Seminar 1 FLP 25 MARTIE 2022

~ Laborator 6 ~

ALGORITMUL DE UNIFICARE

Notații termeni:

x, y, z... VARIABILE

a, b, c... CONSTANTE (simboluri de aritate 0)

f, g, h... SIMBOLURI PENTRU FUNCȚII ARBITRARE

s, t, u... TERMENI

$var(t)$ → mulțimea variabilelor care apar în t

$s = t$ → pereche de termeni

$Trm_{\mathcal{F}, \mathcal{V}}$ → mulțimea termenilor peste $\mathcal{F}$ și $\mathcal{V}$

! Doi termeni t_1 și t_2 se unifică ⟺ ∃ σ substituție a.î.

$$\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$$

Algoritmul de unificare:

- Inițial $S = \emptyset$, lista de rezolvat $R = \{t_1 = t_2, \ldots, t_{n-1} = t_n\}$
- SCOATE: elimină orice ecuație de forma $t = t$
- DESCOMPUNE: înlocuiește orice relație de forma $f(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1', \ldots t_n')$ cu ecuațiile $t_1 = t_1' \ldots t_n = t_n'$
- REZOLVĂ: orice ecuație de forma $x = t$ sau $t = x$ din R unde variabila x nu apare în termenul t, este mutată sub forma $x = t$ în S.

  ! În toate celelalte ecuații (din R și S), x este înlocuit cu t.

Algoritmul se termină normal dacă $R = \emptyset$ ⟹ S e cgu

	LISTA SOLUTIE S	LISTA DE REZOLVAT R
INITIAL	$\emptyset$	$t_1 = t_1', \dots, t_m = t_m'$
SCOATE	S	$R', t = t$
	S	R'
DESCOMPUNE	S	$R', f(t_1, \dots t_m) = f'(t_1, \dots t_m)$
	S	$R', t_1 = t_1', \dots, t_m = t_m'$
REZOLVA	S	$R', x = t$ sau $t = x$, x nu apare în t
	$x = t, S[x \leftarrow t]$	$R'[x \leftarrow t]$
FINAL	S	$\emptyset$

Algoritmul nu are cgu dacă:

1. În R există o ecuatie de forma $f(t_1 \dots t_m) = g(t_1' \dots t_k')$ cu $f \neq g$.

2. În R există o ecuatie de forma $x = t$ sau $t = x$ și variabila x apare în termenul t.

EXEMPLU: $\{ g(y) = x, \underbrace{f(x, h(x), y)}_{t_1} = \underbrace{f(g(z), w, z)}_{t_2} \}$

S	R	
$\emptyset$	$g(y) = x, f(x, h(x), y) = f(g(z), w, z)$	REZOLVA
$x = g(y)$	$f(g(y), h(g(y)), y) = f(g(z), w, z)$	DESCOMPUNE
$x = g(y)$	$g(y) = g(z), h(g(y)) = w, y = z$	REZOLVA
$w = h(g(y))$, $x = g(y)$	$g(y) = g(z), y = z$	REZOLVA
$y = z, w = h(g(y))$, $x = g(y)$	$g(z) = g(z)$	SCOATE
— " —	$\emptyset$	

VERIFICARE: $\nabla = \{ y \to z; x \to g(y); w \to h(g(z)) \}$ cgu

$\nabla(g(y)) = \nabla(x)$? $g(z) = g(z)$ (A) $\nabla(t_1) = \nabla(t_2)$? $f(g(z), h(g(z)), z) = f(g(z), h(g(z)), z)$ (A)

1. $p(a, x, h(g(y)))$ și $p(z, h(z), h(u))$

S	Lista de rezolvat R	
$\emptyset$	$p(a,x,h(g(y))) \doteq p(z,h(z),h(u))$	Descompune
$\emptyset$	$a \doteq z,\ x \doteq h(z),\ h(g(y)) \doteq h(u)$	Rezolvă
$z \doteq a$	$x \doteq h(a),\ h(g(y)) \doteq h(u)$	Descompune
$z \doteq a$	$x \doteq h(a),\ g(y) = u$	Rezolvă
$z \doteq a,\ x \doteq h(a)$	$g(y) \doteq u$	Rezolvă
$u \doteq g(y),\ x \doteq h(a),\ z \doteq a$	$\emptyset$	

$\tau = \{u \mapsto g(y),\ x \mapsto h(a),\ z \mapsto a\}$ CGU

5. $f(x, f(x,x))$ și $f(g(y), f(z, g(a)))$

S	R	
$\emptyset$	$f(x,f(x,x)) \doteq f(g(y), f(z,g(a)))$	Descompune
$\emptyset$	$x \doteq g(y),\ f(x,x) \doteq f(z,g(a))$	Descompune
$\emptyset$	$x \doteq g(y),\ x = z,\ x \doteq g(a)$	Rezolvă
$x \doteq z$	$z \doteq g(y),\ z \doteq g(a)$	Rezolvă
$z \doteq g(y),\ x \doteq g(y)$	$g(y) \doteq g(a)$	Descompune
$z = g(y),\ x \doteq g(y)$	$y \doteq a$	Rezolvă
$y \doteq a,\ z \doteq g(a),\ x \doteq g(a)$	$\emptyset$	

$\tau = \{y \mapsto a,\ z \mapsto g(a),\ x \mapsto g(a)\}$ CGU

2. $f(h(a), g(x)), f(y, y)$

S	R	
θ	$f(h(a), g(x)) \doteq f(y, y)$	Descompune
θ	$h(a) \doteq y, \; g(x) \doteq y$	Rezolvă
$y \doteq h(a)$	$g(x) = h(a)$	

