

MATLAB Programming for Virtual Element Methods

I 网格的生成与数据结构	6
1 网格的图示与标记	7
1.1 网格与解的图示	7
1.2 网格的标记	12
2 辅助数据结构与几何量	17
2.1 辅助数据结构	17
2.2 网格相关的几何量	23
2.3 auxstructure 与 auxgeometry 函数	24
2.4 边界设置	26
2.4.1 边界边的定向	26
2.4.2 边界的设置	27
3 PolyMesher: 二维多角形剖分的生成	29
3.1 网格剖分的基本思想	29
3.1.1 Voronoi 图	29
3.1.2 CVTs 与 Lloyd 迭代	30
3.2 有界 Voronoi 图的反射法构造	31
3.2.1 区域边界的近似	31
3.2.2 边界反射集的计算	34
3.3 二维多角形剖分的生成	41
3.3.1 Lloyd 迭代	41
3.3.2 获取网格剖分的基本数据集	42
4 多角形网格加密	45
4.1 加密规则	45
4.2 确定待加密单元	46
4.3 单元的加密与扩展	48
4.4 程序整理	52
5 PolyMesher3D: 三维多面体剖分的生成	56

II 经典问题的虚拟元方法	57
6 Poisson 方程的协调 VEM	58
6.1 VEM 简介	58
6.2 椭圆投影的计算	60
6.2.1 过渡矩阵 D	60
6.2.2 椭圆投影在基下的矩阵	61
6.2.3 投影限制条件	64
6.3 L^2 投影与强化技巧	65
6.3.1 提升空间中的椭圆投影	65
6.3.2 L^2 投影的计算	66
6.4 Poisson 方程一阶 VEM 程序	68
6.4.1 问题描述	68
6.4.2 单元刚度矩阵的计算	69
6.4.3 单元载荷向量的计算	70
6.4.4 刚度矩阵与载荷向量的装配	71
6.4.5 边界条件的处理	74
6.4.6 L^2 和 H^1 误差分析	75
6.4.7 能量范数误差	77
6.4.8 程序整理	78
6.5 Poisson 方程的二阶虚拟元方法	84
6.5.1 装配指标	84
6.5.2 投影矩阵的计算	85
6.5.3 单元刚度矩阵和载荷向量的计算	87
6.5.4 刚度矩阵和载荷向量的装配	88
6.5.5 边界条件的处理	88
6.5.6 误差分析	89
6.6 Poisson 方程的三阶虚拟元方法	91
6.6.1 椭圆投影的计算	91
6.6.2 L^2 投影的计算	94
6.6.3 单元刚度矩阵和载荷向量的计算	97
6.6.4 刚度矩阵和载荷向量的装配	97
6.6.5 边界条件的处理	99
6.6.6 误差分析	100
7 Poisson 方程的非协调虚拟元方法	102
7.1 虚拟元介绍	102
8 三维 Poisson 方程的虚拟元方法	103
8.1 变分问题	103
8.1.1 虚拟元空间	103
8.1.2 虚拟元方法的变分问题	103

9 线弹性边值问题的虚拟元方法	104
9.1 线弹性边值问题简介	104
9.1.1 问题说明	104
9.1.2 连续变分问题	105
9.1.3 近似变分形式 I—Navier 形式	106
9.1.4 近似变分形式 II—tensor 形式	107
9.2 刚度矩阵和载荷向量的装配	107
9.2.1 矩阵分析法	107
9.2.2 sparse 装配指标	109
9.3 变分形式 I: Navier 型	110
9.3.1 过渡矩阵	110
9.3.2 椭圆投影	111
9.3.3 L^2 投影	113
9.3.4 单元刚度矩阵和载荷向量的计算	115
9.3.5 边界条件的处理	116
9.3.6 程序整理	117
9.4 变分形式 II: tensor 型	118
9.4.1 椭圆投影的定义	118
9.4.2 椭圆投影的计算	121
9.4.3 边界条件的处理	126
9.4.4 程序整理	126
10 Kirchhoff 板弯问题的虚拟元方法	128
10.1 Kirchhoff 板弯问题	128
10.1.1 模型假设	128
10.1.2 薄板弯曲的 Hooke 定律	130
10.1.3 变分原理	131
10.1.4 平衡方程	133
10.1.5 分部积分公式	134
10.2 C^0 连续的非协调 VEM	136
10.2.1 C^0 连续的非协调虚拟元空间	136
10.2.2 过渡矩阵 D	139
10.2.3 椭圆投影	141
10.2.4 单元刚度矩阵与载荷向量的计算	144
10.2.5 符号刚度矩阵和载荷向量	145
10.2.6 边界条件的处理	146
10.2.7 程序整理	147
10.2.8 C^0 -强化处理	148
10.3 Morley 型非协调 VEM	149
10.3.1 过渡矩阵 D	151
10.3.2 椭圆投影的计算	152

10.3.3 单元刚度矩阵与载荷向量的计算	155
10.3.4 符号刚度矩阵和载荷向量	156
10.3.5 边界条件的处理	157
10.3.6 程序整理	158
10.4 C^1 协调 VEM	159
10.4.1 虚拟元空间	159
10.4.2 计算说明	162
11 四阶奇异摄动问题的 C^0 元方法	166
11.1 一些说明	166
11.1.1 数学模型	166
11.1.2 分部积分公式	167
11.2 C^0 连续的非协调虚拟元空间	167
11.3 Poisson 项的处理	168
11.3.1 过渡矩阵	168
11.3.2 椭圆投影 Π_{Δ}^K	169
11.3.3 a_{∇}^K 的椭圆投影	170
11.4 板弯项的处理	173
11.5 刚度矩阵与载荷向量的计算	175
11.6 边界条件的处理	176
11.7 误差分析	177
III 混合虚拟元方法	178
12 Darcy 问题的混合虚拟元方法	179
12.1 一些说明	179
12.1.1 连续变分问题	179
12.1.2 虚拟元方法	180
12.1.3 线性方程组	182
12.2 椭圆投影的计算	183
12.2.1 过渡矩阵	183
12.2.2 椭圆投影在基下的矩阵	185
12.3 单元刚度矩阵和载荷向量的计算	188
12.3.1 A 的计算	188
12.3.2 B 的计算	189
12.3.3 d 的计算	190
12.3.4 载荷向量的计算	190
12.4 刚度矩阵和载荷向量的装配	190
12.5 边界条件的处理	191
12.6 误差分析	192

13 Stokes 问题的混合虚拟元方法	193
13.1 一些说明	193
13.1.1 连续变分问题	193
13.1.2 虚拟元方法	194
13.1.3 线性方程组	196
13.2 椭圆投影的计算	198
13.2.1 过渡矩阵	198
13.2.2 椭圆投影在基下的矩阵	199
13.3 单元刚度矩阵和载荷向量的计算	203
13.3.1 A 的计算	203
13.3.2 B 的计算	203
13.3.3 d 的计算	204
13.3.4 载荷向量的计算	204
13.4 刚度矩阵和载荷向量的装配	205
13.5 边界条件的处理	206
IV 后验误差估计与自适应算法	207

Part I

网格的生成与数据结构

1 网格的图示与标记

1.1 网格与解的图示

基本数据结构

采用陈龙编写的 iFEM 工具箱 [1] 中的数据结构, 用 `node` 表示节点坐标, `elem` 表示单元的连通性, 即单元顶点编号. 考虑下图中 L 形区域的一个简单剖分, iFEM 的网页说明链接如下:

<https://www.math.uci.edu/~chenlong/ifemdoc/mesh/meshbasicdoc.html>

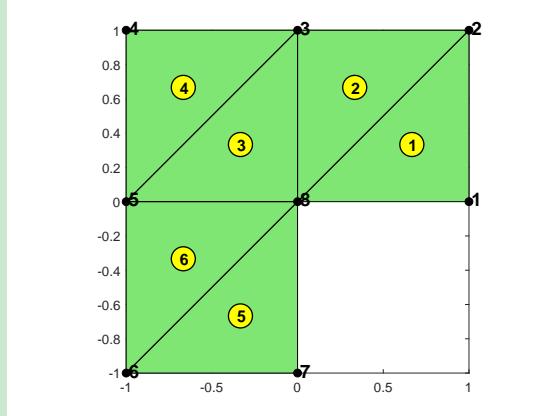


图 1. L 形区域的剖分

1. 矩阵 `node`: 节点坐标

编程中需要每个节点的坐标, 用 `node` 记录, 它是两列的矩阵, 第一列表示各节点的横坐标, 第二列表示各节点的纵坐标, 行的索引对应节点编号. 图中给出的顶点坐标信息如下

8x2 double		
	1	2
1	1	0
2	1	1
3	0	1
4	-1	1
5	-1	0
6	-1	-1
7	0	-1
8	0	0

这里左侧的序号对应节点的整体编号.

2. 矩阵 `elem`: 连通性

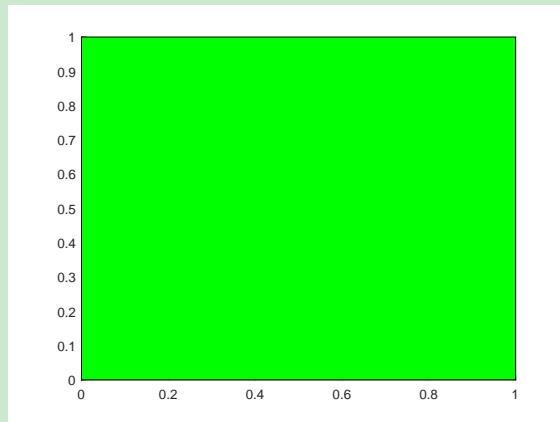
`elem` 给出每个三角形的顶点编号, 它给出的是单元的连通性信息, 每行对应一个单元.

6x3 double			
	1	2	3
1	1	2	8
2	3	8	2
3	8	3	5
4	4	5	3
5	7	8	6
6	5	6	8

图中第 i 列表示所有三角形的第 i 个点的编号, 其中 $i = 1, 2, 3$. 注意三角形顶点的顺序符合逆时针定向. `elem` 是有限元编程装配过程中 P1-元的局部整体对应.

补片函数 `patch`

MATLAB 中采用补片函数 `patch` 绘制多边形, 其内置的三角剖分画图函数 `trisurf` 也是如此. 以下考虑二维多角形剖分的图示, 命名为 `showmesh.m`. 一个简单的例子如下图



可如下编程

```

1 node = [0 0; 1 0; 1 1; 0 1];
2 elem = [1 2 3 4];
3 patch('Faces', elem, 'Vertices', node, 'FaceColor', 'g');

```

对多个相同类型的单元, `showmesh.m` 如下编写:

```

1 function showmesh(node, elem)
2 h = patch('Faces', elem, 'Vertices', node);
3 set(h, 'facecolor', [0.5 0.9 0.45], 'edgecolor', 'k');
4 axis equal; axis tight;

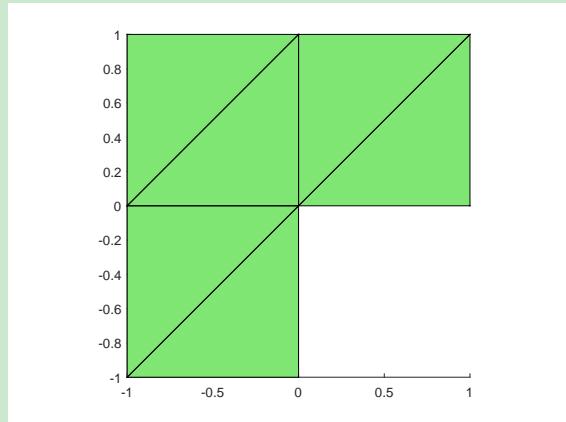
```

例 1.1 (三角剖分) 对前面的梯形区域, 如下调用 `showmesh` 函数

```

1 node = [1,0; 1,1; 0,1; -1,1; -1,0; -1,-1; 0,-1; 0,0];
2 elem = [1,2,8; 3,8,2; 8,3,5; 4,5,3; 7,8,6; 5,6,8];
3 showmesh(node, elem);

```

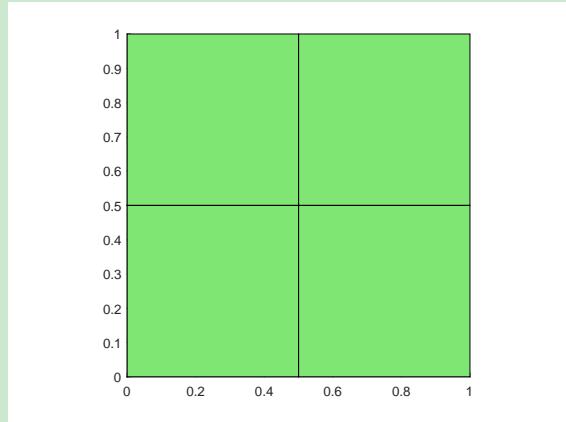


例 1.2 (四边形剖分) 对矩形区域的四边形剖分, 如下调用 showmesh 函数

```

1 [X,Y] = ndgrid(0:0.5:1,0:0.5:1);
2 node = [X(:), Y(:)];
3 elem = [1 2 5 4; 2 3 6 5; 4 5 8 7; 5 6 9 8];
4 showmesh(node,elem)

```



操作 cell 数组的 cellfun 函数

对含有不同多角形单元的区域, 因每个单元顶点数不同, elem 一般以 cell 数组存储. 为了使用 `patch` 画图 (避免循环语句), 需要将 elem 的每个 cell 用 `NaN` 填充成相同维数的向量, 该填充不会影响画图. 先介绍 MATLAB 中操作 cell 数组的函数 `cellfun.m`. 例如, 考虑下面的例子.

例 1.3 计算 cell 数组中元素的平均值和维数

```

1 C = {1:10, [2; 4; 6], []};
2 averages = cellfun(@mean, C)
3 [nrows, ncols] = cellfun(@size, C)
4
5 % 结果为 averages = 5.5000    4.0000      NaN
6 %      nrows = 1 3 0,      ncols = 10 1 0

```

`cellfun` 的直接输出规定为数值数组, 如果希望输出的是多种类型的元素, 那么需要指定 `UniformOutput` 为 `false`, 例如

例 1.4 对字符进行缩写

```

1 days = {'Monday', 'Tuesday', 'Wednesday', 'Thursday', 'Friday'};

```

```
2 abbrev = cellfun(@(x) x(1:3), days, 'UniformOutput', false)
```

这里的 UniformOutput 也可简写为 un, 当然 false 也可写为 0. 正因为此时输出类型可以任意, MATLAB 默认仍保存为 cell 类型. 上面的结果为

```
abbrev =
1×5 cell array
{'Mon'}    {'Tue'}    {'Wed'}    {'Thu'}    {'Fri'}
```

showmesh 函数的建立

现在考虑图 2 所示的剖分

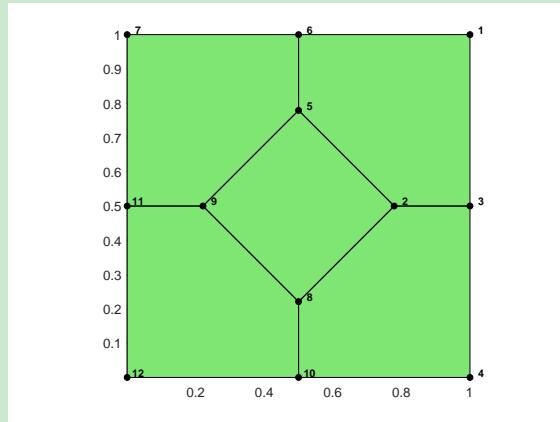


图 2. 多角形网格

相关的网格数据保存在 meshhex1.mat 中. 程序如下

```
1 load('meshhex1.mat'); % node, elem
2
3 max_n_vertices = max(cellfun(@length, elem));
4 % function to pad the vacancies (横向拼接)
5 padding_func = @(vertex_ind) [vertex_ind, ...
6     NaN(1,max_n_vertices-length(vertex_ind))];
7 tpad = cellfun(padding_func, elem, 'UniformOutput', false);
8 tpad = vertcat(tpad{:});
9 h = patch('Faces', tpad, 'Vertices', node);
10 set(h, 'facecolor',[0.5 0.9 0.45], 'edgecolor', 'k');
11 axis equal; axis tight;
```

最终给出的 showmesh 函数如下

CODE 1. showmesh.m (2D 网格画图)

```
1 function showmesh(node, elem)
2
3 dim = size(node, 2);
4
5 % ----- Triangulation -----
6 % 2D
7 if ~iscell(elem) && dim==2
8     h = patch('Faces', elem, 'Vertices', node);
9 end
10
```

```

11 % ----- Polygonal mesh -----
12 if iscell(elem)
13     if iscell(elem{1}), elem = vertcat(elem{:}); end
14     max_n_vertices = max(cellfun(@length, elem));
15     padding_func = @(vertex_ind) [vertex_ind, ...
16         NaN(1,max_n_vertices-length(vertex_ind))]; % function to pad the vacancies
17     tpad = cellfun(padding_func, elem, 'UniformOutput', false);
18     face = vertcat(tpad{:}); % polygon
19     h = patch('Faces', face, 'Vertices', node);
20 end
21
22 facecolor = [0.5 0.9 0.45];
23 set(h, 'facecolor', facecolor, 'edgecolor', 'k');
24 axis equal; axis tight;

```

showsolution 函数的建立

showsolution 函数绘制解的网格图, 程序如下

```

1 function showsolution(node, elem, u)
2
3 dim = size(node, 2);
4
5 % ----- Triangulation -----
6 data = [node, u];
7 if ~iscell(elem) && dim==2
8     patch('Faces', elem, ...
9         'Vertices', data, ...
10        'FaceColor', 'interp', ...
11        'CData', u / max(abs(u)) );
12 end
13
14 % ----- Polygonal mesh -----
15 if iscell(elem)
16     max_n_vertices = max(cellfun(@length, elem));
17     padding_func = @(vertex_ind) [vertex_ind, ...
18         NaN(1,max_n_vertices-length(vertex_ind))]; % function to pad the vacancies
19     tpad = cellfun(padding_func, elem, 'UniformOutput', false);
20     tpad = vertcat(tpad{:});
21     patch('Faces', tpad, ...
22         'Vertices', data, ...
23         'FaceColor', 'interp', ...
24         'CData', u / max(abs(u)) );
25 end
26 axis('square');
27 sh = 0;
28 xlim([min(node(:,1)) - sh, max(node(:,1)) + sh])
29 ylim([min(node(:,2)) - sh, max(node(:,2)) + sh])
30 zlim([min(u) - sh, max(u) + sh])
31 xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('u');
32
33 view(3); grid on; % view(150,30);

```

简单说明一下.

- `patch` 也可以画空间中的直面, 此时只要把 '`Vertices`' 处的数据换为三维的顶点坐标.

- 对解 u , 显然 $\text{data} = [\text{node}, u]$ 就是画图的三维点坐标.

- `patch` 后的

```
'FaceColor', 'interp', 'CData', u / max(abs(u))
```

是三维图形的颜色, 它根据 'CData' 数据进行插值获得 (不对颜色进行设置, 默认为黑色). 也可以改为二维的

```
set(h, 'facecolor', [0.5 0.9 0.45], 'edgecolor', 'k');
```

此时显示的只是一种颜色, 但一般希望解有颜色的变化.

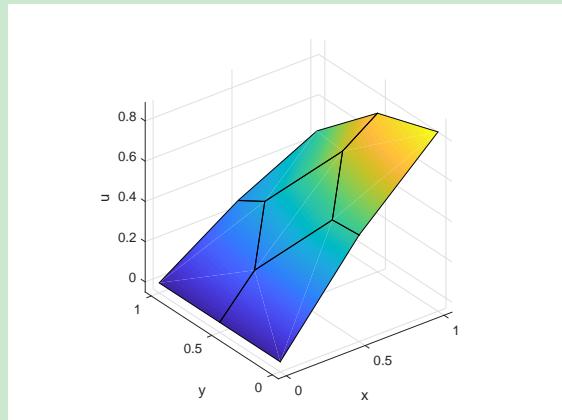
- 需要注意的是, 即便是三维数据, 若不加最后的

```
view(3); grid on; %view(150,30);
```

给出的也是二维图 (投影, 即二维剖分图).

例 1.5 如下画 $u(x, y) = \sin x \cos y$ 的图像

```
1 load('meshhex1.mat');
2 x = node(:,1); y = node(:,2); u = sin(x).*cos(y);
3 showsolution(node, elem, u);
```



1.2 网格的标记

节点标记

如下给出图 2 中的节点编号

```
1 load('meshhex1.mat');
2 showmesh(node, elem);
3 findnode(node);
```

函数文件如下

CODE 2. `findnode.m`

```
1 function findnode(node, range)
2 %Findnode highlights nodes in certain range.
3
4 hold on
5 dotColor = 'k.';
```

```

6 if nargin==1
7     range = (1:size(node,1))';
8 end
9 plot(node(range,1),node(range,2),dotColor, 'MarkerSize', 15);
10 shift = [0.015 0.015];
11 text(node(range,1)+shift(1),node(range,2)+shift(2),int2str(range), ...
12      'FontSize',8,'FontWeight','bold'); % show index number
13 hold off

```

当然也可简单改动以适用于三维情形.

单元标记

现在标记单元, 为此需给出单元重心, 从而标记序号. 重心使用 polycentroid.m 计算.

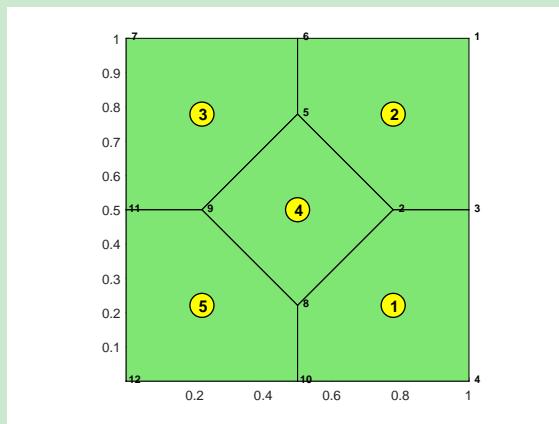


图 3. Polygonal mesh

主程序如下

```

1 load('meshhex1.mat');
2 showmesh(node,elem);
3 findnode(node);
4 findelem(node,elem);

```

标记单元的函数如下

CODE 3. findelem.m

```

1 function findelem(node,elem,varargin)
2
3 hold on
4
5 NT = size(elem,1);
6 if ~iscell(elem) % transform to cell
7     elem = mat2cell(elem,ones(NT,1),length(elem(1,:)));
8 end
9
10 range = 1:NT;
11 if nargin==3, range = unique(varargin{1}); end
12 range = range(:);
13
14 center = zeros(length(range),2);
15 s = 1;
16 for iel = range(:)' % only valid for row vector

```

```

17     index = elem{iel};
18     V = node(index, :);
19     center(s,:) = polycentroid(V);
20     s = s+1;
21 end
22 plot(center(:,1),center(:,2),'o','LineWidth',1,'MarkerEdgeColor','k',...
23       'MarkerFaceColor','y','MarkerSize',18);
24 text(center(:,1)-0.01,center(:,2),int2str(range),'FontSize',12,...
25       'FontWeight','bold','Color','k');
26
27 hold off
28
29 end

```

注 1.1 这里用圆圈标记单元, 对不同的剖分, 圆圈内的数字不一定在合适的位置, 需要手动调整偏移量. 为了方便, 可直接用红色数字标记单元序号.

edge 的生成

为了标记边, 先要生成边的数据结构 edge. iFEM 对应的介绍见如下网页

<https://www.math.uci.edu/~chenlong/ifemdoc/mesh/auxstructuredoc.html>

该网页给出了一些辅助网格数据结构 (三角剖分), 其中的 edge 记录每条边的顶点编号 (去除重复边). 以下设 NT 表示三角形单元的个数, NE 表示边的个数 (不重复), 并简单说明一下那里的思路.

- 只要给出每条边两端的节点编号. 内部边在 elem 中会出现两次, 边界边只会出现一次, 为此可用 2 标记内部边, 1 标记边界边.
- 内部边在 elem 中会出现两次, 但它们是同一条边. 为了给定一致的标记, 规定每条边起点编号小于终点编号, 即 $\text{edge}(k,1) < \text{edge}(k,2)$.
- 对三角剖分, 通常规定三角形的第 i 条边对应第 i 个顶点. 例如, 设第 1 个三角形顶点顺序为 [1,4,5], 那么边的顺序应是 4-5, 5-1, 1-4. 在 MATLAB 中, 有如下对应

所有单元的第 1 条边: `elem(:,[2,3]); % NT * 2`

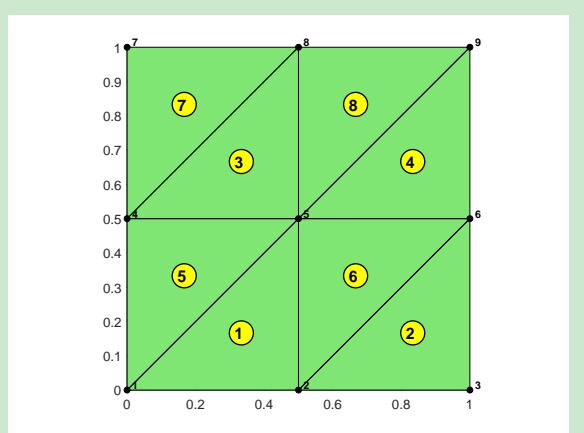
所有单元的第 2 条边: `elem(:,[3,1]); % NT * 2`

所有单元的第 3 条边: `elem(:,[1,2]); % NT * 2`

为了满足 $\text{edge}(k,1) < \text{edge}(k,2)$, 只需将每行的两个元素排序. 在 MATLAB 中用 `sort(A,2)` 实现. 把这些边逐行排在一起, 则所有的边 (包含重复) 为

```
1 totalEdge = sort([elem(:,[2,3]); elem(:,[3,1]); elem(:,[1,2])],2);
```

它是 $3NT * 2$ 的矩阵. totalEdge 见下面的右图.



	1	2
1	1	5
2	2	6
3	4	8
4	5	9
5	1	5
6	2	6
7	4	8
8	5	9
9	1	2
10	2	3
11	4	5
12	5	6
13	4	5
14	5	6
15	7	8
16	8	9
17	2	5
18	3	6
19	5	8
20	6	9
21	1	4
22	2	5
23	4	7
24	5	8

- 设 e_{ij} ($i < j$) 表示起点 i 终点 j 的边的重数, 对应的矩阵可用 `sparse` 函数如下生成

```
1 sparse(totalEdge(:,1),totalEdge(:,2),1)
```

注意, 在 MATLAB 中, `sparse` 有一个特殊的性质 (summation property), 即当某个位置指标出现两次, 则相应的值会相加.

- 显然, `sparse` 命令产生的矩阵, 第一行对应起点 1 的边的重数, 第二行对应起点 2 的边的重数, 等等. 希望按上述方式排列边: 先排所有起点为 1 的边, 再排所有起点为 2 的边, 等等. 由于 `find` 是按列找非零元素, 因此要把矩阵进行转置, 即

```
1 sparse(totalEdge(:,2),totalEdge(:,1),1)
```

这样, 第一列对应的是起点为 1 的边, 第二列对应的是起点为 2 的边.

- `edge` 如下给出

```
1 [i,j,s] = find(sparse(totalEdge(:,2),totalEdge(:,1),1));
2 edge = [j,i];
```

注意因为前面进行了转置, 所以 `edge = [j,i]`. 边界边为

```
1 bdEdge = edge(s==1,:);
```

- 也可直接去重复实现, 即

```
1 edge = unique(totalEdge,'rows');
```

上面的思想也可用于多角形剖分, 只不过因边数不同, 要逐个单元存储每条边. 图 3 中第 1 个单元的顶点顺序为 [8,10,4,3,2], 按顺序 8-10, 10-4, 4-3, 3-2, 2-8 给出单元的边的标记. 所有边的起点是 `elem` 中元素按列拉直给出的结果, 而终点是对 [10,4,3,2,8] 的拉直. 如下实现

```
1 % the starting points of edges
2 v0 = horzcat(elem{:})';
3 % the ending points of edges
4 shiftfun = @(verts) [verts(2:end),verts(1)];
5 T1 = cellfun(shiftfun, elem, 'UniformOutput', false);
6 v1 = horzcat(elem{:});
```

其他过程与三角剖分一致.

边的标记

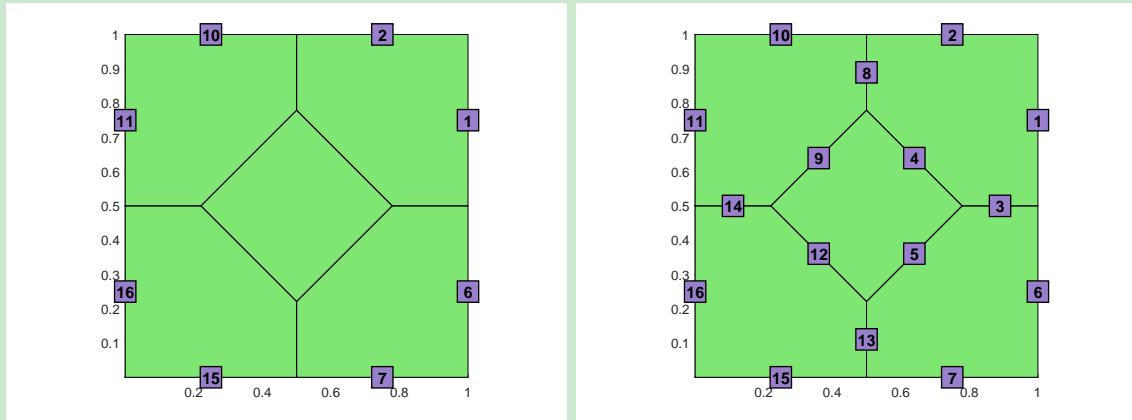
有了 edge, 边可用中点进行标记.

```
1 midEdge = (node(edge(range,1),:)+node(edge(range,2),:))/2;
2 plot(midEdge(:,1),midEdge(:,2),'s','LineWidth',1,'MarkerEdgeColor','k',...
3      'MarkerFaceColor',[0.6 0.5 0.8],'MarkerSize',20);
4 text(midEdge(:,1)-0.015,midEdge(:,2),int2str(range),...
5      'FontSize',12,'FontWeight','bold','Color','k');
```

上面的过程用函数 findedge.m 实现, 如

```
1 load('meshhex1.mat');
2 figure,
3 showmesh(node,elem);
4 bdInd = 1;
5 findedge(node,elem,bdInd);% only show boundary edges
6 figure,
7 showmesh(node,elem);
8 findedge(node,elem); % show all edges
```

注 1.2 为了统一虚拟元的编号规则, 三角形的第一条边就是第一个顶点连接的“右侧边”.



2 辅助数据结构与几何量

网格中有许多数据在计算中很有用, 例如边的标记、单元的直径、面积等. 本文参考 iFEM 给出一些辅助数据结构, 相关说明见如下网页

<https://www.math.uci.edu/~chenlong/ifemdoc/mesh/auxstructuredoc.html>

本节针对一般的多角形剖分给出需要的数据结构与几何量.

2.1 辅助数据结构

数据结构包括

表 1. 数据结构

node, elem	基本数据结构
elem2edge	边的自然序号 (单元存储)
edge	一维边的端点标记
bdEdge	边界边的端点标记
edge2elem	边的左右单元
neighbor	目标单元边的相邻单元
node2elem	顶点周围的单元

注 2.1 某些问题可能需要其他数据结构, 需要时再补充, 这里则不再说明.

elem2edge 的生成

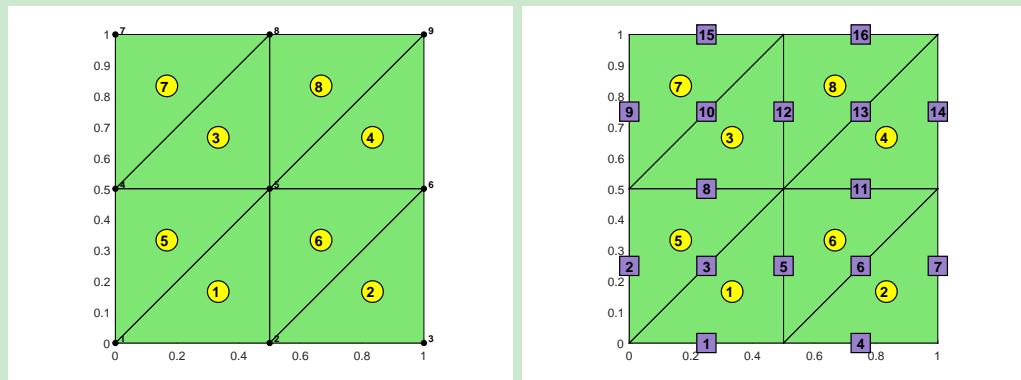


图 4. 三角剖分边的自然序号

用图 4 中给出的三角剖分说明一下 iFEM 中的思路 (有所改动).

- 根据前面的说明, 可给出含重复边的数组 totalEdge 见图 6(a).

1	2
2	6
3	8
4	9
5	5
6	6
7	8
8	9
9	2
10	3
11	5
12	6
13	5
14	6
15	7
16	8
17	2
18	6
19	8
20	9
21	4
22	5
23	7
24	8

1	2
2	4
3	5
4	3
5	2
6	6
7	3
8	4
9	4
10	4
11	5
12	5
13	6
14	5
15	6
16	8
17	5
18	8
19	5
20	9
21	4
22	5
23	7
24	8

1
9
21
1
10
17
2
18
11
12
13
23
3
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24

1
3
6
10
13
3
6
10
13
16
16
5
7
12
12
14
11
15
15
16
16
5
7
12
12
14
2
5
9
9
12

(a) totalEdge

(b) edge

(c) i1

(d) totalJ

图 5. elem2edge 的说明

- 下面使用 unique 函数去除重复.

- 在 MATLAB 中, `[C, iCA, iAC] = unique(A, 'rows')` 按矩阵的行进行比较得到不重复的 c.
- `iCA` 与 `C` 行数相同, 记录 `C` 在原矩阵 `A` 中的位置 (重复的按第一次出现记录, 但较早期版本可能按第二次记录).
- `iAC` 与 `A` 行数相同, 记录 `A` 在矩阵 `C` 中的位置.

- 去除重复的行, 即得边的数据结构 `edge` (重复边一致化才能使用)

```
[edge, i1, totalJ] = unique(totalEdge, 'rows');
```

- `edge` 是 $NE \times 2$ 的矩阵, 对应边的集合, 注意 `unique` 会按第一列从小到大给出边 (相应地第二列也进行了排序), 见图 6 (b).
- `i1` 是 $NE \times 1$ 的数组, 它记录 `edge` 中的每条边在原来的 `totalEdge` 的位置 (重复的按第一次出现记录). 比如, 上面的 1-5 边, 第一次出现的序号是 1, 则 `i1` 第一个元素就是 1.
- `totalJ` 记录的是 `totalEdge` 的每条边在 `edge` 中的自然序号 (即索引). 比如, 1-5 在 `edge` 中是第 3 个, 则 `totalEdge` 的所有 1-5 边的序号为 3.

显然有

```
edge = totalEdge(i1,:); totalEdge = edge(totalJ,:);
```

- 只要把 `totalJ` 恢复成三列即得所有三角形单元边的自然序号, 这是因为 `totalEdge` 排列的规则是: 前 NT 行对应所有单元的第 1 条边, 中间 NT 行对应第 2 条边, 最后 NT 行对应第 3 条边. 综上, 可如下获取 `elem2edge`.

```
1 % ----- elem2edge (triangulation) -----
2 [node, elem] = squaremesh([0 1 0 1], 0.5);
3 totalEdge = sort([elem(:,[2,3]); elem(:,[3,1]); elem(:,[1,2])], 2);
4 [edge, i1, totalJ] = unique(totalEdge, 'rows');
5 NT = size(elem, 1);
6 elem2edge = reshape(totalJ, NT, 3);
```

结果如下

	1	2	3
1	3	1	5
2	6	4	7
3	10	8	12
4	13	11	14
5	3	8	2
6	6	11	5
7	10	15	9
8	13	16	12

上面的思路适用于多角形剖分, 只不过此时因边数不同, 要用元胞数组存储.

- 设 elem 各单元顶点个数为分别为 N_1, \dots, N_t (t 为单元个数), 则向量 totalJ 的前 N_1 个元素为单元 1 的边序号, 接着的 N_2 个元素为单元 2 的边序号, 等等.
- 将 totalJ 变成 t 个元胞, 其中第 1 个元胞存储前 N_1 个元素, 第 2 个元胞存储接着的 N_2 个元素, 等等, 所得即为 elem2edge .
- 在 MATLAB 中可用 mat2cell 将一个矩阵变为元胞, 本质是对矩阵进行块的分割. 我们希望 elem2edge 的每个元胞是行向量, 为此在分割时, 先将 totalJ 变为行向量. 接着, 它将被分割为如下 t 个块:

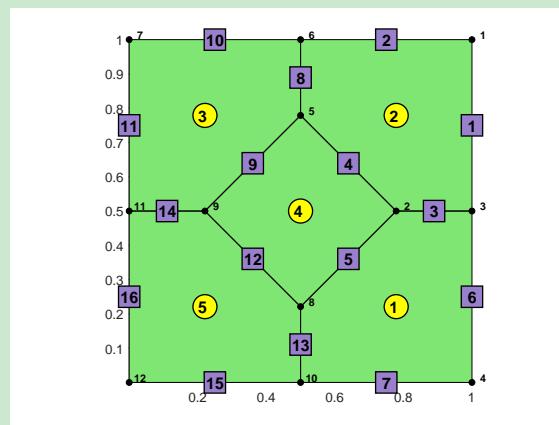
$$J_1, J_2, \dots, J_t, \quad J_i \in \mathbb{R}^{1 \times N_i}.$$

MATLAB 中如下实现

```

1 % ----- elem2edge: elementwise edges -----
2 [~, i1, totalJ] = unique(totalEdge, 'rows');
3 elemLen = cellfun('length', elem); % length of each elem
4 elem2edge = mat2cell(totalJ', 1, elemLen)';

```



对 meshex1.mat , 结果如下

5x1 cell		
	1	
1	[13,7,6,3,5]	
2	[3,1,2,8,4]	
3	[14,9,8,10,11]	
4	[12,5,4,9]	
5	[15,13,12,14,16]	

16x2 double		
	1	2
1	1	3
2	1	6
3	2	3
4	2	5
5	2	8
6	3	4
7	4	10
8	5	6
9	5	9
10	6	7
11	7	11
12	8	9
13	8	10
14	9	11
15	10	12
16	11	12

8x2 double		
	1	2
1	1	3
2	1	6
3	3	4
4	4	10
5	6	7
6	7	11
7	10	12
8	11	12

(a) elem2edge

(b) edge

(c) bdEdge

edge2elem 的生成

对给定的一条边 e , 有时候希望知道包含它的单元有哪些. 对内部边, 就是哪两个单元以 e 为公共边. 为此定义矩阵 `edge2elem`, 其维数为 $NE \times 2$, 而 NE 是一维边的个数. 它的第一列为左单元编号, 第二列为右单元编号. 注意, 对边界边规定两个编号一致.

	1	2
1	1	5
2	2	6
3	4	8
4	5	9
5	1	5
6	2	6
7	4	8
8	5	9
9	1	2
10	2	3
11	4	5
12	5	6
13	4	5
14	5	6
15	7	8
16	8	9
17	2	5
18	3	6
19	5	8
20	6	9
21	1	4
22	2	5
23	4	7
24	5	8

16x2 double		
	1	2
1	1	2
2	1	4
3	1	5
4	2	3
5	2	5
6	2	6
7	3	6
8	4	5
9	4	7
10	4	8
11	5	6
12	5	8
13	5	9
14	6	9
15	7	8
16	8	9

16x1 double	
	1
1	9
2	21
3	1
4	10
5	17
6	2
7	18
8	11
9	23
10	3
11	12
12	19
13	4
14	11
15	15
16	16
17	5
18	7
19	12
20	14
21	2
22	5
23	9
24	12

24x1 double	
	1
1	3
2	6
3	10
4	13
5	3
6	6
7	10
8	13
9	1
10	4
11	8
12	11
13	8
14	11
15	15
16	16
17	5
18	7
19	12
20	14
21	2
22	5
23	9
24	12

(d) totalEdge

(e) edge

(f) i1

(g) totalJ

图 6. elem2edge 图示

- `totalEdge` 按单元排列每条边, 内部边因在相邻两个单元均出现, 会重复一次. 称第一次出现的边位于左单元, 第二次出现的边位于右单元.
- 第一次出现的行号如下获得

```
[~, i1, totalJ] = unique(totalEdge, 'rows');
```

- 对 `totalEdge` 的逆序使用 `unique`:

```
[~, i2] = unique(totalEdge(end:-1:1,:), 'rows');
```

或

```
[~, i2] = unique(totalJ(end:-1:1), 'rows');
```

给出的 `i2` 对应右单元边, 但现在的序号与原先的有差别. 以图中的例子为例, 此时 1 相当于原来的 24, 2 相当于 23, 依此类推. 它们的和总是 25, 即 `length(totalEdge)+1` (三角形为 $3 \times NT + 1$). 这样, 还原后的为

```
i2 = length(totalEdge)+1-i2;
```

- 其实可以直接用 i_1 和 $totalJ$ 获得 i_2 .

```
i2(totalJ)= 1:length(totalJ); i2 = i2(:);
```

这是简单的覆盖技巧.

- 例如考察图 6 中 $totalJ$ 的第 1 行和第 5 行, 它们都对应 $edge$ 中的第 3 条边.

- 上面获得 $i_2(3)$ 的过程为

```
i2(3)= 1; i2(3)= 5;
```

- 即根据行索引与 3 的对应, 把第一次出现的索引 1 用第二次出现的索引 5 覆盖.

- 注意到 $totalEdge$ 的行可分为 t 个块, 这些块的序号就是边对应的单元号. 为此, 可生成一个向量 $totalJelem$, 它的前 N_1 个元素均为 1, 接下来的 N_2 个元素均为 1, 依此类推.

```
1 Num = num2cell((1:NT)');
2 Len = num2cell(cellLen);
3 totalJelem = cellfun(@(n1,n2) n1*ones(n2,1), Num, Len, 'UniformOutput', false);
4 totalJelem = vertcat(totalJelem{:});
```

- 这样, 设第一次出现的行号为 i_1 , $totalJelem(i_1)$ 给出的就是左单元编号.

综上, 如下实现 $edge2elem$

```
1 % ----- edge2elem -----
2 Num = num2cell((1:NT)'), Len = num2cell(elemLen);
3 totalJelem = cellfun(@(n1,n2) n1*ones(n2,1), Num, Len, 'UniformOutput', false);
4 totalJelem = vertcat(totalJelem{:});
5 [~, i2] = unique(totalJ(end:-1:1), 'rows');
6 i2 = length(totalEdge)+1-i2;
7 edge2elem = totalJelem([i1,i2]);
```

多角形剖分结果如下

16x2 double	
1	2
1	2
2	2
3	1
4	2
5	1
6	1
7	1
8	2
9	3
10	3
11	3
12	4
13	1
14	3
15	5
16	5

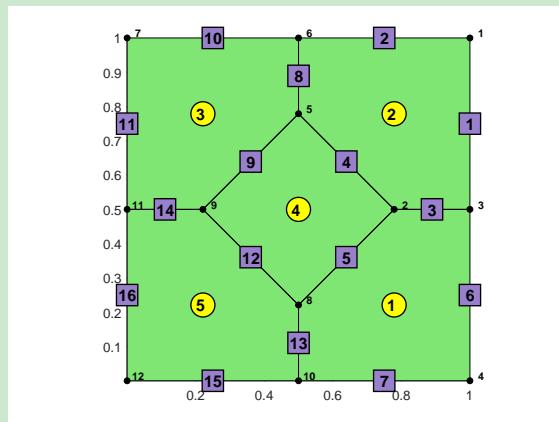


图 7. $edge2elem$

例如, 序号 12 的边连接的两个单元编号为 4 和 5.

注 2.2 $totalEdge$ 是按单元顺序排列的, i_1 对应 e 第一次出现的单元, i_2 对应第二次出现的单元, 自然 $edge2elem$ 的第一列单元序号小于或等于第二列单元序号.

neighbor 的生成

neighbor 与 elem2edge 类似, 只不过记录的是每个单元各条边连接的单元序号 (对边界单元, 规定其边界边连接的单元为自身).

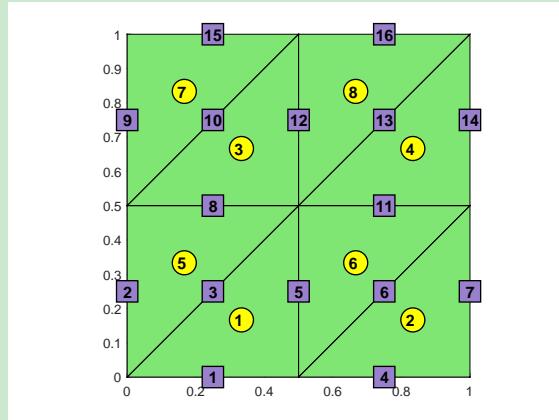


图 8. 三角剖分边的自然序号

- 以图 8 的单元 3 为例, 它的边的局部顺序为 10-8-12. 这些边对应的左右单元如下 (左右顺序其实无所谓, 但前面已经保证左侧序号小于右侧序号)

$$\begin{bmatrix} \text{左: } & 3 & 3 & 3 \\ \text{右: } & 7 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

- 将该矩阵按列拉直, 并去除当前单元的序号 3, 所得向量 $[7, 5, 8]$ 即为相邻单元的序号. 但对边界单元, 这种处理会丢失边界边. 例如, 单元 1 边的局部顺序为 3-1-5, 每条边对应的左右单元为

$$\begin{bmatrix} \text{左: } & 1 & 1 & 1 \\ \text{右: } & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

去除重复后为 $[5, 6]$, 边界边没有保留序号.

我们换一种处理方法, 先给出程序.

```

1 % ----- neighbor -----
2 neighbor = cell(NT,1);
3 for iel = 1:NT
4     index = elem2edge{iel};
5     ia = edge2elem(index,1); ib = edge2elem(index,2);
6     ia(ia==iel) = ib(ia==iel);
7     neighbor{iel} = ia;
8 end

```

- ia 和 ib 分别是左侧和右侧单元的序号.
- 左侧单元序号 ia 中有一部分是当前单元序号 iel, 它们应该替换成对应的右侧单元序号 ib(ia==iel).

- 上面的替换保留了矩阵

$$\begin{bmatrix} \text{左:} & 1 & 1 & 1 \\ \text{右:} & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

中第 2 列的左侧单元序号 1, 因而保留了边界边对应的单元.

node2elem 的生成

我们将给出一个稀疏矩阵 t_{2v} , 其尺寸为 $NT \times N$, 它的行对应单元, 列对应顶点. 对固定单元, t_{2v} 相应行的非零元素所在的列索引恰好为单元的顶点序号, 这样, 按列查找非零元素即可获得顶点周围的单元.

t_{2v} 元素的行索引在前面生成 $edge2elem$ 已经给出, 即 $totalJelem$, 它的前面若干个元素为 1, 长度为第 1 个单元的顶点数, 接着若干个元素为 2, 长度为第 2 个单元的顶点数, 依此类推.

```

1 % ----- node2elem -----
2 ii = totalJelem; jj = v0; ss = ones(length(ii),1);
3 t2v = sparse(ii,jj,ss,NT,N);
4 node2elem = cell(N,1);
5 for i = 1:N
6     node2elem{i} = find(t2v(:,i))';
7 end

```

上面的循环可用 $cellfun$ 函数实现.

```

1 node2elem = cellfun(@(x) find(x), num2cell(t2v,1) , 'UniformOutput', false);
2 node2elem = node2elem';

```

这里的 $num2cell(A, 1)$ 是将矩阵按列转化为元胞数组.

2.2 网格相关的几何量

几何量包括

表 2. 几何量

centroid	单元重心坐标
area	单元面积
diameter	单元直径

- 单元的重心如下计算

$$x_K = \frac{1}{6|K|} \sum_{i=0}^{N_v-1} (x_i + x_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i),$$

$$y_K = \frac{1}{6|K|} \sum_{i=0}^{N_v-1} (y_i + y_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i),$$

这里 N_v 是单元顶点个数.

- 单元面积

$$|K| = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=0}^{N_v-1} x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i \right|.$$

- 单元直径就是所有顶点之间最长的距离, MATLAB 提供了 `pdist` 函数, 它计算各对行向量的相互距离.

以上几何量可如下获得

```

1 % ----- centroid, area, diameter -----
2 centroid = zeros(NT,2); area = zeros(NT,1); diameter = zeros(NT,1);
3 s = 1;
4 for iel = 1:NT
5     if iscell(elem)
6         index = elem{iel};
7     else
8         index = elem(iel,:);
9     end
10    verts = node(index, :); verts1 = verts([2:end,1],:);
11    area_components = verts(:,1).*verts1(:,2)-verts1(:,1).*verts(:,2);
12    ar = 0.5*abs(sum(area_components));
13    area(iel) = ar;
14    centroid(s,:) = sum((verts+verts1).*repmat(area_components,1,2))/(6*ar);
15    diameter(s) = max(pdist(verts));
16    s = s+1;
17 end

```

注: MATLAB 自带函数 `polyarea` 用以计算多边形的面积.

2.3 auxstructure 与 auxgeometry 函数

为了输出方便, 我们把所有的数据结构或几何量保存在结构体 `aux` 中. 考虑到数据结构在编程中不一定使用 (处理网格时用), 我们把数据结构与几何量分别用函数生成, 命名为 `auxstructure.m` 和 `auxgeometry.m`. 为了方便使用, 程序中把三角剖分按单元存储的数据转化为元胞数组. `auxstructure.m` 函数如下

CODE 4. `auxstructure.m`

```

1 function aux = auxstructure(node,elem)
2 %auxstructure gets auxiliary mesh data structure
3
4 NT = size(elem,1); N = size(node,1);
5 if ~iscell(elem) % transform to cell
6     elem = mat2cell(elem,ones(NT,1),length(elem(1,:)));
7 end
8
9 % totalEdge
10 shiftfun = @(verts) [verts(2:end),verts(1)]; % or shiftfun = @(verts) ...
11             circshift(verts,-1);
12 T1 = cellfun(shiftfun, elem, 'UniformOutput', false);
13 v0 = horzcat(elem{:}); % the starting points of edges
14 v1 = horzcat(T1{:}); % the ending points of edges
15 totalEdge = sort([v0,v1],2);
16
17 % ----- elem2edge: elementwise edges -----
18 [~, i1, totalJ] = unique(totalEdge,'rows');
19 elemLen = cellfun('length',elem); % length of each elem
20 elem2edge = mat2cell(totalJ',1,elemLen)';
21 % ----- edge, bdEdge -----

```

```

22 [i,j,s] = find(sparse(totalEdge(:,2),totalEdge(:,1),1));
23 edge = [j,i];
24 bdEdge = edge(s==1,:);
25
26 % ----- edge2elem -----
27 Num = num2cell((1:NT)'); Len = num2cell(elemLen);
28 totalJelem = cellfun(@(n1,n2) n1*ones(n2,1), Num, Len, 'UniformOutput', false);
29 totalJelem = vertcat(totalJelem{:});
30 [~, i2] = unique(totalJ(end:-1:1), 'rows');
31 i2 = length(totalEdge)+1-i2;
32 edge2elem = totalJelem([i1,i2]);
33
34 % ----- neighbor -----
35 neighbor = cell(NT,1);
36 for iel = 1:NT
37     index = elem2edge{iel};
38     ia = edge2elem(index,1); ib = edge2elem(index,2);
39     ia(ia==iel) = ib(ia==iel);
40     neighbor{iel} = ia;
41 end
42
43 % ----- node2elem -----
44 ii = totalJelem; jj = v0; ss = ones(length(ii),1);
45 t2v = sparse(ii,jj,ss,NT,N);
46 node2elem = cellfun(@(x) find(x), num2cell(t2v,1), 'UniformOutput', false);
47 node2elem = node2elem';
48
49 aux.node = node; aux.elem = elem;
50 aux.elem2edge = elem2edge;
51 aux.edge = edge; aux.bdEdge = bdEdge;
52 aux.edge2elem = edge2elem;
53 aux.neighbor = neighbor; aux.node2elem = node2elem;

```

auxgeometry.m 函数如下

CODE 5. auxgeometry.m

```

1 function aux = auxgeometry(node,elem)
2
3 % ----- centroid, area, diameter -----
4 NT = size(elem,1);
5 centroid = zeros(NT,2); area = zeros(NT,1); diameter = zeros(NT,1);
6 s = 1;
7 for iel = 1:NT
8     if iscell(elem)
9         index = elem{iel};
10    else
11        index = elem(iel,:);
12    end
13    verts = node(index, :); verts1 = verts([2:end,1],:);
14    area_components = verts(:,1).*verts1(:,2)-verts1(:,1).*verts(:,2);
15    ar = 0.5*abs(sum(area_components));
16    area(iel) = ar;
17    centroid(s,:) = sum((verts+verts1).*repmat(area_components,1,2))/(6*ar);
18    diameter(s) = max(pdist(verts));
19    s = s+1;
20 end
21

```

```

22 if ~iscell(elem) % transform to cell
23     elem = mat2cell(elem,ones(NT,1),3);
24 end
25
26 aux.node = node; aux.elem = elem;
27 aux.centroid = centroid;
28 aux.area = area;
29 aux.diameter = diameter;

```

2.4 边界设置

假设网格的边界只有 Dirichlet 与 Neumann 两种类型, 前者用 `bdNodeIdx` 存储 Dirichlet 节点的编号, 后者用 `bdEdgeN` 存储 Neumann 边界的起点和终点编号 (即一维问题的连通性信息).

2.4.1 边界边的定向

辅助数据结构中曾给出了边界边 `bdEdge`, 但它的定向不再是逆时针, 因为我们规定 $\text{edge}(k, 1) < \text{edge}(k, 2)$. Neumann 边界条件中会遇到 $\partial_n u$, 这就需要我们恢复边界边的定向以确定外法向量 (边的旋转获得).

给定 `totalEdge`, 即所有单元的边 (含重复且无定向), 我们有两种方式获得边 (第一种可获得边界边, 第二种只获得所有边):

- 一是累计重复的次数 (1 是边界, 2 是内部)

```

1 [i,j,s] = find(sparse(totalEdge(:,2),totalEdge(:,1),1));
2 edge = [j,i];
3 bdEdge = edge(s==1,:);

```

- 二是直接去掉重复的边

```

1 [edge, i1, ~] = unique(totalEdge, 'rows');

```

这里, `i1` 记录的是 `edge` 在重复边 `totalEdge` 中的位置.

显然, `i1(s==1)` 给出的是边界边 `bdEdge` 在 `totalEdge` 中的位置. `totalEdge` 的原来定向是知道的, 由此就可确定边界边的定向, 程序如下

```

1 %% totalEdge
2 shiftfun = @(verts) [verts(2:end),verts(1)]; % or shiftfun = @(verts) ...
    circshift(verts,-1);
3 T1 = cellfun(shiftfun, elem, 'UniformOutput', false);
4 v0 = horzcat(elem{:}); % the starting points of edges
5 v1 = horzcat(T1{:}); % the ending points of edges
6 allEdge = [v0,v1];
7 totalEdge = sort(allEdge,2);
8
9 %% counterclockwise bdEdge
10 [~,~,s] = find(sparse(totalEdge(:,2),totalEdge(:,1),1));
11 [~, i1, ~] = unique(totalEdge, 'rows');
12 bdEdge = allEdge(i1(s==1),:);

```

2.4.2 边界的设置

下面说明如何实现 `bdNodeIdx` 和 `bdEdgeN`. 以下图为例

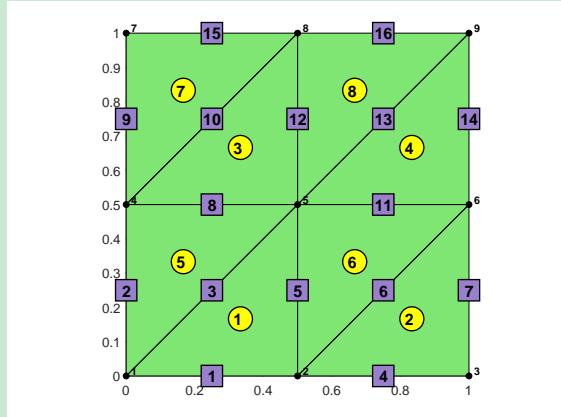


图 9. 边的自然序号

- 边界边的序号顺序为 1, 2, 4, 7, 9, 14, 15, 16. 定向的 `bdEdge` 给出的是这些边的起点与终点编号, 只要按索引对应即可.
- 边界我们用函数确定, 例如矩形 $[0,1]^2$ 的右边界为满足 $x = 1$ 的线段组成. 只需要判断 `bdEdge` 对应的边的中点在不在该线段上. 如下

```

1 bdFun = 'x==1';
2 midbdEdge = (node(bdEdge(:,1),:) + node(bdEdge(:,2),:))/2;
3 x = midbdEdge(:,1); y = midbdEdge(:,2);
4 id = eval(bdFun);

```

这里, `eval` 将字符串视为语句并运行. 现在给定了若干个 `x`, 执行 `eval(bdFun)` 就会判断哪些 `x` 满足条件, 返回的是逻辑数组 `id = [0 0 0 1 0 1 0 0]`, 即索引中的第 4,6 条边在右边界上.

- 这样, 我们就可抽取出需要的边 `bdEdge(id,:)`. 需要注意的是, `node` 在边界上不一定精确为 1, 通常将上面的 `bdFun` 修改为 `bdFun = 'abs(x-1)<1e-4'`.
- Neumann 边界通常比 Dirichlet 边界少, 为此在建函数的时候, 输入的字符串默认认为是 Neumann 边界的, 其他的都是 Dirichlet. 另外, 当没有边界字符串的时候, 规定所有边都是 Dirichlet 边.

根据上面的讨论, 可以给出函数 `setboundary.m`

CODE 6. `setboundary.m`

```

1 function bdStruct= setboundary(node,elem,varargin)
2 % varargin: string for Neumann boundary
3
4 NT = size(elem,1);
5 if ~iscell(elem) % transform to cell
6     elem = mat2cell(elem,ones(NT,1),length(elem(1,:)));
7 end
8

```

```

9 %% totalEdge
10 shiftfun = @(verts) [verts(2:end),verts(1)]; % or shiftfun = @(verts) ...
    circshift(verts,-1);
11 T1 = cellfun(shiftfun, elem, 'UniformOutput', false);
12 v0 = horzcat(elem{:}); % the starting points of edges
13 v1 = horzcat(T1{:}); % the ending points of edges
14 allEdge = [v0,v1];
15 totalEdge = sort(allEdge,2);
16
17 %% counterclockwise bdEdge
18 [~,~,s] = find(sparse(totalEdge(:,2),totalEdge(:,1),1));
19 [~, i1, ~] = unique(totalEdge,'rows');
20 bdEdge = allEdge(i1(s==1),:);
21
22 %% set up boundary
23 nE = size(bdEdge,1);
24 % initial as Dirichlet (true for Dirichlet, false for Neumann)
25 Idx = true(nE,1);
26 midbdEdge = (node(bdEdge(:,1),:) + node(bdEdge(:,2),:))/2;
27 x = midbdEdge(:,1); y = midbdEdge(:,2); %#ok<NASGU>
28 nvar = length(varargin); % 1 * size(varargin,2)
29 % note that length(varargin) = 1 for bdNeumann = [] or ''
30 if (nargin==2) || (~isempty(varargin{1}))
31     for i = 1:nvar
32         bdNeumann = varargin{i};
33         id = eval(bdNeumann);
34         Idx(id) = false;
35     end
36 end
37 bdStruct.bdEdge = bdEdge; % all boundary edges
38 bdStruct.bdEdgeD = bdEdge(Idx,:); % Dirichlet boundary edges
39 bdStruct.bdEdgeN = bdEdge(~Idx,:); % Neumann boundary edges
40 bdStruct.bdNodeIdx = unique(bdEdge(Idx,:)); % index of Dirichlet boundary nodes
41 bdEdgeIdx = find(s==1); % index of all boundary edges
42 bdStruct.bdEdgeIdx = bdEdgeIdx;
43 bdStruct.bdEdgeIdxD = bdEdgeIdx(Idx); % index of Dirichelt boundary edges
44 bdStruct.bdEdgeIdxN = bdEdgeIdx(~Idx); % index of Neumann boundary edges

```

这里我们还增加了 Dirichlet 边, 以方便后面使用. 相关信息保存在结构体 `bdStruct` 中. 例如,

- 以下命令给出的边界全是 Dirichlet 边界:

```

bdStruct = setboundary(node,elem);
bdStruct = setboundary(node,elem, []);
bdStruct = setboundary(node,elem, '');

```

- `bdStruct = setboundary(node,elem, 'x==1')` 将右边界设为 Neumann 边, 其他为 Dirichlet 边.
- `bdStruct = setboundary(node,elem, '(x==1)|(y==1)')` 将右边界与上边界设为 Neumann 边.

注 2.3 以下两种写法等价

```

bdStruct = setboundary(node,elem, '(x==1)|(y==1)');
bdStruct = setboundary(node,elem, 'x==1', 'y==1');

```

3 PolyMesher: 二维多角形剖分的生成

本章节介绍文 [2] 中的多角形剖分生成算法.

3.1 网格剖分的基本思想

3.1.1 Voronoi 图

Voronoi 图是一种空间分割算法, 它根据平面上给定的 n 个相异点将平面划分成 n 个区域, 且每个点位于一个区域. 这些点通常称为种子, 每个种子所在区域内的点到该种子的距离总是比到其他种子要近.

定义 3.1 设 $P = \{x_1, \dots, x_n\}$ 是 \mathbb{R}^2 或某个区域 Δ 内的 n 个相异点的集合, 对任意的 $y \in P$, 它的 Voronoi 单元定义为

$$V_y = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - y| < |x - z|, \quad \forall z \in P \setminus \{y\}\}.$$

区域 Δ 的 Voronoi 划分定义为

$$\mathcal{T}(P; \Delta) = \{V_y \cap \Delta : y \in P\}.$$

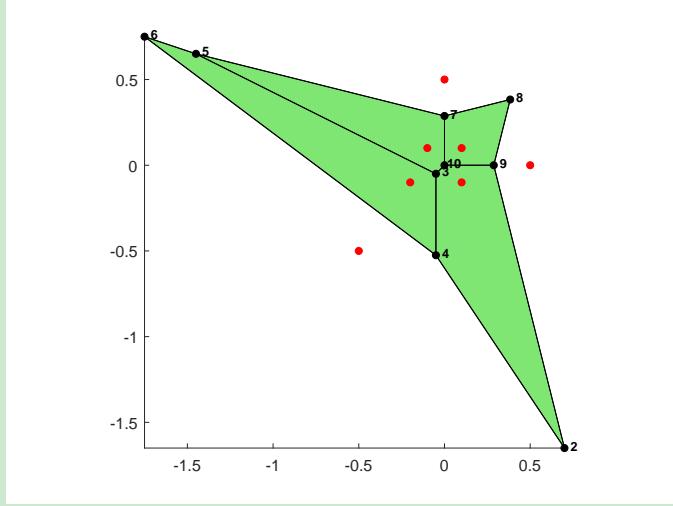
显然区域 Δ 的 Voronoi 划分就是将平面的 Voronoi 划分附加上边界 $\partial\Delta$ 所得.

- 对平面两点, 易知 Voronoi 划分由两点之间的垂直平分线确定.
- 对多个点的 Voronoi 图, 只需要画出相邻点的垂直平分线, 这些平分线交出的若干个多边形图形就是 Voronoi 划分.
- 易知 Voronoi 单元若有界则必是凸的, 正因为如此它在网格剖分中很有用.

MATLAB 中可用 voronoin.m 函数生成 Voronoi 图.

```
1 P = [0.5 0; 0 0.5; -0.5 -0.5; -0.2 -0.1; -0.1 0.1; 0.1 -0.1; 0.1 0.1];
2 [node, elem] = voronoin(P);
3 showmesh(node, elem); findnode(node); hold on
4 plot(P(:,1), P(:,2), 'r.', 'MarkerSize', 15)
```

图形如下



- node 的第一个点的坐标都是 ([Inf](#), [Inf](#))，即无穷远点，且统一用索引 1 标记.
- 图中白色区域的种子所在的区域实际上就是与无穷远点构成的“多边形”. 例如, 左下角的种子所在的多边形为 6-1-2-4, 这里 1 是无穷原点的编号; 右侧种子的多边形为 9-2-1-8, 要注意这里的 1 对应的无穷远点应是右侧的, 只不过用一个记号标记罢了.
- 这样, 平面恰好被分成了 7 部分, 每个部分对应一个种子. 可以看到, 多角形的边界是通过种子之间的垂直平分线确定的.

3.1.2 CVTs 与 Lloyd 迭代

Voronoi 图的质量与种子的分布有关. 为了获得更高质量的剖分, 常采用重心 Voronoi 划分 (the centroid Voronoi tessellations, CVTs). 给定密度函数 $\mu(x)$, Voronoi 单元的重心定义为

$$y_c = \frac{\int_{V_y \cap \Delta} x \mu(x) dx}{\int_{V_y \cap \Delta} \mu(x) dx}. \quad (3.1)$$

定义 3.2 $\mathcal{T}(P; \Delta)$ 称为一个 CVT, 如果对每个 $y \in P$, 都有

$$y = y_c = \frac{\int_{V_y \cap \Delta} x \mu(x) dx}{\int_{V_y \cap \Delta} \mu(x) dx}.$$

当 $\mu(x) \equiv 1$ 时, y_c 就是多角形单元 $V_y \cap \Delta$ 的形心.

定义能量泛函

$$\mathcal{E}(P; \Delta) = \sum_{y \in P} \int_{V_y(P) \cap \Delta} \mu(x) |x - y|^2 dx,$$

注意它依赖于 P 中的点 (通过 y 的出现) 以及 Voronoi 单元. 可以证明, $\mathcal{E}(P; \Delta)$ 的极值点就是生成 CVT 的种子集合. 这是因为对任意的 $y \in P$, 能量泛函关于 y 的梯度为

$$\nabla_y \mathcal{E} = 2m_y(y - y_c), \quad m_y = \int_{V_y \cap \Delta} \mu(x) dx.$$

下面给出计算 CVTs 的 Lloyd 算法.

定义 3.3 定义

$$L = (L_y)_{y \in P}^T : \mathbb{R}^{n \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times 2}, \quad P \mapsto L(P) = (L_y(P))_{y \in P}^T,$$

式中,

$$L_y(P) = \frac{\int_{V_y \cap \Delta} x \mu(x) dx}{\int_{V_y \cap \Delta} \mu(x) dx},$$

称其为 Lloyd 映射.

显然, 若 P 是 CVTs 对应的种子集合, 则有 $P = L(P)$. 一般地, 给定一个初始种子集合 P_0 , 考虑如下迭代

$$P_{k+1} = L(P_k),$$

则当 $k \rightarrow \infty$ 时, P_∞ 就是一个 CVT 的种子集合, 满足 $P_\infty = L(P_\infty)$. 这是一个不动点迭代, 称为 Lloyd 算法. 在迭代过程中, 能量泛函是下降的, 即

$$\mathcal{E}(P_{k+1}; \Delta) \leq \mathcal{E}(P_k; \Delta),$$

因而 Lloyd 算法可视为求能量泛函极值点的下降算法.

多角形或多面体网格剖分的过程可总结如下

Algorithm 1 多角形或多面体网格剖分

Step 1: 给定区域内的若干个种子, 生成对应的 Voronoi 图.

Step 2: 使用 Lloyd 迭代算法更新种子的位置.

Step 3: 回到 Step 1, 直到达到停止准则.

可以看到, 整个算法的核心是给定区域 Voronoi 图的生成. MATLAB 里用 voronoin.m 函数生成 Voronoi 图, 但它没有边界, 仅是空间的划分. 这样, 问题的难点转化为: 如何给无界的 Voronoi 图添加边界. PolyMesher 中采用的边界附近种子的反射方法.

3.2 有界 Voronoi 图的反射法构造

3.2.1 区域边界的近似

给定一个凸区域, 将每一个种子关于最近的边界做对称点, 称该点为反射点, 而所有反射点的集合记为 $R(P)$. 现在视 $\tilde{P} = P \cup R(P)$ 为新的种子, 考虑它们生成的 Voronoi 图.

