mit $t' = t - t_p$ für die freie Schwingung in Phase II

$$u(t') = \overset{\approx 0}{\cancel{u(t_p)}} \cos\omega\, t' + \frac{\dot{u}(t_p)}{\omega} \sin\omega\, t'$$

$$\boxed{u(t') = \frac{I}{M\,\omega} \sin\omega\, t'} \qquad I = \int_0^{t_p} F(t)\, dt \tag{1.32}$$

$$\text{mit:} \quad u_{max} = \frac{I}{M\,\omega} = \frac{\omega}{K}\, I = \frac{I}{\sqrt{K\,M}} \tag{1.33}$$

Für einen Rechteckimpuls gilt

$$I = F_0\, t_p : \quad u_{max} = \frac{F_0}{K} \underbrace{t_p \overbrace{\frac{2\,\pi}{T}}^{\omega}}_{D}$$

Damit ist $D = \pi \frac{2\,t_p}{T}$ eine lineare Funktion in $\frac{2\,t_p}{T}$ mit der Steigung π (Abbildung 1.46).

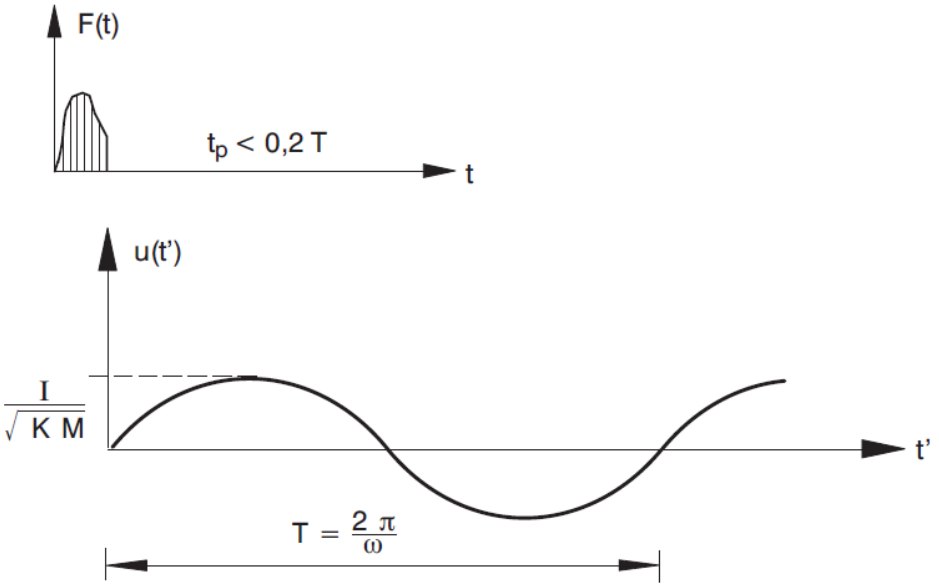


Abb. 1.47: Freie Schwingung nach Impulsbelastung

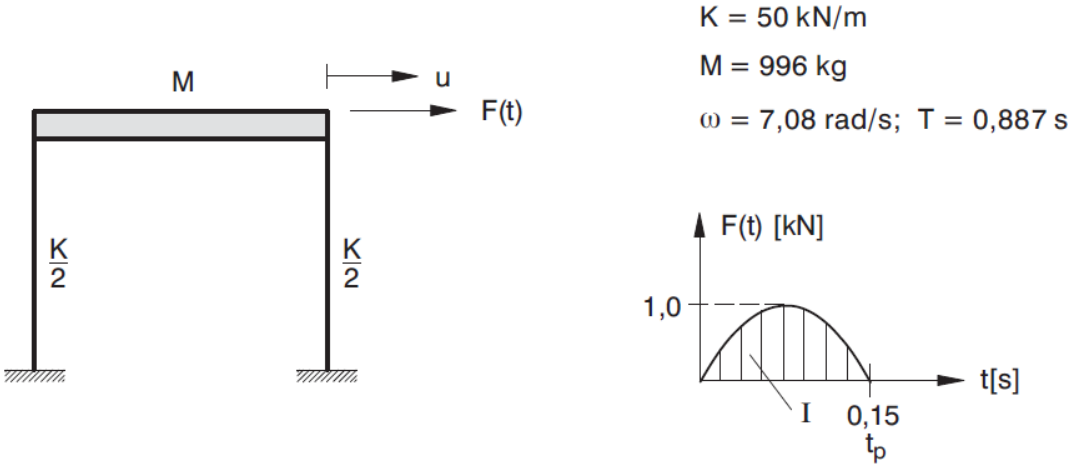


Abb. 1.48: Kurzer Impuls, System und Belastung

Die in Abbildung 1.48 dargestellte Belastung unseres Beispielrahmens kann mit $t_p = 0{,}15$ wegen

$$\frac{t_p}{T} = \frac{0,15}{0,887} = 0,169 < 0,2$$

als kurzer Impuls behandelt werden.

$$I = \frac{2}{\pi} F_0 t_p = \frac{2}{\pi} \cdot 1,0 \cdot 0,15 = 0,0955 \quad , \quad M = 0,996 \text{ kN } \frac{s^2}{m}$$

$$u_{max} = \frac{I}{\sqrt{K\,M}} = \frac{0,0955}{\sqrt{50 \cdot 0,996}} = 0,0135 \text{ m} = 1,35 \text{ cm}$$

Um die Qualität der Näherung zu beurteilen, berechnen wir die maximale Verschiebung noch einmal mithilfe der exakten Lösung.

$$t_p = 0,15 \text{ s} \rightarrow \frac{t_p}{T} = 0,169 < \frac{1}{2} \rightarrow \text{Maximum in Phase II}$$

(Gleichung

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{T}{t_p} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0,169} = 2,96$$

$$D^{II} = \frac{2\,\beta}{\beta^2 - 1} \cos \frac{\pi}{2\,\beta} = \frac{2 \cdot 2,96}{2,96^2 - 1} \cos \frac{\pi}{2 \cdot 2,96} = 0,658$$

$$u_{max} = \frac{F_0}{K} D = \frac{1,0}{50} \cdot 0,658 = 0,0132 \text{ m} = 1,32 \text{ cm}$$

1.7.7 Kurzer Impuls, gedämpftes System

Im Fall eines gedämpften Systems gilt während des Impulses

$$M\,\ddot{u} = F(t) - K\,u - C\,\dot{u}\,; \quad u \approx 0$$

$$M\,\ddot{u} = F(t) - C\,\dot{u}$$

$$M \underbrace{\int_0^{t_p} \ddot{u}\,dt}_{\dot{u}(t_p)} = \underbrace{\int_0^{t_p} F(t)\,dt}_{I} - C \underbrace{\int_0^{t_p} \dot{u}\,dt}_{u(t_p) \approx 0}$$

$$\dot{u}(t_p) = \frac{I}{M} \quad ; \quad u(t_p) \approx 0$$

Für die gedämpfte Schwingung nach dem Impuls gilt mit $u_0 = 0,\ \dot{u}_0 = I/M$:

$$u(t') = e^{-\xi\omega t'} \left(A \cos \omega_D\, t' + B \sin \omega_D\, t' \right)$$

$$A = u_0 = 0 \quad ; \quad B = u_0 + \frac{\dot{u}_0}{\omega_D} = \frac{I}{M\,\omega_D}$$

$$\boxed{u(t') = e^{-\xi\omega t'} \frac{I}{M\,\omega_D} \sin \omega_D\, t'} \tag{1.34}$$

1.8 Allgemeine Belastungen

1.8.1 Lösung mit dem Duhamel-Integral

Jede beliebige Belastung kann man sich als Aneinanderreihung von differentiell kurzen Impulsen vorstellen. Für diese differentiell kleinen Impulsdauern folgt aus Gleichung (1.32)

$$I = \int_0^{t_p} F(t)\ dt \qquad \rightarrow \qquad dI = F(\tau)\ d\tau$$

Abbildung 1.49 zeigt exemplarisch einen differentiellen Impuls innerhalb einer beliebigen Belastungsfunktion mit der dazugehörigen (differentiellen) freien Schwingung d*u*, die sich auf Grund dieses Impulses einstellen würde. d*u* (*t*,τ) sind die differentiellen Anteile der Gesamtschwingung *u*(*t*).

$$\begin{aligned} I \rightarrow dI &= F(\tau)\ d\tau \quad ; \quad u(t) \rightarrow du(t) \\ du(t,\tau) &= \frac{F(\tau)\ d\tau}{M\ \omega} \sin \omega \underbrace{(t-\tau)}_{t'} \quad ; \quad t > \tau \end{aligned} \tag{1.35}$$

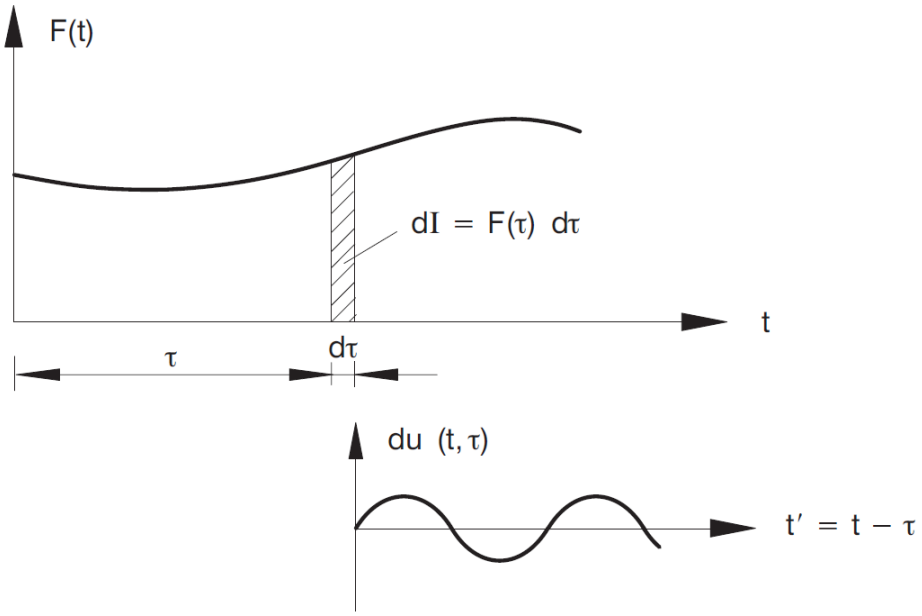


Abb. 1.49: Beliebige Belastung als Vielfach-Impulsbelastung

Die Gesamtschwingung erhält man durch Integration aller Anteile für $0 \leq \tau \leq t$.

$$u(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} du\ (t,\tau)$$

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{M\ \omega} \int_0^t F(\tau)\ \sin \omega(t-\tau)\ d\tau} \tag{1.36}$$

Die Lösung ist das *Duhamel-Integral* für ungedämpfte Schwingungen und stellt für homogene Anfangsbedingungen $u_0 = \dot{u}_0 = 0$ die Gesamtlösung dar. Bei allgemeinen Anfangsbedingungen gilt für die Gesamtlösung

$$\boxed{u = \frac{1}{M\,\omega} \int_0^t F(\tau)\,\sin\omega\,(t-\tau)\,d\tau + u_0\,\cos\omega\,t + \frac{\dot{u}_0}{\omega}\,\sin\omega t} \tag{1.37}$$

Für eine leichte Anwendung numerischer Integrationsverfahren kann das Duhamel-Integral in zwei Teile aufgespalten werden. Mit

$$\sin\omega(t-\tau) = \sin\omega t\,\cos\omega\tau - \cos\omega t\,\sin\omega\tau$$

erhält man als Schwingungsgleichung

$$\boxed{\begin{aligned} u(t) &= \left[A(t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega}\right]\sin\omega t + [\,B(t) + u_0\,]\,\cos\omega t \\ A(t) &= \frac{1}{M\,\omega}\int_0^t F(\tau)\,\cos\omega\tau\,d\tau \quad ; \quad B(t) = -\frac{1}{M\,\omega}\int_0^t F(\tau)\,\sin\omega\tau\,d\tau \end{aligned}} \tag{1.38}$$

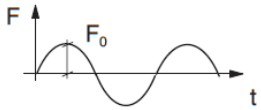
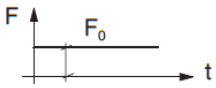
Mit denselben Überlegungen wie bei ungedämpften Systemen erhält man über die Schwingungsgleichung bei kurzen Impulsen das Duhamel-Integral für gedämpfte Systeme.

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{M\,\omega_D}\int_0^t F(\tau)\,e^{-\xi\omega(t-\tau)}\,\sin\omega_D(t-\tau)\,d\tau} \tag{1.39}$$

Analog zur ungedämpften Schwingung erhält man durch Addition der allgemeinen Lösung für gedämpfte, freie Schwingungen, Gleichung (1.12), die Schwingungsgleichung für allgemeine Randbedingungen, die ebenfalls durch Aufspalten des Duhamel-Integrals umgeformt werden kann.

1.9 Zusammenfassung: Ein-Freiheitsgrad-Systeme

In Tabelle 1.2 sind die bisher hergeleiteten Lösungen für Einmassenschwinger zusammengefasst. Die Formeln werden auch zur Behandlung von Systemen mit mehreren Freiheitsgraden gebraucht, beispielsweise im Zusammenhang mit der Methode der modalen Analyse.

Art	Bewegungs–gleichung	Lösung	Eigenkreisfrequenz ω ; Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi}$ [Hz] ; $T = \frac{1}{f}$
freie Schwingung – ungedämpft	$M\ddot{u} + K u = 0$	$u = \overbrace{u_0}^{A} \cos\omega t + \overbrace{\frac{\dot{u}_0}{\omega}}^{B} \sin\omega t$ $= \sqrt{A^2 + B^2}\ \cos(\omega t - \Theta)$	mit $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$; $\tan\Theta = A/B$; Θ ... Phasenverschiebung
freie Schwingung – gedämpft	$M\ddot{u} + C\dot{u} + K u = 0$	$u = e^{-\xi\omega t}\,(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t)$	mit $\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$; $\xi = \frac{C}{2M\omega}$; Lehrsches Dämpfungsmaß
harmonische Erregung – ungedämpft	$M\ddot{u} + K u = F_0 \sin\omega_p t$  ω_p : Erregerfrequenz	$u = u_0 \cos\omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega}\sin\omega t + \underbrace{\frac{F_0}{K}\left[\frac{1}{1-\beta^2}\right]}_{\text{dynamischer Lastfaktor DLF (t)}}\underbrace{[\sin\omega_p t - \beta\sin\omega t]}_{\text{stationärer Anteil}}$ $u_{statisch}$	mit $\beta = \frac{\omega_p}{\omega}$ $DLF_{max} = D = \frac{1}{1-\beta}$
harmonische Erregung – gedämpft	$M\ddot{u} + C\dot{u} + K u = F_0 \sin\omega_p t$ für $u_0 = \dot{u}_0 = 0$	$u = e^{-\xi\omega t}\,(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t) + \frac{F_0}{K}\,\frac{(1-\beta^2)\sin\omega_p t - 2\xi\beta\cos\omega_p t}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}$ $u = \underbrace{\frac{F_0}{K}}_{u_{statisch}}\,\frac{[(1-\beta^2)\sin\omega_p t - 2\xi\beta\cos\omega_p t] + e^{-\xi\omega t}\left[\frac{\omega_p}{\omega_D}(2\xi^2 + \beta^2 - 1)\sin\omega_D t + 2\xi\beta\cos\omega_D t\right]}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} = u_{stat}\,DLF(t)$ stationärer Anteil	$DLF_{max} = D = \frac{1 + \beta\, e^{-\xi\frac{\pi}{(1-\beta)}}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$
allgemeine Erregung – ungedämpft	$M\ddot{u} + K u = F(t)$	$u = u_0\cos\omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega}\sin\omega t + \frac{1}{M\omega}\int_0^t F(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$	Sonderfall :  für $u_0 = \dot{u}_0 = 0$ und $F = F_0 = \text{konst.}$ $u = \frac{F_0}{K}(1 - \cos\omega t)$
allgemeine Erregung – gedämpft	$M\ddot{u} + C\dot{u} + K u = F(t)$	$u = e^{-\xi\omega t}\,(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t) + \frac{1}{M\omega}\int_0^t F(\tau)\,e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega_D(t-\tau)\,d\tau$ Duhamel-Integral	

Tab. 1.2: Lösungen für Systeme mit einem Freiheitsgrad

1.10 Antwortspektrenmethode

1.10.1 Einführung

Wir haben das Antwortspektrum als Darstellung der Maximalantwort eines Ein-Freiheitsgrad-Systems in Abhängigkeit der Spektralwerte, d.h. der Eigenfrequenz ω oder der Periodenlänge T, für eine ganz bestimmte Erregung kennengelernt. Antwortspektren können für periodische Erregungen, Stoßbelastungen (z.B. Fahrzeug- oder Schiffsanprall), Explosionslasten oder Bodenerregung wie bei Erdbeben bestimmt werden. Sie sind von Eigenschaften des Systems (Masse, Dämpfung, Steifigkeit) abhängig. Die Maximalwerte der Systemantwort treten für jede Erregung zu unterschiedlichen Zeitpunkten auf. Bei Ermittlung des Spektrums geht allerdings die Zeitinformation verloren.

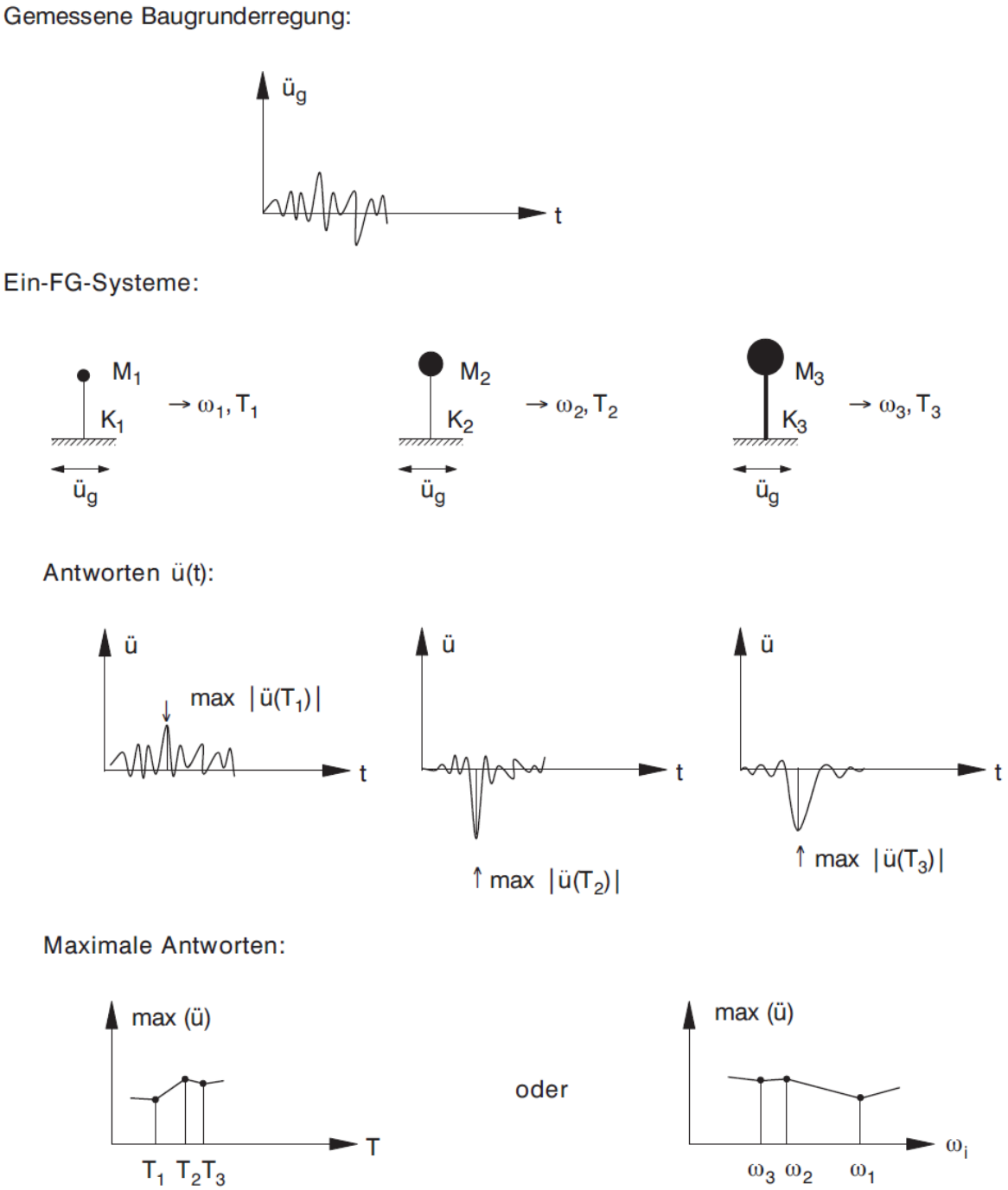


Abb. 1.50: Ermittlung eines Beschleunigungsspektrums

Antwortspektren werden für Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen, aber auch für andere Systemvariable wie Kräfte aufgestellt. Für den wichtigen Fall der Erdbebenerregung greift man in der Regel auf Beschleunigungsspektren zurück.

Es sei vorweggenommen, dass die Methode besonders vorteilhaft zur näherungsweisen Berechnung und zur Abschätzung des Schwingungsverhaltens von Systemen mit mehreren Freiheitsgraden verwendet wird. Wegen des statistischen Charakters des Verfahrens eignet es sich deshalb besonders für nicht exakt beschreibbare zufällige Belastungen. wie z.B. Erdbeben. Es wird daher auch für den Nachweis der Erdbebensicherheit, z.B. nach DIN 4149 oder EC 8, verwendet.

Als typischen Anwendungsfall betrachten wir die Antwortspektrenmethode für Erdbebenerregung. Hier wird für eine gemessene Baugrunderregung $\ddot{u}_g(t)$, für verschiedene Ein-Freiheitsgrad-Systeme jeweils die maximale Beschleunigung ermittelt, beispielsweise über die Auswertung des Duhamel-Integrals. Die Dämpfung wird dabei konstant gehalten. Die Werte werden dann zu einem Beschleunigungsspektrum zusammengefasst, das dann natürlich nur für die verwendete spezielle Bodenerregung, also z.B. ein bestimmtes Erdbeben gilt.

Das Vorgehen zur Ermittlung des Spektrums wird in Abbildung 1.50 gezeigt. Hierzu wird die gemessene Baugrunderkennung $\ddot{u}_g(t)$ als Erregung auf verschiedene Ein-Freiheitsgrad-Systeme mir ihren spezifischen Systemwerten ω_i, T_i aufgebracht. Aus den Systemantworten $\ddot{u}(t)$ werden die Maximalantworten $\max|\ddot{u}(T_i)|$ entnommen und in das Beschleunigungsspektrum eingetragen. Für das erste dokumentierte Erdbeben in El Centro im Süden Kaliforniens (18.5.1940) ergeben sich für die Dämpfungen $\xi = 0,01$ und $\xi = 0,05$ Beschleunigungsspektren nach Abbildung 1.52. Mittlerweile gibt es für die wichtigsten Beben jüngerer Zeit ausführliche Dokumentationen.

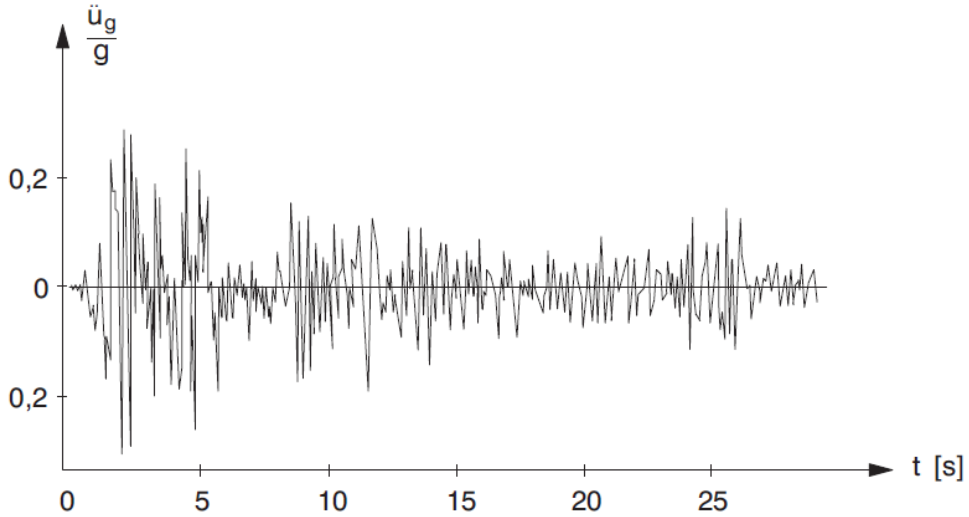


Abb. 1.51: Gemessene Bodenbeschleunigung des El Centro-Bebens

Die Ordinaten des Beschleunigungsantwortspektrums bezeichnet man als Spektralwerte S_a, die gelegentlich bezüglich der Erdbeschleunigung normiert werden.

Entsprechende Antwortspektren für die Relativgeschwindigkeit $\dot{u}_{max}$ und die Relativverschiebung u_{max} führen auf die Spektralwerte S_v bzw. S_d.

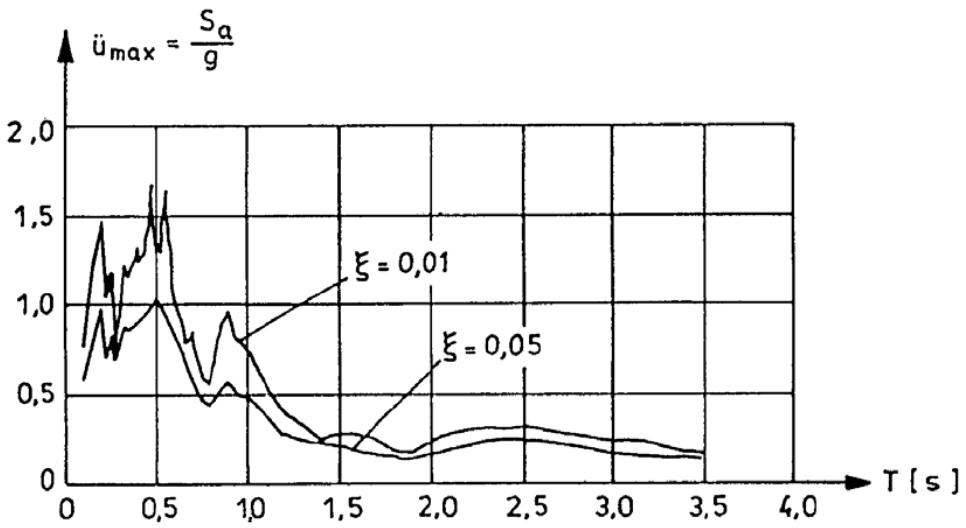


Abb. 1.52: Antwortspektren für das El Centro-Beben

Diese Spektralwerte S_d, S_v und S_a stehen in einem Zusammenhang, der vereinfacht an der Sinusschwingung gezeigt wird.

$$u = \underbrace{u_{max}}_{S_d} \cdot \sin \omega t$$

$$\dot{u} = \underbrace{S_d \cdot \omega}_{S_v} \cdot \cos \omega t$$

$$\ddot{u} = -\underbrace{S_d \cdot \omega^2}_{S_a} \cdot \sin \omega t$$

$$S_a = \omega \cdot S_v = \omega^2 \cdot S_d = \frac{K}{M} S_d \tag{1.40}$$

Für das El Centro-Beben erhält man für S_v das Antwortspektrum in Abbildung 1.53.

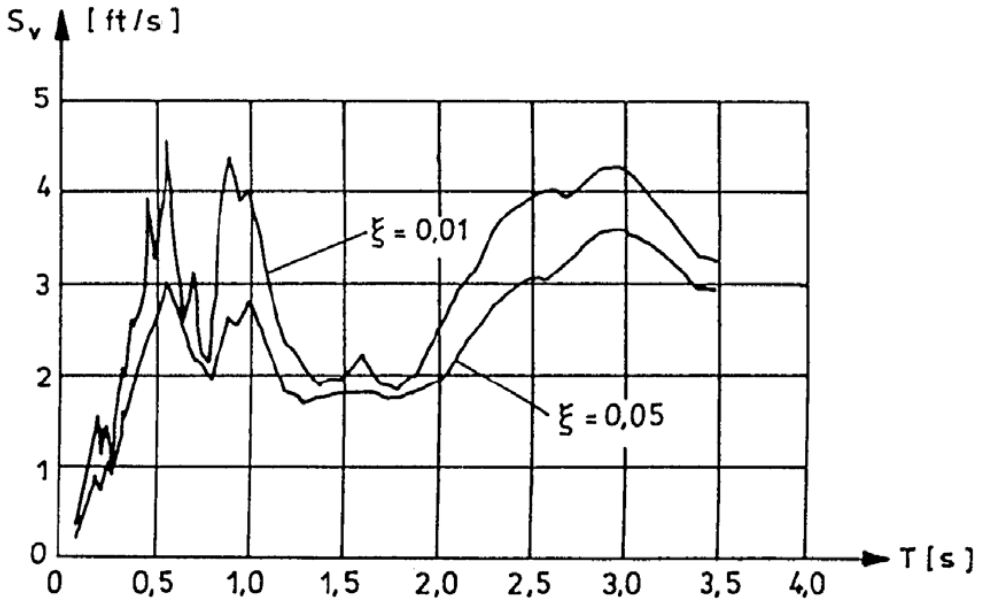


Abb. 1.53: Antwortspektrum der Relativgeschwindigkeit (Pseudogeschwindigkeit) für das El Centro-Beben

Den Zusammenhang zwischen S_d, S_v und S_a kann man benutzen, um alle drei Spektralwerte in einem Diagramm mit doppelt logarithmischem Maßstab darzustellen. Für das El Centro-Beben ist das Diagramm in Abbildung 1.54 dargestellt.

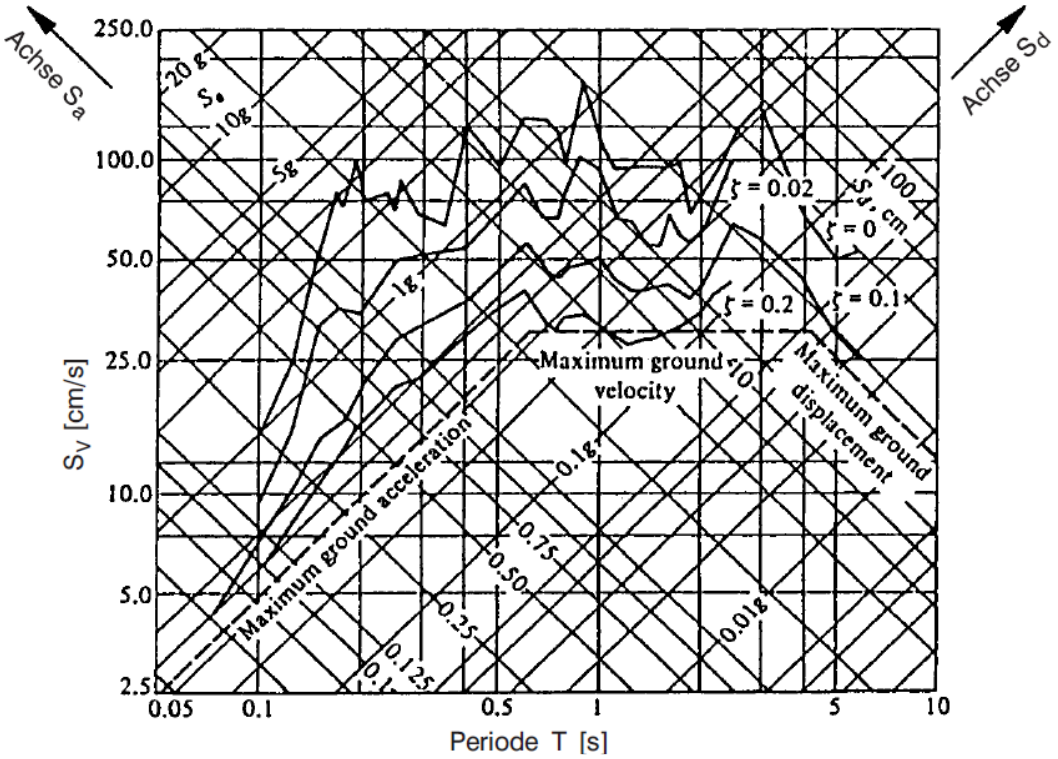


Abb. 1.54: Gemeinsames Antwortspektrum

1.10.2 Normenspektren

Jede Erregung führt zum zugehörigen Antwortspektrum, z.B. für die Beschleunigung $S_a(T,\xi)$. Ein Summenspektrum aus der Überlagerung mehrerer Einzelspektren aus verschiedenen Erregungen ist für den praktischen Gebrauch unbrauchbar, so dass zur Überführung in ein Normenspektrum noch mehrere Schritte notwendig sind. Hier wird das Vorgehen für die DIN 4149 geschildert:

1. **Glättung:** (Bildung der Einhüllenden)
   Aufgrund der stoßartigen Erregung enthalten die Antwortspektren hohe Spitzenwerte, die aber für die Beanspruchung eines Tragwerks nicht maßgebend sind, da das Bauwerk aufgrund seiner Trägheit auf diese kurzfristige Belastung gar nicht reagieren kann. Die Spektren werden deshalb geglättet und erst dann werden die einhüllenden Kurven gebildet.

