Université Lille 1 - Sciences et Technologies
Licence Informatique 2009–2010

UE AL - Automates et Langages

Correction d'exercices de TD

Logique du premier ordre

Exercice 4 :
Question 4.1 . Donner les formules et les structures qui permettent d'exprimer que :

1. x est supérieur ou égal à y.

Correction: La construction des formules et l'identification des structures permettant d'exprimer cette phrase se fait en plusieurs étapes :

1. Identifier s'il y a des noms de variables dans la phrase, dans quel cas ces variables seront des variables libres de la formule;
2. Identifier s'il y a mention de constantes dans la phrase, dans quel cas il faudra les représenter dans la signature et la structure;
3. Écrire une ébauche de formule, permettant d'identifier variables liées, fonctions et relations nécessaires à l'expression de la formule;
4. Décrire la signature utilisée pour exprimer la formule. Pour cela, on considère que l'ébauche de formule décrite ci-dessus constitue l'interprétation de la formule que l'on cherche. Trouver la signature revient à identifier les fonctions et relations, et à leur donner un nom abstrait;
5. Écrire la formule à l'aide de la signature identifiée;
6. Décrire la structure utilisée pour interpréter la formule, et vérifier que l'on retrouve bien la formule ébauchée plus tôt.

Dans la phrase 1 :

1. Il y a mention de deux variables x et y, qui seront donc des variables libres de la formule;
2. Il n'y a par contre pas mention de constantes;
3. La phrase "x est supérieur ou égal à y" s'écrit intuitivement sous la forme $x \geq y$;
4. Cette formule ne fait pas apparaitre de fonction, et ne fait intervenir qu'une seule relation $\geq$, de arité 2. On choisit de donner le nom abstrait R à cette relation. Une signature possible de la formule que nous décrivons est donc :

   $$signature(phrase1) = \{\emptyset, \{R\}\}$$

   Ensemble des fonctions   Ensemble des relations

5. En remplaçant les occurrences de "$\geq$" par "R" dans la formule précédente, on obtient la formule demandée par l'énoncé : $formule(phrase1) = R(x, y)$;
6. Dans le cas de cet exercice, aucun domaine n'est précisé pour x et y. Nous choisissons donc arbitrairement d'utiliser $\mathbb{R}$. La structure utilisée est donc :

   $$structure(phrase1) = \langle \mathbb{R}, \emptyset, \{\geq\}\rangle$$

   Domaine utilisé   Ensemble des fonctions   Ensemble des relations

La solution est donc :

signature	: $\{\emptyset, \{R\}\}$
formule	: $R(x, y)$
structure	: $\langle \mathbb{R}, \emptyset, \{\geq\}\rangle$

2. 0 est le plus petit entier.

Correction: Dans la phrase 2 :

1. Il n'y a pas mention de variables dans cette phrase;
2. Il y a mention de la constante "0" dans la phrase. Cette dernière est représentée dans les formules sous la forme d'une fonction de arité 0;
3. La phrase "0 est le plus petit entier" sous entend que tout entier est soit égal, soit supérieur à 0. Par conséquent, la formule serait : $\forall x(x \geq 0)$;
4. Cette formule fait apparaitre la fonction "0" de arité 0 (la constante 0), et introduit une seule relation $\geq$ de arité 2. On choisit de donner le nom abstrait c à la fonction "0", et R à la relation $\geq$. Une signature possible est donc : $signature(phrase2) = \{\{c\}, \{R\}\}$;
5. En remplaçant les occurrences de "0" par "c", et de "$\geq$" par "R" dans la formule précédente, on obtient la formule demandée par l'énoncé : $formule(phrase2) = \forall x R(x, c)$;
6. Dans cet exercice, le domaine utilisé est l'ensemble des entiers naturels (dont 0 est le plus petit élément). La structure utilisée est donc : $structure(phrase2) = \langle \mathbb{R}, \{0\}, \{\geq\}\rangle$

La solution est donc :

signature :	$\{\{c\}, \{R\}\}$
formule :	$\forall x R(x, c)$
structure :	$\langle \mathbb{R}, \{0\}, \{\geq\}\rangle$

3. L'addition est associative.

Correction: Dans la phrase 3 :

1. Il n'y a pas mention de variables dans cette phrase;
2. Il n'y a pas mention de constantes dans cette phrase;
3. La phrase "L'addition est associative" se traduit par une égalité entre $(x+y)+z$ et $x+(y+z)$ pour toute valeur de x, y et z. Par conséquent, la formule serait : $\forall x \forall y \forall z \Big((x + y) + z = x + (y + z)\Big)$;
4. Cette formule fait apparaitre la fonction "+" de arité 2, et la relation "=" de arité 2. On choisit de donner le nom abstrait f à la fonction "+", et R à la relation "=". Une signature possible est donc : $signature(phrase3) = \{\{f\}, \{R\}\}$;
5. En remplaçant les occurrences de "+" par "f", et de "=" par "R" dans la formule précédente, on obtient la formule demandée par l'énoncé : $formule(phrase3) = \forall x \forall y \forall z R\Big(f\big(f(x, y), z\big), f\big(x, f(y, z)\big)\Big)$;
6. Dans le cas de cet exercice, aucun domaine n'est précisé. Nous choisissons donc arbitrairement d'utiliser $\mathbb{R}$. La structure utilisée est donc : $structure(phrase3) = \langle \mathbb{R}, \{+\}, \{=\}\rangle$.

