シミュレーション実習中間レポート問題

名古屋大学大学院理学研究科　川﨑猛史　出題

2024 年 5 月 13 日

[注意事項] 以下の問題（第 **1** 問・第 **2** 問）を期限までに解き **TACT** 課題の当該箇所から答案および数値計算に使用した任意のプログラミング言語を用いたコードを提出せよ．なお，答案は **pdf** ファイル，コードはテキストファイル (拡張子 **cpp** や **py**)，**python** ノートブック (拡張子**.ipynb**) などとせよ．なお第 **3** 問は任意で解答せよ．未解答でも不利にならないようにするが解答有りの場合は，他の問題の減点分の補填など成績に適宜考慮する．

第 1 問（Buffon の針）

水平面上に間隔 d の直線を等間隔かつ平行に引く．この時，断面の大きさが無視できる長さ $\ell(\ell < d)$ の棒を平面に対して一様にばら撒く際，棒が直線と交わる確率を考える．この問題では空間の対称性から棒が着地した近接の直線上に x 軸，棒の中点を通る x 軸と直交する y 軸を定義し，それらの原点は当該直線上に定める．また，棒と y 軸とのなす角度を図 1 のように θ と定める．この問題を考える際，空間の対称性から棒の中点座標を $(0, y_{\rm c})$，$y_{\rm c} \in [0, \frac{d}{2}]$ とすれば，**棒の下半分が直線** (x **軸**) **と交わる場合について考えれば十分**であることに注意する．また，棒は空間に対して一様にばら撒くため，$y_{\rm c}$ は $[0, d/2]$，θ は，$[0, \pi/2]$ の範囲をそれぞれ分布する一様乱数とみなすことができるとしよう．この時，以下の各問に答えよ．

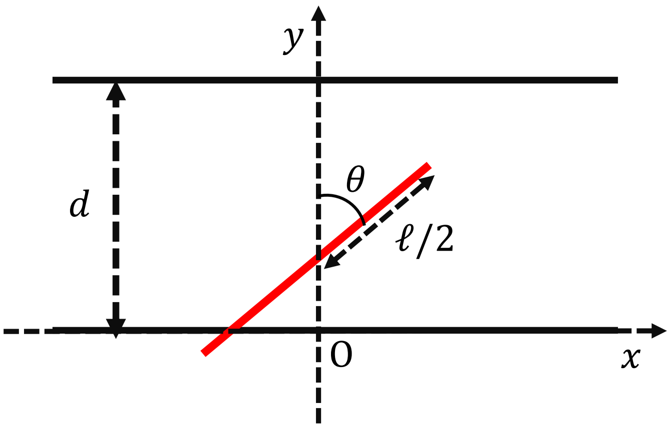

図 1: 第 1 問設定図

[設問]

(1) 棒が直線に交わる条件（領域）を $\theta - y_{\rm c}$ 平面上に図示せよ．作図は手書きでもコンピュータによる描画のどちらでもよい．(3 点)

(2) (1) の領域と当該一様乱数が分布する全範囲の面積の比を考えることで，棒が直線に交わる確率 p が $\frac{2\ell}{\pi d}$ となることを解析的に示せ．(4 点)

(3) $y_{\rm c}$，θ の一様乱数を数値的に生成することで，棒が直線に交わる確率 p を数値的に実測することができる．これと解析的な (2) の値と比較することで円周率が見積もられる．棒をばら撒く回数 n を $[10^2, 10^8)$[1]の範囲を系統的に変化させた際，数値計算により見積もられる円周率が n に対してどのように変化するかプロットせよ．もしコンピュータの計算性能がいまいちである場合は，n の区間を調整してよいものとする．(4 点)

[1] [は閉区間，) は開区間を表す．

(4) 問題 **(3)** の数値計算の結果と理論値 π の誤差の関係を n に対してプロットし，$\frac{C}{\sqrt{n}}$ と比較せよ (C には適当な定数を入れよ)．(4 点)

第 2 問（単振動）

一端を固定した，ばね定数 k のばねに，質点とみなせる質量 m の小球をつけ，滑らかな水平面上を 1 次元運動させる．ここで小球に働く抵抗力や小球に働く熱揺動力は無視できるものとする．この時，適当な座標系を敷き，時刻 t における小球の位置を $x(t)$ とすれば，物体の運動方程式は，

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t)$$

と表され，物体が周期運動（単振動）する解析解を得ることができる．いま，これを数値計算を用いて解くことにしよう．以下の各問に答えよ．

[設問]

(1) $\tilde{x}$，$\tilde{t}$，$\tilde{v}$ を長さ，時間，速度に関する無次元の変数であるとし，問題にて与えた実際の物理量との関係は $x = a\tilde{x}$，$t = t_0\tilde{t}$，$\dot{x} = v = (a/t_0)\tilde{v}$ であるとする．ここで a[m]，t_0[s] は適当に定めた長さと時間である．上記の関係を用いることで運動方程式を無次元化せよ．(2 点)

(2) 時間の単位 t_0 を $t_\mathrm{s} = \sqrt{m/k}$ とおくと (1) の方程式はどのようになるか答えよ．以下の問題では $t_0 = t_\mathrm{s}$ を踏襲する．(2 点)

(3) (2) の方程式を時間刻み $\Delta\tilde{t}$ で離散化する．これを速度と位置に関していずれも**陽的 Euler 法**で離散化した時に得られる漸化式を $\tilde{v}(\tilde{t})$，$\tilde{x}(\tilde{t})$ に対してそれぞれ立てよ．(2 点)

(4) (3) の離散化を**半陰的 Euler 法**で行った場合，(3) との違いを簡単に説明せよ．(3 点)

(5) 初期条件を $x(0) = a$，$v(0) = 0$ とするとき，$\Delta\tilde{t} = 0.1$ とした上で **(3) の陽的 Euler 法，(4) の半陰的 Euler 法**をそれぞれ用いることで，位置座標 $x(t)$ の時間依存性を数値的に計算し，結果を作図せよ．なお，作図の時間区間はそれぞれ $[0, 100t_\mathrm{s})$ とすること．(3 点)

(6) (5) に関する 2 つの場合に関して，位置座標 $x(t)$，速度 $v(t)$ の関係（位相空間での関係）を $[0, 100t_\mathrm{s})$ とし作図せよ．(3 点)

第 3 問（中心極限定理）

(1) [-1,1] の範囲で一様乱数を 10^4 個発生させた際の度数分布を作図せよ．

(2) [-1,1] の範囲で一様乱数を 10^6 個発生させ，その中の任意の 100 個ずつの平均値をとる．この時，この平均値の度数分布を作図せよ．また解析的にどのような関数に漸近するか考察せよ．