2. **Dämpfung:**
   Für den Hochbau ist eine pauschale Dämpfungszahl $\xi = 5\%$ charakteristisch. Daraus ergibt sich der Referenzwert $\eta = 1$ für den Dämpfungs-Korrekturbeiwert η. Falls für spezielle Untersuchungen eine andere viskose Dämpfung als 5% verwendet werden soll, ist dieser Wert besonders zu begründen.

3. **Normierung:**
   Das bisher gewonnene Spektrum wird auf eine Bezugsbeschleunigung a_g, den Bedeutungsbeiwert γ_I und den Untergrundparameter S hin normiert, so dass z.B. für den gedämpften Fall $\xi = 5\%$ der Maximalwert von $S_e/a_g\gamma_I S$ bei 2,5 liegt.

Das Ergebnis ist das elastische Beschleunigungsspektrum nach Abbildung 1.55.

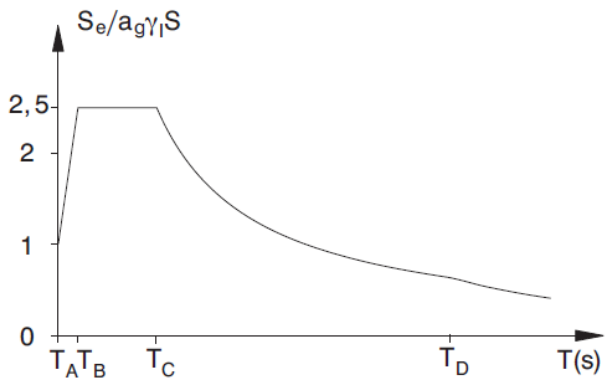


Abb. 1.55: Geglättetes und normiertes elastisches Antwortspektrum (horizontale Erregung)

Antwortspektren unter horizontaler beziehungsweise vertikaler Erregung werden vereinfach als horizontale beziehungsweise vertikale Antwortspektren bezeichnet. Die Werte von T_A bis T_D und die Kurvenverläufe ergeben sich aus Parametern, die von den Untergrundverhältnissen, sowie der Frage nach einem horizontalen oder vertikalen Antwortspektrum abhängen.

Eine weitere Maßnahme ist:

4. **Abminderung** wegen Plastizierung

   Die bisherigen elastischen Beziehungen nehmen keine Rücksicht auf den günstigen Einfluss durch plastische Verformungsfähigkeit (Duktilität) des Bauwerks.

   Alle Bauwerke besitzen die mehr oder weniger ausgeprägte Fähigkeit, durch seismische Einwirkungen eingeleitete Energie durch hysteretische Energiedissipation abzubauen. Um die günstig wirkenden dissipativen Effekte auch bei linearer Berechnung berücksichtigen zu können, wird das elastische Antwortspektrum durch den konstruktions- und bauartspezifischen Verhaltensbeiwert q vermindert, der auch den Einfluss einer von 5% abweichenden Dämpfung berücksichtigt.

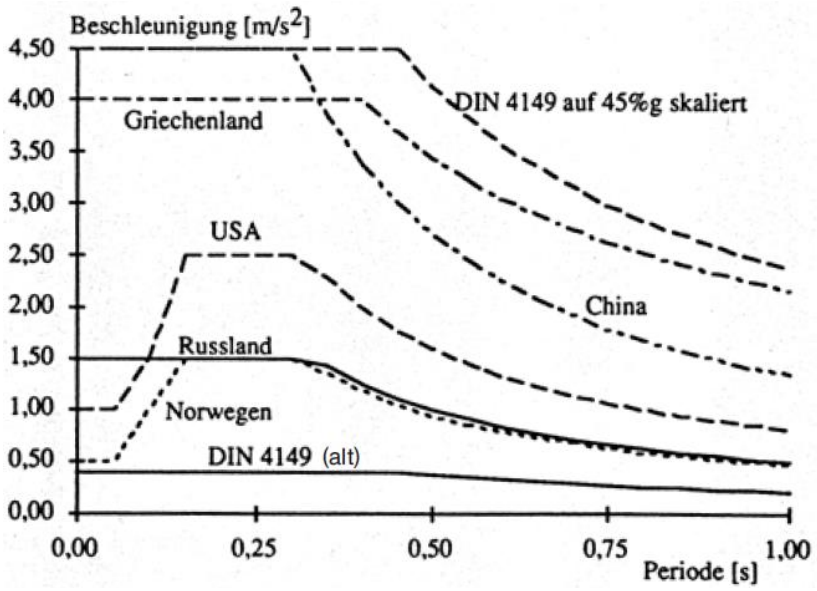


Abb. 1.56: Vergleich von Erdbebenspektren

Für Bauwerke, die nicht nach DIN 4149 bemessen werden dürfen (z.B. Kernkraftwerke), stehen dem Anwender ebenfalls Antwortspektren zur Verfügung. Ein Vergleich von Antwortspektren verschiedener Länder wird in Abbildung 1.56 angegeben (aus Bautechnik 71,

1994, S. 732). Für Deutschland ist hier noch das einfachere Antwortspektrum der alten DIN 4149 angegeben.

1.10.3 Zusammenfassung der Herleitung eines Normenspektrums

In Abbildung 1.57 sind die einzelnen Schritte zur Berechnung des normierten Antwortspektrums in einer Übersicht dargestellt.

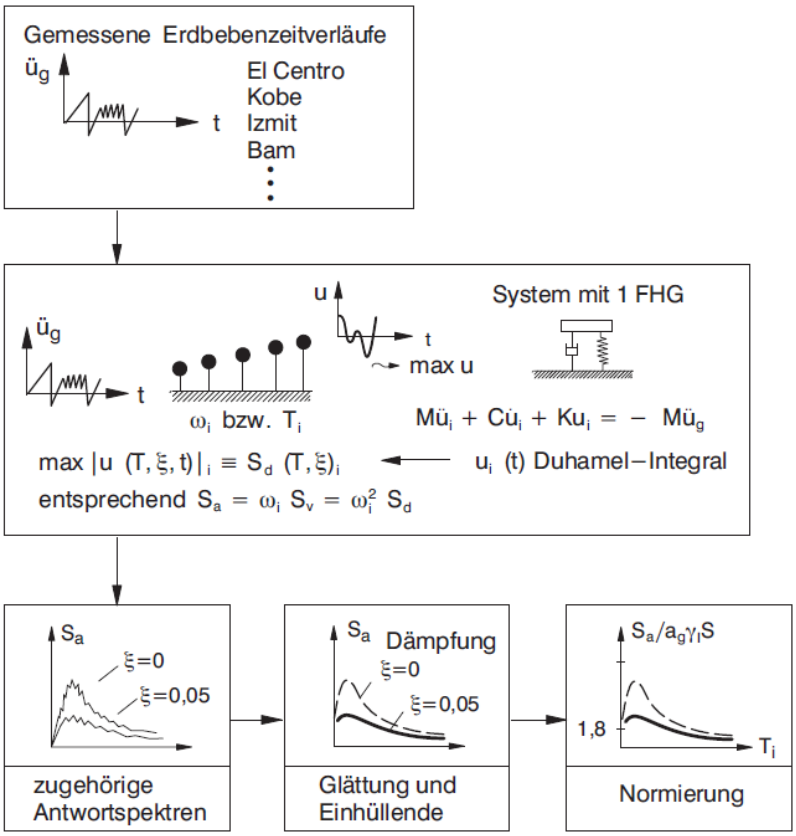


Abb. 1.57: Herleitung einer normierten Antwortspektrums (Vorgehen nach DIN 4149)

1.10.4 Erdbebennachweis nach DIN 4149 (Stand 2005)

Im Zuge der Erarbeitung europäischer Normen wurde das Normenkonzept überarbeitet, aktualisiert und an das Konzept der europäischen Norm (EC 8) angepasst.

In der DIN 4149 werden einzelne Parameter, die die Systemantwort und den zu berücksichtigenden Sicherheitsfaktor bei einer Erdbebenbelastung beeinflussen, zunächst getrennt untersucht und dann zu einem Spektralwert S_d zusammengefasst. Dabei steht der Index d für „design“ (nicht „displacement“, wie im vorigen Abschnitt!).

Die wichtigsten Parameter bei der Erdbebenbelastung sind:

- Beschleunigungszeitverlauf des zu erwartenden Erdbebens, abgedeckt durch das Norm-Antwortspektrum,
- örtliche Seismizitäten (Intensität der Erbebentätigkeit),
- Untergrundverhältnisse, Geologie und Baugrund,
- Bedeutung des Gebäudes für die Allgemeinheit.

Die unterschiedlichen makroseismischen Intensitäten werden in einer probabilistisch erarbeiteten *Erdbebenzonenkarte* dargestellt, bei der die Zonengrenzen als Intensitäts-Isolinien einer

Wiederkehrperiode von 475 Jahren und damit einer Überschreitungswahrscheinlichkeit von 10% innerhalb von 50 Jahren entsprechen.

Der Aufbau der *Untergrundverhältnisse* beeinflusst die Erdbebenwirkung auf ein Tragwerk wesentlich. Beispielsweise ergeben sich für Bauwerke auf weichen Schichten, unter denen Fels ansteht, über 40% höhere Beanspruchungen als für solche, die direkt auf Fels gegründet sind.

Abb. 1.58: Erdbebenzone der Bundesrepublik Deutschland (aus DIN 4149/2005)

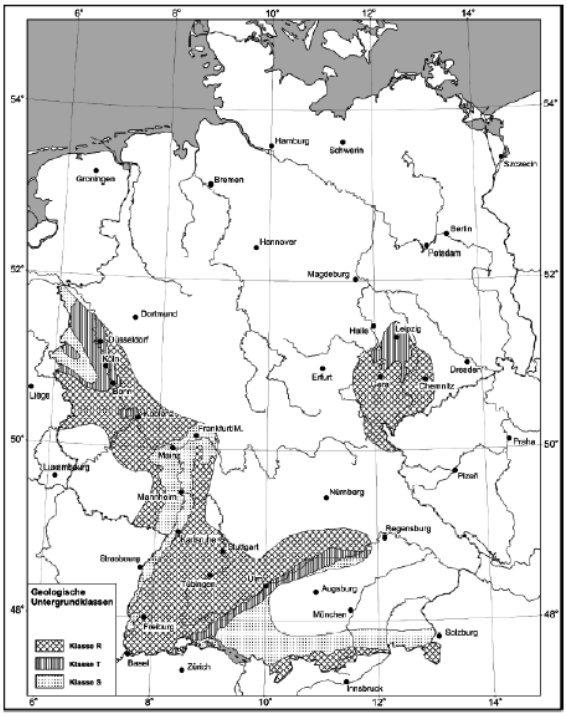


Abb. 1.59: Geologische Untergrundklassen in den Erdbebenzonen der Bundesrepublik Deutschland (aus DIN 4149/2005)

Die Untergrundverhältnisse werden durch eine Einstufung in eine der drei *geologischen Untergrundklassen* R, T, S (Abbildung 1.59) und in eine der drei *Baugrundklassen* A, B, C berücksichtigt. Als Kombination von geologischem Untergrund und Baugrund können die Untergrundverhältnisse A-R, B-R, C-R, B-T, C-T und C-S vorkommen.

- Untergrundklasse **R** (rock): Gebiete mit felsartigem Gesteinsuntergrund.
- Untergrundklasse **T** (transition): Übergangsbereiche zwischen den Gebieten der Untergrundklasse R und der Untergrundklasse S sowie Gebiete relativ flachgründiger Sedimentbecken.
- Untergrundklasse **S** (sediment basin): Gebiete tiefer Beckenstruktur mit mächtiger Sedimentfüllung.

Der Baugrundbegriff wird nach folgenden Baugrundklassen unterschieden:

- Baugrundklasse **A**: unverwitterte (bergfrische) Festgesteine mit hoher Festigkeit.
- Baugrundklasse **B**: mäßig verwitterte Festgesteine bzw. Festgesteine mit geringer Festigkeit oder grobkörnige (rollige) bzw. gemischtkörnige Lockergesteine mit hohen Reibungseigenschaften in dichter Lagerung bzw. in fester Konsistenz (z.B. glazial vorbelastete Lockergesteine).
- Baugrundklasse **C**: Stark bis völlig verwitterte Festgesteine oder grobkörnige (bindige) Lockergesteine in mitteldichter Lagerung bzw. in mindestens steifer Konsistenz oder feinkörnige (bindige) Lockergesteine in mindestens steifer Konsistenz.

Der Einfluss der Untergrundverhältnisse auf das elastische Antwortspektrum wird für die horizontale Bodenbewegung durch die Wahl der Parameter $\mathrm{S}, \mathrm{T}_{,\mathrm{B}}, \mathrm{T}_{\mathrm{C}}, \mathrm{T}_{\mathrm{D}}$ nach Tabelle 1.3 und für die vertikale Bodenbewehrung nach Tabelle 1.4 berücksichtigt.

Das Ergebnis sind z.B. elastische horizontale Beschleunigungsspektren, wie das in Abbildung 1.55.

Untergrundverhältnisse	S	T_B s	T_C s	T_D s
A-R	1,00	0,05	0,20	2,0
B-R	1,25	0,05	0,25	2,0
C-R	1,50	0,05	0,30	2,0
B-T	1,00	0,1	0,30	2,0
C-T	1,25	0,1	0,40	2,0
C-S	0,75	0,1	0,50	2,0

Tab. 1.3: Werte der Parameter zur Beschreibung des horizontalen Antwortspektrums

Untergrundverhältnisse	S	T_B s	T_C s	T_D s
A-R	1,00	0,05	0,20	2,0
B-R	1,25	0,05	0,20	2,0
C-R	1,50	0,05	0,20	2,0
B-T	1,00	0,1	0,20	2,0
C-T	1,25	0,1	0,20	2,0
C-S	0,75	0,1	0,20	2,0

Tab. 1.4: Werte der Parameter zur Beschreibung des vertikalen Antwortspektrums

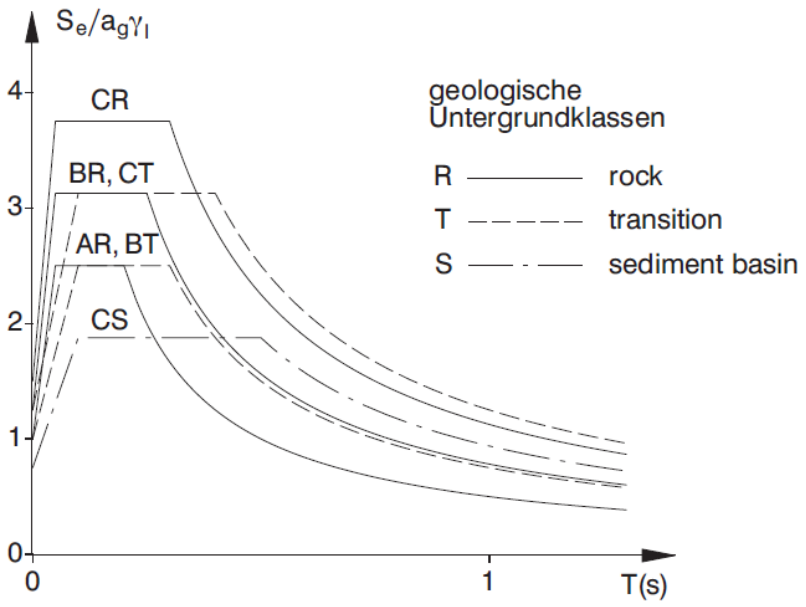


Abb. 1.60: Geglättete und normierte elastische horizontale Antwortspektren

Ziel der Bemessung für Erdbebenbeanspruchung ist der Schutz von Personen und besonders wichtigen Objekten (z.B. Krankenhäusern). Durch einen *Bedeutungsbeiwert* γ_I wir der unterschiedliche Grad der Erdbebensicherung berücksichtigt.

Die Bauwerke werden in 4 *Bauwerkskategorien* eingeteilt, deren Bedeutungsbeiwerte bei der Beschreibung der Erdbebeneinwirkung berücksichtigt werden. Die Bauwerkskategorien und zugehörigen Bedeutungsbeiwerte sind in Tabelle 1.5 zusammengestellt.

Bedeutungskategorie	Bauwerke	Bedeutungsbeiwert γ_I
I	Bauwerke von geringer Bedeutung für die öffentliche Sicherheit, z. B. landwirtschaftliche Bauten usw.	0,8
II	Gewöhnliche Bauten, die nicht zu den anderen Kategorien gehören, z. B. Wohngebäude	1,0
III	Bauwerke, deren Widerstandsfähigkeit gegen Erdbeben im Hinblick auf die mit einem Einsturz verbundenen Folgen wichtig ist, z. B. große Wohnanlagen, Verwaltungsgebäude, Schulen, Versammlungshallen, kulturelle Einrichtungen, Kaufhäuser usw.	1,2
IV	Bauwerke, deren Unversehrtheit im Erdbebenfall von Bedeutung für den Schutz der Allgemeinheit ist, z. B. Krankenhäuser, wichtige Einrichtungen des Katastrophenschutzes und der Sicherheitskräfte, Feuerwehrhäuser usw.	1,4

Tab. 1.5: Bedeutungskategorien und Bedeutungsbeiwerte für Hochbauten

Die Ermittlung der Ordinate des Bemessungsspektrums S_d erfolgt nach der folgenden Formel:

$$S_d(T) = a_g \cdot \gamma_I \cdot S \cdot \begin{cases} \left[1 + \frac{T}{T_B} \cdot \left(\frac{\beta_0}{q} - 1\right)\right] & \text{für } T_A \le T \le T_B \\ \frac{\beta_0}{q} & \text{für } T_B \le T \le T_C \\ \frac{\beta_0}{q} \cdot \frac{T_C}{T} & \text{für } T_C \le T \le T_D \\ \frac{\beta_0}{q} \cdot \frac{T_C T_D}{T^2} & \text{für } T_D \le T \end{cases}$$

Dabei ist

$S_d(T)$	die Ordinate des Bemessungsspektrums;
	(für $T \ge T_B$ ist $S_d = \frac{S_e}{q}$)
	Beachte: $S_d = S_{design}$ und nicht $S_{displacement}$!
T	die Schwingungsdauer eines linearen Einmasseschwingers;
a_g	der Bemessungswert der Bodenbeschleunigung;
γ_I	Bedeutungsbeiwert nach Tabelle 1.5;
β_0	der Verstärkungsbeiwert der Spektralbeschleunigung mit dem Referenzwert $\beta_0 = 2,5$ für 5% viskose Dämpfung;
$T_A, T,_B, T_C, T_D$	die Kontrollperioden des Antwortspektrums mit $T_A = 0$
S	der Untergrundparameter;
q	der Verhaltensbeiwert, siehe Abschnitt 8-12 der DIN 4149.

Aus der maximalen Beschleunigung $\ddot{u}^t_{max} = S_d$ erhält man die eingeprägte Trägheitskraft

$$F_T = M\,\ddot{u}^t_{max} = M\,S_d$$

Für Gebäude mit mehr als 2 Stockwerken wird dieser Wert noch mit einem Korrekturfaktor λ multipliziert (DIN 4149, S. 23).

Diese Kraft wird als horizontale Ersatzlast (als Ersatz für die Erregung) auf das Tragwerk aufgebracht

$$H_E = M\,S_d \tag{1.41}$$

Die an sich erforderliche dynamische Berechnung wird somit vereinfachend durch die statische Berechnung mit der Ersatzlast H_E näherungsweise ersetzt. Man erhält als Verschiebung u_{max}

$$u = \frac{H_E}{K} = \frac{M}{K}\,S_d = \frac{1}{\omega^2}\,S_d = u_{max}$$

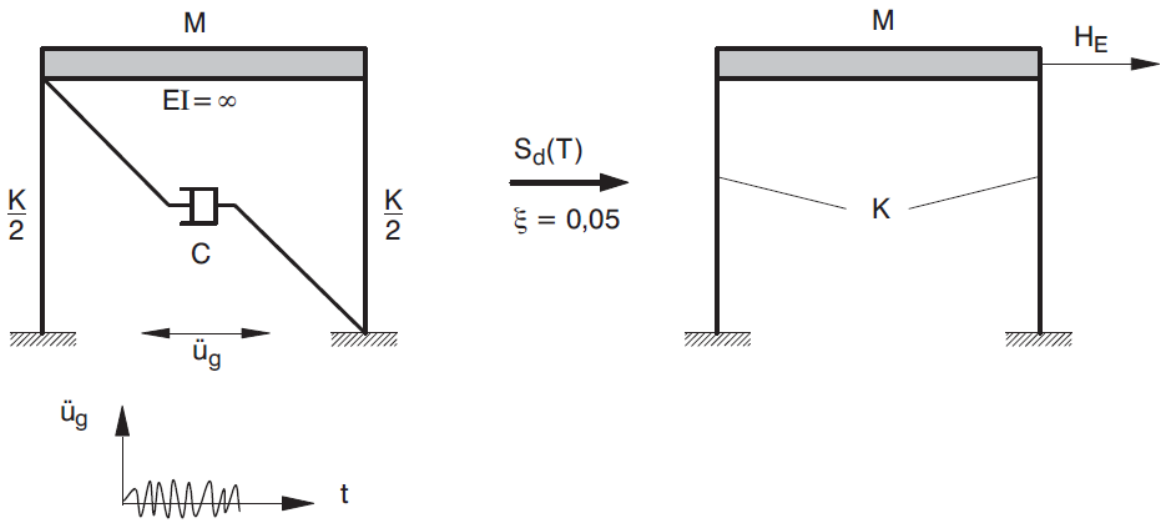
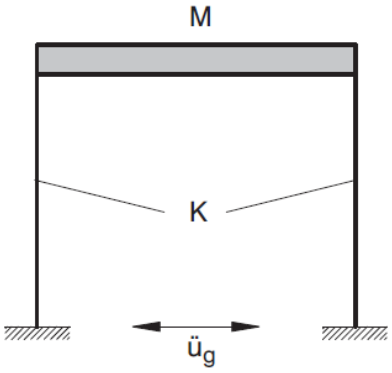


Abb. 1.61: Ersatzlast H_E

Die Vorgehensweise wird wieder an einem Rahmen mit einem Freiheitsgrad demonstriert. In Abbildung 1.62 sind die für die Erdbebenbemessung relevanten Annahmen angegeben.



$$K = 50 \text{ kN/m}$$

$$M = 996 \text{ kg} = 0{,}996 \text{ kN} \frac{s^2}{m}$$

$$T = 0{,}889 \text{ s}$$

Annahmen:	Erdbebenzone	2	(a_g = 0,6; S=1,25)	T_B=0,05
	Bedeutungskategorie	III		T_C=0,25
	Untergrundverhältnisse	B–R		T_D=2,00
	Verhaltensbeiwert	q=3,0	(regelmäßiges Rahmensystem/Beton)	

Abb. 1.62: Rahmen unter Erdbebenbelastung

Für die gegebene Schwingungsdauer T = 0,889 s gilt $T_C \leq T \leq T_D$. Damit ist der Spektralwert

$$S_d(T) = a_g \cdot \gamma_I \cdot S \cdot \frac{\beta_0}{q} \cdot \frac{T_C}{T} = 0{,}6 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}25 \cdot \frac{2{,}5}{3{,}0} \cdot \frac{0{,}25}{0{,}889} = 0{,}211 \text{ m/s}^2$$

Die horizontale Ersatzkraft ist

$$H_E = M \cdot S_d = 0{,}996 \cdot 0{,}211 = 0{,}21 \text{ kN}$$

Die statische Berechnung mit H_E als Ersatzbelastung ergibt eine maximale Verschiebung von

$$u_{max} = \frac{H_E}{K} = \frac{0{,}21}{50} = 4{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 4{,}2 \text{ mm}$$

Bei Systemen mit mehreren Freiheitsgraden müssen die Ergebnisse aus einzelnen Ersatzlastgruppen mit statistischen Methoden überlagert werden. Auf die Berechnung der Ersatzlasten und ihre Überlagerung wird für diesen Fall in Abschnitt 1.12 (Systeme mit mehreren Freiheitsgraden) näher eingegangen.

1.11 Reduktion von kontinuierlichen Systemen auf einen Freiheitsgrad

1.11.1 Produktansatz auf der Basis des Prinzips von d'Alembert

Jedes kontinuierliche elastische System, wie ein Balken, Rahmen oder eine Platte, ist in Wirklichkeit ein System mit unendlich vielen Freiheitsgraden. Hier soll gezeigt werden, dass in gewissen Fällen näherungsweise eine Reduktion auf einen FG (oder auch mehrere entkoppelte Freiheitsgrade) möglich ist. Voraussetzung dafür ist es, die Schwingungsform $\phi(x)$ aus einer Voruntersuchung, z.B. einer statischen Lösung für die Verschiebungen abzuschätzen.

Das Problem wird durch einen Produktansatz

$$u(x,t) = \phi(x) \cdot y(t) \tag{1.42}$$

in ein räumliches und ein zeitliches Problem getrennt. Diese Entkopplung ist nur für lineare Probleme gültig.

$\phi(x)$ ist eine geometrische Form der Eigenschwingung, die die geometrischen Randbedingungen erfüllt. Sie kann als Formfunktion im Sinne eines Ritz-Ansatzes verstanden werden.

y(t) ist ein verallgemeinerter Freiheitsgrad (auch als verallgemeinerte Koordinate oder Normalkoordinate bezeichnet), die den Zeitverlauf der Eigenschwingung angibt.

Auf diese Weise kann z.B. die Querschwingung eines Balkens dargestellt werden. Abbildung 1.63 zeigt die Schwingungsform $\phi(x)$.

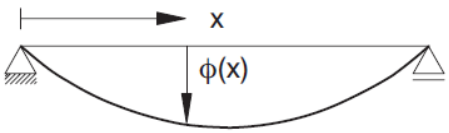


Abb. 1.63: Ansatz für die Schwingungsform eines Balkens

Es wird das um die Trägheitsterme erweiterte Prinzip der virtuellen Verschiebungen (Prinzip von d'Alembert) verwendet, wobei der virtuelle Verschiebungsansatz gleich dem angenommenen Verschiebungsansatz gewählt wird (vgl. FEM)

$$\delta u(x,t) = \phi(x)\,\delta y(t)$$

Die virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte ist

$$\delta W_e = -\delta W_T = -\int_0^\ell F_T\,\delta u\,dx \quad \text{mit: } F_T = m\,\ddot{u}$$

$$= -\int_0^\ell m\,\ddot{u}\,\delta u\,dx$$

Weil nur die Normalkoordinate y(t) eine Funktion der Zeit ist, ergibt sich für die Approximation der Beschleunigung

$$\ddot{u} = \phi(x)\,\ddot{y}(t)$$

und damit

$$\delta W_e = -\int_0^\ell m\,\phi(x)\,\ddot{y}(t)\,\phi(x)\,\delta y(t)\,dx$$

$$= -\int_0^\ell m\,\phi^2(x)\,dx\,\ddot{y}(t)\,\delta y(t)$$

Für die virtuelle innere Arbeit der Schnittkräfte werden – wie bei statischen Problemen – häufig nur die Anteile aus den Krümmungen berücksichtigt (Bernoulli-Balkentheorie, dehnstarre Stäbe).

$$-\delta W_i = \int_0^\ell M\,\delta\chi\,dx \qquad \text{mit:} \qquad M = -EI\,u'' \quad \textit{und} \quad \delta\chi = -\delta u''$$
$$= \int_0^\ell EI\,u''\,\delta u''\,dx$$

Zur Berechnung des Krümmungsverlaufs in der Zeit muss nur die Funktion $\phi(x)$ der Schwingungsformen abgeleitet werden, da y(t) nicht von x abhängt.

$$u'' = \phi''(x)\,y(t) \quad ; \quad \delta u'' = \phi''(x)\,\delta y(t)$$
$$-\delta W_i = \int_0^\ell EI\,\phi''(x)\,y(t)\,\phi''(x)\,\delta y(t)\,dx$$
$$= \int_0^\ell EI\,(\phi''(x))^2\,dx\,y(t)\,\delta y(t)$$

Damit lautet das auf dynamische Probleme verallgemeinerte Prinzip der virtuellen Verschiebungen

$$\delta W_e + \delta W_i = -\left[\underbrace{\int_0^\ell m\,\phi^2(x)\,dx}_{M^*}\,\ddot{y}(t) + \underbrace{\int_0^\ell EI\,(\phi''(x))^2\,dx}_{K^*}\,y(t)\right]\delta y(t) = 0$$

Die Massen- und Steifigkeitsterme werden zu M^* und K^* zusammengefasst. Man erhält die Bewegungsgleichung eines verallgemeinerten Ein-FG-Systems.

$$\boxed{\begin{array}{lll} & M^*\,\ddot{y}(t) + K^*\,y(t) = 0 & \\ \text{mit:} & M^* = \int m\,\phi^2(x)\,dx & \text{verallgemeinerte Masse} \\ & K^* = \int EI\,(\phi''(x))^2\,dx & \text{verallgemeinerte Steifigkeit} \end{array}} \tag{1.43}$$

Aus der Masse und der Steifigkeit des verallgemeinerten Systems kann schließlich die Eigenkreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} \rightarrow \omega^2 = \frac{\int EI\,(\phi''(x))^2\,dx}{\int m\,\phi^2(x)\,dx} \tag{1.44}$$

berechnet werden. Die Beziehung auf der rechten Seite von Gleichung (1.44) wird auch als *Rayleigh-Quotient* bezeichnet und stellt eine (obere) Abschätzung der Grundfrequenz eines Systems dar.

Die ermittelte Eigenfrequenz hängt vom Verschiebungsansatz, der einer Eigenschwingform oder der Überlagerung aus mehreren Eigenschwingformen entspricht, ab. Je besser der ange-

nommene Verschiebungsansatz einer wirklichen Eigenschwingform entspricht, desto genauer sind die ermittelten Eigenfrequenzen.

Hier zeigt sich auch schon ein Nachteil dieser Lösungsmethode: Um einigermaßen genaue Werte für die Eigenfrequenz zu erhalten, muss die Eigenschwingform aus der Geometrie des Tragwerks leicht abschätzbar sein. Dies ist meist nur für die Grundschwingung, d.h. die erste Eigenschwingform eines Tragwerks, möglich. Die höheren Eigenschwingformen sind nur bei einfachsten Tragwerken wie z.B. dem vorliegenden Balken übersehbar.

Im Prinzip sind jedoch alle Eigenfrequenzen eines Tragwerks auf diese Weise erfassbar. Die häufigste Anwendung findet diese Methode bei der Ermittlung der ersten Eigenkreisfrequenz komplexer Tragwerke.

In einer weiteren Verallgemeinerung können auch Einzelmassen, Dämpfungen, Lagerfedern, elastische Bettungen, Belastungen (Einzellasten und verteilte Lasten) usw. mit einbezogen werden. Dies führt auf die Schwingungsgleichung eines gedämpften verallgemeinerten Einmassenschwingers:

$$
\begin{aligned}
& M^* \cdot \ddot{y}(t) + C^* \cdot \dot{y}(t) + K^* \cdot y(t) = F^*(t) \\
\text{mit:}\quad & M^* = \int_0^{\ell} m(x)\ \phi^2(x)\ dx + \Sigma\ M_i\ \phi_i^2 \\
& C^* = \int_0^{\ell} c\ (x)\ \phi^2(x)\ dx + \Sigma\ C_i\ \phi_i^2 \\
& K^* = \int_0^{\ell} EI\ (\phi''(x))^2\ dx + \Sigma\ K_i\ \phi_i^2 + \int_0^{\ell} k\ (x)\ \phi^2(x)\ dx \\
& F^*(t) = \int_0^{\ell} p(x,t)\ \phi(x)\ dx + \Sigma\ F_i(t)\ \phi_i \\
& c\ (x) : \text{verteilte Dämpfung}\ ; \qquad k\ (x) : \text{elastische Bettungszahl}
\end{aligned}
\tag{1.45}
$$

Die Lösung der Schwingungsgleichung bei gedämpften Systemen erhält man analog zu Abschnitt 1.4.

$$
\omega = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}}\ ; \quad \omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^{*2}}\ ; \quad \xi^* = \frac{C^*}{2\ M^*\ \omega}
\tag{1.46}
$$

Die Integrale in den Formeln für die verallgemeinerte Masse und Belastung können ersetzt bzw. vermieden werden, wenn die Massen und Belastungen an einzelnen diskreten Punkten zusammengefasst werden. Dadurch kann sich der Rechenaufwand beträchtlich verringern und das eigentliche Problem besteht nur noch in der Ermittlung der verallgemeinerten Steifigkeit, bei der eine Zusammenfassung schlecht möglich ist. Die Lösung der Bewegungsgleichung erfolgt sonst wie bisher.

1.11.2 Näherungsweise Berechnung der Eigenschwingung eines Balkens

Für einen Balken auf zwei Stützen bietet es sich an, als Schwingungsform $\phi(x)$ eine quadratische Parabel

$$
\phi(x) = \frac{1}{\ell^2}\ x\ (\ell - x) = \frac{x}{\ell} - \frac{x^2}{\ell^2}\ ; \quad \phi''(x) = -\frac{2}{\ell^2}
$$

anzunehmen (Abbildung 1.64).

