Correction d'exercices de TD

Langages et expressions rationnels

Exercice 2 :
Pour chacune des expressions rationnelles suivantes, donnez une expression rationnelle représentant son complémentaire :

- $(a+b)^*b$

Correction: $(a+b)^*b$ est le langage décrivant tous les mots de l'alphabet $\{a,b\}$ se terminant par la lettre b. Son complémentaire est donc l'ensemble des mots qui ne se terminent pas par la lettre b, c'est à dire soit le mot vide, soit les mots se terminant par la lettre a.

$$complementaire\big((a+b)^*b\big) = \epsilon + (a+b)^*.a$$

- $\big((a+b)(a+b)\big)^*$

Correction: $\big((a+b)(a+b)\big)^*$ est le langage décrivant tous les mots de l'alphabet $\{a,b\}$ dont le nombre de lettres est pair. Ce langage contient de plus le mot vide. Son complémentaire est donc l'ensemble des mots qui contiennent un nombre impair de lettres.

$$complementaire\Big(\big((a+b).(a+b)\big)^*\Big) = \big((a+b).(a+b)\big)^+$$

- $(a+b)^*a(a+b)^*$

Correction: $(a+b)^*a(a+b)^*$ est le langage décrivant tous les mots de l'alphabet $\{a,b\}$ contenant au moins une fois la lettre a. Son complémentaire est donc l'ensemble des mots qui ne contiennent pas la lettre a, c'est à dire soit le mot vide, soit les mots ne contenant que la lettre b.

$$complementaire\big((a+b)^*a(a+b)^*\big) = \epsilon + b^*$$

On sait que $\epsilon \in b^*$. Ce langage peut donc être simplifié en :

$$complementaire\big((a+b)^*a(a+b)^*\big) = b^*$$

- $(a+b)^*aa(a+b)^*$

Correction: $(a+b)^*a(a+b)^*$ est le langage décrivant tous les mots de l'alphabet $\{a,b\}$ contenant au moins une fois deux lettres a qui se suivent. Son complémentaire est donc l'ensemble des mots dans lesquels deux lettres a ne se suivent pas, c'est à dire soit le mot vide, soit les mots d'une lettre, soit les mots contenant uniquement la lettre b, ou enfin les mots dans lesquels chaque occurrence de la lettre a est séparée par au moins une fois la lettre b.

$$complementaire\big((a+b)^*aa(a+b)^*\big) = \epsilon + a + b^* + (a.b^+)^* + (b^+.a)^* + (a.b^+)^*.a + (b^+a)^*.b^+$$

Une forme équivalente plus concise de ce langage est :

$$complementaire\big((a+b)^*aa(a+b)^*\big) = \big((a+\epsilon).b\big)^*(a+\epsilon)$$

Exercice 3 :
Soit X un alphabet. On considère trois langages L_1, L_2, L_3 sur l'alphabet X.
Question 3.1 . Est-ce que, si $L_1.L_2 = L_1.L_3$, alors $L_2 = L_3$?
Correction: La réponse est non. Posons $X = \{a\}$, $L_1 = a^*$, $L_2 = a$ et $L_3 = (a + aa)$.
Nous allons montrer que $L_1.L_2 = L_1.L_3$.

- $L_1.L_3 \subseteq L_1.L_2$:
  Soit $u \in L_1.L_3$.
  Par définition, on sait qu'il existe $u_1 \in L_1$ et $u_3 \in L_3$ tels que $u = u_1.u_3$. On sait que $L_3 = a+aa$, donc que $u_3 = a$ ou $u_3 = aa$.
  - ***Cas 1 :*** $u_3 = a$ Dans ce cas, on a $u_3 \in L_2$, et donc $u_1.u_3 \in L_1.L_2$;
  - ***Cas 2 :*** $u_3 = aa$ Dans ce cas, on a $u = u_1.aa = (u_1.a).a$. Posons $u'_1 = u_1.a$ et $u'_3 = a$. On a donc $u = u_1.u_3 = u'_1.u'_3$ On sait que si $u_1 \in L_1$, alors $u_1.a \in L_1$, et donc $u'_1 \in L_1$. On sait de plus que $a \in L_2$, et donc que $u'_3 \in L_2$. On a donc $u = u'_1.u'_3 \in L_1.L_2$;

  Donc $L_1.L_3 \subseteq L_1.L_2$.
- $L_1.L_2 \subseteq L_1.L_3$:
  Soit $u \in L_1.L_2$.
  Par définition, on sait qu'il existe $u_1 \in L_1$ et $u_2 \in L_2$ tels que $u = u_1.u_2$. On sait que $L_2 = a$, et par conséquent que $u_2 = a$. Comme $L_3 = a + aa$, on a $u_2 \in L_3$. Donc $L_1.L_2 \subseteq L_1.L_3$.

