Laborator 4

Aplicația 1: teorie vs. practică

Fie A un eveniment legat de o experiență. Dacă într-o serie de n probe evenimentul A s-a realizat de n_A ori, atunci numim frecvența relativă a evenimentului A numărul:

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}.$$

Multe experiențe prezintă proprietatea de regularitate statistică, adică dacă m și n sunt numere MARI, iar A e ca mai sus, atunci $f_n(A)$ și $f_m(A)$ nu diferă mult între ele și această diferență e cu atât mai mică cu cât m și n sunt mai mari.

Această observație ne sugerează că frecvențele oscilează în jurul unei anumite valori și că apropierea este cu atât mai mare cu cât n este mai mare. Dacă (!?) am putea cunoaște valoarea, atunci am avea de fapt probabilitatea lui A; ea reprezintă valoarea ideală a frecvenței.

Concret, vom considera mai departe aruncarea cu banul.

a) <u>Teoretic</u> $\Omega = \{H, T\}$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathbb{P} : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$, $\mathbb{P}(H) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(T) = \frac{1}{2}$ # ban corect

Luând A evenimentul că apare H, avem clar de aici că $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{H\}) = \frac{1}{2}$.

b) <u>Practic</u>

```
omega = c("H", "T")                  → o aruncare: sample(omega, 1)
n = 1000                             # nr. repetări aruncare ban
repetari = sample(omega, n, replace = TRUE)
p_aprox = sum(repetari == "H")/n     # frecvența relativă
```

<u>Obs</u>: Oamenii sunt destul de slabi la randomizare, așa că simulările sunt utile și în direcția inversă: de la teorie la practică. De pildă, să pp. că avem un ban trucat, cu

$$\begin{cases} \mathbb{P}(H) = 0.2 \\ \mathbb{P}(T) = 0.8 \end{cases}$$

Cum ar arăta o secvență de 10 aruncări ale unui asemenea ban? (a se vedea script)

$\boxed{\text{MORALA}}$: Noțiunea de frecvență relativă este suportul empiric al noțiunii de probabilitate. ∎

Aplicația 2: problema potrivirilor

Să ne imaginăm că o secretară are:

→ într-o mână n plicuri pe care sunt scrise adresele a n destinatari diferiți

→ în cealaltă mână are n scrisori corespunzătoare celor n persoane.

Secretara se încurcă în sarcini și decide să pună scrisorile în plicuri în mod aleator. Care este probabilitatea ca cel puțin o persoană să fi primit scrisoarea corectă (scrisoarea sa)?

Soluție:

Mai întâi, reformulăm matematic povestea.

Considerăm că plicurile și scrisorile sunt numerotate de la 1 la n și că plicul i corespunde scrisorii i ($\forall i=\overline{1,n}$).

Considerăm spațiu de probabilitate $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, unde:

$\Omega = S_n$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

1	2	$\dots$	n	plicuri
i_1	i_2	$\dots$	i_n	scrisori

$\mathbb{P}: \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$ echiprobabilitatea, adică $\mathbb{P}(\sigma) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{|S_n|} = \frac{1}{n!}$, $\forall \sigma \in S_n$

Notăm cu:

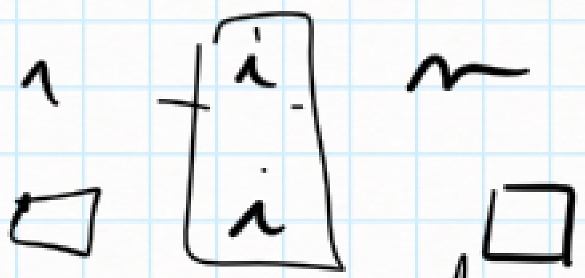
E_i = evenimentul ca în plicul i să se regăsească scrisoarea i, $\forall i=\overline{1,n}$

$A = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$ = evenimentul ca cel puțin o scrisoare să se regăsească în plicul corect.