La solution est donc :

signature :	$\{\{f\}, \{R\}\}$
formule :	$\forall x \forall y \forall z R\Big(f\big(f(x, y), z\big), f\big(x, f(y, z)\big)\Big)$
structure :	$\langle \mathbb{R}, \{+\}, \{=\}\rangle$

Question 4.1 . Donner les formules et les structures qui permettent d'exprimer que :

4. x est impair.

Correction: Dans la phrase 4 :

1. Il y a mention de la variable x dans cette phrase. cette dernière sera donc une variable libre;
2. Il n'y a pas mention de constantes dans cette phrase;
3. La phrase "x est impair" se traduit par le fait que le reste de la division entière de x par 2 est égale à 1. En notant "%" la fonction permettant de connaitre le reste de la division entière entre deux valeurs, la formule serait : $x\%2 = 1$;
4. Cette formule fait apparaitre la fonction "%" de arité 2, et la relation "=" de arité 2. Elle fait de plus apparaitre deux constantes "1" et "2", qui sont donc deux fonctions de arité 0. On choisit de donner le nom abstrait a à la fonction "1", b à la fonction "2", f à la fonction "%", et R à la relation "=". Une signature possible est donc : $signature(phrase4) = \{\{a, b, f\}, \{R\}\}$;

5. En remplaçant les occurrences de "1" par "a", de "2" par "b", de "%" par "f" et de "$=$" par "R" dans la formule précédente, on obtient la formule demandée par l'énoncé : $formule(phrase4) = R\Big(f(x,b),a\Big)$;
6. Dans le cas de cet exercice, le domaine utilisé est $\mathbb{N}$ (qui est le domaine de définition des nombres premiers). La structure utilisée est donc : $structure(phrase4) = \langle \mathbb{N}, \{1,2,\%\}, \{=\}\rangle$.

La solution est donc :

signature :	$\{\{a,b,f\},\{R\}\}$
formule :	$R\Big(f(x,b),a\Big)$
structure :	$\langle \mathbb{N}, \{1,2,\%\}, \{=\}\rangle$

5. x est le carré de y.

Correction: Dans la phrase 5 :

1. Il y a mention des variables x et y dans cette phrase. Ces dernières seront donc des variables libres;
2. Il n'y a pas mention de constantes dans cette phrase;
3. La phrase "x est le carré de y" se traduit par la formule : $x = y \times y$;
4. Cette formule fait apparaitre la fonction "$\times$" de arité 2, et la relation "=" de arité 2. On choisit de donner le nom abstrait f à la fonction "$\times$", et R à la relation "=". Une signature possible est donc : $signature(phrase5) = \{\{f\},\{R\}\}$;
5. En remplaçant les occurrences de "$\times$" par "f", et de "$=$" par "R" dans la formule précédente, on obtient la formule demandée par l'énoncé : $formule(phrase5) = R\Big(x, f(y,y)\Big)$;
6. Dans le cas de cet exercice, aucun domaine n'est précisé. Nous choisissons donc arbitrairement d'utiliser $\mathbb{R}$. La structure utilisée est donc : $structure(phrase5) = \langle \mathbb{R}, \{\times\}, \{=\}\rangle$.

La solution est donc :

signature :	$\{\{f\},\{R\}\}$
formule :	$R\Big(x, f(y,y)\Big)$
structure :	$\langle \mathbb{R}, \{\times\}, \{=\}\rangle$

6. la distributivité de $\times$ par rapport à $+$.

Correction: Dans la phrase 6 :

1. Il y a mention de la variable x dans cette phrase. cette dernière sera donc une variable libre;
2. Il n'y a pas mention de constantes dans cette phrase;
3. La phrase "la distributivité de $\times$ par rapport à $+$" se traduit par une égalité entre $x \times (y+z)$et $(x \times y) + (x \times z)$ pour toute valeur de x, y et z. Par conséquent, la formule serait : $\forall x \forall y \forall z \Big((x \times (y+z)) = ((x \times y) + (x \times z))\Big)$;
4. Cette formule fait apparaitre la fonction "+" de arité 2, la fonction "$\times$" de arité 2, et la relation "=" de arité 2. On choisit de donner le nom abstrait f à la fonction "+", g à la fonction "$\times$", et R à la relation "=". Une signature possible est donc : $signature(phrase6) = \{\{f,g\},\{R\}\}$;
5. En remplaçant les occurrences de "+" par "f", de "$\times$" par "g", et de "=" par "R" dans la formule précédente, on obtient la formule demandée par l'énoncé : $formule(phrase6) = \forall x \forall y \forall z R\Big(g\big(x, f(y,z)\big), f\big(g(x,y), g(x,z)\big)\Big)$;
6. Dans le cas de cet exercice, aucun domaine n'est précisé. Nous choisissons donc arbitrairement d'utiliser $\mathbb{R}$. La structure utilisée est donc : $structure(phrase6) = \langle \mathbb{R}, \{+,\times\}, \{=\}\rangle$.

La solution est donc :

signature :	$\{\{f,g\},\{R\}\}$
formule :	$\forall x \forall y \forall z R\Big(g\big(x, f(y,z)\big), f\big(g(x,y), g(x,z)\big)\Big)$
structure :	$\langle \mathbb{R}, \{+,\times\}, \{=\}\rangle$