Licence ST Informatique – S4 – 2008/2009

Automates et langages

janvier 2009

Résumé du cours 1 : Logique Propositionnelle

La logique propositionnelle (ou logique des propositions) permet de manipuler des propositions qui prennent une valeur de vérité `vrai` ou `faux`.
Définition 1 : Une *proposition* est un énoncé qui peut prendre la valeur `vrai` ou la valeur `faux`.

On note $\mathcal{B}$ l'ensemble $\{\mathtt{vrai}, \mathtt{faux}\}$.
En logique, le calcul propositionnel définit les règles de raisonnement concernant les propositions. On fait abstraction du sens réel des propositions qui sont représentées par des symboles de variables appelées *variables propositionnelles.*

On considère **deux points de vue** :

- Le point de vue **syntaxique** : définir comment s'écrivent les formules. Les manipuler en faisant abstraction de leur signification (preuves).
- Le point de vue **sémantique** : définir la signification des formules.

1 Syntaxe des formules

Définition 2 : Soit $\mathcal{V}$, un ensemble infini de symboles appelés *variables propositionnelles*, les formules de la logique propositionnelle sont définies inductivement par :

- Une variable de $\mathcal{V}$ est une formule.
- `faux` est une formule, `vrai` est une formule.
- Si f est une formule alors $(\neg f)$ est une formule.
- Si f et g sont des formules, alors $(f \wedge g)$, $(f \vee g)$, $(f \longrightarrow g)$ et $(f \longleftrightarrow g)$ sont des formules.

En logique, les opérateurs sont appelés *connecteurs.* Par exemple, $\neg$ est un connecteur unaire, les constantes `vrai` et `faux` sont considérées comme des connecteurs sans paramètre (0-aire).

Remarque : Pour éviter la multiplication de parenthèses dans les formules, on attribue par la suite une priorité aux différents connecteurs : du plus prioritaire au moins prioritaire on a les parenthèses (), le non $\neg$, le et $\wedge$, le ou $\vee$, l'implication $\longrightarrow$ et enfin l'équivalence $\longleftrightarrow$.
On utilise aussi l'associativité des connecteurs $\wedge$ et $\vee$.

Voici, en tenant compte de la remarque ci-dessus, quelques exemples de formules :

- $(((p \wedge q) \vee r) \wedge (\neg p))$ qui peut aussi s'écrire $(p \wedge q \vee r) \wedge \neg p$.
- $(((p \vee q) \vee (r \wedge (\neg q))) \vee s)$ qui peut aussi s'écrire $p \vee q \vee r \wedge \neg q \vee s$

Remarque : Certaines définitions de la logique propositionnelle permettent moins de connecteurs dans les formules. C'est parce que certains connecteurs peuvent être définis à partir des autres. On reviendra sur ce problème la semaine prochaine.

2 Sémantique des formules

Définition 3 : Une *valuation* est une application de l'ensemble $\mathcal{V}$ des variables propositionnelles dans l'ensemble $\mathcal{B}$.

On associe à chaque connecteur sa table de vérité :

f	g	$\neg f$	$f \vee g$	$f \wedge g$	$f \longrightarrow g$	$f \longleftrightarrow g$
vrai	vrai	faux	vrai	vrai	vrai	vrai
vrai	faux	faux	vrai	faux	faux	faux
faux	vrai	vrai	vrai	faux	vrai	faux
faux	faux	vrai	faux	faux	vrai	vrai

Définition 4 : Etant donnée une valuation α, l'interprétation I_α est l'application de l'ensemble des formules dans $\mathcal{B}$, qui associe à toute formule sa valeur de vérité selon la valuation α, de la manière suivante :

- Si $p \in \mathcal{V}$, $I_\alpha(p) = \alpha(p)$,
- $I_\alpha(\mathtt{vrai}) = \mathtt{vrai}$ et $I_\alpha(\mathtt{faux}) = \mathtt{faux}$
- Si f est une formule alors $I_\alpha(\neg f) = \neg I_\alpha(f)$
- Si f et g sont des formules, alors $I_\alpha(f \wedge g) = I_\alpha(f) \wedge I_\alpha(g)$, $I_\alpha(f \vee g) = I_\alpha(f) \vee I_\alpha(g)$, $I_\alpha(f \longrightarrow g) = I_\alpha(f) \longrightarrow I_\alpha(g)$ et $I_\alpha(f \longleftrightarrow g) = I_\alpha(f) \longleftrightarrow I_\alpha(g)$.