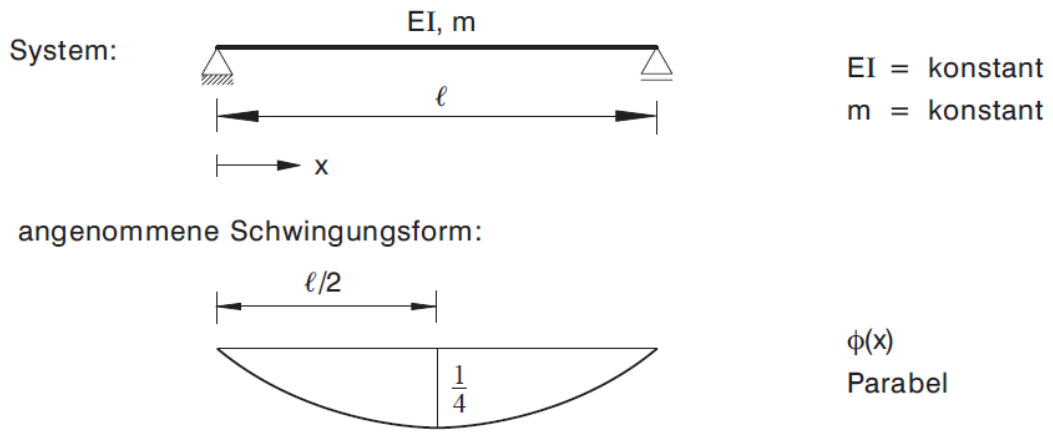


Abb. 1.64: Grundschwingung eines Balkens, Ansatz mit quadratischer Parabel

Die verallgemeinerte Masse und Steifigkeit erhält man nach Gleichung (1.45)

$$M^* = \int_0^\ell m \left(\frac{x}{\ell} - \frac{x^2}{\ell^2} \right)^2 dx = m \int_0^\ell \left[\frac{x^2}{\ell^2} - \frac{2\,x^3}{\ell^3} + \frac{x^4}{\ell^4} \right] dx$$

$$= m \cdot \ell \left[\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} \right] = \frac{m \cdot \ell}{30}$$

$$K^* = \int_0^\ell EI \left(-\frac{2}{\ell^2} \right)^2 dx = \frac{4\,EI}{\ell^4}\,\ell = \frac{4\,EI}{\ell^3}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} = \sqrt{\frac{4\,EI \cdot 30}{\ell \cdot m \cdot \ell^3}} = \sqrt{120} \cdot \sqrt{\frac{EI}{m \cdot \ell^4}} = \frac{10,95}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Die exakte Lösung ist

$$\phi\,(x) = \sin \frac{\pi}{\ell} \cdot x$$

$$\omega = \left(\frac{\pi}{\ell} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} = \frac{9,87}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Die Näherungslösung liegt über der tatsächlichen Eigenfrequenz, d.h. sie ist zu steif. Das ist typisch für Näherungsverfahren, die auf dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen basieren (vgl. FEM). Der Fehler beträgt in diesem Fall 11%.

1.11.3 Wirkung von Normalkräften bei Theorie II. Ordnung

Die Wirkung von Normalkräften blieb bis jetzt außer Betracht. Wenn aber größere Normalkräfte auftreten, wird das Schwingungsverhalten eines Systems durch geometrisch nichtlineare Effekte beeinflusst, die näherungsweise nach der Theori II. Ordnung berücksichtigt werden können.

Abbildung 1.65 zeigt eine Stütze mit einer Vertikallast S und einer horizontalen Erregerkraft F(t). Die Wirkung der Stablängskraft am ausgelenkten System (P-Δ-Effekt) wird durch eine horizontale Ersatzkraft („Abtriebskraft“) berücksichtigt.

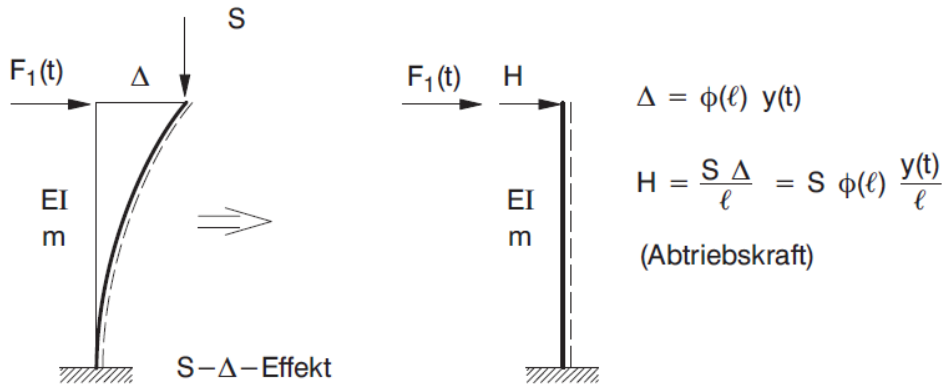


Abb. 1.65: Wirkung einer Normalkraft nach Theorie II. Ordnung

Die verallgemeinerte Last ist damit

$$F^*(t) = (F_1(t) + H)\ \phi(\ell) =$$

$$= F_1(t)\ \phi(\ell) + \underbrace{S\ \phi^2(l)}_{\text{verallg. Längskraft}} \frac{y(t)}{\ell} = F_1^*(t) + \frac{S^*}{\ell}\ y(t)$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung liefert

$$M^*\ \ddot{y}(t) + C^*\ \dot{y}(t) + K^*\ y(t) = F_1^*(t) + \frac{S^*}{\ell}\ y(t)$$

Der Lastanteil aus der Stablängskraft hängt von der Auslenkung y(t) ab und gehört deshalb auf die linke Seite der Differentialgleichung. Entsprechend umgeformt lautet die Gleichung

$$M^*\ \ddot{y} + C^*\ \dot{y} + \Big(\underbrace{K^* - \frac{S^*}{\ell}}_{\text{geometrische Steifigkeit: } K_g}\Big)\ y = F_1^*(t)$$

Die Steifigkeit des Systems wird entsprechend der Theorie II. Ordnung verändert (geometrische Steifigkeit). Bei einer Druckkraft wird die Steifigkeit verringert und bei einer Zugkraft vergrößert. Ist S eine sehr große Druckkraft, kann die Gesamtsteifigkeit K^* Null werden. Diese Last wird als Knicklast bezeichnet (kinetisches Stabilitätskriterium). Rechnerisch ergibt sich eine Eigenkreisfrequenz von $\omega = 0$, d.h. ein einmal ausgelenktes System braucht unendlich lange, um wieder in die Ausgangslage zurückzuschwingen.

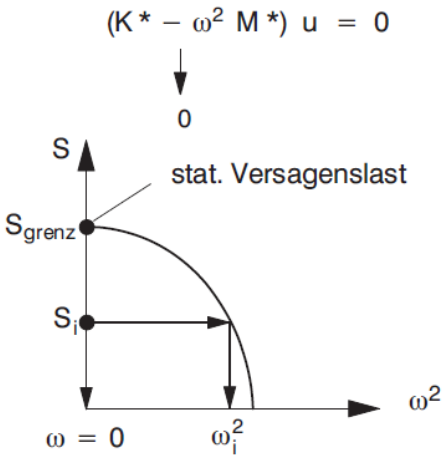


Abb. 1.66: Abnahme der Eigenfrequenz für S als Druckkraft

1.12 Modellbildung für Systeme mit mehreren Freiheitsgraden

1.12.1 Mathematisches Modell und Diskretisierung

Wie in der Statik stellt sich auch in der Elastodynamik das Problem, die unendliche Anzahl von Freiheitsgraden eines realen Tragwerks auf eine endliche Zahl zu reduzieren. Dabei geht es zunächst um das *mathematische (mechanische) Modell*, bei dem Annahmen zum System, zum Material sowie zu Lasten und Randbedingungen gemacht werden. Hier werden neben der Steifigkeitsidealisierung (s. Statik) auch die Massen- und Dämpfungsverteilung angenähert.

Verteilte Massen können zur Vereinfachung konzentriert angeordnet werden. Zeitabhängige Lasten können stark vereinfacht oder in komplexen Zeitverläufen definiert werden.

In einem zweiten Idealisierungsschritt wird für das gewählte mechanische Modell ein *Rechenmodell* entwickelt; im Regelfall werden hier räumliche und zeitliche Diskretisierungsverfahren eingesetzt bzw. Untersuchungen im Frequenzraum angestellt.

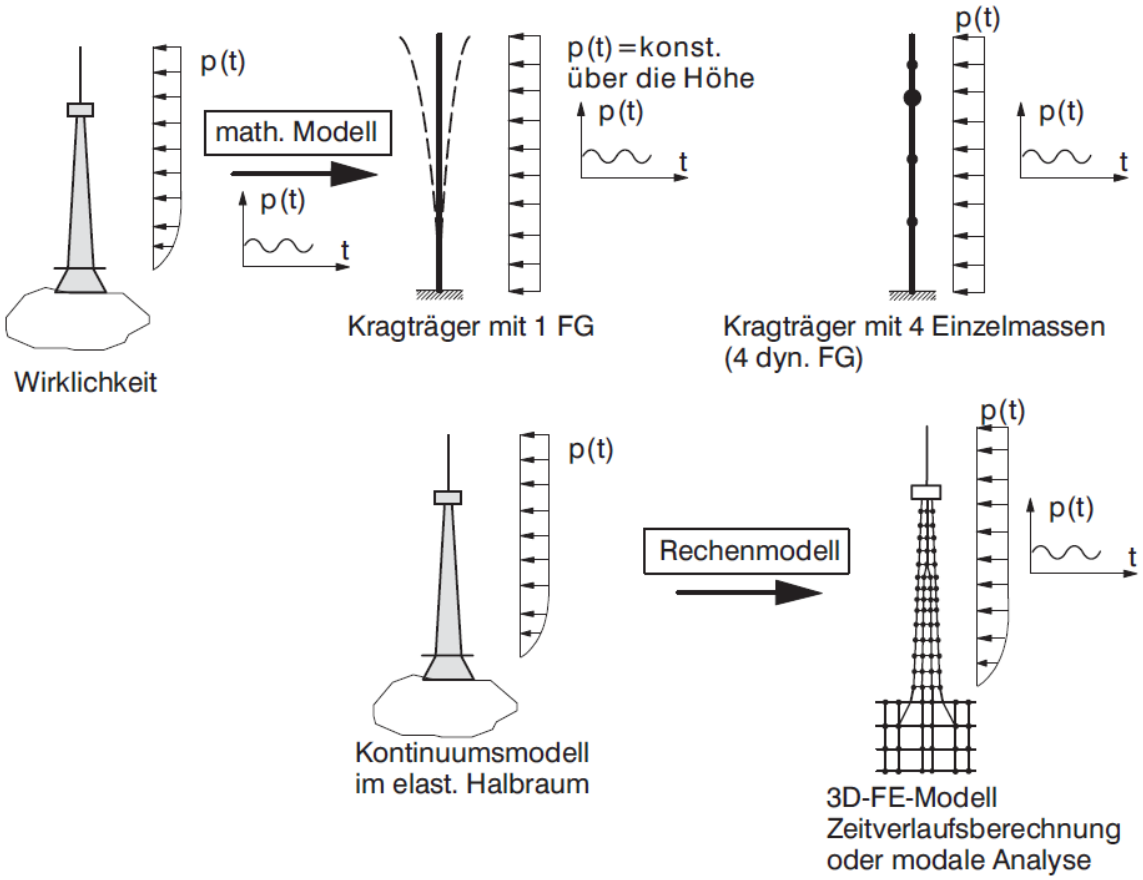


Abb. 1.67: Verschiedene Modellierungen für einen Fernsehturm

Mehr noch als in der Statik sollte in der Dynamik das mechanische Modell so einfach wie möglich gewählt werden, da die Zunahme der Anzahl der Freiheitsgrade zu sehr aufwändigen Rechnungen führen kann. Die Ergebnisse in den hohen Moden können außerdem bei der Verwendung von genäherten oder geschätzten Eigenformen (FEM) stark von der Realität abweichen.

Systeme, die keine ausgeprägten Freiheitsgrade oder konzentrierten Massen besitzen, erfordern gegebenenfalls Vergleichsrechnungen mit unterschiedlichen Diskretisierungen. Für das Beispiel in Abbildung 1.67 würde dies bedeuten, neben dem System mit 4 Massen noch Systeme mit 8 bzw. 12 Massen zu vergleichen, um einen optimalen Kompromiss zwischen Ge-

nauigkeit und Rechenaufwand zu erhalten. Ein Ein-Freiheitsgrad-System kann sich in diesem Zusammenhang als zu grob, eine dreidimensionale Diskretisierung möglicherweise als zu aufwändig herausstellen.

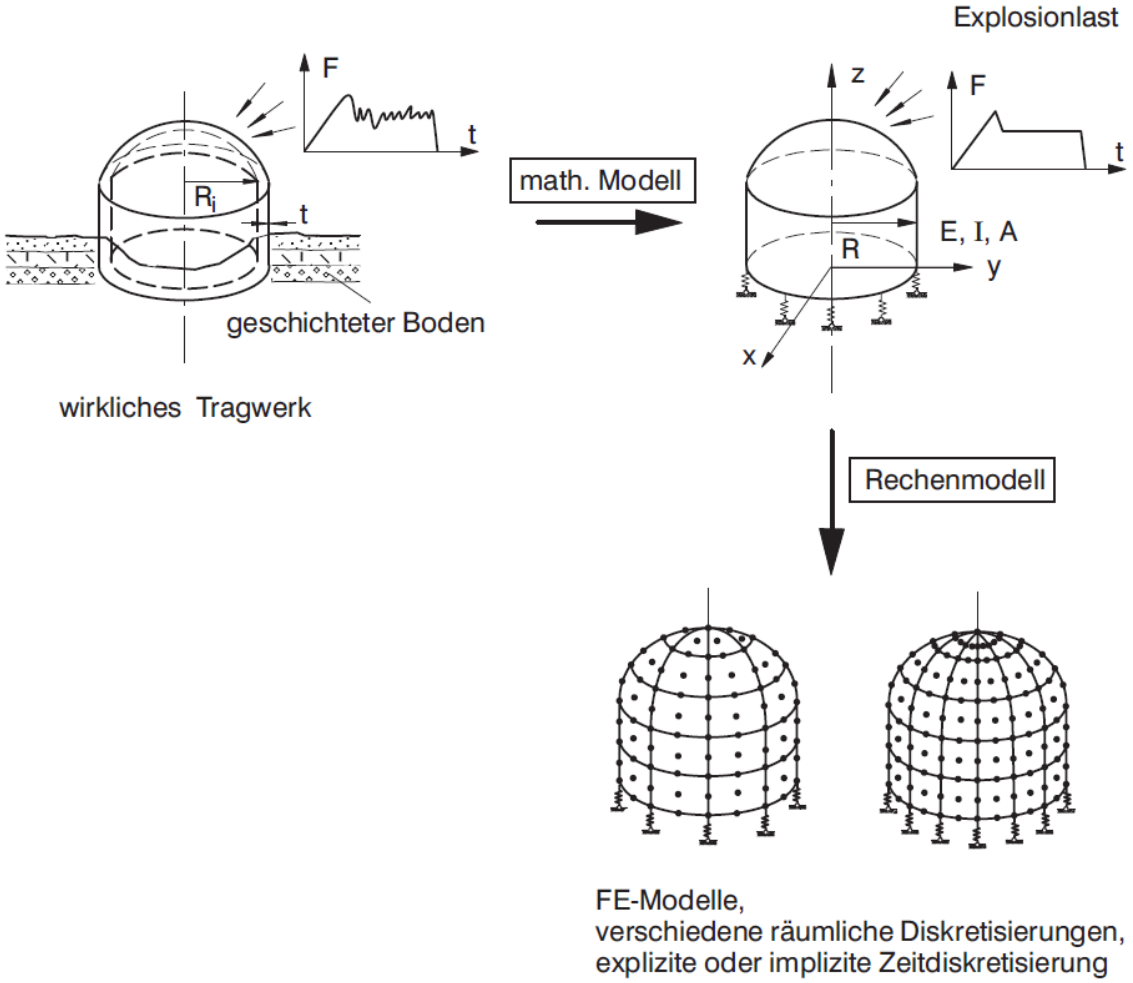


Abb. 1.68: Einfache Modellierung eines Behälters unter Explosionsdruck

1.12.2 Bewegungsgleichung

Das Aufstellen der Bewegungsgleichung für Systeme mit mehreren Freiheitsgraden wird am Beispiel des in Abbildung 1.69 dargestellten zweistöckigen Rahmens demonstriert.

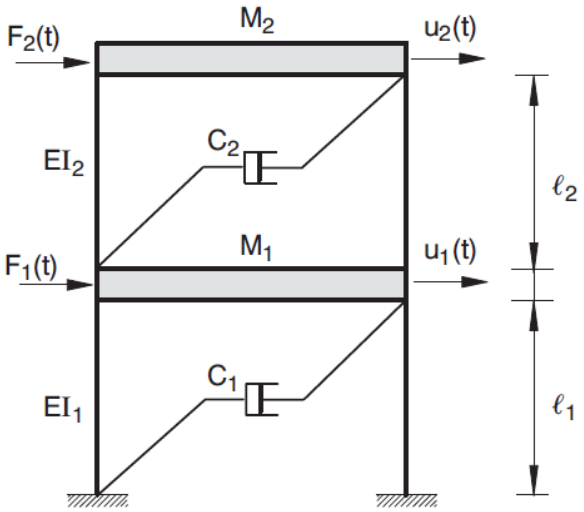


Abb. 1.69: Modellierung eines zweistöckigen Rahmens als System mit 2 FG

Zunächst werden die beiden Riegel freigeschnitten (Abbildung 1.70). Die Horizontalbewegungen der beiden Riegel entsprechen den beiden Freiheitsgraden des Systems. Die zugehörigen d'Alembertschen Trägheitskräfte (Scheinkräfte), Dämpfungskräfte und Kräfte aus der Steifigkeit der Stiele sind

$$\begin{aligned} F_{T,1} &= M_1\,\ddot{u}_1 & F_{T,2} &= M_2\,\ddot{u}_2 \\ F_{D,1} &= C_1\,\dot{u}_1 & F_{D,2} &= C_2\,(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \\ F_{i,1} &= K_1\,u_1 & F_{i,2} &= K_2\,(u_2 - u_1) \end{aligned} \tag{1.47}$$

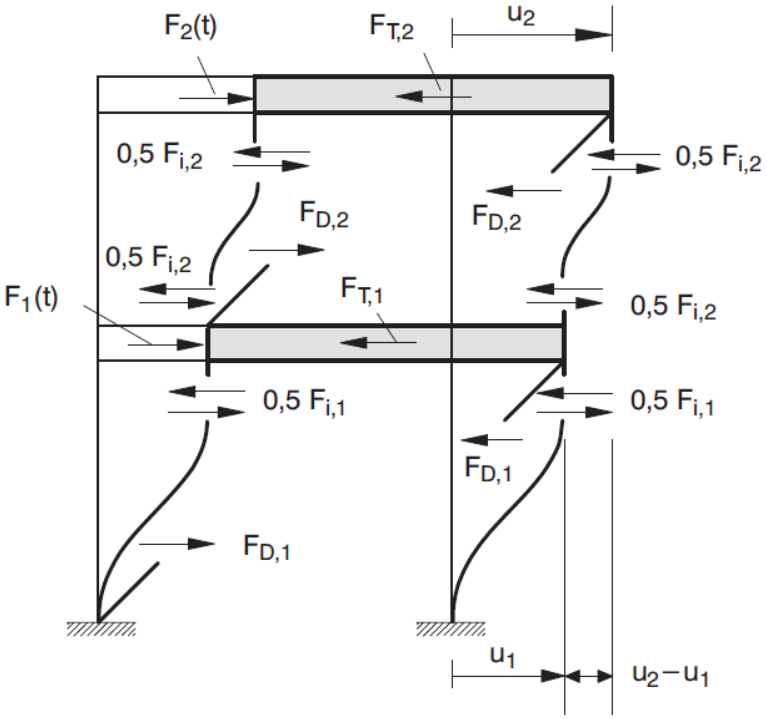


Abb. 1.70: Zweistöckiger Rahmen mit an den Riegeln angreifenden Kräften

Das dynamische Gleichgewicht (die Bewegungsgleichung) wird für jeden Freiheitsgrad (jeden Riegel) einzeln aufgestellt.

$$F_{T,1} + F_{D,1} - F_{D,2} + F_{i,1} - F_{i,2} - F_1(t) = 0$$

$$F_{T,2} + F_{D,2} + F_{i,2} - F_2(t) = 0$$

Einsetzen von Gleichung (1.47) liefert

$$M_1\,\ddot{u}_1 + C_1\,\dot{u}_1 - C_2\,(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + K_1\,u_1 - K_2\,(u_2 - u_1) - F_1(t) = 0$$

$$M_2\,\ddot{u}_2 + C_2\,(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + K_2\,(u_2 - u_1) - F_2(t) = 0$$

Die beiden Gleichungen werden in einer matriziellen Gleichung zusammengefasst.

$$\begin{bmatrix} M_1 & \\ & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 \\ -C_2 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F}(t)$$

In kompakter Schreibweise lauter die Bewegungsgleichung für Systeme mit mehreren Freiheitsgraden damit

$$\boxed{\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\,\mathbf{u} = \mathbf{F}(t)} \tag{1.48}$$

mit: $\mathbf{M}$ - Massenmatrix $\ddot{\mathbf{u}}$ - Beschleunigungsvektor $\mathbf{F}(t)$ - Lastvektor

$\mathbf{C}$ - Dämpfungsmatrix $\dot{\mathbf{u}}$ - Geschwindigkeitsvektor

$\mathbf{K}$ - Steifigkeitsmatrix $\mathbf{u}$ - Verschiebungsvektor

Die Bewegungsgleichung hat den gleichen Aufbau wie die eines Ein-Freiheitsgrad-Systems. Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, dass dieselbe Gleichung aus der Diskretisierung für Systeme mit verteilten Massen, wie z.B. bei Rahmentragwerken, entsteht.

Die Systemmatrizen $\mathbf{K}$ und $\mathbf{M}$ lassen sich direkt mit Hilfe des Verschiebungsgrößenverfahrens aufstellen. $\mathbf{K}$ stellt die aus der Statik bekannte Steifigkeitsmatrix dar, die auch nichtlineare Anteile enthalten kann. Die Massenmatrix $\mathbf{M}$ kann analog zur Steifigkeitsmatrix aus Einheitsbeschleunigungszuständen berechnet werden.

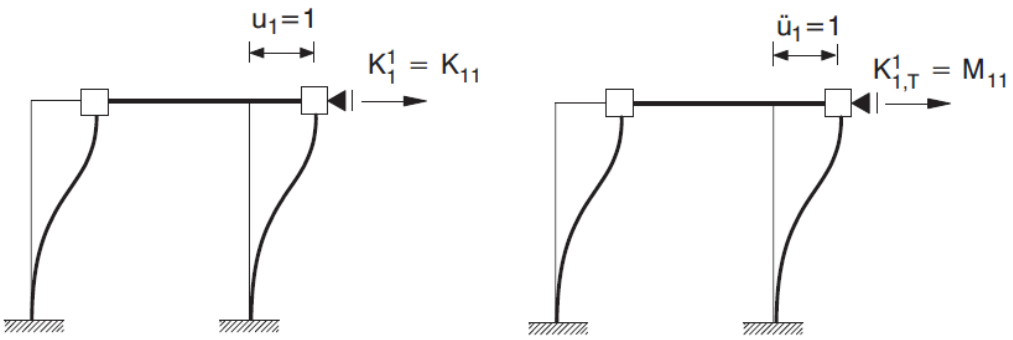


Abb. 1.71: Prinzip der Ermittlung der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ *und der Massenmatrix* $\mathbf{M}$

Die Diagonalform der Massenmatrix wird zwar aus rechnerischen Gründen angestrebt, ist aber nicht immer möglich. Bei Systemen mit verteilten oder konzentrierten Massen, die durch mehrere Verschiebungsgrößen beschleunigt werden, treten in $\mathbf{M}$ Nebendiagonalglieder auf.

Bei der Ermittlung der Elemente der Dämpfungsmatrix ergeben sich im Allgemeinen große Probleme, da über die Dämpfungsverteilung innerhalb eines wirklichen Tragwerks kaum Informationen vorliegen, sofern nicht klar definierte Schwingungsdämpfer eingebaut werden. Die Matrix $\mathbf{C}$ wird daher häufig in Anlehnung an die Matrizen $\mathbf{K}$ und $\mathbf{M}$ definiert. Hierauf wird später unter dem Stichwort „modale Dämpfung“ näher eingegangen. Diese Art der Dämpfung wird auch „proportionale Dämpfung“ oder „Rayleigh-Dämpfung“ genannt.

Insgesamt kann – wie beim 1-FG-System – folgende Klassifizierung vorgenommen werden:

$F(t) = 0 \quad \rightarrow$ freie Schwingung

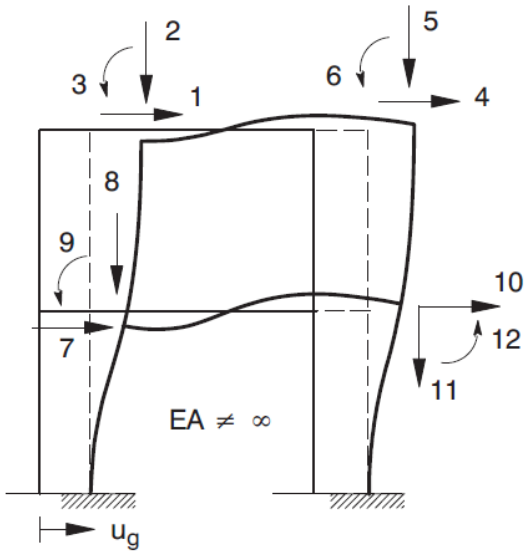
$F(t) \neq 0 \quad \rightarrow$ erzwungene Schwingung

$C \quad = 0 \quad \rightarrow$ ungedämpfte Schwingung

$C \quad \neq 0 \quad \rightarrow$ gedämpfte Schwingung

1.12.3 Verschiebungen des Untergrunds (Fußpunktverschiebung)

Bei Fußpunktverschiebungen bzw. -beschleunigungen erhält man wie beim 1-FG-System in Abschnitt 1.3 einen Ersatzlastvektor $F_{eff}(t)$.



Bei einer horizontalen Fußpunktverschiebung gilt für die horizontalen Verschiebungen 1, 4, 7, 10 wie beim 1-FG-System:

$u_t = u + u_g$

Für alle anderen Freiheitsgrade gilt:

$u_t = u$

Abb. 1.72: Freiheitsgrade eines 2-stöckigen Rahmens

Für den Vektor **u** aller Verschiebungen gilt

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u} + \mathbf{1} \cdot u_g \tag{1.49}$$

1 ist der Erregervektor, der bei den erregten (in Richtung der Erregung weisenden) Verschiebungen eine 1 und sonst 0 enthält. Im Beispiel des Rahmens in Abbildung 1.72 ist der Erregervektor

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bei allgemein räumlichen Systemen ist es der Richtungscosinus zwischen der Erregungs- und der Verschiebungsrichtung.

Damit erhält man als Differentialgleichung:

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\,\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\,\mathbf{u} = \underbrace{-\mathbf{M} \cdot \mathbf{1} \cdot \ddot{u}_g}_{\mathbf{F}_{eff}(t)}} \tag{1.50}$$

1.13 Analytische Lösung für kontinuierliche Systeme

1.13.1 Bewegungsgleichung eines Balkens, kontinuierliche Massenmethode

Wir betrachten einen Balken unter Biegung ohne Normalkraft, d.h. es treten nur Querverschiebungen auf. Schubverformungen und nichtlineare Effekte werden nicht berücksichtig. Die Schubverformungen können allerdings gerade in der Dynamik eine wesentliche Rolle spielen, so dass der Timoschenko-Balken genutzt werden muss. Ebenfalls wird die entsprechende Wirkung der Rotationsträgheit vernachlässigt, so dass nur die Massenträgheit in Bewegungsrichtung berücksichtigt wird.

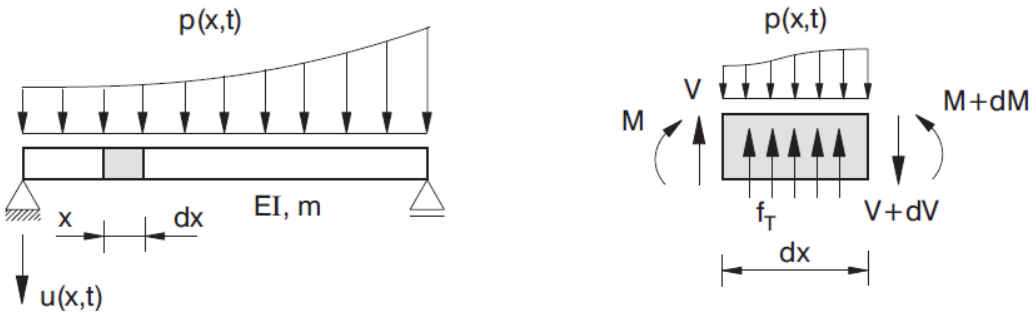


Abb. 1.73: Dynamisches Gleichgewicht eines schwingenden Balkens

Für die verteilten Trägheitskräfte gilt

$$f_T = m\,\ddot{u}$$

Gleichgewichtsbetrachtungen am infinitesimalen Element führen zu der Differentialgleichung

$$\frac{dV}{dx} - m\,\ddot{u} + p = \frac{d^2M}{dx^2} - m\,\ddot{u} + p = 0$$

Einsetzen der WERKSTOFF- und KINMATIK-Gleichungen führt zur Bewegungsgleichung des Balkens

$$\boxed{EI\,\frac{d^4u}{dx^4} + m\,\ddot{u} = p(x,t)} \tag{1.51}$$

Gleichung (1.51) ist eine lineare inhomogene partielle Differentialgleichung. Im Weiteren wird nur der homogene Fall der freien Schwingung betrachtet (p = 0).

$$u^{IV} + \frac{m}{EI}\,\ddot{u} = 0$$

Die Entkopplung des partiellen Problems wird über den Bernoullischen Produktansatz

$$u(x,t) = \phi(x) \quad y(t)$$

vorgenommen. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\frac{\phi^{IV}(x)}{\phi(x)} + \frac{m}{EI}\,\frac{\ddot{y}(t)}{y(t)} = 0$$

Für die analytische Lösung müssen beide Terme konstant sein, da ϕ nur von x und y nur von t abhängt.

$$\frac{\phi^{IV}(x)}{\phi(x)} = -\frac{m}{EI}\,\frac{\ddot{y}(t)}{y(t)} = \text{konst.} = a^4$$

Damit ist die Entkopplung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen erfolgt.

$$\phi^{IV}(x) - a^4\phi(x) = 0$$

$$\ddot{y}(t) + \omega^2\, y(t) = 0$$

mit: $\omega^2 = a^4 \dfrac{EI}{m}$ bzw. $a^4 = \omega^2 \dfrac{m}{EI}$

Die Lösungen sind harmonische Schwingungen

$$\boxed{y(t) = B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t = B \sin(\omega t + \theta)} \tag{1.52}$$

mit den Eigenformen:

$$\boxed{\phi(x) = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax + C_3 \sinh ax + C_4 \cosh ax} \tag{1.53}$$

Die Konstanten B_i erhält man aus den Anfangsbedingungen.

$$B_1 = \frac{\dot{y}(t{=}0)}{\omega} \quad ; \quad B_2 = y(t{=}0)$$

Die Konstanten C_i werden aus den Randbedingungen bestimmt, wobei bei der freien Schwingung eine Konstante offen bleibt und die Amplitude beschreibt.

Als Zahlenbeispiel berechnen wir die freie Schwingung eines Balkens auf zwei Stützen (Abbildung 1.74).

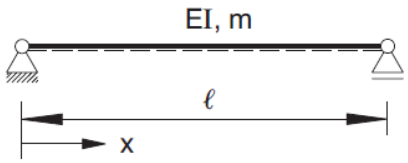


Abb. 1.74: Schwingender Balken mit Randbedingungen

Die Randbedingungen sind

$x = 0$: $\phi(0) = 0$, $M = -EI\,\phi''(0) = 0$ $\qquad$ $x = \ell$: $\phi(\ell) = 0$, $M = -EI\,\phi''(\ell) = 0$

Durch Einsetzen dieser Bedingungen in Gleichung (1.53) können die Konstanten C_i berechnet werden.

$$\left.\begin{array}{ll} \phi(0): & C_2 + C_4 = 0 \\ \phi''(0): & -C_2 + C_4 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow C_2 = C_4 = 0$$

$$\phi(\ell) + \frac{1}{a^2}\phi''(\ell): \quad 2\, C_3 \sinh(a\,\ell) = 0 \quad \rightarrow C_3 = 0 \quad (\sinh(a\,\ell) \neq 0)$$

$$\phi(\ell): \quad C_1 \sin(a\,\ell) = 0 \quad \rightarrow C_1 \neq 0 \quad (\text{nichttriviale Lösung})$$

Die letzte Bedingung wird auch durch C_1=0 erfüllt. Dies entspricht der trivialen Lösung des Balkens in Ruhe, die wir hier nicht weiter verfolgen. Es folgt die Frequenzgleichung

$$\sin(a\,\ell) = 0$$

Sie hat unendlich viele Lösungen

$$(a\,\ell) = n\,\pi \qquad n = 1, 2 \ldots \infty$$

mit $a^4 = \omega^2 \dfrac{m}{EI}$.