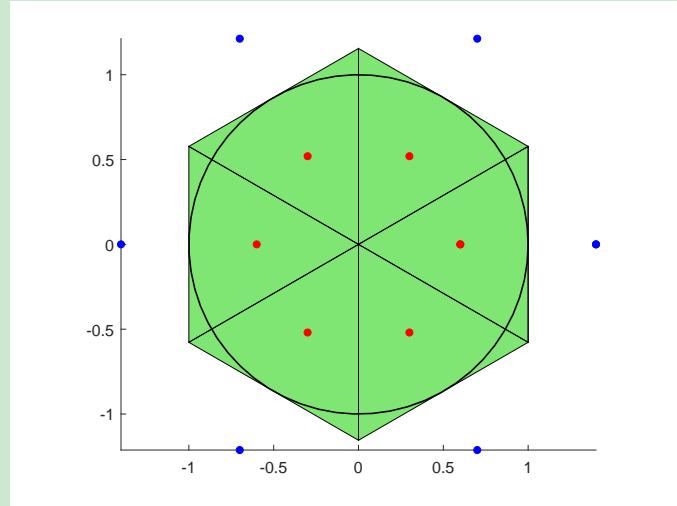
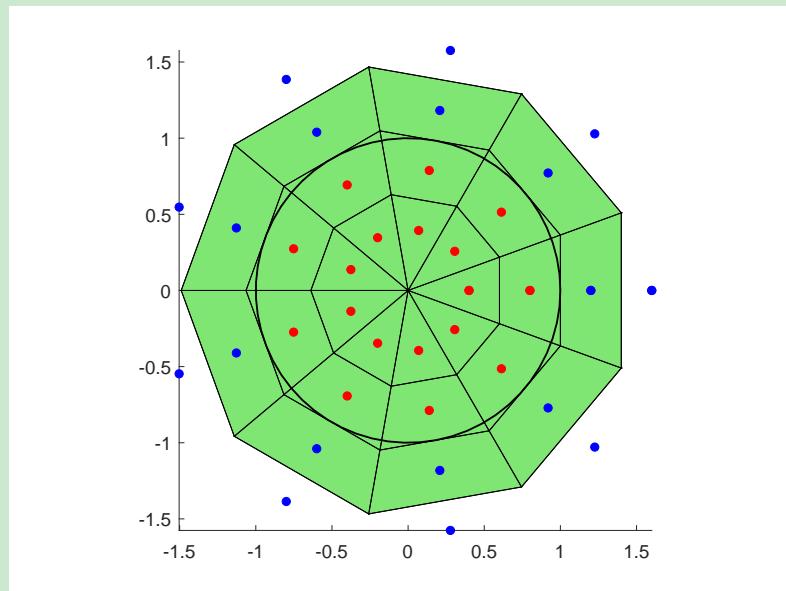


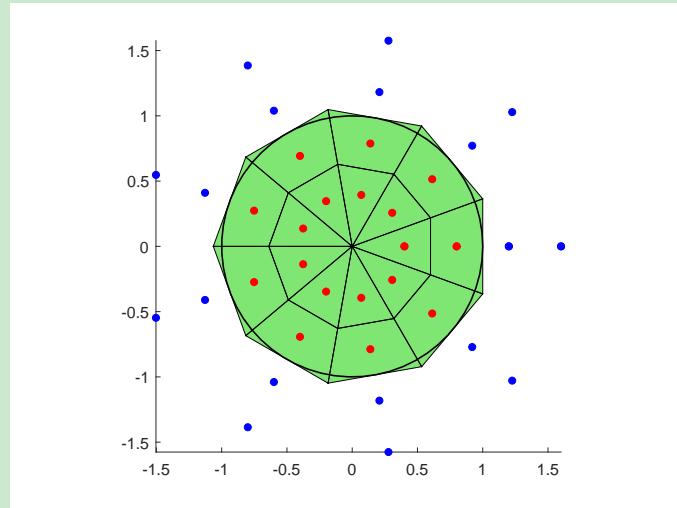
图 10. $\mathcal{T}(\tilde{P}; \Delta)$

如图 10 所示, 凸区域 Δ 为圆. 其内有 6 个种子, 标记为红色点, 相应的反射点为蓝色点. 注意该图给出的就是最终的剖分图. $\mathcal{T}(\tilde{P}; \Delta)$ 有如下特点:

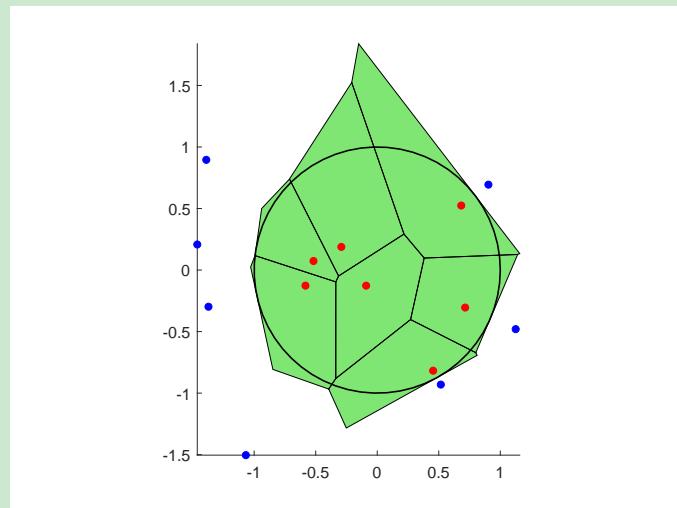
- 反射点 $R(y)$ 的 Voronoi 单元在区域外, 它与种子 y 的单元有公共边界, 且与凸区域的边界相切.
- $\mathcal{T}(\tilde{P}; \Delta)$ 有 $2 * NT$ 个单元, 前 NT 个对应区域内的种子, 因而是该区域的一个覆盖.
- 当凸区域内的点充分多且分布质量较高时, 这个覆盖就是一个较好的剖分图.
- 注意上面给出的图外部的单元恰好是空白的, 它们与无穷原点构成“多角形”. 但外部也可能存在可以直接观察到的剖分, 如下图



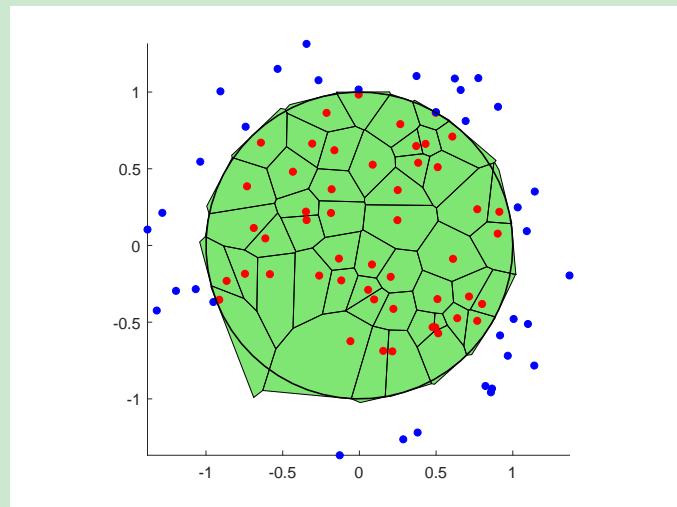
取前 NT 个单元的结果如下



Voronoi 图的质量与种子的分布有关. 对前面的圆形区域, 若随机生成较少的点作为种子, 则生成的剖分图可能比较糟糕, 如下图所示



增加种子数, 例如 50 个随机种子, 结果如下



此时边界部分仍然较差, 事实上对四五百个随机种子也经常出现这种情况. 但若用均匀分布的种子, 则质量会好很多, 这在前面已经看到. 为了获得更高质量的剖分, 可采用前面所述的 CVTs, 获取种

子的高质量分布.

3.2.2 边界反射集的计算

符号距离函数

定义 3.4 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, 定义 $d_\Omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$d_\Omega(x) = s_\Omega(x) \min_{y \in \partial\Omega} |x - y|,$$

式中,

$$s_\Omega(x) = \begin{cases} -1, & x \in \Omega, \\ +1, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

称 d_Ω 为符号距离函数, 获得最小值的边界点称为关于 x 的最近边界点.

显然有

$$\overline{\Omega} = \{x \in \mathbb{R}^2 : d_\Omega(x) \leq 0\}, \quad \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : d_\Omega(x) = 0\}.$$

对圆心在 x_0 , 半径为 r 的球, 易知

$$d_\Omega(x) = |x - x_0| - r.$$

当 Ω 光滑时, $\nabla d_\Omega(x)$ 是最近边界点处的单位法向量, 例如对圆, 有 $\nabla d_\Omega(x) = \text{sgn}(x - x_0)$. 一般地, 对几乎所有的 $x \in \mathbb{R}^2$, 有 $|\nabla d_\Omega(x)| = 1$.

通过图形观察可知, x 关于最近边界点的反射点为

$$R_\Omega(x) = x - 2d_\Omega(x)\nabla d_\Omega(x). \quad (3.2)$$

对复合区域, 通常有

$$d_{\Omega_1 \cup \Omega_2}(\mathbf{x}) = \min(d_{\Omega_1}(\mathbf{x}), d_{\Omega_2}(\mathbf{x})),$$

$$d_{\Omega_1 \cap \Omega_2}(\mathbf{x}) = \max(d_{\Omega_1}(\mathbf{x}), d_{\Omega_2}(\mathbf{x})),$$

$$d_{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_1}(\mathbf{x}) = -d_{\Omega_1}(\mathbf{x}).$$

考虑圆形区域, 其表示方法如下

```

1 function x = Circle_Domain(Demand,P)
2 BdBox = [-1 1 -1 1];
3 switch(Demand)
4     case('Dist'); x = DistFnc(P);
5     case('BdBox'); x = BdBox;
6 end
7 %----- the signed distance function -----
8 function Dist = DistFnc(P,BdBox)
9 Dist = dCircle(P,0,0,1);
10
11 function Dist = dCircle(P,xc,yc,r)
12 d = sqrt((P(:,1)-xc).^2+(P(:,2)-yc).^2)-r;
13 Dist = [d,d];

```

在该段代码中, `BdBox` 是区域的一个合适的矩形覆盖.

若某个区域的边界由 m 个部分组成, 第 i 个部分的符号距离函数为 d_i , 且整体符号距离函数为 d , 则计算中会如下存储

$$\text{Dist} = [d_1, \dots, d_m, d]. \quad (3.3)$$

对单个边界, $d_1 = d_m = d$, 因而 $\text{Dist} = [d, d]$, 这就是上面程序中 `[d, d]` 写法的原因.

初始种子的生成

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为有界区域, 且相应的符号距离函数为 $d_\Omega(x)$. 为了方便, 以下考虑单位圆. 可如下生成随机种子:

1. 给定种子个数, 即剖分单元数 `NT`. 用一个合适的矩形将区域覆盖, 对单位圆可用正方形 $[-1, 1]^2$ 覆盖.
2. 在矩形内逐一生成随机点, 并用符号距离函数判断是否在 Ω 内, 直至获得 `NT` 个种子为止.

随机种子如下生成

```

1 % ----- Generate random pointset -----
2 Domain = @Circle_Domain;
3 NT = 30;
4 % ----- Generate random pointset -----
5 P = zeros(NT,2); s = 0;
6 while s < NT
7     xy(:,1) = (BdBox(2)-BdBox(1))*rand(NT,1)+BdBox(1);
8     xy(:,2) = (BdBox(4)-BdBox(3))*rand(NT,1)+BdBox(3);
9     d = Domain('Dist',xy); d = d(:,end);
10    I = find(d<0);           % index of seeds inside the domain
11    NumAdded = min(NT-s,length(I)); % number of seeds that can be added
12    P(s+1:s+NumAdded,:) = xy(I(1:NumAdded),:);
13    s = s+NumAdded;
14 end

```

也可把矩形划分成 $N_x \times N_y$ 个小矩形, 然后在每个小矩形中选择满足条件的点. 为了方便, 取小矩形的中心, 对不满足要求的中心, 直接去掉. 称这种初始种子为均匀分布的, 如下获取

```

1 % ----- Generate uniform pointset -----
2 Nx = 5; Ny = 5;
3 x = linspace(BdBox(1),BdBox(2),Nx+1)';
4 y = linspace(BdBox(3),BdBox(4),Ny+1)';
5 xc = (x(1:end-1)+x(2:end))/2; yc = (y(1:end-1)+y(2:end))/2;
6 [X,Y] = ndgrid(xc,yc); P = [X(:),Y(:)];
7 d = Domain('Dist',P); P = P(d(:,end)<0,:,:);
8 NT = size(P,1);

```

以上过程编写成函数文件

```

1 function P = PolyMesher_init_Pointset(Domain,varargin)
2
3 BdBox = Domain('BdBox');
4 nvar = length(varargin);
5
6 % ----- Generate random pointset -----
7 if nvar==1
8     NT = varargin{1}; P = zeros(NT,2); s = 0;

```

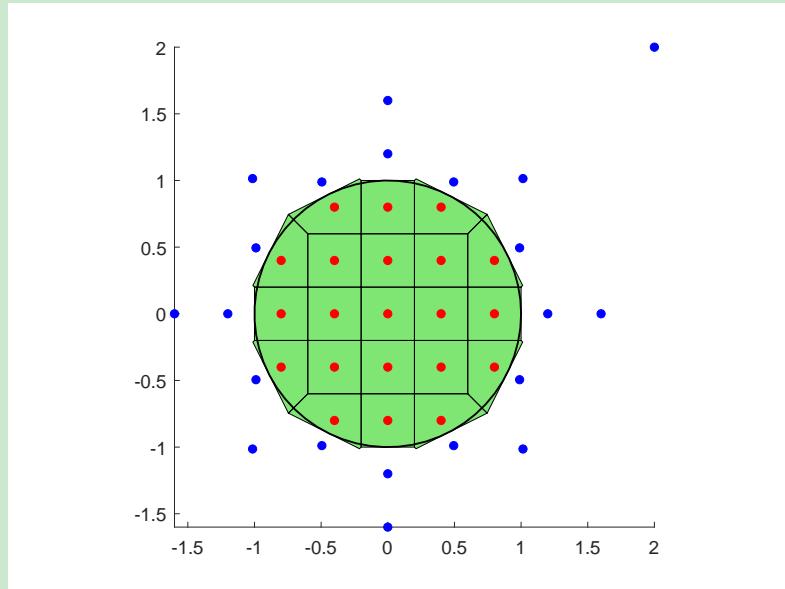
```

9     while s < NT
10        xy(:,1) = (BdBox(2)-BdBox(1))*rand(NT,1)+BdBox(1);
11        xy(:,2) = (BdBox(4)-BdBox(3))*rand(NT,1)+BdBox(3);
12        d = Domain('Dist',xy);
13        I = find(d(:,end)<0);           % index of seeds inside the domain
14        NumAdded = min(NT-s,length(I)); % number of seeds that can be added
15        P(s+1:s+NumAdded,:) = xy(I(1:NumAdded),:);
16        s = s+NumAdded;
17    end
18    return;
19 end
20
21 % ----- Generate uniform pointset -----
22 % if nvar==2
23 Nx = varargin{1}; Ny = varargin{2};
24 x = linspace(BdBox(1),BdBox(2),Nx+1)';
25 y = linspace(BdBox(3),BdBox(4),Ny+1)';
26 xc = (x(1:end-1)+x(2:end))/2; yc = (y(1:end-1)+y(2:end))/2;
27 [X,Y] = ndgrid(xc,yc); P = [X(:),Y(:)];
28 d = Domain('Dist',P); P = P(d(:,end)<0,:);
29 % end

```

光滑边界凸区域反射集的计算

光滑边界凸区域的典型代表是圆形区域, 它的符号距离函数容易获得. 反射点用公式 (3.2) 计算, 这里的梯度用导数的定义计算.



上图是直接对所有种子进行反射获得的剖分图, 该图正上方的两个反射点对应同一个边界切线, 其中一个可认为是无效反射. 注意, 考虑反射集的目的是给出区域边界的近似. 另外一种特殊的情况是, 某些种子的最近边界点不唯一, 例如圆心处的点. 考虑到内部大部分点的反射对边界剖分作用不大, 为此只对边界附近的点进行反射. 这种做法可避免以上情形的发生, 且大大减少计算量.

给定 n 个种子, 最终剖分的单元平均宽度可用为 $|\Omega|/n$ 度量. 引入参数

$$\alpha(n, \Omega) := c \left(\frac{|\Omega|}{n} \right)^{1/2}, \quad c > 1,$$

它是比平均宽度略大的数. 小于该数的点都可认为是边界附近的点, 即仅对满足

$$d_{\Omega}(y) < \alpha(n, \Omega) \quad (3.4)$$

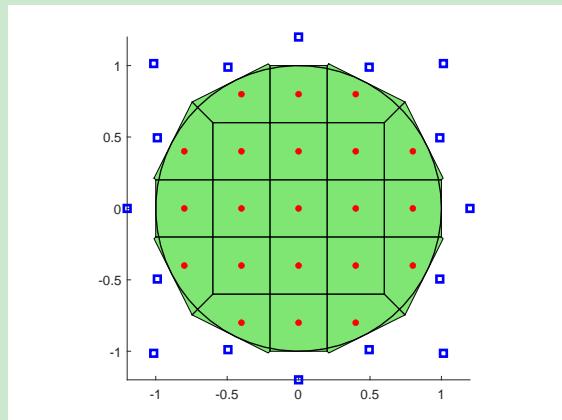
的种子进行反射. 程序如下

```

1 clc;clear;close all
2 % ----- Generate intial pointset -----
3 Domain = @Circle_Domain;
4 % NT = 50;
5 P = PolyMesher_init_Pointset(Domain,NT);
6 Nx = 5; Ny = 5;
7 P = PolyMesher_init_Pointset(Domain,Nx,Ny);
8 NT = size(P,1);
9
10 % ----- Compute the reflection pointset -----
11 eps = 1e-8; c = 1.1;
12 BdBox = Domain('BdBox');
13 Area = (BdBox(2)-BdBox(1))*(BdBox(4)-BdBox(3));
14 Alpha = c*sqrt(Area/NT);
15
16 d = Domain('Dist',P);
17 I = abs(d(:,1))<Alpha; % logical index of seeds near the bdry
18 n1 = (Domain('Dist',P+[eps,0])-d)/eps;
19 n2 = (Domain('Dist',P+[0,eps])-d)/eps;
20 R_P = P(I,:)-2*[n1(I),n2(I)].*repmat(d(I),1,2);
21
22 % ----- Voronoi -----
23 PP = [P; R_P];
24 [node,elem] = voronoin(PP);
25 elem = elem(1:NT);
26 showmesh(node,elem); %findnode(node);
27 hold on
28 plot(P(:,1),P(:,2),'r.','MarkerSize',15);
29 plot(R_P(:,1),R_P(:,2),'bs','linewidth',2)
30 t = linspace(0,2*pi,60)';
31 plot(cos(t),sin(t),'k-','linewidth',1)

```

取 $c = 1.1$, 结果如下



注意, Area 在 Lloyd 迭代过程中不断更新, 它会逐渐接近区域面积 $|\Omega|$.

分段光滑边界凸区域反射集的计算

边界分段光滑的凸区域的典型代表是矩形区域, 此时 `BdBox` 可选为该矩形区域. 设矩形为 $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, 对左侧直线, 它的右侧为内部, 符号距离函数为

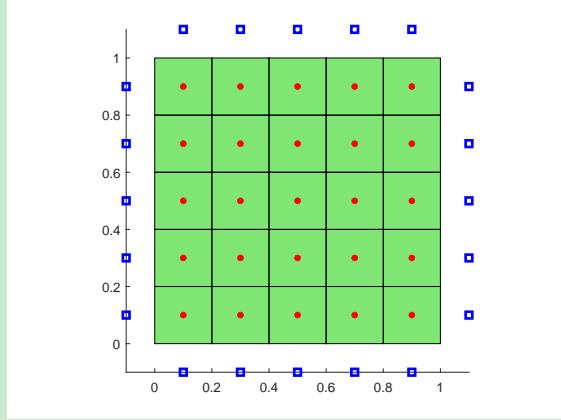
$$d_1(\mathbf{x}) = a_1 - \mathbf{x}(1),$$

类似下侧、右侧和上侧直线的符号距离函数分别为

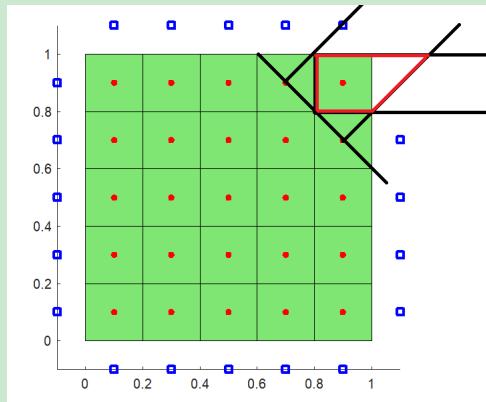
$$d_2(\mathbf{x}) = b_1 - \mathbf{x}(2), \quad d_3(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(1) - a_2, \quad d_4(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(2) - a_2.$$

整体区域是这些半平面的交, 从而

$$d(x) = \max \{d_1(x), d_2(x), d_3(x), d_4(x)\}.$$



- 对由分段光滑边界组成的区域, 边界附近的点可能要进行多次反射. 例如, 对上图中矩形右上角附近的种子, 若不进行右侧边界反射, 则它对应的 Voronoi 单元应为下图中红色边界的多角形.



在使用 Lloyd 迭代的过程中, 有时会观察到这种现象. 原因是角点附近的种子可能仅归结为一侧边界的附近点.

- 通过反射两个边界, 上图获得的是标准的四边形剖分. 由于要对多个边进行反射, 因此要保留每个边对应的符号距离函数. 这就是 (3.3) 这种存储方式的原因.

矩形区域如下定义

```
1 function x = Rectangle_Domain(Demand,P)
2   BdBox = [0 1 0 1];
3   switch(Demand)
4     case('Dist'); x = DistFnc(P,BdBox);
5     case('BdBox'); x = BdBox;
6   end
7 %----- the signed distance function -----
8 function Dist = DistFnc(P,BdBox)
9   Dist = dRectangle(P,BdBox(1),BdBox(2),BdBox(3),BdBox(4));
10
11 function d = dRectangle(P,x1,x2,y1,y2)
12   d = [x1-P(:,1), P(:,1)-x2, y1-P(:,2), P(:,2)-y2];
13   d = [d,max(d,[],2)];
```

这里, d 的前 4 列是分段边的符号距离函数, 而最后一个的整体符号距离函数, 用以判断点的内外.

反射集如下计算.

```
1 clc;clear;close all
2 % ----- Generate intial pointset -----
3 Domain = @Rectangle_Domain;
4 Nx = 5; Ny = 5;
5 P = PolyMesher_init_Pointset(Domain,Nx,Ny);
6 NT = size(P,1);
7
8 % ----- Compute the reflection pointset -----
9 eps = 1e-8; eta = 0.9; c = 1.5;
10 BdBox = Domain('BdBox');
11 Area = (BdBox(2)-BdBox(1))*(BdBox(4)-BdBox(3));
12 Alpha = c*sqrt(Area/NT);
13
14 d = Domain('Dist',P);
15 NBdrySegs = size(d,2)-1; %Number of constituent bdry segments
16 n1 = (Domain('Dist',P+[eps,0])-d)/eps;
17 n2 = (Domain('Dist',P+[0,eps])-d)/eps;
18 I = abs(d(:,1:NdrySegs))<Alpha; %Logical index of seeds near the bdry
19 P1 = repmat(P(:,1),1,NdrySegs); %[NT x NBdrySegs] extension of P(:,1)
20 P2 = repmat(P(:,2),1,NdrySegs); %[NT x NBdrySegs] extension of P(:,2)
21 R_P = [P1(I), P2(I)] - 2*[n1(I), n2(I)].*repmat(d(I),1,2);
22
23 % ----- Voronoi -----
24 PP = [P; R_P];
25 [node,elem] = voronoin(PP,['Qbb','Qz']);
26 elem = elem(1:NT);
27 showmesh(node,elem); %findnode(node);
28 hold on
29 plot(P(:,1),P(:,2),'r.','MarkerSize',15);
30 plot(R_P(:,1),R_P(:,2),'bs','LineWidth',2)
```

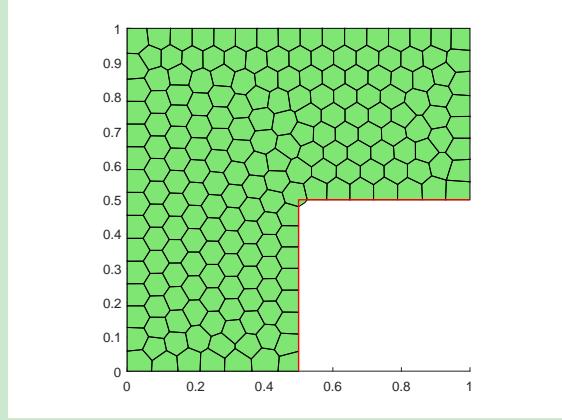
这里,

- d 的第 1 列是所有种子相应于第 1 条边的符号距离, 其他列类似. I 则是各条边对应的近边逻辑数组.
- $P1$ 是横坐标, 复制 4 列以应用逻辑数组取值. 注意逻辑数组取值会排成一列, 即 $P1(I)$ 是一个列向量.

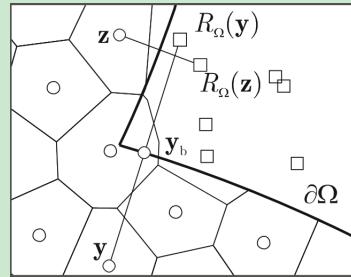
- $d(\mathbb{I})$ 是各条边对应的近边种子的符号距离.

非凸区域反射集的计算

对非凸区域, 考虑 L-型区域. 此时, 采用反射操作不能很好地捕捉 L-型区域的拐点.



- 对非凸区域, 若种子距离边界较远, 则反射点可能仍位于区域内或在其他种子的反射界面上. 为此需要判断符号距离函数的符号, 排除 $d_{\Omega_i}(\bar{y}) > 0$ 的反射点 $\bar{y} = R_{\Omega_i}(y)$.
- 有时候, 反射点可能比种子距离边界更近.



例如, 在该图中, 种子 y 与边界的距离要明显大于反射点 $R_{\Omega}(y)$ 与边界的距离. 此时, 这个反射点对边界近似没有贡献, 而且可能干扰其他种子的反射. 为此, 要求反射点 \bar{y} 满足

$$|d_{\Omega}(\bar{y})| > \eta |d_{\Omega_i}(y)|, \quad 0 < \eta < 1.$$

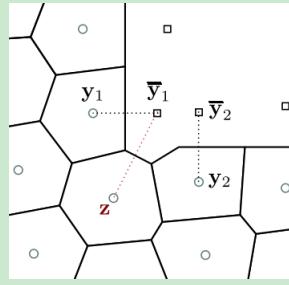
为此, 前面的反射集合后面只需要添加语句

```

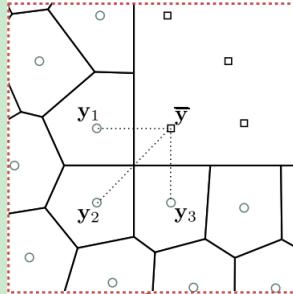
1 d_R_P = Domain('Dist',R_P);
2 J = d_R_P(:,end)>0 & abs(d_R_P(:,end))>=eta*abs(d(I));
3 R_P = R_P(J,:); R_P = unique(R_P,'rows');

```

对非凸区域的角度, 如 L-型区域的拐点, 前面的标准还不足以保证良好的逼近效果. 这是因为, 当种子位于对角线且在拐点附近时, 其反射可能会干扰其他点的反射, 如下图所示.



对垂直平分简单分析后可知,一个解决办法是固定拐点附近的种子,使得它们的反射点相同.



反射集计算程序

计算反射集合的程序如下

```

1 function RP = PolyMesher_Reflect(P,Domain,Area)
2
3 % ----- Compute the reflection pointset -----
4 eps = 1e-8; eta = 0.9; c = 1.5; NT = size(P,1);
5 Alpha = c*sqrt(Area/NT);
6
7 d = Domain('Dist',P);
8 NBdrySegs = size(d,2)-1; %Number of constituent bdry segments
9 n1 = (Domain('Dist',P+repmat([eps,0],NT,1))-d)/eps;
10 n2 = (Domain('Dist',P+repmat([0,eps],NT,1))-d)/eps;
11 I = abs(d(:,1:NBdrySegs))<Alpha; %Logical index of seeds near the bdry
12 P1 = repmat(P(:,1),1,NBdrySegs); %[NT x NBdrySegs] extension of P(:,1)
13 P2 = repmat(P(:,2),1,NBdrySegs); %[NT x NBdrySegs] extension of P(:,2)
14 RP = [P1(I), P2(I)] - 2*[n1(I), n2(I)].*repmat(d(I),1,2);
15 d_RP = Domain('Dist',RP);
16 J = (d_RP(:,end)>0) & (abs(d_RP(:,end))>=eta*abs(d(I)));
17 RP = RP(J,:);
18 RP = unique(RP,'rows');

```

3.3 二维多角形剖分的生成

3.3.1 Lloyd 迭代

有了反射集 $R(P)$ 后,如下获得 $P \cup R(P)$ 的单元划分

```

1 % Construct the Voronoi diagram
2 [node,elem] = voronoin([P;R_P],{'Qbb','Qz'});

```

根据前面的说明,在取 $\mu(x) = 1$ 时, Voronoi 迭代就是计算单元的重心,它的计算在辅助数据结构中已经说明.

```

1 function [Pc,Area,Err] = PolyMesher_VoroCentroid(P,node,elem)
2 % Compute the centroid of Voronoi cell
3 NT = size(P,1);
4 Pc = zeros(NT,2); A = zeros(NT,1);
5 for iel = 1:NT
6     vx = node(elem{iel},1); vy = node(elem{iel},2); nv = length(elem{iel});
7     vxS = vx([2:nv,1]); vyS = vy([2:nv,1]);
8     temp = vx.*vyS - vy.*vxS;
9     A(iel) = 0.5*sum(temp);
10    Pc(iel,:) = 1/(6*A(iel))*[sum((vx+vxS).*temp),sum((vy+vyS).*temp)];
11 end
12 Area = sum(abs(A));
13 Err = sqrt(sum((A.^2).*sum((Pc-P).^2,2)))*NT/Area^1.5;

```

3.3.2 获取网格剖分的基本数据集

`elem` 的前 `NT` 个对应内部种子, 它就是连通性信息. 但 `node` 还有额外的信息, 它包含反射集对应的多边形节点 (包含无穷原点), 为此必须删除这些节点, 并将节点重新编号.

- 从 `elem = elem(1:NT)` 中可获取网格节点编号

```
1 [id,~,totalid] = unique(horzcat(elem{:})');
```

这里,

- `id` 是网格剖分中原始节点的编号, 其行索引作为新的编号, 称为自然序号.
- `totalid` 按 `elem` 的拉直模式记录每个节点的自然序号.

- 显然新的 `node` 为

```
1 node = node(id,:);
```

把 `totalid` 恢复为 `elem` 的模式就获得新的 `elem`

```
1 elemLen = cellfun('length',elem);
2 elem = mat2cell(totalid', 1, elemLen');
```

- 要注意, `voronoin` 函数给出的单元节点顺序不一定是逆时针的 (是循环的), 可通过前三个顶点构成的三角形的有向面积进行判断.

```
1 for iel = 1:NT
2     index = elem{iel};
3     z1 = node(index(:,1),:);
4     z2 = node(index(:,2),:);
5     z3 = node(index(:,3),:);
6     e2 = z3-z1; e3 = z1-z2;
7     area = 0.5*(-e3(:,1).*e2(:,2)+e3(:,2).*e2(:,1));
8     if area<0, elem{iel} = index(end:-1:1); end
9 end
```

上面通过 `elem` 恢复自然序号的过程可总结为如下函数

```
1 function [node,elem] = PolyMesher_Reorder(NT,node,elem)
2 elem = elem(1:NT);
3 [id,~,totalid] = unique(horzcat(elem{:})');
```

```

4 node = node(id,:);
5 elemLen = cellfun('length',elem);
6 elem = mat2cell(totalid', 1, elemLen)';
7 for iel = 1:NT
8     index = elem{iel};
9     z1 = node(index(:,1),:);
10    z2 = node(index(:,2),:);
11    z3 = node(index(:,3),:);
12    e2 = z3-z1; e3 = z1-z2;
13    area = 0.5*(-e3(:,1).*e2(:,2)+e3(:,2).*e2(:,1));
14    if area<0, elem{iel} = index(end:-1:1); end
15 end

```

对随机初始种子, 若画出网格图并标上节点序号, 则会发现边界上的一些点出现多次编号, 这是由一些极短的边造成的. 现在去除短边.

- 根据辅助数据结构的讨论过程, 可获得所有的一维边集合 edge

```

1 T1 = cellfun(@(verts) [verts(2:end),verts(1)], elem, 'UniformOutput', false);
2 v0 = horzcat(elem{:})'; v1 = horzcat(T1{:})';
3 totalEdge = sort([v0,v1],2);
4 [i,j,s] = find(sparse(totalEdge(:,2),totalEdge(:,1),1));
5 edge = [j,i];

```

- 我们将删除如下的边 (PolyMesher 不是这样做的)

$$h_e \leq \eta h, \quad h = \max\{h_e\},$$

其中 η 是比例常数, 计算中取 $\eta = 0.1$, 即低于最大边长度 $1/10$ 的边视为很短的边.

```

1 z1 = node(edge(:,1),:); z2 = node(edge(:,2),:);
2 he = sqrt(sum((z1-z2).^2,2));
3 ir = find(he<=0.1*max(he));
4 nv1 = edge(ir,1); nv2 = edge(ir,2); % starting and ending numbers

```

这里 $nv1$, $nv2$ 是要删除的边的起点和终点编号.

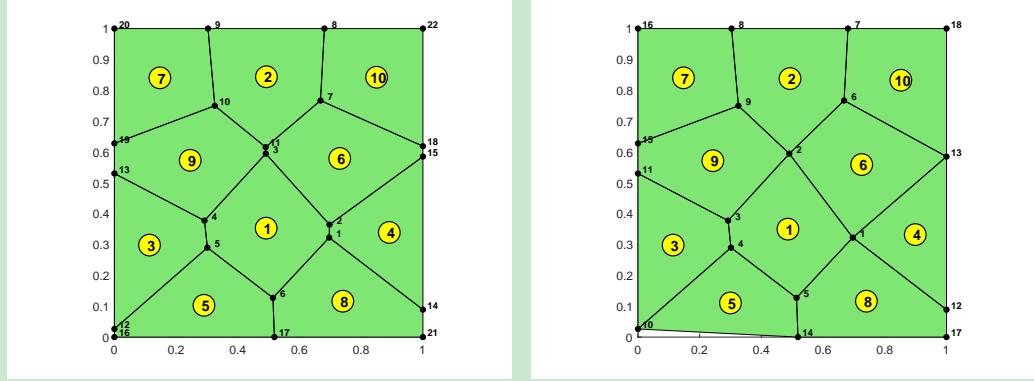
- 短边可如下删除, 即把要删除边的终点编号替换为起点编号 (即保留起点编号)

```

1 [id,~,totalid] = unique(horzcat(elem{:})');
2 totalid = id(totalid);
3 for i = 1:length(nv2)
4     v1 = nv1(i); v2 = nv2(i);
5     totalid(totalid==v2) = v1;
6     nv1(nv1==v2) = v1; nv2(nv2==v2) = v1;
7 end
8 elemLen = cellfun('length',elem);
9 elem = mat2cell(totalid', 1, elemLen)';

```

- 有些时候, 直接保留起点编号可能导致错误. 考察下图



短边 12-16 应保留终点 16, 否则出现右图中的白色空白. 但对反射法来说, 一般不必考虑该问题. 这是因为, 反射法出现的极短边一般位于区域边界外, 直接去除影响不大.

- 要注意此时的 elem 的一些单元含有重复节点编号, 可如下去除一个并保留原顺序 (显然不会改变原来的节点顺序)

```

1 for iel = 1:NT
2     index = elem{iel};
3     [~,i1] = unique(index);
4     elem{iel} = index(sort(i1));
5 end

```

再次使用 PolyMesher_Reorder.m 恢复顺序即可.

上面的说明总结为如下函数

```

1 function [node,elem] = PolyMesher_rm_smalledge(NT,node,elem)
2 [node,elem] = PolyMesher_Reorder(NT,node,elem);
3 T1 = cellfun(@(verts) [verts(2:end),verts(1)], elem, 'UniformOutput', false);
4 v0 = horzcat(elem{:})'; v1 = horzcat(T1{:})';
5 totalEdge = sort([v0,v1],2);
6 [i,j] = find(sparse(totalEdge(:,2),totalEdge(:,1),1));
7 edge = [j,i];
8 z1 = node(edge(:,1),:); z2 = node(edge(:,2),:);
9 he = sqrt(sum((z1-z2).^2,2));
10 ir = find(he < 0.1*max(he));
11 nv1 = edge(ir,1); nv2 = edge(ir,2); % starting and ending indices
12 [id,~,totalid] = unique(horzcat(elem{:})');
13 totalid = id(totalid);
14 for i = 1:length(nv2)
15     v1 = nv1(i); v2 = nv2(i);
16     totalid(totalid==v2) = v1;
17     nv1(nv1==v2) = v1; nv2(nv2==v2) = v1;
18 end
19 elemLen = cellfun('length',elem);
20 elem = mat2cell(totalid', 1, elemLen)';
21
22 for iel = 1:NT
23     index = elem{iel};
24     [~,i1] = unique(index);
25     elem{iel} = index(sort(i1));
26 end
27 [node,elem] = PolyMesher_Reorder(NT,node,elem);

```

4 多角形网格加密

4.1 加密规则

在对单元进行加密时,一个必要的规则是单元的边必须进行细分,从而对多角形网格,一个自然的加密方式是图 11 (a) 所示的四点划分. 这里, 目标单元通过连接重心和各边的中点划分为若干个四边形. 注意, 对有悬挂点 Q 的单元, 最好补充从重心到点 Q 的一个新边, 而不是对边 PQ 和 QR 进行二分, 否则可能出现退化三角形. 我们称这种处理为容许二分. 如图 11 (b) 所示, 三角形 $\Delta 123$ 由二分 PQ 和 QR 而产生, 新的三角形 $\Delta 567$ 由三角形 $\Delta 123$ 经类似方式获得. 根据三角形的性质, 重心 z_7 位于中线 e_{34} 上且满足 $|e_{47}| : |e_{73}| = 1 : 2$, 这意味着 $\angle 7 > \angle 3$. 这样, 如果继续“双边二分”, 那么退化三角形就会出现. 另一方面, 容许二分也导致更简单的多角形单元.

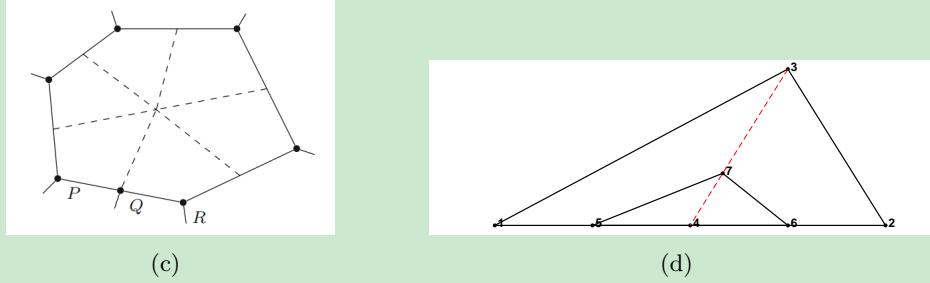


图 11. 边二分. (a) 容许二分: 添加从悬挂点到重心的新边; (b) 双边二分: 将悬挂点连接的两条边均进行二分

一个网格加密函数应具有如下形式

```
[node, elem] = PolyMeshRefine(node, elem, idElemMarked).
```

这里, `node` 和 `elem` 是基本数据结构, 存储网格的节点坐标和顶点连通性, 而数组 `idElemMarked` 给出标记单元的索引. 一般而言, 待加密单元要多于标记单元. 若不对单条边上的悬挂点个数做出限制, 则很可能违反无短边假设. 尽管这种要求对 VEMs 不是必要的, 但我们仍期望获得没有短边的高质量网格. 为此, 一些额外的单元需要加入到待加密单元集合中.

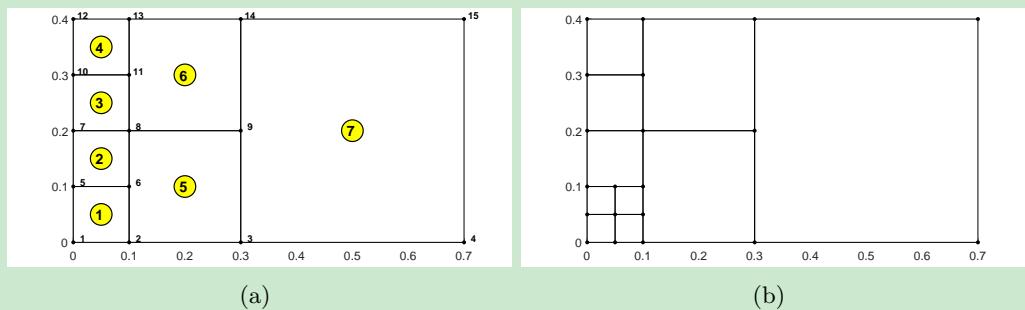


图 12. (a) Initial mesh; (b) Refinement of only the marked elements.

给定图 12 (a) 中的初始网格, 我们发现短边问题归结为两个相邻单元 ① 和 ⑤ 的加密这一典型情形.

- 假设 ① 是标记单元: `idElemMarked = 1`. 如果我们只按图 12 (b) 那样加密标记单元, 并且继续划分右下角的小单元, 那么单元 ⑤ 中就会出现短边(由于不断地添加悬挂点). 这种现象也出现在图 11 (b) 中的 two-edge bisection 中, 后者通过使用容许二分得以解决.

- 为了避免短边的出现, 我们进一步加密相邻单元 ⑤, 见图 13. 也就是说, 对以 e 为公共边的两个单元 K_1 和 K_2 , 若 K_1 在待加密集中且 e 的一个端点是 K_2 的悬挂点, 则同时加密 K_1 和 K_2 .

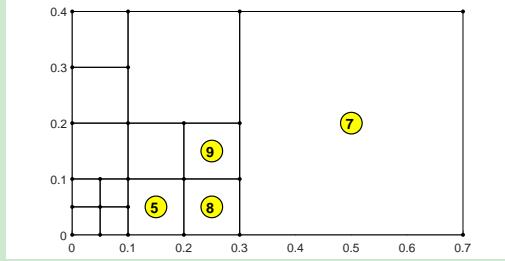


图 13. Refine both ① and ⑤

- 对图 12 (a) 中的单元, ⑤ 和 ⑦ 可分别视为 ① 和 ⑤, 基于同样的原因, 我们也需要划分单元 ⑦.
- 重复上面的过程, 我们就可以获得所有新的待加密单元.

注意, 标记单元本身可能出现上面指出的情况. 例如, 图 14 中红色的单元 9, 19 和 20 就是如此, 此时含悬挂点的单元 9 的地位和额外需要加密的单元的地位类似. 把这些地位等同的标记单元也加入额外单元中, 就可避免产生短边, 因为上面的处理确保每条边仅有一个悬挂点 (a midpoint of the collinear edge).

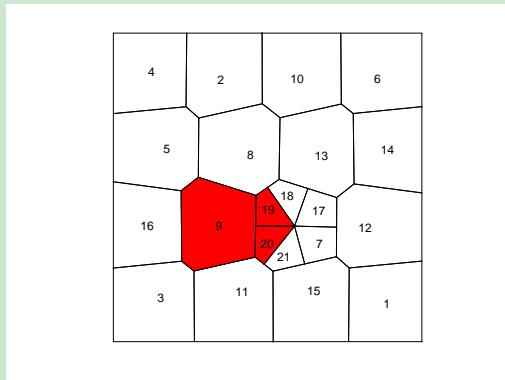


图 14. 悬挂点出现在标记单元加密后的子单元中

在下文中, 称一条边为非平凡的, 如果它的一个端点是某个单元的悬挂点; 称含悬挂点的单元为非平凡单元; 称新产生的待加密单元为额外待加密单元. 根据该规定, 待加密单元分为

$$\text{待加密单元} \left\{ \begin{array}{l} \text{平凡待加密单元 : 恰为平凡标记单元} \\ \text{非平凡待加密单元} \left\{ \begin{array}{l} \text{非平凡标记单元} \\ \text{额外待加密单元} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.5)$$

4.2 确定待加密单元

根据 (4.5) 的分类, 我们先确定标记单元中的平凡和非平凡单元. 根据 “单悬挂点规则”, 悬挂点一定是单元共线边的中点, 为此可通过计算如下误差找到悬挂点

$$\text{err}(i) = \left| z_i - \frac{1}{2}(z_{i-1} + z_{i+1}) \right|, \quad i = 1, \dots, N_v,$$

式中, z_i 是单元顶点, N_v 是顶点数. 非平凡标记单元按如下代码确定

```

1 ismElem = cell(NT,1); % store the elementwise mid-point locations
2 %% Determine the trivial and nontrivial marked elements
3 % nontrivial marked elements: marked elements with hanging nodes
4 nMarked = length(idElemMarked);
5 isT = false(nMarked,1);
6 for s = 1:nMarked
7     % current element
8     iel = idElemMarked(s);
9     % local logical index of elements with hanging nodes
10    p0 = node(elem{iel},:); p1 = circshift(p0,1,1); p2 = circshift(p0,-1,1);
11    err = vecnorm(p0-0.5*(p1+p2),2,2);
12    ism = (err<tol); ismElem{iel} = ism; % is midpoint
13    if sum(ism)<1, isT(s) = true; end % trivial
14 end
15 idElemMarkedT = idElemMarked(isT);
16 idElemMarkedNT = idElemMarked(~isT);

```

这里, idElemMarkedT 是平凡标记单元, idElemMarkedNT 是非平凡标记单元. 为了避免后面重复确定单元悬挂点, 用 ismElem 存储每个单元悬挂点的局部逻辑数组.

现在收集额外的待加密单元. 用 idElemMarked 记录标记单元, idElemNew 记录每一步新增加的单元. 向量 idElemMarkedNew 收集直到当前步的所有待加密单元 (包括给定的标记单元和所有的额外的待加密单元). 在循环找额外单元的过程中, idElemMarkedNew 的地位与初始标记单元的地位等同. 这是找额外单元的核心思想, 即把每一循环步归结到一开始的局面.

4.1 节的描述可总结为算法 2.

Algorithm 2 找到额外的待加密单元

- 初始化 idElemMarkedNew 和 idElemNew 为标记单元集合 idElemMarked .
- 找到 idElemNew 的相邻单元 (去除已找到的待加密单元), 编号存储为 idElemNewNeighbor , 并获得已找到的待加密单元集 idElemMarkedNew 中所有单元的边的序号.
- 对 idElemNewNeighbor 中单元循环, 并更新 idElemNew : 确定当前单元非平凡边的索引, 记为 idEdgeDg . 若 idEdgeDg 与 idElemMarkedNew 确定的边有交集 (实际上只要与新产生的单元 idElemNew 的边有交集即可), 则当前单元需要加密.
- 更新 idElemMarkedNew , 即添加 idElemNew 中单元.
- 若 idElemNew 是空集, 停止循环; 否则, 可视当前所有待加密单元 idElemMarkedNew 为初始的标记单元, 回到第一步.
- 所有额外待加密单元为

```
idElemRefineAddL = setdiff(idElemMarkedNew,idElemMarked);.
```

上面的算法对应的 MATLAB 代码如下.

```

1 %% Find the additional elements to be refined
2 % initialized as marked elements
3 idElemMarkedNew = idElemMarked; % marked and all new elements
4 idElemNew = idElemMarked; % new elements generated in current step
5 isEdgeMarked = false(NE,1);
6 while ~isempty(idElemNew)

```

```

7      % adjacent polygons of new elements
8      for iel = idElemNew(:)'
9          if ~isempty(neighbor{iel}); continue; end
10         index = elem2edge{iel};
11         ia = edge2elem(index,1); ib = edge2elem(index,2);
12         ia(ia==iel) = ib(ia==iel);
13         neighbor{iel} = ia';
14     end
15     idElemNewNeighbor = unique(horzcat(neighbor{idElemNew}));
16     idElemNewNeighbor = setdiff(idElemNewNeighbor,idElemMarkedNew); % delete the ...
17             ones in the new marked set
18     % edge set of new marked elements
19     isEdgeMarked(horzcat(elem2edge{idElemNew})) = true;
20     % find the adjacent elements to be refined
21     nElemNewAdj = length(idElemNewNeighbor);
22     isRefine = false(nElemNewAdj,1);
23     for s = 1:nElemNewAdj
24         % current element
25         iel = idElemNewNeighbor(s);
26         index = elem{iel}; indexEdge = elem2edge{iel}; Nv = length(index);
27         % local logical index of elements with hanging nodes
28         v1 = [Nv,1:Nv-1]; v0 = 1:Nv; % left,current
29         p0 = node(elem{iel},:); p1 = circshift(p0,1,1); p2 = circshift(p0,-1,1);
30         err = vecnorm(p0-0.5*(p1+p2),2,2);
31         ism = (err<tol); ismElem{iel} = ism; % is midpoint
32         if sum(ism)<1, continue; end % start the next loop if no hanging nodes exist
33         % index numbers of edges connecting hanging nodes in the adjacent elements ...
34             to be refined
35         idEdgeDg = indexEdge([v1(ism),v0(ism)]);
36         % whether or not the above edges are in the edge set of new marked elements
37         if sum(isEdgeMarked(idEdgeDg)), isRefine(s) = true; end
38     end
39     idElemNew = idElemNewNeighbor(isRefine);
40     idElemMarkedNew = unique([idElemMarkedNew(:); idElemNew(:)]);
41 end
42 idElemRefineAddL = setdiff(idElemMarkedNew,idElemMarked);

```

4.3 单元的加密与扩展

单元加密与扩展的预说明

先说明本文的单元扩展思路, 因为它影响单元的加密. 需要扩展的单元由三部分组成:

- 一是所有待加密单元的相邻单元;
- 二是额外待加密单元加密后的子单元;
- 三是某些标记单元加密后的子单元. 如图 (14) 所示, 单元 9, 19, 20 都是标记单元. 当单元 9 进行划分后, 因 19 和 20 要划分, 从而单元 9 的子单元会出现悬挂点.

简单分析一下扩展单元的特点.

1. 若某个单元需要扩展, 即该单元某条边需要二分, 则该条边必是某个待加密单元的平凡边.
2. 但要指出的是, 这种平凡边可能是另一个待加密单元的非平凡边, 如图 14 中单元 19 的左侧边是单元 9 的非平凡边.

3. 需要二分的边仍是原始剖分的边, 即悬挂点仅添加在原始剖分的边上.

为此, 我们先找到所有待加密单元中的平凡边集合, 记为 `idEdgeCut`. 注意, 这些平凡边只要是某个待加密单元的即可. 需扩展单元的特点是: 至少有一条边对应 `idEdgeCut` 中的索引.

本文的扩展方法是: 查看单元的边序号 `elem2edge`, 确定其中是否有位于 `idEdgeCut` 中的元素. 正因为如此, 非平凡待加密单元要先加密, 以获得子单元的数据结构 `elem2edge`.

由于标记单元中有一些单元不需要扩展 (它们直接加密), 但它们也有 `idEdgeCut` 中的边, 如单元 19 和 20 的左侧边. 为此, 单元加密时, 这部分单元要最后考虑.

非平凡待加密单元的加密

悬挂点可能出现在非平凡待加密单元加密后的子单元中, 且本文的单元扩展方法需要数据结构 `elem2edge`. 为此, 先对非平凡待加密单元进行加密.

某些边的中点和单元重心需要加入到节点矩阵 `node` 中. 我们将顶点、边和单元用单指标 $i = 1, 2, \dots, N + NE + NT$ 按如下顺序重新编号

$$z_1, \dots, z_N; e_1, \dots, e_{NE}; K_1, \dots, K_{NT},$$

称其为连接序号. 然而, 在大多数情形下, 使用 `edge` 的索引更加方便.

为了构造四点子单元, 首先考虑一个例子, 其顶点和边的连接序号为

$$z_1, e_1, z_2, e_2, z_3, e_3, z_4, e_4, z_5, e_5, \quad N_v = 5,$$

其中 z_2 和 z_5 是悬挂点, 下标表示局部索引. 接下来, 将非平凡边的连接序号用悬挂点序号如下代替

$$z_1, e_1, z_2, e_2, z_3, e_3, z_4, e_4, z_5, e_5$$

$$\hookrightarrow z_1, z_2, z_2, z_3, e_3, z_4, z_5, z_5, z_5, \quad N_v = 5.$$

这样可以用统一的方式构造数据结构 `elem`. 该方法也适用于标记单元, 无论它是否有悬挂点.

对数据结构 `elem2edge`, 子单元在内部的非平凡边仅用 0 进行标记, 而边界边用边的连接序号标记.

程序如下

```

1 %% Partition the nontrivial elements to be refined
2 % these elements are composed of:
3 % - nontrivial marked elements
4 % - additional elements to be refined
5 idElemRefineNT = [idElemMarkedNT; idElemRefineAddL];
6 nRefineNT = length(idElemRefineNT);
7 elemRefineNT = cell(nRefineNT,1);
8 elem2edgeRefineNT = cell(nRefineNT,1);
9 for s = 1:nRefineNT
10    % current element
11    iel = idElemRefineNT(s);
12    index = elem{iel}; indexEdge = elem2edge{iel}; Nv = length(index);
13    % find midpoint
14    v1 = [Nv,1:Nv-1]; v0 = 1:Nv;
15    ism = ismElem{iel};

```

```

16    % modify the edge number
17    ide = indexEdge+N; % the connection number
18    ide(v1(ism)) = index(ism); ide(ism) = index(ism);
19    % elem (with or without hanging nodes)
20    nsub = Nv-sum(ism);
21    z1 = ide(v1(~ism)); z0 = index(~ism);
22    z2 = ide(~ism); zc = iel*ones(nsub,1)+N+NE;
23    elemRefineNT{s} = [z1(:), z0(:), z2(:), zc(:)];
24    % elem2edge
25    ise = false(Nv,1); ise([v1(ism),v0(ism)]) = true;
26    idg = zeros(Nv,1); idg(ise) = indexEdge(ise);
27    e1 = idg(v1(~ism)); e0 = idg(~ism);
28    elem2edgeRefineNT{s} = [e1(:), e0(:), zeros(nsub,2)]; % e2 = ec = 0
29 end
30 addElemRefineNT = num2cell(vertcat(elemRefineNT{:}), 2);
31 addElemRefineNT2edge = num2cell(vertcat(elem2edgeRefineNT{:}), 2);

```

注意, num2cell.m 对空元胞也可操作. Line 23 的 1, 0, 2, c 标记分别对应当前顶点的上一个顶点、当前顶点、当前顶点的下一个顶点和重心.

单元扩展: 增加悬挂点

需要扩展的单元由两部分组成: 一些是待加密单元的相邻单元, 另一些是非平凡单元加密后的子单元.

```

1 %% Determine the elements to be expanded
2 % these elements are composed of
3 % - adjacent polygons of elements to be refined
4 % - subcells of nontrivial elements
5 % adjacent polygons of elements to be refined
6 idElemRefine = unique([idElemRefineAddL(:); idElemMarked(:)]); % ascending order ...
    for update
7 for iel = idElemRefine(:)'
8     if isempty(neighbo{iel}); continue; end
9     index = elem2edge{iel};
10    ia = edge2elem(index,1); ib = edge2elem(index,2);
11    ia(ia==iel) = ib(ia==iel);
12    neighbor{iel} = ia';
13 end
14 idElemRefineNeighbor = unique(horzcat(neighbor{idElemRefine}));
15 idElemRefineNeighbor = setdiff(idElemRefineNeighbor,idElemRefine);
16 % basic data structure of elements to be extended
17 elemExtend = [elem(idElemRefineNeighbor); addElemRefineNT];
18 elem2edgeExtend = [elem2edge(idElemRefineNeighbor); addElemRefineNT2edge];

```

注意, 悬挂点仅出现在原始剖分的边上, 且这些边是某个待加密单元的平凡边. 但要指出的是, 这种非平凡边可能是另一个待加密单元的非平凡边, 如图 14 中单元 19 的左侧边是单元 9 的非平凡边. 为此, 我们先找到所有待加密单元中的平凡边, 这些平凡边只要是某个待加密单元的即可. 为了方便, 我们用逻辑数组 isEdgeCut 对所有边的平凡和非平凡性质进行标记, true 的位置表示该条边要进行二分, 即为平凡边.

```

1 %% Extend elements by adding hanging nodes
2 % natural numbers of trivial edges w.r.t some element to be refined
3 isEdgeCut = false(NE,1);

```

```

4 for s = 1:length(idElemRefine)
5     iel = idElemRefine(s);
6     index = elem{iel}; indexEdge = elem2edge{iel}; Nv = length(index);
7     v1 = [Nv,1:Nv-1];
8     ism = ismElem{iel};
9     idx = true(Nv,1); idx(v1(ism)) = false; idx(ism) = false;
10    isEdgeCut(indexEdge(idx)) = true;
11 end

```

需扩展单元的特点是：至少有一条边对应 `isEdgeCut` 中逻辑真的索引。为了扩展单元，先初始化一个长度为 $2N_v$ 的零向量，在奇数位插入当前单元的顶点序号，但仅在偶数位插入 `isEdgeCut` 中逻辑真的边索引。这样，删除零元素后即得连通性向量。

```

1 % extend the elements
2 for s = 1:length(elemExtend)
3     index = elemExtend{s}; indexEdge = elem2edgeExtend{s};
4     id = find(indexEdge>0);
5     id = id(isEdgeCut(indexEdge(id)));
6     idvec = zeros(1,2*length(index));
7     idvec(1:2:end) = index; idvec(2:id) = indexEdge(id)+N;
8     elemExtend{s} = idvec(idvec>0);
9 end

```

划分平凡标记单元

剩下的未加密单元是平凡标记单元，它们类似之前的方法进行划分。

```

1 %% Partition the trivial marked elements
2 nMarkedT = length(idElemMarkedT);
3 addElemMarkedT = cell(nMarkedT,1);
4 for s = 1:nMarkedT
5     iel = idElemMarkedT(s);
6     index = elem{iel}; indexEdge = elem2edge{iel}; Nv = length(index);
7     ide = indexEdge+N; % connection number
8     z1 = ide([Nv,1:Nv-1]); z0 = index;
9     z2 = ide; zc = iel*ones(Nv,1)+N+NE;
10    addElemMarkedT{s} = [z1(:), z0(:), z2(:), zc(:)];
11 end
12 % addElem
13 addElemMarkedT = num2cell(vertcat(addElemMarkedT{:}), 2);
14 addElem = [elemExtend; addElemMarkedT];

```

更新基本数据结构

如下更新基本数据结构 `node` 和 `elem`:

```

1 %% Update node and elem
2 % node
3 nodeEdgeCut = (node(edge(isEdgeCut,1),:) + node(edge(isEdgeCut,2),:))/2;
4 nodeCenter = zeros(length(idElemRefine),2);
5 for s = 1:length(idElemRefine)
6     iel = idElemRefine(s); index = elem{iel};
7     verts = node(index(~ismElem{iel}),:); verts1 = verts([2:end,1],:);
8     area_components = verts(:,1).*verts1(:,2)-verts1(:,1).*verts(:,2);

```

```

9      ar = 0.5*abs(sum(area_components));
10     nodeCenter(s,:) = sum((verts+verts1).*repmat(area_components,1,2))/(6*ar);
11 end
12 node = [node; nodeEdgeCut; nodeCenter];
13 % elem
14 elem([idElemRefine(:); idElemRefineNeighbor(:)]) = []; % delete old
15 elem = [elem; addElem];
16
17 %% Reorder the vertices
18 [~,~,totalid] = unique(horzcat(elem{:})');
19 elemLen = cellfun('length',elem);
20 elem = mat2cell(totalid', 1, elemLen)';

```

4.4 程序整理

完整的加密程序总结如下.

CODE 7. PolyMeshRefine.m (多角形网格加密)

```

1 function [node,elem] = PolyMeshRefine(node,elem,elemMarked)
2 %PolyMeshRefine refines a 2-D polygonal mesh satisfying one-hanging node rule
3 %
4 % We divide elements by connecting the midpoint of each edge to its
5 % barycenter.
6 % We remove small edges by further partitioning some adjacent elements.
7 %
8 % Copyright (C) Terence Yu.
9
10 idElemMarked = unique(elemMarked(:)); % in ascending order
11 tol = 1e-10; % accuracy for finding midpoint
12
13 %% Get auxiliary data
14 NT = size(elem,1);
15 if ~iscell(elem), elem = num2cell(elem,2); end
16 % diameter
17 diameter = cellfun(@(index) max(pdist(node(index,:))), elem(idElemMarked));
18 if max(diameter)<tol
19     disp('The mesh is too dense'); return;
20 end
21 % totalEdge
22 shiftfun = @(verts) [verts(2:end),verts(1)];
23 T1 = cellfun(shiftfun, elem, 'UniformOutput', false);
24 v0 = horzcat(elem{:}'); v1 = horzcat(T1{:})';
25 totalEdge = sort([v0,v1],2);
26 % edge, elem2edge
27 [edge, i1, totalJ] = unique(totalEdge, 'rows');
28 elemLen = cellfun('length',elem);
29 elem2edge = mat2cell(totalJ',1,elemLen)';
30 % edge2elem
31 Num = num2cell((1:NT)'); Len = num2cell(elemLen);
32 totalJelem = cellfun(@(n1,n2) n1*ones(n2,1), Num, Len, 'UniformOutput', false);
33 totalJelem = vertcat(totalJelem{:});
34 i2(totalJ) = 1:length(totalJ); i2 = i2(:);
35 edge2elem = totalJelem([i1,i2]);
36 % neighbor
37 neighbor = cell(NT,1);
38 % number

```

```

39 N = size(node,1); NE = size(edge,1);
40
41 ismElem = cell(NT,1); % store the elementwise mid-point locations
42 %% Determine the trivial and nontrivial marked elements
43 % nontrivial marked elements: marked elements with hanging nodes
44 nMarked = length(idElemMarked);
45 isT = false(nMarked,1);
46 for s = 1:nMarked
47     % current element
48     iel = idElemMarked(s);
49     % local logical index of elements with hanging nodes
50     p0 = node(elem{iel},:); p1 = circshift(p0,1,1); p2 = circshift(p0,-1,1);
51     err = vecnorm(p0-0.5*(p1+p2),2,2);
52     ism = (err<tol); ismElem{iel} = ism; % is midpoint
53     if sum(ism)<1, isT(s) = true; end % trivial
54 end
55 idElemMarkedT = idElemMarked(isT);
56 idElemMarkedNT = idElemMarked(~isT);
57
58 %% Find the additional elements to be refined
59 % initialized as marked elements
60 idElemMarkedNew = idElemMarked; % marked and all new elements
61 idElemNew = idElemMarked; % new elements generated in current step
62 isEdgeMarked = false(NE,1);
63 while ~isempty(idElemNew)
64     % adjacent polygons of new elements
65     for iel = idElemNew(:)'
66         if ~isempty(neighbor{iel}); continue; end
67         index = elem2edge{iel};
68         ia = edge2elem(index,1); ib = edge2elem(index,2);
69         ia(ia==iel) = ib(ib==iel);
70         neighbor{iel} = ia';
71     end
72     idElemNewNeighbor = unique(horzcat(neighbor{idElemNew}));
73     idElemNewNeighbor = setdiff(idElemNewNeighbor,idElemMarkedNew); % delete the ...
74     % ones in the new marked set
75     % edge set of new marked elements
76     isEdgeMarked(horzcat(elem2edge{idElemNew})) = true;
77     % find the adjacent elements to be refined
78     nElemNewAdj = length(idElemNewNeighbor);
79     isRefine = false(nElemNewAdj,1);
80     for s = 1:nElemNewAdj
81         % current element
82         iel = idElemNewNeighbor(s);
83         index = elem{iel}; indexEdge = elem2edge{iel}; Nv = length(index);
84         % local logical index of elements with hanging nodes
85         v1 = [Nv,1:Nv-1]; v0 = 1:Nv; % left,current
86         p0 = node(elem{iel},:); p1 = circshift(p0,1,1); p2 = circshift(p0,-1,1);
87         err = vecnorm(p0-0.5*(p1+p2),2,2);
88         ism = (err<tol); ismElem{iel} = ism; % is midpoint
89         if sum(ism)<1, continue; end % start the next loop if no hanging nodes exist
90         % index numbers of edges connecting hanging nodes in the adjacent elements ...
91         % to be refined
92         idEdgeDg = indexEdge([v1(ism),v0(ism)]);
93         % whether or not the above edges are in the edge set of new marked elements
94         if sum(isEdgeMarked(idEdgeDg)), isRefine(s) = true; end
95     end
96     idElemNew = idElemNewNeighbor(isRefine);

```

```

95     idElemMarkedNew = unique([idElemMarkedNew(:); idElemNew(:)]);
96 end
97 idElemRefineAddL = setdiff(idElemMarkedNew,idElemMarked);
98
99 %% Partition the nontrivial elements to be refined
100 % these elements are composed of:
101 % - nontrivial marked elements
102 % - additional elements to be refined
103 idElemRefineNT = [idElemMarkedNT; idElemRefineAddL];
104 nRefineNT = length(idElemRefineNT);
105 elemRefineNT = cell(nRefineNT,1);
106 elem2edgeRefineNT = cell(nRefineNT,1);
107 for s = 1:nRefineNT
108     % current element
109     iel = idElemRefineNT(s);
110     index = elem{iel}; indexEdge = elem2edge{iel}; Nv = length(index);
111     % find midpoint
112     v1 = [Nv,1:Nv-1]; v0 = 1:Nv;
113     ism = ismElem{iel};
114     % modify the edge number
115     ide = indexEdge+N; % the connection number
116     ide(v1(ism)) = index(ism); ide(ism) = index(ism);
117     % elem (with or without hanging nodes)
118     nsub = Nv-sum(ism);
119     z1 = ide(v1(~ism)); z0 = index(~ism);
120     z2 = ide(~ism); zc = iel*ones(nsub,1)+N+NE;
121     elemRefineNT{s} = [z1(:,1), z0(:,1), z2(:,1), zc(:,1)];
122     % elem2edge
123     ise = false(Nv,1); ise([v1(ism),v0(ism)]) = true;
124     idg = zeros(Nv,1); idg(ise) = indexEdge(ise);
125     e1 = idg(v1(~ism)); e0 = idg(~ism);
126     elem2edgeRefineNT{s} = [e1(:,1), e0(:,1), zeros(nsub,2)]; % e2 = ec = 0
127 end
128 addElemRefineNT = num2cell(vertcat(elemRefineNT{:}), 2);
129 addElemRefineNT2edge = num2cell(vertcat(elem2edgeRefineNT{:}), 2);
130
131 %% Determine the elements to be expanded
132 % these elements are composed of
133 % - adjacent polygons of elements to be refined
134 % - subcells of nontrivial elements
135 % adjacent polygons of elements to be refined
136 idElemRefine = unique([idElemRefineAddL(:); idElemMarked(:)]); % ascending order ...
    for update
137 for iel = idElemRefine(:)'
138     if ~isempty(neighor{iel}); continue; end
139     index = elem2edge{iel};
140     ia = edge2elem(index,1); ib = edge2elem(index,2);
141     ia(ia==iel) = ib(ib==iel);
142     neighbor{iel} = ia';
143 end
144 idElemRefineNeighbor = unique(horzcat(neighor{idElemRefine}));
145 idElemRefineNeighbor = setdiff(idElemRefineNeighbor,idElemRefine);
146 % basic data structure of elements to be extended
147 elemExtend = [elem(idElemRefineNeighbor); addElemRefineNT];
148 elem2edgeExtend = [elem2edge(idElemRefineNeighbor); addElemRefineNT2edge];
149
150 %% Extend elements by adding hanging nodes
151 % natural numbers of trivial edges w.r.t some element to be refined

```

```

152 isEdgeCut = false(NE,1);
153 for s = 1:length(idElemRefine)
154     iel = idElemRefine(s);
155     index = elem{iel}; indexEdge = elem2edge{iel}; Nv = length(index);
156     v1 = [Nv,1:Nv-1];
157     ism = ismElem{iel};
158     idx = true(Nv,1); idx(v1(ism)) = false; idx(ism) = false;
159     isEdgeCut(indexEdge(idx)) = true;
160 end
161 % extend the elements
162 for s = 1:length(elemExtend)
163     index = elemExtend{s}; indexEdge = elem2edgeExtend{s};
164     id = find(indexEdge>0);
165     id = id(isEdgeCut(indexEdge(id)));
166     idvec = zeros(1,2*length(index));
167     idvec(1:2:end) = index; idvec(2:id) = indexEdge(id)+N;
168     elemExtend{s} = idvec(idvec>0);
169 end
170
171 %% Partition the trivial marked elements
172 nMarkedT = length(idElemMarkedT);
173 addElemMarkedT = cell(nMarkedT,1);
174 for s = 1:nMarkedT
175     iel = idElemMarkedT(s);
176     index = elem{iel}; indexEdge = elem2edge{iel}; Nv = length(index);
177     ide = indexEdge+N; % connection number
178     z1 = ide([Nv,1:Nv-1]); z0 = index;
179     z2 = ide; zc = iel*ones(Nv,1)+N+NE;
180     addElemMarkedT{s} = [z1(:), z0(:), z2(:), zc(:)];
181 end
182 % addElem
183 addElemMarkedT = num2cell(vertcat(addElemMarkedT{:}), 2);
184 addElem = [elemExtend; addElemMarkedT];
185
186 %% Update node and elem
187 % node
188 nodeEdgeCut = (node(edge(isEdgeCut,1),:)+node(edge(isEdgeCut,2),:))/2;
189 nodeCenter = zeros(length(idElemRefine),2);
190 for s = 1:length(idElemRefine)
191     iel = idElemRefine(s); index = elem{iel};
192     verts = node(index(~ismElem{iel}),:); verts1 = verts([2:end,1],:);
193     area_components = verts(:,1).*verts1(:,2)-verts1(:,1).*verts(:,2);
194     ar = 0.5*abs(sum(area_components));
195     nodeCenter(s,:)= sum((verts+verts1).*repmat(area_components,1,2))/(6*ar);
196 end
197 node = [node; nodeEdgeCut; nodeCenter];
198 % elem
199 elem([idElemRefine(:); idElemRefineNeighbor(:)]) = []; % delete old
200 elem = [elem; addElem];
201
202 %% Reorder the vertices
203 [~,~,totalid] = unique(horzcat(elem{:})');
204 elemLen = cellfun('length',elem);
205 elem = mat2cell(totalid', 1, elemLen)';

```

5 PolyMesher3D: 三维多面体剖分的生成

Part II

经典问题的虚拟元方法

6 Poisson 方程的协调 VEM

6.1 VEM 简介

考虑 Poisson 方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.6)$$

为了方便, 以下设 $g = 0$. 变分问题为: 找 $u \in V := H_0^1(\Omega)$, 使得

$$a(u, v) = \ell(v),$$

其中,

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad \ell(v) = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

VEM 的局部形函数空间为

$$V_k(K) := \{v \in H^1(K) : \Delta v \in \mathbb{P}_{k-2}(K), \quad v|_{\partial K} \in \mathbb{B}_k(\partial K)\},$$

式中,

$$\mathbb{B}_k(\partial K) = \{v \in C^0(\partial K) : v|_e \in \mathbb{P}_k(e), \quad e \subset \partial K\}$$

称为边界元空间. 给定区域的剖分 \mathcal{T}_h , 对模型问题 (6.6), 协调有限元空间为

$$V_h = \{v \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) : v|_K \in V_k(K), \quad K \in \mathcal{T}_h\}.$$

为了表达自由度, 设 d -维区域 D 上的尺度单项式集合 $\mathbb{M}_r(D)$ 为

$$\mathbb{M}_r(D) := \left\{ \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_D}{h_D} \right)^s, |\mathbf{s}| \leq r \right\},$$

其中, h_D 是 D 的直径, \mathbf{x}_D 是 D 的重心, r 是非负正整数. 对多重指标 $\mathbf{s} \in \mathbb{N}^d$, 定义

$$\mathbf{x}^s = x_1^{s_1} \cdots x_d^{s_d}, \quad |\mathbf{s}| = s_1 + \cdots + s_d.$$

规定, 当 $r \leq -1$ 时, $\mathbb{M}_r(D) = \{0\}$.