EȘEC, NU EXISTĂ CGU

3. $p(a, x, g(x)), p(a, y, y)$

S	R	
θ	$p(a, x, g(x)) = p(a, y, y)$	DESCOMPUNE
θ	$a \doteq a, \; x \doteq y, \; g(x) \doteq y$	SCOATE
θ	$x \doteq y, \; g(x) \doteq y$	REZOLVĂ
VI $x \doteq y$ VII $y \doteq g(x)$	$g(y) = y$ $x = g(x)$	

EȘEC, NU EXISTĂ CGU

4. $p(x, y, z)$ și $p(u, f(v, v), u)$

S	R	
θ	$p(x, y, z) = p(u, f(u, v), u)$	Descompune
θ	$x \doteq u, \; y \doteq f(v, v), \; z \doteq u$	Rezolvă
$x \doteq u$	$y \doteq f(v, v), \; z \doteq u$	Rezolvă
$z \doteq u, \; x \doteq u$	$y \doteq f(v, v)$	Rezolvă
$y \doteq f(v, v), \; z \doteq u, \; x \doteq u$	$\emptyset$	

$\sigma = \{y \mapsto f(v, v), \; z \mapsto u, \; x \mapsto u\}$

$\boxed{6.\ x+(y*y) \text{ și } (y*y)+z}$

S	R	
$\emptyset$		
$\emptyset$	$x+(y*y) \doteq (y*y)+z$	DESC
$x \doteq y*y$	$x \doteq y*y,\ y*y \doteq z$	REZOLVĂ
$x \doteq y*y,\ z \doteq y*y$	$y*y = z$	REZOLVĂ
	$\emptyset$	

$\sigma = \{x \mapsto y*y,\ z \mapsto y*y\}$ CGU

$\boxed{7.\ (x*y)*z = u*u^{-1}}$

S	R	
$\emptyset$	$(x*y)*z = u*u^{-1}$	DESC
$\emptyset$	$x*y = u,\ z = u^{-1}$	REZOLVĂ
$u = x*y$	$z = (x*y)^{-1}$	REZOLVĂ
$z = (x*y)^{-1},\ u = x*y$	$\emptyset$	

$\sigma = \{z \mapsto (x*y)^{-1},\ u \mapsto x*y\}$ CGU

$\boxed{8.\ x*y = u*u^{-1}}$

S	R	
$\emptyset$	$x*y \doteq u*u^{-1}$	DESC
$\emptyset$	$x \doteq u,\ y = u^{-1}$	REZ
$x \doteq u$	$y = u^{-1}$	REZ
$y \doteq u^{-1},\ x \doteq u$	$\emptyset$	

$\sigma = \{y \mapsto u^{-1},\ x \mapsto u\}$ CGU

9. $x * y, \quad x * (y * (u * v)^{-1})$

S	R	
θ	$x*y = x*(y*(u*v)^{-1})$	DESC.
θ	$x \doteq x, \ y \doteq y*(u*v)^{-1}$	SCOATE
θ	$y = y*(u*v)^{-1}$	EȘEC

EȘEC
NU EXISTĂ CGU

11. $f(g(x), x) = f(y, y)$

S	R	
θ	$f(g(x), x) = f(y,y)$	DESC
θ	$g(x) \doteq y, \ x \doteq y$	REZ
$x \doteq y$	$g(y) = y$	EȘEC

EȘEC
NU EXISTĂ CGU

16. $f(x,y)$, $f(h(x),x)$ și $f(x,b)$

S	R	
θ	$f(x,y) \doteq f(x,b), \ f(x,b) = f(h(x),x)$	DESC
θ	$x \doteq x, \ y \doteq b, \ \boxed{x = h(x)}, \ b \doteq x$	

EȘEC
NU EXISTĂ CGU

21. $f(f(g(x),h(y)),h(z)),\ f(v,w),\ f(f(u,h(h(x))),h(y))$

S	R	
$\emptyset$	$f(f(g(x),h(y)),h(z)) = f(v,w)$ $f(f(u,h(h(x))),h(y)) = f(v,w)$	Descompune
$\emptyset$	$f(g(x),h(y)) = v,\ h(z) = w$ $f(u,h(h(x))) = v,\ h(y) = w$	Rezolvă
$w \doteq h(y)$	$f(g(x),h(y)) = v,\ h(z) = h(y)$ $f(u,h(h(x))) = v$	Descompune
$w \doteq h(y)$	$f(g(x),h(y)) = v,\ z \doteq y,$ $f(u,h(h(x))) = v$	Rezolvă
$y \doteq z,\ w \doteq h(\cancel{y}z)$	$f(g(x),h(z)) = v,\ f(u,h(h(x))) = v$	Rezolvă
$v = f(g(x),h(z)),$ $y \doteq z,\ w \doteq h(z)$	$f(g(x),h(z)) = f(u,h(h(x)))$	Descompune
$v \doteq f(g(x),h(z)),$ $y \doteq z,\ w \doteq h(z)$	$g(x) = u,\ h(z) = h(h(x))$	Rezolvă
$u = g(x),\ y = z,\ w = h(z)$ $v = f(g(x),h(z))$	$h(x) = z$	Rezolvă
$z = h(x),\ u = g(x),$ $y = h(x),\ w = h(h(x)),$ $v = f(g(x),h(h(x)))$	$\emptyset$	

$\sigma = \{z \mapsto h(x),\ u \mapsto g(x),\ y \mapsto h(x),\ w \mapsto h(h(x)),\ v \mapsto f(g(x),h(h(x)))\}$ CGU

8 APRILIE 2022
1 APRILIE 2022

SEMINAR 2 FLP

~ Laborator 7 ~ + ~ Laborator 8 ~

DEDUCȚIA NATURALĂ PENTRU CALCUL PROPOZIȚIONAL
RECAPITULARE LOGICĂ PROPOZIȚIONALĂ

Notații:

$\vdash \varphi$ – TEOREMA

$\Gamma (\vdash \varphi)$ – MULTIME (de teoreme)

