Automates et Langages

Logique propositionnelle

Exercice 1

Vous décidez d'acheter un billet de tombola. Le buraliste vous en présente cinq, de 1 à 5, et vous déclare :
- Si 5 est perdant, 1 est gagnant.
- Si 4 est perdant, 2 est gagnant.
- Si 3 est perdant, 5 aussi.
- Si 1 est gagnant, 2 aussi.
- Si 3 est gagnant, 4 est perdant.

Quel billet choisissez-vous ? Établissez une preuve de la déduction naturelle qui démontre que votre choix est correct.

Exercice 2

Donner une preuve de $(A \vee B \to C) \to (A \to C) \vee (B \to C)$.

Exercice 3

Q.1 Donner une preuve de $A \to \neg\neg A$ en logique intuitionniste (i.e. sans la règle (RAA)).
Q.2 Donner une preuve de $\neg\neg A \to A$ en logique classique ;
Q.3 Donner une preuve de $A \vee \neg A$ en logique classique.

Exercice 4

Montrer que $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ est prouvable sans les règles ($\perp$E) et (RAA).

Exercice 5

On s'interesse ici à l'équivalence $(\neg A \vee B) \equiv (A \to B)$.
Q.1 Prouver la formule $(\neg A \vee B) \to (A \to B)$ en logique intuitionniste.
Q.2 Prouver la formule $(A \to B) \to (\neg A \vee B)$ en logique classique.

Exercice 6

Montrer que la relation $\equiv$ est une relation d'équivalence (rappel : $A \equiv B$ ssi toute valuation qui satisfait A satisfait également B et vice-versa).

Exercice 7

Montrer que l'implication n'est pas associative.

Exercice 8

Mettre sous forme normale disjonctive les formules suivantes :
- $\neg(A \wedge (B \to A))$
- $((A \vee B) \to C) \wedge ((A \to B) \wedge (A \to B)$
- $(A \vee (B \to C)) \to ((A \vee B) \to C)$

Exercice 9

On définit le connecteur $<$ par sa table de vérité :

A	B	$A < B$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Le système $\{<, \to\}$ est-il un système complet ? Justifier.

Exercice 10

On défini les connecteurs $\oplus$ ("ou exclusif") et $\leftrightarrow$ ("équivalence") par leur table de vérité :

A	B	$A \oplus B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Q.1 Trouver une formule équivalente à $A \leftrightarrow B$ qui n'utilise que les connecteur $\neg$ et $\oplus$.
Q.2 Trouver une formule équivalente $A \vee B$, n'utilisant que les connecteurs $\wedge$ et $\oplus$.
Q.3 Peut-on trouver, pour toute formule n'utilisant que $\neg$ et $\oplus$ une formule équivalente n'utilisant que $\leftrightarrow$ et $\oplus$?
Q.4 Peut-on trouver une formule équivalente à $A \leftrightarrow B$ n'utilisant que les connecteurs $\wedge$ et $\oplus$?
Q.5 On considère l'ensemble E des formules construites en n'utilisant que la variable propositionnelle p, les parenthèses et le connecteur $\oplus$. Trouver deux formules du calcul propositionnel A et B telles que toute formule de E soit équivalente à A ou à B.
Q.6 Peut-on trouver, pour toute formule du calcul propositionnel une formule équivalente n'utilisant que les connecteurs $\leftrightarrow$ et $\oplus$? Justifier.