对偶空间为

$$\mathcal{X}_{k,k-2}(K) = \text{span}\{\chi_a, \chi_e^{k-2}, \chi_K^{k-2}\}, \quad (6.7)$$

其中, 泛函向量由如下自由度组成

- χ_a : K 顶点处的函数值,

$$\chi_a^z(v) = v(z), \quad z \text{ is a vertex of } K.$$

- χ_e^{k-2} : 边上 $k-1$ 个点或直到 $k-2$ 阶的矩量,

$$\chi_e(v) = |e|^{-1}(m_e, v)_e, \quad m_e \in \mathbb{M}_{k-2}(e), \quad e \subset \partial K.$$

- χ_K^{k-2} : 单元 K 上直到 $k-2$ 阶的矩量,

$$\chi_K(v) = |K|^{-1}(m_K, v)_K, \quad m_K \in \mathbb{M}_{k-2}(K).$$

定义局部 H^1 投影

$$\Pi_k^\nabla : H^1(K) \rightarrow \mathbb{P}_k(K), \quad v \mapsto \Pi_k^\nabla v,$$

满足

$$\begin{cases} a^K(\Pi_k^\nabla v, p) = a^K(v, p), & p \in \mathbb{P}_k(K), \\ P_0(\Pi_k^\nabla v) = P_0(v) \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} (\nabla(\Pi_k^\nabla v), \nabla p)_K = (\nabla v, \nabla p)_K, & p \in \mathbb{P}_k(K), \\ P_0(\Pi_k^\nabla v) = P_0(v). \end{cases} \quad (6.8)$$

这里, 限制条件为

$$P_0(v) = \int_{\partial K} v \, ds, \quad k = 1; \quad P_0(v) = \int_K v \, dx, \quad k \geq 2.$$

近似变分问题为: 求 $u_h \in V_h$, 使得

$$a_h(u_h, v) = \ell_h(v), \quad v \in V_h,$$

式中,

$$\begin{aligned} a_h(u, v) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} a_h^K(u, v), \\ a_h^K(u, v) &= \int_K \nabla(\Pi_k^\nabla u) \cdot \nabla(\Pi_k^\nabla v) \, dx + S^K(u - \Pi_k^\nabla u, v - \Pi_k^\nabla v), \\ \ell_h(v) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \ell_h^K(v), \quad \ell_h^K(v) = \int_K f P_h v \, dx. \end{aligned}$$

在上式中, $P_h v$ 是 v 的某种可计算的近似, 如

$$P_h(v) = \Pi_k^\nabla v, \quad k = 1.$$

稳定项由自由度给出:

$$S^K(v - \Pi_k^\nabla v, w - \Pi_k^\nabla w) = \sum_{i=1}^{N_k} \chi_i(v - \Pi_k^\nabla v) \chi_i(w - \Pi_k^\nabla w),$$

其中, N_k 是自由度的个数.

6.2 椭圆投影的计算

6.2.1 过渡矩阵 D

为了验证程序的正确性, 后面每一步都会参考文献 [3] 中例子的结果, 那里的数据为

```

1 node = [0 0; 3 0; 3 2; 3/2 4; 0 4];
2 elem = {1:5};
3 aux = auxgeometry(node,elem);

```

查看结构体 `aux` 可以看到, 重心、单元直径和单元面积与那里的一致.

类似线性代数中向量在基下的表示, 我们把虚拟元空间 $V_k(K)$ 的基函数排成行向量, 记为

$$\phi^T = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_k}),$$

其中, N_k 是基函数的个数. 设 $\mathbb{P}_k(K)$ 的基为

$$m^T = (m_1, m_2, \dots, m_{N_p}),$$

因 $\mathbb{P}_k(K) \subset V_k(K)$, 故可设

$$(m_1, m_2, \dots, m_{N_p}) = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_k})D \quad \text{或} \quad m^T = \phi^T D, \quad (6.9)$$

称 D 是从 $V_k(K)$ (的基) 到 $\mathbb{P}_k(K)$ (的基) 的过渡矩阵. 以下约定, 用拉丁字母 i, j 等作为基函数 ϕ^T 的索引, 而用希腊字母 α, β 作为 m^T 的索引. 根据自由度的定义,

$$m_\alpha = \sum_{i=1}^{N_k} \phi_i D_{i\alpha}, \quad D_{i\alpha} = \chi_i(m_\alpha),$$

且 D 是 $N_k \times N_p$ 的矩阵.

过渡矩阵是可计算的. 考虑一次元, 即 $k = 1$ 的情形. 我们有

$$\chi_i(v) = v(z_i), \quad i = 1, \dots, N_k = N_v,$$

$$m^T = \left\{ m_1(x, y) = 1, \quad m_2(x, y) = \frac{x - x_K}{h_K}, \quad m_3(x, y) = \frac{y - y_K}{h_K} \right\},$$

从而

$$D = (D_{i\alpha})_{N_v \times 3}, \quad D_{i,\alpha} = \chi_i(m_\alpha) = m_\alpha(z_i) = \begin{cases} 1, & \alpha = 1 \\ \frac{x_i - x_K}{h_K}, & \alpha = 2 \\ \frac{y_i - y_K}{h_K}, & \alpha = 3 \end{cases}.$$

我们将一次性把所有单元的过渡矩阵 D 计算出来, 并用元胞数组存储. $k = 1$ 的程序如下

```

1 node = [0 0; 3 0; 3 2; 3/2 4; 0 4]; elem = {1:5};
2 aux = auxgeometry(node,elem);
3
4 node = aux.node; elem = aux.elem;
5 centroid = aux.centroid; diameter = aux.diameter;
6

```

```

7 NT = size(elem,1); D = cell(NT,1);
8 for iel = 1:NT
9     index = elem{iel}; Nv = length(index);
10    xK = centroid(iel,1); yK = centroid(iel,2); hK = diameter(iel);
11
12    m = @(x,y) [1+0*x, (x-xK)./hK, (y-yK)./hK]; % m1,m2,m3
13
14    x = node(index,1); y = node(index,2);
15    D1 = m(x,y); D{iel} = D1;
16 end

```

注意这里多个匿名函数的使用. 所得结果与文献 [3] 的一致.

6.2.2 椭圆投影在基下的矩阵

对 VEM 中的函数, 当它的自由度已知时, 椭圆投影就是可计算的. 而 $\chi_i(\phi_j) = \delta_{ij}$, 故节点基函数的投影可计算. 设椭圆投影算子 Π_k^∇ 在节点基下的矩阵记为 $\mathbf{\Pi}_k^\nabla$, 即

$$\Pi_k^\nabla(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_k}) = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_k}) \mathbf{\Pi}_k^\nabla \quad \text{或} \quad \Pi_k^\nabla \phi^T = \phi^T \mathbf{\Pi}_k^\nabla.$$

根据自由度的定义, $\mathbf{\Pi}_k^\nabla$ 的第 j 列就是 $\Pi_k^\nabla \phi_j$ 的自由度向量, 即

$$\mathbf{\Pi}_k^\nabla = (\chi_i(\Pi_k^\nabla \phi_j)). \quad (6.10)$$

设投影向量 $\Pi_k^\nabla \phi^T$ 在多项式基 m^T 下的矩阵为 $\mathbf{\Pi}_{k*}^\nabla$, 即

$$\Pi_k^\nabla \phi^T = m^T \mathbf{\Pi}_{k*}^\nabla, \quad (6.11)$$

称 $\mathbf{\Pi}_{k*}^\nabla$ 为椭圆投影关于多项式基的 Riesz 表示. 由过渡矩阵的关系知, 两组不同基下的矩阵满足

$$\mathbf{\Pi}_k^\nabla = D \mathbf{\Pi}_{k*}^\nabla.$$

定义 6.8 等价于

$$\begin{cases} a^K(\Pi_k^\nabla \phi_i, m_\alpha) = a^K(\phi_i, m_\alpha), & i = 1, \dots, N_k, \alpha = 1, \dots, N_p \\ P_0(\Pi_k^\nabla \phi_i) = P_0(\phi_i) \end{cases},$$

或

$$\begin{cases} (\nabla \Pi_k^\nabla \phi_i, m_\alpha)_K = (\nabla \phi_i, m_\alpha)_K, & i = 1, \dots, N_k, \alpha = 1, \dots, N_p, \\ P_0(\Pi_k^\nabla \phi_i) = P_0(\phi_i) \end{cases}$$

写成向量形式为

$$\begin{cases} a^K(m, \Pi_k^\nabla \phi^T) = a^K(m, \nabla \phi^T), \\ P_0(\Pi_k^\nabla \phi^T) = P_0(\phi^T). \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \int_K \nabla m \cdot \nabla \Pi_k^\nabla \phi^T dx = \int_K \nabla m \cdot \nabla \phi^T dx, \\ P_0(\Pi_k^\nabla \phi^T) = P_0(\phi^T). \end{cases} \quad (6.12)$$

令

$$G = a^K(m, m^T) = \int_K \nabla m \cdot \nabla m^T dx,$$

$$B = a^K(m, \phi^T) = \int_K \nabla m \cdot \nabla \phi^T dx,$$

则由 (6.12) 知

$$\begin{cases} G \Pi_{k*}^\nabla = B, \\ P_0(m^T) \Pi_{k*}^\nabla = P_0(\phi^T), \end{cases}$$

其中, G 是 $N_p \times N_p$ 的方阵, B 是 $N_k \times N_p$ 的矩阵, 而第二个方程实际上是一个行向量.

注意, G 不可逆, 因为 ∇m 的第一个分量为零, 从而 G 的第一行全为零. 这是因为 (6.12) 不考虑限制条件时, 投影不唯一. 这样, 我们只要把第一行恒为零的方程用投影的限制条件替换, 即

$$\tilde{G} \Pi_{k*}^\nabla = \tilde{B},$$

式中,

$$\tilde{G} = G + \begin{bmatrix} P_0(m^T) \\ O \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = B + \begin{bmatrix} P_0(\phi^T) \\ O \end{bmatrix}.$$

则 \tilde{G} 可逆, 且

$$\Pi_{k*}^\nabla = \tilde{G}^{-1} \tilde{B}, \quad \Pi_k^\nabla = D \Pi_{k*}^\nabla.$$

注 6.1 G 不可逆, 一般是某行为零, 或某两行线性相关. 注意到 MATLAB 的 $\mathbf{A}\backslash\mathbf{b}$ 对非方阵也可使用, 我们可把限制条件对应的行向量直接排在矩阵的底部.

现在考虑相关矩阵的计算. 注意, \tilde{G} 或 G 不需要直接计算, 这是因为我们有如下的一致性关系 (consistency relation).

引理 6.1

$$G = BD, \quad \tilde{G} = \tilde{B}D.$$

证明 对第一式, 直接验证有

$$G = \int_K \nabla m \cdot \nabla m^T dx = \int_K \nabla m \cdot \nabla \phi^T dx D = BD.$$

对第二式,

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= G + \begin{bmatrix} P_0(m^T) \\ O \end{bmatrix} = \int_K \nabla m \cdot \nabla m^T dx + \begin{bmatrix} P_0(m^T) \\ O \end{bmatrix} \\ &= \int_K \nabla m \cdot \nabla \phi^T dx D + \begin{bmatrix} P_0(\phi^T) \\ O \end{bmatrix} D = \tilde{B}D. \end{aligned}$$

□

因为 D 不可逆, 所以不能通过直接计算 G , 然后反推出 B (B 比较难算). 这体现了 VEM 中可计算问题的思考过程不能省略.

先考虑 B 的计算. 分部积分有

$$B = \int_K \nabla m \cdot \nabla \phi^T dx = - \int_K \Delta m \cdot \phi^T dx + \sum_{e \subset \partial K} \int_e (\nabla m \cdot \mathbf{n}_e) \phi^T ds, \quad (6.13)$$

右端第一项转化为 ϕ^T 的自由度计算, 第二项限制在边界上是多项式, 归结为普通的有限元问题.

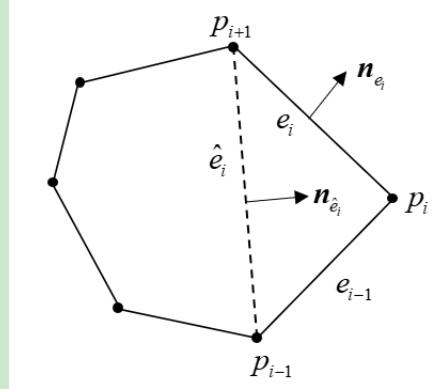


图 15. $\mathbf{n}_{\hat{e}_i}$ 的示意图

考虑 $k = 1$ 的情形. 尺度单项式的次数不超过 1, 故 $\Delta m = 0$, 只需要考虑边界项. 此时, ∇m 的每个分量都是常数, 且外法向量在每个边界单元上也是常数, 都可直接提出积分号. 每个 ϕ_i 在边界上是一次多项式, 且顶点值满足 Kronecker 性质 (第 i 个基对应第 i 个点). 设 p_{i-1} 表示 p_i 的上一个点, p_{i+1} 表示下一个点, 则有

$$\begin{aligned} & \sum_{e \subset \partial K} \int_e (\nabla m_\alpha \cdot \mathbf{n}_e) \phi_i ds \\ &= \sum_{e \subset \partial K} (\nabla m_\alpha \cdot \mathbf{n}_e) \int_e \phi_i ds = \sum_{j=1}^{N_v} (\nabla m_\alpha \cdot \mathbf{n}_{e_j}) \frac{\phi_i(p_j) + \phi_i(p_{j+1})}{2} |e_j| \\ &= \nabla m_\alpha \cdot \frac{|e_{i-1}| \mathbf{n}_{e_{i-1}} + |e_i| \mathbf{n}_{e_i}}{2} \end{aligned} \quad (6.14)$$

考察三角形 $\Delta p_{i-1} p_i p_{i+1}$, 我们有

$$\overrightarrow{p_{i+1} p_{i-1}} + \overrightarrow{p_{i-1} p_i} + \overrightarrow{p_i p_{i+1}} = \mathbf{0},$$

三角形逆时针旋转 90° 后结果不变. 显然每个边旋转后都与对应边的内法向量共线, 且长度不变, 故

$$|\hat{e}_i| \mathbf{n}_{\hat{e}_i} + (-|e_{i-1}| \mathbf{n}_{e_{i-1}}) + (-|e_i| \mathbf{n}_{e_i}) = \mathbf{0}$$

或

$$|\hat{e}_i| \mathbf{n}_{\hat{e}_i} = |e_{i-1}| \mathbf{n}_{e_{i-1}} + |e_i| \mathbf{n}_{e_i}.$$

综上,

$$\sum_{e \subset \partial K} \int_e (\nabla m_\alpha \cdot \mathbf{n}_e) \phi_i ds = \nabla m_\alpha \cdot \frac{|\hat{e}_i| \mathbf{n}_{\hat{e}_i}}{2},$$

这里 $|\hat{e}_i| \mathbf{n}_{\hat{e}_i}$ 就是定向线段 $\overrightarrow{p_{i+1}p_{i-1}}$ 逆时针旋转 90° 后得到的向量. 注意, 向量 $\alpha = (a, b)$ 旋转 90° 后坐标变为 $(-b, a)$.

为了计算 B , 我们只要计算出

$$\begin{bmatrix} \nabla m_1 \\ \vdots \\ \nabla m_{N_p} \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{2} \left[|\hat{e}_1| \mathbf{n}_{\hat{e}_1}, \dots, |\hat{e}_{N_k}| \mathbf{n}_{\hat{e}_{N_k}} \right]$$

然后进行相乘即可, 这里 ∇m_α 的坐标按行排, $|\hat{e}_i| \mathbf{n}_{\hat{e}_i}$ 的坐标按列排.

```

1 NT = size(elem,1); B = cell(NT,1);
2 for iel = 1:NT
3     index = elem{iel}; Nv = length(index);
4     hK = diameter(iel);
5     x = node(index,1); y = node(index,2);
6     rotid1 = [Nv, 1:Nv-1]; rotid2 = [2:Nv, 1]; % ending and starting indices
7     Gradm = [0 0; 1./hK*[1, 0]; 1./hK*[0, 1]];
8     normVec = 0.5*[y(rotid2) - y(rotid1), x(rotid1)-x(rotid2)]'; % a rotation of ...
     edge vector
9     B{iel} = Gradm*normVec;
10 end

```

6.2.3 投影限制条件

对 $k = 1$, 计算中 P_0 通常采用如下离散形式

$$P_0 v = \frac{1}{N_v} \sum_{i=1}^{N_v} v(p_i), \quad (6.15)$$

从而

$$P_0(\phi^T) = \frac{1}{N_v} [1, \dots, 1].$$

我们把前面所有的矩阵保存为元胞数组.

```

1 % aux = auxgeometry(node, elem);
2 node = aux.node; elem = aux.elem;
3 centroid = aux.centroid; diameter = aux.diameter;
4 NT = size(elem,1);
5
6 D = cell(NT,1);
7 % B = cell(NT,1); % it is not used in the computation
8 Bs = cell(NT,1);
9 G = cell(NT,1); Gs = cell(NT,1);
10 for iel = 1:NT
11     % element information
12     index = elem{iel}; Nv = length(index);
13     xK = aux.centroid(iel,1); yK = aux.centroid(iel,2);
14     hK = aux.diameter(iel);
15     x = node(index,1); y = node(index,2);

```

```

16      % scaled monomials
17      m1 = @ (x,y) 1 + 0*x; m2 = @ (x,y) (x-xK)./hK; m3 = @ (x,y) (y-yK)./hK;
18      m = @ (x,y) [m1(x,y), m2(x,y), m3(x,y)];
19      Gradm = [0 0; 1./hK*[1, 0]; 1./hK*[0, 1]];
20      %
21      D1 = m(x,y); D{iel} = D1;
22      %
23      rotid1 = [Nv, 1:Nv-1]; rotid2 = [2:Nv, 1]; % ending and starting indices
24      normVec = 0.5*[y(rotid2)-y(rotid1), x(rotid1)-x(rotid2)]'; % a rotation of edge ...
25      %
26      B1 = Gradm*normVec; % B
27      B1s = B1; B1s(1,:) = 1/Nv; Bs{iel} = B1s;
28      G{iel} = B1*D1; Gs{iel} = B1s*D1;

```

对 $k = 1$ 情形, 文献 [3] 中 $B(2, 1)$ 元素应该少了一个负号, 其他结果都一致.

6.3 L^2 投影与强化技巧

6.3.1 提升空间中的椭圆投影

考虑提升空间

$$\tilde{V}_k(K) := V_{k,k}(K) = \{v \in H^1(K) : v|_{\partial K} \in \mathbb{B}_k(\partial K), \Delta v \in \mathbb{P}_k(K)\},$$

相比 $V_k(K)$, 它的自由度多出 K 上的 $k-1, k$ 阶矩量. 对 $v \in \tilde{V}_k(K)$, 因边界多项式次数未提高, 我们仍然只能如 $V_k(K)$ 中那样定义椭圆投影 $\Pi_k^\nabla v$ (为了区别, 可用记号 $\tilde{\Pi}_k^\nabla v$ 表示, 但这里仍使用原符号), 即

$$\Pi_k^\nabla : \tilde{V}_k(K) \rightarrow \mathbb{P}_k(K), \quad v \mapsto \Pi_k^\nabla v$$

满足

$$(\nabla \Pi_k^\nabla v, \nabla p)_K = (\nabla v, \nabla p)_K, \quad p \in \mathbb{P}_k(K).$$

显然, $\Pi_k^\nabla v$ 的计算用不到 K 上 v 的 $k-1, k$ 阶矩量. 正因为如此, 我们可用 $\Pi_k^\nabla v$ 的 $k-1, k$ 阶矩量近似 v 的相应矩量, 从而减少自由度个数. 由此引入强化空间

$$W_k(K) = \left\{ w_h \in \tilde{V}_k(K) : (w_h - \Pi_k^\nabla w_h, q)_K = 0, \quad q \in \mathbb{M}_k \setminus \mathbb{M}_{k-2} \right\}.$$

在该空间中, 显然有

$$(\Pi_k^0 w_h, q)_K = (\Pi_k^\nabla w_h, q)_K, \quad q \in \mathbb{M}_k \setminus \mathbb{M}_{k-2}.$$

现在我们简单说明 $\tilde{V}_k(K)$ 中椭圆投影的计算.

- $\tilde{V}_k(K)$ 中多出 $k-1, k$ 阶矩量自由度 (不一定就是两个自由度), 将它们排列在最后. 设多出 n 个自由度 (从而多出 n 个基函数), 分别记为 $d_i(v)$, $i = 1, \dots, n$.
- 过渡矩阵 D 多出 n 行, 即 $d_i(m^T)$, $i = 1, \dots, n$.
- 对矩阵

$$B = \int_K \nabla m \cdot \nabla \phi^T dx,$$

它比原来的多出 n 列, 对应 $k-1, k$ 阶矩量. 由于分部积分后, 右端的计算不涉及到这些矩量, 因此多出的 n 列全为零, 其他列不变. 限制条件也是如此. 这表明, 此时的 \tilde{B} 只比原来的多出 n 列零向量.

- 有了过渡矩阵和 B, \tilde{B} , 就可计算出 $\tilde{V}_k(K)$ 中的投影矩阵 Π_k^∇ . 注意到该矩阵的第 j 列就是第 j 个基函数的投影的自由度向量 $\chi(\Pi_k^\nabla \phi_j)$, 我们有 Π_k^∇ 的最后 n 行为

$$d_i(\Pi_k^\nabla \phi^T), \quad i = 1, \dots, n.$$

注意这里的 ϕ^T 是 $\tilde{V}_k(K)$ 的基函数, 去掉最后 n 个即为 $W_k(K)$ 中的 (虽然基函数可能不同, 但相同自由度值相同, 而椭圆投影由自由度唯一决定).

6.3.2 L^2 投影的计算

对含低阶项的问题, 即反应-扩散问题, 我们要计算 L^2 投影, 定义为

$$\begin{cases} \Pi_k^0 : V_k(K) \rightarrow \mathbb{P}_k(K), & v \mapsto \Pi_k^0 v, \\ (\Pi_k^0 v, q)_K = (v, q)_K, \end{cases}$$

这等价于

$$(\Pi_k^0 \phi_i, m_\alpha)_K = (\phi_i, m_\alpha)_K, \quad i = 1, \dots, N_k, \quad \alpha = 1, \dots, N_p \quad (6.16)$$

或

$$\int_K m \Pi_k^0 \phi^T dx = \int_K m \phi^T dx. \quad (6.17)$$

设 Π_k^0 在基 ϕ^T 下的矩阵为 Π_k^0 , 即

$$\Pi_k^0 \phi^T = \phi^T \Pi_k^0,$$

而 $\Pi_k^0 \phi^T$ 在多项式基 m^T 下的矩阵为 Π_{k*}^0 , 即

$$\Pi_k^0 \phi^T = m^T \Pi_{k*}^0. \quad (6.18)$$

由 (6.9) 知,

$$\Pi_k^0 = D \Pi_{k*}^0.$$

把这些关系代入 (6.17), 我们有 L^2 投影的矩阵表示

$$H \Pi_{k*}^0 = C,$$

式中,

$$H = \int_K m m^T dx, \quad C = \int_K m \phi^T dx.$$

H 是可逆的 (Gram 矩阵), 但 C 不可计算, 因为它涉及到 K 上 $k-1, k$ 阶的矩量. 根据前面的说明, 我们将在强化空间 $W_k(K)$ 中考虑, 前面的 $V_k(K)$ 都换为 $W_k(K)$, 相应的基函数对应 $W_k(K)$. C 中多出的矩量 $d_i(\phi^T)$ 用 $d_i(\Pi_k^\nabla \phi^T)$ 代替.

可以证明, 当 $k = 1, 2$ 时,

$$\Pi_k^\nabla w_h = \Pi_k^0 w_h, \quad w_h \in W_k(K).$$

此时的 L^2 投影似乎不需要考虑计算问题, 因为已经知道

$$\Pi_k^0 = \Pi_k^\nabla, \quad \Pi_{k*}^0 = \Pi_{k*}^\nabla.$$

实则不然, 在双线性形式的表示中仍要计算矩阵 H .

下面考虑如何计算单元上的积分. 设单元的重心为 z_0 , 顶点分别为 z_1, \dots, z_{N_v} , 连接重心与顶点, 则给出单元 K 的一个三角剖分, 共有 N_v 个小三角形. 这样, K 上的积分转化为这些小三角形上的积分之和. iFEM 中提供了三角形上的 Gauss 求积节点与权重, 即 `quadpts.m`. 我们简单说明一下其用法. 那里的权重和节点实际上是针对面积坐标下的参考三角形进行的, 积分公式为

$$\iint_{\hat{T}} f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\hat{\sigma} \approx |\hat{T}| \sum_{i=1}^{n_g} w_i f(\lambda_{1,i}, \lambda_{2,i}, \lambda_{3,i}), \quad |\hat{T}| = \frac{1}{2},$$

式中,

$$\begin{cases} x = x_1 \lambda_1 + x_2 \lambda_2 + x_3 \lambda_3 \\ y = y_1 \lambda_1 + y_2 \lambda_2 + y_3 \lambda_3 \end{cases}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \quad (6.19)$$

注意到

$$\det \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(\lambda_1, \lambda_2)} \right) = 2S,$$

这里 S 是三角形 T 的代数面积, 我们有

$$\int_T F(x, y) d\sigma = 2|T| \int_{\hat{T}} f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\hat{\sigma} = |T| \sum_{i=1}^{n_g} w_i f(\lambda_{1,i}, \lambda_{2,i}, \lambda_{3,i}).$$

因变换前后点出的值不变, 故

$$\int_T F(x, y) d\sigma = |T| \sum_{i=1}^{n_g} w_i F(x_i, y_i).$$

利用 (6.19) 可把参考元上的 Gauss 点 $(\lambda_{1,i}, \lambda_{2,i}, \lambda_{3,i})$ 转化为 T 上的点. 对 VEM 的单元 K , 给出其三角剖分的基本数据结构, 记为 `nodeT`, `elemT`, 如下进行 K 上的积分.

```

1 function Int = integralTri(fun,n,nodeT,elemT)
2 % % integralTri: approximate integrals in a polygonal domain
3 % with triangulation (nodeT,elemT).
4 % n: n-th order quadrature rule
5 % fun: one or more anonymous functions, e.g. fun = @(x,y) [f1(x,y), f2(x,y)]
6
7 [lambda,weight] = quadpts(n);
8 NT = size(elemT,1); Int = 0;
9 for iel = 1:NT
10     vT = nodeT(elemT(iel,:),:);
11     area = 0.5*abs(det([[1;1;1],vT]));
12     xy = lambda*vT;

```

```

13     f = fun(xy(:,1),xy(:,2));
14     Int = Int + area*weight*f;
15 end

```

注意 `fun` 容许是多个按行排列的匿名函数.

$k = 1$ 时的 H 如下计算

```

1    % H
2    nodeT = [node(index,:);centroid(iel,:)];
3    elemT = [(Nv+1)*ones(Nv,1),(1:Nv)',[2:Nv,1]';
4    m = @ (x,y) [m1(x,y).*m1(x,y), m1(x,y).*m2(x,y), m1(x,y).*m3(x,y), ...
5                m2(x,y).*m1(x,y), m2(x,y).*m2(x,y), m2(x,y).*m3(x,y), ...
6                m3(x,y).*m1(x,y), m3(x,y).*m2(x,y), m3(x,y).*m3(x,y)];
7    H1 = zeros(3,3);
8    H1(:) = integralTri(m,2,nodeT,elemT); % n = 2
9    H{iel} = H1;

```

注 6.2 当 m_α 较多时, H 可循环计算.

```

1    m1 = @ (x,y) 1 + 0*x;
2    m2 = @ (x,y) (x-xK)./hK;
3    m3 = @ (x,y) (y-yK)./hK;
4    m = {m1,m2,m3};
5
6    H1 = zeros(3,3);
7    for i = 1:3
8        for j = 1:3
9            fun = @ (x,y) m{i}(x,y).*m{j}(x,y);
10           H1(i,j) = integralTri(fun,2,nodeT,elemT);
11       end
12   end
13   H{iel} = H1;

```

6.4 Poisson 方程一阶 VEM 程序

6.4.1 问题描述

考虑更一般的问题

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g_D & \text{on } \Gamma_D, \\ \partial_n u = g_N & \text{on } \Gamma_N, \end{cases}$$

虚拟元方法为: 找 $u_h \in V_h^g$, 使得

$$a_h(u_h, v) + b_h(u_h, v) = F_h(v), \quad v \in V_h,$$

式中,

- 空间为

$$V_h = \{v \in H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) : v|_K \in V_k(K), \quad K \in \mathcal{T}_h\},$$

$$V_h^g = \{v \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) : v|_K \in V_k(K), \quad K \in \mathcal{T}_h, \quad v|_{\Gamma_D} = g_D\}.$$

注意, 对 $\alpha \neq 0$ 的情形, 要考虑 enhancement 空间 W_h .

- 双线性形式 $a_h^K(u, v)$ 同前, 而

$$b_h(u, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} b_h^K(u, v), \quad b_h^K(u, v) = \alpha \int_K \Pi_k^0 u \cdot \Pi_k^0 v \, dx.$$

- 右端为

$$F_h(v) = \ell_h(v) + \int_{\Gamma_N} g_N v \, ds,$$

其中,

$$\ell_h(v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f P_h v \, dx.$$

注意, 对 $k = 1$, 自由度 $\chi_i(u_h)$ 是节点值. 这与常规情形没有什么区别, Dirichlet 条件可以直接处理; 而 v 在边界上是一次多项式, Neumann 边界条件按一维有限元问题进行装配.

6.4.2 单元刚度矩阵的计算

为了方便, 令

$$A_K^1(i, j) = a^K(\Pi_k^\nabla \phi_j, \Pi_k^\nabla \phi_i) = \int_K \nabla(\Pi_k^\nabla \phi_j) \cdot \nabla(\Pi_k^\nabla \phi_i) \, dx,$$

$$A_K^2(i, j) = S^K(\phi_j - \Pi_k^\nabla \phi_j, \phi_i - \Pi_k^\nabla \phi_i) = \sum_{r=1}^{N_k} \chi_r(\phi_j - \Pi_k^\nabla \phi_j) \chi_r(\phi_i - \Pi_k^\nabla \phi_i).$$

第一式写成矩阵形式为

$$A_K^1 = \int_K \nabla \Pi_k^\nabla \phi \cdot \nabla \Pi_k^\nabla \phi^T \, dx = (\boldsymbol{\Pi}_{k*}^\nabla)^T \int_K \nabla m \cdot \nabla m^T \, dx \boldsymbol{\Pi}_{k*}^\nabla = (\boldsymbol{\Pi}_{k*}^\nabla)^T G \boldsymbol{\Pi}_{k*}^\nabla,$$

至于第二式, 由 (6.10) 知, $\chi_r(\Pi_k^\nabla \phi_i) = (\boldsymbol{\Pi}_k^\nabla)_{ri}$, 于是

$$A_K^2(i, j) = \sum_{r=1}^{N_v} (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Pi}_k^\nabla)_{ri} (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Pi}_k^\nabla)_{rj} = [(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Pi}_k^\nabla)^T (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Pi}_k^\nabla)]_{ij}$$

或

$$A_K^2 = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Pi}_k^\nabla)^T (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Pi}_k^\nabla).$$

类似有,

$$B_K = \int_K \Pi_k^0 \phi \cdot \Pi_k^0 \phi^T \, dx = (\boldsymbol{\Pi}_{k*}^0)^T \int_K mm^T \, dx \boldsymbol{\Pi}_{k*}^0 = (\boldsymbol{\Pi}_{k*}^0)^T H \boldsymbol{\Pi}_{k*}^0,$$

而

$$\boldsymbol{\Pi}_{k*}^0 = \boldsymbol{\Pi}_{k*}^\nabla, \quad k = 1.$$

如下给出单元刚度矩阵

```

1 % ----- Elementwise stiffness matrix and load vector -----
2 ABelem = cell(NT,1); belem = cell(NT,1);
3 for iel = 1:NT
4     Pis = Gs{iel}\Bs{iel}; Pi = D{iel}*Pis; I = eye(size(Pi));
5     AK = Pis'*G{iel}*Pis + (I-Pi)'*(I-Pi);
6     BK = pde.c*Pis'*H{iel}*Pis + pde.c*hK^2*(I-Pi)'*(I-Pi); % Pis = Pi0s;
7     ABelem{iel} = reshape(AK+BK',1,[]); % straighten as row vector for easy assembly
8 end

```

注 6.3 这里对单元刚度矩阵进行了行拉直, 见后面装配的说明.

6.4.3 单元载荷向量的计算

对 $k = 1$, 右端为

$$\ell_h^K(v) = \int_K f \Pi_k^\nabla v \, dx,$$

单元载荷向量

$$F_K = \int_K f \Pi_k^\nabla \phi \, dx = (\boldsymbol{\Pi}_{k*}^\nabla)^T \int_K f \, dx, \quad (6.20)$$

这里用到 (6.11). 右端的积分若采用中点型积分公式近似, 则有

$$F_K = \int_K f \Pi_k^\nabla \phi \, dx = (\boldsymbol{\Pi}_{k*}^\nabla)^T \int_K f \, dx = (\boldsymbol{\Pi}_{k*}^\nabla)^T \begin{bmatrix} f(x_K, y_K)|K| \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

```

1 % Load vector
2 fK = Pis'*[pde.f(centroid(iel,:))*area(iel);0;0];

```

当然, (6.20) 的右端也可用 Gauss 积分近似.

```

1 % Load vector
2 index = elem{iel}; Nv = length(index);
3 xK = centroid(iel,1); yK = centroid(iel,2); hK = diameter(iel);
4 m1 = @([x,y] 1*ones(size(x))); m2 = @([x,y] ([x-xK]/hK, [y-yK]/hK));
5 nodeT = [node(index,:); centroid(iel,:)];
6 elemT = [(Nv+1)*ones(Nv,1), (1:Nv)', [2:Nv, 1]'];
7 fm = @([x,y] pde.f([x,y]).*[m1(x,y), m2(x,y), m3(x,y)]); % f(p) = f([x,y])
8 rhs = integralTri(fm,2,nodeT,elemT); rhs = rhs';
9 fK = Pis'*rhs;

```

注 6.4 这里对载荷向量进行了行拉直, 见后面装配的说明. 两种方法误差量级一致, 本文采用第一种. 注意, 对高阶方法, 用第三种.

最终的单元刚度矩阵和载荷向量如下计算

```

1 % ----- Elementwise stiffness matrix and load vector -----
2 ABelem = cell(NT,1); belem = cell(NT,1);
3 for iel = 1:NT
4     % Projection
5     Pis = Gs{iel}\Bs{iel}; Pi = D{iel}*Pis; I = eye(size(Pi));
6     % Stiffness matrix
7     AK = Pis'*G{iel}*Pis + (I-Pi)'*(I-Pi);

```

```

8      BK = pde.c*Pis'*H{iel})*Pis; % Pis = PiOs;
9      ABelem{iel} = reshape(AK'+BK',1,[]); % straighten as row vector for easy assembly
10     % Load vector
11     fK = Pis'*[pde.f(centroid(iel,:))*area(iel);0;0];
12     belem{iel} = fK'; % straighten as row vector for easy assembly
13 end

```

6.4.4 刚度矩阵与载荷向量的装配

先考虑三角剖分. $\Delta z_1 z_2 z_3$ 的局部整体对应如下

$$\{1, 2, 3\}(\text{local}) \rightarrow \{z_1, z_2, z_3\}(\text{global}),$$

这里 z_1, z_2, z_3 是三角形顶点的整体编号, 所有三角形的可如下实现

```

1 z1 = elem(:,1); % column vector
2 z2 = elem(:,2);
3 z3 = elem(:,3);

```

- 对固定单元, 设单元刚度矩阵为

$$[K^e] = \begin{array}{c|ccc} & u_i & u_j & u_l \\ \hline u_i & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ u_j & k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ u_l & k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{array},$$

这里左侧表示整体刚度矩阵的行指标, 上侧表示列指标. 对 k_{12} , 我们要把它放在 (i, j) 位置, 即在 (z_1, z_2) 处赋值 k_{12} , 用稀疏矩阵函数 `sparse` 完成. 它的用法如下

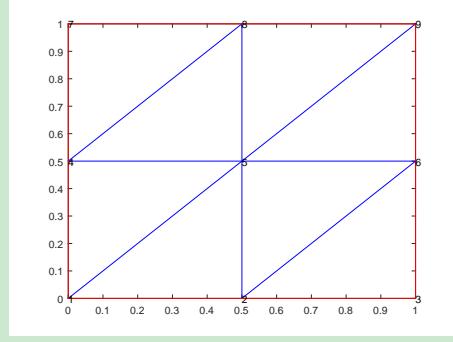
```
S = sparse(i, j, s, m, n, nzmax);
```

它分配了一个 $m \times n$ 的稀疏矩阵, 且最多有 nzmax 个非零分量, 其中 i, j 是向量, 对应分量指出非零值的位置, s 则是非零值的向量 (nzmax 可以不给出). 因此, 若想在 (z_1, z_2) 处赋值 k_{12} , 可以如下操作

```
N = size(node, 1); A = sparse(z1, z2, k12, N, N);
```

该命令把所有单元刚度矩阵的 $(1,2)$ 处的值放到了整体刚度矩阵的对应位置中 ($k12$ 是列向量, 存储所有单元的).

- 我们自然会有这样的疑问: 如果有两个单元刚度矩阵 $(1,2)$ 处的值对应相同的整体指标 (i, j) , 那么它们应该相加, 而不是简单的赋值. 事实上, 在 MATLAB 中, `sparse` 中出现相同指标规定为相加, 因而如果的确出现, 则本身已经解决. 我们要说的是, 对非对角线元素, 上面提到的情形是不可能出现的.



只需要考虑共享一条边的三角形, 因为出现相同整体指标 (i, j) , 意味着单元三角形有共同的边 $i - j$. 不失一般性, 以图中的 1-5 边为例. 根据逆时针规则, 对三角形 $\Delta z_5 z_1 z_2$ 中, 顺序如下

$$[K^e] = \begin{array}{ccc|c} & u_5 & u_1 & u_2 \\ \hline k_{11} & k_{12} & k_{13} & u_5 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & u_1 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & u_2 \end{array}$$

即 k_{12} 对应整体指标 $(5, 1)$. 而对 $\Delta z_1 z_5 z_4$, 一定不会出现 k_{12} 对应 $(5, 1)$, 只可能出现 $(1, 5)$, $(5, 4)$, $(4, 1)$. 这表明, 的确不会出现上面考虑的相同整体指标 (i, j) 的情形. 但不管怎么样, 对角线还是会出现在相同位置的, 这也许是 MATLAB 中规定 `sparse` 相同指标函数值相加的原因.

- 上面的分析表明, 只要获得单元刚度矩阵相同局部位置的三元组向量 (i, j, s) , 就可用 `sparse(i, j, s, N, N)` 处理好该局部位置. 其他位置同样处理. 一个快速的装配方式是把所有局部位置的 (i, j, s) 拼接在一起实现, 即

$$\begin{bmatrix} i_{11} & j_{11} & s_{11} \\ i_{12} & j_{12} & s_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ i_{33} & j_{33} & s_{33} \end{bmatrix}$$

这里按行优先的顺序排列. 注意每个 i_{ij} 都对应 NT 个单元, 从而 i 共有 $NT \times N_{dof}^2$ 个元素, 其中, $N_{dof} = 3$ 表示单元的自由度个数. 核心代码如下

```

1 NT = size(elem,1); Ndof = 3; nnz = NT*Ndof^2;
2 ii = zeros(nnz,1); jj = zeros(nnz,1); ss = zeros(nnz,1);
3 id = 0;
4 for i = 1:Ndof
5     for j = 1:Ndof
6         ii(id+1:id+NT) = elem(:,i); % zi
7         jj(id+1:id+NT) = elem(:,j); % zj
8         ss(id+1:id+NT) = K(:,i,j); % kij
9         id = id + NT;
10    end
11 end

```

这里假设 (i, j) 位置的单元刚度矩阵值用三维数组存储.

注 6.5 可用向量法给出 i_i, j_j , 只需要两行语句, 即

```
1 ii = reshape(repmat(elem, Ndof, 1), [], 1);
2 jj = repmat(elem(:, ), Ndof, 1);
```

以后都采用这种方式. 为了对应装配指标, 我们把单元刚度矩阵如下存储

$$K = [k_{11}, k_{12}, k_{13}, \dots, k_{33}],$$

这里 k_{11} 是所有单元刚度矩阵 $(1, 1)$ 位置的结果, 显然 ss 由该矩阵按列拉直得到. 本文均采用这种处理.

- 用稀疏矩阵, 右端可如下实现

```
1 b = sparse(z1, 1, F1, N, 1);
2 b = b+sparse(z2, 1, F2, N, 1);
3 b = b+sparse(z3, 1, F3, N, 1);
```

这里, $F1$ 是所有单元载荷第 1 个位置的元素组成的向量. 当然也可用

```
1 ii = elem(:, ); jj = 1; ss = [F1; F2; F3]; % elem(:, ) = [z1; z2; z3]
2 b = sparse(ii, jj, ss, N, 1);
```

向量不必使用 `sparse` 命令, b 一般用下面的语句代替

```
1 b = accumarray(elem(:, ), [F1; F2; F3], [N 1]);
```

同理, **右端向量也按行拉直存储.**

上面的思路只适合相同类型的单元剖分. 对一般的多角形剖分, 可对不同构型进行, 即把相同单元的放在一起考虑.

- 首先可找到所有的构型

```
elemLen = cellfun('length', elem); vertNum = unique(elemLen);
```

假设现在只有 4,5,6,7 边形, 且分别有 $N4, N5, N6, N7$ 个.

- 对 4 边形, 用 $Nv = 4$; $idNv = find(elemLen == Nv)$; 可找到所有 4 边形的序号. 比如, 第 67, 82 这两个单元是 4 边形. 对这两个相同构型的单元, 我们就可按照之前的思路进行装配, 找到相应的三元组, 记为 (i_4, j_4, s_4) . 类似可找到其他构型的, 分别记为 $(i_5, j_5, s_5), (i_6, j_6, s_6), (i_7, j_7, s_7)$. 由此就可生成最终的三元组

$$(i, j, s) := \begin{bmatrix} i_4 & j_4 & s_4 \\ i_5 & j_5 & s_5 \\ i_6 & j_6 & s_6 \\ i_7 & j_7 & s_7 \end{bmatrix}.$$

注意, nnz 是所有单元刚度矩阵的元素个数之和, 如 $nnz = sum(elemLen.^2)$.

装配程序如下

```

1 %% Assemble stiffness matrix and load vector
2 elemLen = cellfun('length',elem); vertNum = unique(elemLen);
3 nnz = sum(elemLen.^2);
4 ii = zeros(nnz,1); jj = zeros(nnz,1); ss = zeros(nnz,1);
5 id = 0; ff = zeros(N,1);
6 elem2dof = cell(NT,1);
7 for Nv = vertNum(:) % only valid for row vector
8
9     % assemble the matrix
10    idNv = find(elemLen == Nv); % find polygons with Nv vertices
11    NTv = length(idNv); % number of elements with Nv vertices
12
13    elemNv = cell2mat(elem(idNv)); % elem
14    K = cell2mat(ABelem(idNv)); F = cell2mat(Belem(idNv));
15    Ndof = Nv;
16    ii(id+1:id+NTv*Ndof^2) = reshape(repmat(elemNv, Ndof, 1), [], 1);
17    jj(id+1:id+NTv*Ndof^2) = repmat(elemNv(:, ), Ndof, 1);
18    ss(id+1:id+NTv*Ndof^2) = K(:, );
19    id = id + NTv*Ndof^2;
20
21     % assemble the vector
22    ff = ff + accumarray(elemNv(:, ), F(:, ), [N 1]);
23
24     % elementwise global indices
25    elem2dof(idNv) = mat2cell(elemNv, ones(NTv,1), Ndof);
26 end
27 kk = sparse(ii,jj,ss,N,N);

```

6.4.5 边界条件的处理

考虑 Neumann 边界条件. 设 e 是边界边, $v|_e$ 是一次多项式, 它可表为 $v = v_1\phi_1 + v_2\phi_2$. 这里, ϕ_1, ϕ_2 是一维单元的节点基 (一次多项式). 该条边对应的“边界单元载荷向量”为

$$F_e = [F_1, F_2]^T, \quad F_i = \int_e \partial_n u \phi_i ds.$$

用梯形公式近似 (或用中心格式), 有

$$\int_e \partial_n u \phi_1 ds = \frac{h_e}{2} (\partial_n u(z_1)\phi_1(z_1) + \partial_n u(z_2)\phi_1(z_2)) = \frac{h_e}{2} \partial_n u(z_1),$$

$$\int_e \partial_n u \phi_2 ds = \frac{h_e}{2} (\partial_n u(z_1)\phi_2(z_1) + \partial_n u(z_2)\phi_2(z_2)) = \frac{h_e}{2} \partial_n u(z_2),$$

式中,

$$h_e = |z_j - z_i| = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}.$$

为此, 我们必须给出每条 Neumann 边 e 上 $g_N = \partial_n u$ 的值. 注意到

$$h_e \partial_n u = h_e \nabla u \cdot \mathbf{n} = \nabla u \cdot (h_e \mathbf{n}),$$

而 $h_e \mathbf{n}$ 恰是定向边 e 顺时针旋转 90° 或 $-e$ 逆时针旋转 90° 所得. 这样, 设 $-e$ 的坐标为 (a, b) , 则 $h_e \mathbf{n}$ 的坐标为 $(-b, a)$.

我们在 PoissonData.m 中定义 $g_N = [u_x(x, y), u_y(x, y)]$, 根据有限元一维问题的装配, Neumann 边界条件如下处理.

```

1 %% Assemble Neumann boundary conditions
2 bdEdgeN = bdStruct.bdEdgeN;
3 if ~isempty(bdEdgeN)
4     g_N = pde.Du;
5     z1 = node(bdEdgeN(:,1),:); z2 = node(bdEdgeN(:,2),:);
6     e = z1-z2; % e = z2-z1
7     Ne = [-e(:,2),e(:,1)]; % scaled ne
8     F1 = sum(Ne.*g_N(z1),2)./2;
9     F2 = sum(Ne.*g_N(z2),2)./2;
10    FN = [F1,F2];
11    ff = ff + accumarray(bdEdgeN(:,1), FN(:,1));
12 end

```

Dirichlet 边界条件比较容易, 如下

```

1 %% Apply Dirichlet boundary conditions
2 g_D = pde.g_D; bdNodeIdx = bdStruct.bdNodeIdx;
3 isBdNode = false(N,1); isBdNode(bdNodeIdx) = true;
4 bddof = find(isBdNode); freedof = find(~isBdNode);
5 pD = node(bddof,:);
6 u = zeros(N,1); uD = g_D(pD); u(bddof) = uD(:);
7 ff = ff - kk*u;

```

6.4.6 L^2 和 H^1 误差分析

设 u 是精确解, u_h 是数值解. 注意 u_h 在单元内部的值未知, 我们用 $\Pi_k^\nabla u_h$ 来代替. 也就是说, 我们用椭圆投影的误差代替数值解的误差. 离散 L^2 误差和离散 H^1 误差分别定义为

$$\text{ErrL2} = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|u - \Pi_k^\nabla u_h\|_{0,K}^2 \right)^{1/2}$$

和

$$\text{ErrH1} = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |u - \Pi_k^\nabla u_h|_{1,K}^2 \right)^{1/2}.$$

下面给出误差可计算的表达式. 设单元 K 上的局部自由度向量为 χ_K , 则 $u_h|_K = \phi^T \chi_K$. 需要注意的是, 这里的 χ_K 是局部自由度向量, 它可能与整体自由度存在差别. 这是因为, 对某些带方向的自由度, 整体上要先固定方向, 而整体限制在局部单元上时, 方向可能恰好与单元方向相反. 这种问题, 后面再处理.

椭圆投影用自由度表示为

$$\Pi_k^\nabla u_h = \Pi_k^\nabla \phi^T \chi_K = m^T \Pi_{k*}^\nabla \chi_K =: a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3,$$

其中, $(a_1, a_2, a_3)^T = \Pi_{k*}^\nabla \chi_K$. 于是,

$$\begin{aligned}|u - \Pi_k^\nabla u_h|_{1,K}^2 &= |u - (a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3)|_{1,K}^2 \\&= \|\nabla u - \nabla(a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3)\|_{0,K}^2 \\&= \int_K (\nabla u - \nabla(a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3))^2 dx \\&= \sum_\tau \int_\tau (\nabla u - \nabla(a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3))^2 dx,\end{aligned}$$

最后一步转化为三角形的积分和.

可以看到, 误差的计算仅需要矩阵 Π_{k*}^∇ , 程序中用元胞数组 Ph 存储所有单元的结果 (带方向的问题后面会引入带符号的投影矩阵). 对第 iel 个单元, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$ 如下计算

```
1 index = elem{iel};
2 Pis = Ph{iel}; chi = u(index);
3 a = Pis*chi;
```

对涉及到边上更多自由度的问题, 装配指标最好存起来, 以避免额外的计算, 程序中命名为 `elem2dof`.

给定精确解和尺度单项式

```
1 % exact solution
2 ue = pde.uexact; Due = pde.Du;
3 % scaled monomials
4 m1 = @(x,y) 1+0*x;
5 m2 = @(x,y) (x-xK)/hK;
6 m3 = @(x,y) (y-yK)/hK;
7 gradm1 = @(x,y) [0+0*x 0+0*x];
8 gradm2 = @(x,y) 1./hK*[1+0*x, 0+0*x];
9 gradm3 = @(x,y) 1./hK*[0+0*x, 1+0*x];
```

单元上被基函数及其梯度如下计算 (已经平方)

```
1 am = @(x,y) a(1)*m1(x,y)+a(2)*m2(x,y)+a(3)*m3(x,y);
2 agradm = @(x,y) a(1)*gradm1(x,y)+a(2)*gradm2(x,y)+a(3)*gradm3(x,y);
3 f = @(x,y) (ue([x,y])-am(x,y)).^2;
4 Df = @(x,y) (Due([x,y])-agradm(x,y)).^2;
```

这样, 单元上误差的平方为

```
1 % elementwise error
2 nodeT = [node(index,:); aux.centroid(iel,:)];
3 elemT = [(Nv+1)*ones(Nv,1), (1:Nv)', [2:Nv, 1]';
4 ErrL2 = ErrL2 + integralTri(f, 2, nodeT, elemT);
5 ErrH1 = ErrH1 + sum(integralTri(Df, 2, nodeT, elemT));
```

计算 L^2 误差的过程可编写为一个通用函数, 只需要修改尺度单项式和数值自由度.

CODE 8. `getL2error.m` (计算 L^2 误差)

```
1 function [ErrL2,h] = getL2error(node, elem, Ph, chi, pde, kOrder)
2 % Ph: elementwise Pis
3 % chi: elementwise numerical d.o.f.s
4 % kOrder: VE space containing k-th order polynomials
5
6 k = kOrder; % Pk-VEM (k≤3)
```

```

7 Nm = (k+1)*(k+2)/2;
8 % exact solution
9 ue = pde.uexact;
10 % auxiliary data structure
11 aux = auxgeometry(node,elem); elem = aux.elem;
12 NT = size(elem,1);
13 ErrL2 = 0;
14 for iel = 1:NT
15     % element information
16     index = elem{iel}; Nv = length(index);
17     xK = aux.centroid(iel,1); yK = aux.centroid(iel,2); hK = aux.diameter(iel);
18     % scaled monomials
19     m1 = @(x,y) 1+0*x;
20     m2 = @(x,y) (x-xK)./hK;
21     m3 = @(x,y) (y-yK)./hK;
22     m4 = @(x,y) (x-xK).^2./hK^2;
23     m5 = @(x,y) (x-xK).*(y-yK)./hK^2;
24     m6 = @(x,y) (y-yK).^2./hK^2;
25     m7 = @(x,y) (x-xK).^3./hK^3;
26     m8 = @(x,y) (x-xK).^2.*(y-yK)./hK^3;
27     m9 = @(x,y) (x-xK).*(y-yK).^2./hK^3;
28     m10= @(x,y) (y-yK).^3./hK^3;
29     m = {m1,m2,m3,m4,m5,m6,m7,m8,m9,m10};
30
31     % vector a
32     Pis = Ph{iel}; a = Pis*chi{iel};
33     % integration
34     am = @(x,y) 0+0*x;
35     for i = 1:Nm
36         am = @(x,y) am(x,y) + a(i)*m{i}(x,y);
37     end
38     f = @(x,y) (ue([x,y])-am(x,y)).^2;
39     % elementwise error
40     nodeT = [node(index,:);aux.centroid(iel,:)];
41     elemT = [(Nm+1)*ones(Nv,1),(1:Nv)',[2:Nv,1]'];
42     ErrL2 = ErrL2 + integralTri(f,k+1,nodeT,elemT);
43 end
44 h = mean(aux.diameter);
45 ErrL2 = sqrt(ErrL2);

```

类似可给出 getH1error.m.

6.4.7 能量范数误差

我们也可以计算能量范数 $a_h(u - u_h, u - u_h)^{1/2}$. 同样地, 它不可计算, 下面尝试用插值 u_I 代替 u . 定义离散能量范数的相对误差为

$$\text{ErrI} = \frac{a_h(u_I - u_h, u_I - u_h)^{1/2}}{a_h(u_I, u_I)^{1/2}}.$$

现在给出显式表达式. 设整体基函数为 Φ_1, \dots, Φ_n , 则

$$u_I = \sum_{i=1}^n \chi_i(u) \Phi_i = \Phi^T \chi(u).$$

于是,

$$a_h(u_I, u_I) = \chi(u)^T A \chi(u),$$

式中, $A = (a_h(\Phi_i, \Phi_j))$ 是未施加边界条件的整体刚度矩阵. 这样, 分子为

$$\begin{aligned} a_h(u_I - u_h, u_I - u_h) &= \chi(u_I - u_h)^T A \chi(u_I - u_h) \\ &= \chi(u - u_h)^T A \chi(u - u_h). \end{aligned}$$

注意, $\chi(u_h)$ 就是数值解. 于是

$$E_{\text{relative}} = \left(\frac{\chi(u - u_h)^T A \chi(u - u_h)}{\chi(u)^T A \chi(u)} \right)^{1/2}.$$

对 Poisson 方程的一阶问题, $\chi(u)$ 就是所有顶点处的值, 我们要把刚度矩阵 `kk` 输出, 即 `info.kk = kk`. 为此, 离散能量范数的相对误差如下计算.

```
1 % discrete energy norm
2 kk = info.kk;
3 ue = pde.uxexact(node);
4 ErrI = sqrt(abs((u-ue)'*kk*(u-ue))/abs(u'*kk*u))
```

注 6.6 对

$$\chi(v) = \int_e \partial_n v ds$$

这种类型的自由度, 它在边 e 两侧的单元上方向不同, 但整体上必须取定固定方向, 以作为最终的整体自由度. 我们规定: 整体方向取为边 e 的定向, 而边的定向规定满足起点序号小于终点序号, 即 `edge(:, 1) < edge(:, 2)`. 然而, 为了计算的方便, 我们通常保留边界的逆时针序号, 此时边界上的 e 不一定满足定向的规定. 为了解决这个问题, 我们在计算误差时, 去除边界条件给出的自由度 (注意 Neumann 边界也要去掉).

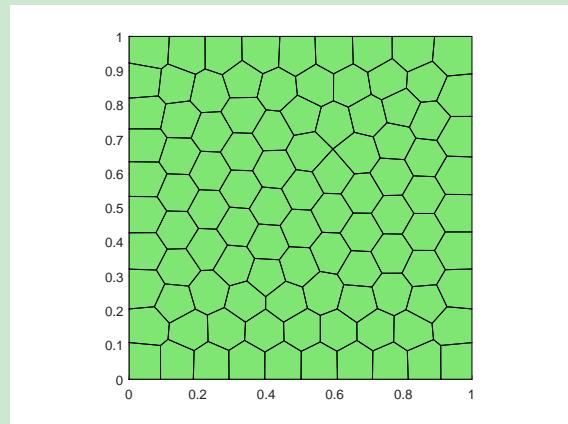
上面的误差计算可修改为

```
1 % discrete energy norm
2 kk = info.kk; freeDof = info.freeDof;
3 chie = pde.uxexact(node); chi = u;
4 kk = kk(freeDof, freeDof);
5 chie = chie(freeDof); chi = chi(freeDof);
6 ErrI = sqrt(abs((chi-chie)'*kk*(chi-chie))/abs(chie'*kk*chie))
```

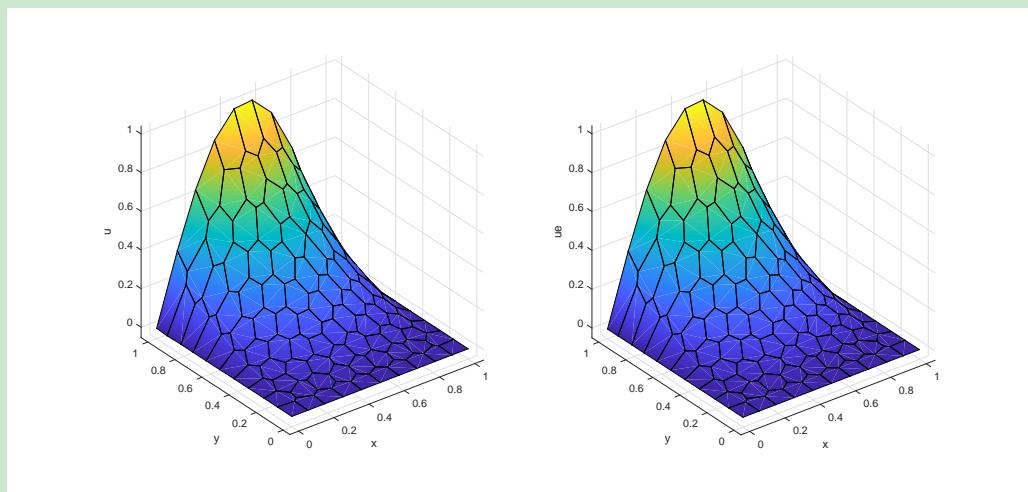
6.4.8 程序整理

例 6.1 设精确解为 $u(x, y) = y^2 \sin(\pi x)$, $\Omega = (0, 1)^2$.

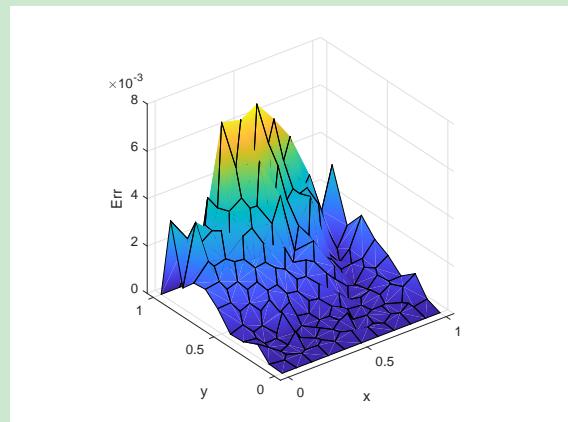
网格剖分由 tool 文件夹下的 `meshfun.m` 生成, 保存为 `Poissonmesh.mat`, 网格图示如下



设区域的左侧和右侧为 Neumann 边界，数值解和精确解的图像如下



绝对误差为



主程序为

CODE 9. main_PoissonVEM.m

```

1 clc; close all;
2 clear variables;
3
4 %% Parameters
5 nameV = [200, 400, 600, 800, 1000];

```

```

6 maxIt = length(nameV);
7 h = zeros(maxIt,1); N = zeros(maxIt,1);
8 ErrL2 = zeros(maxIt,1);
9 ErrH1 = zeros(maxIt,1);
10 ErrI = zeros(maxIt,1);
11
12 %% PDE data
13 c = 1;
14 pde = PoissonData1(c);
15 %bdNeumann = 'abs(x-0)<1e-4 | abs(x-1)<1e-4'; % string for Neumann
16 bdNeumann = [];
17
18 %% Virtual element method
19 for k = 1:maxIt
20     % load mesh
21     load( ['meshdata', num2str(nameV(k)), '.mat'] );
22     % get boundary information
23     bdStruct = setboundary(node, elem, bdNeumann);
24     % solve
25     [u,info] = PoissonVEM(node, elem, pde, bdStruct);
26     % record and plot
27     N(k) = length(u); h(k) = 1/sqrt(size(elem,1));
28     if size(elem,1)<2e3
29         figure(1); clf;
30         subplot(1,2,1), showmesh(node, elem);
31         subplot(1,2,2), showsolution(node, elem, u);
32     end
33     % compute errors in discrete L2 and H1 norms
34     index = info.elem2dof; % elementwise global index
35     chi = cellfun(@(id) u(id), index, 'UniformOutput', false); % elementwise ...
36         numerical d.o.f.s
37     kOrder = 1;
38     Ph = info.Ph;
39     ErrL2(k) = getL2error(node, elem, Ph, chi, pde, kOrder);
40     ErrH1(k) = getH1error(node, elem, Ph, chi, pde, kOrder);
41     % compute errors in discrete energy norm
42     kk = info.kk; freeDof = info.freeDof;
43     chie = pde.uxact(node); chi = u;
44     kk = kk(freeDof, freeDof);
45     chie = chie(freeDof); chi = chi(freeDof);
46     ErrI(k) = sqrt(abs((chi-chie)'*kk*(chi-chie)));
47
48 %% Plot convergence rates and display error table
49 figure(2);
50 showrateh(h, ErrL2, ErrH1, ErrI);
51
52 fprintf('\n');
53 disp('Table: Error')
54 colname = {'#Dof','h','||u-u_h||_1','|u-u_h|_1','||u_I-u_h||_E'};
55 disptable(colname,N,[],h,'%0.3e',ErrL2,'%0.5e',ErrH1,'%0.5e',ErrI,'%0.5e');

```

函数文件为

CODE 10. PoissonVEM.m

```

1 function [u,info] = PoissonVEM(node,elem,pde,bdStruct)
2 %PoissonVEM solves Poisson equation using virtual element method in V1

```

```

3 %
4 % -\Delta u = f, in Omega
5 % Dirichlet boundary condition u=g_D on \Gamma_D,
6 % Neumann boundary condition grad(u)*n=g_N on \Gamma_N
7 %
8 % Copyright (C) Terence Yu.
9
10 %% Get auxiliary data
11 aux = auxgeometry(node, elem);
12 node = aux.node; elem = aux.elem;
13 N = size(node, 1); NT = size(elem, 1);
14
15 %% Compute projection matrices
16 D = cell(NT, 1); Bs = cell(NT, 1);
17 G = cell(NT, 1); Gs = cell(NT, 1); H = cell(NT, 1);
18 for iel = 1:NT
19     % element information
20     index = elem{iel}; Nv = length(index);
21     xK = aux.centroid(iel, 1); yK = aux.centroid(iel, 2);
22     hK = aux.diameter(iel);
23     x = node(index, 1); y = node(index, 2);
24     % scaled monomials
25     m1 = @(x,y) 1 + 0*x; m2 = @(x,y) (x-xK)./hK; m3 = @(x,y) (y-yK)./hK;
26     m = @(x,y) [m1(x,y), m2(x,y), m3(x,y)];
27     Gradm = [0 0; 1./hK*[1, 0]; 1./hK*[0, 1]];
28     % D
29     D1 = m(x,y); D{iel} = D1;
30     % B, Bs, G, Gs
31     rotid1 = [Nv, 1:Nv-1]; rotid2 = [2:Nv, 1]; % ending and starting indices
32     normVec = 0.5*[y(rotid2)-y(rotid1), x(rotid1)-x(rotid2)]'; % a rotation of edge ...
            vector
33     B1 = Gradm*normVec; % B
34     B1s = B1; B1s(1,:) = 1/Nv; Bs{iel} = B1s;
35     G{iel} = B1*D1; Gs{iel} = B1s*D1;
36     % H
37     nodeT = [node(index,:); aux.centroid(iel,:)];
38     elemT = [(Nv+1)*ones(Nv, 1), (1:Nv)', [2:Nv, 1]'];
39     % mm
40     mm = @(x,y) [m1(x,y).*m1(x,y), m1(x,y).*m2(x,y), m1(x,y).*m3(x,y), ...
41                 m2(x,y).*m1(x,y), m2(x,y).*m2(x,y), m2(x,y).*m3(x,y), ...
42                 m3(x,y).*m1(x,y), m3(x,y).*m2(x,y), m3(x,y).*m3(x,y)];
43     H1 = zeros(3, 3);
44     H1(:) = integralTri(mm, 3, nodeT, elemT); % n = 2
45     H{iel} = H1;
46 end
47
48 %% Get elementwise stiffness matrix and load vector
49 ABelem = cell(NT, 1); belem = cell(NT, 1);
50 Ph = cell(NT, 1); % matrix for error evaluation
51 for iel = 1:NT
52     % Projection
53     Pis = Gs{iel}\Bs{iel}; Pi = D{iel}*Pis; I = eye(size(Pi));
54     % Stiffness matrix
55     AK = Pis'*G{iel}*Pis + (I-Pi)'*(I-Pi);
56     BK = pde.c*Pis'*H{iel}*Pis + pde.c*hK^2*(I-Pi)'*(I-Pi); % Pis = Pi0s;
57     ABelem{iel} = reshape(AK'+BK', 1, []); % straighten as row vector for easy assembly
58     % Load vector
59     fK = Pis'*[pde.f(aux.centroid(iel,:))*aux.area(iel); 0; 0];

```

```

60      belem{iel} = fK'; % straighten as row vector for easy assembly
61      % matrix for error evaluation
62      Ph{iel} = Pis;
63  end
64
65 %% Assemble stiffness matrix and load vector
66 elemLen = cellfun('length',elem); vertNum = unique(elemLen);
67 nnz = sum(elemLen.^2);
68 ii = zeros(nnz,1); jj = zeros(nnz,1); ss = zeros(nnz,1);
69 id = 0; ff = zeros(N,1);
70 elem2dof = cell(NT,1);
71 for Nv = vertNum(:)' % only valid for row vector
72
73     % assemble the matrix
74     idNv = find(elemLen == Nv); % find polygons with Nv vertices
75     NTv = length(idNv); % number of elements with Nv vertices
76
77     elemNv = cell2mat(elem(idNv)); % elem
78     K = cell2mat(ABelem(idNv)); F = cell2mat(belem(idNv));
79     s = 1; Ndof = Nv;
80     for i = 1:Ndof
81         for j = 1:Ndof
82             ii(id+1:id+NTv) = elemNv(:,i); % zi
83             jj(id+1:id+NTv) = elemNv(:,j); % zj
84             ss(id+1:id+NTv) = K(:,s);
85             id = id + NTv; s = s+1;
86         end
87     end
88
89     % assemble the vector
90     ff = ff + accumarray(elemNv(:,),F(:,',[N 1]));
91
92     % elementwise global indices
93     elem2dof(idNv) = mat2cell(elemNv, ones(NTv,1), Ndof);
94 end
95 kk = sparse(ii,jj,ss,N,N);
96
97 %% Assemble Neumann boundary conditions
98 bdEdgeN = bdStruct.bdEdgeN;
99 if ~isempty(bdEdgeN)
100    g_N = pde.Du;
101    z1 = node(bdEdgeN(:,1),:); z2 = node(bdEdgeN(:,2),:);
102    e = z1-z2; % e = z2-z1
103    Ne = [-e(:,2),e(:,1)]; % scaled ne
104    F1 = sum(Ne.*g_N(z1),2)./2;
105    F2 = sum(Ne.*g_N(z2),2)./2;
106    FN = [F1,F2];
107    ff = ff + accumarray(bdEdgeN(:,), FN(:,',[N 1]));
108 end
109
110 %% Apply Dirichlet boundary conditions
111 g_D = pde.g_D; bdNodeIdx = bdStruct.bdNodeIdx;
112 isBdNode = false(N,1); isBdNode(bdNodeIdx) = true;
113 bddof = find(isBdNode); freedof = find(~isBdNode);
114 pD = node(bddof,:);
115 u = zeros(N,1); uD = g_D(pD); u(bddof) = uD(:,');
116 ff = ff - kk*u;
117

```

```

118 %% Set solver
119 solver = 'amg';
120 if N < 2e3, solver = 'direct'; end
121 % solve
122 switch solver
123     case 'direct'
124         u(freedof) = kk(freedof, freedof)\ff(freedof);
125     case 'amg'
126         option.solver = 'CG';
127         u(freedof) = amg(kk(freedof, freedof), ff(freedof), option);
128 end
129
130 %% Store information for computing errors
131 info.Ph = Ph; info.elem2dof = elem2dof;
132 info.kk = kk; info.freeDof = freedof;

```

注 6.7 结构体 `info` 中存储了两个信息: `Ph` 和 `elem2dof`, 它们在计算 H^1 和 L^2 等误差中用到.

