Formations en Informatique de Lille – 2009/2010

Automates et Langages

février 2010

Logique du 1er ordre

Exercice 1 : Donner une preuve des formules suivantes en Déduction Naturelle :
- $\forall x F \to F$
- $\forall x \forall y F \to \forall y \forall x F$
- $\forall x(F \wedge G) \to \forall x F \wedge \forall x G$
- $\exists x(F \wedge G) \to \exists x F \wedge G$
- $\exists x F \wedge G \to \exists x(F \wedge G)$

Exercice 2 : Dans les syllogismes aristotéliciens, interviennent souvent des propriétés P, Q des individus et des assertions ayant les formes suivantes :

1. Tous les P sont des Q.
2. Certains P sont des Q.
3. Aucun P n'est un Q.
4. Certains P ne sont pas des Q.

Question 2.1 : Traduire ces assertions par des formules du calcul des prédicats, en introduisant les prédicats $P(x)$ et $Q(x)$.

Exercice 3 : On considère la signature $(\{c\}, \{f, g\}, \{R\})$ avec f d'arité 1, g et R d'arité 2.

On interpréte les formules dans la structure $\mathcal{S} = \langle \mathbb{N}, \{\text{succ}, +\}, \{\leq\} \rangle$, tel que l'interprétation de c est 0.

Question 3.1 : Quelles sont les interprétations des termes $f(g(g(c,c),c))$, $g(f(c), f(c))$, $f(f(f(c)))$ sur $\mathcal{S}$?

Question 3.2 : Pour chaque formule ci-dessous, identifier les variables libres $x_1, \cdots, x_p$ et dire pour quelles valeurs de ces variables la formule est vraie.

1. $\forall x \exists y \ R(x, y)$
2. $\exists x \ R(f(x), g(y, c))$
3. $\forall y \ R(f(g(x, y)), g(y, c))$

Exercice 4 : Question 4.1 : Donner les formules et les structures qui permettent d'exprimer que :
- x est supérieur ou égal à y.
- 0 est le plus petit entier.
- l'addition est associative.

Question 4.2 : Donner les formules et les structures qui permettent d'exprimer que :
- x est impair.
- x est le carré de y.
- la distributivité de $\times$ par rapport à $+$.

Exercice 5 : Soit D, un ensemble de danseurs. On note $d(a, b)$ le fait que les danseurs a et b dansent ensemble. Donner une formule de la logique du 1er ordre exprimant qu'aucun danseur ne danse avec lui-même et qu'aucun danseur ne danse avec deux danseurs à la fois, en n'utilisant que le prédicat d et le prédicat d'égalité sur D.

Exercice 6 : Montrer que $\exists y \forall x(p(x) \wedge q(y)) \equiv \forall x \exists y(p(x) \wedge q(y))$.

Exercice 7 : On considère les formules suivantes :

1. $\forall x \exists y(x < y)$
2. $\exists x \forall y(x < y)$
3. $\forall x \forall y(x < y)$
4. $\forall x \forall y((x < y) \vee (x = y) \vee (y < x))$

Question 7.1 : Interpréter ces formules dans l'ensemble des entiers relatifs.
Question 7.2 : Interpréter ces formules dans l'ensemble des parties de l'ensemble $\{a, b\}$. Le prédicat $<$ sera interprété comme $\subseteq$.

Exercice 8 : Montrer que la formule $\forall x \forall y(P(x, y) \rightarrow \exists z(P(x, z) \wedge P(z, y)))$ est satisfaisable mais qu'elle n'est pas universellement valide.

Exercice 9 : Mettre sous forme prénexe chacune des formules suivantes :

1. $(\forall x\ P(x)) \vee (\forall y\ Q(y))$
2. $(\forall x\ P(x)) \vee (\forall x\ Q(x))$
3. $(\exists x\ P(x)) \Rightarrow (\exists x\ Q(x))$
4. $(\forall x\ P(x)) \Rightarrow (\forall x\ Q(x))$
5. $\forall\ x\ (\ (\exists\ y\ P(x, y, z)\ )\ \longrightarrow\ \exists\ z\ (\ Q(x, z)\ \vee\ Q(y, z)\ )\ )$