Damit sind die analytischen Lösungen für die Eigenfrequenz und die zugehörigen Eigenformen bekannt.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Eigenkreisfrequenz:} & \omega_n = n^2 \pi^2 \sqrt{\dfrac{EI}{(m\,\ell^4)}} \\ \text{Eigenform:} & \phi_n(x) = C_1 \sin \dfrac{n\,\pi}{\ell}\, x \end{array}} \qquad (1.54)$$

Die einzelnen Schwingungsformen erhält man durch Einsetzen von n=1, n=2 bzw. n=3.

$$n = 1: \qquad \omega_1 = \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{m\,\ell^4}} \qquad \phi_1(x) = C_{11} \sin \frac{\pi\, x}{\ell}$$

$$n = 2: \qquad \omega_2 = 4\,\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{m\,\ell^4}} \qquad \phi_2(x) = C_{12} \sin \frac{2\,\pi\, x}{\ell}$$

$$n = 2: \qquad \omega_3 = 9\,\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{m\,\ell^4}} \qquad \phi_3(x) = C_{13} \sin \frac{3\,\pi\, x}{\ell}$$

Sie erfüllen die Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_0^{\ell} \phi_m(x)\, \phi_n(x)\, m(x)\, dx = 0$$

1.13.2 Dynamische Steifigkeitsmatrix

Im Hinblick auf die Anwendung des Verschiebungsgrößenverfahrens, z.B. nach Art der direkten Steifigkeitsmethode, wird das Verschiebungsverhalten des Balkens durch die Randverschiebungsgrößen ausgedrückt (Abbildung 1.81).

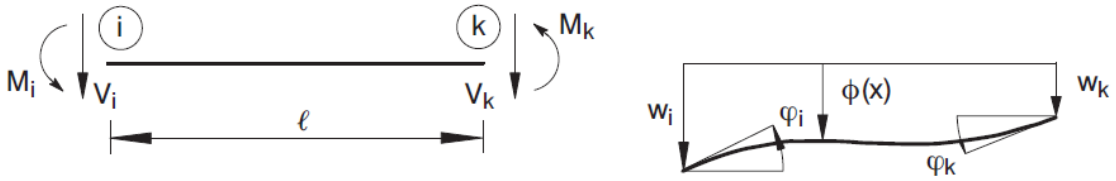


Abb. 1.75: Balken mit Randschnittgrößen und -verschiebungen

Zusammen mit Gleichung (1.53) folgt für die Verschiebungen

$$\begin{bmatrix} w_i \\ \varphi_i \\ w_k \\ \varphi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi\,(0) \\ -\,\phi'(0) \\ \phi\,(\ell) \\ -\,\phi'(\ell) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\,a & 0 & -\,a & 0 \\ s & c & S & C \\ -\,a\,c & a\,s & -\,a\,C & -\,a\,S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}$$

oder: $\mathbf{d} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ (1.55)

Abkürzungen: $s = \sin \lambda$ $\quad S = \sinh \lambda$

$(\lambda = a \cdot \ell)$ $\quad c = \cos \lambda$ $\quad C = \cosh \lambda$ (1.56)

sowie die Knotenkräfte

$$\begin{bmatrix} V_i \\ M_i \\ V_k \\ M_k \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \phi'''(0) \\ \phi''(0) \\ -\phi'''(\ell) \\ -\phi''(\ell) \end{bmatrix} = EI\ a^2 \begin{bmatrix} -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ +a\,c & -a\,s & -a\,C & -a\,S \\ s & c & -S & -C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}$$

oder:

$$\mathbf{s} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \tag{1.57}$$

Auflösen von (1.55) nach dem Vektor der unbekannten Konstanten

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{d}$$

und Einsetzen in (1.57) liefert

$$\mathbf{s} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dynamische Steifigkeitsmatrix}}}{\mathbf{K}_{dyn}} \cdot \mathbf{d} \tag{1.58}$$

mit

$$\mathbf{K}_{dyn} = \mathbf{B}\,\mathbf{A}^{-1} = \frac{EI}{1 - c\,C} \begin{bmatrix} (s\ C + c\ S)\ a^3 & -s\ S\ a^2 & -(S + s)\ a^3 & -(C - c)\ a^2 \\ & (s\ C - c\ S)\ a & (C - c)\ a^2 & (S - s)\ a \\ \text{symm.} & & (s\ C + c\ S)\ a^3 & s\ S\ a^2 \\ & & & (s\ C - c\ S)\ a \end{bmatrix} \tag{1.59}$$

Die dynamische Steifigkeitsmatrix enthält den Einfluss der Massen- und Steifigkeitsanteile und ist frequenzabhängig. Sie enthält mit $\lambda = 0$ (Frequenz f = 0) den statischen Sonderfall. Nur in diesem Fall erfüllen die Stabendschnittgrößen die üblichen (statischen) Gleichgewichtsbedingungen des Balkens. Da die verteilte Masse exakt enthalten ist, kann man das Vorgehen auch als *kontinuierliche Massenmethode* bezeichnen.

Als Zahlenbeispiel berechnen wir die freie Schwingung des in Abbildung 1.76 dargestellten einhüftigen Rahmens.

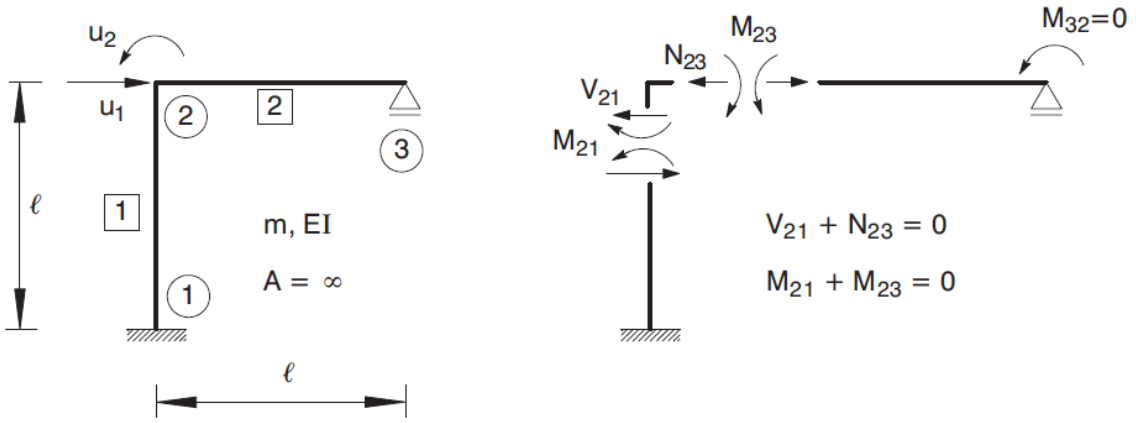


Abb. 1.76: Rahmen mit Elementeinteilung

Die Steifigkeitsmatrix wurde für Verschiebungen quer zur Stabachse aufgestellt. Stablängsverschiebungen müssen deshalb gesondert berücksichtigt werden (vgl. Abschnitt 1.14).

In diesem Beispiel enthält Stab 3 eine Starrkörperlängsverschiebung u_1. Der zugehörende Trägheitsterm ist: $F_T = m\,\ell\,\ddot{u}_1$.

Die allgemeine Lösung erhält man durch einen Produktansatz

$$u = \phi(x) \cdot y(t)$$

Die Funktion y(t) beschreibt eine harmonische Schwingung mit der Eigenkreisfrequenz ω, vgl. Gleichung (1.52). Somit gilt

$$\ddot{u}_1(t) = -\omega^2\,\phi(x)\,y(t) = -\omega^2\,u_1$$

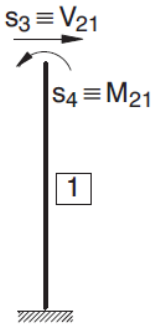
Einsetzen in den Trägheitsterm liefert

$$F_T = -m\,\ell\,\omega^2\,u_1$$

Mit $a^4 = \omega^2 \dfrac{m}{EI}$ folgt als Ersatzsteifigkeit für den Trägheitseffekt auf Grund der Stablängsverschiebung.

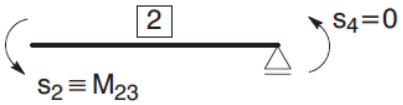
$$K^{1\,\boxed{2}}_{1,starr} = -\ell\,a^4\,EI$$

Die übrigen Anteile ergeben sich aus den dynamischen Steifigkeitsmatrizen für Stab 1



$$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} = \frac{EI}{1 - c\,C} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & (s\,C + c\,S)\,a^3 & s\,S\,a^2 \\ \cdot & \cdot & s\,S\,a^2 & (s\,C - c\,S)\,a \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \rightarrow u_1 \\ \rightarrow u_2 \end{array}$$

und Stab 2



$$\begin{bmatrix} \cdot \\ s_2 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{EI}{1 - c\,C} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & (s\,C - c\,S)\,a & \cdot & (S - s)\,a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & (S - s)\,a & \cdot & (s\,C - c\,S)\,a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \\ 0 \\ d_4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \rightarrow u_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

Aus der letzten Gleichung kann wegen $s_4 = 0$ d_4 in Abhängigkeit von d_2 bestimmt werden und in die Gleichung für s_2 eingesetzt werden. Nach einigen trigonometrischen Umformungen ergibt sich

$$s_2 = \frac{EI\,a}{s\,C - c\,S}\,2\,s\,S\,d_2$$

Damit lauten die Gleichgewichtsbedingungen (Abkürzungen siehe Gleichung (1.56)).

$$
\begin{array}{l}
\text{Starrkörperanteil} \\
V_{21} + N_{23} = 0 \\
M_{21} + M_{23} = 0
\end{array}
\qquad
\underbrace{EI \begin{bmatrix} \dfrac{(s\,C + c\,S)}{1 - c\,C}\,a^3 - \overbrace{\ell\,a^4}^{\text{Starrkörperanteil}} & \dfrac{s\,S\,a^2}{1 - c\,C} \\[2ex] \dfrac{s\,S\,a^2}{1 - c\,C} & \dfrac{(s\,C - c\,S)\,a}{1 - c\,C} + \dfrac{2\,s\,S\,a}{s\,C - c\,S} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{dyn}\ \text{(Rahmen)}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.60}
$$

Es gilt

$$\det \mathbf{K}_{dyn} = 0$$

und die transzendente Gleichung hat deshalb unendlich viele Lösungen. Zu jeder Lösung gehören ein Eigenwert $\lambda = a\,\ell$ und ein Eigenvektor $[u_1\ u_2]^T$. Die beiden niedrigsten Lösungen sind

$$
\begin{array}{llll}
1. & \lambda_1 = 1{,}514 \longrightarrow & \omega_1 = 2{,}293\,\dfrac{1}{\ell^2}\sqrt{\dfrac{EI}{m}} & u_1 = 1 \\
 & & & \longrightarrow u_2 = -\,0{,}836\,\dfrac{1}{\ell} \\
2. & \lambda_2 = 3{,}395 \longrightarrow & \omega_2 = 11{,}53\,\dfrac{1}{\ell^2}\sqrt{\dfrac{EI}{m}} & u_1 = 1 \\
 & & & \longrightarrow u_2 = -\,64{,}01\,\dfrac{1}{\ell} \\
\text{mit:} & \omega_i = \lambda_i^2\,\dfrac{1}{\ell^2}\sqrt{\dfrac{EI}{m}} & &
\end{array}
$$

Die Eigenformen können aus den Randverschiebungen (Eigenvektoren) über die Gleichungen (1.53) und (1.55) bestimmt werden. Sie sind in Abbildung 1.77 dargestellt.

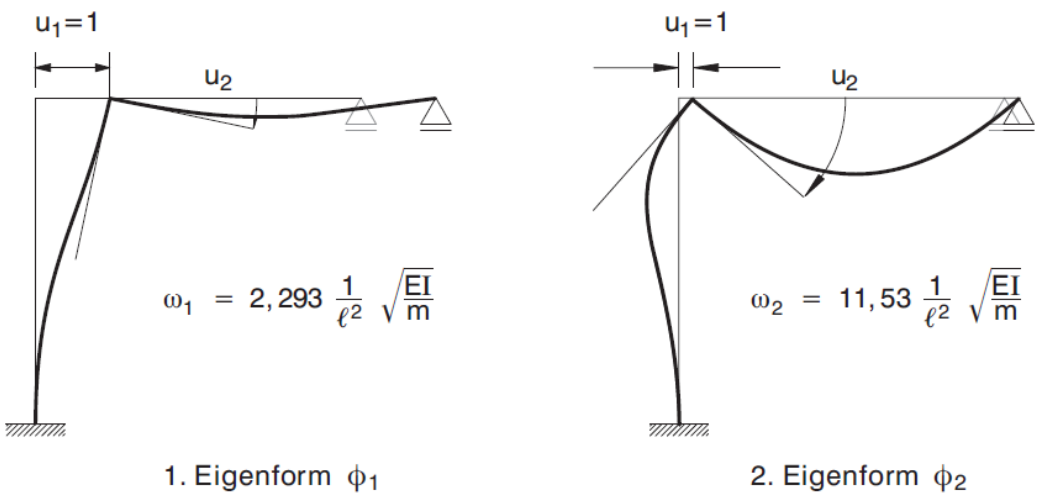


Abb. 1.77: Eigenformen des einhüftigen Rahmens

1.14 Konsistente Massenmethode

1.14.1 Ermittlung konsistenter Massen aus einer Reihenentwicklung

Die transzendenten Funktionen (1.56) der dynamischen Steifigkeitsmatrix (1.59) können in einer Polynomreihe entwickelt werden.

$$s = \sin\lambda = \lambda - \frac{\lambda^3}{6} + \frac{\lambda^5}{120} - \frac{\lambda^7}{5040} + \ldots$$

$$c = \cos\lambda = 1 - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^4}{24} - \frac{\lambda^6}{720} + \ldots$$

$$S = \sinh\lambda = \lambda + \frac{\lambda^3}{6} + \frac{\lambda^5}{120} + \frac{\lambda^7}{5040} + \ldots$$

$$C = \cosh\lambda = 1 + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^4}{24} + \frac{\lambda^6}{720} + \ldots$$

Für die Terme im Nenner gilt

$$1 - c\,C = \frac{\lambda^4}{6} - \frac{\lambda^8}{2520} + \ldots = \frac{\lambda^4}{6}\left(1 - \frac{\lambda^4}{420} + \ldots\right)$$

$$\frac{1}{1 - c\,C} = \frac{6}{\lambda^4}\left(1 + \frac{\lambda^4}{420} + \ldots\right)$$

Damit erhält man z.B. für die erste Komponente der Steifigkeitsmatrix

$$K_{11} = K_{33} = \frac{EI\,\lambda^3}{\ell^3} \cdot \frac{s\,C + c\,S}{1 - c\,C} = \frac{EI\,\lambda^3}{\ell^3} \cdot \frac{6}{\lambda^4}\left(1 + \frac{\lambda^4}{420} + \ldots\right)\left(2\,\lambda - \frac{\lambda^5}{15} - \ldots\right)$$

$$= \frac{EI}{\ell^3}\left(12 - \frac{13}{35}\,\lambda^4 + \ldots\right)$$

Werden sämtliche Reihen näherungsweise nach dem 2. Glied abgebrochen, so folgt:

$$K_{11} = K_{33} = \frac{12\,EI}{\ell^3} - \frac{13}{35}\,m\,\ell\,\omega^2$$

$$K_{22} = K_{44} = \frac{4\,EI}{\ell} - \frac{1}{105}\,m\,\ell^3\,\omega^2$$

$$K_{13} = K_{31} = -\frac{12\,EI}{\ell^3} - \frac{9}{70}\,m\,\ell\,\omega^2$$

$$K_{24} = K_{42} = \frac{2\,EI}{\ell} - \left(-\frac{1}{140}\right) m\,\ell^3\,\omega^2$$

$$K_{12} = K_{21} = -K_{34} = -K_{43} = -\frac{6\,EI}{\ell^2} + \frac{11}{210}\,m\,\ell^2\,\omega^2$$

$$K_{14} = K_{41} = -K_{23} = -K_{32} = -\frac{6\,EI}{\ell^2} + \left(-\frac{13}{420}\right) m\,\ell^2\,\omega^2$$

Damit zerfällt die Matrix $\mathbf{K}_{\mathrm{dyn}}$ in zwei Anteile:

$$\mathbf{K}_{\mathrm{dyn}} \simeq \frac{EI}{\ell}\begin{bmatrix} \frac{12}{\ell^2} & -\frac{6}{\ell} & -\frac{12}{\ell^2} & -\frac{6}{\ell} \\ & 4 & \frac{6}{\ell} & 2 \\ & & \frac{12}{\ell^2} & \frac{6}{\ell} \\ \text{symm.} & & & 4 \end{bmatrix} - \frac{\omega^2\,m\,\ell}{420}\begin{bmatrix} 156 & -22\,\ell & 54 & 13\,\ell \\ & 4\,\ell^2 & -13\,\ell & -3\,\ell^2 \\ & & 156 & 22\,\ell \\ \text{symm.} & & & 4\,\ell^2 \end{bmatrix}$$

Die dynamische Steifigkeitsmatrix kann damit näherungsweise als Differenz der statischen Steifigkeitsmatrix **K** und der mit dem Quadrat der Eigenkreisfrequenz multiplizierten *konsistenten Massenmatrix* **M** ausgedrückt werden.

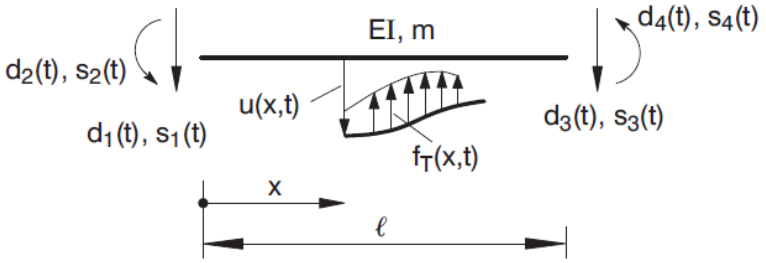
$$\boxed{\mathbf{K}_{dyn} \simeq \mathbf{K} - \omega^2 \ \mathbf{M}} \tag{1.61}$$

$\mathbf{M}$ ist voll besetzt und enthält auch für die Rotationsfreiheitsgrade Massenterme.

Die Aufteilung der dynamischen Steifigkeitsmatrix in die beiden Anteile ist eine Folge der Diskretisierung und kann auch über einen Ansatz im Sinne der Methode der finiten Elemente hergeleitet werden, was im folgenden Abschnitt gezeigt wird.

1.14.2 Konsistente Massenmatrix des Biegestabs über einen Finite-Elemente-Ansatz

Es wird das Prinzip der virtuellen Verschiebungen angewendet, wobei die d'Alembertschen Trägheitskräfte mit berücksichtigt werden. Die Verschiebungen $\mathbf{d}$ und die Schnittgrößen $\mathbf{s}$ werden direkt als zeitlich veränderlich angesetzt.



$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}(t) \qquad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix}(t)$$

Abb. 1.78: Querschwingender Balken mit Randgrößen und Elementverschiebung

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen liefert

$$\delta W = \delta W_i + \delta W_e = -\int_0^\ell M \ \delta\varkappa \ dx - \int_0^\ell f_T \ \delta u \ dx + \delta\mathbf{d}^T \ \mathbf{s} = 0$$

mit

$$M = EI \ \varkappa = -EI \ u'' \ ; \quad f_T = m \ \ddot{u}$$

$$-\int_0^\ell EI \ u'' \ \delta u'' \ dx - \int_0^\ell m \ \ddot{u} \ \delta u \ dx + \delta\mathbf{d}^T \ \mathbf{s} = 0$$

bzw. umgeformt

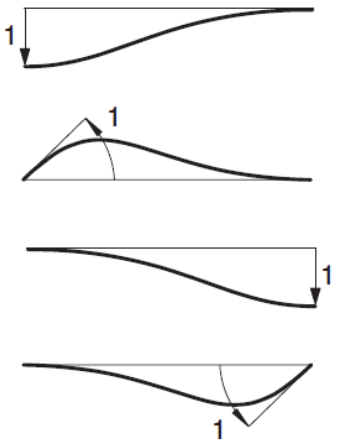
$$-\int_0^\ell \delta u'' \ EI \ u'' \ dx - \int_0^\ell \delta u \ m \ \ddot{u} \ dx + \delta\mathbf{d}^T \ \mathbf{s} = 0 \tag{1.62}$$

Bei der Verschiebung $u(x,t)$ wird für die Verschiebungsform ein kubischer Polynomansatz gewählt, der für den unbelasteten Stab die exakte statische Lösung bei konstanter Biegesteifigkeit darstellt. Die Ansatzfunktionen werden direkt über Einheitsverschiebungszustände (Hermite-Polynome) in Abhängigkeit der Randverschiebungen $d(t)$ formuliert.

$$u(x,t) = [\, H_1(x) \,\vdots\, H_2(x) \,\vdots\, H_3(x) \,\vdots\, H_4(x) \,] \begin{bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \\ d_3(t) \\ d_4(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathbf{H}(x) \cdot \mathbf{d}(t) & \delta u(x,t) &= \delta \mathbf{d}(t)^T \cdot \mathbf{H}^T(x) \\ u''(x,t) &= \mathbf{H}''(x) \cdot \mathbf{d}(t) & \delta u''(x,t) &= \delta \mathbf{d}(t)^T \cdot \mathbf{H}''^T(x) \\ \ddot{u}(x,t) &= \mathbf{H}(x) \cdot \ddot{\mathbf{d}}(t) \end{aligned} \tag{1.63}$$

Die Ansatzfunktionen sind in Abbildung 1.79 gegeben.



$$H_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3$$

$$H_2(x) = -x\left(\frac{x}{\ell} - 1\right)^2$$

$$H_3(x) = 3\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3$$

$$H_4(x) = \frac{x^2}{\ell}\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)$$

Abb. 1.79: Ansatzfunktionen

(1.63) eingesetzt in (1.62) ergibt mit $\mathbf{H}''(x) = \mathbf{B}(x)$:

$$-\,\delta\mathbf{d}^T \int_0^\ell \mathbf{B}^T\, EI\, \mathbf{B}\, dx\, \mathbf{d} - \delta\mathbf{d}^T \int_0^\ell \mathbf{H}^T\, m\, \mathbf{H}\, dx\, \ddot{\mathbf{d}} + \delta\mathbf{d}^T\, \mathbf{s} = 0$$

bzw.

$$\delta\mathbf{d}^T \left[\int_0^\ell \mathbf{B}^T\, EI\, \mathbf{B}\, dx\, \mathbf{d} + \int_0^\ell \mathbf{H}^T\, m\, \mathbf{H}\, dx\, \ddot{\mathbf{d}} - \mathbf{s} \right] = 0$$

Der Ausdruck in der Klammer muss verschwinden.

Die Bewegungsgleichung (1.48) für den Sonderfall ungedämpfter Systeme, bezogen auf die Stabendverschiebungen, lautet

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\,\mathbf{d} = \mathbf{s}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt die elastische Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ und die zugehörige (konsistente) Massenmatrix $\mathbf{M}$.

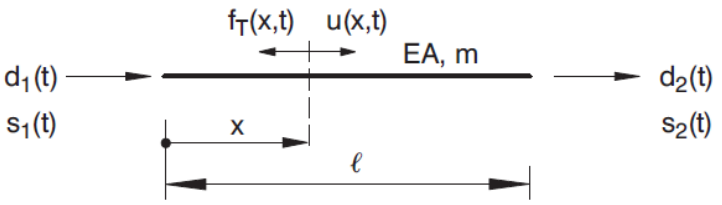
$$\mathbf{K} = EI \int_0^{\ell} \mathbf{B}^T \mathbf{B}\, dx = \frac{EI}{\ell} \begin{bmatrix} \frac{12}{\ell^2} & -\frac{6}{\ell} & -\frac{12}{\ell^2} & -\frac{6}{\ell} \\ & 4 & \frac{6}{\ell} & 2 \\ & & \frac{12}{\ell^2} & \frac{6}{\ell} \\ & \text{symm.} & & 4 \end{bmatrix} \tag{1.64}$$

$$\mathbf{M} = m \int_0^{\ell} \mathbf{H}^T \mathbf{H}\, dx = \frac{m\,\ell}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22\,\ell & 54 & 13\,\ell \\ & 4\,\ell^2 & -13\,\ell & -3\,\ell \\ & & 156 & 22\,\ell \\ & \text{symm.} & & 4\,\ell^2 \end{bmatrix} \tag{1.65}$$

Wird in Gleichung (1.62) eine verteilte viskose Dämpfung c mit $f_d = c\,\dot{u}$ berücksichtigt, ergibt sich für die Dämpfungsmatrix $\mathbf{C}$ eine zu $\mathbf{M}$ analoge Matrix, in der m durch c ersetzt ist.

$$\mathbf{C} = c \int_0^{\ell} \mathbf{H}^T \mathbf{H}\, dx = \frac{c}{m}\, \mathbf{M} \tag{1.66}$$

1.14.3 Die konsistente Massenmatrix des Fachwerkstabs



$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}(t) \qquad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}(t)$$

Abb. 1.80: Längsschwingender Stab mit Randgrößen und Elementverschiebung

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen ergibt:

$$\delta W_i + \delta W_e = -\int_0^{\ell} N\, \delta\epsilon\, dx - \int_0^{\ell} f_T\, \delta u\, dx + \delta \mathbf{d}^T \mathbf{s} = 0$$

mit: $N = EA\, u'$, $f_T = m\, \ddot{u}$

$$-\int_0^{\ell} EA\, u'\, \delta u'\, dx - \int_0^{\ell} m\, \ddot{u}\, \delta u\, dx + \delta \mathbf{d}^T \mathbf{s} = 0 \tag{1.67}$$

Ansatz:

$$u(x,t) = [\, H_1(x) \,\vdots\, H_2(x) \,] \begin{bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{H}(x)\, \mathbf{d}(t)$$

Ansatzfunktionen:

$$H_1(x) = \frac{\ell - x}{\ell} \quad 1 \qquad\qquad H_2(x) = \frac{x}{\ell} \quad 1 \tag{1.68}$$

Eingesetzt in (1.67)

$$-\,\delta\mathbf{d}^T \int_0^\ell \mathbf{H}'^T\,\mathrm{EA}\,\mathbf{H}'\,\mathrm{dx}\;\mathbf{d} - \delta\mathbf{d}^T \int_0^\ell \mathbf{H}^T\,\mathrm{m}\,\mathbf{H}\,\mathrm{dx}\;\ddot{\mathbf{d}} + \delta\mathbf{d}^T\,\mathbf{s} = 0$$

Umformen und Vergleich mit (1.48) liefert

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} &= \mathrm{EA}\int_0^\ell \mathbf{H}'^T\,\mathbf{H}'\,\mathrm{dx} = \frac{\mathrm{EA}}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{M} &= \mathrm{m}\int_0^\ell \mathbf{H}^T\,\mathbf{H}\,\mathrm{dx} = \frac{\mathrm{m}\,\ell}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1.69}$$

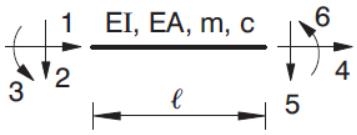
Bei verteilter Dämpfung c analog wie oben:

$$\mathbf{C} = \mathrm{c}\int_0^\ell \mathbf{H}^T\,\mathbf{H}\,\mathrm{dx} = \frac{\mathrm{c}\,\ell}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1.14.4 Vollständige konsistente Massenmatrix des Balkens

Die entkoppelten Matrizen der Abschnitte 1.14.2 und 1.14.3 können zu einer Matrix zusammengefasst werden.

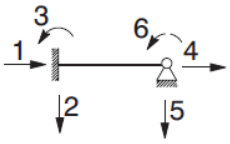
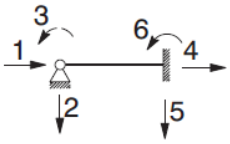
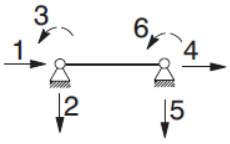
$$\mathbf{K} = \frac{\mathrm{EI}}{\ell}\begin{bmatrix}
\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{EI}} & 0 & 0 & -\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{EI}} & 0 & 0 \\
 & \frac{12}{\ell^2} & -\frac{6}{\ell} & 0 & -\frac{12}{\ell^2} & -\frac{6}{\ell} \\
 & & 4 & 0 & \frac{6}{\ell} & 2 \\
 & & & \frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{EI}} & 0 & 0 \\
 & \text{symm.} & & & \frac{12}{\ell^2} & \frac{6}{\ell} \\
 & & & & & 4
\end{bmatrix}$$



$$\mathbf{M} = \frac{\mathrm{m}\,\ell}{420}\begin{bmatrix}
140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\
 & 156 & -22\,\ell & 0 & 54 & 13\,\ell \\
 & & 4\,\ell^2 & 0 & -13\,\ell & -3\,\ell^2 \\
 & & & 140 & 0 & 0 \\
 & \text{symm.} & & & 156 & 22\,\ell \\
 & & & & & 4\,\ell^2
\end{bmatrix} \tag{1.70}$$

$$\mathbf{C} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{m}}\,\mathbf{M}$$

Aus diesen Matrizen können durch statische Kondensation der dynamischen Steifigkeitsmatrix die entsprechenden Matrizen der anderen Grundelemente hergeleitet werden (Tabelle 1.6). Die Ergebnisse werden im Folgenden angegeben, ohne näher auf das Verfahren einzugehen.

Element	K	M
	$\frac{EI}{\ell}\begin{bmatrix} \frac{EA}{EI} & 0 & 0 & -\frac{EA}{EI} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{\ell^2} & -\frac{3}{\ell} & 0 & -\frac{3}{\ell^2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{\ell} & 3 & 0 & \frac{3}{\ell} & 0 \\ -\frac{EA}{EI} & 0 & 0 & \frac{EA}{EI} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{\ell^2} & \frac{3}{\ell} & 0 & \frac{3}{\ell^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{m\,\ell}{420}\begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 204 & -36\,\ell & 0 & 58,5 & 0 \\ 0 & -36\,\ell & 8\,\ell^2 & 0 & -16,5\ell & 0 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 58,5 & -16,5\,\ell & 0 & 99 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
	$\frac{EI}{\ell}\begin{bmatrix} \frac{EA}{EI} & 0 & 0 & -\frac{EA}{EI} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{\ell^2} & 0 & 0 & -\frac{3}{\ell^2} & -\frac{3}{\ell} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{EI} & 0 & 0 & \frac{EA}{EI} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{\ell^2} & 0 & 0 & \frac{3}{\ell^2} & \frac{3}{\ell} \\ 0 & -\frac{3}{\ell} & 0 & 0 & \frac{3}{\ell} & 3 \end{bmatrix}$	$\frac{m\,\ell}{420}\begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 99 & 0 & 0 & 58,5 & 16,5\,\ell \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 58,5 & 0 & 0 & 204 & 36\,\ell \\ 0 & 16,5\,\ell & 0 & 0 & 36\,\ell & 8\,\ell^2 \end{bmatrix}$
	$\frac{EI}{\ell}\begin{bmatrix} \frac{EA}{EI} & 0 & 0 & -\frac{EA}{EI} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{EI} & 0 & 0 & \frac{EA}{EI} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{m\,\ell}{420}\begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 140 & 0 & 0 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 70 & 0 & 0 & 140 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{K}_{dyn} = \mathbf{K} - \omega^2\,\mathbf{M}$$

Tab. 1.6: Steifigkeits- und konsistente Massenmatrizen der Grundelemente II und III

Als Zahlenbeispiel betrachten wir den einhüftigen Rahmen von Seite 66. Abbildung 1.81 zeigt das System mit Freiheitsgraden und der Zuordnungsmatrix.

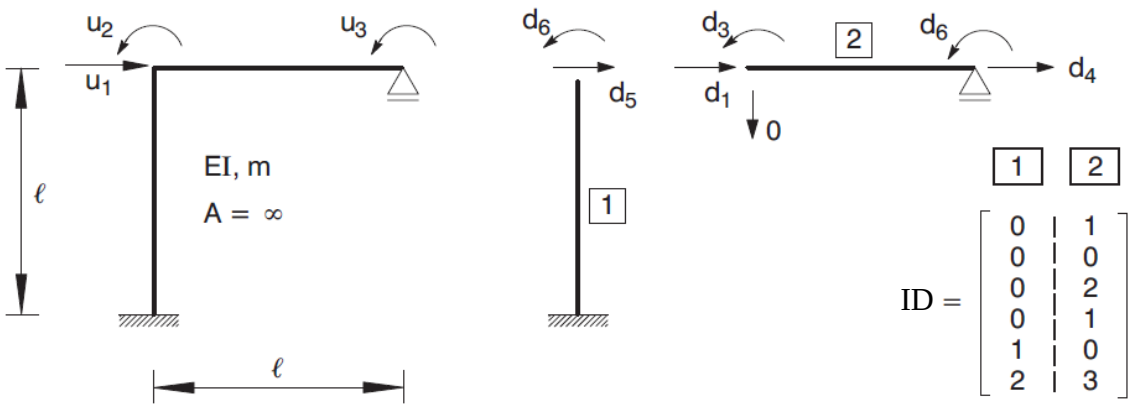


Abb. 1.81: Rahmen des Beispiels von Seite 66 mit Zuordnungsmatrix

Steifigkeits- und Massenmatrix des Gesamtsystems sind

Starrkörperverschiebung:
2 (140 + 70) aus Element 2

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{\ell^3}\begin{bmatrix} 12 & 6\,\ell & & 0 \\ 6\,\ell & 4\,\ell^2 + 4\,\ell^2 & 2\ell^2 & \\ & 2\ell^2 & 4\ell^2 & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M} = \frac{m\,\ell}{420}\begin{bmatrix} 156 + 420 & 22\,\ell & & 0 \\ 22\,\ell & 4\,\ell^2 + 4\,\ell^2 & -3\ell^2 & \\ & -3\ell^2 & 4\ell^2 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

Die homogene Bewegungsgleichung $\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\,\mathbf{u} = \mathbf{0}$ führt auf ein Eigenwertproblem mit folgenden Ergebnissen:

$$\omega_1 = 2{,}293\,\frac{1}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} \qquad \text{Fehler: } 0\,\%$$

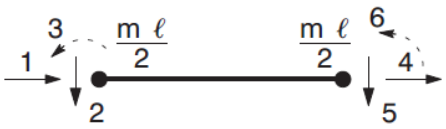
$$\omega_2 = 13{,}35\,\frac{1}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} \qquad \text{Fehler: } 16\,\%$$

exakt 11,53 (Beispiel Seite 66)

1.15 Konzentrierte Massenmethode

Vernachlässigt man in der Massenmatrix die mit den Rotationsfreiheitsgraden d_3, d_6 verbundenen Terme und schreibt die verbleibenden Nebendiagonalglieder zu den zugehörenden Hauptdiagonalgliedern, erhält man die *konzentrierte Massenmatrix* (lumped mass):

$$\mathbf{M}_L = \frac{m\,\ell}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



(1.71)

Das heißt, die verteilten Massen werden jeweils zur Hälfte an den Stabenden zusammengefasst (engl. *lumped*) und sowohl den Quer- als auch den Längsverschiebungen zugewiesen.