(REUNIUNE, deci SAU)

Ne amintim că evenimentele sunt, de fapt, submulțimi ale spațiului stărilor. La noi, $E_i \subseteq S_n$, $\forall i=\overline{1,n}$. Mai precis,

$$E_i = \{ \sigma \in S_n \mid \sigma(i)=i \},$$



deci $|E_i| = (n-1)! = |S_{n-1}|$, fiindcă celelalte $n-1$ valori diferite de i pot fi așezate în $(n-1)!$ moduri. Așadar,

$$P(E_i) = \frac{|E_i|}{|\Omega|} = \boxed{\frac{(n-1)!}{n!}} = \frac{1}{n}.$$

Similar, pentru $1 \le i < j \le n$ avem:

$$P(E_i \cap E_j) = \frac{|E_i \cap E_j|}{|\Omega|} = \frac{(n-2)!}{n!}$$

și, în general, pentru $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$ avem:

$$P(E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_k}) = \frac{|E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_k}|}{|\Omega|} = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

Vrem $P(A) = P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n)$. Din Principiul includerii și excluderii rezultă că:

$$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} \mathbb{P}(E_i \cap E_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} \mathbb{P}(E_i \cap E_j \cap E_k) - \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right)$$

$$\|$$

$$\mathbb{P}(A)$$

scris compact

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \ldots \cap E_{i_k})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \quad C_n^k \quad \frac{(n-k)!}{n!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{\cancel{n!}}{k! \cdot \cancel{(n-k)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-k)!}}{\cancel{n!}}$$

$$= \boxed{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k!}}$$

<u>Obs.</u> pentru n mare avem că: $\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k!} \xrightarrow[n \to \infty]{(*)} 1 - \frac{1}{e} \approx 0.63212$

A se vedea script pt. simulare.

[HINT: (*) $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ și luăm $x = -1$] ■

Scurtă recapitulare (condiționări):

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Fie $A, B \in \mathcal{F}$. Dacă $\mathbb{P}(B) \neq 0$, atunci definim $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Știm că:

a) $\mathbb{P}(\cdot \mid B) : \mathcal{F} \to [0,1]$ este o probabilitate

b) dacă $(B_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{F}$ formează o partiție a lui Ω, atunci:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A \mid B_n) \cdot \mathbb{P}(B_n)$$

Teorema lui Bayes: Fie $A, B \in \mathcal{F}$ cu $\mathbb{P}(A) \neq 0$ și $\mathbb{P}(B) = 0$. Atunci:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

„Schema de aplicare" a Th lui Bayes:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c) \cdot \mathbb{P}(A^c)}.$$

Aplicația 3: familie cu 2 copii

O familie are 2 copii. Care este probabilitatea ca ambii să fie băieți, știind că cel puțin unul dintre copii este băiat?

Soluție:

Mai întâi, formalizăm datele problemei.

$$\Omega = \{ \underbrace{BB}_{\omega_1}, \underbrace{BF}_{\omega_2}, \underbrace{FB}_{\omega_3}, \underbrace{FF}_{\omega_4} \}$$

$$P(BB) = P(BF) = P(FB) = P(FF) = \frac{1}{4} = \frac{1}{|\Omega|}$$

Acum mi se cere: $P(BB \mid \underline{\text{cel puțin un copil este } B}) =$

$$= P(BB \mid BB, BF, FB)$$

$$\overset{\text{Def}}{=} \frac{P(BB \cap (BB \cup BF \cup FB))}{P(BB \cup BF \cup FB)} = \frac{P(BB)}{P(BB \cup BF \cup FB)} = \frac{1/4}{3/4} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Obs: Un răspuns popular, dar INCORECT la această întrebare este 1/2. Dar acest răspuns este corect la altă întrebare: « Care este probab ca ambii să fie băieți, dacă primul născut este băiat ? >

$$P(BB \mid \text{primul este băiat}) = P(BB \mid \underline{B}B \cup \underline{B}F) \overset{Def}{=} \frac{P(BB \cap (BB \cup BF))}{P(BB \cup BF)} = \frac{P(BB)}{P(BB \cup BF)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

A se vedea script pt. simulare.