On a donc bien $L_1.L_2 = L_1.L_3$, mais pourtant $L_2 \neq L_3$ □

Question 3.2 . Est-ce que $L_1^* = L_2^*$ alors $L_1 = L_2$?
Correction: La réponse est non. Posons $X = \{a\}$, $L_1 = a$ et $L_2 = a + aa$. Nous allons montrer que $L_1^* = L_2^*$.

- $L_1^* \subseteq L_2^*$: Soit $u \in L_2^*$.
  - ***Cas 1 :*** $u = \epsilon$ On sait que $\epsilon \in L_2^*$, donc $u \in L_2^*$;
  - ***Cas 2 :*** $u \neq \epsilon$ Par définition, on sait qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ et $(u_i)_{i \in [\![1,k]\!]} \in L_1^k$ tels que $u = u_1.u_2.u_3 \ldots .u_k$.
    Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on a $u_i \in L_1$. Comme $L_1 = a$, on sait que $u_i = a$. Or $L_2 = (a + aa)$, donc $u_i \in L_2$. On a donc $\forall i \in [\![1, k]\!], u_i \in L_2$, et $u = u_1.u_2.u_3 \ldots .u_k$. Par conséquent, $u \in L_2^*$;
- $L_2^* \subseteq L_1^*$: On sait que a^* est l'ensemble des mots pouvant être exprimés avec l'alphabet X. Comme L_2 exprime des mots composés avec cet alphabet, on a obligatoirement $L_2^* \subseteq a^*$. Par conséquent, $L_2^* \subseteq L_1^*$;

On a donc bien $L_1^* = L_2^*$, mais pourtant $L_1 \neq L_2$. □

Question 3.3 . Est-ce que $(L_1 \cup L_2).L_3 = L_1.L_3 \cup L_2.L_3$?
Correction: La réponse est oui. Prouvons la double inclusion.

- $\underline{(L_1 \cup L_2).L_3 \subseteq L_1.L_3 \cup L_2.L_3 :}$
  Soit $u \in (L_1 \cup L_2).L_3$
  Par définition, on sait qu'il existe $v \in (L_1 \cup L_2)$ et $w \in L_3$ tels que $u = v.w$.
  Par définition du langage $L_1 \cup L_2$, on sait que $v \in L_1$ ou $v \in L_2$

  - ***Cas 1 :*** $v \in L_1$ On a alors $v.w \in L_1.L_3$, et donc $v.w \in L_1.L_3 \cup L_2.L_3$;
  - ***Cas 2 :*** $v \in L_2$ On a alors $v.w \in L_2.L_3$, et donc $v.w \in L_1.L_3 \cup L_2.L_3$;

  On a donc $u \in L_1.L_3 \cup L_2.L_3$, et donc $(L_1 \cup L_2).L_3 \subseteq L_1.L_3 \cup L_2.L_3$;

- $\underline{L_1.L_3 \cup L_2.L_3 \subseteq (L_1 \cup L_2).L_3 :}$
  Soit $u \in L_1.L_3 \cup L_2.L_3$.
  Par définition du langage $L_1.L_3 \cup L_2.L_3$, on sait que $u \in L_1.L_3$, ou $u \in L_1.L_2$

  - ***Cas 1 :*** $u \in L_1.L_3$ On sait alors qu'il existe $v \in L_1$ et $w \in L_3$ tels que $u = v.w$. On sait que si $v \in L_1$, alors $v \in L_1 \cup L_2$. On a donc $u = v.w \in (L_1 \cup L_2).L_3$;
  - ***Cas 2 :*** $u \in L_2.L_3$ On sait alors qu'il existe $v \in L_2$ et $w \in L_3$ tels que $u = v.w$. On sait que si $v \in L_2$, alors $v \in L_1 \cup L_2$. On a donc $u = v.w \in (L_1 \cup L_2).L_3$;