注 6.8 涉及到的其他函数文件见 GitHub. 上面的主程序也可直接改为其他区域的例子. 例如, 我们给出了单位圆的剖分数据 `PoissonmeshCircle.m`, 可规定上半圆部分为 Neumann 边界:

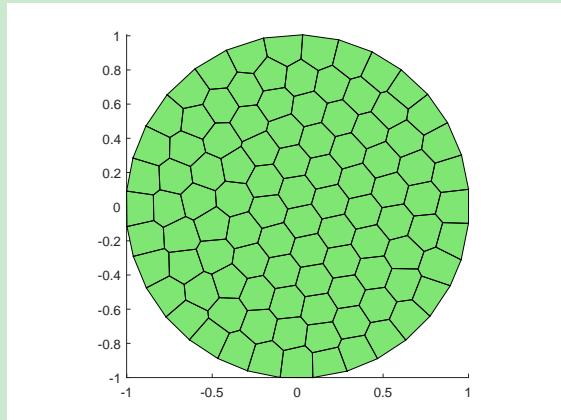
`bdNeumann = '(abs(x.^2+y.^2-1)<1e-1) & (y>0)';` %string for Neumann (circle)

或直接写为

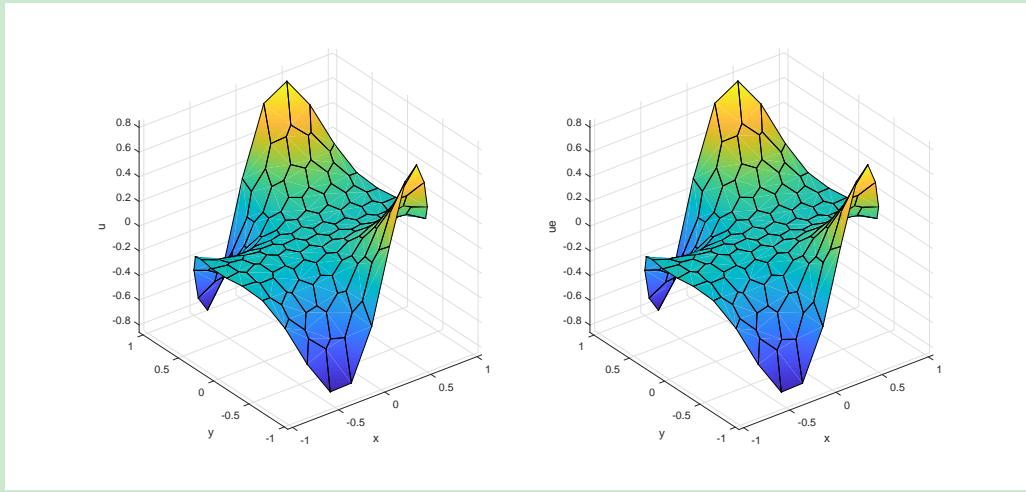
`bdNeumann = 'y>0';` %string for Neumann (circle)

这种写法更好, 因为对较粗的剖分, 边界上的部分离单位圆边界差很远, 而且我们的判断条件是针对剖分的边界 `bdEdge` 进行的.

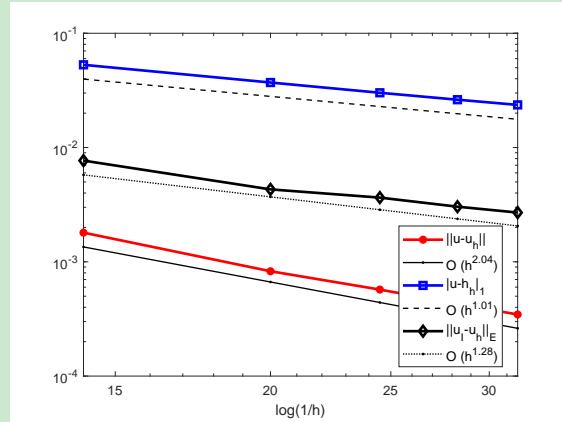
网格剖分如下



数值解与精确解为



各种误差阶的结果如下图.



可以看到, L^2 误差的阶为 2, H^1 误差的阶为 1, 能量误差的阶为 1.

6.5 Poisson 方程的二阶虚拟元方法

6.5.1 装配指标

对 $k = 2$, 边 e 内要增加一个函数值, 单元上要增加一个零阶矩量, 自由度如下图排列.

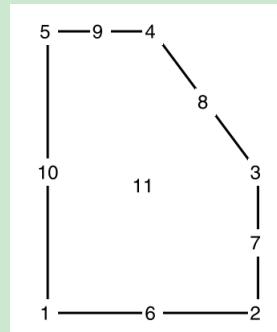


图 16. $k = 2$ 时 VEM 的自由度排列

在辅助数据结构中, 我们给出了与边相关的两个数据 `edge` 和 `elem2edge`:

- `elem2edge` 按单元记录边的自然序号, 且顺序与图 16 一致. 只需在这些序号上加上 N 即可.

- 单元 K 的自由度编号只要在 $(1:N)$ 上加上 $N+NE$ 即可, 其中 NE 是一维边的个数, 即 edge 的行数.

我们是按照同种构型装配的, 装配指标如下给出

```

1 load meshhex1.mat;
2
3 aux = auxstructure(node,elem);
4 elem2edge = aux.elem2edge; edge = aux.edge;
5
6 N = size(node,1); NT = size(elem,1); NE = size(edge,1);
7
8 elemLen = cellfun('length',elem); vertNum = unique(elemLen);
9 nnz = sum((2*elemLen+1).^2);
10 ii = zeros(nnz,1); jj = zeros(nnz,1); ss = zeros(nnz,1);
11
12 id = 0; ff = zeros(N,1);
13 for Nv = vertNum(:) % only valid for row vector
14
15     idNv = find(elemLen == Nv); % find polygons with Nv vertices
16     NTv = length(idNv); % number of elements with Nv vertices
17
18     elemNv = cell2mat(elem(idNv)); % elem
19     elem2edgeNv = cell2mat(elem2edge(idNv));
20     elem2 = [elemNv, elem2edgeNv+N, idNv+N+NE];
21     Ndof = 2*Nv+1;
22     ii(id+1:id+NTv*Ndof^2) = reshape(repmat(elem2, Ndof, 1), [], 1);
23     jj(id+1:id+NTv*Ndof^2) = repmat(elem2(:, 1), Ndof, 1);
24     ss(id+1:id+NTv*Ndof^2) = K(:, 1);
25     id = id + NTv*Ndof^2;
26 end

```

6.5.2 投影矩阵的计算

先考虑过渡矩阵. 对 $k=2$, 自由度为

$$\chi_i(v) = v(z_i), \quad i = 1, \dots, N_v,$$

$$\chi_{N_v+i}(v) = v(z_{i+1/2}), \quad i = 1, \dots, N_v,$$

$$\chi_{2N_v+1}(v) = \frac{1}{|K|} \int_K v dx,$$

其中, z_i 为单元顶点, $z_{i+1/2}$ 为边的中点. 尺度单项式集合 m^T 由如下元素组成:

$$m_1(x, y) = 1, \quad m_2(x, y) = \frac{x - x_K}{h_K}, \quad m_3(x, y) = \frac{y - y_K}{h_K},$$

$$m_4(x, y) = \frac{(x - x_K)^2}{h_K^2}, \quad m_5(x, y) = \frac{(x - x_K)(y - y_K)}{h_K^2}, \quad m_6(x, y) = \frac{(y - y_K)^2}{h_K^2}.$$

由此可计算

$$D = (D_{i\alpha})_{N_v \times 6}, \quad D_{i,\alpha} = \chi_i(m_\alpha).$$

类似前面的处理, 最后一个自由度的积分转化为三角剖分上的计算.

```

1 % transition matrix
2 nodeT = [node(index,:);centroid(iel,:)];
3 elemT = [(Nv+1)*ones(Nv,1),(1:Nv)',[2:Nv,1]';
4 D1 = zeros(Ndof,6);
5 D1(1:Nv,:) = m(x,y);
6 D1(Nv+1:2*Nv,:) = m(xe,ye);
7 D1(end,:) = 1/area(iel)*integralTri(m,3,nodeT,elemT);
8 D{iel} = D1;

```

接着计算 B . 由 (6.13),

$$B = \int_K \nabla m \cdot \nabla \phi^T dx = - \int_K \Delta m \cdot \phi^T dx + \sum_{e \subset \partial K} \int_e (\nabla m \cdot \mathbf{n}_e) \phi^T ds.$$

为了方便, 记

$$I_1 = \int_K \Delta m \cdot \phi^T dx, \quad I_2 = \sum_{e \subset \partial K} \int_e (\nabla m \cdot \mathbf{n}_e) \phi^T ds. \quad (6.21)$$

对第一项, 注意到 Δm 是常向量, 由 Kronecker 性质,

$$I_1 = \int_K \Delta m \cdot \phi^T dx = \Delta m \cdot \int_K \phi^T dx = \Delta m \cdot [\mathbf{0}, \mathbf{0}, |K|],$$

其中,

$$\Delta m = \left[0, 0, 0, \frac{2}{h_K^2}, 0, \frac{2}{h_K^2} \right]^T.$$

对第二项, 记 $\mathbf{f} = (\nabla m \cdot \mathbf{n}_e) \phi^T$, 显然它在每条边上都是三次多项式, 右端的积分可用 Simpson 公式精确计算, 于是

$$I_2 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{N_v} h_{e_i} [\mathbf{f}(z_i) + 4\mathbf{f}(z_{i+1/2}) + \mathbf{f}(z_{i+1})],$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(z_i) &= \partial_n m(z_i) [\mathbf{e}_i, \mathbf{0}, 0], \\ \mathbf{f}(z_{i+1/2}) &= \partial_n m(z_{i+1/2}) [\mathbf{0}, \mathbf{e}_i, 0], \\ \mathbf{f}(z_{i+1}) &= \partial_n m(z_{i+1}) [\mathbf{e}_{i+1}, \mathbf{0}, 0]. \end{aligned}$$

这里, \mathbf{e}_i 是长度为 N_v 的第 i 个自然向量, $\mathbf{0}$ 是长度为 N_v 的全零向量.

```

1 % ----- elliptic projection -----
2 % first term
3 Lapm = zeros(6,1); Lapm([4,6]) = 2/hK^2;
4 Dof = [zeros(1,2*Nv), area(iel)];
5 I1 = Lapm*Dof;
6 % second term
7 I2 = 0;
8 for j = 1:Nv % loop of edges
9     % he*\partial_n(m) at x_j, xe, x_j+1
10    DnL = Gradm(x(j),y(j))*Ne(j,:)';
11    Dne = Gradm(xe(j),ye(j))*Ne(j,:)';
12    DnR = Gradm(x(v2(j)),y(v2(j)))*Ne(j,:)';
13    % [ei,0,0]
14    e1 = zeros(1,Ndof); e1(j) = 1;
15    e2 = zeros(1,Ndof); e2(Nv+j) = 1;

```

```

16      e3 = zeros(1,Ndof); e3(v2(j)) = 1;
17      % f
18      f1 = DnL*e1; f2 = Dne*e2; f3 = DnR*e3;
19      I2 = I2 + (f1+4*f2+f3);
20  end
21  B1 = -I1 + 1/6*I2;

```

投影的限制条件由 (6.12) 给出, B_1 的第一行将用 $P_0(\phi^T)$ 代替, 其中

$$P_0(v) = \int_K v dx,$$

这在 I_1 的计算中已给出.

```

1  % constraint
2  B1s = B1; B1s(1,:) = Dof; Bs{iel} = B1s;
3  G{iel} = B1*D1; Gs{iel} = B1s*D1;

```

L^2 投影对应的矩阵 H 按照注 6.2 的说明进行计算.

```

1  m = {m1,m2,m3,m4,m5,m6};
2  H1 = zeros(6,6);
3  for i = 1:6
4      for j = 1:6
5          fun = @(x,y) m{i}(x,y).*m{j}(x,y);
6          H1(i,j) = integralTri(fun,2,nodeT,elemT);
7      end
8  end
9  H{iel} = H1;

```

注意对 $k = 2$, 在 $W_k(K)$ 中有 $\Pi_k^\nabla = \Pi_k^0$.

6.5.3 单元刚度矩阵和载荷向量的计算

与 $k = 1$ 类似, 程序如下

```

1  % ----- Elementwise stiffness matrix and load vector -----
2  ABelem = cell(NT,1); belem = cell(NT,1);
3  Ph = cell(NT,1); % matrix for error evaluation
4  for iel = 1:NT
5      % element information
6      index = elem{iel}; Nv = length(index);
7      xK = centroid(iel,1); yK = centroid(iel,2); hK = diameter(iel);
8      nodeT = [node(index,:);centroid(iel,:)];
9      elemT = [(Nv+1)*ones(Nv,1),(1:Nv)',[2:Nv,1]'];
10     % Projection
11     Pis = Gs{iel}\Bs{iel}; Pi = D{iel}*Pis; I = eye(size(Pi));
12     % Stiffness matrix
13     AK = Pis'*G{iel}*Pis + (I-Pi)'*(I-Pi);
14     BK = pde.c*Pis'*H{iel}*Pis + pde.c*hK^2*(I-Pi)'*(I-Pi); % Pis = Pi0s;
15     ABelem{iel} = reshape(AK'+BK',1,[]); % straighten as row vector for easy assembly
16     % Load vector
17     m1 = @(x,y) 1+0*x;
18     m2 = @(x,y) (x-xK)./hK;
19     m3 = @(x,y) (y-yK)./hK;
20     m4 = @(x,y) (x-xK).^2/hK^2;
21     m5 = @(x,y) (x-xK).*(y-yK)./hK^2;
22     m6 = @(x,y) (y-yK).^2./hK^2;

```

```

23     m = @(x,y) [m1(x,y), m2(x,y), m3(x,y), m4(x,y), m5(x,y), m6(x,y)];
24     fm = @(x,y) repmat(pde.f([x,y]),1,6).*m(x,y); % f(p) = f([x,y])
25     rhs = integralTri(fm,3,nodeT,elemT); rhs = rhs';
26     fK = Pis'*rhs;
27     belem{iel} = fK'; % straighten as row vector for easy assembly
28     % matrix for error evaluation
29     Ph{iel} = Pis;
30 end

```

6.5.4 刚度矩阵和载荷向量的装配

与 $k = 1$ 类似, 程序如下

```

1 % ----- Assemble the stiffness matrix and load vector -----
2 elemLen = cellfun('length',elem); vertNum = unique(elemLen);
3 nnz = sum((2*elemLen+1).^2);
4 ii = zeros(nnz,1); jj = zeros(nnz,1); ss = zeros(nnz,1);
5 id = 0; ff = zeros(NNdof,1);
6 IndexDof = cell(NT,1);
7 for Nv = vertNum(:)' % only valid for row vector
8
9     idNv = find(elemLen == Nv); % find polygons with Nv vertices
10    NTv = length(idNv); % number of elements with Nv vertices
11
12    elemNv = cell2mat(elem(idNv)); % elem
13    elem2edgeNv = cell2mat(elem2edge(idNv));
14    elem2 = [elemNv, elem2edgeNv+N, idNv+N+NE];
15    K = cell2mat(ABelem(idNv)); F = cell2mat(belem(idNv));
16    Ndof = 2*Nv+1;
17    ii(id+1:id+NTv*Ndof^2) = reshape(repmat(elem2, Ndof, 1), [], 1);
18    jj(id+1:id+NTv*Ndof^2) = repmat(elem2(:, Ndof, 1);
19    ss(id+1:id+NTv*Ndof^2) = K(:, );
20    id = id + NTv*Ndof^2;
21
22    % assemble the vector
23    ff = ff + accumarray(elem2(:, ),F(:, ),[NNdof 1]);
24
25    % elementwise global indices
26    IndexDof(idNv) = mat2cell(elem2, ones(NTv,1), Ndof);
27 end
28 kk = sparse(ii,jj,ss,NNdof,NNdof);

```

6.5.5 边界条件的处理

考虑 Neumann 边界条件. 设 e 是 Neumann 边, $u|_e$ 是二次多项式, 它可表为 $u = u_1\phi_1 + u_2\phi_2 + u_3\phi_3$. 这里, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 分别对应 e 的左右端点和中点. 载荷向量为

$$F_e = [F_1, F_2, F_3]^T, \quad F_i = \int_e \partial_n u \phi_i ds.$$

用 Simpson 公式近似, 有

$$F_1 = \frac{h_e}{6} (\partial_n u(z_1)\phi_1(z_1) + \partial_n u(z_2)\phi_1(z_2) + 4\partial_n u(z_3)\phi_1(z_3)) = \frac{h_e}{6}\partial_n u(z_1),$$

$$F_2 = \frac{h_e}{6} (\partial_n u(z_1)\phi_2(z_1) + \partial_n u(z_2)\phi_2(z_2) + 4\partial_n u(z_3)\phi_2(z_3)) = \frac{h_e}{6}\partial_n u(z_2),$$

$$F_3 = \frac{h_e}{6} (\partial_n u(z_1)\phi_3(z_1) + \partial_n u(z_2)\phi_3(z_2) + 4\partial_n u(z_3)\phi_3(z_3)) = \frac{4h_e}{6}\partial_n u(z_3).$$

类似一阶问题的处理, Neumann 条件如下装配.

```

1 %% Assemble Neumann boundary conditions
2 bdEdgeN = bdStruct.bdEdgeN; bdEdgeIdxN = bdStruct.bdEdgeIdxN;
3 if ~isempty(bdEdgeN)
4     g_N = pde.Du;
5     z1 = node(bdEdgeN(:,1),:); z2 = node(bdEdgeN(:,2),:); zc = (z1+z2)/2;
6     e = z1-z2; % e = z2-z1
7     Ne = [-e(:,2),e(:,1)]; % scaled ne
8     F1 = sum(Ne.*g_N(z1),2)/6;
9     F2 = sum(Ne.*g_N(z2),2)/6;
10    F3 = sum(Ne.*g_N(zc),2)*4/6;
11    FN = [F1,F2,F3];
12    bdEdgeN2 = [bdEdgeN, bdEdgeIdxN+N];
13    ff = ff + accumarray(bdEdgeN2(:,1), FN(:,1), [NNdof 1]);
14 end

```

这里, `bdEdgeN` 记录 Neumann 边的起点和中点序号, 即一维连通性信息, `bdEdgeIdx` 是 Neumann 边的自然序号.

Dirichlet 边界如下处理

```

1 %% Apply Dirichlet boundary conditions
2 % boundary information
3 g_D = pde.g_D;
4 bdNodeIdx = bdStruct.bdNodeIdx;
5 bdEdgeD = bdStruct.bdEdgeD;
6 bdEdgeIdxD = bdStruct.bdEdgeIdxD;
7 id = [bdNodeIdx; bdEdgeIdxD+N];
8 isBdNode = false(NNdof,1); isBdNode(id) = true;
9 bdDof = (isBdNode); freeDof = (~isBdNode);
10 % vertices on the boundary
11 pD = node(bdNodeIdx,:); uD = g_D(pD);
12 % mid-edge on the boundary
13 z1 = node(bdEdgeD(:,1),:); z2 = node(bdEdgeD(:,2),:); zc = (z1+z2)./2;
14 uDc = g_D(zc);
15 % rhs
16 u = zeros(NNdof,1); u(bdDof) = [uD; uDc];
17 ff = ff - kk*u;

```

这里, `bdEdgeD` 是 Dirichlet 边的连通性信息, `bdEdgeIdxD` 是 Dirichlet 边的自然序号.

6.5.6 误差分析

与一阶虚拟元类似, 主程序如下

```

1 clc; close all;
2 clear variables;
3
4 %% Parameters
5 nameV = [100, 200, 300, 400, 500];
6 maxIt = length(nameV);
7 h = zeros(maxIt,1); N = zeros(maxIt,1);
8 ErrL2 = zeros(maxIt,1);

```

```

9 ErrH1 = zeros(maxIt,1);
10 ErrI = zeros(maxIt,1);
11
12 %% PDE data
13 c = 1e3;
14 pde = PoissonData1(c);
15 %bdNeumann = 'abs(x-0)<1e-4 | abs(x-1)<1e-4'; % string for Neumann
16 bdNeumann = [];
17
18 %% Virtual element method
19 for k = 1:maxIt
20     % load mesh
21     load( ['meshdata', num2str(nameV(k)), '.mat'] );
22     % get boundary information
23     bdStruct = setboundary(node, elem, bdNeumann);
24     % solve
25     [u,info] = PoissonVEMk2(node, elem, pde, bdStruct);
26     % record and plot
27     N(k) = length(u); h(k) = 1/sqrt(size(elem,1));
28     if size(elem,1)<2e3
29         figure(1); clf;
30         subplot(1,2,1), showmesh(node, elem);
31         subplot(1,2,2), showsolution(node, elem, u(1:size(node,1)));
32     end
33     % compute errors in discrete L2 and H1 norms
34     index = info.elem2dof; % elemwise global index
35     chi = cellfun(@(id) u(id), index, 'UniformOutput', false); % elementwise ...
            numerical d.o.f.s
36     kOrder = 2;
37     Ph = info.Ph;
38     ErrL2(k) = getL2error(node, elem, Ph, chi, pde, kOrder);
39     ErrH1(k) = getH1error(node, elem, Ph, chi, pde, kOrder);
40     % compute errors in discrete energy norm
41     % auxgeometry
42     aux = auxgeometry(node, elem);
43     % auxstructure
44     auxT = auxstructure(node, elem);
45     edge = auxT.edge;
46     % chi1: evaluation at all vertices
47     uexact = pde.uexact;
48     chi1 = uexact(node);
49     % chi2: evaluation at all mid-edge points
50     z1 = node(edge(:,1,:)); z2 = node(edge(:,2,:)); zc = (z1+z2)/2;
51     chi2 = uexact(zc);
52     % chi3: moments on element K
53     NT = size(elem,1);
54     chi3 = zeros(NT,1);
55     fun = @(x,y) uexact([x,y]);
56     for iel = 1:NT
57         index = elem{iel}; Nv = length(index); Ndof = 2*Nv+1;
58         nodeT = [node(index,:); aux.centroid(iel,:)];
59         elemT = [(Nv+1)*ones(Nv,1), (1:Nv)', [2:Nv, 1]'];
60         chi3(iel) = 1/aux.area(iel)*integralTri(fun, 3, nodeT, elemT);
61     end
62     % errors in energy norm
63     kk = info.kk; freeDof = info.freeDof;
64     kk = kk(freeDof, freeDof);
65     chie = [chi1; chi2; chi3]; chi = u;

```

```

66     chie = chie(freeDof); chi = chi(freeDof);
67     ErrI(k) = sqrt(abs((chi-chie)'*kk*(chi-chie))/abs(chie'*kk*chie));
68 end
69
70 %% Plot convergence rates and display error table
71 figure(2);
72 showrateh(h,ErrL2,ErrH1,ErrI);
73
74 fprintf('\n');
75 disp('Table: Error')
76 colname = {'#Dof','h','||u-u_h||','|u-u_h|_1','||u_I-u_h||_E'};
77 disptable(colname,N,[],h,'%0.3e',ErrL2,'%0.5e',ErrH1,'%0.5e',ErrI,'%0.5e');

```

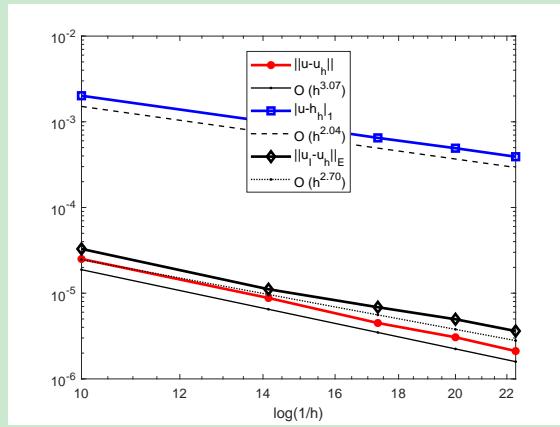


图 17. Poisson 方程二阶虚拟元方法的误差阶

可以看到, L^2 的误差阶为 3, H^1 的误差阶为 2, 而能量误差的误差阶基本上也为 3.

6.6 Poisson 方程的三阶虚拟元方法

6.6.1 椭圆投影的计算

对 $k = 3$, 边 e 内要增加 2 个函数值, 单元上要增加零阶和一阶矩量. 自由度排列如下:

- 顶点处的函数值,

$$\chi_i(v) = v(z_i), \quad i = 1, \dots, N_v;$$

- 边上第一个内部点的函数值,

$$\chi_{N_v+i}(v) = v(a_i), \quad i = 1, \dots, N_v;$$

- 边上第二个内部点的函数值,

$$\chi_{2N_v+i}(v) = v(b_i), \quad i = 1, \dots, N_v;$$

- 单元 K 上的零阶和一阶矩量,

$$\chi_{3N_v+1}(v) = \frac{1}{|K|} \int_K m_1 v dx, \quad m_1 = 1,$$

$$\begin{aligned}\chi_{3N_v+2}(v) &= \frac{1}{|K|} \int_K m_2 v dx, & m_2 &= \frac{x - x_K}{h_K}, \\ \chi_{3N_v+3}(v) &= \frac{1}{|K|} \int_K m_3 v dx, & m_3 &= \frac{y - y_K}{h_K}.\end{aligned}$$

- 这样, 局部有 $3N_v + 3$ 个自由度.

为了精确计算边界积分, 边 e_i 上的四个点 z_i, a_i, b_i, z_{i+1} 要形成 Gauss-Lobatto 点. 查找相关资料知, 对 $[-1, 1]$, 四个点的求积公式如下

$$\int_{-1}^1 f(r) dr \approx w_1 f(r_1) + w_2 f(r_2) + w_3 f(r_3) + w_4 f(r_4),$$

其中,

```
1 r = [-1, -1/sqrt(5), 1/sqrt(5), 1];
2 w = [1/6, 5/6, 5/6, 1/6];
```

变换到指定区间 $[a, b]$ 上后, 内部的两个点如下计算

$$s(r) = \frac{b-a}{2}r + \frac{b+a}{2}, \quad r \in [-1, 1],$$

从而 $ds = (b-a)/2dr$. 节点 a_i, b_i 可根据线段的比例获得.

```
1 r = 0.5*(r(2:3)+1); % [0,1]: gives the ratios of interior nodes
2 index = elem{iel};
3 x = node(index,1); y = node(index,2); z = [x,y];
4 % Gauss-Lobatto
5 za = z(v1,:)+r(1)*(z(v2,:)-z(v1,:));
6 zb = z(v1,:)+r(2)*(z(v2,:)-z(v1,:));
```

设新的积分点为 s_1, s_2, s_3, s_4 , 则

$$\int_e f(s) ds = \frac{h_e}{2} (w_1 f(s_1) + w_2 f(s_2) + w_3 f(s_3) + w_4 f(s_4)). \quad (6.22)$$

先计算过渡矩阵 D . 尺度单项式集合 m 的元素共 10 个, 分别为

$$\begin{aligned}m_1 &= 1, & m_2 &= \frac{x - x_K}{h_K}, & m_3 &= \frac{y - y_K}{h_K}, \\ m_4 &= \frac{(x - x_K)^2}{h_K^2}, & m_5 &= \frac{(x - x_K)(y - y_K)}{h_K^2}, & m_6 &= \frac{(y - y_K)^2}{h_K^2}, \\ m_7 &= \frac{(x - x_K)^3}{h_K^3}, & m_8 &= \frac{(x - x_K)^2(y - y_K)}{h_K^3}, & m_9 &= \frac{(x - x_K)(y - y_K)^2}{h_K^3}, & m_{10} &= \frac{(y - y_K)^3}{h_K^3}.\end{aligned}$$

由此可计算

$$D = (D_{i\alpha})_{N_{dof} \times 10}, \quad D_{i,\alpha} = \chi_i(m_\alpha).$$

```
1 % ----- transition matrix -----
2 nodeT = [node(index,:); centroid(iel,:)];
3 elemT = [(Nv+1)*ones(Nv,1),(1:Nv)',[2:Nv,1]'];
```

```

4 D1 = zeros(Ndof,10);
5 D1(1:Nv,:) = m(x,y); % at zi
6 D1(Nv+1:2*Nv,:) = m(za(:,1), za(:,2)); % at ai
7 D1(2*Nv+1:3*Nv,:) = m(zb(:,1), zb(:,2)); % at bi
8 m1v = @ (x,y) repmat(m1(x,y),1,10).*m(x,y); % moment 1
9 m2v = @ (x,y) repmat(m2(x,y),1,10).*m(x,y); % moment 2
10 m3v = @ (x,y) repmat(m3(x,y),1,10).*m(x,y); % moment 3
11 D1(3*Nv+1,:) = 1/area(iel)*integralTri(m1v,4,nodeT,elemT);
12 D1(3*Nv+2,:) = 1/area(iel)*integralTri(m2v,4,nodeT,elemT);
13 D1(3*Nv+3,:) = 1/area(iel)*integralTri(m3v,4,nodeT,elemT);
14 D{iel} = D1;

```

矩量部分的计算也可循环处理 (后面 L^2 投影的计算需要所有 m_j 对应的矩量)

```

1 for j = 1:3
2     mjv = @ (x,y) repmat(mm{j}(x,y),1,10).*m(x,y); % moment j on K
3     D1(3*Nv+j,:) = 1/area(iel)*integralTri(mjv,4,nodeT,elemT);
4 end

```

接着计算 B . 由 (6.13),

$$B = \int_K \nabla m \cdot \nabla \phi^T dx = - \int_K \Delta m \cdot \phi^T dx + \sum_{e \subset \partial K} \int_e (\nabla m \cdot \mathbf{n}_e) \phi^T ds.$$

为了方便, 记

$$I_1 = \int_K \Delta m \cdot \phi^T dx, \quad I_2 = \sum_{e \subset \partial K} \int_e (\nabla m \cdot \mathbf{n}_e) \phi^T ds.$$

对第一项, 直接计算有

$$\Delta m = \left[0, 0, 0, \frac{2}{h_K^2}, 0, \frac{2}{h_K^2}, \frac{6(x - x_K)}{h_K^3}, \frac{2(y - y_K)}{h_K^3}, \frac{2(x - x_K)}{h_K^3}, \frac{6(y - y_K)}{h_K^3} \right]^T,$$

于是由 Kronecker 性质,

$$I_1(i, :) = \int_K \Delta m_i \cdot \phi^T dx = \mathbf{0}_{N_{\text{dof}}}, \quad i = 1, 2, 3, 5,$$

$$I_1(i, :) = \frac{2}{h_K^2} \int_K \phi^T dx = \frac{2}{h_K^2} |K| [\mathbf{0}_{N_v}, \mathbf{0}_{N_v}, \mathbf{0}_{N_v}, 1, 0, 0], \quad i = 4, 6,$$

$$I_1(7, :) = \frac{6}{h_K^2} \int_K m_2 \phi^T dx = \frac{6}{h_K^2} |K| [\mathbf{0}_{N_v}, \mathbf{0}_{N_v}, \mathbf{0}_{N_v}, 0, 1, 0],$$

$$I_1(8, :) = \frac{2}{h_K^2} \int_K m_3 \phi^T dx = \frac{2}{h_K^2} |K| [\mathbf{0}_{N_v}, \mathbf{0}_{N_v}, \mathbf{0}_{N_v}, 0, 0, 1],$$

$$I_1(9, :) = \frac{2}{h_K^2} \int_K m_2 \phi^T dx = \frac{2}{h_K^2} |K| [\mathbf{0}_{N_v}, \mathbf{0}_{N_v}, \mathbf{0}_{N_v}, 0, 1, 0],$$

$$I_1(10, :) = \frac{6}{h_K^2} \int_K m_3 \phi^T dx = \frac{6}{h_K^2} |K| [\mathbf{0}_{N_v}, \mathbf{0}_{N_v}, \mathbf{0}_{N_v}, 0, 0, 1].$$

```

1 % first term
2 I1 = zeros(10,Ndof);
3 I1([4,6],3*Nv+1) = 2*area(iel)/hK^2;

```

```

4     I1(7,3*Nv+2) = 6*area(iel)/hK^2;
5     I1(8,3*Nv+3) = 2*area(iel)/hK^2;
6     I1(9,3*Nv+2) = 2*area(iel)/hK^2;
7     I1(10,3*Nv+3) = 6*area(iel)/hK^2;

```

对第二项, 记 $\mathbf{f} = (\nabla m \cdot \mathbf{n}_e)\phi^T$, 边界积分用 Gauss-Lobatto 公式 (6.22) 精确计算, 我们有

$$I_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_v} h_{e_i} [w_1 \mathbf{f}(z_i) + w_2 \mathbf{f}(a_i) + w_3 \mathbf{f}(b_i) + w_4 \mathbf{f}(z_{i+1})],$$

其中,

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(z_i) &= \partial_n m(z_i)[\mathbf{e}_i, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 0, 0, 0], \\ \mathbf{f}(a_i) &= \partial_n m(a_i)[\mathbf{0}, \mathbf{e}_i, \mathbf{0}, 0, 0, 0], \\ \mathbf{f}(b_i) &= \partial_n m(b_i)[\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{e}_i, 0, 0, 0], \\ \mathbf{f}(z_{i+1}) &= \partial_n m(z_{i+1})[\mathbf{e}_{i+1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 0, 0, 0],\end{aligned}$$

这里, \mathbf{e}_i 是长度为 N_v 的第 i 个自然向量, $\mathbf{0}$ 是长度为 N_v 的全零向量.

```

1 % second term
2 I2 = 0;
3 for j = 1:Nv % loop of edges
4     % he*\partial_n(m) at zj, aj, bj, zj+1
5     Dn1 = Gradm(x(j),y(j))*Ne(j,:)';
6     Dn2 = Gradm(za(j,1),za(j,2))*Ne(j,:)';
7     Dn3 = Gradm(zb(j,1),zb(j,2))*Ne(j,:)';
8     Dn4 = Gradm(x(v2(j)),y(v2(j)))*Ne(j,:)';
9     % [ei,0,0]
10    e1 = zeros(1,Ndof); e1(j) = 1;
11    e2 = zeros(1,Ndof); e2(Nv+j) = 1;
12    e3 = zeros(1,Ndof); e3(2*Nv+j) = 1;
13    e4 = zeros(1,Ndof); e4(v2(j)) = 1;
14    % f
15    f1 = Dn1*e1; f2 = Dn2*e2; f3 = Dn3*e3; f4 = Dn4*e4;
16    I2 = I2 + (w(1)*f1+w(2)*f2+w(3)*f3+w(4)*f4);
17 end
18 B1 = -I1 + 1/2*I2;

```

投影的限制条件由 (6.12) 给出, $B1$ 的第一行将用 $P_0(\phi^T)$ 代替, 其中

$$P_0(v) = \int_K v dx.$$

```

1 % constraint
2 B1s = B1; B1s(1,3*Nv+1) = area(iel); Bs{iel} = B1s;
3 G{iel} = B1*D1; Gs{iel} = B1s*D1;

```

6.6.2 L^2 投影的计算

考虑提升空间

$$\tilde{V}_k(K) := V_{k,k}(K) = \{v \in H^1(K) : v|_{\partial K} \in \mathbb{B}_k(\partial K), \Delta v \in \mathbb{P}_k(K)\},$$

相比 $V_k(K)$, 它的自由度多出 K 上的 $k-1, k$ 阶矩量. 对 $v \in \tilde{V}_k(K)$, 因边界多项式次数未提高, 我们仍然只能如 $V_k(K)$ 中那样定义椭圆投影 $\Pi_k^\nabla v$, 即

$$\Pi_k^\nabla : \tilde{V}_k(K) \rightarrow \mathbb{P}_k(K), \quad v \mapsto \Pi_k^\nabla v$$

满足

$$(\nabla \Pi_k^\nabla v, \nabla p)_K = (\nabla v, \nabla p)_K, \quad p \in \mathbb{P}_k(K).$$

显然, $\Pi_k^\nabla v$ 的计算用不到 K 上 v 的 $k-1, k$ 阶矩量. 正因为如此, 我们可用 $\Pi_k^\nabla v$ 的 $k-1, k$ 阶矩量近似 v 的相应矩量, 从而降低自由度. 由此引入 enhancement 空间

$$W_k(K) = \left\{ w_h \in \tilde{V}_k(K) : (w_h - \Pi_k^\nabla w_h, q)_K = 0, \quad q \in \mathbb{M}_k \setminus \mathbb{M}_{k-2} \right\}.$$

在该空间中, 显然有

$$(\Pi_k^0 w_h, q)_K = (\Pi_k^\nabla w_h, q)_K, \quad q \in \mathbb{M}_k \setminus \mathbb{M}_{k-2}.$$

现在我们说明 $\tilde{V}_k(K)$ 中椭圆投影的计算, 这里 $k = 3$.

- $\tilde{V}_k(K)$ 中多出 2, 3 阶矩量自由度, 接着前面的自由度排列为 (多出的自由度个数 $n = 7$)

$$\chi_{3N_v+j}(v) = \frac{1}{|K|} \int_K m_j v dx, \quad j = 4, 5, \dots, 10,$$

此时自由度共 $3N_v + 10$ 个 (为了方便, 这些自由度重新编号为 $d_i(v), i = 1, \dots, n$). 过渡矩阵的前 $3N_v + 3$ 行与 D 相同, 后面的如下循环计算

```

1      DD = zeros(3*Nv+10, 10);
2      DD(1:Ndof,:) = D1;
3      for j = 4:10
4          mjv = @(x,y) repmat(mm{j}(x,y), 1, 10).*m(x,y); % moment j on K
5          DD(3*Nv+j,:) = 1/area(iel)*integralTri(mjv, 6, nodeT, elemT);
6      end

```

- 对矩阵

$$B = \int_K \nabla m \cdot \nabla \phi^T dx,$$

它比原来的多出 n 列, 对应 $k-1, k$ 阶矩量. 由于分部积分后, 右端的计算不涉及到这些矩量, 因此多出的 n 列全为零, 其他列不变. 限制条件也是如此. 这表明, 此时的 \tilde{B} 只比原来的多出 n 列零向量.

```

1      BBs = zeros(10, 3*Nv+10);
2      BBs(:, 1:Ndof) = B1s;

```

有了过渡矩阵和 \tilde{B} , 就可计算出 $\tilde{V}_k(K)$ 中的投影矩阵 Π_k^∇ .

```

1      GGs = BBs*DD;
2      PPis = GGs\BBs;    PPi = DD*PPis;

```

- 注意到 Π_k^∇ 的第 j 列就是第 j 个基函数的投影的自由度向量 $\chi(\Pi_k^\nabla \phi_j)$, 我们有 Π_k^∇ 的最后 n 行为

$$d_i(\Pi_k^\nabla \phi^T), \quad i = 1, \dots, n.$$

注意这里的 ϕ^T 是 $\tilde{V}_k(K)$ 的基函数, 去掉最后 n 个即为 $W_k(K)$ 中的 (虽然基函数可能不同, 但相同自由度值相同, 而椭圆投影由自由度唯一决定).

```
1      Dof = PPi(Ndof+1:3*Nv+10, 1:Ndof);
```

L^2 投影定义为

$$\begin{cases} \Pi_k^0 : V_k(K) \rightarrow \mathbb{P}_k(K), & v \mapsto \Pi_k^0 v, \\ (\Pi_k^0 v, q)_K = (v, q)_K, \end{cases}$$

这等价于

$$(\Pi_k^0 \phi_i, m_\alpha)_K = (\phi_i, m_\alpha)_K, \quad i = 1, \dots, N_k, \quad \alpha = 1, \dots, N_p$$

或

$$\int_K m \Pi_k^0 \phi^T dx = \int_K m \phi^T dx.$$

设 Π_k^0 在基 ϕ^T 下的矩阵为 $\mathbf{\Pi}_k^0$, 即

$$\Pi_k^0 \phi^T = \phi^T \mathbf{\Pi}_k^0,$$

而 $\Pi_k^0 \phi^T$ 在多项式基 m^T 下的矩阵为 $\mathbf{\Pi}_{k*}^0$, 即

$$\Pi_k^0 \phi^T = m^T \mathbf{\Pi}_{k*}^0. \quad (6.23)$$

由 (6.9) 知,

$$\mathbf{\Pi}_k^0 = D \mathbf{\Pi}_{k*}^0.$$

把这些关系代入 (6.17), 我们有 L^2 投影的矩阵表示

$$H \mathbf{\Pi}_{k*}^0 = C, \quad (6.24)$$

式中,

$$H = \int_K m m^T dx, \quad C = \int_K m \phi^T dx.$$

H 是可逆的 (Gram 矩阵), 但 C 不可计算, 因为它涉及到 K 上 $k-1, k$ 阶的矩量. 根据前面的说明, 我们将在 enhancement 空间 $W_k(K)$ 中考虑, 前面的 $V_k(K)$ 都换为 $W_k(K)$, 相应的基函数对应 $W_k(K)$. C 中多出的矩量 $d_i(\phi^T)$ 用 $d_i(\Pi_k^\nabla \phi^T)$ 代替. 显然 C 的结构如下 (基函数个数与 $V_k(K)$ 的相同, 共 $3N_v + 3$ 个):

- 前 3 行为

$$C = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & |K| & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & |K| & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & |K| \end{bmatrix}$$

- 后面若干行为 `area(iel)*Dof`.

```
1 % --- matrices of L2 projection ---
2 H = zeros(Nm,Nm);
3 for i = 1:Nm
4     for j = 1:Nm
```

```

5         fun = @(x,y) mm{i}(x,y).*mm{j}(x,y);
6         H(i,j) = integralTri(fun,4,nodeT,elemT);
7     end
8 end
9 C1 = zeros(Nm,Ndof);
10 C1(1,3*Nv+1) = area(iel);
11 C1(2,3*Nv+2) = area(iel);
12 C1(3,3*Nv+3) = area(iel);
13 C1(4:end,:) = area(iel)*Dof;
14 C{iel} = C1;

```

6.6.3 单元刚度矩阵和载荷向量的计算

根据 $k = 1$ 的说明, 单元刚度矩阵如下计算

```

1 % Projection
2 Pis = Gs{iel}\Bs{iel}; Pi = D{iel}*Pis; I = eye(size(Pi)); % elliptic
3 Pi0s = H{iel}\C{iel}; Pi0 = D{iel}*Pi0s; % L2
4 % Stiffness matrix
5 AK = Pis'*G{iel}*Pis + (I-Pi)'*(I-Pi);
6 BK = pde.c*Pis'*H{iel}*Pis + pde.c*hK^2*(I-Pi0)'*(I-Pi0);
7 ABelem{iel} = reshape(AK+BK',1,[]); % straighten as row vector for easy assembly

```

载荷向量可按照式 (6.20) 计算, 不过, 对 $k \geq 3$, 也可如下计算获得最优误差阶

$$\ell_h^K(v) = \int_K f \Pi_{k-2}^0 v dx.$$

单元载荷向量为

$$F_K = \int_K f \Pi_{k-2}^0 \phi dx = (\Pi_{k-2,*}^0)^T \int_K f m^{k-2} dx,$$

式中, m^{k-2} 为直到 $k - 2$ 阶的尺度单项式向量. 投影矩阵 $\Pi_{k-2,*}^0$ 按照 (6.24) 类似计算. 易知,

```

1 % L2 projection for rhs
2 Hf{iel} = H1(1:3,1:3);
3 Cf{iel} = C1(1:3,:);

```

这样, 右端如下计算

```

1 % Load vector (L2 projection Pi_{k-2})
2 m = @(x,y) [m1(x,y), m2(x,y), m3(x,y)];
3 fm = @(x,y) repmat(pde.f([x,y]),1,3).*m(x,y); % f(p) = f([x,y])
4 rhs = integralTri(fm,4,nodeT,elemT); rhs = rhs';
5 Pifs = Hf{iel}\Cf{iel};
6 fk = Pifs'*rhs;
7 belem{iel} = fk'; % straighten as row vector for easy assembly

```

6.6.4 刚度矩阵和载荷向量的装配

装配过程类似前面处理, 只需要给定局部整体对应即可, 记为 elem2 . 对 N_v 个顶点的单元构型, 它有 $3*N_v+3$ 列, 对应自由度的整体编号. 顶点和单元矩量的编号比较容易, 现在考虑边上的两个内部点的编号.

我们仍然要使用 elem2edge , 它按单元记录边的自然序号.

- 对内部边 e_i , 其中 i 是其自然序号, 我们要规定一个方向, 从而将两个内部点按该方向排列.
 - 我们规定内部边的定向为: 从较小序号指向较大序号. 对第 iel 个单元, 执行下面语句即可获得所有边的定向.
-

```

1     index = elem{iel};
2     sgnL = sign(index(v2)-index(v1));

```

sgnL 的值显然为 $+1$ 或 -1 . 对 $+1$ 的边, 内部点要从较小顶点序号到较大顶点序号方向进行编号. 对 -1 的边, 编号方向相反.

- 假设 e_i 是正向边, 第一个点接着顶点编号为 $i+N$, 第二个点接着所有顶点和第一个点编号为 $i+N+NE$. 可如下实现
-

```

1     elem2edgeNv = elem2edge{iel};
2     elemNva = elem2edgeNv + N*sgnL + (N+NE)*(-sgnL);
3     elemNvb = elem2edgeNv + (N+NE)*sgnL + N*(-sgnL);

```

- 为了方便处理边界条件, 我们规定边界边的定向为逆时针方向, 如下修改 sgnL .
-

```

1     bdIndex = bdStruct.bdIndex; E = false(NE,1); E(bdIndex) = 1;
2     sgnL = sign(index(v2)-index(v1));
3     id = elem2edge{iel}; sgnbd = E(id); sgnL(sgnbd) = 1;
4     sgnL(sgnL== -1) = 0;
5     sgnelem{iel} = sgnL;

```

这里按单元存储所有边的符号, 记为 sgnelem .

根据上面的讨论, 最终的装配程序如下

```

1 %% Assemble stiffness matrix and load vector
2 elemLen = cellfun('length',elem); vertNum = unique(elemLen);
3 nnz = sum((3*elemLen+3).^2);
4 ii = zeros(nnz,1); jj = zeros(nnz,1); ss = zeros(nnz,1);
5 id = 0; ff = zeros(NNdof,1);
6 elem2dof = cell(NT,1);
7 for Nv = vertNum(:) % only valid for row vector
8
9     idNv = find(elemLen == Nv); % find polygons with Nv vertices
10    NTv = length(idNv); % number of elements with Nv vertices
11
12    elemNv = cell2mat(elem(idNv)); % elem
13    elem2edgeNv = cell2mat(elem2edge(idNv));
14    sgnelemNv = cell2mat(sgnelem(idNv));
15    elemNva = elem2edgeNv+N*sgnelemNv+(N+NE)*(-sgnelemNv);
16    elemNvb = elem2edgeNv+(N+NE)*sgnelemNv +N*(-sgnelemNv);
17    elem2 = [elemNv, elemNva, elemNvb, ...
18              idNv+N+2*NE, idNv+N+2*NE+NT, idNv+N+2*NE+2*NT];
19    K = cell2mat(ABelem(idNv)); F = cell2mat(belem(idNv));
20    Ndof = 3*Nv+3;
21    ii(id+1:id+NTv*Ndof^2) = reshape(repmat(elem2, Ndof,1), [], 1);
22    jj(id+1:id+NTv*Ndof^2) = repmat(elem2(:, Ndof, 1);
23    ss(id+1:id+NTv*Ndof^2) = K(:, );
24    id = id + NTv*Ndof^2;
25
26    % assemble the vector
27    ff = ff + accumarray(elem2(:,F(:, ),[NNdof 1]);

```

```

28
29     % elementwise global indices
30     elem2dof(idNv) = mat2cell(elem2, ones(NTv,1), Ndof);
31 end
32 kk = sparse(ii,jj,ss,NNdof,NNdof);

```

6.6.5 边界条件的处理

先考虑 Neumann 边界条件. 前面已经规定边界边的定向为逆时针, 则第一个内部点靠近起点. 对给定边 e , 设 4 个点分别为 z_1, \dots, z_4 , 相应的基函数为 ϕ_1, \dots, ϕ_4 , 则载荷向量为

$$F_e = [F_1, \dots, F_4]^T, \quad F_i = \int_e \partial_n u \phi_i ds.$$

用 Gauss-Lobatto 积分近似, 有

$$F_j = \frac{h_e}{2} \sum_{i=1}^4 w_i \partial_n u(z_i) \phi_j(z_i) = \frac{h_e}{2} w_j \partial_n u(z_j), \quad j = 1, \dots, 4.$$

Neumann 条件如下装配.

```

1 %% Assemble Neumann boundary conditions
2 bdEdgeN = bdStruct.bdEdgeN; bdEdgeIdxN = bdStruct.bdEdgeIdxN;
3 if ~isempty(bdEdgeN)
4     g_N = pde.Du;
5     z1 = node(bdEdgeN(:,1),:); z2 = node(bdEdgeN(:,2),:);
6     za = z1+r(1)*(z2-z1); zb = z1+r(2)*(z2-z1); % Gauss-Lobatto
7     e = z1-z2; % e = z2-z1
8     Ne = [-e(:,2), e(:,1)]; % scaled ne
9     F1 = w(1)*sum(Ne.*g_N(z1),2)/2;
10    F2 = w(4)*sum(Ne.*g_N(z2),2)/2;
11    Fa = w(2)*sum(Ne.*g_N(za),2)/2;
12    Fb = w(3)*sum(Ne.*g_N(zb),2)/2;
13    FN = [F1,F2,Fa,Fb];
14    bdEdgeN2 = [bdEdgeN, bdEdgeIdxN+N, bdEdgeIdxN+N+NE];
15    ff = ff + accumarray(bdEdgeN2(:), FN(:),[NNdof 1]);
16 end

```

Dirichlet 边界条件如下处理.

```

1 %% Apply Dirichlet boundary conditions
2 % boundary information
3 g_D = pde.g_D;
4 bdNodeIdx = bdStruct.bdNodeIdx; bdEdgeD = bdStruct.bdEdgeD;
5 bdEdgeIdxD = bdStruct.bdEdgeIdxD;
6 bdEdgeIdxa = bdEdgeIdxD + N;
7 bdEdgeIdxb = bdEdgeIdxD + N+NE;
8 id = [bdNodeIdx; bdEdgeIdxa; bdEdgeIdxb];
9 isBdNode = false(NNdof,1); isBdNode(id) = true;
10 bdDof = (isBdNode); freeDof = (~isBdNode);
11 % vertices on the boundary
12 pD = node(bdNodeIdx,:); uD = g_D(pD);
13 % ai, bi on the boundary
14 z1 = node(bdEdgeD(:,1),:); z2 = node(bdEdgeD(:,2),:);
15 za = z1+r(1)*(z2-z1); zb = z1+r(2)*(z2-z1); % Gauss-Lobatto
16 uDa = g_D(za); uDb = g_D(zb);

```

```

17 % rhs
18 u = zeros(NNdof,1); u(bdDof) = [uD; uDa; uDb];
19 ff = ff - kk*u;

```

6.6.6 误差分析

为了方便, 我们把函数文件中的 elem2 逐个单元存起来, 并输出.

```

1 elem2dof = cell(NT,1);
2 elem2dof(idNv) = mat2cell(elem2, ones(NTv,1), Ndof);
3 info.Ph = Ph; info.elem2dof = elem2dof;

```

H^1 和 L^2 误差如下计算.

```

1 clc; close all;
2 clear variables;
3
4 %% Parameters
5 nameV = [100, 200, 300, 400, 500];
6 maxIt = length(nameV);
7 h = zeros(maxIt,1); N = zeros(maxIt,1);
8 ErrL2 = zeros(maxIt,1);
9 ErrH1 = zeros(maxIt,1);
10
11 %% PDE data
12 c = 1;
13 pde = Poissondata1(c);
14 bdNeumann = 'abs(x-0)<1e-4 | abs(x-1)<1e-4'; % string for Neumann
15
16 %% Virtual element method
17 for k = 1:maxIt
18     % load mesh
19     load( ['meshdata', num2str(nameV(k)), '.mat']);
20     % get boundary information
21     bdStruct = setboundary(node, elem, bdNeumann);
22     % solve
23     [u,info] = PoissonVEMk3(node, elem, pde, bdStruct);
24     % record and plot
25     N(k) = length(u); h(k) = 1/sqrt(size(elem,1));
26     if size(elem,1)<2e3
27         figure(1); clf;
28         subplot(1,2,1), showmesh(node, elem);
29         subplot(1,2,2), showsolution(node, elem, u(1:size(node,1)));
30     end
31     % compute errors in discrete L2 and H1 norms
32     index = info.elem2dof; % elementwise global index
33     chi = cellfun(@(id) u(id), index, 'UniformOutput', false); % elementwise ...
            numerical d.o.f.s
34     kOrder = 3;
35     Ph = info.Ph;
36     ErrL2(k) = getL2error(node, elem, Ph, chi, pde, kOrder);
37     ErrH1(k) = getH1error(node, elem, Ph, chi, pde, kOrder);
38 end
39
40 %% Plot convergence rates and display error table
41 figure(2);
42 showrateh(h, ErrL2, ErrH1);
43

```

```

44 fprintf ('\n');
45 disp('Table: Error')
46 colname = {'#Dof','h','||u-u_h||','|u-u_h|_1'};
47 disptable(colname,N,[],h,'%0.3e',ErrL2,'%0.5e',ErrH1,'%0.5e');

```

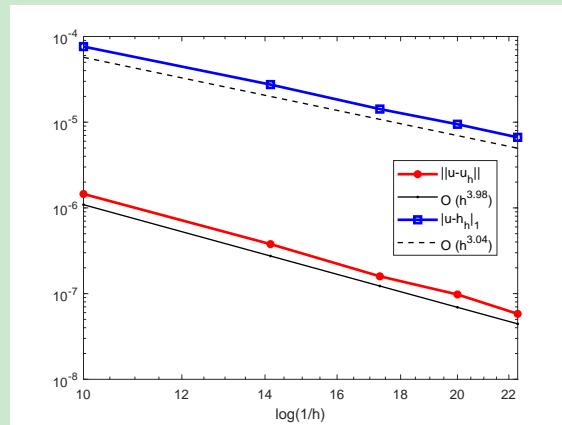


图 18. Poisson 方程三阶虚拟元方法的误差阶

可以看到, L^2 的误差阶为 4, H^1 的误差阶为 3.

7 Poisson 方程的非协调虚拟元方法

7.1 虚拟元介绍

虚拟元

```
i elem2dof = cell(NT,1);
```

8 三维 Poisson 方程的虚拟元方法

待添加

8.1 变分问题

8.1.1 虚拟元空间

设 K 是三维多面体单元, 定义边界元空间

$$\mathbb{B}_k(\partial K) = \{v \in C^0(\partial K) : v|_F \in V_k(F), \quad F \subset \partial K\},$$

则三维的虚拟元空间为

$$V_k(K) = \{v \in H^1(K) : \Delta v \in \mathbb{P}_{k-2}(K), \quad v|_{\partial K} \in \mathbb{B}_k(\partial K)\}.$$

自由度由两部分组成, 一是边界元空间产生的, 一是 $\Delta v \in \mathbb{P}_{k-2}(K)$ 产生的. 对前者, 自由度包括

- 顶点值泛函: $\chi_a(v) = v(z)$, 其中 z 是 K 的顶点;
- 边 e 上 $k-1$ 个点处的值或直到 $k-1$ 阶的矩量;
- 面 F 上直到 $k-2$ 阶的矩量

$$\chi_F(v) = |F|^{-1}(m, v)_F, \quad m \in \mathbb{M}_{k-2}(F).$$

对后者, 我们还要加上 K 上直到 $k-2$ 阶的矩量.

$$\chi_K(v) = |K|^{-1}(m, v)_K, \quad m \in \mathbb{M}_{k-2}(K).$$

特别地, 当 $k=1$ 时, 只有顶点值处的自由度.

L^2 投影可类似二维问题处理.

$$B = \int_K \nabla m \cdot \nabla \phi^T dx = - \int_K \Delta m \cdot \phi^T dx + \sum_{f \subset \partial K} \int_f (\nabla m \cdot \mathbf{n}_f) \phi^T d\sigma,$$

面可如下计算

$$\int_f (\nabla m \cdot \mathbf{n}_f) \phi^T d\sigma = \int_f (\nabla m \cdot \mathbf{n}_f) \Pi_{k,f}^0 \phi^T d\sigma$$

8.1.2 虚拟元方法的变分问题

椭圆投影类似二维定义, 稳定化泛函为

$$S^K(u, v) = h_K \chi(u) \cdot \chi(v),$$

双线性形式为

$$a_h^K(u, v) = a^K(\Pi_k^\nabla u, \Pi_k^\nabla v) + S^K(u - \Pi_k^\nabla u, v - \Pi_k^\nabla v).$$

9 线弹性边值问题的虚拟元方法

9.1 线弹性边值问题简介

9.1.1 问题说明

设弹性体未受外力时所在区域为 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. 当它受体力 \mathbf{f} (在 Ω 中), 在 Ω 的一部分边界 Γ_1 受表面力 \mathbf{g} , 而在另一部分边界 Γ_0 上固定位移 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ 时, 弹性体就产生位移 \mathbf{u} . 在平衡状态下, 位移 \mathbf{u} 所满足的边值问题为

$$\begin{cases} -\partial_j \sigma_{ij}(\mathbf{u}) = f_i, & i = 1, 2, 3 \quad \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{on } \Gamma_0, \\ \sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j = g_i, & i = 1, 2, 3 \quad \text{on } \Gamma_1, \end{cases} \quad (9.25)$$

这里约定: 凡在每一项中指标重复出现意味着从 1 到 3 (三维) 或 2 (二维) 求和. 上面的方程也可写为

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f} & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{on } \Gamma_0, \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{g} & \text{on } \Gamma_1, \end{cases} \quad (9.26)$$

其中向量规定为列向量, 而 $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}$ 是对矩阵 $\boldsymbol{\sigma}$ 的每行进行 (注意它是对称矩阵).

在以上式子中, 第一式为平衡方程, 其中的 σ_{ij} 为应力张量, 它与应变张量 $\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})$ 满足如下的本构关系 (均匀的各项同性弹性体的 Hooke 定律)

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) = \sigma_{ji}(\mathbf{u}) = \lambda \varepsilon_{kk}(\mathbf{u}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}), \quad (9.27)$$

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \varepsilon_{ji}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j), \quad (9.28)$$

而 λ 和 μ 为 Lamé 系数. 注意, 这里 $\varepsilon_{kk}(\mathbf{u})$ 按规定是对指标求和的, 显然有 (标量)

$$\varepsilon_{kk}(\mathbf{u}) = \partial_k u_k = \operatorname{div} \mathbf{u}.$$

这样, 平衡方程也可写为如下的紧凑形式

$$-\operatorname{div} (\lambda(\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega.$$

把 (9.27)-(9.28) 代入 (9.25), 可获得平衡方程的另一形式

$$-\mu \Delta \mathbf{u} - (\lambda + \mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{u}) = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega, \quad (9.29)$$

有时候会直接考虑该方程, 因为其中每个算子都是熟悉的. 该形式常称为 Navier 形式, 因为它与 Navier-Stokes 问题有点像.

9.1.2 连续变分问题

设

$$V = \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3 : \quad \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \Gamma_0 \right\}, \quad (9.30)$$

令 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T \in V$, 在 (9.25) 的平衡方程的两边乘以 v_i , 有

$$\int_{\Omega} -\partial_j \sigma_{ij}(\mathbf{u}) v_i dx = \int_{\Omega} f_i v_i dx,$$

这里遵循求和约定, 即上式实际上求和. 分部积分有

$$-\int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) v_i n_j ds + \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \partial_j v_i dx = \int_{\Omega} f_i v_i dx$$

或

$$-\int_{\partial\Omega} g_i v_i ds + \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \partial_j v_i dx = \int_{\Omega} f_i v_i dx.$$

由对称性,

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) \partial_j v_i = \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \frac{1}{2} (\partial_j v_i + \partial_i v_j) = \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}),$$

故

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_1} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} ds. \quad (9.31)$$

于是, 变分问题为: 求 $\mathbf{u} \in V$ 使得,

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in V,$$

式中,

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) dx, \quad \ell(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_1} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} ds.$$

文献中一般习惯引入如下记号

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \sum_{ij} a_{ij} b_{ij}, \quad \mathbf{A} = (a_{ij}), \quad \mathbf{B} = (b_{ij}),$$

从而双线性形式可写为

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx.$$

注意到

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) &= (\lambda \varepsilon_{kk}(\mathbf{u}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(\mathbf{u})) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) \\ &= (\lambda \partial_k u_k \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(\mathbf{u})) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) \\ &= 2\mu \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) + \lambda \partial_k u_k \varepsilon_{ii}(\mathbf{v}) \\ &= 2\mu \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) + \lambda \partial_k u_k \partial_i u_i, \end{aligned}$$

双线性形式还可写为

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= 2\mu \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) dx + \lambda \int_{\Omega} \partial_i u_i \partial_j u_j dx, \\ &= 2\mu \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx + \lambda \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u})(\operatorname{div} \mathbf{v}) dx. \end{aligned} \quad (9.32)$$

注 9.1 也可采用 (9.29) 的形式, 具体写出来即

$$\begin{cases} -\mu \Delta u_1 - (\lambda + \mu) \partial_x (\operatorname{div} \mathbf{u}) = f_1, \\ -\mu \Delta u_2 - (\lambda + \mu) \partial_y (\operatorname{div} \mathbf{u}) = f_2, \end{cases}$$

注意 $\operatorname{div} \mathbf{u}$ 是标量. 第一式乘以 v_1 , 并分部积分有

$$\begin{aligned} &\mu \left(\int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 dx - \int_{\partial\Omega} \partial_n u_1 v_1 ds \right) \\ &- (\lambda + \mu) \left(\int_{\partial\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}) v_1 n_x ds - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}) \partial_x v_1 dx \right) = \int_{\Omega} f_1 v_1 dx. \end{aligned}$$

类似可获得第二个式子对应的结果, 将它们相加有

$$\begin{aligned} &\mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} dx + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u})(\operatorname{div} \mathbf{v}) dx \\ &- \mu \int_{\partial\Omega} \partial_n \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} ds - (\lambda + \mu) \int_{\partial\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx. \end{aligned} \quad (9.33)$$

这里, $\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 + \nabla u_2 \cdot \nabla v_2$.

9.1.3 近似变分形式 I — Navier 形式

先考虑 (9.33) 的近似变分形式, 令

$$\begin{aligned} a^K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \mu \int_K \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} dx + (\lambda + \mu) \int_K (\operatorname{div} \mathbf{u})(\operatorname{div} \mathbf{v}) dx \\ &=: \mu a_{\nabla}^K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\lambda + \mu) a_{\operatorname{div}}^K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

式中,

$$a_{\nabla}^K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_K \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} dx, \quad a_{\operatorname{div}}^K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_K (\operatorname{div} \mathbf{u})(\operatorname{div} \mathbf{v}) dx.$$

每个分量的虚拟元空间仍取为 $V_k(K)$, 从而向量型问题的虚拟元空间为

$$\mathbf{V}_k(K) = (V_k(K))^2.$$

设 $a_{\nabla}^K(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 和 $a_{\operatorname{div}}^K(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 对应的近似双线性形式分别为 $a_{h,\nabla}^K(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 和 $a_{h,\operatorname{div}}^K(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, 则虚拟元方法的近似双线性形式为

$$a_h^K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mu a_{h,\nabla}^K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\lambda + \mu) a_{h,\operatorname{div}}^K(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

根据文献,

$$a_{h,\nabla}^K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a_{\nabla}^K(\Pi^{\nabla} \mathbf{u}, \Pi^{\nabla} \mathbf{v}) + S^K(\mathbf{u} - \Pi^{\nabla} \mathbf{u}, \mathbf{v} - \Pi^{\nabla} \mathbf{v}),$$

$$a_{h,\text{div}}^K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_K \Pi_{k-1}^0(\operatorname{div} \mathbf{u}) \Pi_{k-1}^0(\operatorname{div} \mathbf{v}) dx,$$

而稳定双线性形式为 ($k = 1$)

$$S^K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{N_{dof}} \operatorname{dof}_i(\mathbf{u}) \cdot \operatorname{dof}_i(\mathbf{v}).$$

稍后解释这里的投影算子.

9.1.4 近似变分形式 II — tensor 形式

考虑 (9.32) 的变分问题, 令

$$\begin{aligned} a^K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= 2\mu \int_K \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) dx + \lambda \int_K \partial_i u_i \partial_j u_j dx \\ &= 2\mu \int_K \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx + \lambda \int_K (\operatorname{div} \mathbf{u})(\operatorname{div} \mathbf{v}) dx \\ &=: 2\mu a_\mu^K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \lambda a_\lambda^K(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \end{aligned}$$

式中,

$$\begin{aligned} a_\mu^K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_K \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) dx = \int_K \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx, \\ a_\lambda^K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_K \partial_i u_i \partial_j u_j dx = \int_K (\operatorname{div} \mathbf{u})(\operatorname{div} \mathbf{v}) dx. \end{aligned}$$

设 $a_\mu^K(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 和 $a_\lambda^K(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 对应的近似双线性形式分别为 $a_{h,\mu}^K(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 和 $a_{h,\lambda}^K(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, 则虚拟元方法的近似双线性形式为

$$a_h^K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := 2\mu a_{h,\mu}^K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \lambda a_{h,\lambda}^K(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

根据文献,

$$\begin{aligned} a_{h,\mu}^K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= a_\mu^K(\Pi^a \mathbf{u}, \Pi^a \mathbf{v}) + S^K(\mathbf{u} - \Pi^a \mathbf{u}, \mathbf{v} - \Pi^a \mathbf{v}), \\ a_{h,\lambda}^K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_K \Pi_{k-1}^0(\operatorname{div} \mathbf{u}) \Pi_{k-1}^0(\operatorname{div} \mathbf{v}) dx, \end{aligned}$$

稍后解释这里的投影算子.

9.2 刚度矩阵和载荷向量的装配

9.2.1 矩阵分析法

对 $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T$, 为了避免下标的混乱, 我们记 $\bar{u} = u_1$ 和 $\underline{u} = u_2$, 相应的节点基展开为

$$\bar{u} = \bar{u}_1 \varphi_1 + \cdots + \bar{u}_N \varphi_N = \Psi \bar{U}, \quad \underline{u} = \underline{u}_1 \varphi_1 + \cdots + \underline{u}_N \varphi_N = \Psi \underline{U},$$

其中,

$$\Psi = [\varphi_1, \dots, \varphi_N]^T, \quad \bar{U} = [\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_N]^T, \quad \underline{U} = [\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_N]^T.$$

于是,

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^N \bar{u}_i \bar{\varphi}_i + \sum_{i=1}^N \underline{u}_i \underline{\varphi}_i,$$

式中,

$$\bar{\varphi}_j = \begin{bmatrix} \varphi_j \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\varphi}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_j \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, N.$$

为了方便, 用 a 代替 a_h , 有

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) + a(\bar{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}) + a(\underline{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) + a(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}).$$

而

$$a(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) = \sum_{i,j=1}^N a(\bar{\varphi}_i, \bar{\varphi}_j) \bar{u}_i \bar{v}_j = \bar{V}^T A_{11} \bar{U}, \quad A_{11}(j, i) = a(\bar{\varphi}_i, \bar{\varphi}_j),$$

$$a(\bar{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}) = \sum_{i,j=1}^N a(\bar{\varphi}_i, \underline{\varphi}_j) \bar{u}_i \underline{v}_j = \underline{V}^T A_{21} \bar{U}, \quad A_{21}(j, i) = a(\bar{\varphi}_i, \underline{\varphi}_j),$$

$$a(\underline{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) = \bar{V}^T A_{12} \underline{U}, \quad A_{12}(j, i) = a(\underline{\varphi}_i, \bar{\varphi}_j),$$

$$a(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}) = \underline{V}^T A_{22} \underline{U}, \quad A_{22}(j, i) = a(\underline{\varphi}_i, \underline{\varphi}_j),$$

于是

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \bar{V}^T A_{11} \bar{U} + \underline{V}^T A_{21} \bar{U} + \bar{V}^T A_{12} \underline{U} + \underline{V}^T A_{22} \underline{U} \\ &= [\bar{V}^T, \underline{V}^T] \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U} \\ \underline{U} \end{bmatrix} =: V^T A U. \end{aligned}$$

特别地, 把 $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 换成 $a^K(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, 相应地有单元上的矩阵 A_{ij}^K , 它贡献给 A_{ij} , 且按照标量情形进行装配.

