
Correction d'exercices de TD
Automates finis

Exercice 5 :
Soit L un langage quelconque. On dit que L est préfixe si et seulement si aucun préfixe d'un mot de L (autre que le mot lui même) n'est dans L. Plus formellement :

$$\forall w \in L, \forall w_1, w_2 \text{ tels que } w = w_1.w_2, \text{ si } w_1 \in L \text{ alors } w_2 = \epsilon$$

Question 5.1 . Les langages suivants

1. a^*b
2. $(a+b)^*$
3. $\{a^n b^n, n > 0\}$

sont-ils préfices ? (justifier)
Correction: On sait que :

$$L \text{ est préfixe} \forall w \in L, \forall w_1, w_2 \text{ tels que } w = w_1.w_2, \text{ si } w_1 \in L \text{ alors } w_2 = \epsilon$$

Par conséquent, pour montrer qu'un langage L est préfixe, il faut montrer que pour tout mot de $w \in L$, si $w = w_1.w_2$ et $w_1 \in L$, alors $w_2 = \epsilon$. Au contraire montrer qu'un langage L n'est pas préfixe revient à trouver trois mots w, w_1 et w_2 tels que $w \in L$, $w_1 \in L$ et $w_2 \neq \epsilon$.

1. $L_1 = a^*b$ est préfixe.
   Démonstration :
   Soit $w \in L_1$. Supposons que $w = w_1.w_2$, avec $w_1 \in L$. Montrons que $w_2 = \epsilon$.
   Les mots de L_1 sont caractérisés par le fait qu'ils contiennent un seul et unique b, se situant à la fin du mot. Comme $w, w_1 \in L$, on a :
   - $\exists k \in \mathbb{N} | w = a^k b$;
   - $\exists l \in \mathbb{N} | w_1 = a^l b$;
   - $w = w_1.w_2$, et donc $a^k b = a^l b.w_2$.

   On a donc obligatoirement $k = l$, et $w_2 = \epsilon$. □

2. $L_2 = (a+b)^*$ n'est pas préfixe.
   Contre-exemple :
   Posons $w = abb$, $w_1 = ab$ et $w_2 = b$. On a bien $w \in L_2, w_1 \in L_2$ et $w_2 \neq epsilon$ □

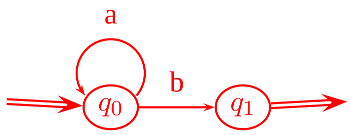
3. $L_3\{a^n b^n, n > 0\}$ est préfixe.
   Démonstration :
   Soit $w \in L_1$. Supposons que $w = w_1.w_2$, avec $w_1 \in L$. Montrons que $w_2 = \epsilon$.
   Comme $w, w_1 \in L$, on a :
   - $\exists k \in \mathbb{N} | w = a^k b^k$;
   - $\exists l \in \mathbb{N} | w = a^l b^l$;
   - $w = w_1.w_2$, et donc $a^k b^k = a^l b^l w_2$.

   On peut donc en déduire que $a^k = a^l$, et donc que $k = l$. Par conséquent, on a $a^k b^k = a^k b^k w_2$, et donc $w_2 = \epsilon$ □

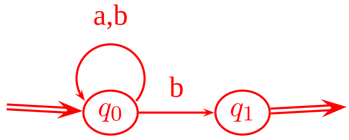
Question 5.2 . Donner une caractéristique d'un automate reconnaissant un langage reconnaissable préfixe.

Correction: Pour répondre à cette question, nous allons dans un premier temps écrire les automates reconnaissant les langages L_1 et L_2.

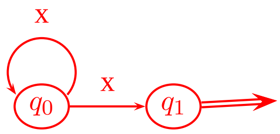
Automate reconnaissant le langage L_1



Automate reconnaissant le langage L_2



On peut en déduire qu'un automate reconnaissant un langage préfixe ne contient pas la structure suivante :



x représente dans cet automate une lettre quelconque d'un alphabet.