Formations en Informatique de Lille – 2008/2009

Automates et langages

mars 2009

Cours 3 : Logique des Prédicats

Introduction

On veut exprimer des propriétés sur les éléments d'un domaine (par exemple, des entiers naturels, l'ensemble des sommets d'un graphe, ...). Les formules contiennent maintenant des variables et des constantes qui représentent des éléments du domaine considéré, des fonctions sur ce domaine, des prédicats qui modélisent des relations sur les éléments du domaine. On peut exprimer qu'une propriété est vraie *pour tous* les éléments du domaine ou pour *au moins un élément* grâce aux quantificateurs. Comme pour la logique des propositions, on va retrouver la séparation des aspects syntaxiques et sémantiques.

Syntaxe

On dispose

- d'un ensemble infini $\mathcal{V}$ de symboles de *variables* ($\mathcal{V} = \{x, y, z, \ldots\}$),
- d'un ensemble infini $\mathcal{C}$ de symboles de *constantes* ($\mathcal{C} = \{a, b, c, \ldots\}$),
- d'un ensemble infini $\mathcal{F}$ de symboles de *fonctions* n-aires ($n > 0$) ($\mathcal{F} = \{f, g, h, \ldots\}$),
- d'un ensemble infini $\mathcal{P}$ de symboles de *prédicats* n-aires ($n \geq 0$) ($\mathcal{P} = \{p, q, r, \ldots\}$).

Chaque symbole de fonction ou de prédicat a une *arité* qui détermine le nombre d'arguments auxquels il est appliqué.

Définition 1 : L'ensemble des *termes* est défini inductivement de la façon suivante :

- une variable est un terme,
- une constante de $\mathcal{C}$ est un terme,
- si f est un symbole de fonction d'arité n et si $t_1, t_2 \ldots, t_n$ sont des termes, alors $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ est un terme.

Définition 2 : L'ensemble des *formules de la logique des prédicats* est défini inductivement de la façon suivante :

- Si p symbole de prédicat d'arité n, et si $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes, alors $p(t_1, \ldots, t_n)$ est une formule appelée *formule atomique*.
- Si F est une formule alors $\neg F$ et (F) sont des formules.
- Si F et G sont des formules, alors $F \vee G$, $F \wedge G$, $F \longrightarrow G$ et $F \longleftrightarrow G$ sont des formules.
- Si F est une formule et x est une variable alors $\forall x F$ et $\exists x F$ sont des formules.

Remarque : Les quantificateurs sont prioritaires sur les connecteurs logiques. La priorité relative des connecteurs logiques les uns par rapport aux autres est celle qui avait été définie dans le cadre de la logique propositionnelle. Par exemple $\forall x p(x) \wedge r(x)$ se comprend comme $(\forall x\ (p(x))) \wedge r(x)$ et $\forall x\ \exists y\ p(x,y)$ se comprend comme $\forall x(\exists y p(x,y))$.

Exemple 1 *En début d'année se pose l'éternel problème de la gestion des emplois du temps, des salles et du matériel d'enseignement. On utilise les prédicats suivants :*

- *retro(x) : x est un rétroprojecteur.*
- *video(x) : x est un vidéoprojecteur.*
- *amphi(x) : x est un amphi.*
- *salleTD(x) : x est une salle de TD.*
- *estDans(x,y) : x est dans y.*

Et voici quelques phrases traduite en logique des prédicats :

1. *On trouve toujours un rétroprojecteur dans une salle de TD.*
   $\forall x(\ \mathit{salleTD}(x) \rightarrow \exists y(\mathit{retro}(y) \wedge \mathit{estDans}(y,x))\ )$
2. *La salle A3 est une salle de TD.*
   salleTD(A3)
3. *Il n'y a pas de vidéoprojecteur dans la salle A3.*
   $\neg(\ \exists x\ (\mathit{video}(x) \wedge \mathit{estDans}(x, \mathrm{A3}))\ )$
4. *Tous les vidéoprojecteurs sont dans des amphis.*
   $\forall x(\mathit{video}(x) \rightarrow \exists y(\mathit{amphi}(y) \wedge \mathit{estDans}(x,y))\ )$

Pour un exemple avec symboles de fonctions, allez voir l'exemple 6.

Variables libres et variables liées

On dit qu'une occurrence d'une variable x dans une formule F est *liée* si un quantificateur porte sur cette occurrence, sinon cette occurrence est qualifiée de *libre*.

