

**Finite-Elemente-Berechnung der Fluid-Struktur-Wechselwirkung bei  
einem mikromechanischen Strömungssensor**

**Diplomarbeit**

im

Hauptfach Technische Mechanik

von

cand. mach. Stephan Messner

Betreuer:

- Prof. Dr.-Ing. H. Sorg
- Dr.-Ing. Ch. Woernle
- Dipl.-Phys. Th. Fabula
- Dipl.-Phys. N. Hey

Institut A für Mechanik  
Universität Stuttgart

Institut für Mikro- und Informationstechnik der  
Hahn-Schickard-Gesellschaft für angewandte Forschung e.V.  
Villinigen-Schwenningen

Oktober 1993

### ***Danksagung***

*Herrn Dr. H. Bartuch (GMS mbH, St. Georgen) sei für die Bereitstellung der Sensoren und für die Diskussion der Ergebnisse gedankt. Bei den Finite-Elemente-Berechnungen wurde ich freundlicherweise von Herrn Dipl.-Ing. U.G. Klump (INTEC GmbH, Dettingen) und Herrn Dipl.-Ing. M. Jagfeld (CAD-FEM GmbH, Grafing) unterstützt. Herrn Dr. K. Selig und Dipl.-Phys. D. Fischle (BIZERBA Werke GmbH & Co. KG, Balingen) möchte ich für die Durchführung der Thermographiemessungen danken. Die Mitarbeiter des Instituts für Mikro- und Informationstechnik haben mich bei der Durchführung dieser Diplomarbeit bestens unterstützt. Für die Betreuung und Ermöglichung der Arbeit seitens der Universität gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. H. Sorg und Herrn Dr. Ch. Woernle.*

*Besonderer Dank gilt jedoch meinen Betreuern am HSG-IMIT, Herrn Dipl.-Phys. Th. Fabula und Herrn Dipl.-Phys. Nicolaus Hey, die mich bei der Anfertigung der Arbeit mit ihrem fachlichen Wissen und ihren nützlichen Anregungen bestens unterstützt haben.*

## **Inhaltsverzeichnis**

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
1.1	Mikromechanik	4
1.2	Simulation	5
1.3	Aufgabenstellung	6
<b>2</b>	<b>Stand der Technik</b>	<b>8</b>
2.1	Frequenzanaloges Sensorprinzip	8
2.1.1	Elektrothermisches Anregungsprinzip	8
2.1.2	Frequenzanaloger Kraftsensor	10
2.1.3	Frequenzanaloger Strömungssensor	12
2.2	Methode der finiten Elemente	13
2.2.1	Strukturmechanische Simulation	13
2.2.2	Strömungsmechanische Simulation	15
2.3	Experimentelle Ausstattung	16
2.3.1	Laservibrometer und Spektrum-Analysator	16
2.3.2	Optisches Tastschnittgerät	19
<b>3</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>21</b>
3.1	Beidseitig eingespannter Biegebalken	21
3.1.1	Einfluß einer axialen Kraft	21
3.1.2	Temperatureinfluß	23
3.2	Strömungsmessung	24
<b>4</b>	<b>Strukturmechanische Modellbildung</b>	<b>26</b>
4.1	Problemstellung	26
4.2	Erstellen eines zweidimensionalen Modells	27
4.2.1	Materialdaten	27
4.2.2	Geometrie	28
4.2.3	Randbedingungen	29
4.3	Interpretation der Berechnungsergebnisse	30

4.4 Erstellen eines dreidimensionalen Modells	40
4.4.1 Materialdaten	40
4.4.2 Geometrie	41
4.4.3 Randbedingungen	42
4.5 Interpretation der Berechnungsergebnisse	42
<b>5 Datenaustausch zwischen ANSYS und FIDAP</b>	<b>48</b>
5.1 Beschreibung der Schnittstellen	48
5.2 Entwicklung eines Simulationsmodells	50
<b>6 Strömungsmechanische Modellbildung</b>	<b>53</b>
6.1 Problemstellung	53
6.2 Modellerstellung	53
6.2.1 Materialdaten	53
6.2.2 Geometrie	54
6.2.3 Randbedingungen	55
6.3 Interpretation der Berechnungsergebnisse	57
<b>7 Kopplung der strömungs- und strukturmechanischen Modelle</b>	<b>62</b>
7.1 Problemstellung	62
7.2 Modellerstellung	62
7.3 Interpretation der Berechnungsergebnisse	63
<b>8 Experimentelle Untersuchungen</b>	<b>65</b>
8.1 Problemstellung	65
8.2 Einfluß der elektrischen Verlustleistung auf das Sensorverhalten	65
8.3 Einfluß einer externen Wärmequelle auf das Sensorverhalten	70
8.4 Vergleich der Meß- und Simulationsergebnisse	71

