

16/6/09

40 000 1 Lic. Info  
14h30

INFL2AVL09

Licence ST Informatique – S4 – 2008/2009

## Automates et Langages

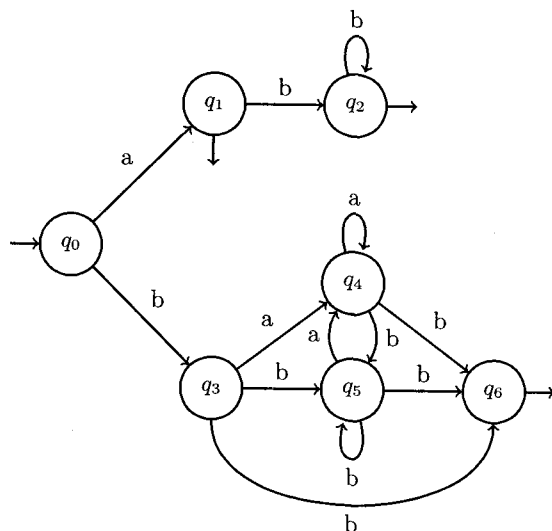
juin 2009

### Examen

documents autorisés - durée 2h

#### Exercice 1 :

Soit  $M$  l'automate suivant :



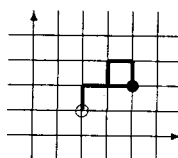
Question 1.1 : Appliquez l'algorithme de détermination pour obtenir un automate  $M'$  déterministe complet équivalent à  $M$ . Sur votre copie, donnez le détail de l'algorithme sous forme de tableau.

Question 1.2 : Appliquez l'algorithme de minimisation pour obtenir l'automate minimal déterministe complet équivalent à  $M$ . Là aussi, donnez le détail de l'algorithme.

Question 1.3 : Sachant que  $M$  est un automate de Glushkov, quel langage rationnel reconnaît-il ?

**Exercice 2 :** Nous allons définir un langage de dessins réalisés dans le plan cartésien. Chaque point du plan a quatre voisins : en haut (up) en bas (down) à gauche (left) et à droite (right). A partir d'un point initial (une position courante dans le plan), on se déplace vers l'un de ses voisins grâce à quatre instructions up, down, left, right, représentées par les quatre lettres  $u, d, l, r$ . Ainsi un mot sur l'alphabet  $X = \{u, d, l, r\}$  représente un dessin.

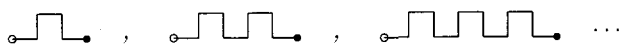
**Exemple 1** Le mot  $urrlurd$  représente le dessin suivant :



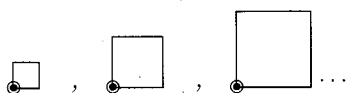
○ point de départ  
● point d'arrivée

Un langage de  $X^*$  décrit un ensemble de dessins.

**Exemple 2** Le langage rationnel  $L_1 = (rurd)^+r$  décrit l'ensemble des dessins :

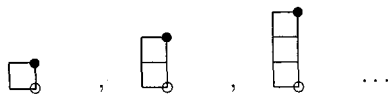


**Exemple 3** Le langage non rationnel  $L_2 = \{u^n r^n d^n l^n / n > 0\}$  décrit l'ensemble des dessins :

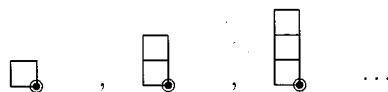


Question 2.1 : Quel ensemble de dessins est décrit par le langage  $(urdlru)^+$

Question 2.2 : Donner un langage rationnel décrivant l'ensemble de dessins :



Question 2.3 : Donner un langage décrivant l'ensemble de dessins :



Question 2.4 : Si l'on oublie les points de départ et d'arrivée (dans ce cas, les ensembles de dessins des questions 2 et 3 sont les mêmes), est-ce que tout ensemble de dessins peut être représenté par une expression rationnelle ? Justifiez votre réponse.

**Exercice 3 :** On modélise les relations familiales entre personnes par des formules logiques. On considère un prédicat  $père(x,y)$ , un prédicat  $ancêtre(x,y)$ , et le prédicat d'égalité  $=$ . On interprétera les formules dans des ensembles finis. On suppose tout d'abord que la formule  $F_1$  suivante est toujours valide pour les interprétations que l'on considère :  $\forall x \neg père(x,x)$ . De plus la relation ancêtre (interprétation du prédicat ancêtre) sera toujours la clôture réflexive et transitive de la relation père (interprétation du prédicat père). Elle représente de façon générale une relation de filiation entre deux personnes (d'où la réflexivité qui vous a peut-être perturbé). Ainsi les formules suivantes sont valides pour les interprétations que l'on considère :

$$F_2 : \forall x \forall y (père(x,y) \rightarrow ancêtre(x,y))$$

$$F_3 : \forall x \forall y \forall z (père(x,y) \wedge ancêtre(y,z) \rightarrow ancêtre(x,z))$$

$$F_4 : \forall x ancêtre(x,x)$$

Voici quelques exemples d'interprétations, sur le domaine  $\{ Jean, Julien, Simon, Ahmed, Léo \}$  :

- interprétation  $I_1$  : La relation  $père$  est vraie pour les couples du tableau suivant, ce qui signifie que Jean est le père de Julien et Simon, et Ahmed le père de Léo :

Jean	Julien
Jean	Simon
Ahmed	Léo

- interprétation  $I_2$  :

Jean	Julien
Jean	Simon
Ahmed	Léo
Ahmed	Jean

- interprétation  $I_3$  :

Jean	Julien
Jean	Simon
Ahmed	Léo
Jean	Léo

- interprétation  $I_4$  :

Jean	Julien
Julien	Simon
Simon	Léo
Léo	Julien

On s'intéresse aux interprétations qui sont des arbres généalogiques. Les questions suivantes définissent des propriétés vérifiées par de tels arbres :

Question 3.1 : Donnez la formule  $\psi_1$  qui signifie qu'il y a une et une seule personne sans père (ce n'est pas vérifié par l'interprétation  $I_1$ )

Question 3.2 : Donnez la formule  $\psi_2$  qui signifie que chaque personne a au plus un père (ce n'est pas vérifié par l'interprétation  $I_3$ )

Question 3.3 : Donnez la formule  $\psi_3$  qui signifie que la relation ancêtre est anti-symétrique (ce n'est pas vérifié par l'interprétation  $I_4$ , car on a  $\text{ancêtre}(\text{Julien}, \text{Léo})$  et  $\text{ancêtre}(\text{Léo}, \text{Julien})$ ).