Exemple 2 *Dans la formule $F = \forall x(\exists z\ p(x,y,z) \wedge \exists y\ r(x,y,z))$, toutes les occurrences de x sont liées. La première occurrence de y (qui apparaît dans $p(x,y,z)$) est libre alors que l'occurrence de z dans $p(x,y,z)$ est liée dans F car la quantification $\exists z$ porte sur cette occurrence. De même, l'occurrence de y dans $r(x,y,z)$ est liée dans F, et l'occurrence de z dans $r(x,y,z)$ est libre dans F.*

Pour une formule F, on note $\mathsf{var}(F)$ l'ensemble des variables apparaissant dans F, on note $\mathsf{varlibres}(F)$ l'ensemble des variables libres de F, c'est à dire l'ensemble des variables de F qui ont au moins une occurrence libre dans F, et on note $\mathsf{varliées}(F)$ l'ensemble des variables liées de F, c'est à dire l'ensemble des variables de F qui ont au moins une occurrence liée dans F. On peut calculer $\mathsf{varlibres}(F)$ et $\mathsf{varliées}(F)$ par induction de la façon suivante :

- Si F est un atome, alors $\mathsf{varlibres}(F) = \mathsf{var}(F)$ et $\mathsf{varliées}(F) = \emptyset$
- Si $F = (G)$ ou si $F = \neg G$, alors $\mathsf{varlibres}(F) = \mathsf{varlibres}(G)$ et $\mathsf{varliées}(F) = \mathsf{varliées}(G)$

- Si $F = G \diamond H$ où $\diamond$ est un connecteur logique parmi $\{\vee, \wedge, \longrightarrow, \longleftrightarrow\}$ alors $\mathsf{varlibres}(F) = \mathsf{varlibres}(G) \cup \mathsf{varlibres}(H)$ et $\mathsf{varliées}(F) = \mathsf{varliées}(G) \cup \mathsf{varliées}(H)$

- Si $F = \forall x\ G$ ou Si $F = \exists x\ G$ alors $\mathsf{varlibres}(F) = \mathsf{varlibres}(G) \setminus \{x\}$ et $\mathsf{varliées}(F) = \mathsf{varliées}(G) \cup \{x\}$.

Définition 3 : Une formule sans variable libre est appelée *formule close.*

Exemple 3 *Dans l'exemple 1, toutes les formules sont closes. On peut décomposer la première formule de la façon suivante :*

- *on définit une propriété "x possède un rétro-projecteur", formule avec une variable libre x :* $possèdeRétro(x) = \exists y(retro(y) \wedge estDans(y, x))$

- *la première formule de l'exemple 1 devient :*
$\forall x(\ salleTD(x) \rightarrow possèdeRétro(x)\ )$

Signature

Les formules de la logique des prédicats servent à modéliser des propriétés sur des structures algébriques. Ces formules utilisent dans ce cas un ensemble bien spécifique de symboles, appelé *signature* :

Définition 4 : Une signature Σ est un triplet $(\mathsf{Const}, \mathsf{Fonc}, \mathsf{Pred})$ tel que $\mathsf{Const} \subseteq \mathcal{C}$, $\mathsf{Fonc} \subseteq \mathcal{F}$, $\mathsf{Pred} \subseteq \mathcal{P}$. Les ensembles Const et Fonc peuvent être vides.

Sémantique des formules

Pour interpréter une formule, on donne le domaine d'appartenance des variables, et une signification à chaque symbole (constantes, fonctions, prédicats).

Exemple 4 *Soit la formule* $\varphi_1 = \forall x \forall y(\ P(x, y) \wedge P(y, x) \rightarrow \neg Q(x, y))$.
Je définis comme interprétation I_1 :

- *le domaine est l'ensemble des entiers naturels.*
- $P(x, y)$ *signifie* $x \leq y$
- $Q(x, y)$ *signifie* $x \neq y$

La formule φ_1 est vraie pour cette interprétation I_1.

Exemple 5 *Je considère la formule* $\varphi_2(x) = (P(x) \rightarrow \forall y Q(x, y))$.
Soit l'interprétation I_2 :

- *le domaine est l'ensemble des entiers naturels.*
- $P(x)$ *signifie x est pair*
- $Q(x, y)$ *signifie* $x \geq y$

Pour cette interprétation I_2, la formule $\varphi_2(x)$ est vraie pour x impair, fausse pour x pair.