  On a donc $u \in (L_1 \cup L_2).L_3$, et donc $L_1.L_3 \cup L_2.L_3 \subseteq (L_1 \cup L_2).L_3$;

On a donc bien la double inclusion : $(L_1 \cup L_2).L_3 = L_1.L_3 \cup L_2.L_3$ □

Question 3.4 . Est-ce que $(L_1 \cap L_2).L_3 = L_1.L_3 \cap L_2.L_3$?
Correction: La réponse est non. Posons $X = \{a\}$, $L_1 = a + aaa$, $L_2 = aa + aaa$ et $L_3 = a + aa$
Montrons que $L_1.L_3 \cap L_2.L_3 \not\subseteq (L_1 \cap L_2).L_3$
Soit $u = aaa$.

- Montrons que $u \in L_1.L_3 \cap L_2.L_3$.

  - En posant $v = a$ et $w = aa$, on a $v \in L_1$, $w \in L_3$ et $u = v.w$. On sait donc que $u \in L_1.L_3$;
  - En posant $v = aa$ et $w = a$, on a $v \in L_2$, $w \in L_3$ et $u = v.w$. On sait donc que $u \in L_2.L_3$;

  Par conséquent, on a $u \in L_1.L_3 \cap L_2.L_3$.

- Procédons par raisonnement par l'absurde pour montrer que $u \notin (L_1 \cap L_2).L_3$.
  Supposons que $u \in (L_1 \cap L_2).L_3$. Par définition, nous savons qu'il existe $v \in (L_1 \cap L_2)$ et $w \in L_3$ tels que $u = v.w$ On a $L_1 \cap L_2 = aaa$, donc $v = aaa$. L'unique valeur de w pour laquelle on aurait $u \in (L_1 \cap L_2).L_3$ est $w = \epsilon$. Or, $\epsilon \notin L_3$. Par conséquent, l'hypothèse émise est fausse : $u \notin (L_1 \cap L_2).L_3$.

On a prouvé qu'il existait un mot u tel que $u \in L_1.L_3 \cap L_2.L_3$ et $u \notin (L_1 \cap L_2).L_3$ Par conséquent, on a $L_1.L_3 \cap L_2.L_3 \not\subseteq (L_1 \cap L_2).L_3$, et donc $L_1.L_3 \cap L_2.L_3 \neq (L_1 \cap L_2).L_3$. □

Question 3.5 . Est-ce que $(L_1 \cup L_2)^* = L_1^* \cup L_2^*$?
Correction: La réponse est non. Posons $X = \{a, b\}$, $L_1 = a$ et $L_2 = b$
Montrons que $(L_1 \cup L_2)^* \not\subset L_1^* \cup L_2^*$
Soit $u = abab$.

- Montrons que $u \in (L_1 \cup L_2)^*$
  Par définition, on a $(L_1 \cup L_2)^* = (a + b)^*$ Par conséquent, $(L_1 \cup L_2)^*$ est le langage exprimant tous les mots de l'alphabet X. On a donc obligatoirement $u \in (L_1 \cup L_2)^*$;

- Procédons par raisonnement par l'absurde pour montrer que $u \notin L_1^* \cup L_2^*$
  Supposons que $u \in L_1^* \cup L_2^*$. Par définition, nous savons que $u \in L_1^*$ ou $u \in L_2^*$

  - ***Cas 1 :*** $u \in L_1^*$ Par définition, on sait que L_1^* représente l'ensemble des mots de l'alphabet $\{a\}$. Puisque le mot u contient la lettre b qui ne figure pas dans cet alphabet, on sait que $u \notin L_1^*$;
  - ***Cas 2 :*** $u \in L_2^*$ Par définition, on sait que L_2^* représente l'ensemble des mots de l'alphabet $\{b\}$. Puisque le mot u contient la lettre a qui ne figure pas dans cet alphabet, on sait que $u \notin L_2^*$.

  On a donc $u \notin L_1^*$ et $u \notin L_2^*$. Par conséquent, l'hypothèse émise est fausse : $u \notin L_1^* \cup L_2^*$.

On a prouvé qu'il existait un mot u tel que $u \in (L_1 \cup L_2)^*$ et $u \notin L_1^* \cup L_2^*$ Par conséquent, on a $(L_1 \cup L_2)^* \not\subset L_1^* \cup L_2^*$, et donc $(L_1 \cup L_2)^* \neq L_1^* \cup L_2^*$. $\square$