Définition 5 : La table de vérité d'une formule f est une table qui associe à toute valuation α la valeur de vérité $I_\alpha(f)$ de la formule f

Exemple 1 *Voici la table de vérité de la formule* $\neg p \wedge (q \vee r)$ *:*

p	q	r	$\neg p$	$q \wedge r$	$\neg p \wedge (q \vee r)$
vrai	vrai	vrai	faux	vrai	faux
vrai	vrai	faux	faux	vrai	faux
vrai	faux	vrai	faux	vrai	faux
vrai	faux	faux	faux	faux	faux
faux	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai
faux	vrai	faux	vrai	vrai	vrai
faux	faux	vrai	vrai	vrai	vrai
faux	faux	faux	vrai	faux	faux

Définition 6 :

- Une formule f est une *tautologie* si elle est vraie pour toute valuation. On note $\models f$.
- Une formule f est une *antilogie* si elle est fausse pour toute valuation. On note $\models \neg f$.
- Deux formules f et g sont *équivalentes* si elles ont la même table de vérité.
- Une formule f est *satisfiable* s'il existe une valuation pour laquelle elle est vraie.
- Une valuation qui rend vraie une formule f est appelée *modèle* de f.

3 Système de preuve

Système à la Hilbert :

- On se donne un ensemble d'axiomes logiques $\mathcal{A}$ qui sont des formules valides du calcul propositionnel.
- On se donne une règle d'inférence appelée *modus ponens* : Si on a f et $f \longrightarrow g$ alors on a g.

Définition 7 : Soit φ une formule. Une *preuve* de φ est une liste finie ordonnée de formules $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$, où $\varphi_n = \varphi$ et chaque φ_i est

- Soit une instance d'axiome de $\mathcal{A}$ (ou de théorème) c'est-à-dire l'un des axiomes logiques (ou l'un des théorèmes déjà démontrés) dans lequel les variables propositionnelles sont remplacées par des formules.
- Soit une formule conséquence des formules antérieures par modus ponens.

Une formule φ qui admet une preuve est un *théorème*, que l'on note $\vdash \varphi$

Remarque : Il existe plusieurs choix possibles d'ensembles d'axiomes. Certains ensembles d'axiomes sont définis pour les connecteurs $\{\longrightarrow, \neg\}$. On verra la semaine prochaine que cet ensemble n'est pas moins expressif que $\{\wedge, \neg, \vee, \longrightarrow, \longleftrightarrow\}$

Voici un exemple de système d'axiomes $\mathcal{A}$ pour les connecteurs $\{\wedge, \neg, \vee, \longrightarrow\}$:

- Axiome K : $f \longrightarrow (g \longrightarrow f)$
- Axiome S : $(f \longrightarrow (g \longrightarrow h)) \longrightarrow ((f \longrightarrow g) \longrightarrow (f \longrightarrow h))$
- raisonnement par l'absurde : $(\neg f \longrightarrow g) \longrightarrow ((\neg f \longrightarrow \neg g) \longrightarrow f)$
- contraposition : $(\neg g \longrightarrow \neg f) \longrightarrow (f \longrightarrow g)$
- $f \longrightarrow (g \longrightarrow f \wedge g)$
- $(f \wedge g) \longrightarrow f$, $(f \wedge g) \longrightarrow g$
- $f \longrightarrow (f \vee g)$, $g \longrightarrow (f \vee g)$
- raisonnement par cas : $f \vee g \longrightarrow ((f \longrightarrow h) \longrightarrow ((g \longrightarrow h) \longrightarrow h))$

Pour simplifier les preuves, on étend le système en ajoutant la possibilité d'utiliser des hypothèses (formules non prouvées).
Théorème de déduction : $A \vdash B$ si et seulement si $\vdash A \longrightarrow B$

Remarque : En TD, on utilisera les propriétés des connecteurs (feuille distribuée en TD) en admettant que ce sont des théorèmes.

Le système $\mathcal{A}$ est *correct* car tout théorème est une tautologie (on ne démontre pas des formules qui ne sont pas valides !) et *complet* car toute tautologie est un théorème, c'est à dire qu'on peut construire une preuve pour toute formule valide.

4 Conclusion

$$\vdash A \text{ si et seulement si } \models A$$

Pour démontrer qu'une formule propositionnelle est toujours vraie (quelles que soient les valeurs des variables propositionnelles), on a deux possibilités :

- Calculer pour toutes les valuations la valeur de vérité de la formule (en construisant par exemple sa table de vérité) afin de montrer que cette formule est une tautologie.
- Construire une preuve de la formule à partir de théorèmes déjà connus, afin de démontrer que cette formule est un théorème.