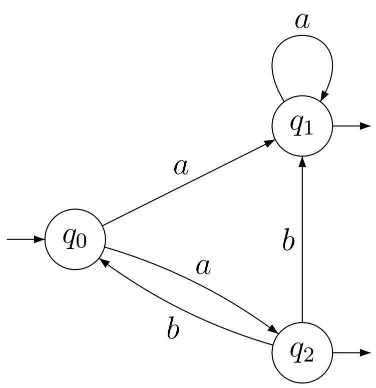
Licence ST Informatique – S4 –
2007/2008

Automates et Langages

Le 27 juin 2008 – seconde session – durée 3h
tous documents autorisés

Examen

Exercice 1 : Soit M l'automate suivant :



A l'aide d'un système d'équations, calculer une expression rationnelle définissant le langage reconnu par M.

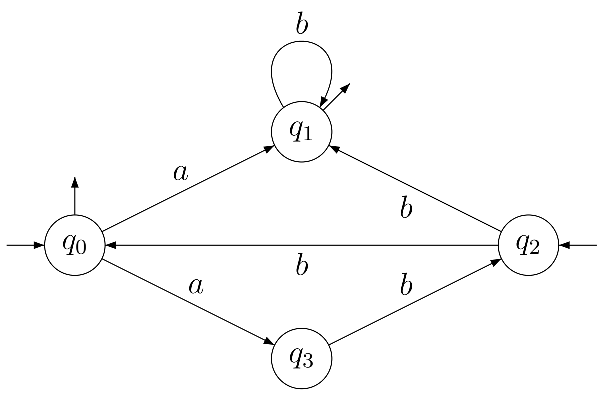
Exercice 2 : Au tennis, lors d'un jeu, voici la manière dont les points sont décomptés :

- zéro pour aucun point marqué dans le jeu,
- quinze pour un point marqué,
- trente pour deux points marqués,
- quarante pour trois points marqués.

Le gagnant est le premier à gagner 4 points avec 2 points d'écart. Lorsque les deux joueurs ont marqué trois points, (donc à 40/40), il y a égalité. Celui qui marque le point suivant obtient un avantage. Pour marquer le jeu, un joueur qui a l'avantage doit marquer un autre point. Si c'est le joueur qui n'a pas l'avantage qui marque le point suivant, on revient à égalité, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'un des deux joueurs remporte le jeu.
On veut représenter par un automate toutes les séquences de points gagnants dans un jeu au tennis. On utilise l'alphabet $\{a, b\}$, où la lettre a signifie *le joueur A gagne le point*, et la lettre b signifie *le joueur B gagne le point*.

Question 2.1 : Donner un automate déterministe qui reconnaît les mots qui représentent des jeux au tennis. Cet automate reconnaîtra par exemple le mot *aaaa* qui représente une victoire du joueur A en passant par les scores intermédiaires 15/0, 30/0 et 40/0. Le mot *abbabaabbb* représente une victoire du joueur B après 40/40 et 4 échanges pour déterminer le gagnant. Le mot *aabb* ne sera pas reconnu car il représente le score 30/30 et le jeu n'est donc pas terminé.

Exercice 3 : Donnez l'automate minimal déterministe équivalent à l'automate non déterministe suivant :



Vous devez justifier votre réponse en détaillant les différentes méthodes utilisées permettant de prouver que l'automate que vous donnez en réponse est bien déterministe minimal.

Exercice 4 :

Question 4.1 : Soit $F = (\neg a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \neg b)$

Démontrez sans utiliser les tables de vérité, mais uniquement le calcul propositionnel basé sur les propriétés des connecteurs, que F est équivalente à $(\neg a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Question 4.2 : Démontrez de la même manière que la formule suivante est une tautologie :

$$((p \to r) \wedge (q \to r)) \to ((p \wedge q) \to r)$$

tourner la page

Exercice 5 : Soit l'alphabet $A = \{a, b\}$

Question 5.1 : Donner une expression rationnelle qui définit le langage des mots sur l'alphabet A qui commencent et terminent par a et ont un nombre pair de b.

Question 5.2 : Donner une expression rationnelle qui définit le langage des mots sur l'alphabet A qui n'ont pas ab comme facteur.

Si L est un langage rationnel, on note $\mathrm{alph}(L)$ l'alphabet utilisé pour L. Par exemple $\mathrm{alph}(a^*) = \{a\}$, $\mathrm{alph}(a(bb)^*c + b^*c) = \{a, b, c\}$.
Par la suite, on utilise le complémentaire d'un langage L :

Définition 1 : Soit L un langage rationnel. Le complémentaire de L, noté $\overline{L}$ est l'ensemble des mots sur l'alphabet $\mathrm{alph}(L)$ qui n'appartiennent pas à L.

Exemple 1 $\overline{b^*} = \emptyset$, $\overline{a(a+b)^*} = \varepsilon + b(a+b)^*$

On définit des expressions rationnelles étendues, en s'autorisant l'opérateur de complément :

Définition 2 : Soit X un alphabet.

- $\emptyset$ est une expression rationnelle étendue, qui définit le langage vide
- pour tout $a \in X$, a est une expression rationnelle étendue, qui définit le langage $\{a\}$
- ε est une expression rationnelle étendue, qui définit le langage $\{\varepsilon\}$
- Si e est une expression rationnelle étendue qui définit L alors (e), $\overline{e}$ et e^* sont des expressions rationnelles étendues, qui définissent respectivement L, $\overline{L}$, et L^*.
- si e_1 et e_2 sont des expressions rationnelles étendues qui définissent L_1 et L_2, alors $e_1 + e_2$, $e_1.e_2$ sont des expressions rationnelles étendues qui définissent respectivement $L_1 \cup L_2$, $L_1.L_2$.

Question 5.3 : Est-ce qu'il existe un langage que l'on peut définir avec une expression rationnelle étendue et que l'on ne peut pas définir avec une expression rationnelle "classique". Justifiez votre réponse.

Définition 3 : Un langage est dit *sans étoile* s'il peut être défini par une expression rationnelle étendue n'utilisant pas l'opérateur étoile.

Dans les questions suivantes, on considère l'alphabet A.

Question 5.4 : Montrer que $(a + b)^*$ est sans étoile.

Question 5.5 : Montrer que $(a + b)^*bba(a^*)$ est sans étoile.