$\models \varphi$ – tautologie (este mereu adevărat)

$\neg p$ – NON p

$\wedge$ și

$\vee$ SAU

$\rightarrow$ IMPLICĂ

Tabele de adevăr:

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Fie $e : Var \rightarrow \{0,1\}$ $\quad e(p)=1 \quad e(q)=0 \quad e(v)=1 \ \forall\, v \in Var \setminus \{p,q\}$

$e^{+} : Form \rightarrow \{0,1\} \quad e^{+}(\neg v \rightarrow p) = e^{+}(\neg v) \rightarrow e^{+}(p)$

$= \neg e^{+}(v) \rightarrow e(p) = \neg e(v) \rightarrow e(p)$

$= \neg 1 \rightarrow 1$

$= 0 \rightarrow 1 = 1$

Vrem să aflăm dacă $\neg v \rightarrow p$ este tautologie

v	p	$\neg v$	$\neg v \rightarrow p$
0	0	1	$\boxed{0}$
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	1

$\Rightarrow$ Nu e tautologie

[S2.1] Arătați că $\models (v_1 \vee v_2 \to v_3) \leftrightarrow (v_1 \to v_3) \wedge (v_2 \to v_3)$

v_1	v_2	v_3	$v_1 \vee v_2$	A: $v_1 \vee v_2 \to v_3$	φ: $v_1 \to v_3$	ψ: $v_2 \to v_3$	$\varphi \wedge \psi$	$A \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1

REGULA DE DEDUCTIE :

MP(modus ponens) $\dfrac{\varphi, \ \varphi \to \psi}{\psi}$

$\Gamma \vdash \varphi$ $\to$ φ este Γ-teoremă

Teorema deducției : $\Gamma \vdash \varphi \to \psi \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$

! Orice teoremă este și tautologie: $\vdash \varphi \Leftrightarrow \models \varphi$

Demonstrație $\Gamma \models \varphi \to \psi \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$

$p \wedge q, r \vdash q \wedge r$

1. $p \wedge q$ premisă
2. r premisă
3. q $(\wedge e_2)$, 1
4. $q \wedge r$ $(\wedge i)$, 2, 3

$p \wedge q, r \models q \wedge r$

Fie e modelul pentru $\{p \wedge q, r\}$

Vrem să demonstrăm că e este model pentru $q \wedge r$

$e \models \{p \wedge q, r\} \Leftrightarrow e^+(p \wedge q) = 1$

$e^+(r) = 1$

$e^+(p \wedge q) = 1 \Leftrightarrow e(p) = e(q) = 1$

$e^+(r) = 1 \Leftrightarrow e(r) = 1$

$e^+(q \wedge r) = e^+(q) \wedge e^+(r) = e(q) \wedge e(r) = 1 \wedge 1 = 1$

$\Rightarrow e \models q \wedge r$ (e model pt $q \wedge r$)

SISTEMUL DE REGULI AL DEDUCTIEI NATURALE

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge i) \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge e_1) \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ (\wedge e_2)$$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}}{\varphi \to \psi}\ (\to i) \qquad \frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\to e)$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee i_1) \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee i_2) \qquad \frac{\varphi \vee \psi \quad \boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \chi\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{array}}}{\chi}\ (\vee e)$$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\neg \varphi}\ (\neg i) \qquad \frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ (\neg e)$$

$$\frac{\varphi}{\neg\neg\varphi}\ (\neg\neg i) \qquad \frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ (\neg\neg e)$$

$$\frac{}{\varphi \vee \neg\varphi}\ \text{TND} \qquad \frac{\bot}{\varphi}\ (\bot e)$$

(tertium non datur)

S2.2 Demonstrați că următorii secvenți sunt valizi:

1. $(p \land q) \land r,\ s \land t \vdash q \land s$

1	$(p \land q) \land r$	premisă
2.	$s \land t$	premisă
3.	$p \land q$	$(\land e_1), 1$
4.	q	$(\land e_2), 3$
5.	s	$(\land e_1), 2$
6.	$q \land s$	$(\land i); 4, 5$

2. $p, \neg\neg(q \land r) \vdash \neg\neg p \land r$

1.	p	premisă
2.	$\neg\neg(q \land r)$	premisă
3.	$q \land r$	$(\neg\neg e), 2$
4.	r	$(\land e_2), 3$
5.	$\neg\neg p$	$(\neg\neg i)$ 1
6.	$\neg\neg p \land r$	$(\land i) 4, 5$

3. $p \land q \to r \vdash p \to (q \to r)$

1.	$p \land q \to r$	premisă
2.	p	ipoteză
3.	q	ipoteză
4.	p	copiere
5.	$p \land q$	$(\land i)$ 3, 4
6.	r	$(\to e)$ 5, 1
7.	$q \to r$	$(\to i), 3-6$
8.	$p \to (q \to r)$	$(\to i), 2-7$

4. $p \land (q \lor r) \vdash (p \land q) \lor (p \land r)$

1. $p \land (q \lor r)$ — premisă
2. p — $(\land e_1)$, 1
3. $q \lor r$ — $(\land e_2)$, 1
4. q — ipoteză
5. $p \land q$ — $(\land i)$ 2,4
6. $(p \land q) \lor (p \land r)$ — $(\lor i)$, 5
7. r — ipoteză
8. $p \land r$ — $(\land i)$ 2,4
9. $(p \land q) \lor (p \land r)$ — $(\lor i)$, 8
10. $(p \land q) \lor (p \land r)$ — $(\lor e)$, 3, 4-6, 7-9

