

Le Docteur Idaho James organise une expédition archéologique dans le but de trouver l'Eldorado¹ et de faire progresser ses finances personnelles. Pour cela, il commence par planifier son voyage et les différentes choses dont il aura besoin. Il a notamment entendu parlé d'une science très intéressante car ayant de nombreux outils intéressants pour ce genre d'expédition : la recherche opérationnelle.

1 Achat du matériel

Deux produits sont nécessaires pour l'expédition : les explosifs pour excaver les reliques et la nourriture. James s'adresse à deux organismes, M et Y, qui acceptent de faire des prix intéressants s'il achète les explosifs et la nourriture par lots. Un lot de chez M contient 1 kilo d'explosif et 4 kilos de nourriture pour un prix de 100 euros. Un lot de chez Y contient 2 kilos d'explosif et 4 kilos de nourriture pour un prix de 50 euros. James évalue qu'il aura besoin d'au moins 100 kilos de nourriture mais, pour des raisons de sécurité, il ne peut pas emmener en voyage plus de 40 kilos d'explosif. Comme il ne veut pas jeter de l'argent par les fenêtres, il emporte avec lui tout ce qu'il aura acheté. D'autre part, comme il ne dispose pas de beaucoup de moyen financier, James desire minimiser la somme investie dans l'achat d'explosif et de nourriture.

Question 1. Donner un programme linéaire modélisant ce problème (il n'est pas demandé d'écrire un programme générique ni d'identifier ou d'expliquer les différents éléments du programme à l'exception des variables).

Question 2. Mettre le programme linéaire sous forme standard.

Question 3. Le programme linéaire admet-il une base ? Si non, modifier le programme pour faire apparaître une base artificielle.

Question 4. Donner le premier tableau simplicial.

Question 5. Résoudre le programme linéaire par application de l'algorithme du simplexe. Donner la solution optimale identifiée et la valeur de la fonction objectif à l'optimum.

¹L'Eldorado (de l'espagnol el dorado : le doré) est une contrée mythique supposée regorger d'or et située en Amérique du Sud selon les conquistadores espagnols du XVI^e siècle. La croyance en son existence se base sur le récit du voyage d'un conquistador, Francisco de Orellana par l'archevêque Gaspar de Carbajal.

2 La route vers la fortune

Pour se rendre à l'Eldorado, James cherche le chemin le plus sûr pour faire passer les explosifs sans encombre. Pour cela, il voudrait modéliser le problème sous forme de la recherche d'un chemin le plus court. Il a choisi plusieurs points de passage possible et a évalué la probabilité de passer d'un point à l'autre sans problème au niveau des autorités.

Question 6. Sachant que les probabilités sont indépendantes entre elles, donner la probabilité qu'un chemin $c = (a_1 a_2 \dots a_k)$ avec a_i un arc se déroule sans problème.

On rappelle que $\prod_i \log p_i = \sum p_i$ et que si $p_i \leq 1$ alors $\log p_i \leq 0$.

Question 7. Que faut-il faire pour transformer le graphe fourni par James pour que l'on puisse y appliquer un algorithme de plus court chemin.

3 Optimisation de la fortune

Le récit de Gaspar de Carbajal indique que l'Eldorado contient très exactement n objets de valeur². Chaque objet a une certaine valeur et occupe un volume donné en m^3 . James dispose d'un sac-à-dos qui a un volume total de $v m^3$. Il souhaiterait savoir quels objets il doit mettre dans son sac-à-dos pour maximiser la valeur totale de son butin. Il a récupéré pour cela une méthode qui est capable de résoudre un programme linéaire en variables binaires en un temps raisonnable³. Un tel programme est identique à ceux qui ont été vus en cours à l'exception du fait que les variables ne sont pas réelles mais prennent comme valeur 0 ou 1. James vous demande de modéliser son problème en un problème linéaire en nombres binaires.

Question 8. Définir les variables du problème.

Question 9. Définir les paramètres du problème.

Question 10. Définir la ou les contraintes nécessaires.

Question 11. Définir la fonction objectif.

James désire maintenant généraliser le modèle dans le cadre où il disposerait de k sac-à-dos, qui ont tous la même contenance, pour pouvoir récupérer encore plus de richesse. Il est à noter qu'un objet ne peut pas être divisé entre plusieurs sacs.

Question 12. (facultative) Modéliser le problème.

²Cette affirmation est bien entendue fausse et n'est là que pour la faisabilité de cet exercice

³les problèmes linéaires en variables binaires sont en effet un cas particulier des programmes linéaires en variables entières et il s'agit donc de problèmes NP-dur.