<b>9</b>	<b>Ausblick</b>	<b>74</b>
<b>10</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>75</b>
<b>11</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>77</b>
<b>12</b>	<b>Anhang</b>	<b>80</b>

# 1 Einleitung

## 1.1 Mikromechanik

Das Gebiet der Mikromechanik ist ein junges Forschungsgebiet. Die steigende Zahl an Fachveröffentlichungen und populärwissenschaftlichen Artikeln deutet darauf hin, daß dieses Gebiet zur Zeit eine sehr starke Entwicklung erfährt. Das Anwendungspotential beruht auf dem kombinierten Einsatz der Mikromechanik mit der Mikroelektronik und/oder der Mikrooptik. Die Kombination dieser drei Gebiete wird als Mikrosystemtechnik bezeichnet. Die Mikroelektronik hat mittlerweile einen sehr hohen Miniaturisierungsgrad erreicht. Dagegen befinden sich die zugehörigen mechanischen Wandlerelemente immer noch auf dem Stand feinmechanischer Größenordnungen. Diese mechanischen Wandlerelemente in der Größenordnung mikroelektronischer Strukturen zu erzeugen, ist das Ziel der Mikromechanik.

Die Mikromechanik bedient sich im wesentlichen weiterentwickelter Herstellungsverfahren der Halbleitertechnologie. Als Grundwerkstoff wird deshalb überwiegend einkristallines Silizium, aber auch Quarz verwendet. Nicht nur der Einsatz bekannter Herstellungsverfahren, sondern auch die sehr guten mechanischen Eigenschaften sind Vorteile, die für die Verwendung von Silizium sprechen. Im Gegensatz zur Mikroelektronik werden in der Mikromechanik hauptsächlich dreidimensionale Strukturen erzeugt, so daß die Weiterentwicklung der Herstellungsverfahren der Halbleitertechnologie erforderlich wurde. Die Abgrenzung der Mikromechanik zur Feinwerktechnik erfolgt nach [Büt91] folgendermaßen:

*"Die Mikromechanik befaßt sich mit Entwurf, Herstellung und der Anwendung komplexer dreidimensionaler Strukturen, deren Abmessungen in mindestens einer Dimension so klein sind, daß die klassischen feinmechanischen Fertigungstechniken nicht mehr sinnvoll eingesetzt werden können. Die kleinsten funktionsbestimmenden Strukturabmessungen liegen im Mikrometerbereich."*

Einkristallines Silizium zeigt infolge seiner Kristallstruktur anisotropes Materialverhalten, was spezielle Geometrien und besondere physikalische Effekte bedingt. Dies erschwert die Beschreibung mikromechanischer Systeme, so daß nur bedingt Erfahrungen existieren, solche Systeme zu beschreiben. Das Gesamtverhalten eines mikromechanischen Systems

ergibt sich aus der Überlagerung verschiedener Effekte, wie z.B. thermische Abhängigkeiten, Verspannungen durch Mehrschichtaufbau und anisotropes Materialverhalten. Eine Möglichkeit der Beschreibung eines mikromechanischen Systems ist die Simulation mit Hilfe der Methode der finiten Elemente (FEM).

Durch den Einsatz der Mikroelektroniktechnologie ergeben sich für den Entwurf mikromechanischer Elemente Unterschiede zur herkömmlichen feinwerktechnischen Konstruktion. Beim Entwurf mikromechanischer Elemente sind gewisse technologiebedingte Gestaltungsregeln einzuhalten. Aus diesem Grund ist es nicht möglich, beliebige Strukturen zu erzeugen. Die Produktion mikromechanischer Elemente findet im Waferverbund statt. Daher ist beim Entwurf darauf zu achten, durch eine günstige Gestaltung und Dimensionierung eine hohe Ausbeute zu erzielen. Der Entwurf mikromechanischer Elemente ist demzufolge in sehr starkem Maße von technologischen Parametern und Randbedingungen abhängig [Büt91, Heu89].

## **1.2 Simulation**

Die Simulation ist mittlerweile ein vielfach verwendetes Mittel zur Beschreibung mikromechanischer Systeme. Nach [Bat90] erfordert die Simulation technischer Systeme:

- die Idealisierung des Systems auf eine berechenbare Form (Modellbildung),
- die Aufstellung der Gleichgewichts- bzw. Bewegungsgleichungen, die das idealisierte System beschreiben,
- die Lösung dieser Gleichungen und
- die Interpretation der Ergebnisse.