对右端的线性形式, 有

$$\ell(\mathbf{v}) = \ell(\bar{\mathbf{v}}) + \ell(\underline{\mathbf{v}}),$$

而

$$\ell(\bar{\mathbf{v}}) = \sum_{i=1}^N \bar{v}_i \ell(\bar{\varphi}_i) = \bar{V}^T F_1, \quad F_1 = [\ell(\bar{\varphi}_1), \dots, \ell(\bar{\varphi}_N)]^T,$$

$$\ell(\underline{\mathbf{v}}) = \sum_{i=1}^N \underline{v}_i \ell(\underline{\varphi}_i) = \underline{V}^T F_2, \quad F_2 = [\ell(\underline{\varphi}_1), \dots, \ell(\underline{\varphi}_N)]^T,$$

于是

$$\ell(\mathbf{v}) = [\bar{V}^T, \underline{V}^T] \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} =: V^T F.$$

注 9.2 对 A_{ij} , 例如, $A_{21} = a(\bar{\varphi}_i, \underline{\varphi}_j)$, 双线性形式中只会留下 (\underline{v}, \bar{u}) 这样的配对项. 这对应标量情形的计算. 其他项以及右端类似.

9.2.2 sparse 装配指标

先考虑三角形单元. 刚度矩阵

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

的每个块都可直接按照标量情形的方法进行装配, 即用 `sparse(ii, jj, ss, N, N)` 生成, 其中的 `ii, jj` 是通用的. `ss` 如下获得: 将单元刚度矩阵行拉直, 逐个单元拼成一个矩阵(每行对应一个单元的拉直向量), 然后再拉直为一个列向量. 若把这些块给出的拉直向量分别记为 `ss11, ss12, ... ss21, ss22`, 则可如下装配

```
1 A11 = sparse(ii, jj, ss11, N, N); A12 = sparse(ii, jj, ss12, N, N);
2 A21 = sparse(ii, jj, ss21, N, N); A22 = sparse(ii, jj, ss22, N, N);
3 A = [A11, A12; A21, A22];
```

为了避免对稀疏矩阵进行运算, 上面分块装配可如下改进

CODE 11. 向量方程的分块 sparse 装配指标 (三角剖分)

```
1 ii11 = ii; jj11 = jj; ii12 = ii; jj12 = jj+N;
2 ii21 = ii+N; jj21 = jj; ii22 = ii+N; jj22 = jj+N;
3 ii = [ii11; ii12; ii21; ii22];
4 jj = [jj11; jj12; jj21; jj22];
5 ss = [ss11; ss12; ss21; ss22];
6 A = sparse(ii, jj, ss, 2*N, 2*N);
```

对有些问题, 单元刚度矩阵

$$A_K = \begin{bmatrix} A_{11}^K & A_{12}^K \\ A_{21}^K & A_{22}^K \end{bmatrix}$$

并不是分块各自生成, 而是直接生成 (例如 VEM), 此时可找到每个块执行上面的装配, 即将 A_{ij}^K 行拉直拼接. 为了方便, 我们将 A_K 看成整体进行装配. 回忆一下装配指标, 对单元刚度矩阵 $[K^e] = [k_{ij}]_{3 \times 3}$, 装配指标首先给出 k_{11} 所有单元的 (i, j, s) , 记为 i_{11}, j_{11}, s_{11} , 接着按行给出其他位置的稀疏指标, 它们拼接如下

$$\begin{bmatrix} i_{11} & j_{11} & s_{11} \\ i_{12} & j_{12} & s_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ i_{33} & j_{33} & s_{33} \end{bmatrix}.$$

类似地, 对这里的 A_K , 也要按行逐个给出每个元素所有单元的稀疏指标, 然后拼接起来. 此时的

$$A_K = [k_{ij}]_{(2N_{dof}) \times (2N_{dof})}, \quad N_{dof} = 3,$$

可如下给出装配指标

CODE 12. 向量方程的 sparse 装配指标 (三角剖分)

```
1 NT = size(elem, 1); N = size(node, 1);
2 Ndof = 3; Ndof2 = 2*Ndof; nnz = NT*Ndof2^2;
3 ii = zeros(nnz, 1); jj = zeros(nnz, 1);
4 elem2 = [elem, elem+N];
5 ii(id+1:id+NTv*Ndof2^2) = reshape(repmat(elem2, Ndof2, 1), [], 1);
```

```

6 jj(id+1:id+NTv*Ndof2^2) = repmat(elem2(:, ), Ndof2, 1);
7 ss(id+1:id+NTv*Ndof2^2) = K(:, );
8 id = id + NTv*Ndof2^2;

```

类似 CODE. 13, 对多角形剖分, 我们可如下给出装配指标

CODE 13. 弹性方程 VEM 的 sparse 装配

```

1 % ----- Assemble the stiff matrix and load vector -----
2 elemLen = cellfun('length', elem); vertNum = unique(elemLen);
3 nnz = sum(4*elemLen.^2);
4 ii = zeros(nnz, 1); jj = zeros(nnz, 1); ss = zeros(nnz, 1);
5
6 id = 0; ff = zeros(2*N, 1);
7 for Nv = vertNum(:)' % only valid for row vector
8
9     % assemble the matrix
10    idNv = find(elemLen == Nv); % find polygons with Nv vertices
11    NTv = length(idNv); % number of elements with Nv vertices
12
13    elemNv = cell2mat(elem(idNv)); % elem
14    K = cell2mat(ABelem(idNv)); F = cell2mat(belem(idNv));
15    elem2 = [elemNv, elemNv+N];
16    Ndof = Nv; Ndof2 = 2*Ndof;
17    ii(id+1:id+NTv*Ndof2^2) = reshape(repmat(elem2(:, ), Ndof2, 1), [], 1);
18    jj(id+1:id+NTv*Ndof2^2) = repmat(elem2(:, ), Ndof2, 1);
19    ss(id+1:id+NTv*Ndof2^2) = K(:, );
20    id = id + NTv*Ndof2^2;
21
22    % assemble the vector
23    ff = ff + accumarray([elem2(:, ), F(:, ), [2*N 1]]);
24 end
25 kk = sparse(ii, jj, ss, 2*N, 2*N);

```

9.3 变分形式 I: Navier 型

9.3.1 过渡矩阵

设分量空间 $V_k(K)$ 的基函数为 ϕ_1, \dots, ϕ_N , 则向量空间 $\mathbf{V}_k(K)$ 的基函数为

$$\bar{\phi}_1, \dots, \bar{\phi}_N, \underline{\phi}_1, \dots, \underline{\phi}_N,$$

式中,

$$\bar{\phi}_i = \begin{bmatrix} \phi_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\phi}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, N.$$

对任意的 $\mathbf{u} = (u_1, u_2) =: (\bar{u}, \underline{u}) \in \mathbf{V}_k(K)$, 有

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{N_k} \bar{u}_i \bar{\phi}_i + \sum_{i=1}^{N_k} \underline{u}_i \underline{\phi}_i, \quad \bar{u}_i = \chi_i(\bar{u}), \quad \underline{u}_i = \chi_i(\underline{u}),$$

于是

$$\text{dof}_i(\mathbf{u}) = \chi_i(u_1), \quad \text{dof}_{i+N}(\mathbf{u}) = \chi_i(u_2), \quad 1 \leq i \leq N.$$

类似地, 设

$$\bar{m}_\alpha = \begin{bmatrix} m_\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{m}_\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ m_\alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (9.34)$$

并把它们排列为

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^T &= [\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3, \underline{m}_1, \underline{m}_2, \underline{m}_3] =: [\bar{\mathbf{m}}^T, \underline{\mathbf{m}}^T], \\ \boldsymbol{\phi}^T &= [\bar{\phi}_1, \dots, \bar{\phi}_{N_k}, \underline{\phi}_1, \dots, \underline{\phi}_{N_k}] =: [\bar{\boldsymbol{\phi}}^T, \underline{\boldsymbol{\phi}}^T]. \end{aligned}$$

设过渡矩阵为 \mathbf{D} , 即

$$\mathbf{m}^T = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{D},$$

由

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^T &= [\bar{\mathbf{m}}^T, \underline{\mathbf{m}}^T] = \begin{bmatrix} \mathbf{m}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{m}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{D} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{D} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \boldsymbol{\phi}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \\ & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{D}, \end{aligned}$$

知

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \\ & \mathbf{D} \end{bmatrix}.$$

9.3.2 椭圆投影

椭圆投影 Π^∇ 类似 Poisson 方程定义, 只不过此时是向量型的, 即

$$\Pi^\nabla : \mathbf{V}_k(K) \rightarrow (\mathbb{P}_k(K))^2, \quad \mathbf{v} \mapsto \Pi^\nabla \mathbf{v},$$

满足

$$\begin{cases} a_\nabla^K(\Pi^\nabla \mathbf{v}, \mathbf{p}) = a_\nabla^K(\mathbf{v}, \mathbf{p}), & \mathbf{p} \in (\mathbb{P}_k(K))^2, \\ \int_{\partial K} \Pi^\nabla \mathbf{v} \, ds = \int_{\partial K} \mathbf{v} \, ds \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \int_K \nabla \Pi^\nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{p} \, dx = \int_K \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{p} \, dx, & \mathbf{p} \in (\mathbb{P}_k(K))^2, \\ \int_{\partial K} \Pi^\nabla \mathbf{v} \, ds = \int_{\partial K} \mathbf{v} \, ds. \end{cases} \quad (9.35)$$

定义的向量形式为

$$\begin{cases} a_\nabla^K(\mathbf{m}, \Pi^\nabla \boldsymbol{\phi}^T) = a_\nabla^K(\mathbf{m}, \boldsymbol{\phi}^T), \\ P_0(\Pi^\nabla \boldsymbol{\phi}^T) = P_0(\boldsymbol{\phi}^T) \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \int_K \nabla \mathbf{m} \cdot \nabla \Pi^\nabla \boldsymbol{\phi}^T \, dx = \int_K \nabla \mathbf{m} \cdot \nabla \boldsymbol{\phi}^T \, dx, \\ P_0(\Pi^\nabla \boldsymbol{\phi}^T) = P_0(\boldsymbol{\phi}^T), \end{cases}$$

设 Π^∇ 在基 ϕ^T 下的矩阵为 $\mathbf{\Pi}^\nabla$, 即

$$\Pi^\nabla \phi^T = \phi^T \mathbf{\Pi}^\nabla, \quad \mathbf{\Pi}^\nabla = (\text{dof}_i(\Pi^\nabla \phi_j)).$$

根据前面自由度的说明, 有

$$\mathbf{\Pi}^\nabla = \begin{bmatrix} (\chi_i(\Pi_\nabla \phi_j)) & \\ & (\chi_i(\Pi_\nabla \phi_j)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_\nabla & \\ & \mathbf{\Pi}_\nabla \end{bmatrix}.$$

这里为了区别, 设 $\Pi^\nabla = (\Pi_\nabla, \Pi_\nabla)^T$, 即把分量的投影写为下标, 且记 Π_∇ 在基 ϕ^T 下的矩阵为 $\mathbf{\Pi}_\nabla$, 即

$$\Pi_\nabla \phi^T = \phi^T \mathbf{\Pi}_\nabla, \quad \mathbf{\Pi}_\nabla = (\chi_i(\Pi_\nabla \phi_j)). \quad (9.36)$$

也可如下获得. 由 (9.36),

$$\begin{aligned} \Pi^\nabla \phi^T &= [\Pi^\nabla \bar{\phi}^T, \Pi^\nabla \underline{\phi}^T] = \begin{bmatrix} \Pi_\nabla \phi^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \Pi_\nabla \phi^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \phi^T \mathbf{\Pi}_\nabla & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \phi^T \mathbf{\Pi}_\nabla \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \phi^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_\nabla & \\ & \mathbf{\Pi}_\nabla \end{bmatrix} \\ &= [\bar{\phi}^T, \underline{\phi}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_\nabla & \\ & \mathbf{\Pi}_\nabla \end{bmatrix} = \phi^T \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_\nabla & \\ & \mathbf{\Pi}_\nabla \end{bmatrix} =: \phi^T \mathbf{\Pi}^\nabla, \end{aligned}$$

此即 Π^∇ 在基 ϕ^T 下的矩阵为

$$\mathbf{\Pi}^\nabla = \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_\nabla & \\ & \mathbf{\Pi}_\nabla \end{bmatrix}.$$

再设投影向量 $\Pi_\nabla \phi^T$ 在多项式基下的矩阵为 $\mathbf{\Pi}_{a*}$, 即

$$\Pi_\nabla \phi^T = m^T \mathbf{\Pi}_{a*}, \quad (9.37)$$

则有

$$\mathbf{\Pi}_\nabla = D \mathbf{\Pi}_{\nabla*},$$

其中, D 为过渡矩阵. 类似由 (9.36) 得

$$\Pi^\nabla \phi^T = m^T \mathbf{\Pi}^{\nabla*}, \quad \mathbf{\Pi}^{\nabla*} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_{\nabla*} & \\ & \mathbf{\Pi}_{\nabla*} \end{bmatrix}.$$

显然,

$$\mathbf{\Pi}^\nabla = D \mathbf{\Pi}^{\nabla*}, \quad D = \begin{bmatrix} D & \\ & D \end{bmatrix}.$$

代入前面的矩阵表示, 有

$$\begin{cases} G \mathbf{\Pi}^{\nabla*} = \mathbf{B}, \\ P_0(m^T) \mathbf{\Pi}^{\nabla*} = P_0(\phi^T), \end{cases} \quad (9.38)$$

其中,

$$\mathbf{G} = a_{\nabla}^K(\mathbf{m}, \mathbf{m}^T) = \int_K \nabla \mathbf{m} \cdot \nabla \mathbf{m}^T dx,$$

$$\mathbf{B} = a_{\nabla}^K(\mathbf{m}, \phi^T) = \int_K \nabla \mathbf{m} \cdot \nabla \phi^T dx.$$

直接计算有

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \int_K \nabla \mathbf{m} \cdot \nabla \mathbf{m}^T dx = \begin{bmatrix} (\nabla \bar{m}, \nabla \bar{m}^T)_K & (\nabla \bar{m}, \nabla \underline{m}^T)_K \\ (\nabla \underline{m}, \nabla \bar{m}^T)_K & (\nabla \underline{m}, \nabla \underline{m}^T)_K \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\nabla m, \nabla m^T)_K & \\ & (\nabla m, \nabla m^T)_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & \\ & G \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

类似地,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B & \\ & B \end{bmatrix}.$$

根据 Poisson 方程, G 不可逆, 它的第一行全为零, 为此 \mathbf{G} 的分块的第一行都为零. 注意到 (9.38) 中的

$$P_0(\mathbf{m}^T) = [P_0(\bar{m}^T), P_0(\underline{m}^T)] = \begin{bmatrix} P_0(m^T) & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & P_0(m^T) \end{bmatrix},$$

$$P_0(\phi^T) = [P_0(\bar{\phi}^T), P_0(\underline{\phi}^T)] = \begin{bmatrix} P_0(\phi^T) & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & P_0(\phi^T) \end{bmatrix},$$

它们是两行的方程, 用它们分别替换分块的首行, 则有

$$\tilde{\mathbf{G}} \Pi^{\nabla*} = \tilde{\mathbf{B}},$$

其中,

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \tilde{G} & \\ & \tilde{G} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \tilde{B} & \\ & \tilde{B} \end{bmatrix}.$$

由分量矩阵的关系, 我们有

引理 9.1

$$\Pi^{\nabla*} = \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}, \quad \Pi^{\nabla} = \mathbf{D} \Pi^{\nabla*}.$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{B} \mathbf{D}, \quad \tilde{\mathbf{G}} = \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{D}.$$

注 9.3 正因为向量情形的矩阵只是分量矩阵的对角分块, 投影矩阵自然也是, 从而不必再计算向量情形的各种矩阵.

9.3.3 L^2 投影

对 Poisson 方程, L^2 投影 Π_k^0 和 Π_{k-1}^0 都不能定义, 因为它们用到 K 上的 $\geq k-1$ 的矩量. 但对这里的

$$a_{\text{div}}^K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_K (\text{div } \mathbf{u})(\text{div } \mathbf{v}) dx,$$

可用 $\Pi_{k-1}^0(\operatorname{div} \mathbf{u})$ 近似 $\operatorname{div} \mathbf{u}$, 即可定义

$$\Pi_{k-1}^0 \operatorname{div} : \mathbf{v} \mapsto \Pi_{k-1}^0(\operatorname{div} \mathbf{v}),$$

$$\int_K \Pi_{k-1}^0(\operatorname{div} \mathbf{v}) p dx = \int_K (\operatorname{div} \mathbf{v}) p dx, \quad p \in \mathbb{P}_{k-1}(K),$$

这是因为此时的右端可计算. 事实上,

$$\int_K (\operatorname{div} \mathbf{v}) p dx = - \int_K \mathbf{v} \cdot \nabla p dx + \int_{\partial K} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) p ds, \quad p \in \mathbb{P}_{k-1}(K),$$

右端第一项的 $\nabla p \in (\mathbb{P}_{k-2}(K))^2$, 从而能表为自由度的组合, 而边界项属于有限元问题.

定义的向量形式为

$$\int_K m^0 \Pi_{k-1}^0(\operatorname{div} \boldsymbol{\phi}^T) dx = \int_K m^0(\operatorname{div} \boldsymbol{\phi}^T) dx,$$

其中, m^0 是阶不大于 $k-1$ 次的尺度单项式的列向量. 设 $\Pi_{k-1}^0(\operatorname{div} \boldsymbol{\phi}^T)$ 在多项式基 $(m^0)^T$ 下的矩阵为 Π_{0*} , 即

$$\Pi_{k-1}^0(\operatorname{div} \boldsymbol{\phi}^T) = (m^0)^T \Pi_{0*},$$

则投影的矩阵形式为

$$H_0 \Pi_{0*} = C_0,$$

式中,

$$H_0 = \int_K m^0(m^0)^T dx, \quad C_0 = \int_K m^0(\operatorname{div} \boldsymbol{\phi}^T) dx.$$

显然 H_0 是 H 的前若干行若干列组成.

对 $k=1$, 有 $m^0 = m_1 = 1$, 且

$$C_0 = \int_K m^0(\operatorname{div} \boldsymbol{\phi}^T) dx = \int_K \operatorname{div} \boldsymbol{\phi}^T dx = \int_{\partial K} \boldsymbol{\phi}^T \cdot \mathbf{n} ds, \quad (9.39)$$

这里

$$\int_{\partial K} \boldsymbol{\phi}^T \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\partial K} [\bar{\boldsymbol{\phi}}^T \cdot \mathbf{n}, \underline{\boldsymbol{\phi}}^T \cdot \mathbf{n}] ds = \int_{\partial K} [\boldsymbol{\phi}^T \cdot \mathbf{n}_x, \boldsymbol{\phi}^T \cdot \mathbf{n}_y] ds.$$

由 Poisson 方程那里的 (6.14),

$$\int_{\partial K} \boldsymbol{\phi}_i \cdot \mathbf{n} ds = \frac{1}{2} (|e_{i-1}| \mathbf{n}_{e_{i-1}} + |e_i| \mathbf{n}_{e_i}) = \frac{1}{2} |\hat{e}_i| \mathbf{n}_{\hat{e}_i},$$

此即

$$\int_{\partial K} [\boldsymbol{\phi}_i \cdot \mathbf{n}_x, \boldsymbol{\phi}_i \cdot \mathbf{n}_y]^T ds = \frac{1}{2} |\hat{e}_i| \mathbf{n}_{\hat{e}_i},$$

由此可获得 C_0 . 显然此时有 $H_0 = |K|$, 于是

$$\Pi_{0*} = H_0^{-1} C_0 = |K|^{-1} C_0.$$

前面需要的矩阵可如下生成

```

1 %% Compute projection matrices
2 D = cell(NT,1);
3 % B = cell(NT,1); % it is not used in the computation
4 Bs = cell(NT,1);
5 G = cell(NT,1); Gs = cell(NT,1);
6 H0 = cell(NT,1); CO = cell(NT,1);
7 for iel = 1:NT
8     index = elem{iel}; Nv = length(index);
9     xK = centroid(iel,1); yK = centroid(iel,2); hK = diameter(iel);
10
11    m1 = @x,y) 1 + 0*x; m2 = @x,y) (x-xK)./hK; m3 = @x,y) (y-yK)./hK;
12    m = @x,y) [m1(x,y), m2(x,y), m3(x,y)];
13    x = node(index,1); y = node(index,2);
14
15    % D
16    D1 = m(x,y); D{iel} = D1;
17
18    % B, Bs, G, Gs
19    rotid1 = [Nv,1:Nv-1]; rotid2 = [2:Nv,1]; % ending and starting indices
20    Gradm = [0 0; 1./hK*[1, 0]; 1./hK*[0, 1]];
21    normVec = 0.5*[y(rotid2) - y(rotid1), x(rotid1)-x(rotid2)]'; % a rotation of ...
        edge vector
22    B1 = Gradm*normVec; B1s = B1; B1s(1,:) = 1/Nv;
23    % B{iel} = B1;
24    Bs{iel} = B1s;
25    G{iel} = B1*D1; Gs{iel} = B1s*D1;
26
27    % H0, CO
28    H0{iel} = area(iel);
29    CO{iel} = reshape(normVec',1,[]);
30 end

```

9.3.4 单元刚度矩阵和载荷向量的计算

类似 Poisson 方程, 有

$$\mathbf{A}_K^1 = a_{\nabla}^K(\Pi^{\nabla} \phi, \Pi^{\nabla} \phi^T) = (\Pi^{\nabla*})^T a_{\nabla}^K(\mathbf{m}, \mathbf{m}^T) \Pi^{\nabla*} = (\Pi^{\nabla*})^T \mathbf{G} \Pi^{\nabla*},$$

$$\mathbf{A}_K^2 = (\mathbf{I} - \Pi^{\nabla})^T (\mathbf{I} - \Pi^{\nabla}),$$

$$\mathbf{B}_K = \int_K \Pi_{k-1}^0(\operatorname{div} \phi) \Pi_{k-1}^0(\operatorname{div} \phi^T) dx = (\Pi_{0*})^T H_0 \Pi_{0*}.$$

由矩阵的分块性质知, \mathbf{A}_K^1 和 \mathbf{A}_K^2 也是分块对角的, 即

$$\mathbf{A}_K^i = \begin{bmatrix} A_K^i & \\ & A_K^i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2,$$

这里,

$$A_K^1 = (\Pi_{\nabla*})^T \mathbf{G} \Pi_{\nabla*}, \quad A_K^2 = (\mathbf{I} - \Pi_{\nabla})^T (\mathbf{I} - \Pi_{\nabla}),$$

且 Π_{∇} 就是 Poisson 方程情形的 Π_k^{∇} , 而 $\Pi_{\nabla*}$ 就是那里的 Π_{k*}^{∇} .

再考虑右端的计算. 右端的向量形式为

$$\mathbf{F}_K = \ell(\phi) = \int_K \Pi_{k-2}^0 \mathbf{f} \cdot \phi dx = \int_K \begin{bmatrix} \Pi_{k-2}^0 f_1 \cdot \phi \\ \Pi_{k-2}^0 f_2 \cdot \phi \end{bmatrix} dx,$$

为此只要考虑

$$F_K(\phi) = \int_K \Pi_{k-2}^0 f \phi dx, \quad f = f_1, f_2.$$

当 $k = 1$ 时, 规定 $\Pi_{k-2}^0 = \Pi_0^0 = P_0$, 即常值投影, 由 (6.15) 定义, 即单元顶点值的平均. 注意到

$$F_K(\phi) = \int_K \Pi_0^0 f \phi dx = \int_K \Pi_0^0 f \Pi_k^0 \phi dx,$$

我们有

$$F_K = \int_K \Pi_0^0 f \Pi_0^0 \phi dx \approx f(x_K, y_K) |K| \frac{1}{N_v} [1, \dots, 1]_{N_k}^T,$$

这里为了方便, $\Pi_0^0 f$ 用中点值近似.

如下获得刚度矩阵和载荷向量

```

1 %% Get elementwise stiffness matrix and load vector
2 ABelem = cell(NT,1); belem = cell(NT,1);
3 Ph = cell(NT,1); % matrix for error evaluation
4 for iel = 1:NT
5     % Projection
6     Pis = Gs{iel}\Bs{iel}; Pi = D{iel}*Pis; I = eye(size(Pi));
7     PiOs = H0{iel}\C0{iel};
8     % Stiffness matrix
9     AK = Pis'*G{iel}*Pis + (I-Pi)'*(I-Pi); AK = para.mu*blkdiag(AK,AK);
10    BK = (para.mu+para.lambda)*PiOs'*H0{iel}*PiOs;
11    ABelem{iel} = reshape(AK'+BK',1,[]); % straighten
12    % Load vector
13    Nv = length(elem{iel});
14    fK = pde.f(centroid(iel,:))*area(iel)/Nv; fK = repmat(fK,Nv,1);
15    belem{iel} = fK(:)'; % straighten
16    % matrix for L2 and H1 error evaluation
17    Ph{iel} = blkdiag(Pis,Pis);
18 end

```

9.3.5 边界条件的处理

该问题只有 Dirichlet 边界条件, 如下处理.

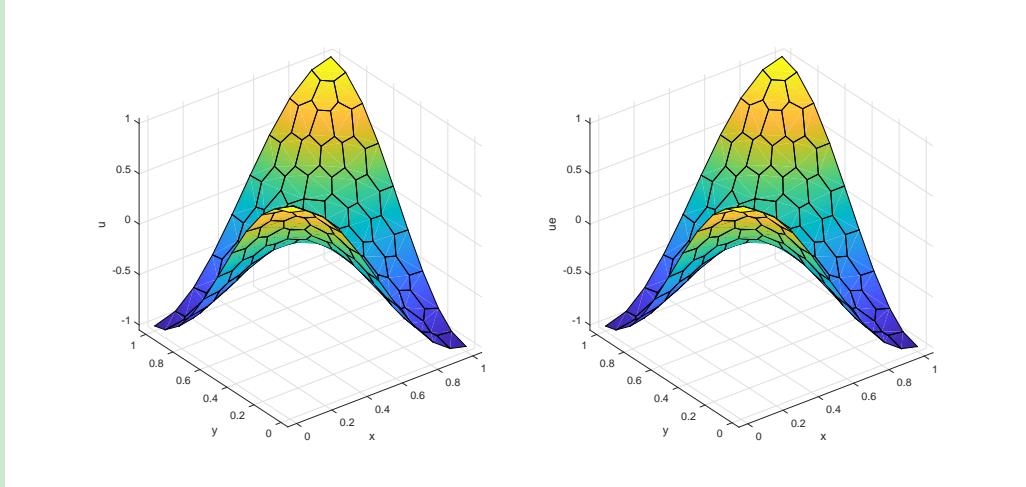
```

1 %% Apply Dirichlet boundary conditions
2 g_D = pde.g_D;
3 bdNodeIdx = bdStruct.bdNodeIdx;
4 isBdNode = false(2*N,1); isBdNode([bdNodeIdx;bdNodeIdx+N]) = true;
5 bdDof = (isBdNode); freeDof = (~isBdNode);
6 nodeD = node(bdNodeIdx,:);
7 u = zeros(2*N,1); uD = g_D(nodeD); u(bdDof) = uD(:);
8 ff = ff - kk*u;

```

9.3.6 程序整理

数值解和精确解的图像如下



主程序为

CODE 14. main_elasticityVEM_Navier.m

```
1 clc; close all;
2 clear variables;
3
4 %% Parameters
5 nameV = [200, 400, 600, 800, 1000];
6 maxIt = length(nameV);
7 h = zeros(maxIt,1); N = zeros(maxIt,1);
8 ErrL2 = zeros(maxIt,1);
9 ErrH1 = zeros(maxIt,1);
10
11 %% PDE data
12 pde = elasticitydata();
13
14 %% Virtual element method
15 for k = 1:maxIt
16     % load mesh
17     load( [ 'meshdata' , num2str(nameV(k)) , '.mat' ] );
18     % get boundary information
19     bdStruct = setboundary(node,elem);
20     % solve
21     [u,info] = elasticityVEM_Navier(node,elem,pde,bdStruct);
22     % record and plot
23     N(k) = length(u); h(k) = 1/sqrt(size(elem,1));
24     if size(elem,1)<2e3
25         figure(1); clf;
26         subplot(1,2,1), showmesh(node,elem);
27         subplot(1,2,2), showsolution(node,elem,u(1:size(node,1)));
28     end
29     % compute errors in discrete L2 and H1 norms
30     index = info.elem2dof; % elemenwise global index
31     chi = cellfun(@(id) u(id), index, 'UniformOutput', false); % elementwise ...
            numerical d.o.f.s
32     kOrder = 1;
33     Ph = info.Ph;
```

```

34 ErrL2(k) = getL2error_vector(node, elem, Ph, chi, pde, kOrder);
35 ErrH1(k) = getH1error_vector(node, elem, Ph, chi, pde, kOrder);
36 end
37
38 %% Plot convergence rates and display error table
39 figure(2);
40 showrateh(h, ErrL2, ErrH1);
41
42 fprintf('\n');
43 disp('Table: Error')
44 colname = {'#Dof', 'h', '|||u-u_h|||', '|||Du-Du_h|||'};
45 disptable(colname, N, [], h, '%0.3e', ErrL2, '%0.5e', ErrH1, '%0.5e');

```

函数文件见 GitHub.

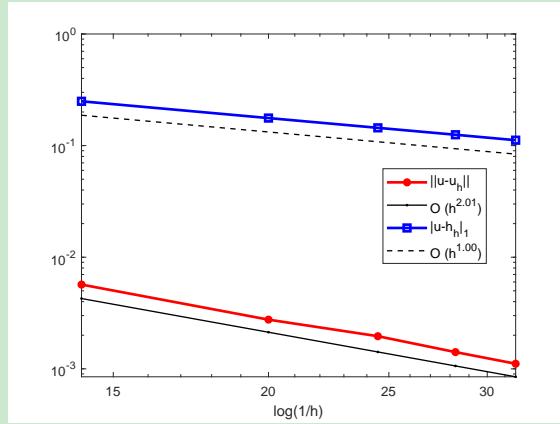


图 19. 线弹性问题 Navier 形式一阶虚拟元方法的误差阶

可以看到, L^2 的误差阶为 2, H^1 的误差阶为 1.

9.4 变分形式 II: tensor 型

9.4.1 椭圆投影的定义

以下的分部积分公式 (9.40) 可直接参考节 9.1.2 的计算过程 (式 (9.31)). 设 $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_k(K)$, $\mathbf{p} \in (\mathbb{P}_k(K))^2$, 分部积分有

$$\begin{aligned}
 & \int_K \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}_h) \varepsilon_{ij}(\mathbf{p}) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_K (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \varepsilon_{ij}(\mathbf{p}) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\partial K} (u_j \varepsilon_{ij}(\mathbf{p}) n_i + u_i \varepsilon_{ij}(\mathbf{p}) n_j) dx - \frac{1}{2} \int_K (u_j \partial_i \varepsilon_{ij}(\mathbf{p}) + u_i \partial_j \varepsilon_{ij}(\mathbf{p})) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\partial K} (u_j \varepsilon_{ij}(\mathbf{p}) n_i + u_i \varepsilon_{ij}(\mathbf{p}) n_j) dx - \frac{1}{2} \int_K (u_j \partial_i \varepsilon_{ij}(\mathbf{p}) + u_i \partial_j \varepsilon_{ij}(\mathbf{p})) dx.
 \end{aligned}$$

由对称性,

$$\begin{aligned} & \int_K \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}_h) \varepsilon_{ij}(\mathbf{p}) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial K} (u_j \varepsilon_{ji}(\mathbf{p}) n_i + u_i \varepsilon_{ij}(\mathbf{p}) n_j) dx - \frac{1}{2} \int_K (u_j \partial_i \varepsilon_{ji}(\mathbf{p}) + u_i \partial_j \varepsilon_{ij}(\mathbf{p})) dx \\ &= \int_{\partial K} u_i \varepsilon_{ij}(\mathbf{p}) n_j ds - \int_K u_i \partial_j \varepsilon_{ij}(\mathbf{p}) dx, \end{aligned}$$

此即

$$a_\mu^K(\mathbf{u}_h, \mathbf{p}) = \int_K \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p}) dx = - \int_K \operatorname{div}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p})) \cdot \mathbf{u}_h dx + \int_{\partial K} (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p}) \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}_h ds, \quad (9.40)$$

这里 $\cdot \mathbf{u}_h$ 中的 \cdot 表示向量内积. 注意到 $\operatorname{div}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p})) \in (\mathbb{P}_{k-2}(K))^2$, 右端第一项可表为 \mathbf{u}_h 的自由度, 而边界项属于有限元问题, 故上面的双线性形式可计算 ($\mathbf{v} = \mathbf{p} \in (\mathbb{P}_k(K))^2$).

为此, 定义椭圆投影

$$\Pi^a : \mathbf{V}_k(K) \rightarrow (\mathbb{P}_k(K))^2, \quad \mathbf{v} \mapsto \Pi^a \mathbf{v},$$

满足

$$a_\mu^K(\Pi^a \mathbf{v}, \mathbf{p}) = a_\mu^K(\mathbf{v}, \mathbf{p}), \quad \mathbf{p} \in (\mathbb{P}_k(K))^2. \quad (9.41)$$

显然这样定义的投影不唯一. 事实上, 若 $\Pi^a \mathbf{v} + \mathbf{p}$ 也符合定义, 则有

$$\int_K \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p}) dx = \int_K \varepsilon_{ij}(\mathbf{p}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{p}) dx = 0,$$

即

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}(\mathbf{p}) = \partial_1 p_1 = 0, \\ \varepsilon_{22}(\mathbf{p}) = \partial_2 p_2 = 0, \\ \varepsilon_{12}(\mathbf{p}) = \varepsilon_{21}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}(\partial_1 p_2 + \partial_2 p_1) = 0. \end{cases}$$

由前两个条件可知

$$\begin{cases} p_1 = c_1 y + c_2, \\ p_2 = d_1 x + d_2, \end{cases}$$

代入最后一个条件有 $d_1 + c_1 = 0$, 即

$$\begin{cases} p_1 = -d_1 y + c_2, \\ p_2 = d_1 x + d_2 \end{cases}, \quad \mathbf{p} = c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + d_1 \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix},$$

这表明

$$\mathbf{p} \in \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \right\} =: K_0. \quad (9.42)$$

注意到上式中空间的自由度为 3, 为了保证唯一性, 必须施加三个限制条件.

限制条件一

一个简单的做法为

$$\sum_{i=1}^{N_v} (\Pi^a \mathbf{v}(z_i), \mathbf{p}(z_i)) = \sum_{i=1}^{N_v} (\mathbf{v}(z_i), \mathbf{p}(z_i)), \quad \mathbf{p} \in K_0, \quad (9.43)$$

式中的配对表示欧式内积.

限制条件二

也可以施加如下限制条件

$$\int_{\partial K} (\Pi^a \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p} ds = \int_{\partial K} \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} ds, \quad \mathbf{p} \in K_0. \quad (9.44)$$

考虑 $k = 1$, 设 $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, 则 v_l 在每条边上是 1 次多项式, 于是可设

$$v|_{e_i} = v(z_i)\phi_1 + v(z_{i+1})\phi_2, \quad v = v_1, v_2,$$

其中的 ϕ_i 是一维的节点基. 这样, 右端可计算.

限制条件三

第三个限制条件为

$$\begin{aligned} \int_K \nabla \times \Pi_K^1 \mathbf{v} dx &= \int_K \nabla \times \mathbf{v} dx, \\ \int_{\partial K} \Pi_K^1 \mathbf{v} ds &= \int_{\partial K} \mathbf{v} ds \end{aligned} \quad (9.45)$$

注意到

$$\int_K \nabla \times \mathbf{v} dx = \int_{\partial K} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_K ds, \quad (9.46)$$

右端可由梯形公式计算.

定义 (9.41) 等价于如下的向量形式

$$a_{\mu}^K(\mathbf{m}, \Pi^a \boldsymbol{\phi}^T) = a_{\mu}^K(\mathbf{m}, \boldsymbol{\phi}^T)$$

或

$$\int_K \varepsilon_{ij}(\mathbf{m}) \varepsilon_{ij}(\Pi^a \boldsymbol{\phi}^T) dx = \int_K \varepsilon_{ij}(\mathbf{m}) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\phi}^T) dx.$$

记 K_0 三个基的列向量为 $\{\mathbf{p}\}$, 则限制条件一为 (三行方程)

$$\sum_{i=1}^{N_v} (\{\mathbf{p}(z_i)\}, \Pi^a \boldsymbol{\phi}^T(z_i)) = \sum_{i=1}^{N_v} (\{\mathbf{p}(z_i)\}, \boldsymbol{\phi}^T(z_i)).$$

设 Π^a 在基 ϕ^T 下的矩阵为 $\mathbf{\Pi}^a$, 即

$$\Pi^a \phi^T = \phi^T \mathbf{\Pi}^a,$$

而 $\Pi^a \phi^T$ 在多项式基 \mathbf{m}^T 下的矩阵为 $\mathbf{\Pi}^{a*}$, 即

$$\Pi^a \phi^T = \mathbf{m}^T \mathbf{\Pi}^{a*},$$

易知有

$$\mathbf{\Pi}^a = \mathbf{D} \mathbf{\Pi}^{a*}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} D & \\ & D \end{bmatrix}.$$

将以上表达式代入向量形式, 有

$$\begin{cases} G \mathbf{\Pi}^{a*} = \mathbf{B}, \\ \sum_{i=1}^{N_v} (\{\mathbf{p}(z_i)\}, \mathbf{m}^T(z_i)) \mathbf{\Pi}^{a*} = \sum_{i=1}^{N_v} (\{\mathbf{p}(z_i)\}, \phi^T(z_i)) \end{cases}$$

式中,

$$\mathbf{G} = a_\mu^K(\mathbf{m}, \mathbf{m}^T) = \int_K \varepsilon_{ij}(\mathbf{m}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{m}^T) dx,$$

$$\mathbf{B} = a_\mu^K(\mathbf{m}, \phi^T) = \int_K \varepsilon_{ij}(\mathbf{m}) \varepsilon_{ij}(\phi^T) dx.$$

而 \mathbf{G} 和 \mathbf{B} 的某些行用限制条件替换后记为 $\tilde{\mathbf{G}}$ 和 $\tilde{\mathbf{B}}$. 类似地, 我们有一致性关系

引理 9.2

$$\mathbf{G} = \mathbf{B} \mathbf{D}, \quad \tilde{\mathbf{G}} = \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{D}.$$

9.4.2 椭圆投影的计算

当 $k = 1$ 时, $\varepsilon_{ij}(m_\alpha)$ 是常数, 而且 (9.40) 右端的第一项为零, 于是

$$\mathbf{G} = |K| \cdot \varepsilon_{ij}(\mathbf{m}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{m}^T), \quad \mathbf{B} = \int_{\partial K} (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{m}) \cdot \mathbf{n}) \cdot \phi^T ds.$$

先考虑 \mathbf{G} . 根据一致性关系, 它不需要直接计算, 这里简单计算一下, 以考察其可逆性. 直接计算有

$$\varepsilon_{11}(\mathbf{m}) = [0, \frac{1}{h_K}, 0, 0, 0, 0]^T, \quad \varepsilon_{22}(\mathbf{m}) = [0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{h_K}]^T,$$

$$\varepsilon_{12}(\mathbf{m}) = \varepsilon_{21}(\mathbf{m}) = [0, 0, \frac{1}{2h_K}, 0, \frac{1}{2h_K}, 0]^T,$$

由此获得 \mathbf{G}

```

1 E = zeros(6,4); % E = [E11,E12,E21,E22]
2 E(2,1) = 1/hK; E([3,5],[2,3]) = 1/(2*hK); E(6,4) = 1/hK;
3 G = E(:,1)*E(:,1)' + E(:,2)*E(:,2)' + E(:,3)*E(:,3)' + E(:,4)*E(:,4)';
4 G = area(iel)*G;

```

计算可以看到, \mathbf{G} 是 6×6 的矩阵, 它的第 1 行和第 4 行全为零, 而第 3 行和第 5 行相同, 为此可用限制条件的三行分别替换第 1,3,4 行, 所得记为 $\tilde{\mathbf{G}}$.

现计算 \mathbf{B} . 注意向量的内积, 有

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{ij} &= \int_{\partial K} (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{m}_i) \cdot \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\phi}_j = \int_{\partial K} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}(\mathbf{m}_i) n_x + \varepsilon_{12}(\mathbf{m}_i) n_y \\ \varepsilon_{21}(\mathbf{m}_i) n_x + \varepsilon_{22}(\mathbf{m}_i) n_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_j(1) \\ \boldsymbol{\phi}_j(2) \end{bmatrix} \\ &= \int_{\partial K} (\varepsilon_{11}(\mathbf{m}_i) n_x + \varepsilon_{12}(\mathbf{m}_i) n_y) \boldsymbol{\phi}_j(1) + (\varepsilon_{21}(\mathbf{m}_i) n_x + \varepsilon_{22}(\mathbf{m}_i) n_y) \boldsymbol{\phi}_j(2),\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(i,:) &= \int_{\partial K} [(\varepsilon_{11}(\mathbf{m}_i) n_x + \varepsilon_{12}(\mathbf{m}_i) n_y) \boldsymbol{\phi}^T, (\varepsilon_{21}(\mathbf{m}_i) n_x + \varepsilon_{22}(\mathbf{m}_i) n_y) \boldsymbol{\phi}^T], \\ \mathbf{B} &= \int_{\partial K} [(\varepsilon_{11}(\mathbf{m}) n_x + \varepsilon_{12}(\mathbf{m}) n_y) \boldsymbol{\phi}^T, (\varepsilon_{21}(\mathbf{m}) n_x + \varepsilon_{22}(\mathbf{m}) n_y) \boldsymbol{\phi}^T].\end{aligned}$$

对 $k = 1, \varepsilon_{ij}(\mathbf{m})$ 是常向量, 且上面已经计算出了, 故

$$\mathbf{B} = \left[\varepsilon_{11}(\mathbf{m}) \int_{\partial K} \boldsymbol{\phi}^T n_x + \varepsilon_{12}(\mathbf{m}) \int_{\partial K} \boldsymbol{\phi}^T n_y, \varepsilon_{21}(\mathbf{m}) \int_{\partial K} \boldsymbol{\phi}^T n_x + \varepsilon_{22}(\mathbf{m}) \int_{\partial K} \boldsymbol{\phi}^T n_y \right].$$

注意到 (9.39), 即

$$C_0 = \int_{\partial K} \boldsymbol{\phi}^T \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\partial K} [\boldsymbol{\phi}^T \cdot n_x, \boldsymbol{\phi}^T \cdot n_y] ds,$$

从而可获得 \mathbf{B} . 或直接考慮

$$\int_{\partial K} \boldsymbol{\phi}_i n_x ds = \frac{1}{2} \sum_{e_j \subset \partial K} n_{j,x} h_{e_j} (\boldsymbol{\phi}_i(z_j) + \boldsymbol{\phi}_i(z_{j+1})) = \frac{n_{i-1,x} h_{e_{i-1}} + n_{i,x} h_{e_i}}{2},$$

它在后面还要遇到.

限制条件一

若考虑限制条件 (9.43), 此时右端为 $\sum_{i=1}^{N_v} (\{\mathbf{p}(z_i)\}, \boldsymbol{\phi}^T(z_i))$, 直接计算有

$$(\{\mathbf{p}\}, \boldsymbol{\phi}^T) = \begin{bmatrix} \phi_1 & \cdots & \phi_{N_v} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \phi_1 & \cdots & \phi_{N_v} \\ -y\phi_1 & \cdots & -y\phi_{N_v} & x\phi_1 & \cdots & x\phi_{N_v} \end{bmatrix}.$$

由基函数的 Kronecker 性质,

$$\sum_{i=1}^{N_v} (\{\mathbf{p}(z_i)\}, \boldsymbol{\phi}^T(z_i)) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -y_1 & \cdots & -y_{N_v} & x_1 & \cdots & x_{N_v} \end{bmatrix},$$

它们要替换 \mathbf{B} 的 1,3,4 行, 从而获得 $\tilde{\mathbf{B}}$. 前面提到的矩阵如下计算

```

1 %% Compute projection matrices
2 D = cell(NT,1);
3 % B = cell(NT,1); % not used in the computation
4 Bs = cell(NT,1);
5 G = cell(NT,1); Gs = cell(NT,1);

```

```

6 HO = cell(NT,1); CO = cell(NT,1);
7 for iel = 1:NT
8     index = elem{iel}; Nv = length(index);
9     xK = centroid(iel,1); yK = centroid(iel,2); hK = diameter(iel);
10
11    m1 = @(x,y) 1 + 0*x; m2 = @(x,y) (x-xK)./hK; m3 = @(x,y) (y-yK)./hK;
12    m = @(x,y) [m1(x,y), m2(x,y), m3(x,y)];
13    x = node(index,1); y = node(index,2);
14
15    % D
16    D1 = m(x,y); D1 = blkdiag(D1,D1); D{iel} = D1;
17
18    % HO,CO
19    rotid1 = [Nv,1:Nv-1]; rotid2 = [2:Nv,1]; % ending and starting indices
20    normVec = 0.5*[y(rotid2) - y(rotid1), x(rotid1)-x(rotid2)]'; % a rotation of ...
        edge vector
21    HO{iel} = area(iel); CO1 = reshape(normVec',1,[]);
22    CO{iel} = CO1;
23
24    % B,Bs,G,Gs
25    E = zeros(6,4); % E = [E11,E12,E21,E22]
26    E(2,1) = 1/hK; E([3,5],[2,3]) = 1/hK; E(6,4) = 1/hK;
27    B1 = [E(:,1)*CO1(1:Nv)+E(:,2)*CO1(Nv+1:end), ...
28           E(:,3)*CO1(1:Nv)+E(:,4)*CO1(Nv+1:end)];
29    B0 = zeros(3,2*Nv); B0(1,1:Nv) = 1; B0(2,Nv+1:end) = 1;
30    B0(3,1:Nv) = -y; B0(3,Nv+1:end) = x;
31    % B{iel} = B1;
32    B1s = B1; B1s([1,3,4],:) = B0; Bs{iel} = B1s;
33    G{iel} = B1*D1; Gs{iel} = B1s*D1;
34 end

```

限制条件二

若考虑限制条件 (9.44), 则右端为

$$\int_{\partial K} \phi^T \cdot p \, ds = \left[\int_{\partial K} \phi^T p_1 \, ds, \quad \int_{\partial K} \phi^T p_2 \, ds \right].$$

相应的三行向量为

$$\left[\int_{\partial K} \phi^T \, ds, \quad \mathbf{0} \right], \quad \left[\mathbf{0}, \quad \int_{\partial K} \phi^T \, ds \right], \quad \left[-\int_{\partial K} \phi^T y \, ds, \quad \int_{\partial K} \phi^T x \, ds \right].$$

它们可用梯形公式或 Simpson 公式精确计算. 为了方便, 我们对边进行循环计算. 前面提到的矩阵如下计算

```

1 %% Compute projection matrices
2 D = cell(NT,1);
3 % B = cell(NT,1); % not used in the computation
4 Bs = cell(NT,1);
5 G = cell(NT,1); Gs = cell(NT,1);
6 HO = cell(NT,1); CO = cell(NT,1);
7 for iel = 1:NT
8     % element information
9     index = elem{iel}; Nv = length(index);
10    xK = centroid(iel,1); yK = centroid(iel,2); hK = diameter(iel);

```

```

11      x = node(index,1); y = node(index,2);
12      v1 = 1:Nv; v2 = [2:Nv,1]; % edge index
13      Ne = [y(v2)-y(v1), x(v1)-x(v2)]; % scaled outer normal vectors
14      he = sqrt(sum(Ne.^2,2));
15      ne = Ne./repmat(he,1,2); % outer normal vectors
16
17      % D
18      m1 = @(x,y) 1 + 0*x; m2 = @(x,y) (x-xK)./hK; m3 = @(x,y) (y-yK)./hK;
19      m = @(x,y) [m1(x,y), m2(x,y), m3(x,y)];
20      D1 = m(x,y); D1 = blkdiag(D1,D1); D{iel} = D1;
21
22      % H0, CO
23      rotid1 = [Nv,1:Nv-1]; rotid2 = [2:Nv,1]; % ending and starting indices
24      normVec = 0.5*[y(rotid2) - y(rotid1), x(rotid1)-x(rotid2)]'; % a rotation of ...
         edge vector
25      H0{iel} = area(iel); C01 = reshape(normVec',1,[]);
26      C0{iel} = C01;
27
28      % ----- Bs, Gs -----
29      % E = [E11,E12,E21,E22]
30      E = zeros(6,4);
31      E(2,1) = 1/hK; E([3,5],[2,3]) = 1/hK; E(6,4) = 1/hK;
32      % phinx, phiny
33      nx = ne(:,1); ny = ne(:,2);
34      id = [Nv,1:Nv-1];
35      phinx = 0.5*(nx(id).*he(id) + nx.*he)';
36      phiny = 0.5*(ny(id).*he(id) + ny.*he)';
37      % B1
38      B1 = [E(:,1)*phinx+E(:,2)*phiny, E(:,3)*phinx+E(:,4)*phiny];
39      % constraint
40      B0 = zeros(3,2*Nv);
41      base = eye(Nv);
42      phi = zeros(1,Nv); phix = zeros(1,Nv); phiay = zeros(1,Nv);
43      for i = 1:Nv % loop of edges
44          base1 = base(i,v1); base2 = base(i,v2); basec = (base1+base2)./2;
45          x1 = x(v1(i)); x2 = x(v2(i)); xc = (x1+x2)/2;
46          y1 = y(v1(i)); y2 = y(v2(i)); yc = (y1+y2)/2;
47          phi = phi + he(i)*basec;
48          phix = phix + he(i)/6*(base1*x1 + 4*basec*xc + base2*x2);
49          phiay = phiay + he(i)/6*(base1*y1 + 4*basec*yc + base2*y2);
50      end
51      B0(1,1:Nv) = phi;
52      B0(2,Nv+1:end) = phi;
53      B0(3,:) = [-phiay, phix];
54      % B{iel} = B1;
55      B1s = B1; B1s([1,3,4],:) = B0; Bs{iel} = B1s;
56      G{iel} = B1*D1; Gs{iel} = B1s*D1;
57  end

```

限制条件三

若考虑限制条件 (9.45), 第一式右端为

$$\int_K \nabla \times \phi^T dx = \int_{\partial K} \phi^T \cdot \tau_K ds = \int_{\partial K} [\phi^T \cdot t_x, \phi^T \cdot t_y] ds,$$

第二式右端为

$$\int_{\partial K} \phi^T ds = \begin{bmatrix} \int_{\partial K} \phi^T ds & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \int_{\partial K} \phi^T ds \end{bmatrix}.$$

注意到

$$\int_{\partial K} \phi_i t_x ds = \frac{1}{2} \sum_{e_j \subset \partial K} t_{j,x} h_{e_j} (\phi_i(z_j) + \phi_i(z_{j+1})) = \frac{t_{i-1,x} h_{e_{i-1}} + t_{i,x} h_{e_i}}{2},$$

$$\int_{\partial K} \phi_i ds = \frac{1}{2} \sum_{e_j \subset \partial K} h_{e_j} (\phi_i(z_j) + \phi_i(z_{j+1})) = \frac{h_{e_{i-1}} + h_{e_i}}{2},$$

由此可得它们的计算. 前面提到的矩阵如下计算

```

1 %% Compute projection matrices
2 D = cell(NT,1);
3 % B = cell(NT,1); % not used in the computation
4 Bs = cell(NT,1);
5 G = cell(NT,1); Gs = cell(NT,1);
6 H0 = cell(NT,1); C0 = cell(NT,1);
7 for iel = 1:NT
8     % element information
9     index = elem{iel}; Nv = length(index);
10    xK = centroid(iel,1); yK = centroid(iel,2); hK = diameter(iel);
11    x = node(index,1); y = node(index,2);
12    v1 = 1:Nv; v2 = [2:Nv,1]; % edge index
13    Ne = [y(v2)-y(v1), x(v1)-x(v2)]; % scaled outer normal vectors
14    he = sqrt(sum(Ne.^2,2));
15    ne = Ne./repmat(he,1,2); % outer normal vectors
16    te = [-ne(:,2), ne(:,1)];
17
18    % D
19    m1 = @x,y 1 + 0*x; m2 = @x,y (x-xK)./hK; m3 = @x,y (y-yK)./hK;
20    m = @x,y [m1(x,y), m2(x,y), m3(x,y)];
21    D1 = m(x,y); D1 = blkdiag(D1,D1); D{iel} = D1;
22
23    % H0,C0
24    rotid1 = [Nv,1:Nv-1]; rotid2 = [2:Nv,1]; % ending and starting indices
25    normVec = 0.5*[y(rotid2) - y(rotid1), x(rotid1)-x(rotid2)]'; % a rotation of ...
        edge vector
26    H0{iel} = area(iel); C01 = reshape(normVec',1,[]);
27    C0{iel} = C01;
28
29    % ----- B,Bs,G,Gs -----
30    % E = [E11,E12,E21,E22]
31    E = zeros(6,4);
32    E(2,1) = 1/hK; E([3,5],[2,3]) = 1/hK; E(6,4) = 1/hK;
33    % phinx, phiny
34    nx = ne(:,1); ny = ne(:,2);
35    id = [Nv,1:Nv-1];
36    phinx = 0.5*(nx(id).*he(id) + nx.*he)';
37    phiny = 0.5*(ny(id).*he(id) + ny.*he)';
38    % B1
39    B1 = [E(:,1)*phinx+E(:,2)*phiny, E(:,3)*phinx+E(:,4)*phiny];
40    % first constrain ( rot )
41    B0 = zeros(3,2*Nv);
42    tx = te(:,1); ty = te(:,2);
43    phitx = 0.5*(tx(id).*he(id) + tx.*he)';

```

```

44     phity = 0.5*(ty(id).*he(id) + ty.*he)';
45     BO(1,:) = [phitx, phity];
46     % second constraint
47     phi = 0.5*(he(id) + he)';
48     BO(2,1:Nv) = phi; BO(3,Nv+1:end) = phi;
49     % B{iel} = B1;
50     B1s = B1; B1s([1,3,4],:) = BO; Bs{iel} = B1s;
51     G{iel} = B1*D1; Gs{iel} = B1s*D1;
52 end

```

9.4.3 边界条件的处理

Neumann 边界条件与有限元的处理完全相同, 如下

```

1 %% Assemble Neumann boundary conditions
2 bdEdgeN = bdStruct.bdEdgeN;
3 if ~isempty(bdEdgeN)
4     g_N = pde.g_N;
5     z1 = node(bdEdgeN(:,1),:); z2 = node(bdEdgeN(:,2),:);
6     e = z1-z2; % e = z2-z1
7     ne = [-e(:,2),e(:,1)]; % scaled ne
8     Sig1 = g_N(z1); Sig2 = g_N(z2);
9     F11 = sum(ne.*Sig1(:,[1,3]),2)./2; F12 = sum(ne.*Sig2(:,[1,3]),2)./2; % g1
10    F21 = sum(ne.*Sig1(:,[3,2]),2)./2; F22 = sum(ne.*Sig2(:,[3,2]),2)./2;
11    FN = [F11,F12,F21,F22];
12    ff = ff + accumarray([bdEdgeN(:,1); bdEdgeN(:,1)+N], FN(:,[2*N 1]));
13 end

```

Dirichlet 条件的处理同 Navier 形式.

9.4.4 程序整理

两种限制条件的计算结果相当, 这里仅给出第一种. 数值结果与位移型差不多, 这里省略. 主程序如下

CODE 15. main_elasticityVEM_tensor.m

```

1 clc; close all;
2 clear variables;
3
4 %% Parameters
5 nameV = [200, 400, 600, 800, 1000];
6 maxIt = length(nameV);
7 h = zeros(maxIt,1); N = zeros(maxIt,1);
8 ErrL2 = zeros(maxIt,1);
9 ErrH1 = zeros(maxIt,1);
10
11 %% PDE data
12 pde = elasticitydata();
13 bdNeumann = 'abs(x-0)<1e-4 | abs(x-1)<1e-4';
14
15 %% Virtual element method
16 for k = 1:maxIt
17     % load mesh
18     load( ['meshdata', num2str(nameV(k)), '.mat'] );
19     % get boundary information

```

```

20      bdStruct = setboundary(node, elem, bdNeumann);
21      % solve
22      [u, info] = elasticityVEM_tensor(node, elem, pde, bdStruct);
23      % record and plot
24      N(k) = length(u); h(k) = 1/sqrt(size(elem,1));
25      if size(elem,1)<2e3
26          figure(1); clf;
27          subplot(1,3,1), showmesh(node, elem);
28          subplot(1,3,2), showsolution(node, elem, u(1:size(node,1)));
29          ue = pde.uexact(node);
30          subplot(1,3,3), showsolution(node, elem, ue(:,1));
31      end
32      % compute errors in discrete L2 and H1 norms
33      index = info.elem2dof; % elementwise global index
34      chi = cellfun(@(id) u(id), index, 'UniformOutput', false); % elementwise ...
35          numerical d.o.f.s
36      kOrder = 1;
37      Ph = info.Ph;
38      ErrL2(k) = getL2error_vector(node, elem, Ph, chi, pde, kOrder);
39      ErrH1(k) = getH1error_vector(node, elem, Ph, chi, pde, kOrder);
40  end
41 %% Plot convergence rates and display error table
42 figure(2);
43 showrateh(h, ErrL2, ErrH1);
44
45 fprintf('\n');
46 disp('Table: Error')
47 colname = {'#Dof', 'h', '|||u-u_h|||', '|||Du-Du_h|||'};
48 disptable(colname, N, [], h, '%0.3e', ErrL2, '%0.5e', ErrH1, '%0.5e');

```

函数文件见 GitHub.

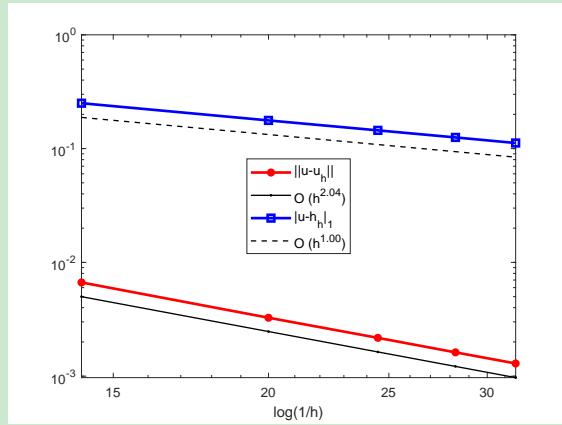


图 20. 线弹性问题 tensor 形式一阶虚拟元方法的误差阶

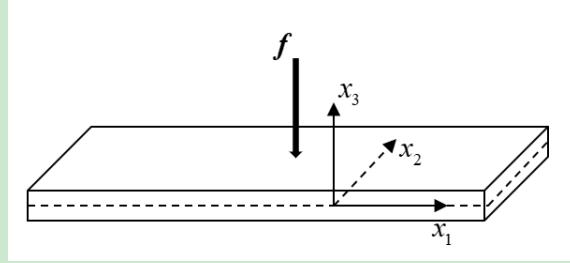
可以看到, L^2 误差阶为 2, H^1 误差阶为 1.

10 Kirchhoff 板弯问题的虚拟元方法

10.1 Kirchhoff 板弯问题

本节回顾一下 Kirchhoff 板弯问题.

10.1.1 模型假设



如图, 给定一个薄板 Ω , 其厚度为 t (远小于其他两个方向的长度). 称垂直于板平面的方向为薄板的横向, 其他两个方向都为纵向 (板平面内). 平分厚度的面称为中面 (或中立面), 以中面为 x_1-x_2 平面, 垂直于中面的方向为 x_3 轴建立直角坐标系, 则上下板面分别位于 $x_3 = \pm t/2$ 的平面内.

当薄板弯曲时, 中面所弯成的曲面, 称为薄板弹性曲面. 注意, 中面是未弯曲时板厚中间的面, 而板弯曲后对应称为弹性曲面 (不过有些书中仍把弹性曲面称为中面, 这里区分开).

称薄板的横向位移为挠度, 有时候直接把中面的横向位移称为挠度, 并记为 w (见后面的假设). 本节考虑的薄板弯曲问题是针对小挠度薄板而言的, 它在变形过程中横向的挠度远小于板的厚度 t .

对薄板弯曲问题, 我们做一些假设, 以简化模型.

假设 1: $\sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0$

实验结果表明, 应力张量 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$ 的 6 个独立分量 $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}$ 并不是一个量级. $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ 是主要应力, σ_{31}, σ_{32} 是次要应力, σ_{33} 是更次要的应力. 所以, 通常假设 $\sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0$ (即忽略它们).

假设 2: 挠度沿板厚是一致的, 即

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = u_3(x_1, x_2) = w(x_1, x_2).$$

正因为如此, 对薄板问题而言, 可以称中面的位移为挠度.

假设 3: 中面上的点没有水平方向的位移, 即

$$u_1^{(0)} = u_2^{(0)} = 0 \quad (u_3^{(0)} = w).$$

对上面的假设, 我们给出一些直观上的理解.

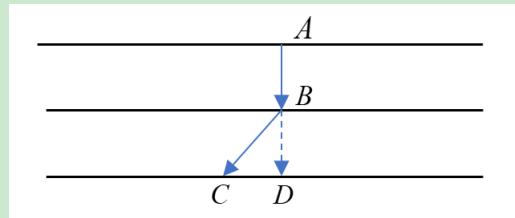
1. 假设 1 的直观理解

- 应力可以理解为对应方向变形能力的衡量. 应力越大, 对应方向阻碍变形的能力越大, 从而越不容易变形.

- 薄板的变形主要是板厚方向的弯曲, 水平方向的伸缩很小, 这意味着水平方向对应的应力很大, 而板厚方向的应力相对较小. 正因为如此, $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ 是主要应力.
- $\sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0$ 的意思是, 这些应力相对很小, 加不加入到方程中影响不大, 从而可以忽略. 而忽略它们的直接办法是令其为零.

2. 假设 2 的直观理解

- 挠度沿板厚一致, 本质是说板的每层之间没有沿板厚方向的挤压, 从而初始法线方向的各点的板厚方向距离保持不变.

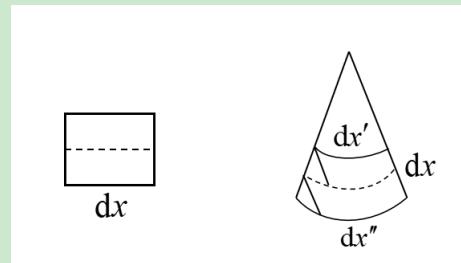


如图, 假设 A 移到 B , B 移到 C , 它们在竖直方向的位移相同 (即只有水平方向的位移).

- 这个假设显然意味着 x_3 方向的应变为零, 即 $\varepsilon_{33} = 0$.

3. 假设 3 的直观理解

- 板中质点发生水平位移, 即有水平方向上的形变 (相对距离变化).



如图, 左侧是一个体积单元, 在弯曲的过程中, 右侧虚线上侧的曲线比虚线要短, 即有压缩, 而下侧的要长, 即有拉伸.

- 薄板弯曲过程中, 在板的向外凸的一面是拉伸, 凹的一侧是压缩. 从拉伸逐步变到压缩, 中间存在一个没有水平伸缩的面 (连续性). 假设这个面就是中位面.
- 为此, 我们假设中面没有发生水平方向的伸缩, 而只有板厚方向上的位移.

注 10.1 $\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}$ 所引起的形变效应可以忽略不计. 但对平衡方程, 仍需要考虑它们的作用.

引理 10.1 在以上假设下, 薄板弯曲变形完全取决于中面的横向位移 w , 即挠度, 它只依赖于坐标 x_1, x_2 .

证明 只需要说明位移完全由挠度决定即可 (此时自然有应变和旋转张量由挠度决定). 设 $\varepsilon_{3i} = 0$, 则

$$\partial_3 u_i = -\partial_i u_3 = -\partial_i w, \quad i = 1, 2,$$

积分得

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i(x_1, x_2, 0) - x_3 \partial_i w, \quad i = 1, 2.$$

而

$$u_i(x_1, x_2, 0) = u_i^{(0)} = 0,$$

所以

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \partial_i w, \quad i = 1, 2.$$

即证. \square

根据上面的讨论, 我们给出一些基本关系式.

1. 薄板的位移 \mathbf{u} 可用中面的横向位移或挠度 w 表示为

$$\begin{cases} u_i(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \partial_i w, & i = 1, 2, \\ u_3(x_1, x_2, x_3) = u_3(x_1, x_2) = w(x_1, x_2). \end{cases}$$

2. 应变通过挠度 ω 表示为

$$\varepsilon_{ij} = -x_3 \partial_{ij} w, \quad i, j = 1, 2.$$

3. 记

$$K_{ij}(x_1, x_2) = -\partial_{ij} w, \quad i, j = 1, 2,$$

它是中面经过弯曲后曲率张量的一阶近似, 以下简称为曲率张量. 于是,

$$\varepsilon_{ij} = x_3 K_{ij}, \quad K_{ij} = K_{ji}, \quad i, j = 1, 2. \quad (10.47)$$

注 10.2 从前面的讨论可知, 对薄板弯曲问题, 横向相关的应力分量 $\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}$ 可以忽略不计, 且横向正应变 ε_{33} 也忽略不计. 而由 Hooke 定律可知, σ_{31}, σ_{32} 忽略不计的情况下, 必然有 $\varepsilon_{31}, \varepsilon_{32}$ 也忽略不计. 这表明假设 1,2 实际上暗含 Hooke 定律中, 横向相关的应力分量和应变分量都忽略不计, 即令它们为零, 从而只剩下平面相关的应力分量和应变分量, 这就化为平面问题. 而假设 3 进一步把它归结为中面上的问题.

10.1.2 薄板弯曲的 Hooke 定律

1. 常规表达

- 一般的 Hooke 定律为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (10.48)$$

忽略横向相关的应变 (和应力) 分量后, 只有三个本质的应变分量 $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$, 满足

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \quad (10.49)$$

其中, k 对 1, 2 求和. 这就相当于二维问题. 设

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}' = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix},$$

则 Hooke 定律也可写为

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}' - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \mathbf{I} \quad (10.50)$$

- 类似三维情形, 可以给出 (10.49) 的相反结果. 在 (10.49) 中令 $i = j$ 并求和, 有

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = \frac{1-\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}).$$

代入 (10.50) 并简单整理有

$$\boldsymbol{\sigma}' = \frac{E}{1-\nu^2} ((1-\nu)\boldsymbol{\varepsilon}' + \nu \varepsilon_{kk} \mathbf{I})$$

或写为分量形式

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1-\nu^2} ((1-\nu)\varepsilon_{ij} + \nu \varepsilon_{kk}), \quad i, j = 1, 2, \quad k \in \{1, 2\}.$$

2. 曲率表达

把 (10.47) 代入前面的式子中, 有

$$\sigma_{ij} = \frac{Ex_3}{1-\nu^2} ((1-\nu)K_{ij} + \nu K_{kk}\delta_{ij}), \quad i, j = 1, 2, \quad k \in \{1, 2\}. \quad (10.51)$$

3. 弯矩表达

为了消去 (10.51) 中的 x_3 (弄成二维问题), 定义弯矩 (不能直接对 (10.51) 求积分, 否则因 x_3 是奇函数, 结果为零)

$$M_{ij}(x_1, x_2) = \int_{-t/2}^{t/2} x_3 \sigma_{ij} dx_3, \quad i, j = 1, 2,$$

则薄板弯曲的 Hooke 定律也可表为

$$M_{ij} = D ((1-\nu)K_{ij} + \nu K_{kk}\delta_{ij}), \quad i, j = 1, 2, \quad k \in \{1, 2\},$$

其中,

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

称为抗弯刚度, 而曲率 K_{ij} 相当于应变, 弯矩 M_{ij} 相当于应力.

