Licence ST Informatique – S4 –
2006/2007

Automates et Langages

Le 30 mai 2007 – durée 3h – tous documents autorisés

Examen

Exercice 1 :

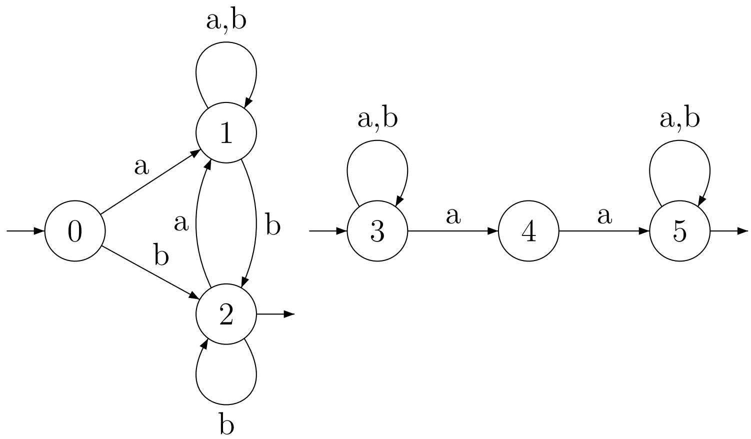
Question 1.1 : Si L est un langage sur un alphabet X et u un mot sur ce même alphabet, comment appelle-t-on le langage $u^{-1}L$. Donner sa définition.

Question 1.2 : Soit L un langage rationnel et M un automate déterministe reconnaissant L. Quel lien existe-t-il entre les langages résiduels de L et les états de l'automate M.

Question 1.3 : Soit L le langage définit par l'expression $(ab + aab + ba)^*b$. Calculer les résiduels de L.

Question 1.4 : En déduire l'automate minimal déterministe complet qui reconnaît L.

Exercice 2 : Soit M l'automate suivant :



Question 2.1 : Appliquez l'algorithme de déterminisation pour obtenir un automate M' déterministe complet équivalent à M. *Sur votre copie, donnez le détail de l'algorithme sous*

forme de tableau.

Question 2.2 : Appliquez l'algorithme de minimalisation pour obtenir l'automate minimal déterministe complet équivalent à M. *Là aussi, donnez le détail de l'algorithme sous forme de tableau.*

Question 2.3 : Sans résoudre de système d'équations, donnez une expression rationnelle définissant $L(M)$, le langage reconnu par M.

Exercice 3 :

Question 3.1 : Une plaque d'immatriculation est un mot sur l'alphabet $\{0, 1, ..., 9, A, ..., Z, a, b\}$. Ce mot commence par une suite de 1, 2, 3 ou 4 chiffres, suivi d'une suite de 1, 2 ou 3 lettres, puis d'une suite de 2 chiffres ou "2a" ou "2b". Donner une expression rationnelle (OU une expression régulière Unix) qui définit le langage des plaques d'immatriculation.

Question 3.2 : On ajoute à la définition précédente une contrainte supplémentaire : une plaque d'immatriculation ne peut pas contenir plus de 8 caractères. Donnez un automate qui reconnaît le langage des plaques d'immatriculation.

Question 3.3 : On considère l'alphabet $X = \{a, b\}$. Donnez une expression rationnelle (OU une expression régulière Unix) qui définit le langage L :

$$L = \{ \quad m \in X^* \quad | \quad \begin{array}{l} \text{les blocs de } a \text{ dans } m \text{ sont alternativement de longueur paire et impaire,} \\ m \text{ contient au moins un } a \text{ et le premier bloc de } a \text{ est de longueur paire.} \end{array} \quad \}$$

Par exemple, *baabbbbaaaaabaaaa*, *aaaababaabbbbb*, *aaba*, *aa* sont des mots de L. Par contre, *bb*, *babaa*, *baabaa* ne sont pas dans L.

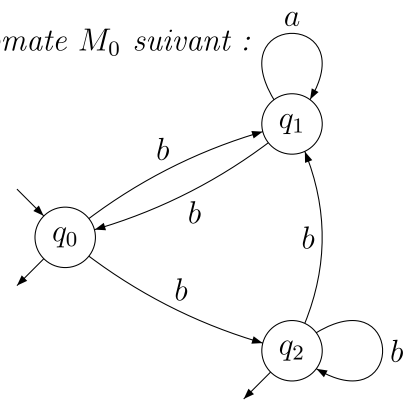
Tournez la page

Exercice 4 : On considère la famille $\mathcal{F}$ des formules de la logique des prédicats construites à l'aide des deux prédicats unaires I et F et des trois prédicats binaires A , B et $=$. On considère également la famille $\mathcal{A}$ des automates non nécessairement déterministes sur l'alphabet $\{a, b\}$ et, pour tout automate $M = (\{a, b\}, Q, I, F, \delta) \in \mathcal{A}$, on associe l'interprétation I_M pour les formules de la famille $\mathcal{F}$ de la façon suivante :

- l'ensemble des valeurs pour les variables est Q, l'ensemble des états de M.
- $I(x)$ signifie que l'état x est un état initial de M.
- $F(x)$ signifie que l'état x est un état final de M.
- $A(x, y)$ signifie qu'il existe une transition étiquetée par la lettre a de l'état x vers l'état y.
- $B(x, y)$ signifie qu'il existe une transition étiquetée par la lettre b de l'état x vers l'état y.
- $x = y$ a le sens habituel de l'égalité et signifie que l'état x est égal à l'état y.

On dira qu'un automate $M \in \mathcal{A}$ est un modèle d'une formule $f \in \mathcal{F}$, noté $M \models f$, si la formule f est vraie pour l'interprétation I_M.

Exemple 1 *Considérons l'automate M_0 suivant :*



On a $M_0 \models \forall x \forall y (A(x, y) \longrightarrow x = y)$ mais on n'a pas $M_0 \models \exists x (F(x) \wedge \exists y A(y, x))$ puisqu'aucune transition étiquetée par a n'aboutit à un état de sortie de M.

Question 4.1 : Soit la formule $\phi = \exists y (B(x, y) \wedge I(y))$. Trouver une valuation de x dans l'interprétation I_{M_0} associée à l'automate M_0 rendant vraie la formule ϕ.

Question 4.2 : Quels sont les automates M de la famille $\mathcal{A}$ vérifiant $\forall x \exists y [\neg(x = y) \longrightarrow A(x, y)]$?

Question 4.3 : Trouver une formule α de $\mathcal{F}$ telle que pour tout automate $M \in \mathcal{A}$, on ait $M \models \alpha$ si et seulement si M est complet.

Question 4.4 : Trouver une formule β de $\mathcal{F}$ telle que pour tout automate $M \in \mathcal{A}$, on ait $M \models \beta$ si et seulement si M est déterministe.