5. $q \to r \vdash (p \lor q) \to (p \lor r)$

1. $q \to r$ — premisă
2. $p \lor q$ — ipoteză
3. p — ipoteză
4. $p \lor r$ — $(\lor i_1)$, 3
5. q — ipoteză
6. r — $(\to e)$ 5,1
7. $p \lor r$ — $(\lor i_2)$, 6
8. $p \lor r$ — $(\lor e)$ 2, 3-4, 5-7
9. $(p \lor q) \to (p \lor r)$ — $(\to i)$, 2-8

5. $p \to q,\ p \to \neg q \vdash \neg p$

1.	$p \to q$	premisă
2.	$p \to \neg q$	premisă
3.	p	ipoteză
4.	q	$(\to e)$ 1,3
5.	$\neg q$	$(\to e)$ 2,3
6.	$\bot$	$(\neg e)$ 4,5
7.	$\neg p$	$(\neg i)$ 3-6

$\boxed{\text{S2.3}}$ Demonstrați că următoarele reguli pot fi derivate din regulile deducției naturale:

$$\frac{\varphi \to \psi \quad \neg\psi}{\neg\varphi}\ \text{MT (modus tollens)} \qquad \frac{\boxed{\begin{array}{c}\neg\varphi \\ \vdots \\ \bot\end{array}}}{\varphi}\ \text{RAA}$$

reductio ad absurdum

MT

1.	$\varphi \to \psi$	premisă
2.	$\neg\psi$	premisă
3.	φ	ipoteză
4.	ψ	$(\to e)$ 1,3
5.	$\neg\psi$	copiere
6.	$\bot$	$(\neg e)$ 4,5
7.	$\neg\varphi$	$(\neg i)$, 3-6

RAA

1.	$\neg\varphi \to \bot$	premisă ~~ipoteză~~
2.	$\neg\varphi$	ipoteză
3.	$\bot$	$(\to e)$ 1,2
4.	$\neg\neg\varphi$	$(\neg i)$, 2-3
5.	φ	$(\neg\neg e)$, 4

$\boxed{S2.4}$ Fie $n \geq 1$ și $\varphi_1 \dots \varphi_n$, φ formule. Demonstrați că dacă $\vdash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\dots \to (\varphi_n \to \varphi) \dots))$ este valid atunci $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$ este valid.

Considerăm $\varphi_1, \dots \varphi_n$ premise

1. φ_1 premisă
2. $\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \dots (\varphi_n \to \varphi) \dots)$ teoremă
3. $\varphi_2 \to (\dots (\varphi_n \to \varphi) \dots)$ $(\to e)$ 1,2
4. φ_2 premisă

$\vdots$ Aplicăm de $(n-1)$ ori $(\to e)$

x_i. φ

$\boxed{S.2.5}$ Echivalența logică: $\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$
Găsiți regulile de introducere și eliminare pt $\leftrightarrow$

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \varphi\end{array}}}{(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)} \wedge i \qquad \dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \varphi\end{array}}}{\varphi \leftrightarrow \psi}$$

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \leftrightarrow \psi \quad \varphi}{\varphi \to \psi_{(\wedge e)} \quad \varphi}}{\psi} (\to e) \qquad \dfrac{\dfrac{\varphi \leftrightarrow \psi \quad \psi}{\psi \to \varphi_{(\wedge e)} \quad \psi}}{\varphi} (\to e)$$

$$\Rightarrow \dfrac{\varphi \leftrightarrow \psi \quad \varphi}{\psi} (\leftrightarrow e) \qquad \dfrac{\varphi \leftrightarrow \psi \quad \psi}{\varphi} (\leftrightarrow e)$$

1. $\varphi \leftrightarrow \psi$ premisă
2. φ premisă
3. $\varphi \to \psi$ $(\wedge e_1)$, 1
4. ψ $(\to e)$ 2,3

$\boxed{S2.6}$

i1. Writer ∧ Human Nature → Clever

i2. Writer → (Poet → Heart) = (Writer ∧ Poet) → Heart

i3. Shakespeare → (Writer ∧ Hamlet)

i4. (Writer ∧ Heart) → Human Nature

i5. Hamlet → Poet

(i1-i5)
~~(i1-5)~~ ⊢ Shakespeare → Clever

1.	i1	premisă
2.	i2	premisă
3.	i3	premisă
4.	i4	premisă
5.	i5	premisă
6.	Shakespeare	ipoteză
7.	Writer ∧ Hamlet	(→e) 3,6
8.	Writer	(∧e1) 7
9.	Hamlet	(∧e2) 7
10	Poet	(→e) 5
11	Writer ∧ Poet	(∧i) 8, 10
12	Heart	(→e) 2, 11
13	Writer ∧ Heart	(∧i) 8,12
14	Human Nature	(→e) 4, 13
15.	Writer ∧ Human Nature	(∧i) 8,14
16.	Clever	
17.	Shakespeare → Clever	(→i) 6-16

SEMINAR 3 FLP

~Laborator 8 + 9~ 8/15 APRILIE 2022

PUNCTE FIXE

O mulțime parțial ordonată este o pereche $(M, \leq)$ unde cea de-a doua componentă reprezintă o relație de ordine

O mulțime parțial ordonată este completă $(C, \leq)$ dacă C are prim element $\perp$ ($\perp \leq x \ \forall x \in C$) și $\bigvee_n x_n \ \exists$ în C $\forall$ lanțul $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots$

Un element $a \in C$, $(C, \leq_C)$ mpo este PUNCT FIX al funcției $f: C \to C$ dacă $f(a) = a$

$lfp \in C$ - cel mai mic punct fix al $f: C \to C$ dacă este punct fix și $\forall\, a \in C$ pct fix al lui f avem $lfp \leq_C a$.

$\boxed{S3.1}$ Care sunt punctele fixe și lfp al următoarelor funcții

$\boxed{1.\ f_1: \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,3\}),\ f_1(Y) = Y \cup \{1\}}$

A punct fix $\Leftrightarrow f_1(A) = A$

$Y \in \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

Puncte fixe: $\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}$

Cel mai mic punct fix: B $f_1(B) = B$, pt oricare alt pct fix A, $B \subseteq A$

$\Rightarrow \{1\}$ cel mai mic punct fix.

