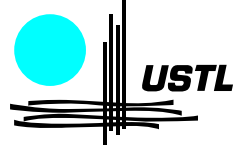




Automates et Langages

Le 22 juin 2007 – durée 3h – tous documents
autorisés



Examen 2nde session

Exercice 1 : Soient les expressions rationnelles :

- $e_1 = (a + b)^* + aa^*b$
- $e_2 = (a^*b^*)^*$
- $e_3 = (ab)^*$
- $e_4 = (ab)^*(ab)^*$

Question 1.1 : Est-ce que :

1. $L(e_1) \subseteq L(e_2) ? L(e_2) \subseteq L(e_1) ?$
2. $L(e_2) \subseteq L(e_3) ? L(e_3) \subseteq L(e_2) ?$
3. $L(e_3) \subseteq L(e_4) ? L(e_4) \subseteq L(e_3) ?$

Vous justifierez vos réponses.

Question 1.2 : Donner l'automate de Glushkov pour l'expression e_4 . Est-il déterministe ?

Question 1.3 : Donner une expression équivalente à e_4 pour laquelle l'automate de Glushkov est déterministe.

Exercice 2 :

On considère l'alphabet $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$.

Question 2.1 : Donner un automate non déterministe à 5 états qui reconnaît l'ensemble L_p des mots sur l'alphabet A qui ont $papa$ comme facteur.

Question 2.2 : En appliquant les algorithmes de détermination et de minimalisation, en déduire l'automate déterministe minimal pour L_p .

Question 2.3 : Donner un automate déterministe pour $\overline{L_p}$, le complémentaire de L_p pour l'alphabet A .

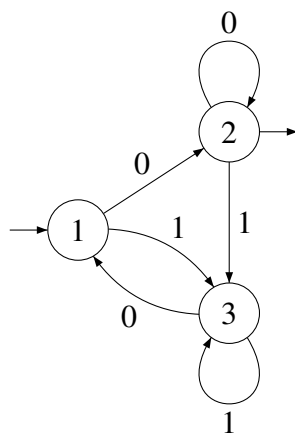
Exercice 3 : On souhaite modéliser une machine à café par un automate. Cette machine distribue du café, avec ou sans sucre, avec ou sans lait, et peut le rallonger avec de l'eau chaude. Le prix d'un café est de 1 euro, et la machine accepte les pièces de 50 centimes et de 1 euro. On code chaque action de l'utilisateur par une lettre :

- 1 pour insérer un euro
- 5 pour insérer cinquante centimes
- s pour appuyer sur le bouton sucre
- l pour appuyer sur le bouton lait
- e pour appuyer sur le bouton eau chaude
- c pour appuyer sur le bouton café.

L'appui sur le bouton c fait tomber un gobelet et déclenche le remplissage du gobelet, à condition d'avoir préalablement mis suffisamment d'argent. S'il n'y a pas assez d'argent, un message d'erreur s'affiche. L'appui sur le bouton e fait couler de l'eau chaude à condition qu'il y ait déjà un gobelet (sinon, on a un message d'erreur). On peut appuyer plusieurs fois sur le bouton e . Il faut sélectionner le sucre et/ou le lait avant d'appuyer sur la touche c , mais après avoir introduit sa monnaie. On ne peut appuyer qu'une seule fois sur le bouton sucre (ou lait), sinon, on déclenche un message d'erreur. On peut insérer plus d'argent que nécessaire, la machine rendra la monnaie au moment du versement du café.

Question 3.1 : Donner un automate déterministe qui reconnaît toutes les séquences d'actions de l'utilisateur qui permettent d'obtenir une boisson chaude, sans engendrer de message d'erreur.

Exercice 4 : Soit M l'automate suivant :



Question 4.1 : En résolvant un système d'équations approprié, trouver une expression rationnelle définissant $L(M)$, le langage reconnu par M .

Exercice 5 : On modélise les relations familiales entre personnes par des formules logiques. On considère un prédicat $père(x,y)$, un prédicat $ancêtre(x,y)$, et le prédicat d'égalité $=$. On interprétera les formules dans des ensembles finis, et la relation ancêtre (interprétation du prédicat ancêtre) sera toujours la clôture transitive de la relation père (interprétation du prédicat père). Ceci signifie que les formules suivantes sont valides pour les interprétations que l'on considère :

$$\forall x, y (père(x,y) \rightarrow ancêtre(x,y))$$

$$\forall x, y, z (père(x,y) \wedge ancêtre(y,z) \rightarrow ancêtre(x,z))$$

Voici quelques exemples d'interprétations, sur le domaine $D = \{ Jean, Julien, Simon, Ahmed, Léo \}$:

1. interprétation I_1 : La relation $père$ est vraie pour les couples du tableau suivant :

Jean	Julien
Jean	Simon
Ahmed	Léo

Ce qui signifie que Jean est le père de Julien et Simon, et Ahmed le père de Léo.

2. interprétation I_2 :

Jean	Julien
Jean	Simon
Ahmed	Léo
Ahmed	Jean

3. interprétation I_3 :

Jean	Julien
Jean	Simon
Ahmed	Léo
Jean	Léo

4. interprétation I_4 :

Jean	Julien
Julien	Simon
Simon	Léo
Léo	Julien

Remarque : Pour répondre à une question, vous pouvez utiliser les prédicats définis aux questions précédentes.

Question 5.1 : L'interprétation I_3 pose problème car Léo a deux pères. Définir un prédicat *au-PlusUnPère*(x) permettant d'exprimer que x a au plus un père.

Question 5.2 : Définir un prédicat *orphelin*(x) qui signifie que x n'a pas de père.

Question 5.3 : On s'intéresse aux interprétations qui sont des arbres généalogiques. Donner une formule qui définit ce qu'est un arbre généalogique :

1. Il y a une et une seule personne sans père (ce n'est pas vérifié par l'interprétation I_1)
2. Chaque personne a au plus un père (ce n'est pas vérifié par l'interprétation I_3)
3. La relation ancêtre est anti-symétrique (ce n'est pas vérifié par l'interprétation I_4 , car on a *ancêtre*(Julien,Léo) et *ancêtre*(Léo,Julien))

Question 5.4 : Deux personnes x et y sont frères si elles ont le même père. Définir le prédicat *frère*(x,y).

Question 5.5 : Définir un prédicat *grand-oncle*(x,y), sachant que le grand-oncle est le frère du grand-père.