Formations en Informatique de Lille – 2008/2009

Automates et langages

février 2009

Résumé du cours 2 : Logique Propositionnelle

Formes normales disjonctives et conjonctives

Définition 1 :

- On appelle *littéral* une formule réduite à une variable ou à la négation d'une variable. Par exemple p ou $\neg q$ sont des littéraux.
- Une formule est en *forme normale disjonctive* (FND) si elle s'écrit comme une disjonction de conjonctions de littéraux.
- Une formule est en *forme normale conjonctive* (FNC) si elle s'écrit comme une conjonction de disjonctions de littéraux.

Forme normale disjonctive

Proposition 1 : Toute formule de la logique propositionnelle est équivalente à une formule en forme normale disjonctive.

Exemple 1 *Forme normale disjonctive pour les constantes* `vrai` *et* `faux` *:*

- *La formule* `vrai` *est équivalente à* $p \vee \neg p$ *qui est en FND (disjonction de 2 conjonctions réduites à 1 seul littéral),*
- *la formule* `faux` *est équivalente à* $p \wedge \neg p$ *qui est en FND (disjonction réduite à 1 seule conjonction),*

Exemple 2 *Mise en forme normale disjonctive pour la formule* $((P \vee Q) \longrightarrow R) \wedge (P \longleftrightarrow R)$ *à l'aide de sa table de vérité.*

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \longrightarrow R$	$P \longleftrightarrow R$	$((P \vee Q) \longrightarrow R) \wedge (P \longleftrightarrow R)$
F	**F**	**F**	*F*	*V*	*V*	**V**
F	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*	*F*
F	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*
F	*V*	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*
V	*F*	*F*	*V*	*F*	*F*	*F*
V	**F**	**V**	*V*	*V*	*V*	**V**
V	*V*	*F*	*V*	*F*	*F*	*F*
V	**V**	**V**	*V*	*V*	*V*	**V**

En construisant la disjonction des valuations rendant vraie la formule, on obtient

$$(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

qui est une formule en forme normale disjonctive équivalente à $((P \vee Q) \longrightarrow R) \wedge (P \longleftrightarrow R)$.

La FND précédente, que l'on a trouvée à partir de la table de vérité, est appelée *FND canonique*, car toutes les variables sont présentes (éventuellement précédées de la négation) dans chaque conjonction.

Exemple 3 *Mise en forme normale disjonctive pour la formule* $(P \longrightarrow Q) \vee (P \wedge Q)$ *à l'aide de transformations de formules.*

$(P \longrightarrow Q) \vee (P \wedge Q)$ *est équivalente à* $(\neg P \vee Q) \vee (P \wedge Q)$ *et comme* $\vee$ *est associatif et commutatif, la formule est équivalente à* $\neg P \vee Q \vee (P \wedge Q)$*. En appliquant une loi d'absorption, on a finalement* $\neg P \vee Q$ *qui est en forme normale disjonctive.*

Tableaux de Karnaugh

On peut trouver une FND simple grâce aux tableaux de Karnaugh, qui représentent en plusieurs dimensions les tables de vérité, afin d'effectuer des factorisations. Cette méthode de simplification utilise l'équivalence :

$$((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \longleftrightarrow p$$

Exemple 4 *Voici une formule* F *donnée par sa table de vérité. Grâce au tableau de Karnaugh construit pour* F*, on trouve une FND équivalente :* $q \wedge r \vee p \wedge q \vee p \wedge r$*.*

p \ qr	VV	VF	FF	FV
V	V	V	F	V
F	V	F	F	F

Forme normale conjonctive

Proposition 2 : Toute formule de la logique propositionnelle est équivalente à une formule en forme normale conjonctive.

Si on sait trouver une FND pour une formule $\neg\mathcal{F}$ alors, en appliquant les lois de De Morgan, on obtiendra une FNC pour $\mathcal{F}$.

Systèmes complets de connecteurs

Définition 2 : Un système de connecteurs S est *complet* si toute formule de la logique propositionnelle est équivalente à une formule n'utilisant que les connecteurs de S et les variables propositionnelles[1].

Exemple 5

- *Le système de connecteurs* $\{\neg, \vee, \wedge\}$ *est complet : c'est une conséquence de la proposition 1.*
- *Le système de connecteurs* $\{\neg, \vee\}$ *est complet puisque* $\{\neg, \vee, \wedge\}$ *est complet et que pour toutes formules* F *et* G*, on a* $F \wedge G$ *qui est équivalente à* $\neg(\neg F \vee \neg G)$*.*

[1] et donc pas les constantes `vrai` et `faux` si elle ne sont pas dans S. En effet, ces constantes sont considérées comme des connecteurs sans paramètre.