

Automates et Langages

février 2010

TP - Logique propositionnelle

Nous allons utiliser un logiciel de simplification de formules, appelé BDDC, pour résoudre de petits problèmes de logique propositionnelle. BDDC a été conçu par Pascal Raymond, du laboratoire VERIMAG, et vous le trouverez sur le net à l'adresse :

<http://www-verimag.imag.fr/~raymond/tools/bddc-manual/bddc-manual-pages.html>

Ce logiciel est lancé par la commande `/home/enseign/AL/bddc_linux/bddc`. C'est un genre de calculatrice pour expressions logiques. A l'invite de commande, on peut saisir

- une expression terminée par un point-virgule. La calculatrice vous renvoie le résultat de l'évaluation de cette expression.
- `help` pour obtenir la liste des commandes
- `list` pour obtenir la liste des variables en mémoire.
- `quit` pour quitter

Les expressions

On peut utiliser les connecteurs donnés dans le tableau ci-dessous, et des identificateurs pour représenter les variables propositionnelles.

connecteur	se note	abréviation
conjonction \wedge	and	.
disjonction \vee	or	+
négation \neg	not	-
implication \rightarrow	=>	=>
équivalence \leftrightarrow	=	=
vrai	true	1
faux	false	0

On peut également nommer des expressions logiques avec des identificateurs, grâce à l'affectation. Par convention, on utilisera des majuscules pour nommer une expression.

Exemple 1 *Evaluez avec BDDC les expressions suivantes :*

```
false or p ;
false and p ;
p => p ;
((p=q)=r) ;
F := ((p=q)=r) ;
F ;
```

Exercices

Exercice 1 : Construisez la table de vérité de la formule $\neg(\neg a \wedge b) \vee \neg(b \vee \neg c)$. Comparez le résultat de l'évaluation de cette expression par la calculatrice avec la forme normale disjonctive canonique, et une FND obtenue par la méthode de Karnaugh.

Exercice 2 : Construisez la table de vérité de la formule $\neg p \wedge q \wedge r \vee p \wedge \neg r$. Trouvez pour cette formule une FNC par la méthode de Karnaugh, et vérifiez avec la calculatrice que votre résultat est correct.

Exercice 3 : Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont des tautologies, lesquelles sont des antilogies? Pour chaque expression qui n'appartient à aucune des deux catégories, trouvez une assignation des variables propositionnelles qui rende l'expression vraie (i.e. trouvez un modèle de la formule) et trouvez une assignation qui rende l'expression fausse.

1. $(a \leftrightarrow (b \leftrightarrow c)) \leftrightarrow ((a \leftrightarrow b) \leftrightarrow c)$
2. $(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \leftrightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow c)$
3. $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c) \wedge (c \rightarrow \neg a)$
4. $(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \wedge b \rightarrow c)$
5. $a \wedge (a \rightarrow b) \wedge \neg b$

Exercice 4 : D'après "*Le livre qui rend fou*" de R. Smullyan

Un roi organise une épreuve pour ses prisonniers. Les prisonniers doivent choisir entre deux cellules : chacune des cellules contient un tigre ou une princesse (pas les deux!). Sur la porte de chaque cellule, le roi affiche une inscription et demande à chaque prisonnier de choisir d'ouvrir l'une des deux cellules. Si le prisonnier choisit d'ouvrir la porte d'une cellule avec un tigre, il est dévoré. Par contre, s'il ouvre la porte d'une cellule avec une princesse, il est libéré.

Question 4.1 :

- Sur la cellule 1, le roi affiche : il y a une princesse dans cette cellule et un tigre dans l'autre.
- Sur la cellule 2, le roi affiche : il y a une princesse dans une cellule et il y a un tigre dans une cellule.

Le roi ajoute qu'une des affiches dit la vérité, et que l'autre ment. Quelle cellule doit choisir le prisonnier ?

Question 4.2 :

- Sur la cellule 1, le roi affiche : une au moins des deux cellules contient une princesse.
- Sur la cellule 2, le roi affiche : il y a un tigre dans l'autre cellule

Le roi ajoute que les affiches sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses. Quelle cellule doit choisir le prisonnier ?

Question 4.3 :

- Sur la cellule 1, le roi affiche : il y a un tigre dans cette cellule ou une princesse dans l'autre.
- Sur la cellule 2, le roi affiche : il y a une princesse dans l'autre.

Le roi déclare aussi que les affiches sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses. Quelle cellule doit choisir le prisonnier ?

Question 4.4 :

- Sur la cellule 1, le roi affiche : les deux cellules contiennent des princesses
- Sur la cellule 2, le roi affiche : les deux cellules contiennent des princesses

Le roi déclare que l'affiche 1 dit la vérité si la cellule 1 contient une princesse et qu'elle ment si la cellule 1 contient un tigre. Pour la cellule 2 c'est le contraire : si la cellule 2 contient une princesse, l'affiche 2 ment et si la cellule 2 contient un tigre, l'affiche 2 dit la vérité. Quelle cellule doit choisir le prisonnier ?

Question 4.5 : Les mêmes règles s'appliquent, mais avec comme affiches :

- Sur la cellule 1, le roi affiche : une cellule au moins contient une princesse
- Sur la cellule 2, le roi affiche : l'autre cellule contient une princesse

Quelle cellule doit choisir le prisonnier ?

Question 4.6 : Les mêmes règles s'appliquent, mais les affiches changent :

- Sur la cellule 1, le roi affiche : choisis n'importe quelle porte, ça n'a pas d'importance
- Sur la cellule 2, le roi affiche : il y a une princesse dans l'autre cellule.

Quelle cellule doit choisir le prisonnier ?