10.1.3 变分原理

1. 应变能

- 用曲率表达的应变能体密度为

$$W = \frac{1}{2} \frac{Ex_3}{1-\nu^2} \left((1-\nu)K_{ij}^2 + \nu(K_{kk})^2 \right), \quad i,j = 1,2, \quad k \in \{1,2\},$$

从而有应变能面密度

$$\bar{W}(x_1, x_2) = \int_{-t/2}^{t/2} W dx_3 = \frac{1}{2} D \left((1-\nu)K_{ij}^2 + \nu(K_{kk})^2 \right).$$

- 可以看到,

$$M_{ij} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial K_{ij}}, \quad \bar{W} = \frac{1}{2} M_{ij} K_{ij}, \quad i,j \in \{1,2\}.$$

- 板的弯曲应变能为

$$P(w) = \int_{\Omega} \bar{W}(w) dx_1 dx_2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} M_{ij}(w) K_{ij}(w) dx_1 dx_2,$$

这里 Ω 可认为是板的中面 (不是三维的薄板).

2. 外功势能

- 暂时不考虑几何约束以及弹性支承.
- 板面 Ω 上的横向载荷为 P_3 , 边界 $\partial\Omega$ 上的横向载荷为 q_3 , 边界上弯矩载荷为 m_t .
- 外功势能为

$$-F(w) = - \left\{ \int_{\Omega} P_3 w dx_1 dx_2 + \oint_{\partial\Omega} q_3 w dl + \oint_{\partial\Omega} m_t w_t dl \right\},$$

其中, w_t 表示弯曲变形时边界的切向转角.

- 设 $\mathbf{n} = (n_1, n_2, 0)^T$ 是边界的外方向, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^T$ 是正 x_3 轴的单位向量, 边界的正切向 $\mathbf{t} = (t_1, t_2, 0)^T$ 使得 $\{\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{e}_3\}$ 形成右手系.

在边界上, 弯曲后的板相对于弯曲前的平板有无穷小旋转, 其绕 x_1, x_2 轴的分量分别为

$$w_1 = \partial_2 w, \quad w_2 = -\partial_1 w,$$

所以转角的切向分量或切向转角为

$$w_t = t_1 w_1 + t_2 w_2 = -n_2 \partial_2 w + n_1 (-\partial_1 w) = -\partial_{\mathbf{n}} w.$$

于是,

$$-F(w) = - \left\{ \int_{\Omega} P_3 w dx_1 dx_2 + \oint_{\partial\Omega} q_3 w dl - \oint_{\partial\Omega} m_t \partial_{\mathbf{n}} w dl \right\}.$$

3. 变分形式

令

$$D(w, v) = \int_{\Omega} M_{ij}(w) K_{ij}(v) dx_1 dx_2,$$

$$F(v) = \int_{\Omega} P_3 v dx_1 dx_2 + \oint_{\partial\Omega} q_3 v dl - \oint_{\partial\Omega} m_t \partial_n v dl,$$

则变分形式为

$$D(w, v) = F(v).$$

10.1.4 平衡方程

从变分形式导出平衡方程的思路就是, 运用分部积分公式, 把 $D(w, v)$ 中检验函数 v 的导数迁移到 w 上 (Ω 上的积分), 从而可以合并, 由 v 的任意性 (变分学基本引理) 获得平衡方程及边界条件.

分部积分有

$$\begin{aligned} D(w, v) &= \int_{\Omega} M_{ij}(w) K_{ij}(v) dx_1 dx_2 = - \int_{\Omega} M_{ij}(w) \partial_{ij} v dx_1 dx_2 \\ &= \int_{\Omega} \partial_j M_{ij}(w) \partial_i v dx_1 dx_2 - \oint_{\partial\Omega} M_{ij}(w) n_j \partial_i v dl \end{aligned}$$

注意到

$$\partial_i v = n_i \partial_n v + t_i \partial_l v,$$

并令

$$Q_{3i} = \partial_j M_{ij} \quad (i = 1, 2), \quad M_{nn} = M_{ij} n_i n_j, \quad M_{tn} = M_{ij} t_i n_j,$$

我们有

$$D(w, v) = \int_{\Omega} Q_{3i}(w) \partial_i v dx_1 dx_2 - \oint_{\partial\Omega} M_{nn}(w) \partial_n v dl - \oint_{\partial\Omega} M_{tn}(w) \partial_l v dl.$$

将右端第一项继续分部积分有

$$\int_{\Omega} Q_{3i}(w) \partial_i v dx_1 dx_2 = - \int_{\Omega} \partial_i Q_{3i}(w) v dx_1 dx_2 + \oint_{\partial\Omega} Q_{3i}(w) n_i v dl.$$

令

$$Q_{3n} = Q_{3i} n_i,$$

则

$$\begin{aligned} D(w, v) &= - \int_{\Omega} \partial_i Q_{3i}(w) v dx_1 dx_2 + \oint_{\partial\Omega} Q_{3n}(w) v dl \\ &\quad - \oint_{\partial\Omega} M_{nn}(w) \partial_n v dl - \oint_{\partial\Omega} M_{tn}(w) \partial_l v dl. \end{aligned}$$

在 $\partial\Omega$ 上, $\partial_l v$ 完全取决于其上的 v , 而 $\partial_n v$ 则不同, 它还涉及到内部值. 所以最后一项可继续进行分部积分以消去 $\partial_l v$. 设边界 $\partial\Omega$ 上有角点 P_1, \dots, P_m (即切线跳跃之点), 分段分部积分可知 (看成一维普通积分)

$$\oint_{\partial\Omega} M_{tn}(w) \partial_l v dl = - \oint_{\partial\Omega} \partial_l M_{tn}(w) v dl - \sum_{i=1}^m M_{tn}(w)|_{P_i^-}^{P_i^+} v(P_i).$$

定义跳量

$$[M_{tn}(w)](P_i) = M_{tn}(w)|_{P_i^-}^{P_i^+},$$

则

$$\begin{aligned} D(w, v) = & - \int_{\Omega} \partial_i Q_{3i}(w) v dx_1 dx_2 + \oint_{\partial\Omega} (Q_{3n}(w) + \partial_l M_{tn}(w)) v dl \\ & - \oint_{\partial\Omega} M_{nn}(w) \partial_n v dl + \sum_{i=1}^m [M_{tn}(w)](P_i) v(P_i). \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} D(w, v) - F(v) = & - \int_{\Omega} (\partial_i Q_{3i}(w) + P_3) v dx_1 dx_2 + \oint_{\partial\Omega} (Q_{3n}(w) + \partial_l M_{tn}(w)) v dl \\ & + \oint_{\partial\Omega} (-M_{nn}(w) + m_t) \partial_n v dl + \sum_{i=1}^m [M_{tn}(w)](P_i) v(P_i) = 0. \end{aligned}$$

由此可得平衡方程和边界条件为

$$\begin{aligned} \Omega : \quad & -\partial_i Q_{3i}(w) = P_3, \\ \partial\Omega : \quad & \begin{cases} Q_{3n}(w) + \partial_l M_{tn}(w) = q_3, \\ M_{nn}(w) = m_t, \\ [M_{tn}(w)](P_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{cases} \end{aligned} \tag{10.52}$$

代入前面的一些记号, 平衡方程用挠度表示为

$$\Omega : \quad -\partial_{ij} M_{ij}(w) = P_3,$$

式中,

$$M_{ij} = D((1-\nu)K_{ij} + \nu K_{kk}\delta_{ij}) = -D((1-\nu)\partial_{ij}w + \nu\partial_{kk}w\delta_{ij}),$$

指标范围为 $i, j = 1, 2, k \in \{1, 2\}$. 该方程是挠度 w 的四阶椭圆型偏微分方程.

按习惯, 后面记 $f = P_3$. 若板面与地基有弹性耦合, 则平衡方程可改写为

$$\Omega : \quad -\partial_{ij} M_{ij}(w) + cw = f, \tag{10.53}$$

其中 c 为弹性耦合常数.

当 D, ν 为常数时, 含有 ν 的项会抵消, 上述方程简化为双调和方程

$$D\Delta^2 w = f.$$

注意, 对任意的 ν 都是如此, 特别地, 取 $\nu = 0$ (工程中是不允许的), 原来的平衡方程就是 $D\partial_{ij}\partial_{ij}w = f$, 显然 $\partial_{ij}\partial_{ij}w = \Delta^2 w$. 为了方便, 以下将坐标 (x_1, x_2) 改记为 (x, y) .

本文考虑强加边界条件

$$w = \partial_n w = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega.$$

10.1.5 分部积分公式

在平衡方程 (10.53) 两边乘以检验函数 v 并分部积分后可获得变分问题, 此时会出现复杂的边界项. 但当 $v \in H_0^2(\Omega)$ 时, 这些边界项都会消失 (见前面的分部积分计算过程).

变分问题为: 找 $w \in V := H_0^2(\Omega)$ 使得

$$a(w, v) = \ell(v), \quad v \in V,$$

式中,

$$\begin{aligned} a(w, v) &= \int_{\Omega} M_{ij}(w) K_{ij}(v) dx dy + \int_{\Omega} c w v dx dy, \\ \ell(v) &= \int_{\Omega} f v dx dy. \end{aligned}$$

以下设 $c = 0$. 注意,

- 当 $\nu = 0, D = 1$ 时,

$$M_{ij}(v) K_{ij}(w) = D \partial_{ij} v \partial_{ij} w = D \nabla^2 v : \nabla^2 w = \nabla^2 v : \nabla^2 w.$$

- 当 $\nu = 1, D = 1$ 时,

$$M_{ij}(v) K_{ij}(w) = D(\partial_{11} v + \partial_{22} v)(\partial_{11} w + \partial_{22} w) = \Delta v \Delta w.$$

设 $\mathbf{n} = (n_1, n_2, 0)^T$ 是边界的外法向量, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^T$ 是正 x_3 轴的单位向量, 边界的正切向量 $\mathbf{t} = (t_1, t_2, 0)^T$ 使得 $\{\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{e}_3\}$ 形成右手系 (根据旋转关系有 $\mathbf{t} = (t_1, t_2) = (-n_2, n_1)$). 令 (注意求和约定)

$$Q_{3i} = M_{ij,j}, \quad Q_{3n} = Q_{3i} n_i,$$

$$M_{nn} = M_{ij} n_i n_j, \quad M_{tn} = M_{ij} t_i n_j,$$

其中,

$$M_{ij} = D((1 - \nu) K_{ij} + \nu K_{kk} \delta_{ij}), \quad K_{ij} = -\partial_{ij} w,$$

则有

$$\begin{aligned} a^K(p, v) &= - \int_K Q_{3i,i}(p) v dx_1 dx_2 \\ &\quad + \int_{\partial K} (Q_{3n}(p) + \partial_t M_{tn}(p)) v ds - \int_{\partial K} M_{nn}(p) \partial_n v ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N_v} [M_{tn}(p)](z_i) v(z_i) \\ &=: I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned} \tag{10.54}$$

- 直接计算有

$$I_1 = - \int_K Q_{3i,i}(p) v dx = \int_K D(\Delta^2 p) v dx.$$

当 $p \in \mathbb{P}_2$ 时, $I_1 = I_2 = 0$.

- 当 $p \in \mathbb{P}_2$ 时, $M_{nn}(p)$ 在每条边上是常数.

- I_4 这一项不可去掉, 因为 $M_{tn}(p)(z_i)$ 不连续.

注意,

- 当 $\nu = 0, D = 1$ 时, 分部积分公式可写为

$$\begin{aligned} \int_K \nabla^2 p : \nabla^2 v dx &= \int_K \Delta^2 p v dx \\ &\quad - \int_{\partial K} \partial_n (\Delta p) v ds + \int_{\partial K} (\Delta p - \partial_t^2 p) \partial_n v ds \\ &\quad + \int_{\partial K} \partial_{tn}^2 p \partial_t v ds. \end{aligned} \quad (10.55)$$

- 当 $\nu = 1, D = 1$ 时, 分部积分公式可写为

$$\int_K \Delta p \Delta v dx = \int_K \Delta^2 p v dx - \int_{\partial K} \partial_n (\Delta p) v ds + \int_{\partial K} \Delta p \partial_n v ds. \quad (10.56)$$

- 显然有

$$\int_K \nabla^2 p : \nabla^2 v dx = \int_K \Delta p \Delta v dx - \int_{\partial K} \partial_t^2 p \partial_n v ds + \int_{\partial K} \partial_{tn}^2 p \partial_t v ds.$$

10.2 C^0 连续的非协调 VEM

10.2.1 C^0 连续的非协调虚拟元空间

1. VEM 函数的连续性由边界元空间决定. 考虑问题

$$\begin{cases} \Delta^2 v = f & \text{in } K, \\ v = g_1, \Delta v = g_2, & \text{on } \partial K. \end{cases}$$

由 PDE 理论知, 当 f 和边界函数适当光滑, K 是凸多角形时, 解 v 存在且是 C^1 的. 为此, VEM 函数的光滑性只要考虑边界元即可. 注意, 内部所有点任意光滑的函数, 它在边界也可能不是光滑的. 例如, 三角形上的一次多项式, 沿顶点两侧边的切向导数一般不相等.

2. C^0 连续

- 设 e 是两个单元的公共边, 我们要给定 e 上的自由度, 使得 v 在不同单元考虑时, $v|_e$ 是同一个函数, 即这些自由度能唯一确定 $v|_e$.
- 用自由度确定的函数自然是有限维函数, 最简单的是多项式函数, 为此要求 $v|_e \in \mathbb{P}_k(e)$.
- 设

$$v|_e(s) = c_0 m_0(s) + \cdots + c_k m_k(s), \quad m_i(s) \in \mathbb{M}_k(e),$$

则有自由度

$$\chi_e(v) = \frac{1}{|e|} \int_e m v ds, \quad m \in \mathbb{M}_k(e).$$

- 为了保证顶点处的连续性, 上面的两个自由度用顶点值替换, 从而 C^0 连续给出自由度

$$\chi_a(v) = v(z), \quad z \in \partial e,$$

$$\chi_e(v) = \frac{1}{|e|} \int_e m v ds, \quad m \in \mathbb{M}_{k-2}(e),$$

共有 $k+1$ 个.

3. 可计算性

- 考察分部积分公式 (10.54). 对 I_1 , 由 $\partial_i Q_{3i}(p) \in \mathbb{P}_{k-4}(K)$, 我们给出内部自由度

$$\chi_K(v) = \frac{1}{|K|} \int_K m v dx, \quad m \in \mathbb{M}_{k-4}(K).$$

- 对 I_2 , 注意到 $[Q_{3n}(p) + \partial_t M_{tn}(p)]|_e \in \mathbb{P}_{k-3}(e)$, 从而该项可由自由度表示 (实际上 $v|_e$ 已经能够显式计算出来). 注意, **C^0 连续要求有直到 $k-2$ 阶的边界函数矩量, 而这里用不到 $k-2$ 阶的.**

- 对 I_3 , 由 $M_{nn}(p)|_e \in \mathbb{P}_{k-2}(e)$, 我们添加自由度

$$\chi_{n_e}(v) = \int_e m \partial_n v ds, \quad m \in \mathbb{M}_{k-2}(e).$$

注意, 这里并未要求 $\partial_n v|_e$ 是多项式, 只是纯粹从可计算性角度来添加自由度.

4. 唯一可解性与虚拟元空间的构造

- 前面给出的自由度保证了 C^0 连续性与可计算性, 现在来确定相应的虚拟元空间. 设虚拟元空间为 $V_k(K)$, 它要由自由度唯一确定. 也就是说, 设 $v \in V_k(K)$ 且它的所有自由度值为零, 我们要保证 $v \equiv 0$.
- 由连续性的自由度为零可得 $v|_{\partial K} = 0$.
- 注意到 (10.55), 即

$$\int_K |\Delta v|^2 dx = \int_K v \Delta^2 v dx + \int_{\partial K} \partial_n v \Delta v ds - \int_{\partial K} v \partial_n (\Delta v) ds, \quad (10.57)$$

若要求

$$\Delta^2 v \in \mathbb{P}_{k-4}(K), \quad \Delta v|_e \in \mathbb{P}_{k-2}(e), \quad e \subset \partial K,$$

则右端前两项化为自由度, 最后一项为零, 因为 $v|_{\partial K} = 0$. 于是

$$\int_K |\Delta v|^2 dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta v = 0.$$

这样, 我们有边值问题

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & x \in K, \\ v|_{\partial K} = 0, \end{cases}$$

由此可知 $v \equiv 0$.

上面的分析表明, 虚拟元空间可取为

$$V_k(K) = \{v \in H^2(K) : \Delta^2 v \in \mathbb{P}_{k-4}(K), \quad v|_{\partial K} \in \mathbb{B}_k(\partial K)\},$$

其中, 边界元空间为

$$\mathbb{B}_k(\partial K) = \{v \in C^0(\partial K) : v|_e \in \mathbb{P}_k(e), \Delta v|_e \in \mathbb{P}_{k-2}(e), e \subset \partial K\}.$$

自由度包括

- 顶点处的函数值,

$$\chi_a(v) = v(z_i), \quad i = 1, \dots, N_v.$$

- 边上 v 的直到 $k-2$ 阶的矩量,

$$\chi_e(v) = \frac{1}{|e|} \int_e mv ds, \quad v \in \mathbb{M}_{k-2}(e).$$

- 边上 $\partial_n v$ 的直到 $k-2$ 阶的矩量,

$$\chi_{n_e}(v) = \int_e m \partial_n v ds, \quad m \in \mathbb{M}_{k-2}(e).$$

- 单元 K 上直到 $k-4$ 阶的矩量,

$$\chi_K(v) = \frac{1}{|K|} \int_K mv dx, \quad v \in \mathbb{M}_{k-4}(K).$$

注 10.3 前两种自由度决定了 $v|_{\partial K}$; 第三种自由度决定了 $\Pi_{k-2,e}^0(v|_e)$, $e \subset \partial K$; 最后一种自由度决定了 $\Pi_{k-4}^0 v$. 而且, 我们有

$$h_K^{-1} (\|\chi_1(v)\|_{l^2}^2 + \|\chi_2(v)\|_{l^2}^2)^{1/2} \asymp h_K^{-3/2} \left(\sum_{e \subset \partial K} \|\Pi_{k,e}^0 v\|_{0,e}^2 \right)^{1/2}, \quad (10.58)$$

$$h_K^{-1} \|\chi_3(v)\|_{l^2} \asymp h_K^{-1/2} \left(\sum_{e \subset \partial K} \|\Pi_{k-2,e}^0 \partial_n v\|_{0,e}^2 \right)^{1/2}, \quad (10.59)$$

$$h_K^{-1} \|\chi_4(v)\|_{l^2} \asymp h_K^{-2} \|\Pi_{k-4}^0 v\|_{0,K}. \quad (10.60)$$

本文仅考虑最低阶, 即 $k=2$ 的情形 ($k \leq 1$ 椭圆投影定义的右端为零, 没有意义). 自由度包含顶点值泛函和边界的两种矩量

$$\chi_e(v) = \frac{1}{|e|} \int_e v ds, \quad \chi_{n_e}(v) = \int_e \partial_n v ds,$$

如下图所示

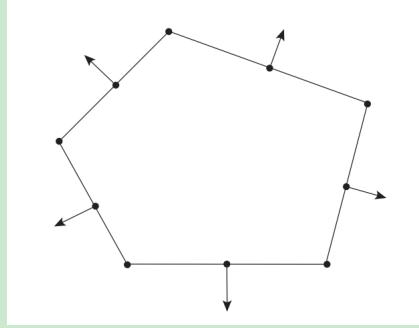


图 21. C^0 连续虚拟元空间的局部自由度 ($k = 2$)

注意边界的第一种矩量也可换成边界中点值, 而第二种矩量是带方向的. 设单元顶点个数为 N_v , 则每个单元有 $N_k = 3N_v$ 个自由度, 排列为

- 顶点值泛函

$$\chi_i(v) = v(z_i), \quad i = 1, \dots, N_v.$$

- 边中点值泛函

$$\chi_{i+N_v}(v) = v(m_i), \quad i = 1, \dots, N_v.$$

- 边中点法向导数的矩量

$$\chi_{2N_v+i}(v) = \int_{e_i} \partial_n v \, ds, \quad i = 1, \dots, N_v.$$

注 10.4 文献 [?] 提出了三角形上九个自由度的改进 Morley 元 (见那里的 Figure 2, 称为 NTW 元), 可以看到那里的自由度与 C^0 元一致 ($k = 2$). 正因为如此, C^0 虚拟元可看作改进 Morley 元的推广. 需要注意的是, 改进 Morley 元的有限元空间与 C^0 元在三角形情形时并不相同. 正因为如此, 虚拟元方法的相同自由度对应的虚拟元空间不唯一. 虚拟元方法的核心是自由度, 虚拟元空间只是用来进行理论分析.

10.2.2 过渡矩阵 D

设 $V_k(K)$ 为 C^0 连续的非协调虚拟元空间, 基函数排成行向量, 记为

$$\phi^T = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_k}),$$

其中, N_k 是基函数的个数. 设 $\mathbb{P}_k(K)$ 的基为

$$m^T = (m_1, m_2, \dots, m_{N_p}),$$

因 $\mathbb{P}_k(K) \subset V_k(K)$, 故可设

$$(m_1, m_2, \dots, m_{N_p}) = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_k})D, \quad \text{或} \quad m^T = \phi^T D.$$

根据自由度的定义,

$$m_\alpha = \sum_{i=1}^{N_k} \phi_i D_{i\alpha}, \quad D_{i\alpha} = \chi_i(m_\alpha),$$

且 D 是 $N_k \times N_p$ 的矩阵.

$\mathbb{P}_2(K)$ 的尺度单项式集合 m^T 由以下元素组成

$$m_1(x, y) = 1, \quad m_2(x, y) = \frac{x - x_K}{h_K}, \quad m_3(x, y) = \frac{y - y_K}{h_K},$$

$$m_4(x, y) = \frac{(x - x_K)^2}{h_K^2}, \quad m_5(x, y) = \frac{(x - x_K)(y - y_K)}{h_K^2}, \quad m_6(x, y) = \frac{(y - y_K)^2}{h_K^2},$$

从而 ∇m^T 为

$$\nabla m_1 = [0, 0], \quad \nabla m_2 = [\frac{1}{h_K}, 0], \quad \nabla m_3 = [0, \frac{1}{h_K}],$$

$$\nabla m_4 = [\frac{2(x - x_K)}{h_K^2}, 0], \quad \nabla m_5 = [\frac{y - y_K}{h_K^2}, \frac{x - x_K}{h_K^2}], \quad \nabla m_6 = [0, \frac{2(y - y_K)}{h_K^2}].$$

现在来计算过渡矩阵. 顶点值和边中点值比较容易, 如下计算

```

1 % element information
2 index = elem{iel};      Nv = length(index);      Ndof = 3*Nv;
3 xK = centroid(iel,1);  yK = centroid(iel,2);  hK = diameter(iel);
4 x = node(index,1);    y = node(index,2); % vertices
5 v1 = 1:Nv; v2 = [2:Nv,1]; % edge index
6 xe = (x(v1)+x(v2))/2; ye = (y(v1)+y(v2))/2; % mid-edge
7 Ne = [y(v2)-y(v1), x(v1)-x(v2)]; % scaled outer normal vectors
8 he = sqrt(sum(Ne.^2,2));
9 ne = Ne./repmat(he,1,2); % outer normal vectors
10 te = [-ne(:,2), ne(:,1)];
11 % scaled monomials
12 m = @(x,y) [1+0*x, (x-xK)/hK, (y-yK)/hK, (x-xK).^2/hK.^2, ...
13 (x-xK).*(y-yK)/hK.^2, (y-yK).^2/hK.^2]; % m1, ..., m6
14 Gradm = @(x,y) [[0,0]; [1, 0]/hK; [0, 1]/hK; [2*(x-xK), 0]/hK.^2;
15 [(y-yK), (x-xK)]/hK.^2; [0, 2*(y-yK)]/hK.^2]; % grad m
16 % D
17 D1 = zeros(Ndof,Nm);
18 D1(1:2*Nv,:) = [m(x,y); m(xe,ye)]; % vertices and mid-edge points

```

再考虑边的法向矩量. 注意到 ∇m_α 次数不超过一次, 可用梯形公式计算, 即

$$\chi_{2N_v+i}(m_\alpha) = \int_e \nabla m_\alpha \cdot \mathbf{n}_e ds = \frac{1}{2} (\nabla m_\alpha(z_i) + \nabla m_\alpha(z_{i+1})) \cdot \mathbf{n}_e |e|, \quad e = e_i.$$

这里, $\mathbf{n}_e |e|$ 恰是定向边的反向逆时针旋转 90 度所得. 该部分如下计算

```

1 for i = 1:Nv % normal moments on edges
2     gradi = 0.5*(Gradm(x(v1(i)),y(v1(i)))+Gradm(x(v2(i)),y(v2(i))));
3     D1(2*Nv+i,:) = Ne(i,:)*gradi';
4 end
5 D{iel} = D1;

```

10.2.3 椭圆投影

椭圆投影 Π^K 满足

$$\begin{cases} a^K(\Pi^K \phi_i, m_\alpha) = a^K(\phi_i, m_\alpha) \\ P_0(\Pi^K \phi_i) = P_0(\phi_i) \quad , \quad i = 1, \dots, N_k, \quad \alpha = 1, \dots, N_p, \\ P_0(\nabla \Pi^K \phi_i) = P_0(\nabla \phi_i) \end{cases}$$

写为向量形式为

$$\begin{cases} a^K(m, \Pi^K \phi^T) = a^K(m, \phi^T), \\ P_0(\Pi^K \phi^T) = P_0(\phi^T), \\ P_0(\nabla \Pi^K \phi^T) = P_0(\nabla \phi^T). \end{cases}$$

注意, 第二个限制条件实际上有两个限制, 即 x 和 y 方向的两个导数. 对 $p \in \mathbb{P}_2$, 有

$$a^K(p, v) = - \int_{\partial K} M_{nn}(p) \partial_n v \, ds + \sum_{i=1}^{N_v} [M_{tn}(p)](z_i) v(z_i),$$

而

$$P_0 v = \frac{1}{N_v} \sum_{i=1}^{N_v} v(z_i) \quad \text{或} \quad P_0(v) = \int_{\partial K} v \, ds,$$

前者对应第一个限制条件, 后者对应第二个限制条件.

设 Π^K 在节点基下的矩阵记为 $\boldsymbol{\Pi}^K$, 即

$$\Pi^K(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_k}) = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_k}) \boldsymbol{\Pi}^K \quad \text{或} \quad \Pi^K \phi^T = \phi^T \boldsymbol{\Pi}^K.$$

根据自由度的定义, $\boldsymbol{\Pi}^K$ 的第 j 列就是 $\Pi_k^\nabla \phi_j$ 的自由度向量, 即

$$\boldsymbol{\Pi}^K = (\chi_i(\Pi^K \phi_j)).$$

设投影向量 $\Pi^K \phi^T$ 在多项式基 m^T 下的矩阵为 $\boldsymbol{\Pi}_*^K$, 即

$$\Pi^K \phi^T = m^T \boldsymbol{\Pi}_*^K.$$

两组不同基下的矩阵满足

$$\boldsymbol{\Pi}^K = D \boldsymbol{\Pi}_*^K.$$

令

$$G = a^K(m, m^T), \quad B = a^K(m, \phi^T),$$

则

$$\begin{cases} G \boldsymbol{\Pi}_*^K = B, \\ P_0(m^T) \boldsymbol{\Pi}_*^K = P_0(\phi^T), \\ P_0(\nabla m^T) \boldsymbol{\Pi}_*^K = P_0(\nabla \phi^T), \end{cases}$$

其中, G 是 $N_p \times N_p$ 的方阵, B 是 $N_k \times N_p$ 的矩阵. 而 $P_0(m^T)$ 是一行向量, $P_0(\nabla m^T)$ 是两行向量. 显然 G 的前三行为零, 限制条件的三个行向量替换前三行后得

$$\tilde{G}\Pi_*^K = \tilde{B},$$

式中,

$$\tilde{G}(i,:) = \begin{cases} P_0(m^T), & i = 1 \\ P_0(\partial_x m^T), & i = 2 \\ P_0(\partial_y m^T), & i = 3 \\ G(i,:), & i \geq 4 \end{cases}, \quad \tilde{B} = \begin{cases} P_0(\phi^T), & i = 1 \\ P_0(\partial_x \phi^T), & i = 2 \\ P_0(\partial_y \phi^T), & i = 3 \\ B(i,:), & i \geq 4 \end{cases},$$

且

$$\Pi_*^K = \tilde{G}^{-1}\tilde{B}, \quad \Pi_k^K = D\Pi_*^K.$$

\tilde{G} 或 G 不需要直接计算, 有如下的一致性关系

$$G = BD, \quad \tilde{G} = \tilde{B}D.$$

注 10.5 椭圆投影不能对 $\nu = 1$ 定义, 容易发现, 这是因为

$$\Delta m_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 5,$$

从而 $G = (\Delta m, \Delta m^T)_K$ 至少有 4 行为零, 但是现在只有三个限制条件, 它不足以保证 \tilde{G} 可逆.

现在来计算 B , 其元素为

$$\begin{aligned} B_{\alpha j} &= a^K(m_\alpha, \phi_j) = - \sum_{e \subset \partial K} \int_e M_{nn}(m_\alpha) \partial_n \phi_j ds + \sum_{i=1}^{N_v} [M_{tn}(m_\alpha)](z_i) \phi_j(z_i) \\ &=: J_1(\alpha, j) + J_2(\alpha, j), \end{aligned} \tag{10.61}$$

其中,

$$M_{nn}(p) = M_{ij}(p)n_i n_j, \quad M_{tn}(p) = M_{ij}(p)t_i n_j,$$

$$M_{ij}(p) = -D((1-\nu)\partial_{ij}p + \nu(\partial_{11}p + \partial_{22}p)\delta_{ij}).$$

注意到

	$m_\alpha(\alpha = 1, 2, 3)$	m_4	m_5	m_6
∂_{11}	0	$2/h_K^2$	0	0
∂_{12}	0	0	$1/h_K^2$	0
∂_{22}	0	0	0	$2/h_K^2$

由此可得 $M_{ij}(m_\alpha)$, 进而获得 M_{nn}, M_{tn} , 如下计算.

```

1      % \partial_ij (m)
2      D11 = zeros(Nm,1); D11(4) = 2/hK^2;
3      D12 = zeros(Nm,1); D12(5) = 1/hK^2;
4      D22 = zeros(Nm,1); D22(6) = 2/hK^2;

```

```

5      % Mij(m)
6      M11 = -para.D*((1-para.nu)*D11 + para.nu*(D11+D22));
7      M12 = -para.D*(1-para.nu)*D12;
8      M22 = -para.D*((1-para.nu)*D22 + para.nu*(D11+D22));
9      % Mnn(m) on e1,...,eNv
10     n1 = ne(:,1); n2 = ne(:,2);
11     Mnn = M11*(n1.*n1)' + M12*(n1.*n2+n2.*n1)' + M22*(n2.*n2)';
12     % Mtn(m) on e1,...,eNv
13     t1 = te(:,1); t2 = te(:,2);
14     Mtn = M11*(t1.*n1)' + M12*(t1.*n2+t2.*n1)' + M22*(t2.*n2)';

```

这里, M_{nn} 和 M_{tn} 行对应 m_α , 列对应 e_j .

对 J_1 , 因 $M_{nn}(m_\alpha)$ 在每条边上为常数, 故

$$J_1(\alpha, j) = - \sum_{e \subset \partial K} \int_e M_{nn}(m_\alpha) \partial_n \phi_j ds = - \sum_{e \subset \partial K} M_{nn}(m_\alpha) \int_e \partial_n \phi_j ds. \quad (10.62)$$

对固定的 $e = e_j$, 由基函数的 Kronecker 性质,

$$\int_e \partial_n \phi^T ds = [\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{e}_j],$$

其中, $\mathbf{0}$ 是 N_v 长度的全零行向量, \mathbf{e}_j 是 N_v 长度的自然基向量. 显然用 M_{nn} 的第 j 列乘以上面的行向量, 所得为 J_1 在边 e_j 上的结果, 循环求和即得 J_1 .

对 J_2 , 即

$$J_2(\alpha, j) = \sum_{i=1}^{N_v} [M_{tn}(m_\alpha)](z_i) \phi_j(z_i),$$

由跳跃定义,

$$[M_{tn}(m_\alpha)](z_i) = M_{tn}(m_\alpha)|_{z_i^-}^{z_i^+} = M_{tn}(m_\alpha)(z_i^+) - M_{tn}(m_\alpha)(z_i^-),$$

这里, $M_{tn}(m_\alpha)(z_i^+)$ 是 z_i 右侧边 e_i 上的结果, $M_{tn}(m_\alpha)(z_i^-)$ 是左侧边 e_{i-1} 上的结果. 而

$$\phi^T(z_i) = [\mathbf{e}_i, \mathbf{0}, \mathbf{0}].$$

综上, B 可如下计算

```

1      B1 = zeros(Nm,Ndof);
2      p1 = [Nv,1:Nv-1]; p2 = 1:Nv;
3      for j = 1:Nv % loop of edges
4          % nphi on ej
5          nphi = zeros(1,Ndof); nphi(2*Nv+j) = 1;
6          % Jump at zj
7          Jump = Mtn(:,p2(j))-Mtn(:,p1(j));
8          % phi at zj
9          phi = zeros(1,Ndof); phi(j) = 1;
10         % B1
11         B1 = B1 - Mnn(:,j)*nphi + Jump*phi;
12     end

```

再计算 B_s . 它的第一行容易获得, 显然为

$$\tilde{B}(1,:) = P_0(\phi^T) = \frac{1}{N_v} [\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}]. \quad (10.63)$$

对剩下的限制条件, 注意到

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} \nabla v \cdot \mathbf{n} ds &= \sum_{e \subset \partial K} \int_e \partial_{n_e} v n_e ds + \int_e \partial_{t_e} v t_e ds \\ &= \sum_{e \subset \partial K} n_e \int_e \partial_n v ds + \sum_{i=1}^{N_v} t_{e_i} (v(z_{i+1}) - v(z_i)), \end{aligned} \quad (10.64)$$

我们有

$$\begin{cases} \int_{\partial K} \nabla \phi_j ds = t_{e_{j-1}} - t_{e_j}, \\ \int_{\partial K} \nabla \phi_{N_v+j} ds = \mathbf{0}, \\ \int_{\partial K} \nabla \phi_{2N_v+j} ds = n_{e_j}. \end{cases}$$

```

1 % Bs
2 te = [-ne(:,2), ne(:,1)];
3 B1s = B1;
4 B1s(1,1:Nv) = 1/Nv;
5 B1s(2:3,1:Nv) = te([Nv,1:Nv-1],:) - te';
6 B1s(2:3,2*Nv+1:end) = ne';

```

有了 B, B_s, D , 我们就可用一致性关系计算 G, G_s .

```

1 % G, Gs
2 G{iel} = B1*D1; Gs{iel} = B1s*D1;

```

10.2.4 单元刚度矩阵与载荷向量的计算

令

$$A_K^1(i, j) = a^K(\Pi^K \phi_j, \Pi^K \phi_i),$$

$$\begin{aligned} A_K^2(i, j) &= S^K(\phi_j - \Pi^K \phi_j, \phi_i - \Pi^K \phi_i) \\ &= h_K^{-2} \sum_{r=1}^{N_k} \chi_r(\phi_j - \Pi^K \phi_j) \chi_r(\phi_i - \Pi^K \phi_i), \end{aligned}$$

则

$$A_K^1 = a^K(\phi, \phi^T) = (\Pi_*^K)^T a^K(m, m^T) \Pi_*^K = (\Pi_*^K)^T G \Pi_*^K,$$

$$A_K^2 = h_K^{-2} (\mathbf{I} - \Pi^K)^T (\mathbf{I} - \Pi^K).$$

单元刚度矩阵如下计算

```

1 Aelem = cell(NT,1);
2 % Projection
3 Pis = Gs{iel}\Bs{iel}; Pi = D{iel}*Pis; I = eye(size(Pi));
4 % Stiffness matrix
5 AK = Pis'*G{iel}*Pis + hK^(-2)*(I-Pi)*(I-Pi);
6 Aelem{iel} = reshape(AK',1,[]); % straighten as row vector for easy assembly

```

现在考虑单元载荷向量. 右端的

$$F_h^K(v) = \int_K \Pi_{k-2}^0 f v dx,$$

当 $k = 2$ 时, $\Pi_{k-2}^0 = \Pi_0^0 = P_0$, 即常值投影, 由 (6.15) 定义, 即单元顶点值的平均. 注意到

$$F_h^K(v) = \int_K \Pi_0^0 f v dx = \int_K \Pi_0^0 f \Pi_0^0 v dx,$$

我们有单元载荷向量为

$$F_K = \int_K P_0 f P_0 \phi dx = f(x_K, y_K) |K| P_0 \phi,$$

这里为了方便, $P_0 f$ 用中点值近似, 而 $P_0 \phi$ 由 (10.67) 给出.

```
1 PO = zeros(Ndof,1); PO(1:Nv) = 1/Nv;
2 fK = pde.f(cK)*areaK*PO;
```

10.2.5 符号刚度矩阵和载荷向量

局部自由度的后 N_v 个为边法向导数的矩量, 它是有方向的. 我们要取定一个方向, 从而相应修改刚度矩阵元素的符号. 注意到

$$a^K(\pm \varphi_i, \pm \varphi_j) = \pm \cdot \pm a^K(\varphi_i, \varphi_j),$$

为此可对应给出一个符号矩阵, 它记录 (i, j) 位置的符号.

1. 边的定向: 对单元的边 e , 规定逆时针方向为其在单元中的正向, 可用局部编号来确定.
2. 边的符号:
 - 对内部定向边, 称终点与起点整体编号差的符号为该边在单元中的符号.
 - 对边界边, 规定符号为正 (即 +1).
 - 显然对内部边, 限制在相邻两个单元上的符号相异, 因而可作为法向的符号.

下面说明如何获得固定单元边的符号, 用 `sgnelem` 存储.

- 执行如下语句可获得第 `iel` 个单元所有边的符号

```
1 index = elem{iel}; Nv = length(index);
2 v1 = 1:Nv; v2 = [2:Nv,1]; % edge index
3 sgnelem = sign(index(v2)-index(v1));
```

这里边界边的符号可能不正确.

- 利用逻辑运算可修改 `sgnelem` 中边界边的符号差 (边界边符号差为 1).

```
1 sgnelem = sign(diff(index([1:Nv,1])));
2 id = elem2edge{iel}; sgnbd = E(id); sgnelem(sgnbd) = 1;
3 sgnbase = ones(Ndof,1); sgnbase(2*Nv+1:end) = sgnelem;
4 sgnK = sgnbase*sgnbase'; sgnF = sgnbase;
```

这里, `bdIndex` 是边界边的自然序号, `E` 内部边对应 `false`, 边界边对应 `true`.

上面的过程在单元刚度矩阵循环计算的过程中同步处理, 不用存储为元胞数组. 最终的单元刚度矩阵和载荷向量为

```
1     AK = AK.*sgnK;   fK = fK.*sgnF;
```

10.2.6 边界条件的处理

我们考虑的是强加边界条件

$$w = \partial_n w = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega,$$

这里可以是非齐次的 (这两个条件都是 Dirichlet 边界条件).

$w|_{\partial\Omega} = g$ 与常规情形一样处理. 现考虑 $\partial_n w|_{\partial\Omega} = g_n$.

1. 第三种自由度为

$$\chi(v) = \int_e \partial_n v ds,$$

因 $\partial_n w$ 在边界线段 e 上的值已知, 故可用数值积分计算边界上的该类自由度.

2. 在 `setboundary.m` 中我们给出了 Dirichlet 点的编号 `bdEdgeIdxD` 以及边界边的编号 `bdEdgeIdx`, 这样约束点的编号为

```
1 bdNodeIdx = bdStruct.bdNodeIdx;
2 bdEdgeD = bdStruct.bdEdgeD;
3 g_D = pde.g_D; Dw = pde.Du;
4 id = [bdNodeIdx; bdEdgeIdx+N; bdEdgeIdx+N+NE];
```

由此给出自由点编号

```
1 isBdNode = false(NDof,1); isBdNode(id) = true;
2 bdDof = (isBdNode); freeDof = (~isBdNode);
```

3. 边界顶点值和边界边中点值为

```
1 % vertices on the boundary
2 nodeD = node(bdNodeIdx,:); wD = g_D(nodeD);
3 % mid-edge on the boundary
4 z1 = node(bdEdgeD(:,1),:); z2 = node(bdEdgeD(:,2),:); zc = (z1+z2)./2;
5 wDc = g_D(zc);
```

边界边法向矩量如下计算

```
1 % moments on the boundary
2 eb = z1-z2; % e = z2-z1
3 neb = [-eb(:,2),eb(:,1)]; % scaled ne
4 wuD = sum(1/6*(Dw(z1)+4*Dw(zc)+Dw(z2)).*neb,2);
```

这里 Dw 是梯度 ∇w , 而 $\partial_n w = \nabla w \cdot \vec{n}$ 中的 \vec{n} 通过边界边的旋转获得 (并进行单位化), 且用 Simpson 公式近似积分.

4. 这样, 我们如下求解

```

1 w = zeros(NNdof,1); w(bdDof) = [wD;wDc;wnD];
2 ff = ff - kk*w;
3 w(freeDof) = kk(freeDof,freeDof)\ff(freeDof);

```

10.2.7 程序整理

主程序如下

```

1 clc; close all;
2 clear variables;
3
4 %% Parameters
5 nameV = [200, 400, 600, 800, 1000];
6 maxIt = length(nameV);
7 h = zeros(maxIt,1); N = zeros(maxIt,1);
8 ErrL2 = zeros(maxIt,1);
9 ErrH1 = zeros(maxIt,1);
10 ErrH2 = zeros(maxIt,1);
11 ErrI = zeros(maxIt,1);
12
13 %% PDE data
14 pde = PlateBendingData();
15
16 %% Virtual element method
17 for k = 1:maxIt
18     % load mesh
19     load( ['meshdata', num2str(nameV(k)), '.mat'] );
20     % get boundary information
21     bdStruct = setboundary(node,elem);
22     % solve
23     [w,info] = PlateBending_COVEM(node,elem,pde,bdStruct);
24     % record and plot
25     N(k) = length(w); h(k) = 1/sqrt(size(elem,1));
26     if size(elem,1)<2e3
27         figure(1); clf;
28         subplot(1,3,1), showmesh(node,elem);
29         subplot(1,3,2), showsolution(node,elem,w(1:size(node,1)));
30         subplot(1,3,3), showsolution(node,elem,pde.uexact(node));
31     end
32     % compute errors in discrete L2 and H1 norms
33     index = info.elem2dof; % elemenwise global index
34     chi = cellfun(@(id) w(id), index, 'UniformOutput', false); % elementwise ...
            numerical d.o.f.s
35     kOrder = 2;
36     Ph = info.Ph;
37     ErrL2(k) = getL2error(node,elem,Ph,chi,pde,kOrder);
38     ErrH1(k) = getH1error(node,elem,Ph,chi,pde,kOrder);
39     ErrH2(k) = getH2error(node,elem,Ph,chi,pde,kOrder);
40     % compute errors in discrete energy norm
41     % auxstructure
42     auxT = auxstructure(node,elem);
43     edge = auxT.edge;
44     % chi1: evaluation at all vertices
45     uexact = pde.uexact;
46     chi1 = uexact(node);
47     % chi2: evaluation at all mid-edge points

```

```

48      z1 = node(edge(:,1),:); z2 = node(edge(:,2),:); zc = (z1+z2)/2;
49      chi2 = uexact(zc);
50      % chi3: moments of \partial_n v on edges with given orientation
51      e = z1-z2; % e = z2-z1
52      Ne = [-e(:,2),e(:,1)]; % scaled ne
53      Dw = pde.Du;
54      Dw1 = Dw(z1); Dwc = Dw(zc); Dw2 = Dw(z2);
55      wnd = sum(1/6*(Dw1+4*Dwc+Dw2).*Ne,2);
56      chi3 = wnd;
57      % chi
58      chi = w;
59      chie = [chi1; chi2; chi3];
60      % Relative error
61      kk = info.kk; freeDof = info.freeDof;
62      kk = kk(freeDof,freeDof); chie = chie(freeDof); chi = chi(freeDof);
63      ErrI(k) = sqrt(abs((chi-chie)'*kk*(chi-chie))/abs(chie'*kk*chie));
64 end
65
66 %% Plot convergence rates and display error table
67 figure(2);
68 showrateh(h,ErrL2,ErrH1,ErrH2,ErrI);
69
70 fprintf('\n');
71 disp('Table: Error')
72 colname = {'#Dof','h','||u-u_h||','|u-u_h|_1','|u-u_h|_2','||u_I-u_h||_A'};
73 disptable(colname,N,[],h,'%0.3e',ErrL2,'%0.5e',ErrH1,'%0.5e',ErrH2,'%0.5e',ErrI,'%0.5e');

```

函数文件见 GitHub.

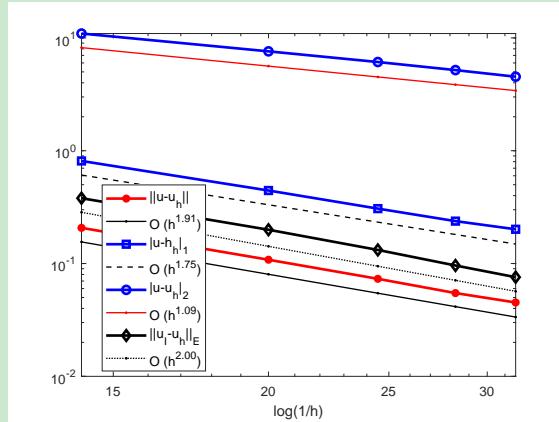


图 22. 板弯问题 C^0 虚拟元方法的误差阶

可以看出, H^2 和 L^2 误差都达到最优阶 (分别为 1, 2 阶); H^1 误差也近乎最优阶 2; 能量范数误差为 2 阶, 它有超收敛现象.

10.2.8 C^0 -强化处理

为了保证有内部自由度, 我们可引入提升空间

$$\tilde{V}_k(K) = \left\{ v \in H^2(K) : \Delta^2 v \in \mathbb{P}_{k-2}(K), v|_{\partial K} \in \mathbb{B}_k(\partial K) \right\},$$

其中, 边界元空间为

$$\mathbb{B}_k(\partial K) = \{v \in C^0(\partial K) : v|_e \in \mathbb{P}_k(e), \Delta v|_e \in \mathbb{P}_{k-2}(e), e \subset \partial K\}.$$

在该空间中可定义 L^2 投影 Π_{k-2}^0 . 注意到椭圆投影的计算用不到 $k-3$ 和 $k-2$ 阶的内部矩量, 为此我们引入强化空间

$$\begin{aligned} W_k(K) = & \{v \in H^2(K) : \Delta^2 v \in \mathbb{P}_{k-2}(K), \\ & \int_K \Pi^K v m dx = \int_K v m dx, \quad m \in \mathbb{M}_{k-2}(K) \setminus \mathbb{M}_{k-4}(K), \\ & v|_{\partial K} \in \mathbb{B}_k(\partial K)\}. \end{aligned}$$

该空间的自由度与 C^0 元的一致. 注意引入这个空间的目的就是为了计算 L^2 投影 Π_{k-2}^0 .

对最低阶 $k=2$, 显然有 $\Pi_{k-2}^0 = \Pi_0^0 = \Pi^K$. 椭圆投影的计算同 C^0 元. 右端采用 L^2 投影近似

$$\ell_h^K(v) = \int_K f \Pi_{k-2}^0 v dx.$$

单元载荷向量为

$$F_K = \int_K f \Pi_{k-2}^0 \phi dx = (\boldsymbol{\Pi}_{k-2,*}^0)^T \int_K f m^{k-2} dx,$$

式中, m^{k-2} 为直到 $k-2$ 阶的尺度单项式向量.

注 10.6 强化技巧的计算结果与前面的差不多, 1.75 可近似认为是二阶. 事实上, 如果使用单元个数为 100,200,300,400,500 的网格进行试验, 那么 H^1 的误差阶变为 1.87. 由于当 $k=2$ 时, L^2 投影就是椭圆投影, 为此后面不需要再考虑这种强化技巧.

10.3 Morley 型非协调 VEM

前面已经提到, 从可计算的角度来说, 在分部积分公式

$$\begin{aligned} a^K(p, v) = & - \int_K Q_{3i,i}(p) v dx_1 dx_2 \\ & + \int_{\partial K}^m (Q_{3n}(p) + \partial_t M_{tn}(p)) v ds - \int_{\partial K} M_{nn}(p) \partial_n v ds \\ & + \sum_{i=1}^m [M_{tn}(p)](z_i) v(z_i) \\ =: & I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

中, 我们用不到 I_2 边界函数的 $k-2$ 阶矩量. 为此, 去掉相应的自由度, C^0 的编程过程稍加改动即可获得 Morley 型自由度的计算结果.

剩下的就是用自由度定义函数的延拓方式.

- 注意到 $\Pi^K v$ 的计算用不到 $k-2$ 阶矩量, 正因为如此, $\Pi^K v$ 的 $k-2$ 阶矩量 $\int_e m_{k-2}^e \Pi^K v ds$ 也无需 v 的 $k-2$ 阶矩量就可计算. 为此, 我们用 $\Pi^K v$ 的 $k-2$ 阶矩量替代 v 的 $k-2$ 阶矩量, 即

定义

$$\int_e m_{k-2}^e v \mathrm{d}s := \int_e m_{k-2}^e \Pi^K v \mathrm{d}s.$$

也就是说, 对 $v \in V_k(K)$ ($k = 2$), 在展开式

$$v = \sum_{i=1}^{N_v} \chi_i(v) \phi_i + \chi_{N_v+i}(v) \phi_{N_v+i} + \chi_{2N_v+i}(v) \phi_{2N_v+i}$$

中, 我们将第二部分基函数对应的自由度替换为 $\chi_{N_v+i}(\Pi^K v)$, 即定义新函数

$$v^M = \sum_{i=1}^{N_v} \chi_i(v) \phi_i + \chi_{N_v+i}(\Pi^K v) \phi_{N_v+i} + \chi_{2N_v+i}(v) \phi_{2N_v+i},$$

这就是我们给出的延拓方式.

- 记 C^0 连续的虚拟元空间为 $\tilde{V}_k(K)$, 上面的延拓方式表明, 我们定义的局部 Morley 元空间为

$$V_k(K) = \left\{ v \in \tilde{V}_k(K) : \int_e m_{k-2}^e \Pi^K v \mathrm{d}s = \int_e m_{k-2}^e v \mathrm{d}s \right\}.$$

注意, 尽管 $V_k(K)$ 是 C^0 连续空间的子空间, 但这只是局部来说的, 整体上并不连续.

本文仅考虑最低阶, 即 $k = 2$ 的情形. 自由度包含顶点值泛函和边界的法向导数矩量

$$\chi_{n_e}(v) = \int_e \partial_n v \mathrm{d}s,$$

如下图所示

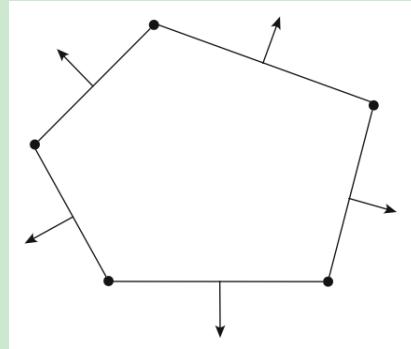


图 23. Morley 型虚拟元空间的局部自由度 ($k = 2$)

设单元顶点个数为 N_v , 则每个单元有 $N_k = 2N_v$ 个自由度, 排列为

- 顶点值泛函

$$\chi_i(v) = v(z_i), \quad i = 1, \dots, N_v.$$

- 边中点法向导数的矩量

$$\chi_{N_v+i}(v) = \int_{e_i} \partial_n v \mathrm{d}s, \quad i = 1, \dots, N_v.$$

注 10.7 上面给出的自由度可以有不同的延拓方式.

后面重复一下 C^0 的过程.

10.3.1 过渡矩阵 D

设 $V_k(K)$ 为 C^0 连续的非协调虚拟元空间, 基函数排成行向量, 记为

$$\phi^T = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_k}),$$

其中, N_k 是基函数的个数. 设 $\mathbb{P}_k(K)$ 的基为

$$m^T = (m_1, m_2, \dots, m_{N_p}),$$

因 $\mathbb{P}_k(K) \subset V_k(K)$, 故可设

$$(m_1, m_2, \dots, m_{N_p}) = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_k})D, \quad \text{或} \quad m^T = \phi^T D.$$

根据自由度的定义,

$$m_\alpha = \sum_{i=1}^{N_k} \phi_i D_{i\alpha}, \quad D_{i\alpha} = \chi_i(m_\alpha),$$

且 D 是 $N_k \times N_p$ 的矩阵.

$\mathbb{P}_2(K)$ 的尺度单项式集合 m^T 由以下元素组成

$$m_1(x, y) = 1, \quad m_2(x, y) = \frac{x - x_K}{h_K}, \quad m_3(x, y) = \frac{y - y_K}{h_K},$$

$$m_4(x, y) = \frac{(x - x_K)^2}{h_K^2}, \quad m_5(x, y) = \frac{(x - x_K)(y - y_K)}{h_K^2}, \quad m_6(x, y) = \frac{(y - y_K)^2}{h_K^2},$$

从而 ∇m^T 为

$$\nabla m_1 = [0, 0], \quad \nabla m_2 = [\frac{1}{h_K}, 0], \quad \nabla m_3 = [0, \frac{1}{h_K}],$$

$$\nabla m_4 = [\frac{2(x - x_K)}{h_K^2}, 0], \quad \nabla m_5 = [\frac{y - y_K}{h_K^2}, \frac{x - x_K}{h_K^2}], \quad \nabla m_6(x, y) = [0, \frac{2(y - y_K)}{h_K^2}].$$

现在来计算过渡矩阵. 顶点值和边中点值比较容易, 如下计算

```

1 % element information
2 index = elem{iel};      Nv = length(index);      Ndof = 2*Nv;
3 xK = centroid(iel,1);  yK = centroid(iel,2);  hK = diameter(iel);
4 x = node(index,1);    y = node(index,2); % vertices
5 v1 = 1:Nv; v2 = [2:Nv,1]; % edge index
6 Ne = [y(v2)-y(v1), x(v1)-x(v2)]; % scaled outer normal vectors
7 he = sqrt(sum(Ne.^2,2));
8 ne = Ne./repmat(he,1,2); % outer normal vectors
9 te = [-ne(:,2), ne(:,1)];
10 % scaled monomials
11 m = @([x,y] [1+0*x, (x-xK)/hK, (y-yK)/hK, (x-xK).^2/hK.^2, ...
12 (x-xK).*(y-yK)/hK.^2, (y-yK).^2/hK.^2]; % m1,...,m6
13 Gradm = @([x,y] [[0,0]; [1, 0]/hK; [0, 1]/hK; [2*(x-xK), 0]/hK.^2];

```

```

14      [(y-yK), (x-xK)]/hK^2; [0, 2*(y-yK)]/hK^2]; % grad m
15  %
16  D1 = zeros(Ndof,Nm);
17  D1(1:Nv,:) = m(x,y); % vertices

```

再考虑边的法向矩量. 注意到 ∇m_α 次数不超过一次, 可用梯形公式计算, 即

$$\chi_{Nv+i}(m_\alpha) = \int_e \nabla m_\alpha \cdot \mathbf{n}_e ds = \frac{1}{2} (\nabla m_\alpha(z_i) + \nabla m_\alpha(z_{i+1})) \cdot \mathbf{n}_e |e|, \quad e = e_i.$$

这里, $\mathbf{n}_e |e|$ 恰是定向边的反向逆时针旋转 90 度所得. 该部分如下计算

```

1  for i = 1:Nv
2      gradi = 0.5*(Gradm(x(v1(i)),y(v1(i)))+Gradm(x(v2(i)),y(v2(i))));
3      D1(Nv+i,:) = Ne(i,:)*gradi';
4  end
5  D{iel} = D1;

```

10.3.2 椭圆投影的计算

椭圆投影 Π^K 满足

$$\begin{cases} a^K(\Pi^K \phi_i, m_\alpha) = a^K(\phi_i, m_\alpha) \\ P_0(\Pi^K \phi_i) = P_0(\phi_i) \quad , \quad i = 1, \dots, N_k, \quad \alpha = 1, \dots, N_p, \\ P_0(\nabla \Pi^K \phi_i) = P_0(\nabla \phi_i) \end{cases}$$

写为向量形式为

$$\begin{cases} a^K(m, \Pi^K \phi^T) = a^K(m, \phi^T), \\ P_0(\Pi^K \phi^T) = P_0(\phi^T), \\ P_0(\nabla \Pi^K \phi^T) = P_0(\nabla \phi^T). \end{cases}$$

注意, 第二个限制条件实际上有两个限制, 即 x 和 y 方向的两个导数. 对 $p \in \mathbb{P}_2$, 有

$$a^K(p, v) = - \int_{\partial K} M_{nn}(p) \partial_n v ds + \sum_{i=1}^{N_v} [M_{tn}(p)](z_i) v(z_i),$$

而

$$P_0 v = \frac{1}{N_v} \sum_{i=1}^{N_v} v(z_i) \text{ 或 } P_0(v) = \int_{\partial K} v ds,$$

前者对应第一个限制条件, 后者对应第二个限制条件.

设 Π^K 在节点基下的矩阵记为 $\boldsymbol{\Pi}^K$, 即

$$\Pi^K(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_k}) = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_k}) \boldsymbol{\Pi}^K \quad \text{或} \quad \Pi^K \phi^T = \phi^T \boldsymbol{\Pi}^K.$$

根据自由度的定义, $\boldsymbol{\Pi}^K$ 的第 j 列就是 $\Pi_k^\nabla \phi_j$ 的自由度向量, 即

$$\boldsymbol{\Pi}^K = (\chi_i(\Pi^K \phi_j)).$$

设投影向量 $\Pi^K \phi^T$ 在多项式基 m^T 下的矩阵为 $\boldsymbol{\Pi}_*^K$, 即

$$\Pi^K \phi^T = m^T \boldsymbol{\Pi}_*^K.$$

两组不同基下的矩阵满足

$$\boldsymbol{\Pi}^K = D \boldsymbol{\Pi}_*^K.$$

令

$$G = a^K(m, m^T), \quad B = a^K(m, \phi^T),$$

则

$$\begin{cases} G \boldsymbol{\Pi}_*^K = B, \\ P_0(m^T) \boldsymbol{\Pi}_*^K = P_0(\phi^T), \\ P_0(\nabla m^T) \boldsymbol{\Pi}_*^K = P_0(\nabla \phi^T), \end{cases}$$

其中, G 是 $N_p \times N_p$ 的方阵, B 是 $N_k \times N_p$ 的矩阵. 而 $P_0(m^T)$ 是一行向量, $P_0(\nabla m^T)$ 是两行向量. 显然 G 的前三行为零, 限制条件的三个行向量替换前三行后得

$$\tilde{G} \boldsymbol{\Pi}_*^K = \tilde{B},$$

式中,

$$\tilde{G}(i,:) = \begin{cases} P_0(m^T), & i = 1 \\ P_0(\partial_x m^T), & i = 2 \\ P_0(\partial_y m^T), & i = 3 \\ G(i,:), & i \geq 4 \end{cases}, \quad \tilde{B} = \begin{cases} P_0(\phi^T), & i = 1 \\ P_0(\partial_x \phi^T), & i = 2 \\ P_0(\partial_y \phi^T), & i = 3 \\ B(i,:), & i \geq 4 \end{cases},$$

且

$$\boldsymbol{\Pi}_*^K = \tilde{G}^{-1} \tilde{B}, \quad \boldsymbol{\Pi}_k^K = D \boldsymbol{\Pi}_*^K.$$

\tilde{G} 或 G 不需要直接计算, 有如下的一致性关系

$$G = BD, \quad \tilde{G} = \tilde{B}D.$$

现在来计算 B , 其元素为

$$\begin{aligned} B_{\alpha j} &= a^K(m_\alpha, \phi_j) = - \sum_{e \subset \partial K} \int_e M_{nn}(m_\alpha) \partial_n \phi_j ds + \sum_{i=1}^{N_v} [M_{tn}(m_\alpha)](z_i) \phi_j(z_i) \\ &=: J_1(\alpha, j) + J_2(\alpha, j), \end{aligned} \tag{10.65}$$

其中,

$$M_{nn}(p) = M_{ij}(p) n_i n_j, \quad M_{tn}(p) = M_{ij}(p) t_i n_j,$$

$$M_{ij}(p) = -D ((1-\nu) \partial_{ij} p + \nu (\partial_{11} p + \partial_{22} p) \delta_{ij}).$$

注意到

	$m_\alpha(\alpha = 1, 2, 3)$	m_4	m_5	m_6
∂_{11}	0	$2/h_K^2$	0	0
∂_{12}	0	0	$1/h_K^2$	0
∂_{22}	0	0	0	$2/h_K^2$

由此可得 $M_{ij}(m_\alpha)$, 进而获得 M_{nn}, M_{tn} , 如下计算.

```

1    % \partial_ij (m)
2    D11 = zeros(Nm,1); D11(4) = 2/hK^2;
3    D12 = zeros(Nm,1); D12(5) = 1/hK^2;
4    D22 = zeros(Nm,1); D22(6) = 2/hK^2;
5    % Mij(m)
6    M11 = -para.D*((1-para.nu)*D11 + para.nu*(D11+D22));
7    M12 = -para.D*(1-para.nu)*D12;
8    M22 = -para.D*((1-para.nu)*D22 + para.nu*(D11+D22));
9    % Mnn(m) on e1,...,eNv
10   n1 = ne(:,1); n2 = ne(:,2);
11   Mnn = M11*(n1.*n1)' + M12*(n1.*n2+n2.*n1)' + M22*(n2.*n2)';
12   % Mtn(m) on e1,...,eNv
13   t1 = te(:,1); t2 = te(:,2);
14   Mtn = M11*(t1.*n1)' + M12*(t1.*n2+t2.*n1)' + M22*(t2.*n2)';

```

这里, M_{nn} 和 M_{tn} 行对应 m_α , 列对应 e_j .

对 J_1 , 因 $M_{nn}(m_\alpha)$ 在每条边上为常数, 故

$$J_1(\alpha, j) = - \sum_{e \subset \partial K} \int_e M_{nn}(m_\alpha) \partial_n \phi_j ds = - \sum_{e \subset \partial K} M_{nn}(m_\alpha) \int_e \partial_n \phi_j ds. \quad (10.66)$$

对固定的 $e = e_j$, 由基函数的 Kronecker 性质,

$$\int_e \partial_n \phi^T ds = [\mathbf{0}, \mathbf{e}_j],$$

其中, $\mathbf{0}$ 是 N_v 长度的全零行向量, \mathbf{e}_j 是 N_v 长度的自然基向量. 显然用 M_{nn} 的第 j 列乘以上面的行向量, 所得为 J_1 在边 e_j 上的结果, 循环求和即得 J_1 .

对 J_2 , 即

$$J_2(\alpha, j) = \sum_{i=1}^{N_v} [M_{tn}(m_\alpha)](z_i) \phi_j(z_i),$$

由跳量定义,

$$[M_{tn}(m_\alpha)](z_i) = M_{tn}(m_\alpha)|_{z_i^-}^{z_i^+} = M_{tn}(m_\alpha)(z_i^+) - M_{tn}(m_\alpha)(z_i^-),$$

这里, $M_{tn}(m_\alpha)(z_i^+)$ 是 z_i 右侧边 e_i 上的结果, $M_{tn}(m_\alpha)(z_i^-)$ 是左侧边 e_{i-1} 上的结果. 而

$$\phi^T(z_i) = [\mathbf{e}_i, \mathbf{0}].$$

综上, B 可如下计算

```

1    B1 = zeros(Nm,Ndof);
2    p1 = [Nv,1:Nv-1]; p2 = 1:Nv;
3    for j = 1:Nv % loop of edges
4        % nphi on ej
5        nphi = zeros(1,Ndof); nphi(2*Nv+j) = 1;

```

```

6      % Jump at zj
7      Jump = Mtn(:,p2(j))-Mtn(:,p1(j));
8      % phi at zj
9      phi = zeros(1,Ndof); phi(j) = 1;
10     % B1
11     B1 = B1 - Mnn(:,j)*nphi + Jump*phi;
12 end

```

再计算 B_s . 它的第一行容易获得, 显然为

$$\tilde{B}(1,:) = P_0(\phi^T) = \frac{1}{N_v}[\mathbf{1}, \mathbf{0}]. \quad (10.67)$$

对剩下的限制条件, 注意到

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} \nabla v \, ds &= \sum_{e \subset \partial K} \int_e \partial_{n_e} v n_e \, ds + \int_e \partial_{t_e} v t_e \, ds \\ &= \sum_{e \subset \partial K} n_e \int_e \partial_n v \, ds + \sum_{i=1}^{N_v} t_{e_i} (v(z_{i+1}) - v(z_i)), \end{aligned} \quad (10.68)$$

我们有

$$\begin{cases} \int_{\partial K} \nabla \phi_j \, ds = t_{e_{j-1}} - t_{e_j}, \\ \int_{\partial K} \nabla \phi_{N_v+j} \, ds = n_{e_j}. \end{cases}$$

```

1  % Bs
2  B1s = B1;
3  % first constraint
4  B1s(1,1:Nv) = 1/Nv;
5  % second constraint
6  B1s(2:3,1:Nv) = te([Nv,1:Nv-1],:) - te';
7  B1s(2:3,Nv+1:end) = ne';
8  Bs{iel} = B1s;

```

有了 B, B_s, D , 我们就可用一致性关系计算 G, G_s .

```

1  % G, Gs
2  G{iel} = B1*D1; Gs{iel} = B1s*D1;

```

10.3.3 单元刚度矩阵与载荷向量的计算

令

$$A_K^1(i,j) = a^K(\Pi^K \phi_j, \Pi^K \phi_i),$$

$$\begin{aligned} A_K^2(i,j) &= S^K(\phi_j - \Pi^K \phi_j, \phi_i - \Pi^K \phi_i) \\ &= h_K^{-2} \sum_{r=1}^{N_k} \chi_r(\phi_j - \Pi^K \phi_j) \chi_r(\phi_i - \Pi^K \phi_i), \end{aligned}$$

则

$$A_K^1 = a^K(\phi, \phi^T) = (\boldsymbol{\Pi}_*^K)^T a^K(m, m^T) \boldsymbol{\Pi}_*^K = (\boldsymbol{\Pi}_*^K)^T G \boldsymbol{\Pi}_*^K,$$

$$A_K^2 = h_K^{-2}(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi}^K)^T(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi}^K).$$

单元刚度矩阵如下计算

```

1 Aelem = cell(NT,1);
2 % Projection
3 Pis = Gs{iel}\Bs{iel}; Pi = D{iel}*Pis; I = eye(size(Pi));
4 % Stiffness matrix
5 AK = Pis'*G{iel}*Pis + hK^(-2)*(I-Pi)*(I-Pi);
6 Aelem{iel} = reshape(AK',1,[]); % straighten as row vector for easy assembly

```

现在考虑单元载荷向量. 右端的

$$F_h^K(v) = \int_K \Pi_{k-2}^0 f v dx,$$

当 $k = 2$ 时, $\Pi_{k-2}^0 = \Pi_0^0 = P_0$, 即常值投影, 由 (6.15) 定义, 即单元顶点值的平均. 注意到

$$F_h^K(v) = \int_K \Pi_0^0 f v dx = \int_K \Pi_0^0 f \Pi_0^0 v dx,$$

我们有单元载荷向量为

$$F_K = \int_K P_0 f P_0 \phi dx = f(x_K, y_K) |K| P_0 \phi,$$

这里为了方便, $P_0 f$ 用中点值近似, 而 $P_0 \phi$ 由 (10.67) 给出.

```

1 PO = zeros(Ndof,1); PO(1:Nv) = 1/Nv;
2 fK = pde.f(cK)*areaK*PO;

```

10.3.4 符号刚度矩阵和载荷向量

局部自由度的后 N_v 个为边法向导数的矩量, 它是有方向的. 我们要取定一个方向, 从而相应修改刚度矩阵元素的符号. 注意到

$$a^K(\pm\varphi_i, \pm\varphi_j) = \pm \cdot \pm a^K(\varphi_i, \varphi_j),$$

为此可对应给出一个符号矩阵, 它记录 (i, j) 位置的符号.

1. 边的定向: 对单元的边 e , 规定逆时针方向为其在单元中的正向, 可用局部编号来确定.
2. 边的符号:
 - 对内部定向边, 称终点与起点整体编号差的符号为该边在单元中的符号.
 - 对边界边, 规定符号为正 (即 +1).
 - 显然对内部边, 限制在相邻两个单元上的符号相异, 因而可作为法向的符号.

下面说明如何获得固定单元边的符号, 用 `sgn elem` 存储.

- 执行如下语句可获得第 `iel` 个单元所有边的符号

```

1 index = elem{iel}; Nv = length(index); Ndof = 2*Nv;
2 v1 = 1:Nv; v2 = [2:Nv, 1]; % edge index
3 sgn elem = sign(index(v2)-index(v1));

```

这里边界边的符号可能不正确.

