Correction de l'Interrogation Écrite n°1 - Groupe 3

Logique propositionnelle et logique du premier ordre

Exercice 1 : ***Preuves en logique intuitionniste et en logique classique***

Q 1 . Quelle est la différence entre la logique intuitionniste et la logique classique ?

Correction: En logique classique, il est possible d'utiliser le raisonnement par l'absurde, alors qu'en logique intuitionniste, cela n'est pas le cas.

Q 2 . Donner une preuve de la formule $\big((X \lor Y) \to Z\big) \to \big((X \to Z) \lor (Y \to Z)\big)$

Correction:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{[X]}}{X \lor Y}(\lor I_G) \qquad \dfrac{}{[(X \lor Y) \to Z]}}{Z}(\to E)}{\big(X \to Z\big)}(\to I)}{\big((X \to Z) \lor (Y \to Z)\big)}(\lor I_G)}{\big((X \lor Y) \to Z\big) \to \big((X \to Z) \lor (Y \to Z)\big)}(\to I)$$

Exercice 2 : ***Formes normales***

Soit la formule F suivante : $\big(M \lor (N \to O)\big) \to \big((M \lor N) \to O\big)$

Q 1 . Quelle est la table de vérité de F ?

Correction:

M	N	O	$N \to O$	$\big(M \lor (N \to O)\big)$	$M \lor N$	$\big((M \lor N) \to O\big)$	F
0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Q 2 . Mettre F sous Forme Normale Disjonctive.

Correction: L'interprétation directe de la table de vérité aboutit à la Forme Normale Disjonctive :
$F \equiv (\neg M \land \neg N \land \neg O) \lor (\neg M \land \neg N \land O) \lor (\neg M \land N \land \neg O) \lor (\neg M \land N \land O) \lor (M \land \neg N \land O) \lor (M \land N \land O)$
On pouvait aussi utiliser la méthode de Karnaugh, et construire la FND en utilisant le tableau qui suit.

M \ NO	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	0	1	1	0

$\equiv \neg M$

$\equiv O$

On obtient alors la Forme Normale Disjonctive: $F \equiv \neg M \lor O$

Exercice 3 : ***Systèmes complets***

On définit le connecteur $\simeq$ par sa table de vérité :

X	Y	$X \simeq Y$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Q 1 . Trouver une formule équivalente à $\neg A$, en n'utilisant que les connecteurs logiques $\simeq$ et $\rightarrow$.

Correction: Plusieurs formules permettent de retrouver la négation. Nous en proposons deux exemples dans cette correction.

Colonnes que l'on cherche à obtenir, en n'utilisant que les connecteurs $\rightarrow$ et $\simeq$

X	Y	$\neg X$	$X \rightarrow Y$	$X \simeq Y$	$(X \rightarrow Y) \simeq X$
0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0

On a donc $\neg X \equiv \Big((X \rightarrow Y) \simeq X\Big)$

X	$\neg X$	$X \rightarrow X$	$(X \rightarrow X) \simeq X$
0	1	1	1
1	0	1	0

On a donc $\neg X \equiv \Big((X \rightarrow X) \simeq X\Big)$

Q 2 . Le système $\{\simeq, \rightarrow\}$ est-il un système complet ? Justifier.

Correction: Le système $\{\rightarrow, \simeq\}$ est complet car on sait que le système $\{\neg, \rightarrow\}$ est complet, et qu'il est possible d'écrire une formule équivalente à $\neg X$ en n'utilisant que des connecteurs du système $\{\rightarrow, \simeq\}$.

Exercice 4 : ***Logique du 1er ordre***

Soit la formule G suivante : $\exists a\Big((\forall b P(a,b,c)) \rightarrow \forall c(Q(b,c) \wedge Q(a,z))\Big)$

Q 1 . Quelles sont les variables libres et les variables liées de la formule G ?

Correction:

$$G \equiv \exists a\Big((\forall b P(\boxed{a},\boxed{b},\boxed{c})) \rightarrow \forall c(Q(\boxed{b},\boxed{c}) \wedge Q(\boxed{a},\boxed{z}))\Big)$$

Variables libres Variables liées

Q 2 . Mettre G sous forme prénexe, en précisant les axiomes du formulaire utilisés.

Correction: Mettre sous forme prénexe une formule nécessite dans un premier temps de renommer toutes les variables liées qui ont le même nom qu'une variable libre. On choisit ici de renommer la variable liée b en e, et la variable liée c en f. On obtient alors :

$$G \equiv \exists a\Big((\forall e P(a,e,c)) \rightarrow \forall f(Q(b,f) \wedge Q(a,z))\Big)$$

A partir de maintenant, il est possible d'effectuer des transformations de la formule en utilisant les axiomes du formulaire, sans risquer qu'une variable soit capturée (voir cours).

Nous cherchons d'abord à déplacer le quantificateur $\forall e$. D'après le formulaire, on a : $\Big((\forall x F) \rightarrow G\Big) \equiv \Big(\exists x(F \rightarrow G)\Big)$, si x n'est pas une variable libre de G. Dans notre cas, $x \equiv e$, $F \equiv P(a,e,c)$ et

$G \equiv \forall f\big(Q(b,f) \wedge Q(a,z)\big)$. e n'est ni une variable libre, ni une variable liée de G, il est donc possible d'utiliser cet axiome. On obtient alors :

$$G \equiv \exists a \exists e \Big(P(a,e,c) \rightarrow \forall f\big(Q(b,f) \wedge Q(a,z)\big)\Big)$$

Nous cherchons maintenant à déplacer le quantificateur $\forall f$. D'après le formulaire, on a : $\Big(G \rightarrow \forall x F\Big) \equiv \Big(\forall x(G \rightarrow F)\Big)$, si x n'est pas une variable libre de G. Dans notre cas, $x \equiv f$, $F \equiv \big(Q(b,f) \wedge Q(a,z)\big)$ et $G \equiv P(a,e,c)$. f n'est ni une variable libre, ni une variable liée de G, il est donc possible d'utiliser cet axiome. On obtient alors :

$$G \equiv \exists a \exists e \forall f \Big(P(a,e,c) \rightarrow \big(Q(b,f) \wedge Q(a,z)\big)\Big)$$

Tous les quantificateurs se situent à gauche, la formule est donc maintenant sous forme prénexe.