4000 01

INFL 2 AEL 08

INFL2AEL08

Licence ST Informatique – S4 – 2007/2008

Automates et Langages

Le 22 mai 2008 – durée 3h – tous documents autorisés

Examen

Exercice 1 : Un vol a été commis à Villeneuve d'Ascq et l'inspecteur Maigret mène l'enquête. Les trois principaux suspects André, Bernard et Claude font les dépositions suivantes :

- André (TA) : "Bernard est coupable. Claude n'a rien à voir là dedans".
- Bernard (TB) : "Si André a fait le coup alors Claude est innocent".
- Claude (TC) : "Je suis innocent mais l'un des deux autres au moins est coupable".

Question 1.1 : Transformez les trois témoignages TA, TB et TC en formules de la logique des propositions, avec trois variables propositionnelles qui représentent la culpabilité de chacun des suspects.

Question 1.2 : Cet ensemble de formules est-il satisfiable ? Pour répondre à cette question, construisez la table de vérité de ces formules.

Question 1.3 : En vous aidant de la table de vérité, et en supposant que les trois suspects n'ont pas menti, que pouvez-vous dire concernant leur culpabilité ?

Question 1.4 : La police découvre qu'André a menti, contrairement à Bernard et Claude. La déposition d'André étant fausse, qu'en déduisez-vous concernant la culpabilité des trois suspects ?

Exercice 2 : *les deux dernières questions sont indépendantes des trois premières*
Soit l'expression rationnelle $r = a.(bab + aa)^*.a^*$
Question 2.1 : Construisez l'automate de Glushkov G pour l'expression r.

Question 2.2 : Déterminisez l'automate G afin d'obtenir un automate D.

Question 2.3 : Minimalisez l'automate D, vous obtenez l'automate minimal déterministe et complet M qui reconnaît $L(r)$.

Question 2.4 : Calculez les langages résiduels de $L(r)$.

Question 2.5 : Déduisez de la question précédente l'automate des résiduels de $L(r)$.

Exercice 3 : Dans un langage de manipulation de données, on définit un format pour les dates.

- une date est composée d'une année puis éventuellement d'un mois puis éventuellement d'un jour, séparés par des tirets (-).
- Le mois et le jour sont optionnels mais si le jour existe alors le mois aussi.
- une année est un nombre qui ne commence pas par 0 (l'année 0 n'existe pas). Ce nombre a au moins un chiffre, mais on ne lui donne pas de longueur maximale.
- un mois est un entier entre 1 et 12, écrit sur 2 chiffres (donc de `01` à `12`)
- un jour est un entier entre 1 et 31, écrit aussi sur 2 chiffres.

Question 3.1 : Donner un automate déterministe qui reconnaît les dates écrites sous ce format. On ne tient pas compte de la vérification du jour en fonction du mois et de l'année. Ainsi, l'automate acceptera des dates qui n'existent pas, comme `2005-02-31`.

Exercice 4 : On définit une nouvelle opération sur les mots, notée $\sqcup\!\sqcup$ et appelée *produit de mélange.*
Si X est un alphabet et u, v deux mots sur cet alphabet,
$u \sqcup\!\sqcup v = \{u_1.v_1 \cdots u_n.v_n \mid u = u_1.\cdots.u_n, v = v_1.\cdots.v_n, n \geq 1, \forall i\ u_i \in X^*, v_i \in X^*\}$
Par exemple, $ab \sqcup\!\sqcup cc = \{abcc, acbc, cabc, cacb, ccab, accb\}$
On étend naturellement cette opération aux langages :
$L_1 \sqcup\!\sqcup L_2 = \{w \mid w \in u \sqcup\!\sqcup v, u \in L_1, v \in L_2\}$
Question 4.1 : Donner une expression rationnelle définissant les langages suivants :

1. $aab \sqcup\!\sqcup ab$
2. $a^* \sqcup\!\sqcup bb$
3. $a^* \sqcup\!\sqcup b^*$

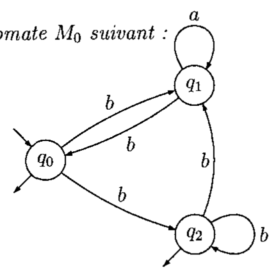
Etant donnés deux langages reconnaissables, leur produit de mélange est aussi un langage reconnaissable.
Question 4.2 : A partir de deux automates M_1 et M_2, comment construire un automate qui reconnaît $L(M_1) \sqcup\!\sqcup L(M_2)$?