- 利用逻辑运算可修改 `sgnelem` 中边界边的符号差 (边界边符号差为 1).

```
1     id = elem2edge{iel}; sgnbd = E(id); sgnelem(sgnbd) = 1;
2     sgnbase = ones(Ndof,1); sgnbase(2*Nv+1:end) = sgnelem;
3     sgnK = sgnbase*sgnbase'; sgnF = sgnbase;
```

这里, `bdIndex` 是边界边的自然序号, `E` 内部边对应 `false`, 边界边对应 `true`.

上面的过程在单元刚度矩阵循环计算的过程中同步处理, 不用存储为元胞数组. 最终的单元刚度矩阵和载荷向量为

```
1     AK = AK.*sgnK; fK = fK.*sgnF;
```

10.3.5 边界条件的处理

我们考虑的是强加边界条件

$$w = \partial_n w = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega,$$

这里可以是非齐次的 (这两个条件都是 Dirichlet 边界条件).

$w|_{\partial\Omega} = g$ 与常规情形一样处理. 现考虑 $\partial_n w|_{\partial\Omega} = g_n$.

1. 第三种自由度为

$$\chi(v) = \int_e \partial_n v ds,$$

因 $\partial_n w$ 在边界线段 e 上的值已知, 故可用数值积分计算边界上的该类自由度.

2. 在 `setboundary.m` 中我们给出了 Dirichlet 点的编号 `eD` 以及边界边的编号 `bdIndex`, 这样约束点的编号为

```
1 bdNodeIdx = bdStruct.bdNodeIdx;
2 bdEdgeD = bdStruct.bdEdgeD;
3 id = [bdNodeIdx; bdEdgeIdx+N];
```

由此给出自由点编号

```
1 isBdNode = false(Ndof,1); isBdNode(id) = true;
2 bdDof = (isBdNode); freeDof = (~isBdNode);
```

3. 边界顶点值为

```
1 % vertices on the boundary
2 nodeD = node(bdNodeIdx,:); wD = g_D(nodeD);
```

边界边法向矩量如下计算

```
1 % moments on the boundary
2 z1 = node(bdEdgeD(:,1),:); z2 = node(bdEdgeD(:,2),:); zc = (z1+z2)./2;
3 eb = z1-z2; % e = z2-z1
4 neb = [-eb(:,2),eb(:,1)]; %scaled ne
5 wnD = sum(1/6*(Dw(z1)+4*Dw(zc)+Dw(z2)).*neb,2);
```

这里 ∇w 是梯度 ∇w , 而 $\partial_n w = \nabla w \cdot \vec{n}$ 中的 \vec{n} 通过边界边的旋转获得(并进行单位化), 且用 Simpson 公式近似积分.

4. 这样, 我们如下求解

```

1 w = zeros(NNdof,1); w(bdDof) = [wD; wnD];
2 ff = ff - kk*w;
3 w(freeDof) = kk(freeDof,freeDof)\ff(freeDof);

```

10.3.6 程序整理

主程序如下

```

1 clc; close all;
2 clear variables;
3
4 %% Parameters
5 nameV = [200, 400, 600, 800, 1000];
6 maxIt = length(nameV);
7 h = zeros(maxIt,1); N = zeros(maxIt,1);
8 ErrL2 = zeros(maxIt,1);
9 ErrH1 = zeros(maxIt,1);
10 ErrH2 = zeros(maxIt,1);
11
12 %% PDE data
13 pde = PlateBendingData();
14
15 %% Virtual element method
16 for k = 1:maxIt
17     % load mesh
18     load(['meshdata', num2str(nameV(k)), '.mat']);
19     % get boundary information
20     bdStruct = setboundary(node, elem);
21     % solve
22     [w, info] = PlateBending_MorleyVEM(node, elem, pde, bdStruct);
23     % record and plot
24     N(k) = length(w); h(k) = 1/sqrt(size(elem,1));
25     if size(elem,1)<2e3
26         figure(1); clf;
27         subplot(1,3,1), showmesh(node, elem);
28         subplot(1,3,2), showsolution(node, elem, w(1:size(node,1)));
29         subplot(1,3,3), showsolution(node, elem, pde.uexact(node));
30     end
31     % compute errors in discrete L2 and H1 norms
32     index = info.elem2dof; % elemenwise global index
33     chi = cellfun(@(id) w(id), index, 'UniformOutput', false); % elementwise ...
            numerical d.o.f.s
34     kOrder = 2;
35     Ph = info.Ph;
36     ErrL2(k) = getL2error(node, elem, Ph, chi, pde, kOrder);
37     ErrH1(k) = getH1error(node, elem, Ph, chi, pde, kOrder);
38     ErrH2(k) = getH2error(node, elem, Ph, chi, pde, kOrder);
39 end
40
41 %% Plot convergence rates and display error table
42 figure(2);
43 showrateh(h, ErrL2, ErrH1, ErrH2);

```

```

44
45 fprintf ('\n');
46 disp('Table: Error')
47 colname = {'#Dof','h','||u-u_h||','|u-u_h|_1','|u-u_h|_2'};
48 disptable(colname,N,[],h,'%0.3e',ErrL2,'%0.5e',ErrH1,'%0.5e',ErrH2,'%0.5e');

```

函数文件见 GitHub.

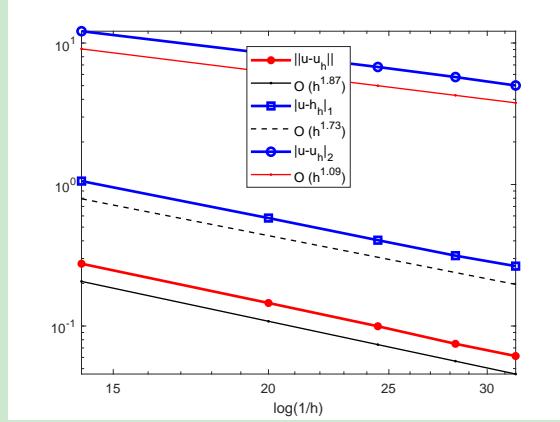


图 24. 板弯问题 Morley 型虚拟元方法的误差阶

可以看出, H^2 , H^1 和 L^2 误差都达到最优阶 (分别为 1, 2, 2 阶).

10.4 C^1 协调 VEM

10.4.1 虚拟元空间

1. C^1 连续性仍然取决于边界, 单元的内部连续性是由延拓导致的.
2. 先考虑边 e 内部, 这里假设边 e 已定向.

- 对 C^0 连续, 我们要求 $v|_e \in \mathbb{P}_k(e)$. 设

$$v|_e(s) = c_0 m_0(s) + \cdots + c_k m_k(s), \quad m_i(s) \in \mathbb{M}_k(e), \quad (10.69)$$

从而给出边上函数直到 k 阶的矩量

$$\chi_e(v) = |e|^{-1}(m_e, v)_e, \quad m_e \in \mathbb{M}_{k-2}(e).$$

- 对 C^1 连续, 我们要求 $\nabla v|_e \in \mathbb{P}_k(e)^2$. 显然有

$$\nabla v|_e = (\nabla v \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau} + (\nabla v \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = \partial_{\boldsymbol{\tau}} v \boldsymbol{\tau} + \partial_{\mathbf{n}} v \mathbf{n},$$

式中, $\boldsymbol{\tau}$ 和 \mathbf{n} 分别为定向边 e 对应的切向量和法向量. 由于 $v|_e \in \mathbb{P}_k(e)$ 自然蕴含 $\partial_{\boldsymbol{\tau}} v|_e \in \mathbb{P}_{k-1}(e)$, 为此只需要 $\partial_{\mathbf{n}} v|_e \in \mathbb{P}_{k-1}(e)$. 设

$$\partial_{\mathbf{n}} v|_e(s) = d_0 m_0(s) + \cdots + d_{k-1} m_{k-1}(s), \quad m_i(s) \in \mathbb{M}_{k-1}(e), \quad (10.70)$$

则有边上法向导数直到 $k - 1$ 阶的矩量

$$\chi_{n_e}(v) = (m_e, \partial_n v)_e, \quad m_e \in \mathbb{M}_{k-1}(e).$$

3. 再考虑顶点的 C^0 连续性, 这要求给定 e 两个顶点处的值. 顶点值自由度无法用来求解 (10.70), 只能用来求解 (10.69), 从而边上函数的矩量要去掉 2 个.
4. 最后考虑顶点的 C^1 连续性, 这要求给定 e 两个顶点处的 $\partial_x v, \partial_y v$ 的值. 偏导数值既可用来求解 (10.69) (对它求切向导数即知), 也可用来求解 (10.70).
 - 因为 $\partial_\tau v = \nabla v \cdot \tau$, 所以两个点处的偏导数值提供了切向导数的两个值, 从而边上矩量还要再去掉两个.
 - 同理, 由 $\partial_n v = \nabla v \cdot n$, 偏导数值提供两个法向导数值, 从而边上法向矩量也要去掉两个.
5. 综上, C^1 连续性给出单元 K 的如下自由度

- 顶点处的函数值,

$$\chi_a(v) = v(z_i), \quad i = 1, \dots, N_v;$$

- 顶点处的导数值,

$$\chi_{a1}(v) = \partial_x v(z_i), \quad \chi_{a2}(v) = \partial_y v(z_i), \quad i = 1, \dots, N_v;$$

- 边上函数直到 $k - 4$ 阶的矩量,

$$\chi_e(v) = |e|^{-1} (m_e, v)_e, \quad m_e \in \mathbb{M}_{k-4}(e);$$

- 边上法向导数直到 $k - 3$ 阶的矩量,

$$\chi_{n_e}(v) = (m_e, \partial_n v)_e, \quad m_e \in \mathbb{M}_{k-3}(e).$$

6. 可计算性

- 考察分部积分公式 (10.54). 对 I_1 , 由 $\partial_i Q_{3i}(p) \in \mathbb{P}_{k-4}(K)$, 我们给出内部自由度

$$\chi_K(v) = |K|^{-1} (m_K, v)_K, \quad m_K \in \mathbb{M}_{k-4}(K).$$

- 对 $I_2, v|_e$ 能够显式计算出来.
- 对 $I_3, \partial_n v|_e$ 能够显式计算出来.
- 对 I_4 , 顶点值是自由度.

7. 唯一可解性与虚拟元空间的构造

- 由自由度为零, 立即得到 $v|_{\partial K} = \partial_n v|_{\partial K} = 0$.

- 注意到

$$\int_K |\Delta v|^2 dx = \int_K v \Delta^2 v dx + \int_{\partial K} \partial_n v \Delta v ds - \int_{\partial K} v \partial_n (\Delta v) ds,$$

再要求

$$\Delta^2 v \in \mathbb{P}_{k-4}(K),$$

则

$$\int_K |\Delta v|^2 dx = 0 \Rightarrow \Delta v = 0.$$

这样, 我们有边值问题

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & x \in K, \\ v|_{\partial K} = 0, \end{cases}$$

由此可知 $v \equiv 0$.

- 上面的分析表明, 虚拟元空间可取为 ($k \geq 3$)

$$V_k(K) = \{v \in H^2(K) : \Delta^2 v \in \mathbb{P}_{k-4}(K), v|_e \in \mathbb{P}_k(e), \partial_n v|_e \in \mathbb{P}_{k-1}(e), e \subset \partial K\},$$

且自由度为自由度包括

- $\chi_1(v)$: 顶点处的函数值,

$$\chi_a(v) = v(z_i), \quad i = 1, \dots, N_v.$$

- $\chi_2(v)$: 顶点处的导数值,

$$\chi_{a1}(v) = \partial_x v(z_i), \quad \chi_{a2}(v) = \partial_y v(z_i), \quad i = 1, \dots, N_v.$$

- $\chi_3(v)$: 边上 v 的直到 $k-4$ 阶的矩量,

$$\chi_e(v) = |e|^{-1} (m_e, v)_e, \quad m_e \in \mathbb{M}_{k-4}(e).$$

- $\chi_4(v)$: 边上 $\partial_n v$ 的直到 $k-3$ 阶的矩量,

$$\chi_{n_e}(v) = (m_e, \partial_n v)_e, \quad m_e \in \mathbb{M}_{k-3}(e).$$

- $\chi_5(v)$: 单元 K 上直到 $k-4$ 阶的矩量,

$$\chi_K(v) = |K|^{-1} (m_K, v)_K, \quad m_K \in \mathbb{M}_{k-4}(K).$$

注 10.8 对最低次, 即 $k=2$ 情形, 我们要做一定修改.

(a) C^1 连续性要求在边 e 的每个顶点给定 3 个自由度, 即顶点值和两个偏导数值.

(b) 2 个顶点值和 4 个偏导数值, 可提供 2 个顶点值和 2 个切向导数值, 它们确定 $v|_e \in \mathbb{P}_3(e)$.

4 个偏导数值可提供 2 个法向导数值, 它们确定 $\partial_n v|_e \in \mathbb{P}_1(e)$.

(c) 上面的分析表明,

$$V_2(K) = \{v \in H^2(K) : \Delta^2 v = 0, \quad v|_e \in \mathbb{P}_3(e), \quad \partial_n v|_e \in \mathbb{P}_1(e), \quad e \subset \partial K\},$$

且自由度为

- 顶点处的函数值,

$$\chi_a(v) = v(z_i), \quad i = 1, \dots, N_v.$$

- 顶点处的偏导数值,

$$\chi_{a1}(v) = \partial_x v(z_i), \quad \chi_{a2}(v) = \partial_y v(z_i), \quad i = 1, \dots, N_v.$$

注 10.9 以下编程中只考虑 $k = 2$ 的情形, 且自由度排列顺序为

$$\chi_i(v) = v(z_i), \quad i = 1, \dots, N_v,$$

$$\chi_{N_v+i}(v) = h_\xi \partial_x v(z_i), \quad i = 1, \dots, N_v,$$

$$\chi_{2N_v+i}(v) = h_\xi \partial_y v(z_i), \quad i = 1, \dots, N_v.$$

通过 Scaling 可知, 导数自由度是有尺度的, 这里 h_ξ 是特征尺度, 如取所有连接该顶点的单元直径的平均. 注意, 不能直接取 $h_\xi = h_K$, 因为要保证自由度一致.

注 10.10 当 $K = T$ 为三角形时, 前面已经知道, 最低阶 C^1 协调元的自由度有 9 个. 而有限元方法的自由度则要多出很多. 根据前面 C^1 连续的讨论, 单元的每个顶点最起码要有 3 个自由度. 因有限元单元上整体是多项式, 且边上 6 个自由度决定 5 次多项式, 所以最低次的 C^1 协调有限元单元上至少为 5 次多项式, 从而有 21 个自由度, 即所谓的 Argyris 元. 造成这种差别的根本原因在于, 虚拟元方法是在边界流形上考虑的.

注 10.11 有意思的是, 对 $k = 2$ 的情形, C^0 元和 C^1 元的自由度个数都为 $3N_v$; 而对 $k \geq 3$, 不考虑内部矩量时, C^0 元的自由度个数为 $(2k - 1)N_v$, C^1 元的自由度个数为 $(2k - 2)N_v$. 这样看来, C^1 元的自由度个数反而少一点.

注 10.12 当 $k = 3$ 时, C^1 元的自由度还要添上边中点处的法向导数矩量. 此时的自由度与文献 [?] 中的 $\tilde{W}(T)$ 是一致的, 而且那里的边界上也是 3 次多项式. 有意思的是, 该文中给出的改进 Morley 元空间 $W(T)$ 对应前面的 C^0 元, 而 $\tilde{W}(T)$ 构造的初衷就是为了减少自由度. 这与注 10.11 的观察是一致的. 文献 [?] 中有限元的构造思路是用 bubble 函数分离边界与内部, 这恰好符合虚拟元的特点.

注 10.13 三角形上的 Zienkiewicz 元的自由度与这里的一致, 但它不是 C^1 连续的. 这表明, 相同自由度可匹配不同连续性的空间.

10.4.2 计算说明

先考虑过渡矩阵, 这里要注意导数自由度的特征尺度. 在辅助数据结构中, 我们给出了 node2elem, 它给出每个顶点周围的单元序号, 由此可获得每个顶点的特征尺度.

```

1 % characteristic length
2 hxi = cellfun(@(id) mean(diameter(id)), node2elem);
3 index = elem{iel};
4 hxiK = hxi(index);

```

过渡矩阵如下获得

```

1      % m'
2      m = @(x,y) [1+0*x, (x-xK)/hK, (y-yK)/hK, (x-xK).^2/hK.^2, ...
3                  (x-xK).*(y-yK)/hK.^2, (y-yK).^2/hK.^2]; % m1, ..., m6
4      % Dx(m'), Dy(m')
5      Dxm = @(x,y) [0*x, 1/hK+0*x, 0*x, 2*(x-xK)/hK.^2, (y-yK)/hK.^2, 0*x];
6      Dym = @(x,y) [0*x, 0*x, 1/hK+0*x, 0*x, (x-xK)/hK.^2, 2*(y-yK)/hK.^2];
7      % D
8      D1 = zeros(Ndof,Nm);
9      D1(1:Nv,:) = m(x,y);
10     D1(Nv+1:2*Nv,:) = repmat(hxiK,1,Nm).*Dxm(x,y);
11     D1(2*Nv+1:end,:) = repmat(hxiK,1,Nm).*Dym(x,y);

```

再考虑椭圆投影的计算. 注意到式 (10.66) 中的 $\partial_n \phi_j \in \mathbb{P}_1$, 所以可用梯形公式计算积分, 如下

$$-\sum_{e \subset \partial K} M_{nn}(m_\alpha) \int_e \partial_n \phi_j ds = -\sum_{i=1}^{N_v} M_{nn}(m_\alpha)|_{e_i} \frac{|e_i|}{2} (\partial_n \phi_j(z_i) + \partial_n \phi_j(z_{i+1})). \quad (10.71)$$

注意到

$$\chi_{a1,i}(v) = h_\xi \partial_x v(z_i) \Rightarrow \partial_x v(z_i) = \frac{1}{h_\xi} \chi_{a1,i}(v), \quad i = 1, \dots, N_v,$$

从而基函数的偏导数如下

```

1      % Dx(phi'), Dy(phi') at z1, ..., zNv (each row)
2      Dxphi = zeros(Nv,Ndof); Dyphi = zeros(Nv,Ndof);
3      Dxphi(:,Nv+1:2*Nv) = eye(Nv)./repmat(hxiK,1,Nv);
4      Dyphi(:,2*Nv+1:end) = eye(Nv)./repmat(hxiK,1,Nv);

```

这样, B 可如下计算

```

1      % B
2      B1 = zeros(Nm,Ndof);
3      p1 = [Nv,1:Nv-1]; p2 = 1:Nv;
4      for j = 1:Nv % loop of edges
5          % int[\partial_n \phi]
6          Dnphi1 = Dxphi(v1(j),:)*n1(j) + Dyphi(v1(j),:)*n2(j); % zj
7          Dnphi2 = Dxphi(v2(j),:)*n1(j) + Dyphi(v2(j),:)*n2(j); % z_{j+1}
8          nphi = 0.5*he(j)*(Dnphi1+Dnphi2);
9          % Jump(m) at zj
10         Jump = Mtn(:,p2(j))-Mtn(:,p1(j));
11         % phi' at zj
12         phi = zeros(1,Ndof); phi(j) = 1;
13         % B1 on e and at zj
14         B1 = B1 - Mnn(:,j)*nphi + Jump*phi;
15     end

```

B_s 的第一个限制条件同前处理, 即

$$\tilde{B}(1,:) = P_0(\phi^T) = \frac{1}{N_v} [\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}].$$

对第二个限制条件, 仍使用

$$\begin{aligned}\int_{\partial K} \nabla v \cdot \mathbf{n} ds &= \sum_{e \subset \partial K} \int_e \partial_{n_e} v n_e ds + \int_e \partial_{t_e} v t_e ds \\ &= \sum_{e \subset \partial K} n_e \int_e \partial_n v ds + \sum_{i=1}^{N_v} t_{e_i} (v(z_{i+1}) - v(z_i)),\end{aligned}$$

我们有

$$\int_{\partial K} \nabla \phi_j \cdot \mathbf{n} ds = t_{e_{j-1}} - t_{e_j},$$

其他分量类似 (10.71) 计算.

```

1      B1s = B1;
2      % first constraint
3      B1s(1,1:Nv) = 1/Nv;
4      % second constraint
5      for j = 1:Nv % loop of edges
6          B1s(2:3,1:Nv) = te([Nv,1:Nv-1],:) ' - te';
7          Dnphi1 = Dxphi(v1(j),Nv+1:end)*n1(j) + Dyphi(v1(j),Nv+1:end)*n2(j); % zj
8          Dnphi2 = Dxphi(v2(j),Nv+1:end)*n1(j) + Dyphi(v2(j),Nv+1:end)*n2(j); % z_{j+1}
9          Nphi = 0.5*Ne(j,:)'*(Dnphi1+Dnphi2); % scaled
10         B1s(2:3,Nv+1:end) = B1s(2:3,Nv+1:end) + Nphi;
11     end

```

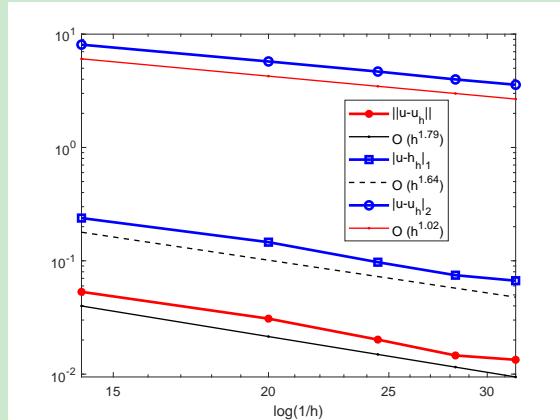


图 25. 板弯问题 C^1 -元的误差阶

相比 C^0 和 Morley 元, C^1 元的低模误差阶偏离 2 要多一些. 如果采用强化技巧, 对 $k = 2$ 即相当于用椭圆投影逼近, 此时的结果稍微好一点, 如下图

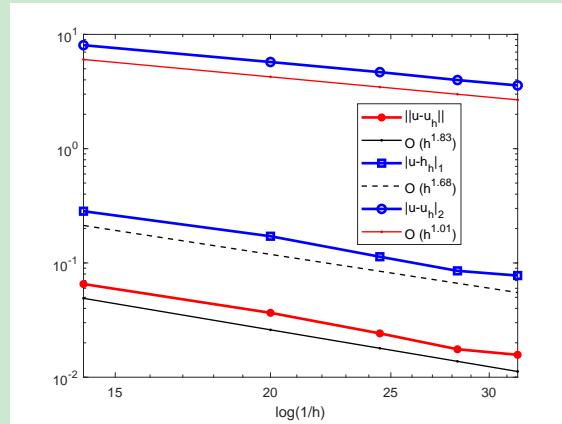


图 26. 板弯问题 C^1 -元的误差阶 (强化技巧)

注 10.14 程序中, 稳定项 S^K 中的尺度不再取为 h_K^{-2} , 而是采用特征尺度. 计算发现, 对前者, 若仍使用 C^0 元那里的简单近似, 则低模误差会丢失半阶, 而采用特征尺度, 结果与前面图中的类似. 若使用 100-500 的网格, H^1 和 L^2 误差阶分别为 1.84 和 1.70. 若用标准三角剖分, H^1 和 L^2 误差阶都达到最优.

11 四阶奇异摄动问题的 C^0 元方法

11.1 一些说明

11.1.1 数学模型

考虑问题

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta^2 u - \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = \partial_n u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

为了使用板弯问题的程序, 方程改写为

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \partial_{ij} M_{ij}(w) - \Delta w = f & \text{in } \Omega, \\ w = \partial_n w = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

其中,

$$M_{ij} = D((1-\nu)K_{ij} + \nu K_{kk}\delta_{ij}), \quad K_{ij} = -\partial_{ij}w.$$

注意, 当 D 和 ν 为常数时,

$$-\partial_{ij} M_{ij}(w) = D\Delta^2 w.$$

连续变分问题为: 找 $w \in V := H_0^2(\Omega)$ 使得

$$a(w, v) = \ell(v), \quad v \in V,$$

式中,

$$\begin{aligned} a(w, v) &= \varepsilon^2 \int_{\Omega} M_{ij}(w) K_{ij}(v) dx dy + \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v dx dy, \\ \ell(v) &= \int_{\Omega} f v dx dy. \end{aligned}$$

为了方便, 以下记

$$a_{\Delta}(w, v) = \int_{\Omega} M_{ij}(w) K_{ij}(v) dx dy, \quad a_{\nabla}(w, v) = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v dx dy,$$

则

$$a(w, v) = \varepsilon^2 a_{\Delta}(w, v) + a_{\nabla}(w, v).$$

注意, 当 $D = 1$ 且 $\nu = 0$ 时,

$$a_{\Delta}(w, v) = (\nabla^2 w, \nabla^2 v).$$

为了方便, 以下称 a_{Δ} 为板弯项, 而 a_{∇} 为 Poisson 项.

11.1.2 分部积分公式

对板弯项, 有

$$\begin{aligned} a_{\Delta}^K(p, v) = & - \int_K Q_{3i,i}(p) v dx_1 dx_2 \\ & + \int_{\partial K} (Q_{3n}(p) + \partial_t M_{tn}(p)) v ds - \int_{\partial K} M_{nn}(p) \partial_n v ds \\ & + \sum_{i=1}^{N_v} [M_{tn}(p)](z_i) v(z_i), \end{aligned}$$

式中,

$$Q_{3i} = M_{ij,j}, \quad Q_{3n} = Q_{3i} n_i, \quad M_{nn} = M_{ij} n_i n_j, \quad M_{tn} = M_{ij} t_i n_j.$$

对 Poisson 项, 有

$$a_{\nabla}^K(p, v) = - \int_K \Delta p v dx + \int_{\partial K} \partial_n p v ds.$$

11.2 C^0 连续的非协调虚拟元空间

当 ε 很小时, 方程趋向于 Poisson 方程. 为此, 需要有限元具有 C^0 连续性以保证 Poisson 方程可以求好. 板弯问题 C^0 连续的虚拟元空间为

$$V_k(K) = \{v \in H^2(K) : \Delta^2 v \in \mathbb{P}_{k-4}(K), \quad v|_e \in \mathbb{P}_k(e), \quad \Delta v|_e \in \mathbb{P}_{k-2}(e), \quad e \subset \partial K\},$$

规定: $\mathbb{P}_{-1} = \mathbb{P}_{-2} = \{0\}$. 该空间对应的自由度可取为

- 顶点值泛函

$$\chi_i(v) = v(z_i), \quad i = 1, \dots, N_v.$$

- 边上函数直到 $k-2$ 阶的矩量

$$\chi_e(v) = \frac{1}{|e|} \int_e m v ds, \quad m \in \mathbb{M}_{k-2}(e).$$

- 边上法向导数直到 $k-2$ 阶的矩量

$$\chi_{ne}(v) = \int_e m \partial_n v ds, \quad m \in \mathbb{M}_{k-2}(e).$$

- 单元上函数直到 $k-4$ 阶的矩量

$$\chi_K(v) = \frac{1}{|K|} \int_K m v dx, \quad v \in \mathbb{M}_{k-4}(K).$$

注意到线弹性问题单元上函数的矩量直到 $k-2$ 阶, 为此引入提升空间

$$\tilde{V}_k(K) = \{v \in H^2(K) : \Delta^2 v \in \mathbb{P}_{k-2}(K), \quad v|_e \in \mathbb{P}_k(e), \quad \Delta v|_e \in \mathbb{P}_{k-2}(e), \quad e \subset \partial K\},$$

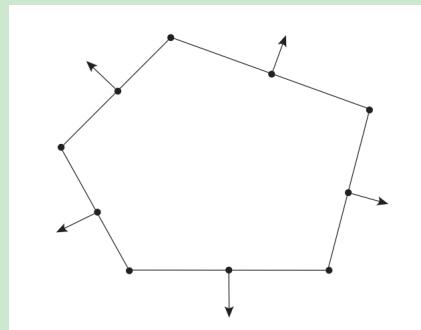
它的内部自由度是单元上函数直到 $k - 2$ 阶的矩量, 其他都不变. 需要注意的是, $\tilde{V}_k(K)$ 上定义的椭圆投影用不到 $k - 3$ 和 $k - 2$ 阶的内部矩量. 类似 Morley 元的构造, 设 $\tilde{V}_k(K)$ 上的椭圆投影为 $\tilde{\Pi}_{\Delta}^K$, 则 $k - 3$ 和 $k - 2$ 阶的矩量用 $\tilde{\Pi}_{\Delta}^K v$ 的替代:

$$W_k(K) = \left\{ v \in \tilde{V}_k(K) : (v, m)_K = (\tilde{\Pi}_{\Delta}^K v, m)_K, \quad m \in \mathbb{M}_{k-2}(e) \setminus \mathbb{M}_{k-4}(e) \right\}.$$

注 11.1 上面的 enhancement 处理, 在 Poisson 方程的二阶及三阶虚拟元方法中已经说明过.

这样, 四阶奇异摄动问题的虚拟元空间为

$$V_h(K) = W_k(K).$$



后面计算过程中仅考虑最低阶, 即 $k = 2$ 的情形. 分量空间的自由度排列为

- 顶点值泛函

$$\chi_i(v) = v(z_i), \quad i = 1, \dots, N_v.$$

- 边中点值泛函

$$\chi_{i+N_v}(v) = v(m_i), \quad i = 1, \dots, N_v.$$

- 边中点法向导数的矩量

$$\chi_{2N_v+i}(v) = \int_{e_i} \partial_n v \, ds, \quad i = 1, \dots, N_v.$$

11.3 Poisson 项的处理

为了验证计算的正确性, 我们先在 C^0 板弯元空间中计算 Poisson 问题.

11.3.1 过渡矩阵

过渡矩阵与板弯问题 C^0 元的一致.

```

1 % element information
2 index = elem{iel};      Nv = length(index);      Ndof = 3*Nv;
3 xK = centroid(iel,1);  yK = centroid(iel,2);  hK = diameter(iel);
4 x = node(index,1);    y = node(index,2); % vertices
5 v1 = 1:Nv; v2 = [2:Nv,1]; % edge index
6 xe = (x(v1)+x(v2))/2; ye = (y(v1)+y(v2))/2; % mid-edge
7 Ne = [y(v2)-y(v1), x(v1)-x(v2)]; % scaled outer normal vectors

```

```

8      he = sqrt(sum(Ne.^2,2));
9      ne = Ne./repmat(he,1,2); % outer normal vectors
10     te = [-ne(:,2), ne(:,1)];
11     % scaled monomials
12     m = @([x,y]) [1+0*x, (x-xK)/hK, (y-yK)/hK, (x-xK).^2/hK^2, ...
13             (x-xK).*(y-yK)/hK^2, (y-yK).^2/hK^2]; % m1,...,m6
14     Gradm = @([x,y]) [[0,0]; [1, 0]/hK; [0, 1]/hK; [2*(x-xK), 0]/hK^2;
15             [(y-yK), (x-xK)]/hK^2; [0, 2*(y-yK)]/hK^2]; % grad m
16     % D
17     D1 = zeros(Ndof,6);
18     D1(1:2*Nv,:) = [m(x,y); m(xe,ye)]; % vertices and mid-edge points
19     for i = 1:Nv
20         gradi = 0.5*(Gradm(x(v1(i)),y(v1(i)))+Gradm(x(v2(i)),y(v2(i))));
21         D1(2*Nv+i,:) = Ne(i,:)*gradi';
22     end
23     D{iel} = D1;

```

11.3.2 椭圆投影 Π_{Δ}^K

对 $k = 2$, Poisson 部分涉及到单元 K 上的零阶矩量

$$\chi_K(v) = \frac{1}{|K|} \int_K v dx,$$

具体来说就是需要 $W_k(K)$ 基函数的内部矩量

$$\chi_K(\phi^T) = \frac{1}{|K|} \int_K \phi^T dx.$$

根据规定, 这部分矩量用 $\tilde{\Pi}_{\Delta}^K \phi^T$ 的矩量代替, 即

$$\chi_K(\phi^T) = \frac{1}{|K|} \int_K \phi^T dx = \frac{1}{|K|} \int_K \tilde{\Pi}_{\Delta}^K \phi^T dx = \chi_K(\tilde{\Pi}_{\Delta}^K \phi^T).$$

为此, 我们必须计算一个子问题, 即计算椭圆投影 $\tilde{\Pi}_{\Delta}^K$ 的矩阵 $\tilde{\Pi}_{\Delta}^K$, 它的第 j 列就是第 j 个基函数投影的自由度向量, 而最后一行就是所有基函数投影的内部矩量.

注 11.2 $\tilde{\Pi}_{\Delta}^K$ 是在 $\tilde{V}_k(K)$ 中计算的. 要注意的是, $W_k(K)$ 和 $\tilde{V}_k(K)$ 相同自由度对应的基函数不一定相同 (毕竟不唯一), 但是基函数对应的自由度值相同, 因而不会影响计算.

现在我们来计算 $\tilde{\Pi}_{\Delta}^K$, 为此要定义椭圆投影

$$\tilde{\Pi}_{\Delta}^K : \tilde{V}_k(K) \rightarrow \mathbb{P}_k(K), \quad v \mapsto \tilde{\Pi}_{\Delta}^K v,$$

满足

$$\begin{cases} a_{\Delta}^K(\tilde{\Pi}_{\Delta}^K v, p) = a_{\Delta}^K(v, p), & p \in \mathbb{P}_k(K), \\ \int_{\partial K} \tilde{\Pi}_{\Delta}^K v ds = \int_{\partial K} v ds, \\ \int_{\partial K} \nabla \tilde{\Pi}_{\Delta}^K v ds = \int_{\partial K} \nabla v ds. \end{cases}$$

先计算过渡矩阵, 它比 C^0 元那里多一行, 对应内部矩量.

```

1  Di = zeros(Ndof+1,6);
2  Di(1:Ndof,:) = D1;
3  nodeT = [node(index,:);aux.centroid(iel,:)];
4  elemT = [(Nv+1)*ones(Nv,1),(1:Nv)',[2:Nv,1]';
5  Di(end,:) = 1/area(iel)*integralTri(m,2,nodeT,elemT); % inner d.o.f

```

接着计算 B , 它比板弯问题多出一列, 对应最后一个自由度. 由于 $B_{\alpha j}$ 的右端不涉及到该矩量 (见式 (10.65)), 因此最后一列为零, 其他列不变. 限制条件也是如此. 这表明, 此时的 B_s 也只比原来的多出一列零向量, 因而 C^0 程序的过程几乎不变.

投影矩阵最后一行的前 $3N_v$ 个元素组成的行向量就是 $\chi_K(\tilde{\Pi}_\Delta^K \phi^T)$, 从而可得 $\chi_K(\phi^T)$. 程序中记为 Dof , 如下计算

```

1  % \partial_ij (m)
2  D11 = zeros(6,1); D11(4) = 2/hK^2;
3  D12 = zeros(6,1); D12(5) = 1/hK^2;
4  D22 = zeros(6,1); D22(6) = 2/hK^2;
5  % Mij(m)
6  nu = 0.3;
7  M11 = -((1-nu)*D11 + nu*(D11+D22));
8  M12 = -(1-nu)*D12;
9  M22 = -((1-nu)*D22 + nu*(D11+D22));
10 % Mnn(m) on e1,...,eNv
11 Mnn = M11*(n1.*n1) + M12*(n1.*n2+n2.*n1) + M22*(n2.*n2);
12 % Mtn(m) on e1,...,eNv
13 Mtn = M11*(t1.*n1) + M12*(t1.*n2+t2.*n1) + M22*(t2.*n2);
14 % B, Bs, G, Gs
15 B1 = zeros(6,Ndof+1);
16 for j = 1:Nv % loop of edges
17     % nphi on ej
18     nphi = zeros(1,Ndof+1); nphi(2*Nv+j) = 1;
19     % Jump at zj
20     Jump = Mtn(:,p2(j))-Mtn(:,p1(j));
21     % phi at zj
22     phi = zeros(1,Ndof+1); phi(j) = 1;
23     % B1
24     B1 = B1 - Mnn(:,j)*nphi + Jump*phi;
25 end
26 Bis = B1;
27 % first constraint
28 Bis(1,1:Nv) = 1/Nv;
29 % second constraint
30 Bis(2:3,1:Nv) = te([Nv,1:Nv-1],:) - te';
31 Bis(2:3,2*Nv+1:Ndof) = ne';
32 % G, Gs
33 G1s = Bis*Di;
34 % Pi, Pis
35 Pis = G1s\Bis; Pi = Di*Pis;
36 Dof = Pi(end,1:end-1);

```

11.3.3 a_∇^K 的椭圆投影

定义椭圆投影

$$\Pi_\nabla^K : V_h(K) \rightarrow \mathbb{P}_k(K), \quad v \mapsto \Pi_\nabla^K v,$$

满足

$$a_{\nabla}^K(\Pi_{\nabla}^K u, p) = a_{\nabla}^K(u, p), \quad p \in \mathbb{P}_k(K),$$

限制条件为

$$\int_{\partial K} \Pi_{\nabla}^K u \, ds = \int_{\partial K} u \, ds.$$

注意, 此时要计算 $k = 2$ 的问题.

上面的定义等价于如下的向量形式

$$a_{\nabla}^K(m, \Pi_{\nabla}^K \phi^T) = a_{\nabla}^K(m, \phi^T)$$

或

$$\int_K \nabla m \cdot \nabla \Pi_{\nabla}^K \phi^T \, dx = \int_K \nabla m \cdot \nabla \phi^T \, dx,$$

限制条件为

$$\sum_{i=1}^{N_v} \Pi_{\nabla}^K \phi^T(z_i) = \sum_{i=1}^{N_v} \phi^T(z_i).$$

设 Π_{∇}^K 在基 ϕ^T 下的矩阵为 $\mathbf{\Pi}_{\nabla}$, 即

$$\Pi_{\nabla}^K \phi^T = \phi^T \mathbf{\Pi}_{\nabla},$$

而 $\Pi_{\nabla}^K \phi^T$ 在多项式基 m^T 下的矩阵为 $\mathbf{\Pi}_{\nabla}^*$, 即

$$\Pi_{\nabla}^K \phi^T = m^T \mathbf{\Pi}_{\nabla}^*,$$

易知有

$$\mathbf{\Pi}_{\nabla} = D \mathbf{\Pi}_{\nabla}^*.$$

将以上表达式代入向量形式, 有

$$\begin{cases} G_{\nabla} \mathbf{\Pi}_{\nabla}^* = B_{\nabla}, \\ \frac{1}{N_v} \sum_{i=1}^{N_v} m^T(z_i) \mathbf{\Pi}_{\nabla}^* = \frac{1}{N_v} \sum_{i=1}^{N_v} \phi^T(z_i) \end{cases}$$

式中,

$$G_{\nabla} = a_{\nabla}^K(m, m^T) = \int_K \nabla m \cdot \nabla m^T \, dx,$$

$$B_{\nabla} = a_{\nabla}^K(m, \phi^T) = \int_K \nabla m \cdot \nabla \phi^T \, dx.$$

而 G_{∇} 和 B_{∇} 的某些行用限制条件替换后记为 \tilde{G}_{∇} 和 \tilde{B}_{∇} . 我们有一致性关系

$$G_{\nabla} = B_{\nabla} D, \quad \tilde{G}_{\nabla} = \tilde{B}_{\nabla} D.$$

现在计算 B_{∇} , 即

$$B_{\nabla} = \int_K \nabla m \cdot \nabla \phi^T \, dx = - \int_K \Delta m \phi^T \, dx + \int_{\partial K} \partial_n m \phi^T \, ds.$$

为了方便, 记

$$I_1 = \int_K \Delta m \phi^T dx, \quad I_2 = \int_{\partial K} \partial_n m \phi^T ds.$$

先计算 I_1 . 因为 m 的分量是二次多项式, 所以 Δm 是常向量, 从而

$$I_1 = \Delta m \int_K \phi^T dx.$$

直接计算可知,

$$\Delta m = [0, 0, 0, \frac{2}{h_K^2}, 0, \frac{2}{h_K^2}]^T.$$

根据规定,

$$\int_K \phi^T dx = |K| \cdot \text{Dof}.$$

由此可知第一项如下获得

```

1 % first term
2 Lapm = zeros(6,1); Lapm([4,6]) = 2/hK^2;
3 Dof1 = area(iel)*Dof;
4 I1 = Lapm*Dof1;

```

再计算 I_2 , 即

$$I_2 = \int_{\partial K} \partial_n m \phi^T ds = \sum_{i=1}^{N_v} \int_{e_i} \partial_n m \phi^T ds.$$

注意到 $\partial_n m \phi^T$ 在每条边上是三次多项式, 右端的积分可用 Simpson 公式计算. 记 $\mathbf{f} = \partial_n m \phi^T$, 则

$$I_2 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{N_v} h_{e_i} [\mathbf{f}(z_i) + 4\mathbf{f}(z_m) + \mathbf{f}(z_{i+1})],$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(z_i) &= \partial_n m(z_i)[\mathbf{e}_i, \mathbf{0}, \mathbf{0}], \\ \mathbf{f}(z_m) &= \partial_n m(z_m)[\mathbf{0}, \mathbf{e}_i, \mathbf{0}], \\ \mathbf{f}(z_{i+1}) &= \partial_n m(z_{i+1})[\mathbf{e}_{i+1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}]. \end{aligned}$$

```

1 % second term
2 I2 = 0;
3 for j = 1:Nv % loop of edges
4     % he*\partial_n(m) at x_j, xe, x_j+1
5     DnL = Gradm(x(j),y(j))*Ne(j,:)';
6     Dne = Gradm(xe(j),ye(j))*Ne(j,:)';
7     DnR = Gradm(x(v2(j)),y(v2(j)))*Ne(j,:)';
8     % [ei,0,0]
9     e1 = zeros(1,Ndof); e1(j) = 1;
10    e2 = zeros(1,Ndof); e2(Nv+j) = 1;
11    e3 = zeros(1,Ndof); e3(v2(j)) = 1;
12    % f
13    f1 = DnL*e1; f2 = Dne*e2; f3 = DnR*e3;
14    I2 = I2 + (f1+4*f2+f3);
15 end
16 B2 = -I1 + 1/6*I2;

```

投影的限制条件如下处理.

```
1 % constraint
2 B2s = B2; B2s(1,1:Nv) = 1/Nv;
3 Bps{iel} = B2s;
4 Gp{iel} = B2*D{iel}; Gps{iel} = B2s*D{iel};
```

11.4 板弯项的处理

板弯项与板弯问题 C^0 非协调元的过程完全相同. 下面给出投影矩阵的计算过程.

```
1 %% Compute projection matrices
2 D = cell(NT,1);
3 Bps = cell(NT,1); Gp = cell(NT,1); Gps = cell(NT,1); % p: Poisson
4 Bbs = cell(NT,1); Gb = cell(NT,1); Gbs = cell(NT,1); % b: biharmonic
5 for iel = 1:NT
6     % 0. ----- element information -----
7     index = elem{iel}; Nv = length(index); Ndof = 3*Nv;
8     xK = centroid(iel,1); yK = centroid(iel,2); hK = diameter(iel);
9     x = node(index,1); y = node(index,2); % vertices
10    v1 = 1:Nv; v2 = [2:Nv,1]; % loop index for vertices or edges
11    p1 = [Nv,1:Nv-1]; p2 = 1:Nv; % jump index
12    xe = (x(v1)+x(v2))/2; ye = (y(v1)+y(v2))/2; % mid-edge points
13    Ne = [y(v2)-y(v1), x(v1)-x(v2)]; % scaled outer normal vectors
14    he = sqrt(sum(Ne.^2,2));
15    ne = Ne./repmat(he,1,2); % outer normal vectors
16    te = [-ne(:,2), ne(:,1)];
17    n1 = ne(:,1)'; n2 = ne(:,2)';
18    t1 = te(:,1)'; t2 = te(:,2)';
19    % scaled monomials
20    m = @ (x,y) [1+0*x, (x-xK)/hK, (y-yK)/hK, (x-xK).^2/hK^2, ...
21              (x-xK).*(y-yK)/hK^2, (y-yK).^2/hK^2]; % m1,...,m6
22    Gradm = @ (x,y) [[0,0]; [1, 0]/hK; [0, 1]/hK; [2*(x-xK), 0]/hK^2;
23                      [(y-yK), (x-xK)]/hK^2; [0, 2*(y-yK)]/hK^2]; % grad m
24
25    % 1. ----- transition matrices -----
26    D1 = zeros(Ndof,6);
27    D1(1:2*Nv,:) = [m(x,y); m(xe,ye)]; % vertices and mid-edge points
28    for i = 1:Nv
29        gradi = 0.5*(Gradm(x(v1(i)),y(v1(i)))+Gradm(x(v2(i)),y(v2(i))));
30        D1(2*Nv+i,:) = Ne(i,:)*gradi';
31    end
32    D{iel} = D1;
33
34    % 2. ----- elliptic projection of plate bending term -----
35    % \partial_ij (m)
36    D11 = zeros(6,1); D11(4) = 2/hK^2;
37    D12 = zeros(6,1); D12(5) = 1/hK^2;
38    D22 = zeros(6,1); D22(6) = 2/hK^2;
39    % Mij(m)
40    nu = 0.3;
41    M11 = -((1-nu)*D11 + nu*(D11+D22));
42    M12 = -(1-nu)*D12;
43    M22 = -((1-nu)*D22 + nu*(D11+D22));
44    % Mnn(m) on e1,...,eNv
45    Mnn = M11*(n1.*n1) + M12*(n1.*n2+n2.*n1) + M22*(n2.*n2);
46    % Mtn(m) on e1,...,eNv
47    Mtn = M11*(t1.*n1) + M12*(t1.*n2+t2.*n1) + M22*(t2.*n2);
```

```

48      % B, Bs, G, Gs
49      B1 = zeros(6,Ndof);
50      for j = 1:Nv % loop of edges
51          % nphi on ej
52          nphi = zeros(1,Ndof); nphi(2*Nv+j) = 1;
53          % Jump at zj
54          Jump = Mtn(:,p2(j))-Mtn(:,p1(j));
55          % phi at zj
56          phi = zeros(1,Ndof); phi(j) = 1;
57          % B1
58          B1 = B1 - Mnn(:,j)*nphi + Jump*phi;
59      end
60      B1s = B1;
61      % first constraint
62      B1s(1,1:Nv) = 1/Nv;
63      % second constraint
64      B1s(2:3,1:Nv) = te([Nv,1:Nv-1],:) ' - te';
65      B1s(2:3,2*Nv+1:end) = ne';
66      Bbs{iel} = B1s;
67      Gb{iel} = B1*D1;      Gbs{iel} = B1s*D1;
68
69      % 3. --- Interior d.o.fs of elliptic projection of basis functions ---
70      Di = zeros(Ndof+1,6);
71      Di(1:Ndof,:) = D1;
72      nodeT = [node(index,:);aux.centroid(iel,:)];
73      elemT = [(Nv+1)*ones(Nv,1),(1:Nv)',[2:Nv,1]'];
74      Di(end,:) = 1/area(iel)*integralTri(m,2,nodeT,elemT); % inner d.o.f
75      Bis = zeros(6,Ndof+1); Bis(:,1:Ndof) = B1s;
76      % G, Gs
77      Gis = Bis*Di;
78      % Pi, Pis
79      Pis = Gis\Bis; Pi = Di*Pis;
80      Dof = Pi(end,1:end-1);
81
82      % 4. ----- elliptic projection for Poisson term -----
83      % first term
84      Lapm = zeros(6,1); Lapm([4,6]) = 2/hK^2;
85      Dof1 = area(iel)*Dof;
86      I1 = Lapm*Dof1;
87      % second term
88      I2 = 0;
89      for j = 1:Nv % loop of edges
90          % he*\partial_n(m) at x_j, xe, x_j+1
91          DnL = Gradm(x(j),y(j))*Ne(j,:)';
92          Dne = Gradm(xe(j),ye(j))*Ne(j,:)';
93          DnR = Gradm(x(v2(j)),y(v2(j)))*Ne(j,:)';
94          % [ei,0,0]
95          e1 = zeros(1,Ndof); e1(j) = 1;
96          e2 = zeros(1,Ndof); e2(Nv+j) = 1;
97          e3 = zeros(1,Ndof); e3(v2(j)) = 1;
98          % f
99          f1 = DnL*e1; f2 = Dne*e2; f3 = DnR*e3;
100         I2 = I2 + (f1+4*f2+f3);
101     end
102     B2 = -I1 + 1/6*I2;
103     % constraint
104     B2s = B2; B2s(1,1:Nv) = 1/Nv;
105     Bps{iel} = B2s;

```

```

106      Gp{iel} = B2*D{iel}; Gps{iel} = B2s*D{iel};
107  end

```

11.5 刚度矩阵与载荷向量的计算

Poisson 项椭圆投影对应的矩阵为

$$\mathbf{A}_K^1 = a_{\nabla}^K(\Pi^{\nabla} \phi, \Pi^{\nabla} \phi^T) = (\boldsymbol{\Pi}_{\nabla}^*)^T a_{\nabla}^K(m, m^T) \boldsymbol{\Pi}_{\nabla}^* = (\boldsymbol{\Pi}_{\nabla}^*)^T G_{\nabla} \boldsymbol{\Pi}_{\nabla}^*,$$

稳定项为

$$\mathbf{A}_K^2 = (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi}_{\nabla})^T (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi}_{\nabla}).$$

类似可给出板弯项的矩阵.

再考虑右端的计算

$$F_K(\phi) = \int_K \Pi_{k-2}^0 f \phi dx.$$

当 $k = 2$ 时, $\Pi_{k-2}^0 = \Pi_0^0 = P_0$, 即常值投影, 由 (6.15) 定义, 即单元顶点值的平均. 注意到

$$F_K(\phi) = \int_K \Pi_0^0 f \phi dx = \int_K \Pi_0^0 f \Pi_k^0 \phi dx,$$

我们有

$$F_K = \int_K \Pi_0^0 f \Pi_0^0 \phi dx = f(x_K, y_K) |K| \frac{1}{N_v} [\mathbf{1}_{N_v}, \mathbf{0}, \mathbf{0}]^T,$$

这里为了方便, $\Pi_0^0 f$ 用中点值近似.

如下获得刚度矩阵和载荷向量

```

1 %% Get elementwise stiffness matrix and load vector
2 ABelem = cell(NT,1); belem = cell(NT,1);
3 bdIndex = bdStruct.bdIndex; E = false(NE,1); E(bdIndex) = 1;
4 for iel = 1:NT
5     % sign matrix and sign vector
6     index = elem{iel}; Nv = length(index); Ndof = 3*Nv;
7     sgnelem = sign(diff(index([1:Nv,1])));
8     id = elem2edge{iel}; sgnbd = E(id); sgnelem(sgnbd) = 1;
9     sgnbase = ones(Ndof,1); sgnbase(2*Nv+1:3*Nv) = sgnelem;
10    sgnK = sgnbase*sgnbase'; sgnF = sgnbase;
11    % Projection
12    Pips = Gps{iel}\Bps{iel}; Pip = D{iel}*Pips; Ip = eye(size(Pip));
13    Pibs = Gbs{iel}\Bbs{iel}; Pib = D{iel}*Pibs; Ib = eye(size(Pib));
14    % Stiffness matrix
15    AK = Pips'*Gp{iel}*Pips + (Ip-Pip)'*(Ip-Pip);
16    BK = Pibs'*Gb{iel}*Pibs + hK^(-2)*(Ib-Pib)'*(Ib-Pib);
17    ABK = (AK+para.epsilon^2*BK).*sgnK;
18    ABelem{iel} = reshape(ABK',1,[]); % straighten
19    % Load vector
20    fK = zeros(Ndof,1);
21    POf = pde.f(centroid(iel,:))*area(iel)/Nv;
22    fK(1:Nv,:) = repmat(POf,Nv,1);
23    belem{iel} = (fK.*sgnF)'; % straighten
24 end

```

这里, 符号刚度矩阵类似板弯问题获得.

刚度矩阵与载荷向量如下装配

```
1 %% Assemble stiffness matrix and load vector
2 elemLen = cellfun('length',elem); vertNum = unique(elemLen);
3 nnz = sum((3*elemLen).^2);
4 ii = zeros(nnz,1); jj = zeros(nnz,1); ss = zeros(nnz,1);
5 id = 0; ff = zeros(NNdof,1);
6 for Nv = vertNum(:)' % only valid for row vector
7
8     % assemble the matrix
9     idNv = find(elemLen == Nv); % find polygons with Nv vertices
10    NTv = length(idNv); % number of elements with Nv vertices
11
12    elemNv = cell2mat(elem(idNv)); % elem
13    elem2edgeNv = cell2mat(elem2edge(idNv));
14    elem2 = [elemNv, elem2edgeNv+N, elem2edgeNv+N+NE];
15    K = cell2mat(ABelem(idNv)); F = cell2mat(belem(idNv));
16    Ndof = 3*Nv;
17    ii(id+1:id+NTv*Ndof^2) = reshape(repmat(elem2, Ndof,1), [], 1);
18    jj(id+1:id+NTv*Ndof^2) = repmat(elem2(:,1), Ndof, 1);
19    ss(id+1:id+NTv*Ndof^2) = K(:,1);
20    id = id + NTv*Ndof^2;
21
22    % assemble the vector
23    ff = ff + accumarray(elem2(:,1),F(:,1),[NNdof 1]);
24 end
25 kk = sparse(ii,jj,ss,NNdof,NNdof);
```

11.6 边界条件的处理

与板弯问题完全相同, 如下

```
1 %% Apply Dirichlet boundary conditions
2 % boundary information
3 bdNodeIdx = bdStruct.bdNodeIdx; bdEdgeD = bdStruct.bdEdgeD;
4 g_D = pde.g_D; Dw = pde.Du;
5 id = [bdNodeIdx; bdEdgeIdx+N; bdEdgeIdx+N+NE];
6 isBdNode = false(NNdof,1); isBdNode(id) = true;
7 bdDof = (isBdNode); freeDof = (~isBdNode);
8 % vertices on the boundary
9 pD = node(bdNodeIdx,:); wD = g_D(pD);
10 % mid-edge on the boundary
11 z1 = node(bdEdgeD(:,1),:); z2 = node(bdEdgeD(:,2),:); zc = (z1+z2)./2;
12 wDc = g_D(zc);
13 % moments on the boundary
14 eb = z1-z2; % e = z2-z1
15 neb = [-eb(:,2),eb(:,1)]; % scaled ne
16 wnD = sum(1/6*(Dw(z1)+4*Dw(zc)+Dw(z2)).*neb,2);
17 % rhs
18 w = zeros(NNdof,1); w(bdDof) = [wD; wDc; wnD];
19 ff = ff - kk*w;
20
21 %% Set solver
22 w(freeDof) = kk(freeDof,freeDof)\ff(freeDof);
```

11.7 误差分析

例 11.1 不含边界层. 设精确解为

$$u(x, y) = (\sin(\pi x) \sin(\pi y))^2.$$

我们计算如下的能量范数误差 $\|u - \Pi_{\Delta}^K u_h\|$, 这里用四阶项的投影算子近似. 使用 meshdata100-500, 拟合得到的误差阶如下

表 3. 不同 ε 对应的能量范数误差阶

ε	2^0	2^{-2}	2^{-4}	2^{-6}	2^{-8}	2^{-10}	0
Err	1.58	1.02	1.12	1.80	2.01	2.02	2.03

可以看到, C^0 元确保了一阶收敛性. 当 ε 趋向于零, 即方程趋向于 Poisson 方程时, 收敛阶达到 2 阶.

例 11.2 带边界层. 精确解为

$$u(x, y) = \varepsilon(e^{-x_1/\varepsilon} + e^{-x_2/\varepsilon}) - x_1^2 x_2.$$

表 4. 不同 ε 对应的能量范数误差阶

ε	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
Err	1.20	0.49	0.65	0.48	0.46	0.46	0.46

对含边界层的例子, 可以看到, C^0 元确保了 $1/2$ 阶的收敛性.

Part III

混合虚拟元方法

12 Darcy 问题的混合虚拟元方法

12.1 一些说明

12.1.1 连续变分问题

设 $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, 求 $p \in H^1(\Omega)$ 使得

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mathbb{K}\nabla p) = f & \text{in } \Omega, \\ (\mathbb{K}\nabla p) \cdot \mathbf{n} = g & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

式中, \mathbb{K} 是 2×2 的对称正定矩阵, 这里仅考虑常矩阵. 特别地, 当 \mathbb{K} 是单位矩阵时, 上述问题成为 Poisson 方程的 Neumann 边值问题. 为了保证解的存在性, f 和 g 满足相容性条件

$$\int_{\Omega} f \, dx = \int_{\partial\Omega} g \, ds.$$

显然解相差常数, 为此要求 p 满足

$$\int_{\Omega} p \, dx = 0.$$

令 $\mathbf{u} = \mathbb{K}\nabla p$, 则有如下混合形式

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbb{K}\nabla p & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = -f & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

令

$$V_g = \{\mathbf{u} \in H(\operatorname{div}; \Omega) : \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = g \text{ on } \partial\Omega\}, \quad Q = L_0^2(\Omega), \quad V = V_0,$$

对应的混合变分问题为: 找 $(\mathbf{u}, p) \in V_g \times Q$ 使得

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = 0, & \mathbf{v} \in V, \\ b(\mathbf{u}, q) = -(f, q), & q \in Q, \end{cases}$$

式中,

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbb{K}^{-1}\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad b(\mathbf{v}, q) = (\operatorname{div} \mathbf{v}, q).$$

注意边界条件对应 \mathbf{u} .

假设 $\mathbb{K} = \mathbb{I}$ 为单位矩阵, 精确解

$$p(x, y) = \sin(\pi x) \cos(\pi y), \quad \int_{[0,1]^2} p(x, y) \, dx \, dy = 0,$$

则 PDE 信息可如下生成

```

1 function pde = Darcydata
2 % u = K*grad(p)
3 % Boundary condition: u*n = g

```

```

4
5 K = eye(2);
6
7 % ----- given by the symbolic computation -----
8 [pe,Kpx,Kpy,rhs] = compute_rhs(K);
9
10 % exact solution
11 function val = uexact(p)
12     x = p(:,1); y = p(:,2);
13     val = [Kpx(x,y),Kpy(x,y)]; % u = K*grad(p)
14 end
15 function val = pexact(p)
16     x = p(:,1); y = p(:,2);
17     val = pe(x,y);
18 end
19 % right side hand function
20 function val = f(p)
21     x = p(:,1); y = p(:,2);
22     val = rhs(x,y);
23 end
24
25 pde = struct('uexact',@uexact, 'pexact', @pexact, 'f', @f, 'K', K);
26 end
27
28 function [pe,Kpx,Kpy,f] = compute_rhs(K)
29     syms x y;
30     % exact solution
31     pe = sin(pi*x)*cos(pi*y);
32     % derivative
33     px = diff(pe,x); py = diff(pe,y);
34     % K*grad(p)
35     Kpx = K(1,1)*px + K(1,2)*py;
36     Kpy = K(2,1)*px + K(2,2)*py;
37     % f = -div(K*grad(p))
38     f = -(diff(Kpx,x) + diff(Kpy,y));
39     % convert to anonymous functions
40     pe = matlabFunction(pe,'Vars',{x,y});
41     f = matlabFunction(f,'Vars',{x,y});
42     Kpx = matlabFunction(Kpx,'Vars',{x,y});
43     Kpy = matlabFunction(Kpy,'Vars',{x,y});
44 end

```

这里的 `uexact` 对应 \mathbf{u} , `pexact` 对应 \mathbf{p} .

12.1.2 虚拟元方法

虚拟元空间

V 对应的局部虚拟元空间为

$$V_k(K) = \{\mathbf{v} \in H(\text{div}; K) \cap H(\text{rot}; K) : \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_e \in \mathbb{P}_k(e), \\ \text{div } \mathbf{v}|_K \in \mathbb{P}_{k-1}(K), \text{ rot } \mathbf{v}|_K \in \mathbb{P}_{k-1}(K)\},$$

式中,

$$\text{div } \mathbf{v} = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2, \quad \text{rot } \mathbf{v} = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1, \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2).$$

自由度取为

$$\int_e \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} q ds, \quad q \in \mathbb{M}_k(e), \quad e \subset \partial K, \quad (12.72)$$

$$\int_K \mathbf{v} \cdot \nabla q dx, \quad q \in \mathbb{M}_{k-1}(K) \setminus \{1\}, \quad (12.73)$$

$$\int_K \operatorname{rot} \mathbf{v} q dx, \quad q \in \mathbb{M}_{k-1}(K). \quad (12.74)$$

注意, 这里的矩量没有除以 $|e|$ 或 $|K|$, 是因为此时的 $a^K(\cdot, \cdot)$ 对应 L^2 范数, 而非 H^1 半模.

椭圆投影空间

对 Poisson 方程, 椭圆投影从虚拟元空间映射到多项式空间 $\mathbb{P}_k(K)$. 为了方便, 称像空间为椭圆投影空间. 对 Darcy 问题, 椭圆投影空间并不是 $\mathbb{P}_k(K)$, 而是

$$\widehat{V}_k(K) = \{\widehat{\mathbf{v}} \in V_k(K) : \widehat{\mathbf{v}} = \mathbb{K} \nabla \widehat{q}_{k+1} \text{ for some } \widehat{q}_{k+1} \in \mathbb{P}_{k+1}(K)\}.$$

椭圆投影算子

椭圆投影算子 $\widehat{\Pi}^K : V_k(K) \rightarrow \widehat{V}_k(K)$, $\mathbf{v} \mapsto \widehat{\Pi}^K \mathbf{v}$ 满足

$$a^K(\widehat{\Pi}^K \mathbf{v}, \widehat{\mathbf{w}}) = a^K(\mathbf{v}, \widehat{\mathbf{w}}), \quad \widehat{\mathbf{w}} \in \widehat{V}_k(K). \quad (12.75)$$

下面考虑椭圆投影的可计算性. 由 \mathbb{K} 的对称性,

$$\begin{aligned} a^K(\mathbf{v}, \widehat{\mathbf{w}}) &= \int_K \mathbb{K}^{-1} \mathbf{v} \cdot \widehat{\mathbf{w}} dx = \int_K \mathbf{v} \cdot (\mathbb{K}^{-1} \widehat{\mathbf{w}}) dx \\ &= \int_K \mathbf{v} \cdot \nabla \widehat{q}_{k+1} dx = - \int_K \widehat{q}_{k+1} \operatorname{div} \mathbf{v} dx + \int_{\partial K} \widehat{q}_{k+1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds. \end{aligned} \quad (12.76)$$

- 对右端第二项, 注意到 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_e \in \mathbb{P}_k(e)$, 在尺度单项式下展开

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_e(s) = c_1 m_1^e(s) + \cdots + c_n m_n^e(s),$$

则系数唯一由第一种自由度 (12.72) 确定.

- 对右端第一项, 注意到 $\operatorname{div} \mathbf{v}|_K \in \mathbb{P}_{k-1}(K)$, 将其在尺度单项式下展开

$$\operatorname{div} \mathbf{v}|_K(x) = c_1 m_1^K(x) + \cdots + c_n m_n^K(x).$$

令 $q = m_i^K(x)$, 两边关于 q 做内积, 有

$$\int_K \operatorname{div} \mathbf{v} q dx = - \int_K \mathbf{v} \cdot \nabla q dx + \int_{\partial K} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} q ds, \quad q = m_i^K(x) \in \mathbb{P}_{k-1}(K).$$

由此可知系数唯一由第一种自由度 (12.72) 和第二种自由度 (12.73) 确定.

近似变分问题

$a^K(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 对应的近似双线性形式为

$$a_h^K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a^K(\widehat{\Pi}^K \mathbf{u}, \widehat{\Pi}^K \mathbf{v}) + \|\mathbb{K}^{-1}\| S^K(\mathbf{u} - \widehat{\Pi}^K \mathbf{u}, \mathbf{v} - \widehat{\Pi}^K \mathbf{v}),$$

式中, $\|\cdot\|$ 为 Frobenius 范数, 即拉直后向量的 L^2 范数, S^K 取为自由度向量的 l^2 内积.

以下用 V_h 表示 $V_k(K)$ 对的整体虚拟元空间, Q_h 表示 Q 对应的离散空间, 取为

$$Q_h := \{q \in Q : q|_K \in \mathbb{P}_{k-1}(K), \quad K \in \mathcal{T}_h.\}$$

特别地, 当 $k = 1$ 时, Q_h 就是分片常数空间, 且位于 $L_0^2(\Omega) = L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ 中.

离散的混合变分问题为: 找 $(\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h^g \times Q_h$ 使得

$$\begin{cases} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) &= 0, \quad \mathbf{v}_h \in V_h, \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) &= -(f, q_h), \quad q_h \in Q_h. \end{cases} \quad (12.77)$$

注意, 约束 $\int_{\Omega} p_h dx$ 未自然地加在该系统上, 为此使用 Lagrange 乘子方法. 此时考虑如下的增广变分问题: 找 $((\mathbf{u}_h, p_h), \lambda) \in V_h^g \times Q_h \times \mathbb{R}$ 使得

$$\begin{cases} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) &= 0, \quad \mathbf{v}_h \in V_h, \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) + \lambda \int_{\Omega} q_h dx &= -(f, q_h), \quad q_h \in Q_h, \\ \mu \int_{\Omega} p_h dx &= 0, \quad \mu \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (12.78)$$

12.1.3 线性方程组

需指出的是, 这里的虚拟元空间 V_h 不能理解为向量或张量型的函数空间. 对线弹性问题, 设 u_i 对应的虚拟元空间为 V^h , 则 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ 的虚拟元空间取为张量积空间 $\mathbf{V}^h = (V^h)^2$. 与线弹性问题不同的是, V_h 不是由张量积构成, 编程时要把 \mathbf{u} 看成标量一样处理.

设 V_h 的整体节点基为 φ_i , $i = 1, \dots, N$, 其中 N 是 V_h 的维数, 则

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^N \chi_i(\mathbf{u}) \varphi_i =: \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\chi}(\mathbf{u}).$$

注意, 对含方向的边上的自由度, 事先规定好边的定向满足: 起点序号小于终点序号. 类似地, 设 Q_h 的基为 ψ_l , $l = 1, \dots, M$, 即

$$p_h = \sum_{l=1}^M p_l \psi_l.$$

把这些展开式代入 (12.77), 并取 $\mathbf{v}_h = \boldsymbol{\varphi}_j$, $q_h = \psi_l$, 则有

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N a_h(\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_j) \chi_i + \sum_{l=1}^M b(\boldsymbol{\varphi}_j, \psi_l) p_l = 0, & j = 1, \dots, N, \\ \sum_{i=1}^N b(\boldsymbol{\varphi}_i, \psi_l) \chi_i + \lambda \int_{\Omega} \psi_l dx = -(f, \psi_l), & l = 1, \dots, M, \\ \sum_{l=1}^M \int_{\Omega} \psi_l dx p_l = 0. \end{cases}$$

令

$$d_l = \int_{\Omega} \psi_l dx, \quad \mathbf{d} = [d_1, \dots, d_M]^T,$$

则方程组可写成如下的矩阵形式

$$\begin{bmatrix} A & B & \mathbf{0} \\ B^T & O & \mathbf{d} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{d}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\chi} \\ \mathbf{p} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (12.79)$$

式中,

$$A = (a_h(\boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}_i)), \quad B = (b(\boldsymbol{\varphi}_j, \psi_l)), \quad \mathbf{f} = (-f, \psi_l).$$

以下设 $k = 1$, 此时无第二种自由度 (12.73), 局部自由度排列为

$$\begin{aligned} \chi_i(\mathbf{v}) &= \int_{e_i} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds, \quad i = 1, \dots, N_v, \\ \chi_{N_v+i}(\mathbf{v}) &= \int_{e_i} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \frac{s - s_{e_i}}{h_{e_i}} ds, \quad i = 1, \dots, N_v, \\ \chi_{2N_v+1}(\mathbf{v}) &= \int_K \text{rot } \mathbf{v} dx. \end{aligned}$$

注意, 前两种自由度带方向, 整体装配时要固定边的定向. 对 (13.87) 中的未知数 $\boldsymbol{\chi}$, 先排列每条边对应的第一种自由度, 再排列每条边对应的第二种自由度, 最后排列单元对应的第三种自由度.