$\boxed{2.\ f_2: \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,3\}),\ f_2(Y) = \begin{cases} \{1\}, & \text{dacă } 1 \in Y \\ \emptyset, & \text{altfel} \end{cases}}$

$f_2(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow$ punct fix $\emptyset$

$f_2(\{1\}) = \{1\} \Rightarrow$ punct fix $\{1\}$

$f_2(\{2\}) = f_2(\{3\}) = \emptyset$

$f_2(\{1,2\}) = f_2(\{1,3\}) = 1$

$\emptyset \subseteq \{1\} \Rightarrow \emptyset$ cel mai mic punct fix

3. $f_3 : \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,3\})$, $f_3(Y) = \begin{cases} \phi, & \text{dacă } 1 \in Y \\ \{1\} & \text{altfel.} \end{cases}$

$f_3(\phi) = \{1\}$

$f_3(\{1\}) = \phi$

$f_3(\{2\}) = \{1\}$

$f_3(\{1,2\}) = \phi \Rightarrow f_3$ nu are puncte fixe.

Fie $(A, \leq_A)$ și $(B, \leq_B)$ mpo și $f : A \to B$ monotonă (crescătoare) dacă $a_1 \leq_A a_2$ și $f(a_1) \leq_B f(a_2)$ $\forall$ $a_1, a_2 \in A$.

Fie S o mulțime de clauze propoziționale, A mulțimea variabilelor propoziționale $p_1, p_2 \dots$ care apar în S și Baza $= \{p_i \mid p_i \in S\}$ mulțimea clauzelor din S.

$$f_S : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$$

$$f_S(Y) = Y \cup \text{Baza} \cup \{a \in A \mid (s_1 \wedge \dots \wedge s_m \to a) \text{ este în } S, s_1 \in Y, \dots, s_m \in Y\}$$

$\boxed{S3.2}$ Este f_S monotonă?

f_S monotonă $\Leftrightarrow \exists$ $Y_1, Y_2 \in \mathcal{P}(A)$ aî $Y_1 \subseteq Y_2$ atunci (operația de ordine a mulțimilor este includerea) $f_S(Y_1) \subseteq f_S(Y_2)$

$\Leftrightarrow Y_1 \cup \text{Baza} \cup \overbrace{\{a \in A \mid (s_1 \wedge \dots \wedge s_m) \to a \text{ este în } S, s_1 \in Y_1 \dots s_m \in Y_1\}}^{M_1} \subseteq$

$\subseteq Y_2 \cup \text{Baza} \cup \underbrace{\{a \in A \mid (s_1 \wedge \dots \wedge s_m) \to a \text{ este în } S, s_1 \in Y_2 \dots s_m \in Y_2\}}_{M_2}$

Vrem să demonstrăm că $M_1 \subseteq M_2$

Fie $a \in M_1 \Rightarrow \exists$ $s_1 \wedge \dots \wedge s_m \to a \in S$ și $s_1 \wedge \dots \wedge s_m \in Y_1$

Cum $Y_1 \subseteq Y_2 \Rightarrow s_1 \dots s_m \in Y_2 \Rightarrow a \in M_2$

Prin urmare $f_S(Y_1) \subseteq f_S(Y_2) \Rightarrow f_S$ este monotonă.

$(A, \le_A), (B, \le_B)$ $f: A \to B$) $f(\bigvee_n a_n) = \bigvee_n f(a_n)$ $\forall \{a_n\}_n \subseteq A$

$\to$ orice funcție continuă e crescătoare

$\forall S$, f_S e continuă.

Teorema Knaster - Tarski

$(C, \le)$ cpo $F: C \to C$ continuă

$a = \bigvee_n F^n(\bot)$ este cel mai mic pct fix al lui F

$\boxed{S3.3}$ Calculați lfp pt f_{S_i} $i \in \{1, 2, 3\}$ pt:

1) $S_1 = \{x_1 \wedge x_2 \to x_3, x_4 \wedge x_2 \to x_5, x_2, x_6, x_6 \to x_1\}$

$f_S(Y) = Y \cup Baza \cup \underline{\{a \in A \mid (s_1 \wedge \dots \wedge s_m \to a) \in A, s_1 \in Y \dots s_m \in Y\}}$

$A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ $Baza = \{x_2, x_6\}$

$f_{S_1}(\phi) = \phi \cup \{x_2, x_6\} = \{x_2, x_6\}$

$f_{S_1}^2(\phi) = \{x_2, x_6\} \cup \{x_2, x_6\} \cup \{x_1\} = \{x_1, x_2, x_6\}$

$f_{S_1}^3(\phi) = \{x_1, x_2, x_6\} \cup \{x_2, x_6\} \cup \{x_3\} = \{x_1, x_2, x_3, x_6\}$

$f_{S_1}^4(\phi) = \{x_1, x_2, x_3, x_6\} \cup \{x_2, x_6\} \cup \phi = f_{S_1}^3(\phi)$

$\Rightarrow \{x_1, x_2, x_3, x_6\}$ - lfp

2) $S_2 = \{x_1 \wedge x_2 \to x_3, x_4 \to x_1, x_5 \to x_2, x_2 \to x_5, x_4\}$

$A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ $Baza = \{x_4\}$

$f_2(\phi) = \phi \cup \{x_4\} = \{x_4\}$

$f_2^2(\phi) = \{x_4\} \cup \{x_4\} \cup \{x_1\} = \{x_1, x_4\}$

$f_2^3(\phi) = \{x_1, x_4\} \cup \{x_4\} \cup \phi = f_2^2(\phi) \Rightarrow \{x_1, x_4\}$ lfp