Exercice 5 : On considère la famille $\mathcal{F}$ des formules de la logique des prédicats construites à l'aide des deux prédicats unaires I et F et du prédicat binaire `chemin`. On considère également la famille $\mathcal{A}$ des automates non nécessairement déterministes sur l'alphabet $\{a, b\}$ et, pour tout automate $M = (\{a, b\}, Q, I, F, \delta) \in \mathcal{A}$, on associe l'interprétation $\mathcal{I}_M$ pour les formules de la famille $\mathcal{F}$ de la façon suivante :

- l'ensemble des valeurs pour les variables est Q, l'ensemble des états de M.
- $I(x)$ signifie que l'état x est un état initial de M.
- $F(x)$ signifie que l'état x est un état final de M.
- $\texttt{chemin}(x, y)$ signifie qu'il existe un chemin de x vers y, i.e. il existe un mot $w \in X^*$ tel que $\delta^*(x, w)$ contient l'état y.
- $x = y$ a le sens habituel de l'égalité et signifie que l'état x est égal à l'état y.

On dira qu'un automate $M \in \mathcal{A}$ est un modèle d'une formule $f \in \mathcal{F}$, noté $M \models f$, si la formule f est vraie pour l'interprétation $\mathcal{I}_M$.

Exemple 1 *Considérons l'automate M_0 suivant :*



On a
$M_0 \models \forall x\ \forall y\ chemin(x, y)$, *car à partir de tout état x, on peut atteindre les 3 états de l'automate M_0 en suivant les transitions de δ.*

Revenons au cas général :

Question 5.1 : Donner une formule $\texttt{accessible}(x)$ qui exprime que x est un état accessible.

Question 5.2 : Donner une formule $\texttt{co-accessible}(x)$ qui exprime que x est un état co-accessible.

Question 5.3 : Donner une formule vérifiée par un automate si et seulement si celui-ci reconnaît un langage non vide.

Question 5.4 : Un automate reconnaît un langage fini s'il n'existe pas de cycle sur un chemin partant d'un état initial et allant dans un état final. Donner une formule vérifiée par un automate si et seulement si celui-ci reconnaît un langage fini.

Question 5.5 : Quel est le nombre minimum d'états que doit posséder un automate qui reconnaît un langage fini ? (ce nombre dépend du langage que l'on considère, donner une borne inférieure la plus grande possible !). Donner un langage fini F et un automate reconnaissant F qui possède ce nombre minimum d'états.

400001

INFL 2 AEL 08

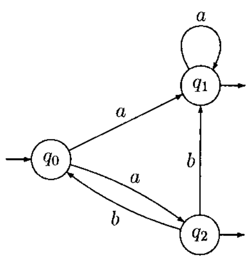
Licence ST Informatique – S4 –
2007/2008

Automates et Langages

Le 27 juin 2008 – seconde session – durée 3h
tous documents autorisés

Examen

Exercice 1 : Soit M l'automate suivant :



A l'aide d'un système d'équations, calculer une expression rationnelle définissant le langage reconnu par M.

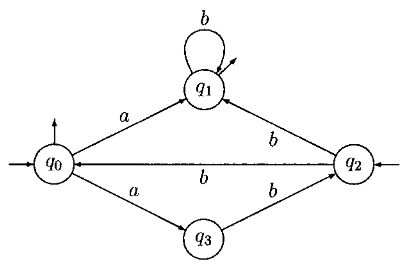
Exercice 2 : Au tennis, lors d'un jeu, voici la manière dont les points sont décomptés :

- zéro pour aucun point marqué dans le jeu,
- quinze pour un point marqué,
- trente pour deux points marqués,
- quarante pour trois points marqués.