12.2 椭圆投影的计算

12.2.1 过渡矩阵

把 $V_k(K)$ 的节点基函数排成行向量, 记为

$$\boldsymbol{\phi}^T = (\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, \dots, \boldsymbol{\phi}_{N_k}),$$

式中, $N_k = 2N_v + 1$ 是局部自由度的个数. 设 $\widehat{V}_k(K)$ 的基函数为

$$\widehat{\mathbf{m}}^T = (\widehat{\mathbf{m}}_1, \widehat{\mathbf{m}}_2, \dots, \widehat{\mathbf{m}}_{\widehat{N}_p}).$$

因 $\widehat{V}_k(K) \subset V_k(K)$, 故可设

$$\widehat{\mathbf{m}}^T = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{D},$$

式中, \mathbf{D} 为椭圆投影空间 $\widehat{V}_k(K)$ 到虚拟元空间 $V_k(K)$ 的过渡矩阵. 由自由度的定义,

$$\widehat{\mathbf{m}}_\alpha = \sum_{i=1}^{N_k} \phi_i \mathbf{D}_{i\alpha}, \quad \mathbf{D}_{i\alpha} = \chi_i(\widehat{\mathbf{m}}_\alpha).$$

根据 $\widehat{V}_k(K)$ 的定义, 它的元素位于 $\mathbb{K}\nabla\mathbb{P}_{k+1}(K)$ 中. 对 $k=1$, 设 $\mathbb{P}_{k+1}(K) = \mathbb{P}_2(K)$ 的尺度单项式为

$$m^T = (m_1, m_2, \dots, m_{N_p}), \quad N_p = 6,$$

且

$$\begin{aligned} m_1(x, y) &= 1, \quad m_2(x, y) = \frac{x - x_K}{h_K}, \quad m_3(x, y) = \frac{y - y_K}{h_K}, \\ m_4(x, y) &= \frac{(x - x_K)^2}{h_K^2}, \quad m_5(x, y) = \frac{(x - x_K)(y - y_K)}{h_K^2}, \quad m_6(x, y) = \frac{(y - y_K)^2}{h_K^2}, \end{aligned}$$

则可取

$$\widehat{\mathbf{m}}_\alpha = \mathbb{K}\nabla(h_K m_{\alpha+1}), \quad \alpha = 1, \dots, \widehat{N}_p = N_p - 1 = 5, \quad (12.80)$$

显式写出来为

$$\widehat{\mathbf{m}}_1 = \mathbb{K} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{m}}_2 = \mathbb{K} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{m}}_3 = \mathbb{K} \begin{bmatrix} 2m_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{m}}_4 = \mathbb{K} \begin{bmatrix} m_3 \\ m_2 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{m}}_5 = \mathbb{K} \begin{bmatrix} 0 \\ 2m_3 \end{bmatrix}.$$

下面计算过渡矩阵.

对 $\chi_i, i = 1, \dots, N_v$, 注意到 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \in \mathbb{P}_1(e)$, 用梯形公式计算有

$$\chi_i(\mathbf{v}) = \int_{e_i} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds = \frac{1}{2}(\mathbf{v}(z_i) + \mathbf{v}(z_{i+1})) \cdot (h_{e_i} \mathbf{n}_{e_i}), \quad \mathbf{v} = \widehat{\mathbf{m}}_\alpha. \quad (12.81)$$

对 $\chi_{N_v+i}, i = 1, \dots, N_v$, 用 Simpson 公式计算有

$$\begin{aligned} \chi_{N_v+i}(\mathbf{v}) &= \int_{e_i} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \frac{s - s_{e_i}}{h_{e_i}} ds = \frac{h_{e_i}}{6} (f(z_i) + 4f(s_{e_i}) + f(z_{i+1})) \\ &= \frac{h_{e_i}}{6} (f(z_i) + f(z_{i+1})), \quad f = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \frac{s - s_{e_i}}{h_{e_i}} \\ &= \frac{1}{6} \left(\mathbf{v}(z_i) \cdot \mathbf{n}_{e_i} (s_i - s_{e_i}) + \mathbf{v}(z_{i+1}) \cdot \mathbf{n}_{e_i} (s_{i+1} - s_{e_i}) \right) \\ &= \frac{1}{6} \left(\mathbf{v}(z_i) \cdot \mathbf{n}_{e_i} \frac{-1}{2} h_{e_i} + \mathbf{v}(z_{i+1}) \cdot \mathbf{n}_{e_i} \frac{1}{2} h_{e_i} \right) \\ &= \frac{1}{12} \left(\mathbf{v}(z_{i+1}) - \mathbf{v}(z_i) \right) \cdot (\mathbf{n}_{e_i} h_{e_i}), \quad \mathbf{v} = \widehat{\mathbf{m}}_\alpha. \end{aligned} \quad (12.82)$$

对 χ_{2N_v+1} , 根据定义

$$\begin{aligned}\chi_{2N_v+1}(\mathbf{v}) &= \int_K \operatorname{rot} \mathbf{v} dx = \int_K (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) dx \\ &= \int_{\partial K} (v_2 n_1 - v_1 n_2) ds = \int_{\partial K} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) ds \\ &= \sum_{i=1}^{N_v} \frac{1}{2} (\mathbf{v}(z_i) + \mathbf{v}(z_{i+1})) \cdot (h_{e_i} \mathbf{t}_{e_i}), \quad \mathbf{v} = \widehat{\mathbf{m}}_\alpha.\end{aligned}$$

根据上面的说明, 过渡矩阵如下计算

```

1 matK = pde.K; % matK = eye(2) coefficient matrix
2 % ----- element information -----
3 index = elem{iel}; Nv = length(index);
4 xK = centroid(iel,1); yK = centroid(iel,2); hK = diameter(iel);
5 x = node(index,1); y = node(index,2);
6 v1 = 1:Nv; v2 = [2:Nv,1]; % loop index for vertices or edges
7 xe = (x(v1)+x(v2))/2; ye = (y(v1)+y(v2))/2; % mid-edge points
8 Ne = [y(v2)-y(v1), x(v1)-x(v2)]; % he*ne
9 Te = [-Ne(:,2), Ne(:,1)]; % he*te
10 % scaled monomials
11 m1 = @ (x,y) 1+0*x; m2 = @ (x,y) (x-xK)./hK; m3 = @ (x,y) (y-yK)./hK;
12 mK1 = @ (x,y) matK*[1+0*x;0+0*x];
13 mK2 = @ (x,y) matK*[0+0*x;1+0*x];
14 mK3 = @ (x,y) matK*[2*m2(x,y);0+0*x];
15 mK4 = @ (x,y) matK*[m3(x,y);m2(x,y)];
16 mK5 = @ (x,y) matK*[0+0*x;2*m3(x,y)];
17 mhat = @ (x,y) [mK1(x,y), mK2(x,y), mK3(x,y), mK4(x,y), mK5(x,y)];
18
19 % ----- transition matrix -----
20 Ndof = 2*Nv+1; np = 5;
21 D1 = zeros(Ndof,np);
22 for i = 1:Nv % loop of edges
23     % v at z_i, z_{i+1} for v = [mK1, ..., mK5]
24     va = mhat(x(v1(i)),y(v1(i))); vb = mhat(x(v2(i)),y(v2(i)));
25     % chi_i, i = 1, ..., Nv
26     D1(i,:) = 1/2*Ne(i,:)*(va+vb);
27     % chi_{Nv+i}, i = 1, ..., Nv
28     D1(Nv+i,:) = 1/12*Ne(i,:)*(vb-vb);
29     % chi_{2Nv+1}
30     D1(end,:) = D1(end,:)+1/2*Te(i,:)*(va+vb);
31 end

```

这里的 κ 为 \mathbb{K} , $mhat$ 对应 $\widehat{\mathbf{m}}^T$.

12.2.2 椭圆投影在基下的矩阵

设椭圆投影 $\widehat{\Pi}^K$ 在节点基下的矩阵为 $\widehat{\boldsymbol{\Pi}}^K$, 即

$$\widehat{\Pi}^K(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_k}) = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_k}) \widehat{\boldsymbol{\Pi}}^K \quad \text{或} \quad \widehat{\Pi}^K \boldsymbol{\phi}^T = \boldsymbol{\phi}^T \widehat{\boldsymbol{\Pi}}^K.$$

根据自由度的定义, $\widehat{\boldsymbol{\Pi}}^K$ 的第 j 列就是 $\widehat{\Pi}^K \boldsymbol{\phi}_j$ 的自由度向量, 即

$$\widehat{\boldsymbol{\Pi}}^K = \left(\chi_i(\widehat{\Pi}^K \boldsymbol{\phi}_j) \right).$$

设投影向量 $\hat{\Pi}^K \phi^T$ 在椭圆投影空间的基 $\widehat{\mathbf{m}}^T$ 下的矩阵为 $\hat{\Pi}_*^K$, 即

$$\hat{\Pi}^K \phi^T = \widehat{\mathbf{m}}^T \hat{\Pi}_*^K,$$

易知有

$$\hat{\Pi}^K = D \hat{\Pi}_*^K.$$

定义 12.75 可等价写为

$$a^K(\widehat{\mathbf{m}}, \hat{\Pi}^K \phi^T) = a^K(\widehat{\mathbf{m}}, \phi^T)$$

或

$$\hat{\mathbf{G}} \hat{\Pi}_*^K = \hat{\mathbf{B}},$$

式中,

$$\hat{\mathbf{G}} = a^K(\widehat{\mathbf{m}}, \widehat{\mathbf{m}}^T), \quad \hat{\mathbf{B}} = a^K(\widehat{\mathbf{m}}, \phi^T).$$

而且有如下一致性关系

$$\hat{\mathbf{G}} = \hat{\mathbf{B}} D.$$

现在来计算 $\hat{\mathbf{B}}$. 由 (12.76) 和 (12.80), 可得

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{B}}_{\alpha i} &= a^K(\widehat{\mathbf{m}}_\alpha, \phi_i) = -h_K \int_K m_{\alpha+1} \operatorname{div} \phi_i dx + h_K \int_{\partial K} m_{\alpha+1} \phi_i \cdot \mathbf{n} ds \\ &=: -h_K I_1(\alpha, i) + h_K I_2(\alpha, i), \end{aligned}$$

式中,

$$I_1(\alpha, i) = \int_K m_{\alpha+1} \operatorname{div} \phi_i dx, \quad I_2(\alpha, i) = \int_{\partial K} m_{\alpha+1} \phi_i \cdot \mathbf{n} ds.$$

对 I_1 , 注意到当 $k = 1$ 时 $\operatorname{div} \phi_i$ 为常数, 设

$$\operatorname{div} \phi_i = c_i m_1 = c_i,$$

则由自由度的定义,

$$c_i = |K|^{-1} \int_K \operatorname{div} \phi_i dx = |K|^{-1} \int_{\partial K} \phi_i \cdot \mathbf{n} ds = \begin{cases} |K|^{-1}, & i = 1, \dots, N_v, \\ 0, & i > N_v. \end{cases}.$$

从而

$$I_1(\alpha, i) = \int_K m_{\alpha+1} \operatorname{div} \phi_i dx = c_i \int_K m_{\alpha+1} dx.$$

这样, I_1 如下计算

```

1 % first term
2 nodeT = [node(index,:); centroid(iel,:)];
3 elemT = [(Nv+1)*ones(Nv,1),(1:Nv)',[2:Nv,1]'];
4 m = @x,y [m2(x,y), m3(x,y), m4(x,y), m5(x,y), m6(x,y)]; % m_{a+1}, ...
5 ci = zeros(1,Ndof); ci(1:Nv) = 1/area(iel);
6 Intm = integralTri(m,3,nodeT,elemT);

```

对 I_2 , 由 $\phi_i \cdot \mathbf{n}|_{e_j} \in \mathbb{P}_1(e_j)$ (固定 $i = 1, \dots, 2N_v + 1$), 可设

$$\phi_i \cdot \mathbf{n}|_{e_j} = c_0^i + c_1^i \frac{s - s_{e_j}}{h_{e_j}}.$$

注意到

$$\int_e \left(\frac{s - s_e}{h_e} \right)^\alpha \left(\frac{s - s_e}{h_e} \right)^\beta ds = \frac{h_e}{(\alpha + \beta + 1)} \left(\frac{1}{2^{\alpha+\beta+1}} - \frac{1}{(-2)^{\alpha+\beta+1}} \right),$$

取内积有

$$\begin{cases} h_{e_j} c_0^i = \int_{e_j} \phi_i \cdot \mathbf{n} ds =: r_j^i, \\ \frac{1}{12} h_{e_j} c_1^i = \int_{e_j} \phi_i \cdot \mathbf{n} \frac{s - s_{e_j}}{h_{e_j}} ds =: s_j^i. \end{cases}$$

根据自由度的定义, r_j^i 和 s_j^i 的非零元素为

$$r_j^j = s_j^{j+N_v} = 1, \quad j = 1, \dots, N_v.$$

而且有

$$c_0^i = \frac{1}{h_{e_j}} r_j^i, \quad c_1^i = \frac{12}{h_{e_j}} s_j^i,$$

从而

$$\mathbf{r}_j^i(s) := \phi_i \cdot (h_{e_j} \mathbf{n}_{e_j})|_{e_j} = r_j^i + 12s_j^i \frac{s - s_{e_j}}{h_{e_j}}.$$

显然有

$$\mathbf{r}_j^i(s_a) = r_j^i - 6s_j^i, \quad \mathbf{r}_j^i(s_e) = r_j^i, \quad \mathbf{r}_j^i(s_b) = r_j^i + 6s_j^i,$$

式中, s_a , s_e 和 s_b 分别对应 e_j 的起点、中点和终点.

注意到 Simpson 公式对三次多项式是精确的, 我们有

$$\begin{aligned} I_2(\alpha, i) &= \sum_{j=1}^{N_v} \int_{e_j} m_{\alpha+1} \phi_i \cdot \mathbf{n} ds \\ &= \sum_{j=1}^{N_v} \frac{h_{e_j}}{6} (m_{\alpha+1} \phi_i(z_j) + 4m_{\alpha+1} \phi_i(z_{e_j}) + m_{\alpha+1} \phi_i(z_{j+1})) \cdot \mathbf{n}_{e_j} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{N_v} m_{\alpha+1}(z_j) \mathbf{r}_j^i(s_a) + 4m_{\alpha+1}(z_{e_j}) \mathbf{r}_j^i(s_e) + m_{\alpha+1}(z_{j+1}) \mathbf{r}_j^i(s_b) \end{aligned}$$

或

$$I_2(\alpha, :) = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{N_v} m_{\alpha+1}(z_j) \mathbf{r}_j(s_a) + 4m_{\alpha+1}(z_{e_j}) \mathbf{r}_j(s_e) + m_{\alpha+1}(z_{j+1}) \mathbf{r}_j(s_b).$$

```

1 % first term
2 nodeT = [node(index,:); centroid(iel,:)];
3 elemT = [(Nv+1)*ones(Nv,1), (1:Nv)', [2:Nv,1]';
4 m = @x,y [m2(x,y), m3(x,y), m4(x,y), m5(x,y), m6(x,y)]; % m_{a+1}, ...
5 ci = zeros(1,Ndof); ci(1:Nv) = 1/area(iel);

```

```

6      Intm = integralTri(m,3,nodeT,elemT);
7      I1 = Intm'*ci;
8      % second term
9      rij = zeros(Ndof,Nv); rij(1:Nv,:) = eye(Nv);
10     sij = zeros(Ndof,Nv); sij(Nv+1:2*Nv,:) = eye(Nv);
11     rija = rij - 6*sij;
12     rije = rij;
13     rijb = rij + 6*sij;
14     I2 = zeros(np,Ndof);
15     for j = 1:Nv
16         ma = m(x(v1(j)),y(v1(j)));
17         me = m(xe(j),ye(j));
18         mb = m(x(v2(j)),y(v2(j)));
19         rja = rija(:,j)'; rje = rije(:,j)'; rjb = rijb(:,j)';
20         I2 = I2 + 1/6*(ma'*rja + 4*me'*rje + mb'*rjb);
21     end

```

最终的 $\hat{\mathbf{B}}$ 以及 $\hat{\mathbf{G}}$ 为

```

1      B1 = hK*(-I1+I2);
2      Bs{iel} = B1; Gs{iel} = B1*D1;

```

注意, 椭圆投影无限制条件, 因而前面程序中的 \mathbf{G} 与 \mathbf{G}_s 是相同的, \mathbf{B} 也是如此.

12.3 单元刚度矩阵和载荷向量的计算

12.3.1 A 的计算

A 对应的单元矩阵为

$$A_K = A_K^1 + A_K^2,$$

式中,

$$A_K^1(i,j) = a^K(\hat{\Pi}^K \phi_j, \hat{\Pi}^K \phi_i),$$

$$\begin{aligned} A_K^2(i,j) &= \|\mathbb{K}^{-1}\| S^K(\phi_j - \hat{\Pi}^K \phi_j, \phi_i - \hat{\Pi}^K \phi_i) \\ &= \|\mathbb{K}^{-1}\| \sum_{i=1}^{N_k} \chi_r(\phi_j - \hat{\Pi}^K \phi_j) \chi_r(\phi_i - \hat{\Pi}^K \phi_i). \end{aligned}$$

第一式写成矩阵形式为

$$A_K^1 = a^K(\hat{\Pi}^K \phi, \hat{\Pi}^K \phi^T) = (\hat{\Pi}_*^K)^T a^K(\hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{m}}^T) \hat{\Pi}_*^K = (\hat{\Pi}_*^K)^T \hat{\mathbf{G}} \hat{\Pi}_*^K.$$

对第二式, 由 $\chi_r(\hat{\Pi}^K \phi_i) = (\hat{\Pi}^K)_ri$ 知,

$$A_K^2 = \|\mathbb{K}^{-1}\| (\mathbf{I} - \hat{\Pi}^K)^T (\mathbf{I} - \hat{\Pi}^K).$$

注意自由度是含方向的, 根据

$$a^K(\pm \phi_i, \pm \phi_j) = \pm \cdot \pm a^K(\phi_i, \phi_j)$$

调整正负号. 单元矩阵 A_K 如下计算 (进行了“行拉直”)

```
1 %% Get elementwise stiffness matrix A
2 Aelem = cell(NT,1);
3 bdEdgeIdx = bdStruct.bdEdgeIdx; E = false(NE,1); E(bdEdgeIdx) = 1;
4 Ph = cell(NT,1); % matrix for error evaluation
5 for iel = 1:NT
6     % element information
7     index = elem{iel}; Nv = length(index); NdofA = 2*Nv+1;
8     nodeT = [node(index,:);centroid(iel,:)];
9     elemT = [(Nv+1)*ones(Nv,1),(1:Nv)',[2:Nv,1]'];
10    % sign matrix and sign vector
11    sgnelem = sign(diff(index([1:Nv,1])));
12    id = elem2edge{iel}; sgnbd = E(id); sgnelem(sgnbd) = 1;
13    sgnbase = ones(Ndof,1); sgnbase(1:2*Nv) = [sgnelem,sgnelem];
14    sgnK = sgnbase*sgnbase';
15    % Projection
16    Pis = Gs{iel}\Bs{iel}; Pi = D{iel}*Pis; I = eye(size(Pi));
17    % Stiffness matrix
18    AK = Pis'*Gs{iel}*Pis + norm(matK,'fro')*(I-Pi)'*(I-Pi); % G = Gs
19    AK = AK.*sgnK;
20    Aelem{iel} = reshape(AK',1,[]); % straighten as row vector for easy assembly
21    % matrix for error evaluation
22    sgnPis = repmat(sgnbase',size(Pis,1),1);
23    Ph{iel} = sgnPis.*Pis;
24 end
```

12.3.2 B 的计算

由 Q_h 的定义, 在单元上, 基函数 $\psi_l \in \mathbb{P}_{k-1}(K)$. 对 $k=1$, 单元上的基函数只有一个, 为常数 $m_1 = 1$. 这样, B^K 为 $N_k \times 1$ 的向量 (但 B 是 $(2NE + NT) \times NT$ 的矩阵), 且

$$\begin{aligned} B_{j1}^K &= b^K(\phi_j, m_1) = \int_K m_1 \operatorname{div} \phi_j dx = \int_K \operatorname{div} \phi_j dx \\ &= \int_{\partial K} \phi_j \cdot \mathbf{n} ds = \begin{cases} 1, & 1 \leq j \leq N_v, \\ 0, & j > N_v. \end{cases} \end{aligned}$$

根据

$$b^K(\pm \phi_i, \psi_j) = \pm b^K(\phi_i, \psi_j)$$

调整正负号. B_K 如下计算

```
1 %% Get elementwise stiffness matrix B
2 Belem = cell(NT,1);
3 for iel = 1:NT
4     ...
5
6     BK = zeros(Ndof,1); BK(1:Nv) = 1;
7     BK = BK.*sgnbase;
8     Belem{iel} = reshape(BK',1,[]); % straighten as row vector for easy assembly
9 end
```

12.3.3 d 的计算

当 $k = 1$ 时, Q_h 是分片常数的, 从而有 NT 个基函数, 它们为

$$\psi_l(x) = \begin{cases} 1, & x \in K_l, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

于是,

$$d_l = \int_{K_l} dx = |K_l|.$$

它直接如下给出

```
1 d = area; % for Lagrange multiplier
```

12.3.4 载荷向量的计算

根据 (13.87), 只要计算 $\mathbf{f} = (-(f, \psi_l))$. 对 $k = 1$,

$$\mathbf{f}^K = -(f, \psi_l)_K = - \int_K f dx$$

```
1 %% Get elementwise load vector f
2 belem = cell(NT,1);
3 for iel = 1:NT
4     ...
5
6     % Load vector f
7     fxy = @(x,y) pde.f([x,y]); % f(p) = f([x,y])
8     rhs = integralTri(fxy,3,nodeT,elemT); rhs = rhs';
9     fK = -rhs;
10    belem{iel} = fK'; % straighten as row vector for easy assembly
11 end
```

12.4 刚度矩阵和载荷向量的装配

这里先考虑分块装配, 后续再添加整体装配的处理.

矩阵 A, B 和向量 \mathbf{f} 如下装配

```
1 %% Assemble matrices A,B, and vector f,d
2 elemLen = cellfun('length',elem); vertNum = unique(elemLen);
3 nnzA = sum((2*elemLen+1).^2); nnzB = sum((2*elemLen+1)*1);
4 iiA = zeros(nnzA,1); jjA = zeros(nnzA,1); ssA = zeros(nnzA,1);
5 iiB = zeros(nnzB,1); jjB = zeros(nnzB,1); ssB = zeros(nnzB,1);
6 ffB = zeros(NNdofB,1);
7 idA = 0; idB = 0;
8 elem2dof = cell(NT,1);
9 for Nv = vertNum(:)' % only valid for row vector
10
11     idNv = find(elemLen == Nv); % find polygons with Nv vertices
12     NTv = length(idNv); % number of elements with Nv vertices
13
14     % elem2dof
```

```

15 elem2edgeNv = cell2mat(elem2edge(idNv));
16 elem2dofA = [elem2edgeNv, elem2edgeNv+NE, idNv+2*NE];
17 elem2dofB = idNv';
18 NdofA = 2*Nv+1; NdofB = 1;
19
20 % assemble the matrix A
21 KA = cell2mat(Aelem(idNv));
22 iiA(idA+1:idA+NTv*NdofA^2) = reshape(repmat(elem2dofA, NdofA, 1), [], 1);
23 jjA(idA+1:idA+NTv*NdofA^2) = repmat(elem2dofA(:, ), NdofA, 1);
24 ssA(idA+1:idA+NTv*NdofA^2) = KA(:, );
25 idA = idA + NTv*NdofA^2;
26
27 % assemble the matrix B
28 KB = cell2mat(Belem(idNv));
29 iiB(idB+1:idB+NTv*NdofB*NdofA) = reshape(repmat(elem2dofA, NdofB, 1), [], 1);
30 jjB(idB+1:idB+NTv*NdofB*NdofA) = repmat(elem2dofB(:, ), NdofA, 1);
31 ssB(idB+1:idB+NTv*NdofB*NdofA) = KB(:, );
32 idB = idB + NTv*NdofB*NdofA;
33
34 % assemble the vector
35 FB = cell2mat(belem(idNv));
36 ffB = ffB + accumarray(elem2dofB(:, ), FB(:, ), [NNdofB 1]);
37
38 % elementwise global indices
39 elem2dof(idNv) = mat2cell(elem2dofA, ones(NTv, 1), NdofA);
40 end
41 A = sparse(iiA, jjA, ssA, NNdofA, NNdofA);
42 B = sparse(iiB, jjB, ssB, NNdofA, NNdofB);
43 d = area; % for Lagrange multiplier

```

综上, 如下获得未施加边界条件的线性系统.

```

1 %% Get block linear system
2 kk = sparse(NNdof+1,NNdof+1); ff = zeros(NNdof+1,1);
3 kk(1:NNdofA,1:NNdofA) = A;
4 kk(1:NNdofA, (1:NNdofB)+NNdofA) = B;
5 kk((1:NNdofB)+NNdofA, 1:NNdofA) = B';
6 kk((1:NNdofB)+NNdofA, end) = d;
7 kk(end, (1:NNdofB)+NNdofA) = d';
8 ff((1:NNdofB)+NNdofA) = ffB;

```

注意, 变量多出一个 λ , 因而方程组的行列数为 $NNdof+1$.

12.5 边界条件的处理

边界条件 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = -g$ 可视为 \mathbf{u} 的 Dirichlet 边界条件, 因为它提供了前两种自由度, 即

$$\begin{aligned}\chi_i(\mathbf{v}) &= \int_{e_i} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds, \quad i = 1, \dots, N_v, \\ \chi_{N_v+i}(\mathbf{v}) &= \int_{e_i} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \frac{s - s_{e_i}}{h_{e_i}} ds, \quad i = 1, \dots, N_v\end{aligned}$$

在边界上的值. 仍按照 (12.81) 和 (12.82) 近似计算. 这样, 边界条件如下应用.

```

1 %% Apply Dirichlet boundary conditions
2 % bdDof, freeDof
3 bdEdge = bdStruct.bdEdge; bdEdgeIdx = bdStruct.bdEdgeIdx;

```

```

4 id = [bdEdgeIdx; bdEdgeIdx+NE];
5 isBdDof = false(NN dof+1,1); isBdDof(id) = true;
6 bdDof = (isBdDof); freeDof = (~isBdDof);
7 % bdval
8 u = pde.uxexact;
9 z1 = node(bdEdge(:,1),:); z2 = node(bdEdge(:,2),:);
10 e = z1-z2; % e = z2-z1
11 Ne = [-e(:,2),e(:,1)];
12 chi1 = 1/2*sum((u(z1)+u(z2)).*Ne,2); % u*n = g
13 chi2 = 1/12*sum((u(z2)-u(z1)).*Ne,2);
14 bdval = [chi1;chi2];
15 % sol
16 sol = zeros(NN dof+1,1);
17 sol(bdDof) = bdval;
18 ff = ff - kk*sol;
19
20 %% Set solver
21 sol(freeDof) = kk(freeDof,freeDof)\ff(freeDof);

```

12.6 误差分析

设 \mathbf{u} 是精确解, \mathbf{u}_h 是数值解. 注意 \mathbf{u}_h 在单元内部的值未知, 我们用 $\hat{\Pi}^K \mathbf{u}_h$ 来代替. 也就是说, 用椭圆投影的误差代替数值解的误差. 离散 L^2 误差定义为

$$\text{ErrL2} = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{u} - \hat{\Pi}^K \mathbf{u}_h\|_{0,K}^2 \right)^{1/2}.$$

下面给出误差可计算的表达式. 设单元 K 上的局部自由度向量为 $\boldsymbol{\chi}_K$, 则 $\mathbf{u}_h|_K = \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\chi}_K$. 需要注意的是, 这里的 $\boldsymbol{\chi}_K$ 是局部自由度向量, 它可能与整体自由度存在差别. 这是因为, 对某些带方向的自由度, 整体上要先固定方向, 而整体限制在局部单元上时, 方向可能恰好与单元方向相反.

椭圆投影用自由度表示为

$$\hat{\Pi}^K \mathbf{u}_h = \hat{\Pi}^K \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\chi}_K = \widehat{\mathbf{m}}^T \hat{\boldsymbol{\Pi}}_*^K \boldsymbol{\chi}_K =: a_1 \widehat{\mathbf{m}}_1 + \cdots + a_5 \widehat{\mathbf{m}}_5,$$

式中, $(a_1, \dots, a_5)^T = \hat{\boldsymbol{\Pi}}_*^K \boldsymbol{\chi}_K$. 于是,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \hat{\Pi}^K \mathbf{u}_h\|_{0,K}^2 &= \|\mathbf{u} - (a_1 \widehat{\mathbf{m}}_1 + \cdots + a_5 \widehat{\mathbf{m}}_5)\|_{0,K}^2 \\ &= \sum_{\tau} \int_{\tau} (\mathbf{u} - (a_1 \widehat{\mathbf{m}}_1 + \cdots + a_5 \widehat{\mathbf{m}}_5))^2 dx, \end{aligned}$$

最后一步转化为三角形的积分和.

13 Stokes 问题的混合虚拟元方法

13.1 一些说明

13.1.1 连续变分问题

齐次 Dirichlet 边界条件的 Stokes 问题为: 求 (\mathbf{u}, p) 使得

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} - \nabla p = \mathbf{f} & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

定义空间

$$\mathbf{V} = \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad Q = L_0^2(\Omega).$$

混合变分问题为: 找 $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q$ 使得

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), & \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ b(\mathbf{u}, q) = 0, & q \in Q, \end{cases}$$

式中,

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\nu \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}), \quad b(\mathbf{v}, q) = (\operatorname{div} \mathbf{v}, q).$$

设精确解为

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \cos(x)^2 \cos(y) \sin(y) \\ \frac{1}{2} \cos(y)^2 \cos(x) \sin(x) \end{bmatrix}, \quad p(x, y) = \sin(x) - \sin(y),$$

则 PDE 信息可如下生成

```
1 function pde = Stokesdata
2 % PDE: u = [u1,u2]
3 % -nu*\Delta(u) - \nabla(p) = f, in \Omega
4 % div u = 0, in \Omega
5 % u = g_D, on \partial \Omega
6
7 nu = 1;
8
9 % ----- given by the symbolic computation -----
10 [u1,u2,pe,f1,f2] = compute_rhs(nu);
11
12 % exact solution
13 function val = uexact(p)
14     x = p(:,1); y = p(:,2);
15     val = [u1(x,y)+0*x,u2(x,y)+0*x];
16 end
17 function val = pexact(p)
18     x = p(:,1); y = p(:,2);
19     val = pe(x,y)+0*x;
20 end
21 % right side hand function
```

```

22     function val = f(p)
23         x = p(:,1); y = p(:,2);
24         val = [f1(x,y)+0*x,f2(x,y)+0*x];
25     end
26
27 % Dirichlet
28     function val = g_D(p)
29         val = uexact(p);
30     end
31
32 pde = struct('uexact',@uexact, 'pexact',@pexact, 'f', @f, 'g_D', @g_D, 'nu', nu);
33 end
34
35 function [u1,u2,pe,f1,f2] = compute_rhs(nu)
36     syms x y;
37     % exact solution
38     u1 = -0.5*cos(x)^2*cos(y)*sin(y);
39     u2 = 0.5*cos(y)^2*cos(x)*sin(x);
40     pe = sin(x)-sin(y);
41     % derivative
42     u1x = diff(u1,x); u1y = diff(u1,y);
43     u2x = diff(u2,x); u2y = diff(u2,y);
44     u1xx = diff(u1x,x); u1yy = diff(u1y,y);
45     u2xx = diff(u2x,x); u2yy = diff(u2y,y);
46     px = diff(pe,x); py = diff(pe,y);
47     % Lap(u)
48     Lapu1 = u1xx + u1yy;
49     Lapu2 = u2xx + u2yy;
50     % f = -nu*Delta(u) - nabla(p)
51     f1 = -nu*Lapu1 - px;
52     f2 = -nu*Lapu2 - py;
53     % convert to anonymous functions
54     u1 = matlabFunction(u1, 'Vars', {x, y});
55     u2 = matlabFunction(u2, 'Vars', {x, y});
56     pe = matlabFunction(pe, 'Vars', {x, y});
57     f1 = matlabFunction(f1, 'Vars', {x, y});
58     f2 = matlabFunction(f2, 'Vars', {x, y});
59 end

```

这里的 `uexact` 对应 \mathbf{u} , `pexact` 对应 \mathbf{p} .

13.1.2 虚拟元方法

虚拟元空间

V 对应的局部虚拟元空间为 ($k \geq 2$)

$$V_k(K) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(K) : \mathbf{v}|_{\partial K} \in [\mathbb{B}_k(\partial K)]^2, \begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{v} - \nabla s \in \mathcal{G}_{k-2}(K)^\perp, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} \in \mathbb{P}_{k-1}(K), \end{cases} \text{ for some } s \in L^2(K)\},$$

式中,

$$\mathcal{G}_{k-2}(K) = \nabla(\mathbb{P}_{k-1}(K)) \subset (\mathbb{P}_{k-2}(K))^2.$$

Q 对应的有限维空间为

$$Q_k(K) = \mathbb{P}_{k-1}(K).$$

$V_k(K)$ 和 $Q_k(K)$ 对应的自由度取为

- $\mathbb{D}_{\mathbb{V}1}$: 顶点值

- $\mathbb{D}_{\mathbb{V}2}$: 每条边 e 内部的 $k-1$ 个点

- $\mathbb{D}_{\mathbb{V}3}$: 矩量

$$\int_K \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}_{k-2}^\perp dx, \quad \mathbf{g}_{k-2}^\perp \in \mathcal{G}_{k-2}(K)^\perp.$$

- $\mathbb{D}_{\mathbb{V}4}$: 矩量

$$\int_K (\operatorname{div} \mathbf{v}) q_{k-1} dx, \quad q_{k-1} \in \mathbb{P}_{k-1}(K)/\mathbb{R}.$$

- $\mathbb{D}_{\mathbb{Q}}$: 矩量

$$\int_K q p_{k-1} dx, \quad p_{k-1} \in \mathbb{P}_{k-1}(K).$$

注 13.1 上述虚拟元空间可以稍微改动使得自由度更少, 这里暂不考虑.

椭圆投影算子

椭圆投影算子 $\Pi^K : V_k(K) \rightarrow (\mathbb{P}_k(K))^2$, $\mathbf{v} \mapsto \Pi^K \mathbf{v}$ 满足

$$\begin{cases} a^K(\Pi^K \mathbf{v}, \mathbf{q}) = a^K(\mathbf{v}, \mathbf{q}), & \mathbf{q} \in (\mathbb{P}_k(K))^2, \\ P_0^K(\Pi^K \mathbf{v}) = P_0^K(\mathbf{v}). \end{cases} \quad (13.83)$$

下面考虑椭圆投影的可计算性. 分部积分有

$$a^K(\mathbf{v}, \mathbf{q}) = \int_K \nu \nabla \mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{v} dx = - \int_K \nu \Delta \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\partial K} (\nu \nabla \mathbf{q} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} ds,$$

式中, \mathbf{n} 是列向量,

$$\nabla \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \nabla q_1 \\ \nabla q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{1,x} & q_{1,y} \\ q_{2,x} & q_{2,y} \end{bmatrix}.$$

因 $\nu \Delta \mathbf{q} \in (\mathbb{P}_{k-2}(K))^2$, 故存在 $q_{k-1} \in \mathbb{P}_{k-1}(K)/\mathbb{R}$ 和 $\mathbf{g}_{k-2}^\perp \in \mathcal{G}_{k-2}(K)^\perp$, 使得

$$\nu \Delta \mathbf{q} = \nabla q_{k-1} + \mathbf{g}_{k-2}^\perp.$$

此时有

$$\begin{aligned} a^K(\mathbf{v}, \mathbf{q}) &= - \int_K \nabla q_{k-1} \cdot \mathbf{v} dx - \int_K \mathbf{g}_{k-2}^\perp \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\partial K} (\nu \nabla \mathbf{q} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} ds \\ &= \int_K q_{k-1} \operatorname{div} \mathbf{v} dx - \int_K \mathbf{g}_{k-2}^\perp \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\partial K} (\nu \nabla \mathbf{q} \mathbf{n} - q_{k-1} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} ds. \end{aligned} \quad (13.84)$$

右端第一项由第四种自由度确定, 第二项由第三种自由度确定, 边界项由前两种自由度确定. 当 $k = 2$ 时, $\mathbf{g}_{k-2}^\perp = \mathbf{0}$.

近似变分问题

$a^K(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 对应的近似双线性形式为

$$a_h^K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a^K(\Pi^K \mathbf{u}, \Pi^K \mathbf{v}) + S^K(\mathbf{u} - \Pi^K \mathbf{u}, \mathbf{v} - \Pi^K \mathbf{v}),$$

S^K 取为自由度向量的 l^2 内积.

以下用 V_h 表示 $V_k(K)$ 对的整体虚拟元空间, Q_h 表示 Q 对应的离散空间, 取为

$$Q_h := \{q \in Q : q|_K \in \mathbb{P}_{k-1}(K), \quad K \in \mathcal{T}_h\}.$$

特别地, 当 $k = 1$ 时, Q_h 就是分片常数空间, 且位于 $L_0^2(\Omega) = L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ 中.

离散的混合变分问题为: 找 $(\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h^g \times Q_h$ 使得

$$\begin{cases} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) &= (\mathbf{f}_h, \mathbf{v}_h), \quad \mathbf{v}_h \in V_h, \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) &= 0, \quad q_h \in Q_h. \end{cases} \quad (13.85)$$

注意, 约束 $\int_{\Omega} p_h dx$ 未自然地加在该系统上, 为此使用 Lagrange 乘子方法. 此时考虑如下的增广变分问题: 找 $((\mathbf{u}_h, p_h), \lambda) \in V_h^g \times Q_h \times \mathbb{R}$ 使得

$$\begin{cases} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) &= (\mathbf{f}_h, \mathbf{v}_h), \quad \mathbf{v}_h \in V_h, \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) + \lambda \int_{\Omega} q_h dx &= 0, \quad q_h \in Q_h, \\ \mu \int_{\Omega} p_h dx &= 0, \quad \mu \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (13.86)$$

13.1.3 线性方程组

设 V_h 的整体节点基为 ϕ_i , $i = 1, \dots, N$, 其中 N 是 V_h 的维数, 则

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^N \chi_i(\mathbf{u}) \phi_i =: \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\chi}(\mathbf{u}).$$

注意, 对含方向的边上的自由度, 事先规定好边的定向满足: 起点序号小于终点序号. 类似地, 设 Q_h 的基为 ψ_l , $l = 1, \dots, M$, 即

$$p_h = \sum_{l=1}^M p_l \psi_l.$$

把这些展开式代入 (12.77), 并取 $\mathbf{v}_h = \phi_j$, $q_h = \psi_l$, 则有

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N a_h(\phi_i, \phi_j) \chi_i + \sum_{l=1}^M b(\phi_j, \psi_l) p_l = (\mathbf{f}_h, \phi_j), & j = 1, \dots, N, \\ \sum_{i=1}^N b(\phi_i, \psi_l) \chi_i + \lambda \int_{\Omega} \psi_l dx = 0, & l = 1, \dots, M, \\ \sum_{l=1}^M \int_{\Omega} \psi_l dx p_l = 0. \end{cases}$$

令

$$d_l = \int_{\Omega} \psi_l dx, \quad \mathbf{d} = [d_1, \dots, d_M]^T,$$

则方程组可写成如下的矩阵形式

$$\begin{bmatrix} A & B & \mathbf{0} \\ B^T & O & \mathbf{d} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{d}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\chi} \\ \mathbf{p} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (13.87)$$

式中,

$$A = (a_h(\phi_j, \phi_i)), \quad B = (b(\phi_j, \psi_l)), \quad \mathbf{f} = ((\mathbf{f}_h, \phi_j)).$$

以下设 $k = 2$, 此时无第三种自由度. 边界部分实际上是张量积空间, 为此如下排列自由度局部自由度排列为

$$\begin{aligned} \chi_i(\mathbf{v}) &= \mathbf{v}_1(z_i), \quad i = 1, \dots, N_v, \\ \chi_{N_v+i}(\mathbf{v}) &= \mathbf{v}_1(m_i), \quad i = 1, \dots, N_v, \\ \chi_{2*N_v+i}(\mathbf{v}) &= \mathbf{v}_2(z_i), \quad i = 1, \dots, N_v, \\ \chi_{3N_v+i}(\mathbf{v}) &= \mathbf{v}_2(m_i), \quad i = 1, \dots, N_v, \\ \chi_{4N_v+1}(\mathbf{v}) &= \int_K \operatorname{div} \mathbf{v} m_2(x, y) dx, \quad m_2(x, y) = \frac{x - x_K}{h_K}, \\ \chi_{4N_v+2}(\mathbf{v}) &= \int_K \operatorname{div} \mathbf{v} m_3(x, y) dx, \quad m_3(x, y) = \frac{y - y_K}{h_K}. \end{aligned}$$

设 $\mathbb{B}_k(\partial K)$ 对应的基函数为 $\phi_1, \dots, \phi_{N_v}; \phi_{N_v+1}, \dots, \phi_{2N_v}$, 则张量积空间 $(\mathbb{B}_k(\partial K))^2$ 的基函数为

$$\bar{\phi}_1, \dots, \bar{\phi}_{2N_v}, \underline{\phi}_1, \dots, \underline{\phi}_{2N_v},$$

它们分别对应前 $4N_v$ 个自由度. 为了方便, 将这些基函数记为 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{4N_v}$. 最后两个自由度对应的基函数记为 $\varphi_1 = \phi_{4N_v+1}, \varphi_2 = \phi_{4N_v+2}$.

13.2 椭圆投影的计算

13.2.1 过渡矩阵

把 $V_k(K)$ 的节点基函数排成行向量, 记为

$$\boldsymbol{\phi}^T = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_k}),$$

式中, $N_k = 4N_v + 2$ 是局部自由度的个数. 设 $(\mathbb{P}_k(K))^2$ 的基函数为

$$\mathbf{m}^T = (\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \dots, \mathbf{m}_{N_p}) = (\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_6, \underline{m}_1, \dots, \underline{m}_6).$$

因 $(\mathbb{P}_k(K))^2 \subset V_k(K)$, 故可设

$$\mathbf{m}^T = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{D},$$

式中, \mathbf{D} 为 $(\mathbb{P}_k(K))^2$ 到虚拟元空间 $V_k(K)$ 的过渡矩阵. 由自由度的定义,

$$\mathbf{m}_\alpha = \sum_{i=1}^{N_k} \phi_i \mathbf{D}_{i\alpha}, \quad \mathbf{D}_{i\alpha} = \chi_i(\mathbf{m}_\alpha),$$

这里 χ_i 是相应于 ϕ_i 的自由度.

令

$$\mathbf{m}^T = [\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3, \underline{m}_1, \underline{m}_2, \underline{m}_3] =: [\bar{m}^T, \underline{m}^T],$$

$$\boldsymbol{\phi}^T = [\bar{\phi}_1, \dots, \bar{\phi}_N, \underline{\phi}_1, \dots, \underline{\phi}_N, \varphi_1, \varphi_2] =: [\bar{\phi}^T, \underline{\phi}^T, \varphi_1, \varphi_2],$$

直接计算有

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= [\bar{m}^T, \underline{m}^T] = [\bar{\phi}^T, \underline{\phi}^T, \varphi_1, \varphi_2] \mathbf{D} \\ &= [\bar{\phi}^T, \underline{\phi}^T, 0, 0] \mathbf{D} + [\mathbf{0}^T, \mathbf{0}^T, \varphi_1, \varphi_2] \mathbf{D}. \end{aligned}$$

将 \mathbf{D} 分块为 $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{D}_2 \end{bmatrix}$, 则有

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= [\bar{m}^T, \underline{m}^T] = [\bar{\phi}^T, \underline{\phi}^T, 0, 0] \mathbf{D} + [\mathbf{0}^T, \mathbf{0}^T, \varphi_1, \varphi_2] \mathbf{D} \\ &= [\bar{\phi}^T, \underline{\phi}^T, 0, 0] \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} + [\mathbf{0}^T, \mathbf{0}^T, \varphi_1, \varphi_2] \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{D}_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

令 $m^T = \phi^T D$, 则有

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} D & \\ & D \end{bmatrix}.$$

而

$$\mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} \chi_{4N_v+1}(\bar{m}^T) & \chi_{4N_v+1}(\underline{m}^T) \\ \chi_{4N_v+2}(\bar{m}^T) & \chi_{4N_v+2}(\underline{m}^T) \end{bmatrix}$$

是最后两个自由度对应的矩阵.

一些必要信息如下

```

1      % ----- element information -----
2      index = elem{iel};      Nv = length(index);
3      xK = centroid(iel,1);  yK = centroid(iel,2); hK = diameter(iel);
4      x = node(index,1);    y = node(index,2);
5      v1 = 1:Nv; v2 = [2:Nv,1]; % loop index for vertices or edges
6      xe = (x(v1)+x(v2))/2; ye = (y(v1)+y(v2))/2; % mid-edge points
7      Ne = [y(v2)-y(v1), x(v1)-x(v2)]; % he*ne
8      nodeT = [node(index,:);centroid(iel,:)];
9      elemT = [(Nv+1)*ones(Nv,1),(1:Nv)',[2:Nv,1]'];
10
11      % ----- scaled monomials -----
12      m1 = @(x,y) 1+0*x;           gradm1 = @(x,y) [0+0*x, 0+0*x];
13      m2 = @(x,y) (x-xK)./hK;       gradm2 = @(x,y) [1+0*x, 0+0*x]./hK;
14      m3 = @(x,y) (y-yK)./hK;       gradm3 = @(x,y) [0+0*x, 1+0*x]./hK;
15      m4 = @(x,y) (x-xK).^2/hK^2;   gradm4 = @(x,y) [2*(x-xK), 0+0*x]./hK^2;
16      m5 = @(x,y) (x-xK).*(y-yK)./hK^2; gradm5 = @(x,y) [(y-yK), (x-xK)]./hK^2;
17      m6 = @(x,y) (y-yK).^2./hK^2;  gradm6 = @(x,y) [0+0*x, 2*(y-yK)]./hK^2;
18
19      m = @(x,y) [m1(x,y), m2(x,y), m3(x,y), m4(x,y), m5(x,y), m6(x,y)];
20      Gradm = {gradm1, gradm2, gradm3, gradm4, gradm5, gradm6};
21
22      divmm = @(x,y) [0+0*x, 1/hK+0*x, 0+0*x, 2*(x-xK)./hK^2, (y-yK)./hK^2, 0+0*x, ...
23                      0+0*x, 0+0*x, 1/hK+0*x, 0+0*x, (x-xK)./hK^2, 2*(y-yK)./hK^2];

```

过渡矩阵如下计算

```

1      % ----- transition matrix -----
2      NdofBd = 2*Nv; NdofA = 2*NdofBd+2;
3      divmm2 = @(x,y) divmm(x,y).*repmat(m2(x,y),1,Nmm);
4      divmm3 = @(x,y) divmm(x,y).*repmat(m3(x,y),1,Nmm);
5      D1 = zeros(NdofA, Nmm);
6      Dbd = [m(x,y); m(xe,ye)];
7      D1(1:4*Nv, :) = blkdiag(Dbd, Dbd);
8      D1(4*Nv+1,:) = integralTri(divmm2,3,nodeT,elemT);
9      D1(4*Nv+2,:) = integralTri(divmm3,3,nodeT,elemT);
10     D{iel} = D1;

```

13.2.2 椭圆投影在基下的矩阵

设椭圆投影 Π^K 在节点基下的矩阵为 $\boldsymbol{\Pi}^K$, 即

$$\Pi^K(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_k}) = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_k}) \boldsymbol{\Pi}^K \quad \text{或} \quad \Pi^K \boldsymbol{\phi}^T = \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\Pi}^K.$$

根据自由度的定义, $\boldsymbol{\Pi}^K$ 的第 j 列就是 $\Pi^K \boldsymbol{\phi}_j$ 的自由度向量, 即

$$\boldsymbol{\Pi}^K = \left(\chi_i(\Pi^K \boldsymbol{\phi}_j) \right).$$

设投影向量 $\Pi^K \boldsymbol{\phi}^T$ 在椭圆投影空间的基 \boldsymbol{m}^T 下的矩阵为 $\boldsymbol{\Pi}_*^K$, 即

$$\Pi^K \boldsymbol{\phi}^T = \boldsymbol{m}^T \boldsymbol{\Pi}_*^K,$$

易知有

$$\boldsymbol{\Pi}^K = \mathbf{D}\boldsymbol{\Pi}_*^K.$$

定义 13.83 可等价写为

$$\begin{cases} a^K(\mathbf{m}, \boldsymbol{\Pi}^K \boldsymbol{\phi}^T) = a^K(\mathbf{m}, \boldsymbol{\phi}^T), \\ P_0^K(\boldsymbol{\Pi}^K \boldsymbol{\phi}^T) = P_0^K(\boldsymbol{\phi}^T) \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \mathbf{G}\boldsymbol{\Pi}_*^K = \mathbf{B}, \\ P_0^K(\mathbf{m}^T)\boldsymbol{\Pi}_*^K = P_0^K(\boldsymbol{\phi}^T), \end{cases}$$

式中,

$$\mathbf{G} = a^K(\mathbf{m}, \mathbf{m}^T), \quad \mathbf{B} = a^K(\mathbf{m}, \boldsymbol{\phi}^T).$$

添加限制的矩阵对应记为 $\tilde{\mathbf{G}}$ 和 $\tilde{\mathbf{B}}$, 有如下一致性关系

$$\mathbf{G} = \mathbf{B}\mathbf{D}, \quad \tilde{\mathbf{G}} = \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{D}.$$

现在来计算 \mathbf{B} . 由 (13.84) 可得 ($k = 2$)

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\alpha i} &= a^K(\mathbf{m}_\alpha, \boldsymbol{\phi}_i) = \int_K q_\alpha \operatorname{div} \boldsymbol{\phi}_i dx + \int_{\partial K} (\nu \nabla \mathbf{m}_\alpha \mathbf{n} - q_\alpha \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\phi}_i ds \\ &=: I_1(\alpha, i) + I_2(\alpha, i), \end{aligned}$$

式中,

$$I_1(\alpha, i) = \int_K q_\alpha \operatorname{div} \boldsymbol{\phi}_i dx, \quad I_2(\alpha, i) = \int_{\partial K} (\nu \nabla \mathbf{m}_\alpha \mathbf{n} - q_\alpha \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\phi}_i ds,$$

而

$$\nu \Delta \mathbf{m}_\alpha = \nabla q_\alpha + 0, \quad q_\alpha \in \mathbb{P}_1(K)/\mathbb{P}_0(K).$$

先计算 I_1 , 根据定义, 可设 $q_\alpha = \nu h_K(c_{2,\alpha} m_2 + c_{3,\alpha} m_3)$, 则有

$$\begin{bmatrix} c_{2,\alpha} \\ c_{3,\alpha} \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \Delta m^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \Delta m^T \end{bmatrix}.$$

于是由自由度定义得

$$\begin{aligned} I_1(\alpha, i) &= \nu h_K \left(c_{2,\alpha} \int_K m_2 \operatorname{div} \boldsymbol{\phi}_i dx + c_{3,\alpha} \int_K m_3 \operatorname{div} \boldsymbol{\phi}_i dx \right) \\ &= \nu h_K \left(c_{2,\alpha} \delta_{i,(4N_v+1)} + c_{3,\alpha} \delta_{i,(4N_v+2)} \right), \end{aligned}$$

其中, $\delta_{i,j}$ 是 Kronecker 符号. 这样, I_1 如下计算

```

1 % first term
2 Lapm = [0, 0, 0, 2/hK^2, 0, 2/hK^2];
3 I1 = zeros(Nmm, NdofA);
4 I1(1:Nm, 4*Nv+1) = pde.nu*hK*Lapm;
5 I1(Nm+1:end, 4*Nv+2) = pde.nu*hK*Lapm;

```

对 I_2 , 将采用有限元载荷向量的装配技巧进行计算. 令 $(g_1^\alpha, g_2^\alpha)^T = \nu \nabla \mathbf{m}_\alpha \mathbf{n} - q_\alpha \mathbf{n}$, 则有

$$I_2(\alpha, i) = \int_{\partial K} g_1^\alpha \phi_{1,i} ds + \int_{\partial K} g_2^\alpha \phi_{2,i} ds =: J_1(\alpha, i) + J_2(\alpha, i).$$

设 ϕ 表示 $\mathbb{B}_k(\partial K)$ 对应的基函数, 则有

$$\begin{aligned} J_1(\alpha, :)^T &= \begin{bmatrix} (g_1^\alpha, \phi)_{\partial K} \\ (g_1^\alpha, \mathbf{0})_{\partial K} \\ (g_1^\alpha, \boldsymbol{\varphi}_{1,1})_{\partial K} \\ (g_1^\alpha, \boldsymbol{\varphi}_{2,1})_{\partial K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (g_1^\alpha, \phi)_{\partial K} \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ J_2(\alpha, :)^T &= \begin{bmatrix} (g_2^\alpha, \mathbf{0})_{\partial K} \\ (g_2^\alpha, \phi)_{\partial K} \\ (g_2^\alpha, \boldsymbol{\varphi}_{1,2})_{\partial K} \\ (g_2^\alpha, \boldsymbol{\varphi}_{2,2})_{\partial K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ (g_2^\alpha, \phi)_{\partial K} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

而 $(g_1^\alpha, \phi)_{\partial K}$ 和 $(g_2^\alpha, \phi)_{\partial K}$ 的计算方式相同, 可使用有限元载荷向量的装配法完成.

以 $(g_1^\alpha, \phi)_{\partial K}$ 为例, e 上的三个积分为

$$F_i = \int_e g_1^\alpha \phi_i ds, \quad i = 1, 2, 3,$$

其中前两个对应 $e = [a_e, m_e, b_e]$ 的端点 a_e 和 b_e , 最后一个对应中点 m_e . 用 Simpson 公式可精确计算, 有

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \frac{h_e}{6} \begin{bmatrix} g_1^\alpha(a_e) \\ g_1^\alpha(b_e) \\ 4g_1^\alpha(m_e) \end{bmatrix}.$$

```

1 % second term
2 J1 = zeros(Nmm, NdofA);    J2 = zeros(Nmm, NdofA);
3 elem1 = [v1(:), v2(:), v1(:)+Nv]; % elem2dof for [ae, be, me]
4 Gradmm = cell(2, Nmm);
5 Gradmm(1, 1:Nm) = Gradm; Gradmm(2, Nm+1:end) = Gradm;
6 qmm = cell(1, Nmm); % q = nu*hK(c2*m2 + c3*m3)
7 c2 = [Lapm, zeros(1, Nm)];
8 c3 = [zeros(1, Nm), Lapm];
9 for im = 1:Nm
10    Gradmm{1, im+Nm} = @(x,y) [0+0*x, 0+0*x];
11    Gradmm{2, im} = @(x,y) [0+0*x, 0+0*x];
12    qmm{im} = @(x,y) pde.nu*hK*(c2(im)*m2(x,y) + c3(im)*m3(x,y));
13    qmm{im+Nm} = @(x,y) pde.nu*hK*(c2(im+Nm)*m2(x,y) + c3(im+Nm)*m3(x,y));
14 end
15 for im = 1:Nmm
16    % J1
17    pm = @(x,y) pde.nu*Gradmm{1, im}(x,y);
18    q = @(x,y) qmm{im}(x,y);
19    F1 = 1/6*(sum(pm(x(v1),y(v1)).*Ne, 2) - q(x(v1),y(v1)).*Ne(:,1));
20    F2 = 1/6*(sum(pm(x(v2),y(v2)).*Ne, 2) - q(x(v2),y(v2)).*Ne(:,1));
21    F3 = 4/6*(sum(pm(xe,ye).*Ne, 2) - q(xe,ye).*Ne(:,1));

```

```

22 J1(im, 1:NdofBd) = accumarray(elem1(:, [F1; F2; F3], [NdofBd, 1]);
23 % J2
24 pm = @ (x,y) pde.nu*Gradmm{2,im}(x,y);
25 q = @ (x,y) qmm{im}(x,y);
26 F1 = 1/6*(sum(pm(x(v1),y(v1)).*Ne, 2) - q(x(v1),y(v1)).*Ne(:,2));
27 F2 = 1/6*(sum(pm(x(v2),y(v2)).*Ne, 2) - q(x(v2),y(v2)).*Ne(:,2));
28 F3 = 4/6*(sum(pm(xe,ye).*Ne, 2) - q(xe,ye).*Ne(:,2));
29 J2(im, NdofBd+1:2*NdofBd) = accumarray(elem1(:, [F1; F2; F3], [NdofBd, 1]));
30 end
31 I2 = J1 + J2;
32 % B
33 B1 = I1 + I2;

```

接着考虑椭圆投影的限制条件. 限制条件采用常值 L^2 投影, 当然也可使用顶点值平均.乍一看 L^2 投影不可计算, 因为无 0 阶内部矩量. 实际上, 使用多项式空间的分解可获得计算性. 令 $\phi_i = [\phi_{1,i}, \phi_{2,i}]^T$, 则有

$$\phi_{1,i} = \phi_i \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \phi_{2,i} = \phi_i \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

易知

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \nabla p_{k-1} + \mathbf{g}_{k-2}^\perp, \quad p_{k-1} = h_K m_2, \quad \mathbf{g}_{k-2}^\perp = \mathbf{0},$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \nabla q_{k-1} + \mathbf{g}_{k-2}^\perp, \quad q_{k-1} = h_K m_3, \quad \mathbf{g}_{k-2}^\perp = \mathbf{0},$$

于是

$$\begin{aligned} P_0^K(\phi_{1,i}) &= |K|^{-1} \int_K \phi_i \cdot \nabla p_{k-1} dx = |K|^{-1} h_K \left(- \int_K \operatorname{div} \phi_i m_2 dx + \int_{\partial K} m_2 \phi_i \cdot \mathbf{n} ds \right), \\ P_0^K(\phi_{2,i}) &= |K|^{-1} \int_K \phi_i \cdot \nabla q_{k-1} dx = |K|^{-1} h_K \left(- \int_K \operatorname{div} \phi_i m_3 dx + \int_{\partial K} m_3 \phi_i \cdot \mathbf{n} ds \right). \end{aligned} \quad (13.88)$$

可以看到, 它们与前面的 $B_{\alpha,i}$ 固定 α 时的计算类似, 但要简单点. 上面两个条件替换 B 的第 1,7 行.

```

1 % constraint
2 P0 = zeros(2,NdofA);
3 P0(1, end-1) = -1;
4 F1 = 1/6*(m2(x(v1),y(v1)).*Ne); % [n1, n2]
5 F2 = 1/6*(m2(x(v2),y(v2)).*Ne);
6 F3 = 4/6*(m2(xe,ye).*Ne);
7 F = [F1; F2; F3];
8 P0(1, 1:NdofBd) = accumarray(elem1(:, F(:,1), [NdofBd 1]));
9 P0(1, NdofBd+1:2*NdofBd) = accumarray(elem1(:, F(:,2), [NdofBd 1]));
10 P0(2, end) = -1;
11 P0 = 1/area(iel)*hK*P0;
12 F1 = 1/6*(m3(x(v1),y(v1)).*Ne); % [n1, n2]
13 F2 = 1/6*(m3(x(v2),y(v2)).*Ne);
14 F3 = 4/6*(m3(xe,ye).*Ne);
15 F = [F1; F2; F3];
16 P0(2, 1:NdofBd) = accumarray(elem1(:, F(:,1), [NdofBd 1]));
17 P0(2, NdofBd+1:2*NdofBd) = accumarray(elem1(:, F(:,2), [NdofBd 1]));
18 % Bs, G, Gs

```

```

19      B1s = B1;  B1s([1,7], :) = P0;
20      G{iel} = B1*D1;
21      Bs{iel} = B1s;  Gs{iel} = B1s*D1;
22      % H
23      H{iel} = P0';

```

13.3 单元刚度矩阵和载荷向量的计算

13.3.1 A 的计算

A 对应的单元矩阵为

$$A_K = A_K^1 + A_K^2,$$

式中,

$$A_K^1(i, j) = a^K(\Pi^K \phi_j, \Pi^K \phi_i),$$

$$\begin{aligned} A_K^2(i, j) &= S^K(\phi_j - \Pi^K \phi_j, \phi_i - \Pi^K \phi_i) \\ &= \sum_{r=1}^{N_k} \chi_r(\phi_j - \Pi^K \phi_j) \chi_r(\phi_i - \Pi^K \phi_i). \end{aligned}$$

第一式写成矩阵形式为

$$A_K^1 = a^K(\Pi^K \phi, \Pi^K \phi^T) = (\Pi_*^K)^T a^K(m, m^T) \Pi_*^K = (\Pi_*^K)^T G \Pi_*^K.$$

对第二式, 由 $\chi_r(\Pi^K \phi_i) = (\Pi^K)_{ri}$ 知,

$$A_K^2 = (\mathbf{I} - \Pi^K)^T (\mathbf{I} - \Pi^K).$$

单元矩阵 A_K 如下计算(进行了“行拉直”)

```

1 Aelem = cell(NT,1);
2 Ph = cell(NT,1); % matrix for error evaluation
3 for iel = 1:NT
4     % element information
5     index = elem{iel};    Nv = length(index);
6     nodeT = [node(index,:);centroid(iel,:)];
7     elemT = [(Nv+1)*ones(Nv,1),(1:Nv)',[2:Nv,1]'];
8     % Projection
9     Pis = Gs{iel}\Bs{iel};    Pi = D{iel}*Pis;    I = eye(size(Pi));
10    % Stiffness matrix A
11    AK = Pis'*G{iel}*Pis + (I-Pi)'*(I-Pi);
12    Aelem{iel} = reshape(AK',1,[]); % straighten as row vector for easy assembly
13    Ph{iel} = Pis;
14 end

```

13.3.2 B 的计算

由 Q_h 的定义, 在单元上, 基函数 $\psi_l \in \mathbb{P}_{k-1}(K)$. 对 $k = 2$, 单元上的基函数有 3 个, 取为 m_1, m_2, m_3 . 这样, B^K 为 $N_k \times 3$ 的向量.

对 m_1 , 有

$$B_{j1}^K = b^K(\phi_j, m_1) = \int_K m_1 \operatorname{div} \phi_j dx = \int_K \operatorname{div} \phi_j dx = \int_{\partial K} \phi_j \cdot \mathbf{n} ds$$

$$B_{j2}^K = b^K(\phi_j, m_2) = \int_K m_2 \operatorname{div} \phi_j dx,$$

$$B_{j3}^K = b^K(\phi_j, m_3) = \int_K m_3 \operatorname{div} \phi_j dx.$$

B_K 如下计算

```

1      % ----- matrix for Qh -----
2      BK = zeros(NdofA,3);
3      F1 = 1/6*(1.*Ne);    % [n1, n2]
4      F2 = 1/6*(1.*Ne);
5      F3 = 4/6*(1.*Ne);
6      F = [F1; F2; F3];
7      BK(1:NdofBd, 1) = accumarray(elem1(:, ), F(:, 1), [NdofBd 1]);
8      BK(NdofBd+1:2*NdofBd, 1) = accumarray(elem1(:, ), F(:, 2), [NdofBd 1]);
9      BK(end-1, 2) = 1;
10     BK(end, 3) = 1;
11     Belem{iel} = reshape(BK',1,[]); % straighten as row vector for easy assembly

```

13.3.3 d 的计算

当 $k = 2$ 时, Q_h 是分片线性的, 从而有 $3NT$ 个基函数, 它们为

$$\psi_{l,i}(x) = \begin{cases} m_i, & x \in K_l, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3,$$

于是,

$$d_{l,i} = \int_{K_l} \psi_{l,i} dx,$$

它们排成一个向量. 为了方便, 先排每个单元的 m_1 , 再排 m_2 和 m_3 , 如下给出

```

1      % ----- Lagrange multiplier -----
2  for iel = 1:NT
3      ...
4
5      d(iel,2) = integralTri(m2,3,nodeT,elemT);
6      d(iel,3) = integralTri(m3,3,nodeT,elemT);
7  end
8  d(:,1) = area; d = d(:);

```

13.3.4 载荷向量的计算

右端如下近似

$$(\mathbf{f}_h, \phi_j) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{f}, \Pi_{k-2}^0 \phi_j).$$

对 $k = 2$, 有

$$\mathbf{f}^K = (\mathbf{f}, \Pi_{k=2}^0 \phi)_K = \int_K \mathbf{f} dx \cdot P_0^K \phi.$$

注意, $P_0^K \phi$ 已在椭圆投影限制条件中计算过, 见 (13.88).

```

1 %% Get elementwise load vector f
2 elem = cell(NT,1);
3 for iel = 1:NT
4     ...
5
6     % Load vector f
7     fxy = @(x,y) pde.f([x,y]); % f(p) = f([x,y]), f = [f1, f2]
8     Pf = integralTri(fxy,4,nodeT,elemT); % hK*P_0f
9     P0 = H{iel};
10    fK = sum(Pf.*P0, 2);
11    belem{iel} = fK'; % straighten as row vector for easy assembly
12 end

```

13.4 刚度矩阵和载荷向量的装配

矩阵 A, B 和向量 \mathbf{f} 如下装配

```

1 %% Assemble matrices A,B, and vector f,d
2 elemLen = cellfun('length', elem); vertNum = unique(elemLen);
3 nnzA = sum((4*elemLen+2).^2); nnzB = sum((4*elemLen+2)*3);
4 iiA = zeros(nnzA,1); jjA = zeros(nnzA,1); ssA = zeros(nnzA,1);
5 iiB = zeros(nnzB,1); jjB = zeros(nnzB,1); ssB = zeros(nnzB,1);
6 ffa = zeros(NNdoFA,1);
7 idA = 0; idB = 0;
8 elem2dof = cell(NT,1);
9 for Nv = vertNum(:)' % only valid for row vector
10
11     idNv = find(elemLen == Nv); % find polygons with Nv vertices
12     NTv = length(idNv); % number of elements with Nv vertices
13
14     % elem2dof
15     elemNv = cell2mat(elem(idNv));
16     elem2edgeNv = cell2mat(elem2edge(idNv));
17     elem2dofA = [elemNv, elem2edgeNv+N, elemNv+N+NE, elem2edgeNv+2*N+NE, ...
18                  idNv+2*N+2*NE, idNv+2*N+2*NE+NT];
19     elem2dofB = [idNv, idNv+NT, idNv+2*NT];
20     NdofA = 4*Nv+2; NdofB = 3;
21
22     % assemble the matrix A
23     KA = cell2mat(Aelem(idNv));
24     iiA(idA+1:idA+NTv*NdofA^2) = reshape(repmat(elem2dofA, NdofA, 1), [], 1);
25     jjA(idA+1:idA+NTv*NdofA^2) = repmat(elem2dofA(:, NdofA, 1));
26     ssA(idA+1:idA+NTv*NdofA^2) = KA(:, );
27     idA = idA + NTv*NdofA^2;
28
29     % assemble the matrix B
30     KB = cell2mat(Belem(idNv));
31     iiB(idB+1:idB+NTv*NdofA*NdofB) = reshape(repmat(elem2dofA, NdofB, 1), [], 1);
32     jjB(idB+1:idB+NTv*NdofA*NdofB) = repmat(elem2dofB(:, NdofA, 1));
33     ssB(idB+1:idB+NTv*NdofA*NdofB) = KB(:, );

```

```

34     idB = idB + NTv*NdofA*NdofB;
35
36 % assemble the vector
37 FA = cell2mat(belem(idNv));
38 ffA = ffA + accumarray(elem2dofA(:,),FA(:,),[NNdofA 1]);
39
40 % elementwise global indices
41 elem2dof(idNv) = mat2cell(elem2dofA, ones(NTv,1), NdofA);
42 end
43 A = sparse(iiA,jjA,ssA,NNdofA,NNdofA);
44 B = sparse(iiB,jjB,ssB,NNdofA,NNdofB);

```

综上, 如下获得未施加边界条件的线性系统.

```

1 %% Get block linear system
2 kk = sparse(NNdof+1,NNdof+1); ff = zeros(NNdof+1,1);
3 kk(1:NNdofA,1:NNdofA) = A;
4 kk(1:NNdofA, (1:NNdofB)+NNdofA) = B;
5 kk((1:NNdofB)+NNdofA, 1:NNdofA) = B';
6 kk((1:NNdofB)+NNdofA, end) = d;
7 kk(end, (1:NNdofB)+NNdofA) = d';
8 ff(1:NNdofA) = ffA;

```

注意, 变量多出一个 λ , 因而方程组的行列数为 $NNdof+1$.

13.5 边界条件的处理

边界条件比较简单,

```

1 %% Apply Dirichlet boundary conditions
2 % bdDof, freeDof
3 bdNodeIdx = bdStruct.bdNodeIdx;
4 bdEdge = bdStruct.bdEdge; bdEdgeIdx = bdStruct.bdEdgeIdx;
5 id = [bdNodeIdx; bdEdgeIdx+N; bdNodeIdx+N+NE; bdEdgeIdx+2*N+NE];
6 isBdDof = false(NNdof+1,1); isBdDof(id) = true;
7 bdDof = (isBdDof); freeDof = (~isBdDof);
8 % bdval
9 g_D = pde.g_D;
10 z1 = node(bdEdge(:,1),:); z2 = node(bdEdge(:,2),:); ze = (z1+z2)./2;
11 gv = g_D(node(bdNodeIdx,:));
12 ge = g_D(ze);
13 bdval = [gv(:,1); ge(:,1); gv(:,2); ge(:,2)];
14 % sol
15 sol = zeros(NNdof+1,1);
16 sol(bdDof) = bdval;
17 ff = ff - kk*sol;
18
19 %% Set solver
20 sol(freeDof) = kk(freeDof,freeDof)\ff(freeDof);
21 uh = sol(1:NNdofA); % u = [u1,u2]
22 ph = sol(NNdofA+1:end-1);

```

Part IV

后验误差估计与自适应算法

References

- [1] L. Chen. iFEM: an integrated finite element method package in MATLAB. Technical report, University of California at Irvine, 2009.
- [2] C. Talischi, G. H. Paulino, A. Pereira, and I. F. M. Menezes. Polymesher: a general-purpose mesh generator for polygonal elements written in Matlab. *Struct. Multidiscip. Optim.*, 45(3):309–328, 2012.
- [3] L. Beirão Da Veiga, F. Brezzi, L. D. Marini, and A. Russo. The Hitchhiker’s guide to the virtual element method. *Math. Models Meth. Appl. Sci.*, 24(8):1541–1573, 2014.