Damit sind folgende Eigenschaften verbunden:

- Die wesentlichen dynamischen Effekte sind enthalten.
- Eine Verfeinerung der Elementteilung führt zu einer Annäherung an die exakte Lösung.
- Die in der Massenmatrix unbesetzten Freiheitsgrade können aus der Steifigkeitsmatrix vorab eliminiert und somit das Problem reduziert werden (statische Kondensation).
- Die Massenmatrix ist meist diagonal, wodurch die weitere Lösung deutlich vereinfacht wird.

Die Methode der konzentrierten Massen ist in vielen Programmen zur dynamischen Berechnung implementiert. Sie ist auch gut für Handrechnungen geeignet, da die Elimination der massefreien Rotationsfreiheitsgrade durch die statische Kondensation auf verkleinerte Gleichungssysteme führt.

Die Massenmatrix ist bei der Methode der zusammengefassten Massen meist eine Diagonalmatrix. Ist die Geometrie des Systems jedoch nicht orthogonal und werden Dehn- und Biegesteifigkeiten einzelner Tragwerksteile mit der Größe ∞ angenommen, so können sich auch Nebendiagonalterme ungleich Null ergeben.

Statische Gewichtslasten (z.B. Nutzlasten) müssen in äquivalente Massen umgerechnet und bei der Ermittlung der Massenmatrix berücksichtigt werden.

$$M = \frac{F}{g} \quad \text{bzw.} \quad m = \frac{p}{g}\,, \quad g = 9,81\,\mathrm{m/s^2} \quad \text{Erdbeschleunigung}$$

Abbildung 1.82 zeigt das bekannte Beispiel eines einhüftigen Rahmens. Auf der rechten Seite sind die konzentrierten Massen dargestellt.

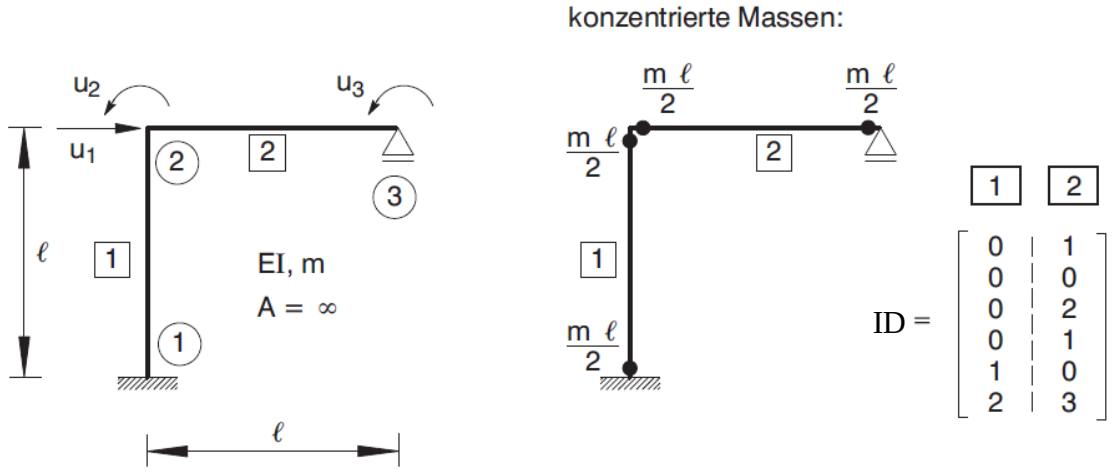


Abb. 1.82: Rahmen mit konzentrierten Massen

Mit den Zahlenwerten für die konzentrierten Massen

$$m_{11} = \frac{m\,\ell}{2}^{\boxed{1}} + \left[\frac{m\,\ell}{2} + \frac{m\,\ell}{2}\right]^{\boxed{2}} = \frac{3}{2}\,m\,\ell$$

ergeben sich die Steifigkeits- und Massenmatrix.

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{\ell^3}\left[\begin{array}{c|cc} 12 & 6\,\ell & 0 \\ \hline 6\,\ell & 8\,\ell^2 & 2\,\ell^2 \\ 0 & 2\,\ell^2 & 4\,\ell^2 \end{array}\right] \qquad \mathbf{M} = m\,\ell\left[\begin{array}{c|cc} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Statische Kondensation

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 8\,\ell^2 & 2\,\ell^2 \\ 2\,\ell^2 & 4\,\ell^3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 6\,\ell \\ 0 \end{bmatrix} u_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{3}{7\,\ell}\,u_1$$

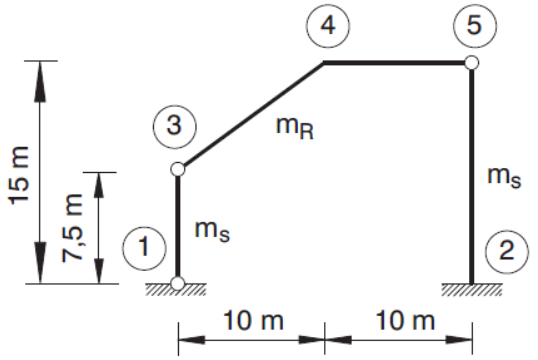
$$\rightarrow \mathbf{K}_{red} = \frac{48}{7}\cdot\frac{EI}{\ell^3}\,; \qquad \mathbf{M}_{red} = \frac{3}{2}\,m\,\ell$$

reduziert das Problem auf ein System mit einem Freiheitsgrad.

Eigenkreisfrequenz: $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{48\cdot 2}{7\cdot 3}}\cdot\frac{1}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} = 2{,}138\cdot\frac{1}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$

Fehler: 6,7 % exakt 2,293

Bei nicht orthogonalen Systemen (d.h. wenn „schräge“ Stäbe enthalten sind) entstehen durch die Koordinatentransformation der Elementmassenmatrix auch Nebendiagonalterme. Die praktische Ermittlung der Massenmatrix in solchen Fällen wird anhand des in Abbildung 1.83 dargestellten Systems demonstriert.



$EI = 1\cdot 10^7\ \text{kNm}^2$

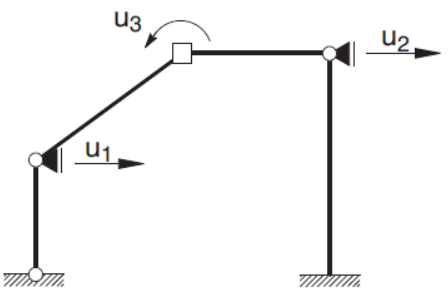
$EA = \infty$

$m_R = 400\ \text{kg/m}$

$m_S = 80\ \text{kg/m}$

Abb. 1.83: Rahmen mit schrägem Stab

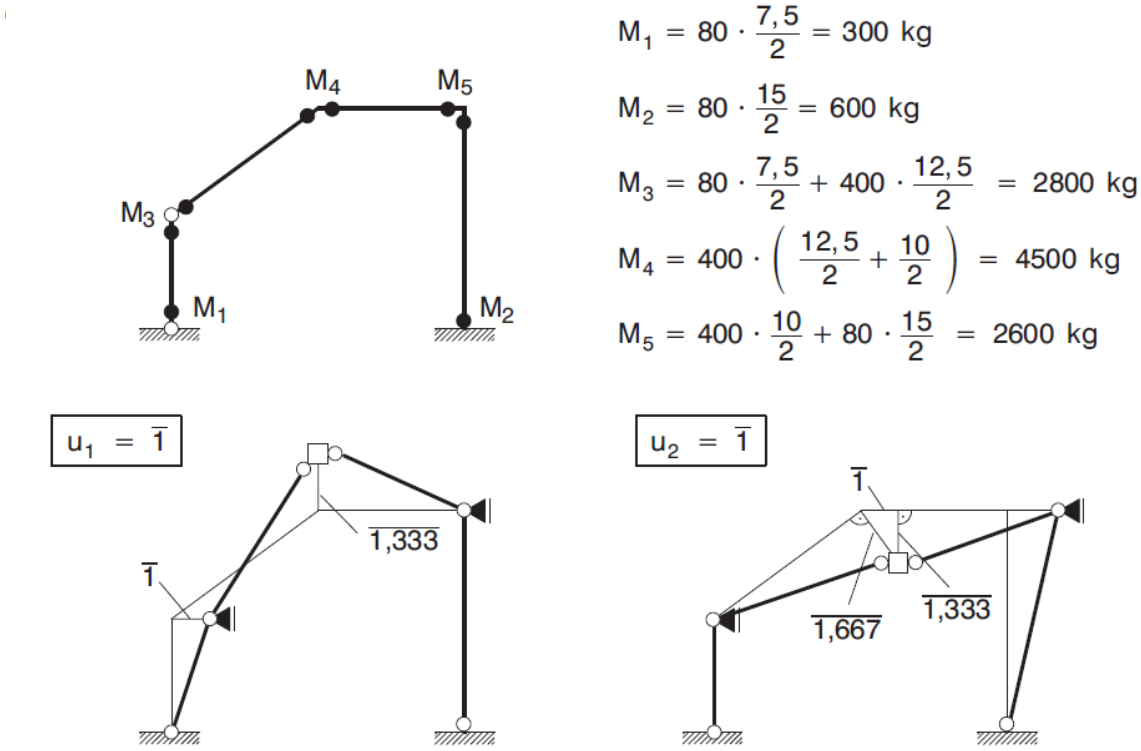
Unter der Annahme, dass die Stäbe dehnstarr sind, hat das System drei unabhängige Freiheitsgrade. Abbildung 1.84 zeigt das geometrisch bestimmte Grundsystem.



Steifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 9{,}595 & -9{,}595 & -7{,}998 \\ & 10{,}484 & 7{,}998 \\ & & 540 \end{bmatrix}\cdot 10^4$$

Abb. 1.84: Rahmen mit schrägem Stab, geometrisch bestimmtes Grundsystem



$$M_1 = 80 \cdot \frac{7,5}{2} = 300 \text{ kg}$$

$$M_2 = 80 \cdot \frac{15}{2} = 600 \text{ kg}$$

$$M_3 = 80 \cdot \frac{7,5}{2} + 400 \cdot \frac{12,5}{2} = 2800 \text{ kg}$$

$$M_4 = 400 \cdot \left(\frac{12,5}{2} + \frac{10}{2} \right) = 4500 \text{ kg}$$

$$M_5 = 400 \cdot \frac{10}{2} + 80 \cdot \frac{15}{2} = 2600 \text{ kg}$$

Abb. 1.85: Rahmen schrägem Stab, diskrete Massen und virtuelle Verschiebungszustände

Neben den virtuellen Verschiebungsfiguren in Abbildung 1.85 werden zur Ermittlung der Massenmatrix die wirklichen Beschleunigungsfiguren benötigt (Abbildung 1.86).

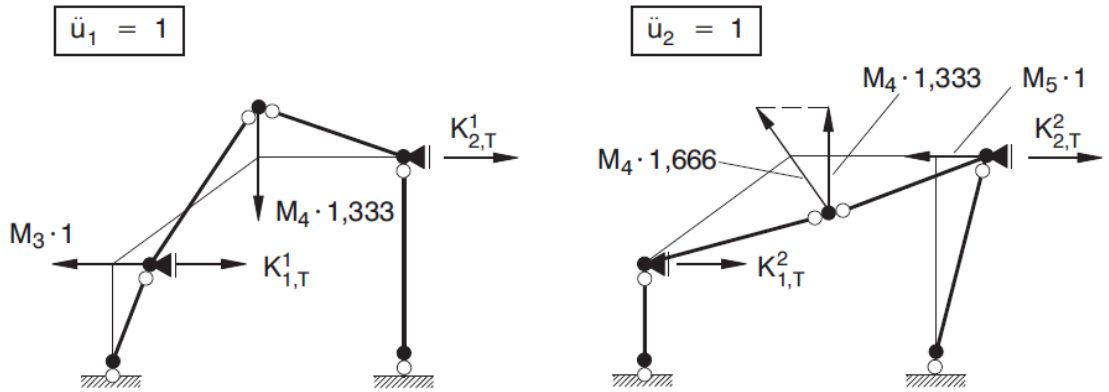


Abb. 1.86: Rahmen mit schrägem Stab, wirkliche Beschleunigungsfiguren

Massenmatrix:

$$M_{11} = K^1_{1,T} = 2800 \cdot 1^2 + 4500 \cdot 1,333^2 = 10800 \text{ kg} = 10,8 \text{ kN} \frac{s^2}{m}$$

$$M_{21} = K^1_{2,T} = -(4500 \cdot 1,333) \cdot 1,333 = -8000 \text{ kg} = -8 \text{ kN} \frac{s^2}{m}$$

$$M_{12} = K^2_{1,T} = -(4500 \cdot 1,333) \cdot 1,333 = -8000 \text{ kg} = -8 \text{ kN} \frac{s^2}{m}$$

$$M_{22} = K^2_{2,T} = 4500 \cdot 1,667^2 + 2600 \cdot 1^2 = 15100 \text{ kg} = 15,1 \text{ kN} \frac{s^2}{m}$$

$$M_{3i} = 0 \quad \text{(massefreier Rotationsfreiheitsgrad)}$$

Bewegungsgleichung:

$$\begin{bmatrix} 10,8 & -8 & 0 \\ -8 & 15,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{bmatrix} + 10^4 \begin{bmatrix} 9,595 & -9,595 & -7,998 \\ -9,595 & 10,484 & 7,998 \\ -7,998 & 7,998 & 540 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Statische Kondensation:

$$10^4 \cdot \begin{bmatrix} 9,595 & -9,595 \\ -9,595 & 10,484 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} -7,998 \\ 7,998 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{540} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7,998 & 7,998 \end{bmatrix} \cdot 10^4}_{\begin{bmatrix} 0,118 & -0,118 \\ -0,118 & 0,118 \end{bmatrix} \cdot 10^4} = \mathbf{K}_{red}$$

Reduzierte Bewegungsgleichung:

$$\begin{bmatrix} 10,8 & -8 \\ -8 & 15,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + 10^4 \begin{bmatrix} 9,477 & -9,477 \\ -9,477 & 10,366 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{red} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{red} + \mathbf{K}_{red} \cdot \mathbf{u}_{red} = \mathbf{0}$$

1.16 Systeme mit mehreren Freiheitsgraden, Zusammenfassung

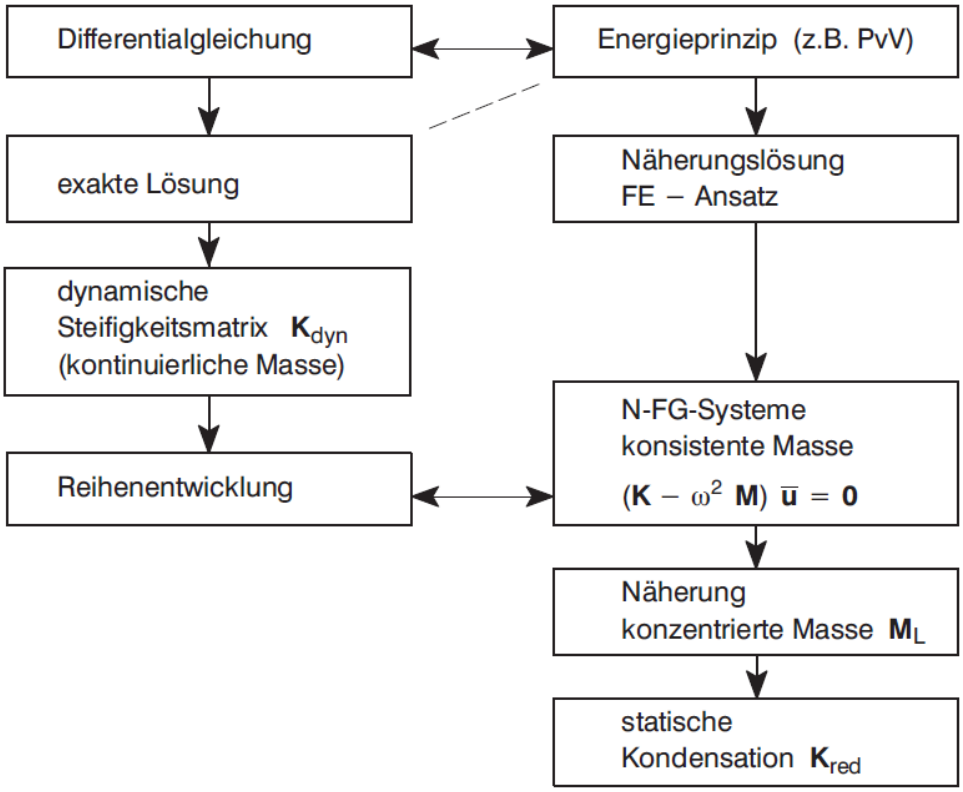


Abb. 1.87: Dynamische Berechnung von Systemen mit mehreren Freiheitsgraden

Der Anwendungsbereich der Lösung mittels Verschiebungsansatz ist im Wesentlichen auf einfache Systeme mit überschaubaren Eigenformen begrenzt. Hier lassen sich die Eigenwerte bzw. Zeitverläufe einfach ermitteln. Die Methode stößt an ihre Grenze, sobald sich Integrale ergeben, die nur noch numerisch lösbar sind.

Die analytische Lösung für Stäbe liegt zwar mit dem Verfahren von Kolonsek (siehe Literatur) in praktikabler Form vor, aber ihre Bedeutung ist wesentlich geringer als die der diskreten Verfahren.

Die konsistente Massenmatrix kann entweder mittels Reihenentwicklung aus der exakten Lösung oder für ein finites Element direkt aus dem Arbeitssatz erhalten werden. Das kontinuierliche System wird damit in ein Mehrmassensystem überführt.

In diesem Zusammenhang stellt die konzentrierte Massenmatrix eine weitere Näherungsstufe dar. Hierbei ist häufig eine Vereinfachung der Rechnung durch statische Kondensation möglich. Auf beide Vorgehensweisen – konsistente und konzentrierte Massenmatrix – können die numerischen Lösungsverfahren angewandt werden; die Rechengenauigkeit ist über die Diskretisierung steuerbar. Dies sind Gründe dafür, dass beide Methoden, insbesondere im Rahmen der Methode der finiten Elemente, häufig angewandt werden.

In den folgenden Abschnitten werden die konsistente bzw. konzentrierte Massenmatrix in der Matrizenformulierung (siehe Abschnitt 1.14 und 1.15) verwendet.

Das Diagramm in Abbildung 1.87 gibt einen Überblick über die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Methoden.

1.17 Formulierung von freien Schwingungen als Eigenwertproblem

Die Differentialgleichung für die freie Schwingung eines Systems führt auf ein Eigenwertproblem, das die Eigenfrequenzen (Eigenwerte) und die Eigenschwingungsformen (Eigenvektoren) der Struktur liefert. Beide Größen charakterisieren die Schwingungseigenschaft des Systems und erlauben eine Beurteilung der Wirkung einer bestimmten Erregung auf ein Tragwerk (Verhältnis: Erregerfrequenz/Eigenfrequenz). Ihre Kenntnis bildet die Grundlage für weitere Verfahren (z.B. modale Analyse, Antwortspektrenverfahren).

1.17.1 Ungedämpftes System

In der allgemeinen Bewegungsgleichung (1.48) ist der Sonderfall der linearen, ungedämpften Schwingung enthalten:

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\,\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{1.72}$$

Wie bei einem kontinuierlichen System mit einem Freiheitsgrad wird eine Variablentrennung durch einen Produktansatz (vgl. Gleichung (1.42)) durchgeführt. und für die Zeitabhängigkeit der Eigenschwingung der harmonischen Funktion angenommen.

$$\mathbf{u}(x,t) = \bar{\mathbf{u}}(x)\ (A \sin \omega t + B \cos \omega t) \tag{1.73}$$

Die Schwingungsform wird mit $\bar{u}(x)$ bezeichnet; sie wird später zu $\Phi(x)$ normiert. Damit folgt aus (1.72)

$$-\omega^2\ \mathbf{M}\ \bar{\mathbf{u}}\ (A \sin \omega t + B \cos \omega t) + \mathbf{K}\ \bar{\mathbf{u}}\ (A \sin \omega t + B \cos \omega t) = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{K} - \omega^2\ \mathbf{M})\ \bar{\mathbf{u}}\ (A \sin \omega t + B \cos \omega t) = \mathbf{0}$$

Da diese Gleichung für alle Zeitpunkte t gelten muss, folgt daraus

$$(\mathbf{K} - \omega^2\ \mathbf{M})\ \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \tag{1.74}$$

Nicht triviale Lösungen für Gleichung (1.74) ergeben sich nur, wenn die Determinante des Gleichungssystems verschwindet.

$$\rightarrow \quad \det\ (\mathbf{K} - \lambda\ \mathbf{M}) = 0 \qquad \text{mit: } \lambda = \omega^2 \tag{1.75}$$

Für ein System von n Gleichungen (n Freiheitsgraden) existieren n Eigenwerte λ_i. Sie sind die Nullstellen des *charakteristischen Polynoms* des Eigenwertproblems, das sich aus dem Ausdruck für die Determinante in Abhängigkeit λ von ergibt. Damit sind die n Eigenkreisfrequenzen ω_i

$$\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$$

bzw. die Eigenfrequenzen

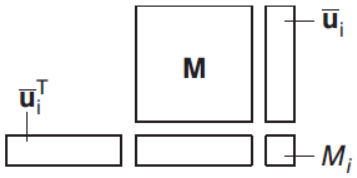
$$f_i = \frac{1}{T_i} = \frac{\omega_i}{2\,\pi}$$

Mit den bekannten Eigenwerten λ_i ergibt sich aus Gleichung (1.74) zu jedem λ_i eine Eigenschwingungsform $\bar{\mathbf{u}}_i$. Die Amplituden der Eigenformen sind zunächst noch unbestimmt. Gelegentlich wird der größte Wert des Vektors $\bar{\mathbf{u}}_i$ zu 1 gesetzt ($\bar{u}_{i,max} = 1$). Dies entspricht einer Normierung der Eigenform bezüglich der größten Ordinate. Der normierte Eigenvektor ist dann

$$\phi_i = \frac{1}{\bar{u}_{i,max}}\,\bar{\mathbf{u}}_i \tag{1.76}$$

Häufig wird auch eine Normierung bezüglich der Massenmatrix vorgenommen. Dabei errechnet sich der Faktor, die „modale Masse“, wie folgt:

$$\bar{\mathbf{u}}_i^T\,\mathbf{M}\,\bar{\mathbf{u}}_i = M_i \tag{1.77}$$



Der normierte Eigenvektor ist dann:

$$\phi_i = \bar{\mathbf{u}}_i\,\frac{1}{\sqrt{M_i}} \tag{1.78}$$

Daraus folgt

$$\phi_i^T\,\mathbf{M}\,\phi_i = 1 \tag{1.79}$$

Das Eigenwertproblem (1.74) lässt sich damit folgendermaßen darstellen:

$$\mathbf{K}\,\phi_i = \lambda_i\,\mathbf{M}\,\phi_i \tag{1.80}$$

Alle n Eigenvektoren ϕ_i werden in der Modalmatrix Φ

$$\mathbf{\Phi} = [\,\phi_1\,,\ \phi_2\ \dots\ \phi_n\,] \tag{1.81}$$

und alle Eigenwerte in einer Diagonalmatrix Λ zusammengefasst, somit gilt:

$$\mathbf{K}\,\mathbf{\Phi} = \mathbf{M}\,\mathbf{\Phi}\,\mathbf{\Lambda} \tag{1.82}$$

Mit den Eigenwerten und –formen folgt für die Schwingung in der i-ten Eigenform:

$$\mathbf{u}_i(t) = \begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ \vdots \\ u_{ni} \end{bmatrix} = \phi_i\,(A_i\,\sin\omega_i t + B_i\,\cos\omega_i t)$$

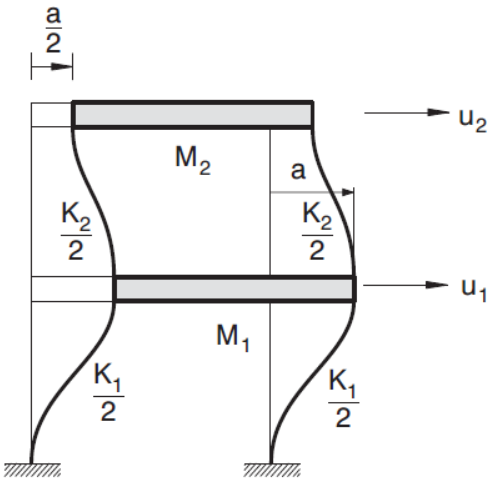
Die gesamte freie Schwingung erhält man aus der Überlagerung aller Eigenformen:

$$\boxed{\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \, (A_i \sin \omega_i t + B_i \cos \omega_i t)} \tag{1.83}$$

Die 2n Konstanten $A_1, B_1, \ldots, A_n, B_n$ werden aus den 2n Anfangsbedingungen $u_{k,0}$ und $\dot{u}_{k,0}$ bestimmt.

1.17.2 Zahlenbeispiel: Rahmen mit Anfangsverformung

Ein zweistöckiger Rahmen wird wie in Abbildung 1.88 dargestellt ausgelenkt und ist anfangs in Ruhe.



$$M_1 = M_2 = M = 10 \ \frac{kN\,s^2}{m}$$

$$K_1 = K_2 = K = 10^4 \ \frac{kN}{m}$$

Anfangsbedingungen:

$$u_1(0) = a \qquad \dot{u}_1(0) = 0$$

$$u_2(0) = \frac{a}{2} \qquad \dot{u}_2(0) = 0$$

Abb. 1.88: Rahmen mit Anfangsverformung

Frei Schwingung, Gleichung (1.72):

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^4 & -10^4 \\ -10^4 & 10^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eigenwertproblem (1.74):

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot 10^4 - \omega^2 \cdot 10 & -10^4 \\ -10^4 & 10^4 - \omega^2 \cdot 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Frequenzgleichung:

$$\det(\mathbf{K} - \lambda \, \mathbf{M}) = 10^2 \, [\, (2 \cdot 10^3 - \lambda)\,(10^3 - \lambda) - 10^6 \,] = 0$$

$$\rightarrow \quad 10^6 - 3 \cdot 10^3 \cdot \lambda + \lambda^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(3 \cdot 10^3 \pm \sqrt{9 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^6} \right)$$

$$\lambda_1 = 382 \quad , \qquad \lambda_2 = 2618$$

Eigenkreisfrequenzen und Eigenfrequenzen:

$$\omega_1 = \sqrt{382} = 19{,}54 \ \text{rad/s} \qquad f_1 = \frac{\omega_1}{2\,\pi} = 3{,}1 \ \text{Hz}$$

$$\omega_2 = \sqrt{2618} = 51{,}17 \ \text{rad/s} \qquad f_2 = \frac{\omega_2}{2\,\pi} = 8{,}1 \ \text{Hz}$$

Die Eigenformen ergeben sich aus (1.74) mit ω_i bzw. λ_i. $\bar{u}_{1i}$ wird zu 1 gesetzt.

$$10 \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^3 - \lambda_i & -10^3 \\ -10^3 & 10^3 - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{u}_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(2 \cdot 10^3 - \lambda_i) - 10^3 \cdot \bar{u}_{2i} = 0 \rightarrow \quad \bar{u}_{2i} = 2 - \frac{\lambda_i}{10^3}$$

$$\bar{u}_{21} = 2 - \frac{382}{1000} = 1,618 \quad ; \qquad \bar{u}_{22} = 2 - \frac{2618}{1000} = -0,618$$

$$\bar{\mathbf{u}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,618 \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{\mathbf{u}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,618 \end{bmatrix}$$

Normierung bezüglich der maximalen Ordinate:

$$\phi_1 = \frac{1}{1,618}\,\bar{u}_1 = \frac{1}{1,618} \begin{bmatrix} 1 \\ 1,618 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \phi_1 = \begin{bmatrix} 0,618 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \phi_2 = \bar{\mathbf{u}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,618 \end{bmatrix}$$

Die Eigenschwingungsformen sind in Abbildung 1.89 grafisch dargestellt.

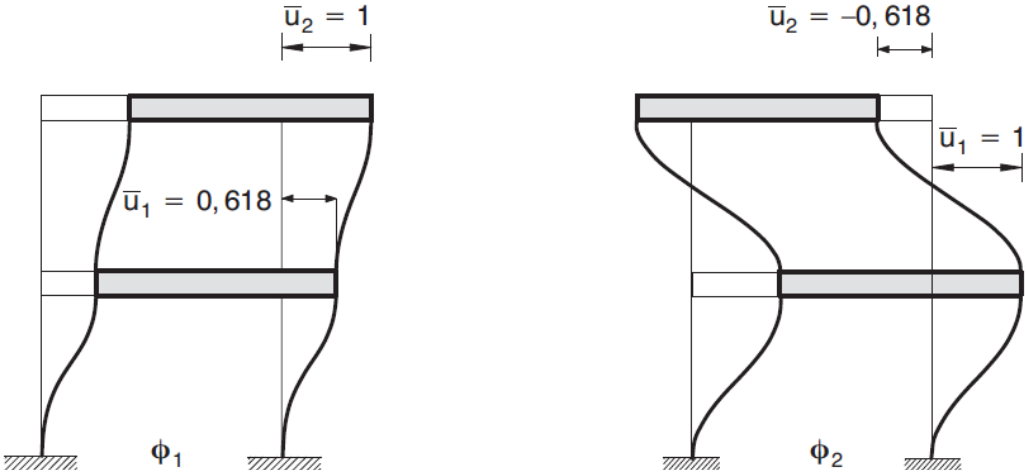


Abb. 1.89: Eigenschwingungsformen

Für eine Normierung bezüglicher Massenmatrix erhält man

$$M_1 = \bar{\mathbf{u}}_1^T\,\mathbf{M}\,\bar{\mathbf{u}}_1 = [\,1 \quad 1,618\,] \begin{bmatrix} 10 & \\ & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1,618 \end{bmatrix} = 36,18$$

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{36,18}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1,618 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,166 \\ 0,269 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \bar{\mathbf{u}}_2^T\,\mathbf{M}\,\bar{\mathbf{u}}_2 = [\,1 \quad -0,618\,] \begin{bmatrix} 10 & \\ & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0,618 \end{bmatrix} = 13,82$$

$$\phi_2 = \frac{1}{\sqrt{13,82}} \begin{bmatrix} 1 \\ -0,618 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,269 \\ -0,166 \end{bmatrix}$$

Auf die *Form* der Eigenschwingung (Abbildung 1.89) hat die Art der Normierung keinen Einfluss.

Die gesamte freie Schwingung ergibt sich nach Gleichung (1.83) aus der Überlagerung aller Eigenformen

$$\mathbf{u}(t) = \phi_1 \left(A_1 \sin \omega_1 t + B_1 \cos \omega_1 t \right) + \phi_2 \left(A_2 \sin \omega_2 t + B_2 \cos \omega_2 t \right)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \omega_1 \phi_1 \left(A_1 \cos \omega_1 t - B_1 \sin \omega_1 t \right) + \omega_2 \phi_2 \left(A_2 \cos \omega_2 t - B_2 \sin \omega_2 t \right)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{0} \qquad \mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} a \\ 0,5\ a \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\dot{\mathbf{u}}(0) = \omega_1 \phi_1 A_1 + \omega_2 \phi_2 A_2 = \mathbf{0}$$

Da Φ_1 und Φ_2 orthogonal sind kann die erste Bedingung nur erfüllt werden, wenn beide Konstanten Null sind, $A_1 = A_2 = 0$.