3) $S_3 = \{x_1 \to x_2, x_1 \wedge x_3 \to x_1, x_3\}$

$A = \{x_1, x_2, x_3\}$ Baza $= \{x_3\}$

$f_{S_3}(\phi) = \phi \cup \{x_3\} \cup \phi = \{x_3\}$

$f_{S_3}^2(\phi) = \phi\{x_3\} \cup \{x_3\} \cup \phi = \{x_3\} = f_{S_3}$

$\Rightarrow \{x_3\}$ lfp

Concluzie: M = elementele care se deduc din mulțimea pe care o avem. Ex Baza $= \{x_1, x_2, x_3\}$ și $S \supseteq \{x_1 \wedge x_3 \to x_5\}$
$\Rightarrow M = \{x_5\}$

SEMINAR 4 FLP

~ Laborator

REZOLUȚIE SLD

O clauză definită $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_m \to Q$ poate fi gândită ca $Q \vee \neg P_1 \vee \neg P_2 \vee \ldots \vee \neg P_m$.

Pentru o mulțime de clauze definite, regula rezoluției SLD

$$\frac{\neg P_1 \vee \ldots \vee \neg P_i \vee \ldots \neg P_m}{(\neg P_1 \vee \ldots \vee \neg Q_1 \vee \ldots \vee \neg Q_m \vee \ldots \vee \neg P_m)\theta}$$

unde $Q \vee \neg Q_1 \vee \ldots \vee \neg Q_m$ e o clauză definită și θ e cgu pentru P_i și Q.

O derivare prin SLD respingere este o secvență $G_0 := \neg P_1 \vee \ldots \vee \neg P_m, G_1, \ldots, G_k \ldots$ în care G_{i+1} se obține din G_i prin regula SLD. Dacă $\exists k$ a.î. $G_k = \square$ (clauza vidă), atunci derivarea se numește SLD-respingere.

Teoremă

Există o SLD-respingere a lui $P_1 \wedge \ldots \wedge P_m \iff$

$\iff T \vdash P_1 \wedge \ldots \wedge P_m$.

$\boxed{S4.1}$ Găsiți o SLD-respingere pentru:

a)

1. r :- p, q.	5. t.	?- w.
2. s :- p, q.	6. q.	
3. v :- t, u.	7. u.	
4. w :- v, s.	8. p.	

1. $p \wedge q \to r \leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee r \leftrightarrow \underline{\neg p \vee \neg q \vee r}$
2. $\neg p \vee \neg q \vee s$
3. $\neg t \vee \neg u \vee v$
4. $\neg v \vee \neg s \vee w$
5. t
6. q
7. u
8. p

$G_0 = \neg w$

$G_1 = \neg v \vee \neg s$ (4)

$G_2 = \neg t \vee \neg u \vee \neg s$ (3)

$G_3 = \neg u \vee \neg s$ (5)

$G_4 = \neg s$ (7)

$G_5 = \neg p \vee \neg q$ (2)

$G_6 = \neg q$ (8)

$G_7 = \square$ (6)

Pași: Pornesc de la negarea întrebării. Dacă există undeva în lista de clauze întrebarea, o înlocuiesc cu demonstrația ei ($G_0 = \neg w$; Văd că w apare în $\neg v \vee \neg s \vee w$ așa că $G_1 = \neg v \vee \neg s$. Repet procesul până ajung la $\square$; $\neg s \wedge s = \square \Rightarrow$ Dacă în G_k apare $\neg v$, iar v este o clauză atunci G_{k+1} nu va mai avea $\neg v$ deoarece a fost anulat v.

b)

$$\boxed{\begin{array}{l} 1.\ g(x,y) :- g(y,x),\ g(y, f(f(y))). \\ 2.\ g(a, f(f(x))). \\ ?-\ g(f(z), a). \end{array}}$$

1. $\neg g(y,x) \vee \neg g(y, f(f(y))) \vee g(x,y)$
2. $g(a, f(f(x)))$

$G_0 = \neg g(f(z), a)$ $\qquad g(f(z), a) \xrightarrow{\theta cgu} g(x,y)$

$\theta(x) = f(z)$

$G_1 = \neg g(a, f(z)) \vee \neg g(a, f(f(a)))$ $\qquad \theta(y) = a$

(1 cu $\theta(x) = f(z)$, $\theta(y) = a$)

$G_2 = \neg g(a, f(f(a)))$ (2 cu $\theta(z) = f(x)$)

$G_3 = \square$ (2 cu $\theta(x) = a$)

c)

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1.\ p(x) - g(x, f(y)), r(a). & \\ 2.\ p(x) :- r(x). & 4.\ r(x) :- g(x,y) \\ 3.\ g(x,y) :- p(y). & 5.\ r(f(b)). \\ & ?-\ p(x), g(y,z) \end{array}}$$

1. $\neg g(x, f(y)) \vee \neg r(a) \vee p(x)$
2. $\neg r(x) \vee p(x)$
3. $\neg p(y) \vee g(x,y)$
4. $\neg g(x,y) \vee r(x)$
5. $r(f(b))$

$G_0 = \neg p(x) \vee \neg g(y,z)$

$G_1 = \neg r(x) \vee \neg g(y,z)$ (2)

$G_2 = \neg g(x,y) \vee \neg g(y,z)$ (4)

$G_3 = \neg p(y) \vee \neg g(y,z)$ (3)

$G_4 = \neg r(y) \vee \neg g(y,z)$

$G_5 = \neg g$

$G_0 = \neg p(X) \vee \neg q(Y,Z)$

$G_1 = \neg r(X) \vee \neg q(Y,Z)$ (2)

$G_2 = \neg q(Y,Z)$ (5 cu $\theta(X) = f(B)$)

$G_3 = \neg p(Z)$ (3 cu $\theta(X) = Y$ și $\theta(Y) = Z$)

