Université de Lille1 - FIL - MIAGE FA-FC M1 **2010-2011**

Partiel de Recherche Opérationnelle

Documents de cours/TD autorisés - Durée : 2h

Exercice 1

On considère le graphe orienté à 7 sommets et 10 arcs représenté par la matrice d'adjacence sommets-sommets M ci-dessous. Les sommets du graphe désignent des villes, les arcs représentent les routes reliant ces villes. Les valeurs de la matrice désignent les longueurs des routes (distances entre les villes). $M[i,j]=0$ signifie qu'il n'existe pas de route entre les villes i et j, dans ce cas, l'arc (i,j) ne doit pas être représenté sur le graphe.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} s & A & B & C & D & E & p \end{matrix} \\
\begin{matrix} s \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ p \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

1. Tracer le graphe correspondant à la matrice M.
2. Justifier pourquoi il n'existe qu'une seule fonction ordinale associée au graphe.
3. Appliquer l'algorithme de Bellman au graphe pour trouver le plus long chemin entre la ville source (sommet s) et la ville de destination (sommet p).
4. Est-il possible d'appliquer l'algorithme de Dijkstra au problème ? Justifier la réponse.
5. Proposer une modélisation sous forme de programme linéaire de ce problème de recherche du plus long chemin entre s et p.

Exercice 2

On considère le graphe orienté à 7 sommets et 10 arcs représenté par la matrice d'adjacence sommets-sommets M ci-dessous dont les valeurs désignent les poids associés aux arcs du graphe.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F & G \end{matrix} \\
\begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
0 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
30 & 0 & 0 & 25 & 0 & 15 & 0 \\
0 & 50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 60 & 0 & 0 & 0 & 70 \\
0 & 40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 25 & 0 & 25 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

1. Montrer que le graphe représente un réseau de transport.

2. Montrer qu'on peut déduire directement à partir de la matrice M que les sommets E et B sont respectivement la source et le puits du réseau.

3. Trouver la valeur du flot maximum pouvant passer dans ce réseau.

4. Proposer une modélisation de ce problème de recherche du flot maximum dans un réseau de transport sous forme de programme linéaire.

Exercice 3

La société *Leary Chemical* fabrique 3 produits chimiques A, B et C. Ces produits sont fabriqués suivant deux procédés différents 1 et 2. L'exécution du procédé 1 pendant une heure coûte 1 dollar et produit 1 unité de A et une de B. L'exécution du procédé 2 pendant une heure coûte 4 dollars et produit 2 unités de A, une unité de B et une autre de C. Pour satisfaire les demandes des consommateurs au moins 10 unités de A, 5 de B et 3 de C devraient être fabriquées par jour.

1. Donner une formulation du problème de manière à minimiser le coût de fabrication de la quantité de produits satisfaisant les demandes.

2. Dire si les solutions suivantes $(x_1 = 2,\ x_2 = 3)$, $(x_1 = 3,\ x_2 = 4)$, $(x_1 = 2,\ x_2 = -1)$ et $(x_1 = 4,\ x_2 = 3)$ sont réalisables.

Exercice 4

Une petite entreprise produit deux types de jouets en bois : des camions et des trains. Chaque camion est vendu 27 dollars et a un coût total de fabrication de 24 dollars. Chaque train est vendu 21 dollars et a un coût total de fabrication de 20 dollars. La fabrication des deux types de jouets nécessite deux types de main-d'oeuvre qualifiée : la menuiserie et la finition. Un camion nécessite $2h$ de finition et $1h$ de menuiserie. Un train nécessite $1h$ de finition et $1h$ de menuiserie. Chaque jour, l'entreprise dispose de $10h$ de main-d'oeuvre pour la finition et $8h$ pour la menuiserie. D'autre part, au plus 4 camions sont vendus chaque jour.

1. Le problème de l'entreprise est de maximiser son profit journalier, c'est à dire la différence entre le chiffre d'affaires (recettes) et le coût de fabrication. Montrer que le programme linéaire donné ci-dessous permet de modéliser le problème.

   $$\begin{array}{l} \textbf{Max } z = 3x_1 + x_2 \\ \quad 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ \quad x_1 + x_2 \leq 8 \\ \quad x_1 \leq 4 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

2. Résoudre le problème par la méthode graphique.

3. Résoudre le problème par la méthode du sipmlexe.

4. Vérifier qu'à chaque itération de la méthode du simplexe, on passe d'un sommet du polyèdre des solutions réalisables à un sommet adjacent.