Aus der zweiten Anfangsbedingung folgt

B_i Anteile von ϕ_i im Anfangsvektor $\mathbf{u}$ (0)

$$\mathbf{u}(0) = \phi_1 B_1 + \phi_2 B_2 = \begin{bmatrix} a \\ 0,5\ a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0,618 & 1 \\ 1 & -0,618 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0,809 \\ 0,500 \end{bmatrix}$$

Gesamtlösung:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} 0,618 \\ 1 \end{bmatrix} 0,8090\ a \cos 19,54\ t + \begin{bmatrix} 1 \\ -0,618 \end{bmatrix} 0,5\ a \cos 51,17\ t$$

Die Schwingungsverläufe für beide Freiheitsgrade sind in Abbildung 1.90 dargestellt. Beide Kurven enthalten eine Überlagerung aus beiden Eigenfrequenzen.

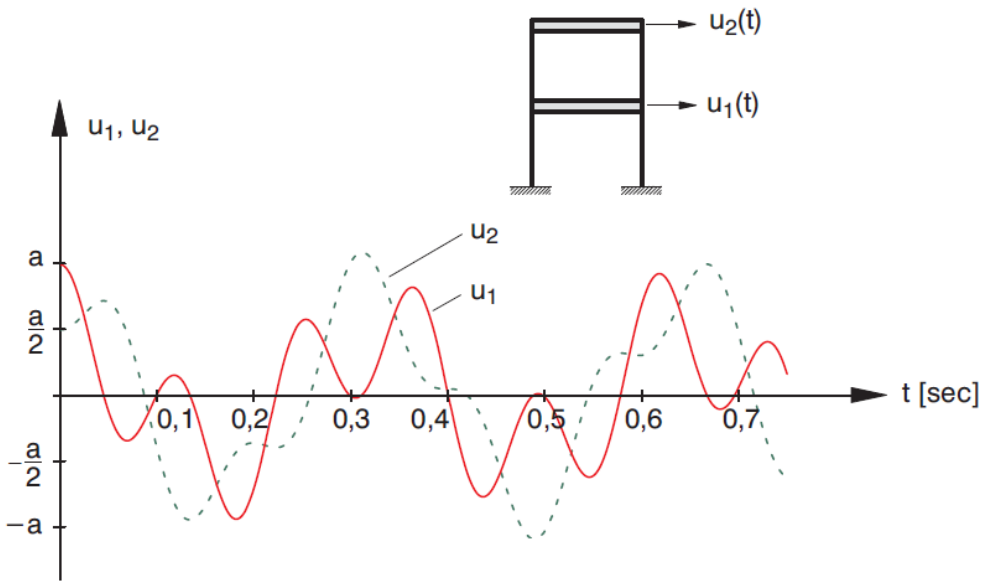


Abb. 1.90: Schwingungsverlauf der Stockwerkriegel

Im Folgenden sind zwei wichtige Sonderfälle dargestellt, die sich bei alternativen Anfangsauslenkungen ergeben.

Für den Fall, dass die Anfangsauslenkung der ersten Eigenform entspricht

$$u_1^0 = 0,0618 \text{ m} \qquad u_2^0 = 0,1 \text{ m} \qquad \approx \text{ 1. Eigenform}$$

ergibt sich eine harmonische Schwingung. Beide Freiheitsgrade schwingen mit der gleichen Frequenz f_1 (Abbildung 1.91). Das System verhält sich wie ein Einmassenschwinger, weil die zweite Eigenform durch die spezielle Anfangsauslenkung nicht „angeregt“ wird.

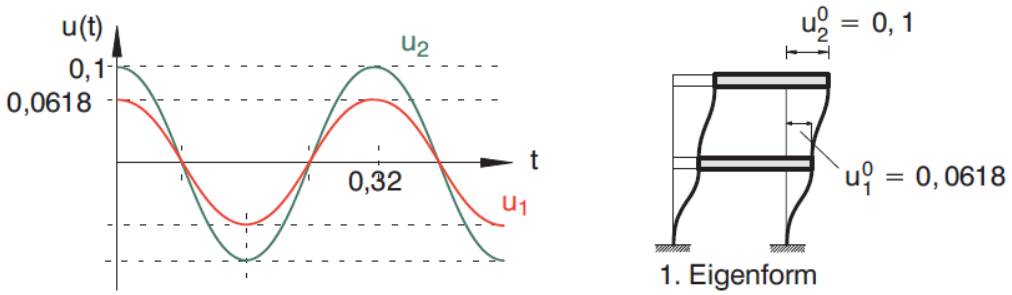


Abb. 1.91: Harmonische Schwingung in der ersten Eigenform

Das Gleiche ergibt sich sinngemäß bei einer Anfangsauslenkung, die der zweiten Eigenform entspricht (Abbildung 1.92).

$$u_1^0 = 0,1 \text{ m} \qquad u_2^0 = -0,0618 \text{ m} \qquad \approx \text{ 2. Eigenform}$$

Beide Freiheitsgrade schwingen nun in der zweiten Eigenfrequenz des Systems.

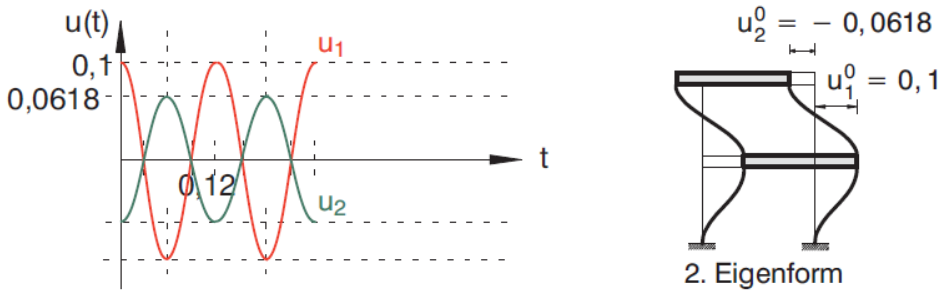


Abb. 1.92: Harmonische Schwingung in der zweiten Eigenform

Für beliebige Anfangsauslenkungen ergibt sich keine harmonische Schwingung. Aus dem Verschiebungs-Zeit-Diagramm ist keine Frequenz ablesbar (vgl. Abbildung 1.90). Die Schwingungsform ist eine Superposition der beiden Eigenformen und ändert sich ständig.

1.17.3 Gedämpftes System

Die Bewegungsgleichung des frei schwingenden, gedämpften Systems lautet:

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\,\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{1.84}$$

mit der Ansatzfunktion:

$$\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}\, e^{\lambda t}$$

$$[\,\lambda^2\,\mathbf{M} + \lambda\,\mathbf{C} + \mathbf{K}\,]\,\bar{\mathbf{u}}\, e^{\lambda t} = \mathbf{0}$$

Daraus erhält man, entsprechend Gleichung (1.74) das quadratische Eigenwertproblem:

$$\boxed{(\,\lambda^2\,\mathbf{M} + \lambda\,\mathbf{C} + \mathbf{K}\,)\,\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}} \tag{1.85}$$

Die Lösung sind *komplexe Eigenwerte* und dämpfungsabhängige Eigenformen. Wegen der im Bauwesen üblichen geringen Dämpfungswerte sind die entsprechenden analytischen Lösungsmethoden von untergeordneter Bedeutung und es wird hier nicht weiter darauf eingegangen.

1.17.4 Orthogonalitätsbeziehungen der Eigenformen

Die Eigenformen (Eigenvektoren) Φ besitzen die folgenden wichtigen Eigenschaften: sie sind orthogonal sowohl bezüglich der Steifigkeitsmatrix als auch bezüglich der Massenmatrix.

$$\boxed{\begin{aligned} &\phi_m^T\,\mathbf{K}\,\phi_n = 0 \qquad \text{für} \quad m \neq n \\ &\phi_n^T\,\mathbf{K}\,\phi_n = K_n = \omega_n^2\,M_n \end{aligned}} \tag{1.86}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\phi_m^T\,\mathbf{M}\,\phi_n = 0 \qquad \text{für} \quad m \neq n \\ &\phi_n^T\,\mathbf{M}\,\phi_n = M_n \end{aligned}} \tag{1.87}$$

Sofern die Eigenvektoren bereits bezüglich der Massenmatrix normiert sind, gilt:

$$\phi_n^T\,\mathbf{K}\,\phi_n = \omega_n^2 \qquad\qquad \phi_n^T\,\mathbf{M}\,\phi_n = 1$$

Die Orthogonalität folgt direkt aus der Lösung des Eigenwertproblems.

Es gilt:

$$(\mathbf{K} - \omega_n^2\,\mathbf{M})\,\phi_n = \mathbf{0} \qquad\qquad (\mathbf{K} - \omega_m^2\,\mathbf{M})\,\phi_m = \mathbf{0}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\text{(a)} \qquad \phi_m^T\,\mathbf{K}\,\phi_n = \omega_n^2\,\phi_m^T\,\mathbf{M}\,\phi_n \qquad\qquad \phi_n^T\,\mathbf{K}\,\phi_m = \omega_m^2\,\phi_n^T\,\mathbf{M}\,\phi_m$$

transponiert:

$$\phi_m^T\,\mathbf{K}\,\phi_n = \omega_m^2\,\phi_m^T\,\mathbf{M}\,\phi_n \qquad \text{(b)}$$

$$\text{(a)} - \text{(b)}: \qquad (\omega_n^2 - \omega_m^2)\,\phi_m^T\,\mathbf{M}\,\phi_n = 0$$

$$\rightarrow \qquad \phi_m^T\,\mathbf{M}\,\phi_n = 0 \qquad \text{für} \quad m \neq n$$

$$\text{mit (a):} \qquad \rightarrow \qquad \phi_m^T\,\mathbf{K}\,\phi_n = 0 \qquad \text{für} \quad m \neq n$$

1.17.5 Modale Dämpfung

Bei der *modalen* Analyse (Abschnitt 1.18) werden die Orthogonalitätsbeziehungen (1.86) und (1.87) zur Entkopplung der Bewegungsgleichung (1.48) verwendet. Gilt die Orthogonalität auch bezüglich der Dämpfungsmatrix $\mathbf{C}$

$$\boxed{\begin{aligned} &\phi_m^T\,\mathbf{C}\,\phi_n = 0 \qquad \text{für} \quad m \neq n \\ &\phi_n^T\,\mathbf{C}\,\phi_n = C_n \end{aligned}} \tag{1.88}$$

so spricht man von *modaler Dämpfung*.

Das Lehrsche Dämpfungsmaß der n-ten Eigenform ξ_n ist

$$\xi_n = \frac{C_n}{C_{n,kr}} = \frac{C_n}{2\,\omega_n\,M_n}$$

$$\rightarrow \quad C_n = 2\,\xi_n\,\omega_n\,M_n \tag{1.89}$$

Die Entkopplung ist offensichtlich möglich, wenn die Dämpfungsmatrix $\mathbf{C}$ als Linearkombination von $\mathbf{M}$ und $\mathbf{K}$ gewonnen wird. Diese Art Dämpfung wird auch als *Rayleigh-Dämpfung* bezeichnet.

$$\mathbf{C} = a_0\,\mathbf{M} + a_1\,\mathbf{K} \tag{1.90}$$

Die Konstanten a_0 und a_1 werden aus Dämpfungswerten erhalten, die z.B. aus Versuchen für bestimmte Frequenzen vorliegen. Es ist sinnvoll, Werte zu verwenden, die an den Rändern des maßgebenden Frequenzbereichs liegen. Für die Rayleigh-Dämpfung gilt mit (1.86) bis (1.90)

$$C_n = 2\,\xi_n\,\omega_n\,M_n = a_0\,M_n + a_1\,K_n = a_0\,M_n + a_1\,\omega_n^2\,M_n$$

$$\rightsquigarrow \quad 2\,\xi_n\,\omega_n = a_0 + a_1\,\omega_n^2$$

Mit zwei bekannten Lehrschen Dämpfungsmaßen ξ_1 und ξ_2 erhält man zwei Bestimmungsgleichungen für a_0 und a_1.

$$\left.\begin{aligned} 2\,\xi_1\,\omega_1 &= a_0 + a_1\,\omega_1^2 \\ 2\,\xi_2\,\omega_2 &= a_0 + a_1\,\omega_2^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad a_0,\ a_1 \tag{1.91}$$

Die Dämpfungsmaße ξ_i bei den übrigen Frequenzen sind damit festgelegt.

$$\xi_i = \frac{1}{2}\left[\frac{a_0}{\omega_i} + a_1\,\omega_i\right] \tag{1.92}$$

Am Verlauf der Rayleighdämpfung in Abbildung 1.93 kann man erkenn, dass die Dämpfung für die in den Außenbereichen liegenden Schwingungen stark ansteigt. Die tiefen und die hohen Frequenzen werden heraus gedämpft.

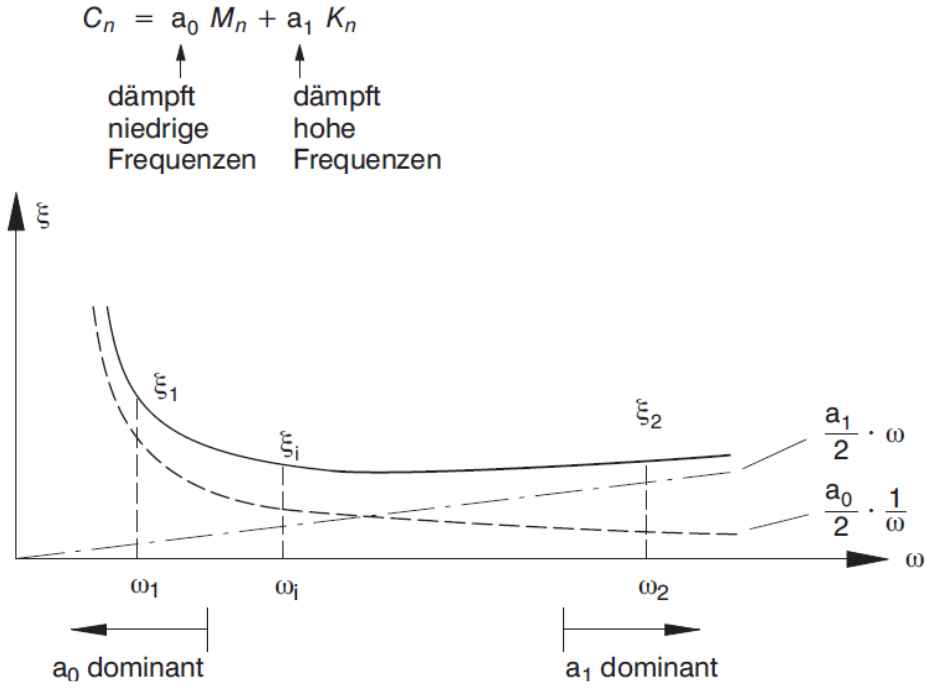


Abb. 1.93: Verlauf der Rayleigh-Dämpfung

1.18 Modale Analyse

1.18.1 Einführung

Die modale Analyse ist ein häufig verwendetes Verfahren zur Lösung der Schwingungsprobleme von Systemen mit mehreren Freiheitsgraden unter zeitabhängiger Belastung. Es ist auch der Name *modale Superposition* gebräuchlich, da die Eigenformen („Modes“) zur gesamten Systemantwort superponiert werden. Daraus ergibt sich die Beschränkung des Verfahrens auf lineare Probleme.

Prinzipiell ist die Darstellung proportionaler und nicht proportionaler Dämpfung möglich. Die nicht proportionale Dämpfung macht die Berechnung wesentlich komplizierter. Im Folgenden wird nur die proportionale (modale) Dämpfung weiter verfolgt.

1.18.2 Entkopplung des Gleichungssystems

Wie bereits bei der freien Schwingung gezeigt (Gleichung (1.83)) setzen sich die Schwingungsformen eines Tragwerks entweder aus den Eigenformen selbst oder aus Überlagerungen der Eigenformen zusammen:

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Phi}\ \mathbf{y} = \phi_1\ y_1(t) + \phi_2\ y_2(t) + \ldots + \phi_n\ y_n(t) \tag{1.93}$$

Die Modalmatrix $\mathbf{\Phi}$ mit den Eigenformen $\phi_1 \ldots \phi_n$ folgt – auch für schwach gedämpfte Systeme – aus dem ungedämpften Eigenwertproblem (1.74). Die verallgemeinerten Koordinaten $y_i(t)$ werden auch Normalkoordinaten genannt. Sie geben den Zeitverlauf und die momentane Amplitude jeder Eigenform Φ an.

Zur Entkopplung wird (1.93) in die Bewegungsgleichung (1.48) eingesetzt und mit Φ^T von links vormultipliziert.

$$\mathbf{\Phi}^T\ \mathbf{M}\ \mathbf{\Phi}\ \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{\Phi}^T\ \mathbf{C}\ \mathbf{\Phi}\ \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{\Phi}^T\ \mathbf{K}\ \mathbf{\Phi}\ \mathbf{y} = \mathbf{\Phi}^T\ \mathbf{F}(t) \tag{1.94}$$

Aufgrund der Orthogonalitätsbeziehungen (1.86) bis (1.88) wird damit das System von n gekoppelten Differentialgleichungen in ein System von n entkoppelten Differentialgleichungen überführt.

Zum Beispiel für die Multiplikation mit ϕ_i^T:

$$\phi_i^T\ \mathbf{M}\ (\ \phi_1\ \ddot{y}_1 + \phi_2\ \ddot{y}_2 + \ldots + \phi_n\ \ddot{y}_n\ ) + \phi_i^T\ \mathbf{C}\ (\ \phi_1\ \dot{y}_1 + \phi_2\ \dot{y}_2 + \ldots + \phi_n\ \dot{y}_n\ ) +$$

$$\phi_i^T\ \mathbf{K}\ \ (\ \phi_1\ y_1 + \phi_2\ y_2 + \ldots + \phi_n\ y_n\ ) = \phi_i^T\ \mathbf{F}(t)$$

$$\rightarrow \qquad \phi_i^T\ \mathbf{M}\ \phi_i\ \ddot{y}_i + \phi_i^T\ \mathbf{C}\ \phi_i\ \dot{y}_i + \phi_i^T\ \mathbf{K}\ \phi_i\ y_i = \phi_i^T\ \mathbf{F}(t)$$

$$\rightarrow \qquad \boxed{M_i\ \ddot{y}_i + C_i\ \dot{y}_i + K_i\ y_i = \phi_i^T\ \mathbf{F}(t)}$$

Durch Vormultiplizieren mit allen Eigenvektoren erhält man so ein System von n entkoppelten Gleichungen.

$$
\begin{aligned}
M_1\,\ddot{y}_1 + C_1\,\dot{y}_1 + K_1\,y_1 &= \boldsymbol{\phi}_1^T\,\mathbf{F}(t)\\
M_2\,\ddot{y}_2 + C_2\,\dot{y}_2 + K_2\,y_2 &= \boldsymbol{\phi}_2^T\,\mathbf{F}(t)\\
&\vdots\\
M_n\,\ddot{y}_n + C_n\,\dot{y}_n + K_n\,y_n &= \underbrace{\boldsymbol{\phi}_n^T\,\mathbf{F}(t)}_{\text{modale Last } F_n(t)}
\end{aligned}
$$

Mit $K_n = \omega_n^2\,M_n\;;\quad C_n = 2\,\xi_n\,M_n\,\omega_n\;:$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\ddot{y}_1 + 2\,\xi_1\,\omega_1\,\dot{y}_1 + \omega_1^2\,y_1 &= \frac{F_1(t)}{M_1}\\
\ddot{y}_2 + 2\,\xi_2\,\omega_2\,\dot{y}_2 + \omega_2^2\,y_2 &= \frac{F_2(t)}{M_2}\\
&\vdots\\
\ddot{y}_n + 2\,\xi_n\,\omega_n\,\dot{y}_n + \omega_n^2\,y_n &= \frac{F_n(t)}{M_n}\\
\\
M_n &= \boldsymbol{\phi}_n^T\,\mathbf{M}\,\boldsymbol{\phi}_n
\end{aligned}
}
\tag{1.95}
$$

1.18.3 Lösung und Rückrechnung

Die Entkopplung bedeutet, dass sich die Schwingungen in den einzelnen Eigenformen nicht gegenseitig beeinflussen. Das Problem ist somit auf die Lösung von n Gleichungen zurückgeführt, wobei jede wie die eines Systems mit einem Freiheitsgrad aufgebaut ist. Für die Lösung können die dort entwickelten Verfahren verwendet werden (DLF der harmonischen Erregung, Duhamel-Integral, u.a.). Als Ergebnis erhält man die den Eigenformen ϕ_i zugeordneten Zeitverläufe $y_i(t)$.

Durch Rücktransformation ergibt sich für jede Eigenfrequenz ω_i eine zugeordnete Schwingung:

$$\mathbf{u}_i(t) = \phi_i\,y_i(t)$$

Die Gesamtlösung ist die Superposition der Einzelschwingungen (modale Superposition, Gleichung (1.93)):

$$\mathbf{u}(t) = \sum_i \mathbf{u}_i(t) = \sum_i \phi_i\,y_i(t) = \Phi\,\mathbf{y}(t)$$

1.18.4 Zusammenfassung und Beispiel

Die Vorgehensweise bei der modalen Analyse ist in Abbildung 1.94 zusammengefasst.

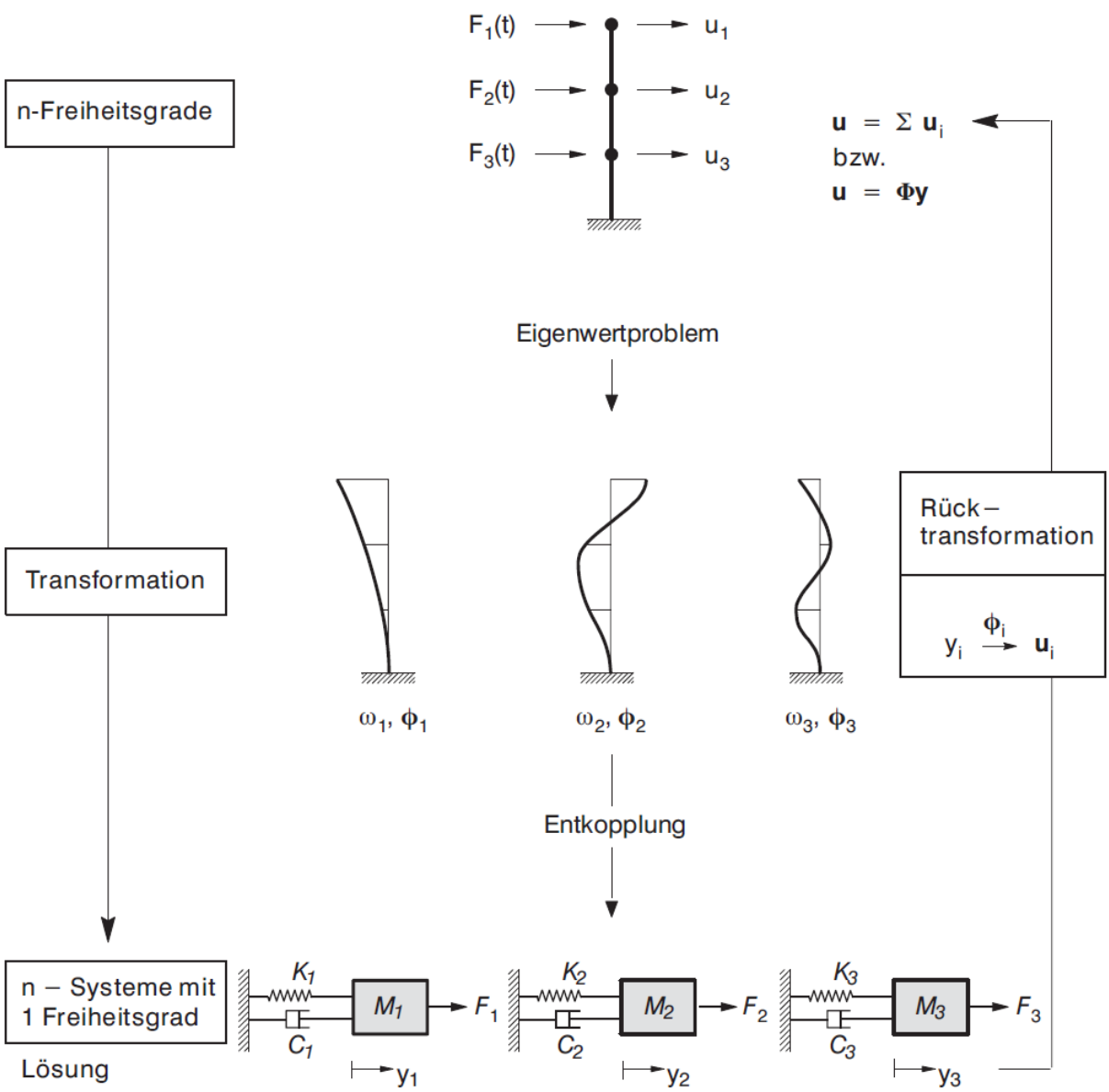


Abb. 1.94: Modale Analyse – Zusammenfassung

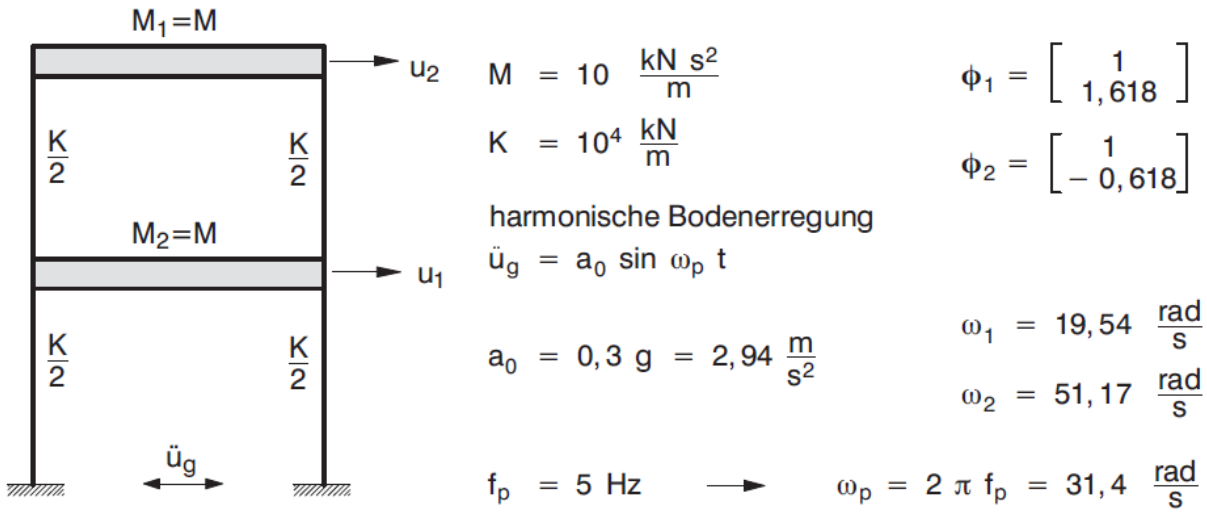


Abb. 1.95: Rahmen mit Bodenerregung

Als Zahlenbeispiel betrachten wir einen zweistöckigen Rahmen, der durch eine Beschleunigung des Untergrunds beansprucht wird (Abbildung 1.95).

Bewegungsgleichung:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F}_{eff}(t)$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^4 & -10^4 \\ -10^4 & 10^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{F}_{eff}(t)$$

Entkopplung mit den nicht normierten Eigenformen

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1,618 & -0,618 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi} \mathbf{y} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{F}_{eff}(t)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1,618 \\ 1 & -0,618 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1,618 & -0,618 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{y}} + \begin{bmatrix} 1 & 1,618 \\ 1 & -0,618 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^4 & -10^4 \\ -10^4 & 10^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1,618 & -0,618 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{F}_{eff}(t)$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} (1 + 1,618^2)\ 10 & 0 \\ 0 & \underbrace{(1 + 0,618^2)\ 10}_{M_2} \end{bmatrix}}^{M_1} \ddot{\mathbf{y}} + \overbrace{\begin{bmatrix} (2 - 2 \cdot 1,618 + 1,618^2)\ 10^4 & 0 \\ 0 & \underbrace{(2 + 2 \cdot 0,618 + 0,618^2)\ 10^4}_{K_2} \end{bmatrix}}^{K_1} \mathbf{y} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{F}_{eff}(t)$$

$$\begin{bmatrix} 36,18 & 0 \\ 0 & 13,82 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{y}} + \begin{bmatrix} 13819 & 0 \\ 0 & 36179 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{F}_{eff}(t)$$

Dividiert man beide Gleichungen durch M_1 bzw. M_2, so erhält man die entkoppelten Gleichungen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{y}} + \begin{bmatrix} 382 & 0 \\ 0 & 2618 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{y}} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} F_1/M_1 \\ F_2/M_2 \end{bmatrix}(t)$$

Der effektive Lastvektor ergibt sich aus den Trägheitseffekten durch die Belastung aus der gegebenen Beschleunigung des Untergrunds ($a_0 = 0{,}3g$ mit $f_p = 5$ Hz).

$$\ddot{u}_g = 0,3\ g \sin(2\pi \cdot 5 \cdot t) = 2,94 \sin 31,4 \cdot t$$

$$\left.\begin{aligned} F_{1\,eff} &= -M_1\, \ddot{u}_g = -10 \cdot 2,94 \sin 31,4\ t \\ F_{2\,eff} &= -M_2\, \ddot{u}_g = -10 \cdot 2,94 \sin 31,4\ t \end{aligned}\right. \longrightarrow \mathbf{F}_{eff} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (-29,4 \sin 31,4\ t)$$

Lastwerte der entkoppelten Gleichungen:

$$F_1 = \phi_1^T \mathbf{F}_{eff} = [\,1 \quad 1,618\,] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (-29,4 \sin 31,4\ t)$$

$$F_1 = \overbrace{-76,97}^{F_{0,1}} \sin 31,4\ t$$

$$F_2 = \phi_2^T \mathbf{F}_{eff} = [\ 1 \quad -0,618\ ] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (\ -29,4 \sin 31,4\ t\ )$$

$$F_2 = \underbrace{-11,23}_{F_{0,2}} \sin 31,4\ t$$

Lösung der entkoppelten Gleichungen für homogene Anfangsbedingungen $\mathbf{u}_0 = 0,\ \dot{\mathbf{u}}_0 = 0$:

Die entkoppelten Gleichungen haben die Form:

$$\ddot{y}_i + \overline{K}_i\, y_i = \frac{F_{0,i}}{M_i} \sin \omega_P t\ ; \qquad \overline{K}_i = \frac{K_i}{M_i} = \omega_i^2$$

mit den Lösungen (vgl. Einmassenschwinger):

$$y_i = \frac{F_{0,i}}{K_i} \left[\frac{1}{1-\beta_i^2} \right] (\ \sin \omega_P t - \beta_i \sin \omega_i t\ )$$

1. Eigenform:

$$\ddot{y}_1 + 382,0\ y_1 = -\frac{76,97}{36,18} \sin 31,4\ t$$

$$\omega_1 = 19,54\ ; \qquad \beta_1 = \frac{\omega_P}{\omega_1} = \frac{31,4}{19,54} = 1,61$$

$$y_1 = -\frac{76,97}{13819} \left[\frac{1}{1-1,61^2} \right] (\ \sin 31,4\ t - 1,61 \sin 19,54\ t\ )$$

$$\boxed{y_1 = [\ 3,498 \sin 31,4\ t - 5,631 \sin 19,54\ t\ ] \cdot 10^{-3}}$$

2. Eigenform:

$$\ddot{y}_2 + 2618\ y_2 = -\frac{11,23}{13,82} \sin 31,4\ t$$

$$\omega_2 = 51,17\ ; \qquad \beta_2 = \frac{31,4}{51,17} = 0,614$$

$$y_2 = -\frac{11,23}{36179} \left[\frac{1}{1-0,614^2} \right] (\sin 31,4\ t - 0,614 \sin 51,17\ t)$$

$$\boxed{y_2 = [\ -0,498 \sin 31,4\ t + 0,306 \sin 51,17\ t\ ] \cdot 10^{-3}}$$

Rücktransformation und Superposition:

Anteil aus 1. Eigenform:

$$\mathbf{u}_1 = \phi_1\, y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,618 \end{bmatrix} \left\{ 3,498 \sin 31,4\ t - 5,631 \sin 19,54\ t \right\} \cdot 10^{-3}$$

$$\mathbf{u}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 3,498 \\ 5,660 \end{bmatrix} \sin 31,4\ t + \begin{bmatrix} -5,631 \\ -9,111 \end{bmatrix} \sin 19,54\ t \right\} \cdot 10^{-3}$$

Anteil aus 2. Eigenform

$$\mathbf{u}_2 = \phi_2\, y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,618 \end{bmatrix} \left\{ -0,498 \sin 31,4\, t + 0,306 \sin 51,17\, t \right\} \cdot 10^{-3}$$

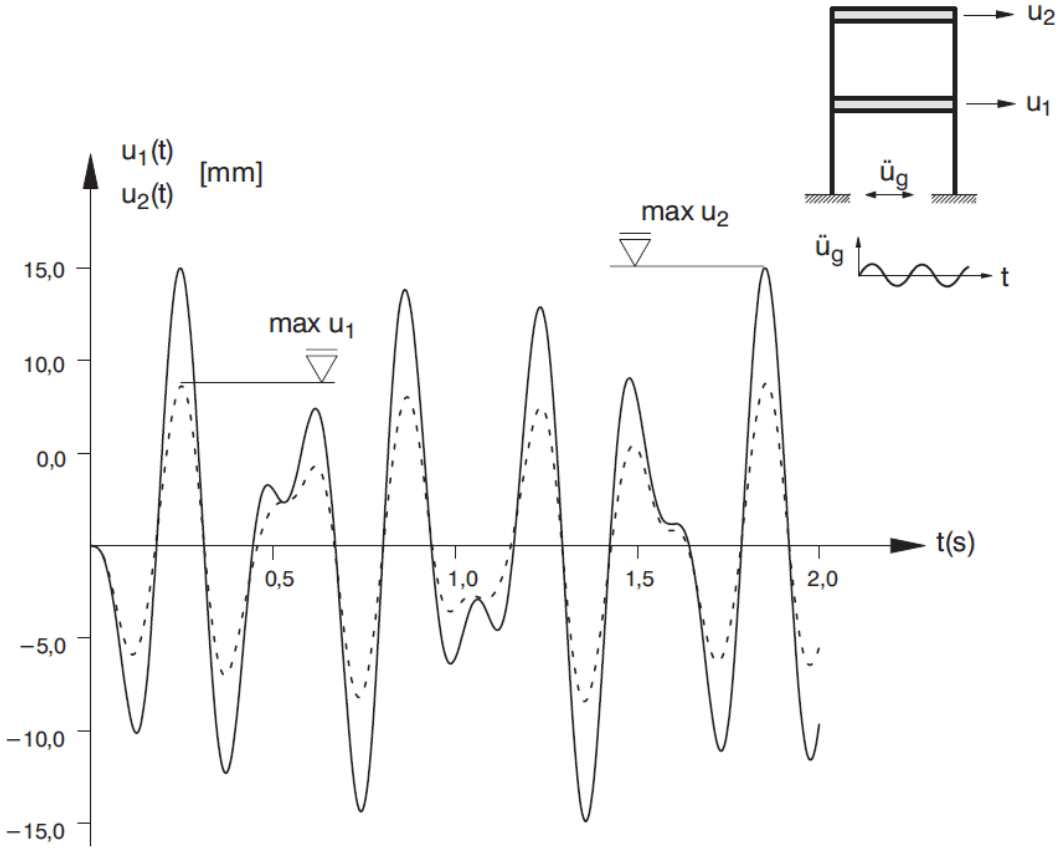
$$\mathbf{u}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -0,498 \\ 0,308 \end{bmatrix} \sin 31,4\, t + \begin{bmatrix} 0,306 \\ -0,189 \end{bmatrix} \sin 51,17\, t \right\} \cdot 10^{-3}$$

Superposition:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 3,000 \\ 5,968 \end{bmatrix} \sin 31,4\, t + \begin{bmatrix} -5,631 \\ -9,111 \end{bmatrix} \sin 19,54\, t + \begin{bmatrix} 0,306 \\ -0,189 \end{bmatrix} \sin 51,17\, t \right\} \cdot 10^{-3}$$

Man erkennt, dass in diesem Fall der Anteil der 2. Eigenschwingung sehr gering ist, d.h. die 1. Eigenform ist dominant. Dies hat zur Folge, dass die beiden Stockwerke bei diesem Beispiel ihre relativen Verschiebungsmaxima im Sinne der 1. Eigenform etwa zur gleichen Zeit aufweisen.



$$\max u_1 = 8,76 \cdot 10^{-3}\ \text{m}\ , \quad \max u_2 = 15,00 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

Abb. 1.96: Schwingungsverlauf des zweistöckigen Rahmens bei Bodenerregung

Zu jedem Zeitpunkt t kann nach dem Verschiebungsgrößenverfahren eine Schnittkraftberechnung durchgeführt werden. Die jeweiligen Maximalwerte der Schnittgrößen können dann für eine weitere Bemessung verwendet werden. Dieses sehr aufwändige Verfahren kann näherungsweise durch die Verwendung der größten Verschiebung max u_1, max u_2 vereinfacht werden. Diese treten aber in der Regel in unterschiedlichen Zeitpunkten auf, so dass *statistische Methoden* zur Überlagerung verwendet werden müssen. Außerdem können an Stellen des Tragwerks, wo Relativverschiebungen maßgebend sind, die Schnittgrößen dann maximal

werden, wenn die Einzelverschiebungen u_i nicht maximal sind. Daher wird häufig eine andere Art der Auswertung angewendet, die auf der Ermittlung der Maximalwerte der Normalkoordinaten $y_i(t)$ basiert. Dies soll an dem Beispiel im folgenden Abschnitt gezeigt werden.