$G_4 = \neg r(Z)$ (2 cu $\theta(X) = Z$)

$G_5 = \square$ (5 cu $\theta(Z) = f(B)$)

ARBORE SLD

- Fiecare nod al arborelui este o țintă
- Rădăcina este G_0
- Fie G_i și G_{i+1}, unde G_{i+1} se obț din G_i cu regula SLD

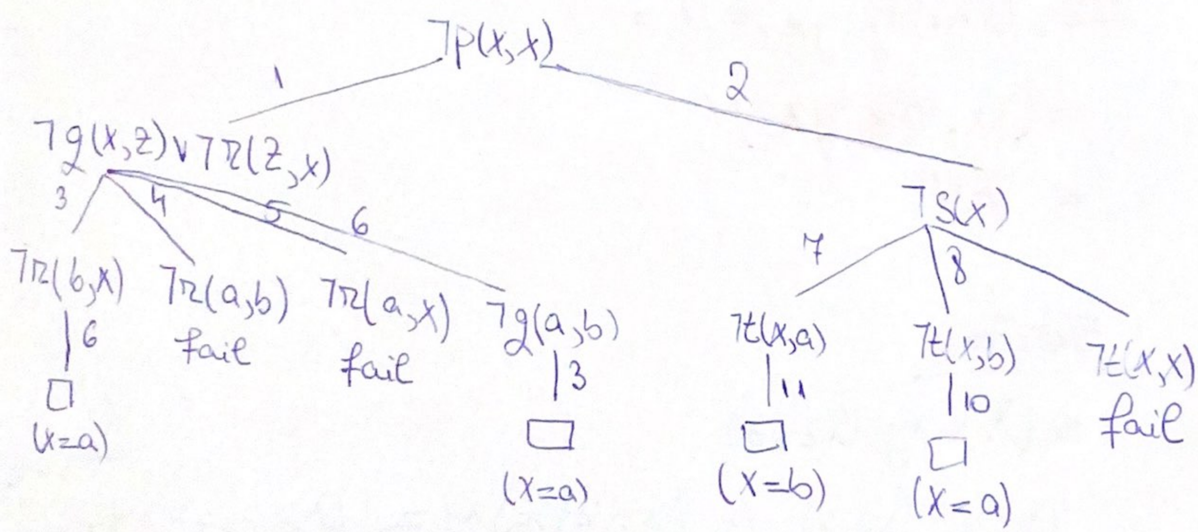
Atunci G_{i+1} este copilul lui G_i, iar muchia G_i, G_{i+1} are eticheta C_i

! Dacă arborele SLD cu rădăcina G_0 are o frunză $\square$ atunci există o SLD-respingere a lui G_0.

$\boxed{S4.2}$ Desenați arborele SLD pt țintă ?- p(X,X)

1. p(X,Y) :- q(X,Z), r(Z,Y).
2. p(X,X) :- s(X).
3. q(X,b).
4. q(b,a).
5. q(X,a) :- r(a,X).
6. r(b,a).
7. s(X) :- t(X,a).
8. s(X) :- t(X,b).
9. s(X) :- t(X,X).
10. t(a,b).
11. t(b,a).

1. $\neg q(x,z) \vee \neg r(z,y) \vee p(x,y)$
2. $\neg s(x) \vee p(x,x)$
3. $q(x,b)$
4. $q(b,a)$
5. $\neg r(a,x) \vee q(\cancel{x},a)$
6. $r(b,a)$
7. $\neg t(x,a) \vee s(x)$
8. $\neg t(x,b) \vee s(x)$
9. $\neg t(x,x) \vee s(x)$
10. $t(a,b)$
11. $t(b,a)$



LAMBDA CALCUL

Sintaxa λ-calculus:

$$t = x \mid \lambda x.t \mid t\, t$$

Vom scrie $\lambda xyz.t$ în loc de $\lambda x.\lambda y.\lambda z.t$

Substituții

$[u/x]x = u$ ⇝ înlocuiesc toate x cu u în cee în afara parantezei.

$[u/x]y = y$

$[u/x]\lambda y.t = \lambda y.[u/x]t.$

$[u/x](t_1 t_2) = [u/x]t_1\, [u/x]t_2$

α - conversie

$$t =_\alpha t$$

$$\lambda x.t =_\alpha \lambda y.[y/x]t$$

β - reducție

$$(\lambda x.y)u \to_\beta [u/x]t$$

Ex $(\lambda x.(\lambda y.yx)z)v =$

$= (\lambda x.(\cancel{zx}))v$

$= zv$

Exerciții

a) $(\lambda x.xy)(\lambda z.z)$

$(\lambda x.xy)(\lambda z.z) \to_\beta [\lambda z.z/x]xy =_\alpha (\lambda z.z)y \to_\beta \cancel{[y/z]z =_\alpha y}$ $[y/z]z =_\alpha y$

b) $(\lambda a.a)(\lambda b.b)(\lambda c.cc)(\lambda d.d)$

$E \to_\beta (\lambda b.b)(\lambda c.cc)(\lambda d.d) \to_\beta (\lambda c.cc)(\lambda d.d) \to_\beta [\lambda d.d/c]cc$

$=_\alpha (\lambda d.d)(\lambda d.d) =_\alpha (\lambda d.d)(\lambda e.e) \to_\beta [\lambda e.e/d]d = \lambda e.e$

$(\lambda a.a)(\lambda b.b) \to_\beta [\lambda b.b/a]a = \lambda b.b$

$(\lambda b.b)(\lambda c.cc) \to_\beta [\lambda c.cc/b]b = \lambda c.cc$

c) $(\lambda xy \,.\, xyz)\,(\lambda t \,.\, tu)$

$$(\lambda xy \,.\, xyz)(\lambda t \,.\, tu) =_\alpha (\lambda x.\lambda y \,.\, xyz)(\lambda t \,.\, tu) \to_\beta [\lambda t.tu \backslash x](\lambda y \,.\, xyz)$$

$$=_\alpha \lambda y \,.\, (\lambda t.tu]\; yz \to_\beta \lambda y \,.\, [y/t]tu)z =_\alpha \lambda y \,.\, yuz$$