Soit l'interprétation I_3 :

- *le domaine est l'ensemble des entiers naturels.*

- *$P(x)$ signifie $x = 1$*
- *$Q(x, y)$ signifie x divise y*

La formule $\varphi_2(x)$ est vraie pour cette interprétation I_3, pour tout x.

Plus formellement :
Définition 5 : Une *structure* est un triplet $\langle E, F_E, R_E\rangle$ où E est un ensemble non vide, F_E est un ensemble de fonctions d'arité quelconque sur E et R_E est un ensemble de relations d'arité quelconques sur E.

Définition 6 : Une interprétation est la donnée d'une structure $\langle E, F_E, R_E\rangle$ ainsi que d'une assignation qui associe à chaque constante de $\mathcal{C}$ une valeur de E, à chaque symbole de fonction de $\mathcal{F}$ un élément de F_E de même arité et à chaque symbole de prédicat de $\mathcal{P}$ un élément de R_E de même arité.

Vocabulaire : Quand on utilise pour les formules une signature Σ, l'interprétation se fait sur une structure appelée Σ-*structure*.

Définition 7 : Étant donnée une interprétation associée à une structure $\langle E, F_E, R_E\rangle$, une *valuation* est une application de l'ensemble $\mathcal{V}$ des variables dans E

On peut alors calculer la valeur de vérité d'une formule étant données une interprétation et une valuation.

Exemple 6 *Signature $\Sigma = (\{-1, 0, 1\}, \{+(\_,\_), \times(\_,\_)\}, \{\leq, =\})$*
Interprétation dans la structure $\langle \mathbb{Z}, \{+(\_,\_), \times(\_,\_)\}, \{\leq, =\}\rangle$, ensemble des entiers relatifs avec l'addition, la multiplication, la relation d'ordre usuelle et l'égalité.
Exemple de formule : $\forall x(+(x, 0) = x)$, formule vraie pour cette interprétation.

Exemple 7 *Signature $\Sigma = (\emptyset, \emptyset, \{arc(\_,\_)\})$.*
Interprétation dans le graphe $G = \langle\{1, 2, 3, 4, 5\}, \emptyset, \{(1, 2), (1, 3), (5, 1), (4, 3), (2, 4)\}\rangle$. Pour cette interprétation, la formule $\forall x\ \exists y\ arc(x, y)$ est fausse car il n'y a pas d'arc d'origine 3.

je me suis arrêtée là, la suite est pour le mardi 10 mars
Définition 8 :

- Une interprétation I est un *modèle* d'une formule F si F est vraie pour toute valuation dans I. On note $I \models F$.
- Une formule F est *satisfiable* s'il existe une interprétation I telle que $I \models F$.
- Une formule F est *universellement valide* si pour toute interprétation I, on a $I \models F$. On note $\models F$. On dit aussi que F est une *tautologie*.

Exemple 8 *On considère la signature $\Sigma = (\{-1, 0, 1\}, \{+(,), \times(,)\}, \{\leq, =\})$.*
On définit l'interprétation I dans la Σ-structure $\langle \mathbb{Z}, \{+(,), \times(,)\}, \{\leq, =\}\rangle$.
I est un modèle des formules suivantes :

$$\forall x(+(x, 0) = x)$$
$$\forall x \forall y(+(x, y) = +(y, x))$$
$$+(+(x, y), z) = +(x, +(y, z)) \quad \textit{(ici, la formule est vraie pour toute valuation de } x, y, z\textit{)}$$

Exemple 9 *Soit la formule $\exists y\ \forall x\ p(y, s(x))$. Soit l'interprétation I_1 de structure $\langle \mathbb{N}, \{\text{succ}\}, \{<\}\rangle$ où succ dénote la fonction successeur qui, appliquée à une valeur x, retourne la valeur $x + 1$ et où $<$ dénote la relation strictement plus petit et qui fait correspondre s à succ et p à $<$. Alors $I_1 \models \exists y\ \forall x\ p(y, s(x))$ (il suffit de prendre la valeur 0 pour y). Maintenant, si on considère l'interprétation I_2 de structure $\langle \mathbb{Z}, \{\text{succ}\}, \{<\}\rangle$ avec les mêmes assignations que I_1, I_2 n'est pas un modèle de $\exists y\ \forall x\ p(y, s(x))$.*