1.18.5 Überlagerung von maximalen Antworten

Eine Abschätzung der Beanspruchung des Systems kann man durch die Überlagerung der maximalen Antworten aus den einzelnen Normalkoordinaten y_i erhalten.

Undgedämpfte Schwingung, Gleichung (1.20):

$$DLF_{max} = D_i = \left| \frac{1}{1-\beta_i} \right| \qquad y_{i\,max} = \frac{|F_{0,i}|}{K_i} D_i$$

Die weitere Berechnung erfolgt in 2 Schritten.

Schritt 1: Berechnung für jede Eigenschwingung i.

Verschiebungen:

$$\mathbf{u}_{i\,max} = \phi_i \cdot y_{i\,max} = \begin{bmatrix} u_{1,i} \\ u_{2,i} \\ \vdots \\ u_{n,i} \end{bmatrix}_{max}$$

Schnittgrößen:

Die Schnittgrößen $S_{i\ max}$ werden aus dem Verschiebungsvektor $\mathbf{u}_{i\ max}$ berechnet:

- direkt als Verschiebungslastfall mit einem Verschiebungsgrößenverfahren, Rückrechnung zu den zugehörenden Schnittgrößen $S_{i\ max}$ mit dem Vektor $\mathbf{u}_{i\ max}$ als Lösungsvektor $\mathbf{r}$ oder
- indirekt als Kraftlastfall mit Ersatzlasten $\mathbf{H}_{E,i} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}_{i\ max}$

Schritt 2: Statistische Überlagerung der Maximalwerte der Eigenschwingungen.

Für die Überlagerung wird die *SRSS-Methode* (Square Root of Sums of Squares) verwendet, da die Maximalwerte $S_{i\ max}$ nicht zu derselben Zeit auftreten.

Verschiebungen:

$$\mathbf{u}_{max} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}_{max} \qquad u_{j\,max} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (u_{j,i\,max})^2}$$

Schnittgrößen:

$$S_{max} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (S_{i\,max})^2}$$

Für das Zahlenbeispiel aus Abschnitt 1.18.4 erhält man

$$D_1 = \left| \frac{1}{1-1,61} \right| = 1,639 \qquad y_{1\,max} = \frac{76,97}{13819} \cdot 1,639 = 9,13 \cdot 10^{-3}$$

$$D_2 = \left| \frac{1}{1 - 0,614} \right| = 2,591 \qquad y_{2\,max} = \frac{11,23}{36179} \cdot 2,591 = 0,805 \cdot 10^{-3}$$

Systemantwort aus erster Eigenform:

$$y_1: \quad \mathbf{u}_{1,max} = \phi_1 \, y_{1\,max} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,618 \end{bmatrix} \cdot 9,13 \cdot 10^{-3} = \begin{bmatrix} 9,13 \\ 14,77 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Systemantwort aus zweiter Eigenform:

$$y_2: \quad \mathbf{u}_{2,max} = \phi_2 \, y_{2\,max} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,618 \end{bmatrix} \cdot 0,805 \cdot 10^{-3} = \begin{bmatrix} 0,805 \\ -0,497 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Genäherte Maximalantwort der Systems durch Überlagerung mit der SRSS-Methode und Vergleich mit der exakten Lösung (Abbildung 1.96).

	exakt:
$\max u_1 \approx \sqrt{9,13^2 + 0,805^2} \cdot 10^{-3} = 9,17 \cdot 10^{-3}$	$\max u_1 = 8,76 \cdot 10^{-3}$
$\max u_2 \approx \sqrt{14,77^2 + 0,497^2} \cdot 10^{-3} = 14,78 \cdot 10^{-3}$	$\max u_2 = 15,00 \cdot 10^{-3}$

In diesem Fall erhält man eine gute Abschätzung.

Im Allgemeinen kann die Überlagerung der DLF_{max}-Werte die Maximalantworten unterschätzen. Man erkennt aber, dass nur Eigenformen, die in den normierten Gleichungen große DLF_{max}-Werte geben maßgebend an der Systemantwort beteiligt sind. Daraus folgt, dass man sich auf einen Teil der Eigenformen und damit auf die Lösung eines verkleinerten Problems beschränken kann.

1.18.6 Reduktion auf wesentliche Freiheitsgrade

Häufig kann das dynamische Verhalten durch wenige Eigenformen beschrieben werden, im Extremfall sogar auf einen Freiheitsgrad (siehe Abschnitt 1.11). Das Verfahren bietet damit den Vorteil, dass die Integration auf eine begrenzte Anzahl von Gleichungen beschränkt werden kann.

Das ist zum Beispiel der Fall, wenn die Erregerfrequenzen ω_p nicht über den gesamten Frequenzbereich verteilt sind, sondern nur innerhalb eines bestimmten Bereichs der Eigenfrequenzen liegen. Diese werden dann besonders angeregt. Da für $\beta \gg 1$ und $\beta \ll 1$ nur eine vernachlässigbare dynamische Überlagerung stattfindet, kann sich die Lösung auf die Eigenformen bzw. –frequenzen beschränken, deren DLF_{max} z.B. größer als 1,1 sind. Häufig sind dies die ersten m Eigenformen.

Damit reduziert sich die Modalmatrix des reduzierten Systems auf die ersten m Eigenformen

$$\mathbf{\Phi}_r^T \, \mathbf{M} \, \mathbf{\Phi}_r \, \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{\Phi}_r^T \, \mathbf{C} \, \mathbf{\Phi}_r \, \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{\Phi}_r^T \, \mathbf{K} \, \mathbf{\Phi}_r \, \mathbf{y} = \mathbf{\Phi}_r^T \, \mathbf{F}(t) \tag{1.96}$$

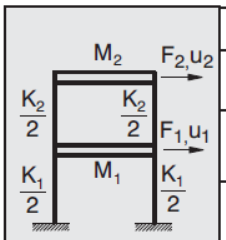
$$\rightarrow \quad M_i \, \ddot{y}_i + C_i \, \dot{y}_i + K_i \, y_i = \Phi_i^T \, \mathbf{F}(t) \qquad 0 < i < m$$

Nach der Lösung der m entkoppelten Differentialgleichungen erhält man die Gesamtlösung aus der Überlagerung der Schwingungen in den m berücksichtigten Eigenformen:

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Phi}_r \, \mathbf{y}_r(t) \tag{1.97}$$

1.18.7 Verschiebungsantwortspektrum für Systeme mit mehreren Freiheitsgraden

Wir betrachten zunächst ungedämpfte Systeme. Variiert man für den weiter oben betrachteten Stockwerkrahmen die Frequenz der Bodenerregung und ermittelt jeweils die Maximalwerte der Stockwerksverschiebungen, so erhält man das Verschiebungs-Antwortspektrum. Einzelne Werte sind in Tabelle 1.7 gegeben. In den Abbildungen 1.97 und 1.98 ist das Antwortspektrum über die Schwingungsdauer (T_p) bzw. die Kreisfrequenz (ω_p) der Erregung aufgetragen.



T_p [s]	u_{1max}	u_{2max}
0,05	1,12 mm	1,63 mm
$T_p=T_2=0{,}123$	unbegrenzt → Resonanz	
0,15	4,57 mm	8,83 mm
0,2	8,55 mm	14,99 mm
0,25	18,83 mm	31,47 mm
$T_p=T_1=0{,}322$	unbegrenzt → Resonanz	
0,4	28,56 mm	45,64 mm
0,5	15,68 mm	24,50 mm
0,6	11,75 mm	18,22 mm
0,7	10,58 mm	16,46 mm

$$M_1 = M_2 = 10\ \frac{kNs^2}{m}$$

$$K_1 = K_2 = 10000\ \frac{kN}{m}$$

$$C_1 = C_2 = 0$$

$$F_1(t) = F_2(t) = -29{,}4\ \sin\frac{2\pi}{T_p}\,t$$

Tab. 1.7: Maximale Verschiebungen des Stockwerkrahmens für verschiedene Erregungen

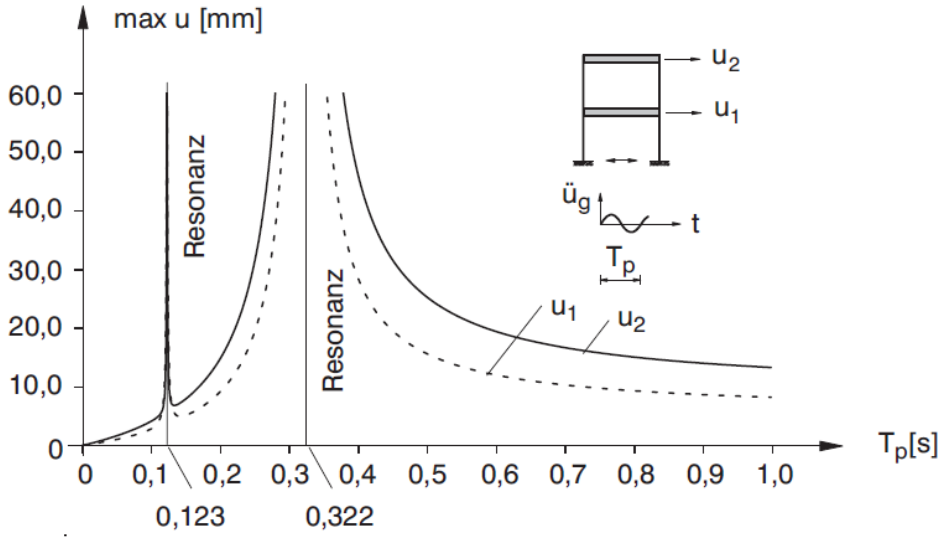


Abb. 1.97: Verschiebungs-Antwortspektrum über die Schwingungsdauer der Erregung

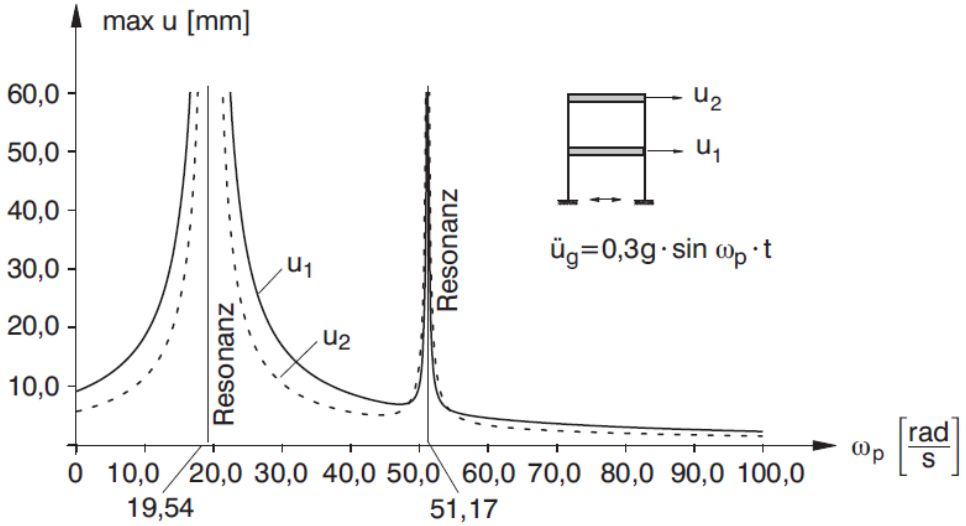


Abb. 1.98: Verschiebungs-Antwortspektrum über die Kreisfrequenz der Erregung

Man erkennt deutlich die Resonanz, wenn die Erregerfrequenz mit einer Eigenfrequenz des Systems übereinstimmt, und den maßgebenden Einfluss der niedrigsten Eigenfrequenz.

Für das Rahmensystem soll nun eine Dämpfung von $\xi = 0,05$ angenommen werden (vgl. Abschnitt 1.10). Für eine Rayleigh-Dämpfung

$$\mathbf{C} = a_0\,\mathbf{M} + a_1\,\mathbf{K}$$

werden die Werte a_0 und a_1 aus 2 Paaren (ω_i, ξ_i) bestimmt. Die Dämpfung $\xi = 0,05$ wird für die zwei Eigenfrequenzen des Rahmens vorgegeben, damit haben die beiden entkoppelten Gleichungen die Form:

$$n = 1,2: \qquad \ddot{y}_n + 2\,\xi_n\,\omega_n\,\dot{y}_n + \omega_n^2\,y_n = F_n(t)$$

$$\xi = 0,05$$

ω_n und $F_n(t)$ wie beim ungedämpften System.

$$\text{Maximalwerte:} \quad y_{n,max} = \frac{F_{0,n}}{\omega_n^2}\,D(\xi_n, \beta_n)\ ; \qquad D = \frac{1 + \beta_n\,e^{-\frac{\xi_n \pi}{|\beta_n - 1|}}}{\sqrt{(1-\beta_n^2)^2 + (2\,\xi_n\,\beta_n)^2}} \tag{1.98}$$

Die Überlagerung der Maximalwerte der entkoppelten Gleichungen zu maximalen Stockwerksverschiebungen erfolgt wie im Abschnitt 1.18.5. Das resultierende Verschiebungs-Antwortspektrum ist in Abbildung 1.99 dargestellt. Bei diesem System ist nun die Resonanz mit der zweiten Eigenfrequenz (T_p = 0,123 s) praktisch ohne Einfluss.

Häufig werden diese Spektren experimentell an bestehenden Tragwerken durch künstliche Erregung ermittelt, um Eigenfrequenzen zu lokalisieren.

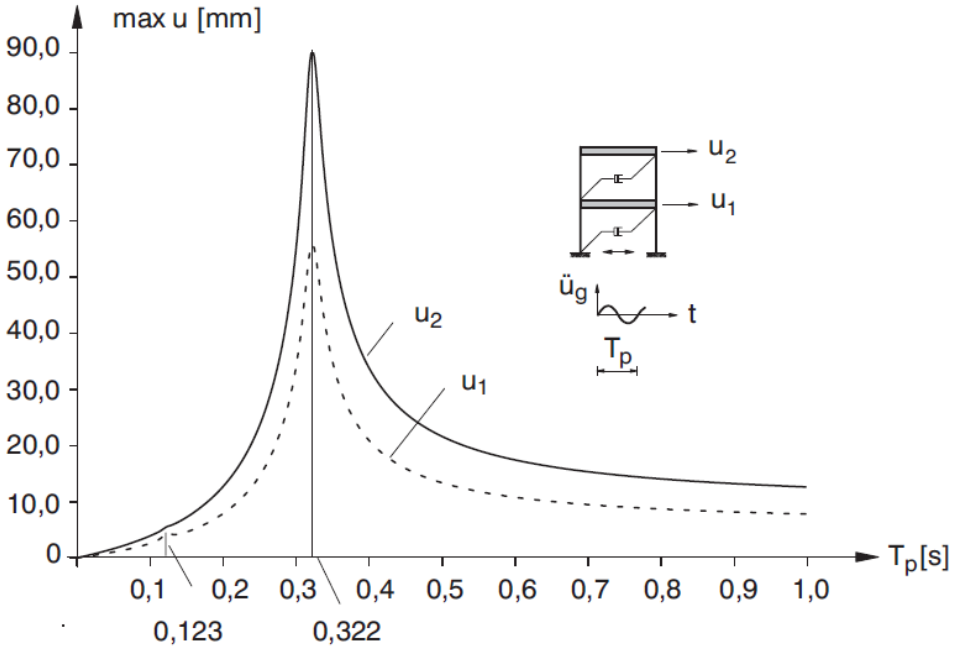


Abb. 1.99: Antwortspektrum bei Dämpfung mit $\xi = 0,05$

1.19 Antwortspektrenmethode bei Systemen mit mehreren Freiheitsgraden – z.B. DIN 4149

1.19.1 Maximalantworten der Normalkoordination

Wie in Abschnitt 1.3 gezeigt, erhält man bei Baugrundbeschleunigungen als gekoppeltes Differentialgleichungssystem.

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\,\mathbf{u} = \mathbf{F}_{eff}$$

mit

$$\mathbf{F}_{eff} = -\,\mathbf{M}\cdot\mathbf{1}\;\ddot{u}_g$$

1 ist der Erregervektor, der (bei orthogonalen Systemen) die Werte 1 und 0 enthält.

Das System von n gekoppelten Differentialgleichungen wird mit Hilfe der Eigenformen der freien Schwingung entkoppelt.

$$\ddot{y}_i + 2\,\xi_i\,\omega_i\,\dot{y}_i + \omega_i^2\,y_i = -\,\frac{1}{M_i}\,\underbrace{\phi_i^T\,\mathbf{M}\cdot\mathbf{1}}_{L_i\quad\text{Beteiligungsfaktor}}\,\ddot{u}_g$$

$$\ddot{y}_i + 2\,\xi_i\,\omega_i\,\dot{y}_i + \omega_i^2\,y_i = -\,\frac{L_i}{M_i}\,\ddot{u}_g \tag{1.99}$$

Die entkoppelten Gleichungen stimmen bis auf den Faktor L_i/M_i mit der Differentialgleichung des 1-FG-Systems überein:

$$\ddot{u} + \frac{C}{M}\,\dot{u} + \frac{K}{M}\,u = -\,\ddot{u}_g$$

Für dieses Problem wurden die Antwortspektren für die Verschiebung (Spektralwert S_d) oder die Beschleunigung (Spektralwert S_a) bereits ermittelt (vgl. Abschnitt 1.10). Für die Maximalwerte der normierten Koordinaten y_i gilt somit:

$$y_{i,max} = \frac{L_i}{M_i} S_{d,i}$$

$S_{d,i}$ Spektralwert für die i-te Eigenform

bzw.

$$\ddot{y}_{i,max} = \frac{L_i}{M_i} S_{a,i} \tag{1.100}$$

Die maximale Beschleunigung in der i-ten Eigenform ist

$$\ddot{\mathbf{u}}_{i,max} = \phi_i \, \ddot{y}_{i,max} \tag{1.101}$$

1.19.2 Ersatzlasten nach DIN 4149

In DIN 4149 wird für die Schnittkraftberechnung mit Ersatzlasten gearbeitet. Für jede Eigenform ergibt sich ein statischer Ersatzlastvektor $\mathbf{H}_{E,i}$ der die Verteilung der Trägheitskräfte wiedergibt.

$$\mathbf{H}_{E,i} = \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,i,max}$$

Analog zu (1.40) gilt mit (1.100) und (1.101)

$\mathbf{H}_{E,i} = \mathbf{M}\, \phi_i \frac{L_i}{M_i} S_{a,i}$	DIN 4149:
mit: $L_i = \phi_i^T \mathbf{M}\, \mathbf{1}$, $M_i = \phi_i^T \mathbf{M}\, \phi_i$	$S_{a,i} = S_{d(esign)}$

Mit den so ermittelten Ersatzlasten können für alle Eigenformen jeweils zugehörige Schnittkräfte berechnet werden. Bei Erdbebenbelastung ist der Anteil der höheren Eigenformen an der Gesamtbeanspruchung gering und kann daher vernachlässigt werden. Der Schnittkraftzustand berechnet sich also näherungsweise aus den Anteilen der niedrigsten Eigenformen.

1.19.3 Statistische Überlagerung der Ergebnisse aus den einzelnen Eigenformen

Die Schnittkraftanteile aus den Eigenformen werden nach statistischen Methoden überlagert. Die DIN 4149 schreibt die SRSS-Methode als Überlagerungsregel vor

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} S_i^2}$$

Schnittkraft am Knoten K (Gesamtbeanspruchung) — Schnittkraft am Knoten K in der i-ten Eigenform

es sind jedoch noch weitere Überlagerungsregeln gebräuchlich.

Eine Formel, die Schnittkräfte auf der sicheren Seite liefert, ist die Summe der Beträge:

$$S = \sum_{i=1}^{n} |S_i|$$

Sie kann aber deutlich zu hohe Werte liefern.

Bei anderen Beanspruchungen als Erdbeben kann prinzipiell dieselbe Vorgehensweise angewendet werden.

1.19.4 Zusammenfassung und Beispiel

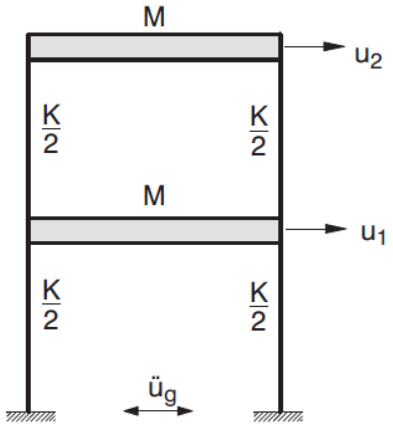
Die wichtigsten Schritte und Formeln der Antwortspektrenmethode sind in Tabelle 1.8 zusammengefasst.

System	$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\,\mathbf{u} = -\mathbf{M}\cdot\mathbf{1}\,\ddot{u}_g$	
Eigenwertproblem	$(\mathbf{K} - \omega^2\,\mathbf{M})\,\phi = \mathbf{0} \rightarrow \omega_i\,,\ \phi_i$	
Entkopplung	$\ddot{y}_i + 2\,\xi_i\,\omega_i\,\dot{y}_i + \omega_i^2\,y_i = -\dfrac{L_i}{M_i}\,\ddot{u}_g$ $L_i = \phi_i^T\,\mathbf{M}\cdot\mathbf{1}\,,\quad M_i = \phi_i^T\,\mathbf{M}\,\phi_i$	
Antwortspektrum	$y_{i,max} = \dfrac{L_i}{M_i}\cdot\dfrac{1}{\omega_i^2}\,S_{a,i}$ $S_{a,i} = S_{a,i}\,(T_i,\ \xi_i)$ DIN 4149: $S_{a,i} = S_{d(esign)}$	
Rücktransformation	$\mathbf{u}_{i,max} = \phi_i\,y_{i,max}$	
Ersatzlasten	$\mathbf{H}_{E,i} = \mathbf{M}\,\phi_i\,\dfrac{L_i}{M_i}\,S_{a,i}$	maßgebende Eigenformen
Schnittkräfte je Eigenform	$M_i\,,\ V_i\,,\ N_i$	
Überlagerung zu Gesamtschnittkräften	$M = \sqrt{\Sigma\,M_i^2}$ $V = \sqrt{\Sigma\,V_i^2}$ $N = \sqrt{\Sigma\,N_i^2}$	

Tabelle 1.8: Antwortspektrenmethode

Die Vorgehensweise nach DIN 4149 wird auf den bereits ausführlich besprochenen zweistöckigen Rahmen angewandt.

Annahmen: Erbebenzone 3, Bedeutungskategorie II, Untergrundverhältnisse CT, Verhaltensbeiwert q=3,0.



$$M = 10 \ \frac{kN\ s^2}{m}$$

$$K = 10^4 \ \frac{kN}{m}$$

Abb. 1.100: Rahmen mit Erdbebenerregung

Abb. 1.58: $a_g = 0,8$

Tabelle 1.3: $S = 1,25;\ T_B = 0,1;\ T_C = 0,4;\ T_D = 2,0$

Tabelle 1.5: $\gamma_I = 1,0$

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{2\,\pi}{\omega_1} = \frac{2\,\pi}{19,54} = 0,32 \\ T_2 &= \frac{2\,\pi}{\omega_2} = \frac{2\,\pi}{51,17} = 0,123 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &T_B \le T \le T_C \\ &S_{d(esign)} = S_{a,1} = S_{a,2} \\ &\qquad = a_g \cdot \gamma_I \cdot S \cdot \frac{\beta_0}{q} \end{aligned}\right\} \quad S_d = 0,833$$

Beteiligungsfaktoren:

$$L_1 = \phi_1^T\,\mathbf{M}\cdot\mathbf{1} = [\,1 \quad 1,618\,] \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 26,18$$

$$L_2 = \phi_2^T\,\mathbf{M}\cdot\mathbf{1} = [\,1 \quad -0,618\,] \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3,82$$

Normierte Massen

$$M_1 = \phi_1^T\,\mathbf{M}\,\phi_1 = 36,18\ ; \qquad M_2 = \phi_2^T\,\mathbf{M}\,\phi_2 = 13,82$$ (vgl. Beispiel S. 90)

Statische Ersatzlasten:

$$\mathbf{H}_{E,i} = \mathbf{M}\,\phi_i\,\frac{L_i}{M_i}\,S_{a,i}$$

1.Eigenform:

$$\mathbf{H}_{E,1} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1,618 \end{bmatrix} \cdot \frac{26,18}{36,18} \cdot 0,833 = \begin{bmatrix} 6,03 \\ 9,75 \end{bmatrix} \text{[kN]}$$

2.Eigenform:

$$\mathbf{H}_{E,2} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0,618 \end{bmatrix} \cdot \frac{3,82}{13,82} \cdot 0,833 = \begin{bmatrix} 2,30 \\ -1,42 \end{bmatrix} \text{[kN]}$$

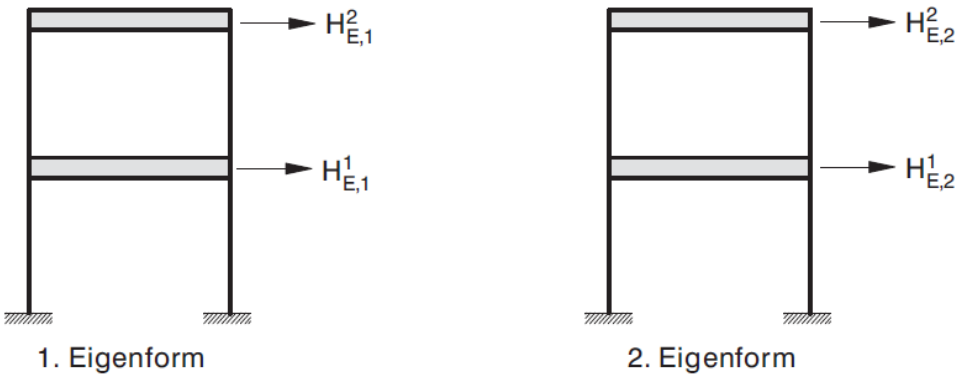


Abb. 1.101: Ersatzkräfte aus den beiden Eigenformen

Schnittkräfte:

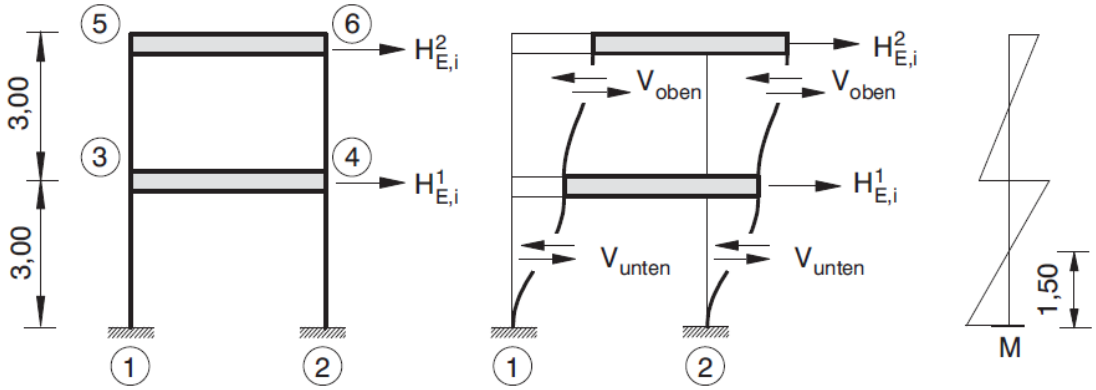


Abb. 1.102: Schnittkräfte aus den Eigenformen

aus 1. Eigenform:

$$V_{unten,1} = [\, H^1_{E,1} + H^2_{E,1} \,] \cdot \frac{1}{2} = [\, 6,03 + 9,75 \,] \cdot \frac{1}{2} = 7,890 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow M_{unten,1} = 1,5 \cdot 7,890 = 11,84 \text{ kNm}$$

aus 2. Eigenform

$$V_{unten,2} = [\, H^1_{E,2} + H^2_{E,2} \,] \cdot \frac{1}{2} = [\, 2,30 - 1,42 \,] \cdot \frac{1}{2} = 0,440 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow M_{unten,2} = 1,5 \cdot 0,440 = 0,66 \text{ kNm}$$

Überlagerung

$$V_{unten} = \sqrt{7,890^2 + 0,440^2} = 7,90 \text{ kN}$$

$$M_{unten} = \sqrt{11,84^2 + 0,66^2} = 11,86 \text{ kNm}$$

die erste Schwingungsform ist maßgebend.

1.19.5 Vergleich Antwortspektrenmethode – modale Analyse

In den folgenden Tabellen wird die Antwortspektrenmethode der modalen Analyse gegenübergestellt. Gemeinsame Basis sind die entkoppelten Differentialgleichungen. In Abbildung 1.103 wird der generelle Zusammenhang deutlich, in Abbildung 1.104 sind die Methoden genauer dargestellt.