Recapitulare Seminarii

1. DEDUCȚIA NATURALĂ

a) $p \wedge q \to \neg u,\ p \to u,\ q,\ p \vdash \neg r$

1. $p \wedge q \to \neg u$ premisă
2. $p \to u$ premisă
3. q premisă
4. p premisă
5. u $(\to e)$ 2, 4
6. $p \wedge q$ $(\wedge i)$ 3, 4
7. $\neg u$ $(\to e)$ 1, 6
8. $\bot$ $(\neg e)$ 5, 7
9. $\neg r$ $(\bot e)$ 8.

b) $\neg q,\ p \vee q,\ s \to \neg p,\ s \vdash \neg r$

1. $\neg q$
2. $p \vee q$
3. $s \to \neg p$
4. s
5. $\neg p$ $(\to e)$ 3
6. p ipoteza
7. $\bot$ $\neg e$ (5,6)
8. $\neg r$ $(\bot e)$ 7
9. q ipoteza
10. $\bot$ $(\neg e)$ 1
11. $\neg r$ $(\bot e)$ 10
12. $\neg r$ $(\vee e)$ 2, 6-8, 9-11

c) $p,\ s \to \neg q,\ \neg p \vee q,\ s \vdash r$

1. p
2. $s \to \neg q$
3. $\neg p \vee q$
4. s
5. $\neg q$ $(\to_e)$ 2
6. $\neg p$ ipoteză
7. p copiere
8. $\bot$ $(\neg e)$ 6,7
9. r $(\bot e)$ 8
10. q ipoteză
11. $\bot$ $(\neg e)$ 5, 11
12. r $(\bot e)$ 11
13. r $(\vee_e)$ 3, 6-9, 10-12

d) $p \to q,\ r \to s \vdash (p \vee r) \to (q \vee s)$

1. $p \to q$
2. $r \to s$
3. $p \vee r$ ipoteză
4. p ipoteză
5. q $(\to ie)$ 1
6. $q \vee s$ $(\vee_i)$ 5
7. r
8. s
9. $q \vee s$
10. $q \vee s$ $(\vee e)$ 3, 4-6, 7-9
11. $(p \vee r) \to (q \vee s)$

2. REZOLUȚIE SLD

a) 1. $m(e,c)$

2. $m(d,b)$

3. $f(a,b)$

4. $f(a,c)$

5. $p(a)$

6. $p(d)$

7. $p(X) :- f(Y,X), p(Y) \Leftrightarrow \neg f(Y,X) \vee \neg p(Y) \vee p(X)$

~~$G_0 = \neg p(X) \vee \neg m(Y,X) \vee \neg p(Y)$~~

~~$G_1 = \neg m(d, X) \vee \neg p(X)$ (6 – Y/d)~~

~~$G_2 = \neg p(b)$ (2 X/b) fail.~~

$G_0 = \neg p(X) \vee \neg m(Y,X) \vee \neg p(Y)$

$G_1 = \neg f(Y_1,X) \vee \neg p(Y_1) \vee \neg m(Y,X) \vee \neg p(Y)$

$G_2 = \neg f(a,X) \vee \neg m(Y,X) \vee \neg p(Y)$ – 5 Y_1/a

$G_3 = \neg m(Y,b) \vee \neg p(Y)$ – 3 X/b

$G_4 = \neg p(d)$ – 2 Y/d

$G_5 = \square$ – 6

b) 1. $p(d, b)$

2. $p(d, f)$

3. $p(e, c)$

4. $q(a, b)$

5. $q(a, c)$

6. $\neg q(x, z) \vee \neg p(y, z) \vee r(x, y)$

$G_0 = \neg r(a, x)$ $\quad x/a \quad y/x_1$ (6)

$G_1 = \neg q(a, z) \vee \neg p(x_1, z)$

$G_2 = \neg p(x_1, b)$ $\quad z/b$ (4)

$G_3 = \square$ $\quad x_1/d$ (1)

3. UNIFICARE

S	R	
ϕ	$g(y, f(x), b) = g(x, y, b)$	Descomp.
ϕ	$y = x,\ f(x) = y,\ b = b$	Scoate
ϕ	$y = x,\ f(x) = y$	Rezolvă
$y = x$	$f(x) = x$	EȘEC.

	$f(a, x, g(x)) = f(a, y, y)$	DESC.
	$a = a,\ x = y,\ g(x) = y$	SCOATE
	$x = y,\ g(x) = y$	REZ.
$x = y$	$g(y) = y$	EȘEC

$f(x,y) \quad f(h(x),x) \quad f(x,b)$

	$f(x,y)=f(h(x),x)$; $f(x,y)=f(x,b)$	DESC.
	$x=h(x)$ $y=x$, $x=x$, $y=b$	SCOATE RE
$y=b$	$\underline{x=h(x)}$ $b=x$	ESEC.

$f(f(x,y),x) \quad f(v,u) \quad f(u,h(z))$

ϕ	$f(f(x,y),x)=f(v,u)$; $f(v,u)=f(u,h(z))$	DESC
	$f(x,y)=v$, $x=u$, $v=u$, $u=h(z)$	ESEC

	$f(x,z,z) \quad f(y,y,b)$
	$x=y$, $z=y$, $z=b$
$y=x$	$z=x$, $z=b$
$y=z$	
	$z=b$
$z=b$, $y=b$ $b=x$ $x=b$	ϕ

$\{z \to b,\ y \to b\}$