Le gagnant est le premier à gagner 4 points avec 2 points d'écart. Lorsque les deux joueurs ont marqué trois points, (donc à 40/40), il y a égalité. Celui qui marque le point suivant obtient un avantage. Pour marquer le jeu, un joueur qui a l'avantage doit marquer un autre point. Si c'est le joueur qui n'a pas l'avantage qui marque le point suivant, on revient à égalité, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'un des deux joueurs remporte le jeu.
On veut représenter par un automate toutes les séquences de points gagnants dans un jeu au tennis. On utilise l'alphabet $\{a, b\}$, où la lettre a signifie *le joueur A gagne le point*, et la lettre b signifie *le joueur B gagne le point.*

Question 2.1 : Donner un automate déterministe qui reconnaît les mots qui représentent des jeux au tennis. Cet automate reconnaîtra par exemple le mot $aaaa$ qui représente une victoire du joueur A en passant par les scores intermédiaires 15/0, 30/0 et 40/0. Le mot $abbabaabbb$ représente une victoire du joueur B après 40/40 et 4 échanges pour déterminer le gagnant. Le mot $aabb$ ne sera pas reconnu car il représente le score 30/30 et le jeu n'est donc pas terminé.

Exercice 3 : Donnez l'automate minimal déterministe équivalent à l'automate non déterministe suivant :



Vous devez justifier votre réponse en détaillant les différentes méthodes utilisées permettant de prouver que l'automate que vous donnez en réponse est bien déterministe minimal.

Exercice 4 :

Question 4.1 : Soit $F = (\neg a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \neg b)$

Démontrez sans utiliser les tables de vérité, mais uniquement le calcul propositionnel basé sur les propriétés des connecteurs, que F est équivalente à $(\neg a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Question 4.2 : Démontrez de la même manière que la formule suivante est une tautologie :

$$((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$$

tourner la page

Exercice 5 : Soit l'alphabet $A = \{a, b\}$

Question 5.1 : Donner une expression rationnelle qui définit le langage des mots sur l'alphabet A qui commencent et terminent par a et ont un nombre pair de b.

Question 5.2 : Donner une expression rationnelle qui définit le langage des mots sur l'alphabet A qui n'ont pas ab comme facteur.

Si L est un langage rationnel, on note $\mathrm{alph}(L)$ l'alphabet utilisé pour L. Par exemple $\mathrm{alph}(a^*) = \{a\}$, $\mathrm{alph}(a(bb)^*c + b^*c) = \{a, b, c\}$.
Par la suite, on utilise le complémentaire d'un langage L :

Définition 1 : Soit L un langage rationnel. Le complémentaire de L, noté $\overline{L}$ est l'ensemble des mots sur l'alphabet $\mathrm{alph}(L)$ qui n'appartiennent pas à L.

Exemple 1 $\overline{b^*} = \emptyset$, $\overline{a(a+b)^*} = \varepsilon + b(a+b)^*$

On définit des expressions rationnelles étendues, en s'autorisant l'opérateur de complément :

Définition 2 : Soit X un alphabet.

- $\emptyset$ est une expression rationnelle étendue, qui définit le langage vide
- pour tout $a \in X$, a est une expression rationnelle étendue, qui définit le langage $\{a\}$
- ε est une expression rationnelle étendue, qui définit le langage $\{\varepsilon\}$
- Si e est une expression rationnelle étendue qui définit L alors (e), $\overline{e}$ et e^* sont des expressions rationnelles étendues, qui définissent respectivement L, $\overline{L}$, et L^*.
- si e_1 et e_2 sont des expressions rationnelles étendues qui définissent L_1 et L_2, alors $e_1 + e_2$, $e_1.e_2$ sont des expressions rationnelles étendues qui définissent respectivement $L_1 \cup L_2$, $L_1.L_2$.

Question 5.3 : Est-ce qu'il existe un langage que l'on peut définir avec une expression rationnelle étendue et que l'on ne peut pas définir avec une expression rationnelle "classique". Justifiez votre réponse.

Définition 3 : Un langage est dit *sans étoile* s'il peut être défini par une expression rationnelle étendue n'utilisant pas l'opérateur étoile.

Dans les questions suivantes, on considère l'alphabet A.

Question 5.4 : Montrer que $(a + b)^*$ est sans étoile.

Question 5.5 : Montrer que $(a + b)^*bba(a^*)$ est sans étoile.