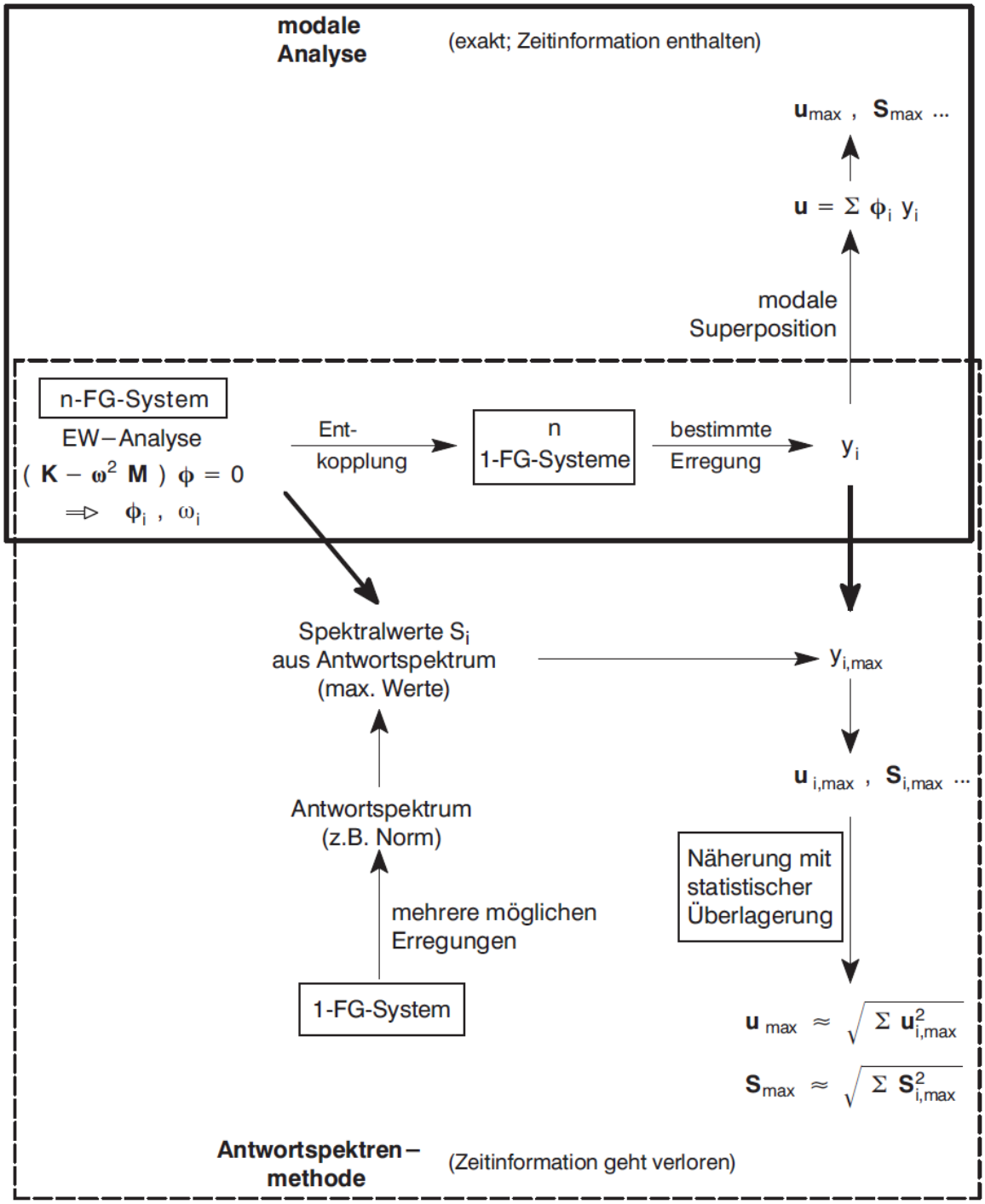


Abb. 1.103: Vergleich modale Analyse – Antwortspektrenmethode (generelles Vorgehen)

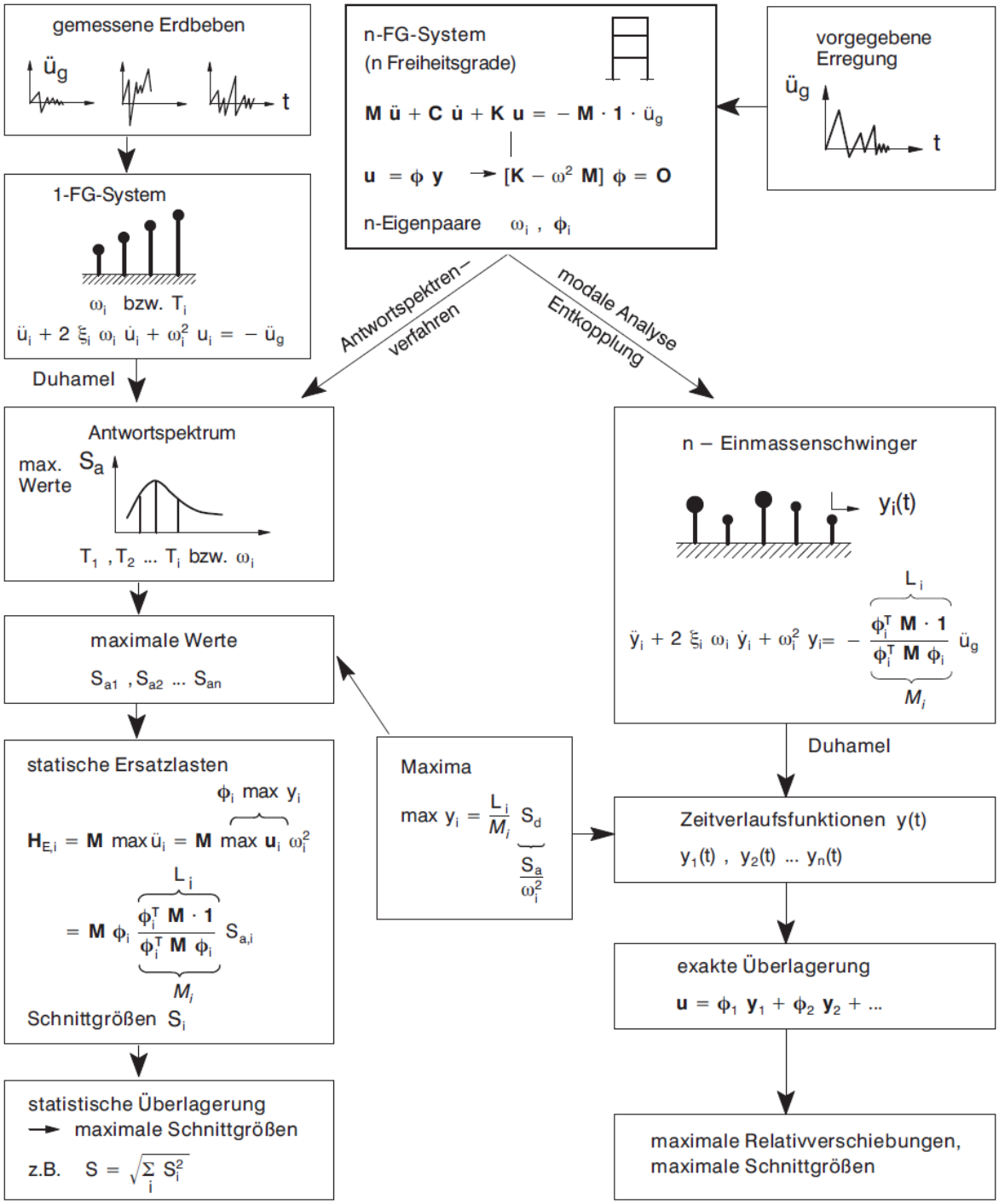
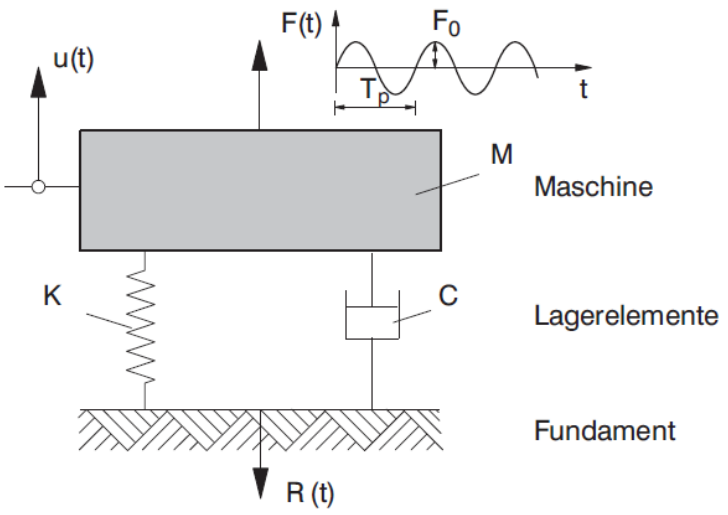


Abb. 1.104: Vergleich modale Analyse – Antwortspektrenmethode (Details)

1.20 Schwingungsisolierung, Schwingungstilgung

1.20.1 Schwingungsisolierung bei harmonischer Belastung

Tragwerke und andere Strukturen werden durch äußere Erregung häufig erheblichen dynamischen Beanspruchungen ausgesetzt. Typische Beispiele sind Maschinenfundamente, die durch Unwuchten harmonisch erregt werden. Durch gezielt abgestimmte Feder-Dämpfer Elemente kann das System so beeinflusst werden, dass die *Schwingungsdurchlässigkeit* reduziert wird. Das ist das Prinzip der *Schwingungsisolierung*. Es wird hier am Beispiel eines Systems mit einem Freiheitsgrad (Abbildung 1.105) gezeigt.



$F(t) = F_0 \sin \omega_p t;$ R(t) Reaktionskraft

Abb. 1.105: Harmonische Belastung eines Feder-Dämpfer-Masse-Systems

Als Maß für die Schwingungsisolierung wird die Schwingungsdurchlässigkeit (engl. *transmissibility*).

$$TR = \frac{\max R(t)}{F_0}$$

definiert. Sie gibt das Verhältnis der maximalen im Fundament ankommenden Reaktionskraft R zur Amplitude F_0 der eingetragenen Erregerkraft an und spielt gewissermaßen die Rolle eines Antwortspektrums für das Fundament. Das Ziel der Auslegung ist es, die Lagerkraft möglichst klein zu halten, also TR deutlich unter 1 zu bringen.

Es wird nur der stationäre Anteil der Lösung betrachtet, der transiente Anteil sei abgeklungen.

$$u(t) = \frac{F_0}{K} DLF_S(t); \qquad DLF_S(t) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}}_{D_S} \sin(\omega_p t - \theta_S) \tag{1.102}$$

$$u(t) = \frac{F_0}{K} D_S \sin(\omega_p t - \theta_S)$$

Reaktionskraft:

$$R(t) = K\,u(t) + C\,\dot{u}(t) = \frac{F_0}{K} D_S \left[K \sin(\omega_p t - \theta_S) + C\,\omega_p \cos(\omega_p t - \theta_S) \right]$$

$$\max R = R_0 = \frac{F_0}{K} D_S \sqrt{K^2 + C^2 \omega_p^2}; \quad C = 2\,M\,\omega\,\xi; \qquad M = \frac{K}{\omega^2}$$

$$R_0 = \frac{F_0}{\cancel{K}} D_S \sqrt{\cancel{K^2} + 4\,\xi^2 \cancel{K^2} \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

Schwingungsdurchlässigkeit:

$$TR = \frac{R_0}{F_0} = D_S \sqrt{1 + (2\,\xi\,\beta)^2}$$

bzw.

$$\boxed{TR = \frac{\sqrt{1 + (2\,\xi\,\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\,\xi\,\beta)^2}}} \tag{1.103}$$

Für $\beta = \sqrt{2}$ ist TR = 1,0, unabhängig von der vorliegenden Dämpfung ξ.

Der Verlauf von TR in Abhängigkeit von β ist in Abbildung 1.106 in doppelt-logarithmischem Maßstab dargestellt (aus [14]).

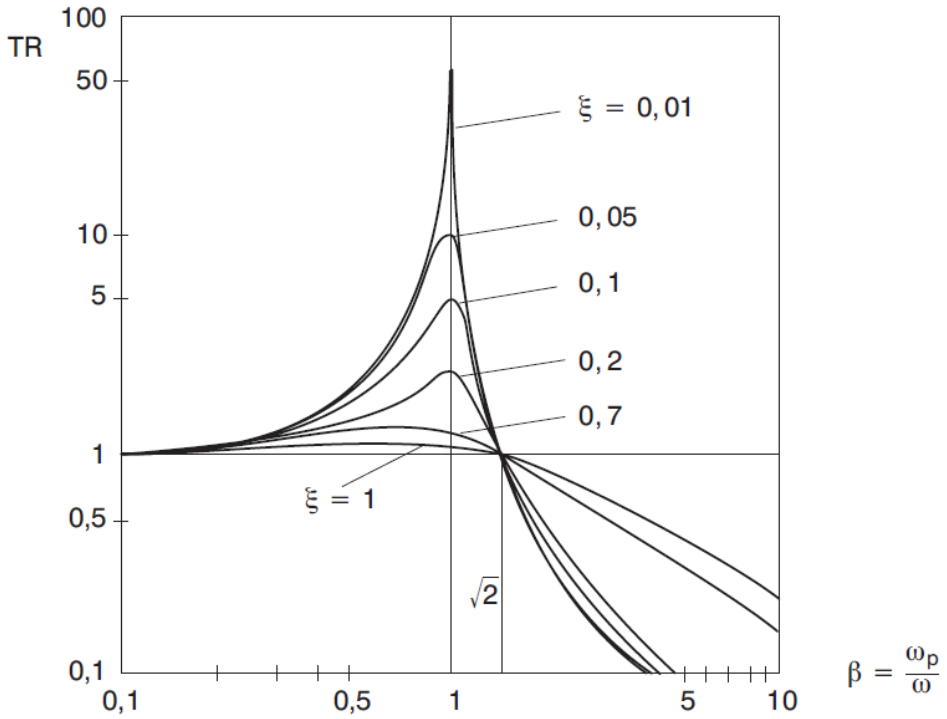


Abb. 1.106: Schwingungsdurchlässigkeit TR in Abhängigkeit von Dämpfung, Eigen-, und Erregerfrequenz (aus [14])

Ergebnis:

- $0 < \beta < \sqrt{2}$: TR > 1 : Die Lagerkraft ist größer als die ursprüngliche Belastung F_0.

  mit

  $\beta = 1$: Resonanz, $TR = \dfrac{\sqrt{1 + 4\,\xi^2}}{2\,\xi} \approx \dfrac{1}{2\,\xi} \gg 1 \quad (\xi < 0{,}2)$

- $\beta = \sqrt{2}$: TR = 1 : Lagerkraft = Belastung F_0

- $\beta > \sqrt{2}$: TR < 1

Um eine möglichst kleine Lagerkraft zu erhalten, muss β deutlich $> \sqrt{2}$ sein, d.h. je größer β, desto kleiner R_0. Daraus folgt

a) Bei gegebener Belastungsfrequenz ω_p soll die Eigenfrequenz ω möglichst klein sein, d.h. bei gegebener Masse M ist die *Steifigkeit K möglichst klein* zu wählen; die Federn sollten weich gewählt werden.

b) Eine geringe Dämpfung bewirkt ein rascheres Abnehmen von TR bei wachsendem β, aber z.B. beim Anfahren einer Maschine geht ω_p durch die Resonanz, d.h. bei weicher

Feder und kleiner Dämpfung erhält man große Verschiebungen der Masse. Es muss deshalb ein geeigneter Kompromiss bei der Konstruktion der Lagerung gefunden werden.

Zahlenbeispiel:

$$M = 5000 \text{ kg}, \quad K = 3000 \text{ kN/m}, \quad \xi_1 = 0{,}025, \quad \xi_2 = 0{,}25$$

$$F_0 = 100 \text{ kN}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3000}{5{,}0}} = 24{,}5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad f = 3{,}9 \text{ Hz}, \quad T = 0{,}256 \text{ s}$$

Die Schwingungsdurchlässigkeiten TR, die sich für zwei unterschiedliche Dämpfungsmaße ergeben, sind in Tabelle 1.9 angegeben.

β		0,5	1,0	2,0	10,0
ξ	0,025	1,33	20,0 (u_{max} = 0,67 m)	0,34	0,01
	0,25	1,30	2,0 (u_{max} = 0,07 m)	0,44	0,05

Resonanz

Tab. 1.9: Schwingungsdurchlässigkeit TR abhängig von β und ξ

1.21 Schwingungstilgung

1.21.1 Problemstellung und dynamisches Modell

In vielen Fällen möchte man Schwingungsamplituden in genau definierten Frequenzen vermindern, z.B. Grundschwingungen, die durch Winderregung bei Hochhäusern auftreten oder Eigenschwingungen von Brücken in Schrittfrequenzen, die durch Fußgänger angeregt werden. Hierbei werden Masse-Feder-Elemente (eventuell ergänzt durch einen Dämpfer) eingebaut, die als Eigenfrequenz genau die Frequenz haben, die bei dem Bauwerk getilgt werden soll.

Abb. 1.107: Fußgängerbrücke Schweiz (H. Bachmann, ETH Zürich)

Solche *Schwingungstilger* werden auch als „tuned mass damper“ bezeichnet. Diese Bezeichnung trifft die Wirkungsweise ziemlich gut, da die Schwingungstilgung durch Resonanzeffekte und nicht primär über viskose Dämpfungselemente erfolgt.

Das Prinzip wird vereinfacht an einem gekoppelten Zwei-Massen-System (Abbildung 1.108) erläutert.

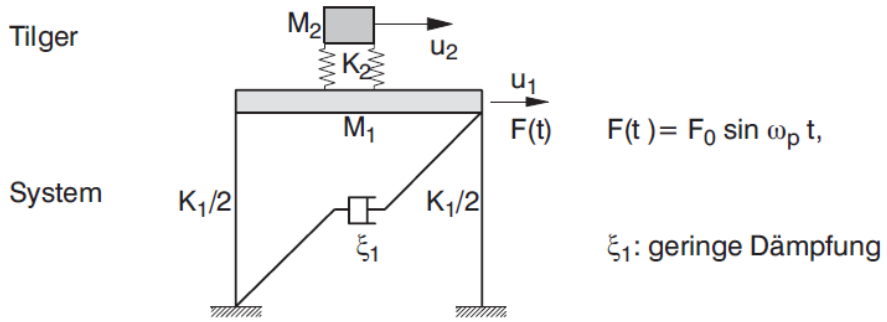


Abb. 1.108: Erzwungene Schwingung, Masse M_1, Schwingungstilger M_2

1.21.2 Eigenfrequenzen des Zweimassenschwingers

Aus der Bewegungsgleichung (1.48) erhält man für 2 Massen:

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.104}$$

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F}$$

Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} \omega_1^* &= \sqrt{\frac{K_1}{M_1}} && \text{System allein} \\ \omega_2^* &= \sqrt{\frac{K_2}{M_2}} && \text{Tilger allein} \\ \mu &= \frac{M_2}{M_1} && \text{relative Masse des Tilgers} \end{aligned} \tag{1.105}$$

Damit erhält man aus der Eigenwertanalyse des gekoppelten Systems $\det[\mathbf{K} - \omega^2\,\mathbf{M}] = 0$.

$$\rightarrow \omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left\{\left[\omega_2^{*2}\,(1+\mu) + \omega_1^{*2}\right] \pm \sqrt{(\omega_2^{*2} - \omega_1^{*2})^2 + \omega_2^{*4}\,\mu\,(2+\mu) + 2\,\omega_1^{*2}\;\omega_2^{*2}\mu}\right\}$$

Sonderfall: $\omega_2^* = \omega_1^*$ (abgestimmter Tilger)

$$\omega_{1,2}^2 = \omega_1^{*2} \cdot \frac{1}{2}\left\{2 + \mu \pm \sqrt{(2+\mu)^2 - 4}\right\} \tag{1.106}$$

Man erkennt, dass gegenüber dem Hauptsystem mit der Einzelmasse M_1 die Resonanzfrequenz durch den gekoppelten Tilger verschoben wird, abhängig vom Massenverhältnis μ.

1.21.3 Schwingungsamplituden

Es sei eine gewisse Dämpfung vorhanden, so dass der transiente Schwingungsanteil abklingt. Deshalb wird nur die *stationäre* Schwingungsphase bei einer harmonischen Erregung $F(t) = F_0 \cdot \sin \omega_p t$ (vgl. Abbildung 1.108) betrachtet. Beide Massen schwingen mit der Erregerfrequenz ω_p.

Ansatz:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \end{bmatrix} \sin \omega_p \, t$$

Damit erhält man aus Gleichung (1.104) das gekoppelte Gleichungssystem für die Schwingungsamplituden u_{10} und u_{20}:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K_1 + K_2 - \omega_p^2 M_1 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 - \omega_p^2 M_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{dyn}} \begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.107}$$

$$\mathbf{K}_{dyn} \qquad \mathbf{u} \quad = \quad \mathbf{F} \qquad \rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{K}_{dyn}^{-1} \, \mathbf{F}$$

$$\det \mathbf{K}_{dyn} = \left[(K_1 + K_2) - \omega_p^2 M_1 \right] \left[K_2 - \omega_p^2 M_2 \right] - K_2^2$$

$$= M_1 \, M_2 \left[\omega_1^{*2} \, \omega_2^{*2} - \omega_p^2 \left(\omega_2^{*2} + \omega_1^{*2} + \mu \, \omega_2^{*2} \right) + \omega_p^4 \right]$$

$$= M_1 \, M_2 \left(\omega_p^2 - \omega_1^2 \right) \left(\omega_p^2 - \omega_2^2 \right)$$

Schwingungsamplituden

$$\begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{K}} \begin{bmatrix} K_2 - \omega_p^2 M_2 & K_2 \\ K_2 & K_1 + K_2 - \omega_p^2 M_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_{10} = \frac{(K_2 - \omega_p^2 \; M_2) \cdot F_0}{M_1 \, M_2 \, (\omega_p^2 - \omega_1^2) \, (\omega_p^2 - \omega_2^2)}$$

$$u_{20} = \frac{K_2 \cdot F_0}{M_1 \, M_2 \, (\omega_p^2 - \omega_1^2) \, (\omega_p^2 - \omega_2^2)}$$

In diese Beziehung werden die Gleichungen (1.105) eingesetzt:

$$u_{10} = \frac{F_0}{K_1} \cdot \frac{\omega_1^{*2} \; \omega_2^{*2} \, (1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_2^{*2}})}{(\omega_p^2 - \omega_1^2) \, (\omega_p^2 - \omega_2^2)} = \frac{F_0}{K_1} \cdot D_1 \tag{1.108}$$

$$u_{20} = \frac{F_0}{K_1} \cdot \frac{\omega_1^{*2} \; \omega_2^{*2}}{(\omega_p^2 - \omega_1^2) \, (\omega_p^2 - \omega_2^2)} = \frac{F_0}{K_1} \cdot D_2 \tag{1.109}$$

Für den Fall des abgestimmten Tilgers $\omega_2^* = \omega_1^*$ erhält man mit der Gleichung für die Eigenfrequenzen (1.106):

$$u_{10} = \frac{F_0}{K_1} \cdot \frac{(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_1^{*2}}) \cdot \omega_1^{*4}}{(\omega_p^2 - \omega_1^{*2})^2 - \mu \; \omega_p^2 \; \omega_1^{*2}} \tag{1.110}$$

$$u_{20} = \frac{F_0}{K_1} \cdot \frac{\omega_1^{*4}}{(\omega_p^2 - \omega_1^{*2})^2 - \mu \; \omega_p^2 \; \omega_1^{*2}} \tag{1.111}$$

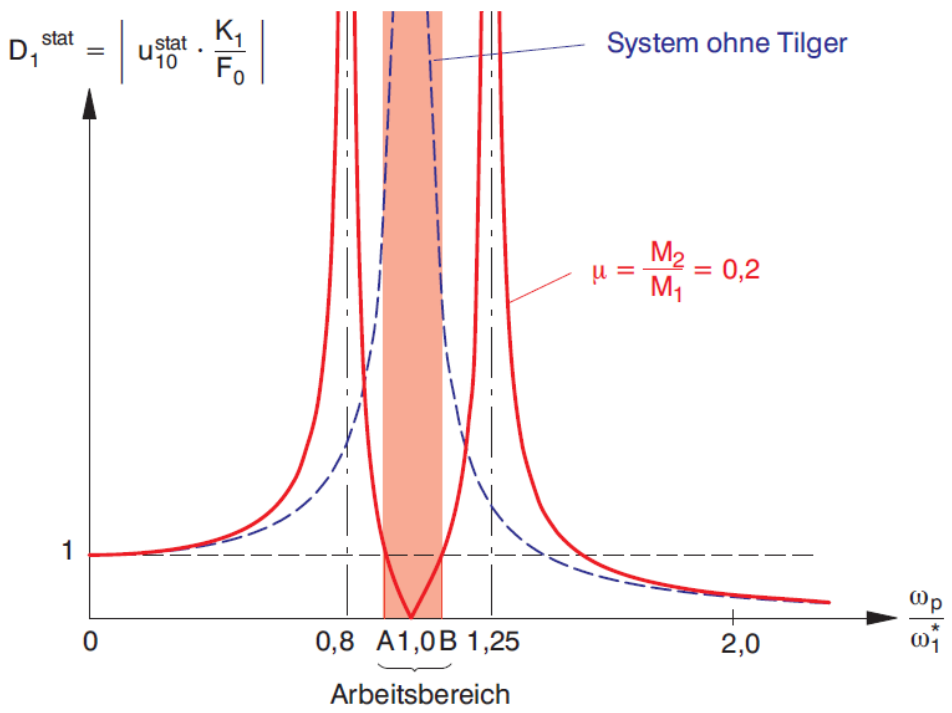


Abb. 1.109: Schwingungsamplitude einer Masse M_1 mit abgestimmtem Tilger M_2

Aus Gleichung (1.110) folgt, dass sich nun die Schwingungsordinate der Hauptmasse M_1 nicht nur verringert, sondern dass sie im stationären Zustand für $\omega_p = \omega_1^*$ (Resonanzzustand des Hauptsystems) ganz verschwindet, auch wenn die Tilgermasse M_2 deutlich kleiner als die Hauptmasse ist ($\mu = M_2/M_1 \ll 1$). (Dieser Tilgungseffekt ist unabhängig von einer externen Dämpfung.) Dafür entstehen zwei neue Resonanzstellen.

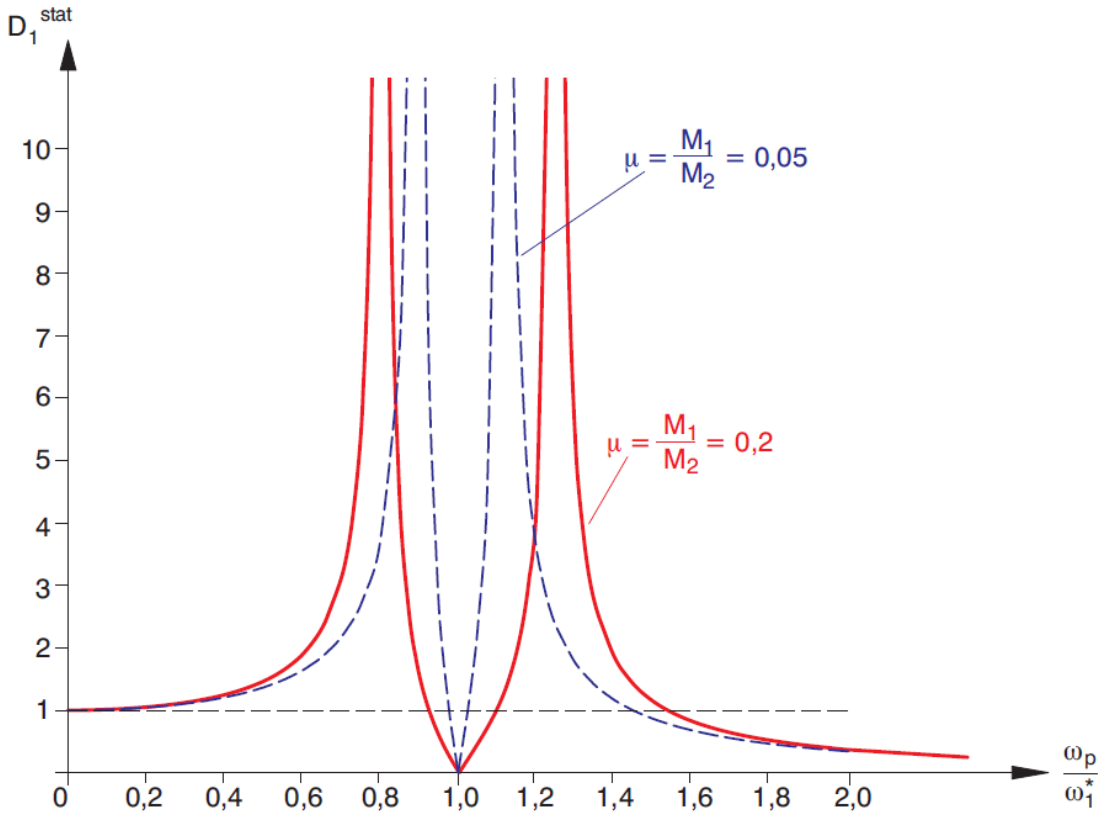


Abb. 1.110: Antwortspektrum des Hauptsystems bei unterschiedlichen Massenverhältnissen

In Abbildung 1.109 ist der dynamische Vergrößerungsfaktor der Hauptmasse D_1^{stat} über dem Verhältnis ω_p/ω_1^* für den Fall $\mu = 0,2$ aufgetragen (nach [14]). Je kleiner das Massenverhältnis $\mu = M_2/M_1$ ist, desto enger wird der Wirkungsbereich des Tilgers, und desto näher liegen die Resonanzstellen des Systems mit Tilger bei der Tilgungsstelle ω_p/ω_1^* (siehe Abbildung 1.110).

Man erkennt in Abbildung 1.109, dass u_{10} an der Stelle der ursprünglichen Resonanz verschwindet. Im Bereich A – B ist der dynamische Vergrößerungsfaktor $D_1<1$ (*Arbeitsbereich* des Tilgers). Je kleiner μ desto kleiner ist dieser Bereich. Man erkennt, wie wichtig die genaue Abstimmung des Tilgers ist.

Für die Dimensionierung des Tilgers wird seine Schwingungsamplitude für den Fall $\omega_p = \omega_1^* = \omega_2^*$ untersucht (u_{10}=0).

Aus Gleichung (1.111) folgt:

$$u_{20} = \frac{F_0}{K_1}\left(-\frac{1}{\mu}\right) = -\frac{F_0}{K_1}\frac{M_1}{M_2} = -\frac{F_0}{K_1}\frac{K_1}{K_2} = -\frac{F_0}{K_2}$$

Das bedeutet, dass die Kraft F_0 nun entgegengesetzt auf den Tilger wirkt, mit der daraus resultierenden Amplitude, die um den Faktor $1/\mu$ größer ist als die statische Amplitude der Masse M_1.

Dies ist ein entscheidendes Kriterium für die Dimensionierung des Tilgers. Zur Verbesserung des Schwingungsverhaltens des gekoppelten Systems wird meistens zusätzlich noch ein Dämpfungselement zwischen Hauptmasse und Tilger vorgesehen.

1.22 Literatur

[1]	Clough, R.W., Penzien, J.:	Dynamics of Structures. McGraw Hill, 2. Auflage, 1993.
[2]	Dowrick, D.J.:	Earthquake Resistant Design. Wiley & Sons, 2. Auflage, 1987.
[3]	Klingmüller, O., Lawo, M.:	Stabtragwerke, Matrizenmethoden der Statik und Dynamik. Teil 2: Dynamik.
[4]	Link, M.:	Teubner, Neuauflage 2001. Finite Elemente in der Statik und Dynamik.
[5]	Marguerre, K., Wölfel, H.:	Mechanics of Vibration. Sijthoff & Noordhoft, 1979.
[6]	Müller, F.P.:	Baudynamik – Betonkalender 1978, Teil II. Ernst & Sohn, 1978.
[7]	Müller, F.P., Keintzel, E.:	Erdbebensicherung von Hochbauten. Ernst & Sohn, 2. Auflage, 1984.
[8]	Gasch, R., Knothe, K.:	Strukturdynamik. Band 1: Diskrete Systeme. Springer, 1987. Band 2: Kontinua und ihr Diskretisierung. Springer 1989.
[9]	Bathe, K.J.:	Finite Elemente – Methoden. Springer, Neuauflage 2001.
[10]	DIN 4149:	Bauten in deutschen Erdbebengebieten. Teil 1, Ausgabe 1981.
[11]	Waller, H., Schmidt, R.:	Schwingungslehre für Ingenieure: Theorie, Simulation, Anwendungen. VDI – Verlag, 1989.
[12]	Mehlhorn, G. (Herausgeber):	Der Ingenieurbau: Grundwissen. Band 5: Baustatik, Baudynamik. Ernst & Sohn, 1996.
[13]	Bachmann, H.:	Erdbebensicherung von Bauwerken. Birkhäuser, 1995.
[14]	Chopra, A.K.:	Dynamics of Structures. Prentice Hall, 2. Auflage, 2000.
[15]	Petersen, Chr.:	Dynamik der Baukonstruktionen. Vieweg und Sohn, 1996.
[16]	Krätzig, W.B., Niemann, H. –J. (Hrsg.):	Dynamics of Civil Engineering Structures. Balkema, Rotterdam, 1996.
[17]	Wirtschaftsministerium Baden-Württemberg (Hrsg.):	Erdbebensicher Bauen Planungshilfe für Bauherren, Architekten und Ingenieure.