Im einfachsten Fall betrachtet man ein diskretes System, bei dem gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL) genügen, es zu beschreiben. Betrachtet man hingegen ein kontinuierliches System, beschreiben partielle Differentialgleichungen das Verhalten. Beispielsweise beschreiben die partiellen DGL nach Navier-Stokes das Verhalten eines Fluids, die Maxwell-Gleichungen sind eine mathematische Formulierung für elektromagnetische Felder. Zur Lösung der DGL stehen analytische und numerische Verfahren zur Verfügung. Oft ist die analytische Lösung eines DGL-Systems nicht geschlossen möglich, d.h. es können nur idealisierte Spezialfälle gelöst werden. Mit Hilfe numerischer Verfahren lassen sich nur Näherungslösungen berechnen. Sie erlauben jedoch komplexe Geometrien und Randbedingungen zu berücksichtigen und sind daher allgemein einsetzbar.

Bei allen numerischen Verfahren wird ein Näherungsansatz für die unbekannte Lösungsfunktion aufgestellt. Der Lösungsansatz besteht in der Regel aus Formfunktionen und freien Koeffizienten. Durch Verwendung der Ansatzfunktionen wird das DGL-System in ein algebraisches Gleichungssystem überführt, durch dessen Auflösung die Koeffizienten bestimmt werden. Dies ist die prinzipielle Vorgehensweise klassischer numerischer Lösungsverfahren, die sich lediglich durch die Wahl der Ansatzfunktionen und durch die Bestimmungsart der Koeffizienten unterscheiden. Die Finite-Elemente-Methode (FEM) z.B. ist ein bereichsweise angewandtes numerisches Näherungsverfahren, das zur Simulation technischer Systeme eingesetzt wird.

Ein wichtiger Punkt bei der Simulation ist die Interpretation der Ergebnisse. Oft ist es bei komplexen Systemen angebracht, nur einzelne Effekte zu betrachten, um den Umfang des Simulationsmodells zu begrenzen. Bei der Interpretation der Ergebnisse müssen solche Vernachlässigungen natürlich berücksichtigt werden.

### **1.3 Aufgabenstellung**

Im Rahmen des BMFT-Verbundprojektes "Einsatz der Mikromechanik zur Herstellung FrequenzAnaloger SENSoren" (kurz: FASENS) wurden resonante Silizium-Sensoren für verschiedene Meßanwendungen entwickelt. Die Fa. GMS mbH in St.Georgen entwickelte während des Projektes Einfachbalken-Sensoren. Diese Sensoren bestehen aus beidseitig eingespannten Silizium-Biegebalken, die elektrothermisch zum Schwingen angeregt werden. Das Sensorsignal wird resistiv mit NiCr-Widerständen (DMS), die zu einer Vollbrücke verschaltet sind, abgetastet. Die Resonanzfrequenz eines Biegebalkens hängt extrem von den inneren mechanischen Spannungen ab. Dieses Phänomen wurde zur Entwicklung eines Kraftsensors ausgenutzt. Aufgrund der technologiebedingten hohen Betriebstemperaturen ist eine erhebliche Empfindlichkeit gegenüber Luftströmung vorhanden [ABV93], so daß diese Sensorstrukturen auch zur Strömungsmessung eingesetzt werden können.

Durch die Verlustleistung der Anregungswiderstände und der DMS-Widerstände erwärmt sich der Sensor. Infolge der Einspannung wird die Wärmeausdehnung des Sensors behindert. Dadurch entstehen abhängig von der Erwärmung Druckspannungen im Balken. Wird der Sensor durch eine Gasströmung (Konvektion) abgekühlt, ändert sich die Wärmeaus-



dehnung und somit die innere Spannung im Balken. Diese Spannungsänderung führt zu einer Änderung der Resonanzfrequenz, die somit von der Geschwindigkeit der Gasströmung abhängig wird.

In dieser Arbeit soll der Zusammenhang zwischen Strömungsgeschwindigkeit und Resonanzfrequenz am Beispiel eines frequenzanalogen Sensors auf der Basis eines Siliziumbalkens mit Hilfe der FE-Methode untersucht werden. Da derzeit kein Standard-FEM-Programm erhältlich ist, das die direkte Kopplung von Strömungsmechanik und Strukturmechanik ermöglicht, müssen zwei unterschiedliche FEM-Programme verwendet werden. Zur strukturellen Berechnung wird ANSYS (Engineering ANalysis SYStem, Swanson Analysis Systems, Inc.), zur strömungsmechanischen Berechnung FIDAP (Fluid Dynamics Analysis Package, Fluid Dynamics International, Inc.) eingesetzt. Die Kopplung dieser beiden Programme über integrierte Schnittstellen soll realisiert werden. Parallel zu den FEM-Rechnungen sollen soweit möglich analytische Abschätzungen durchgeführt werden. Sie dienen der besseren Problemübersicht und der Abschätzung von Skalierungseffekten. Außerdem sollen Messungen durchgeführt werden, die zur Beurteilung der FEM-Berechnungen dienen.

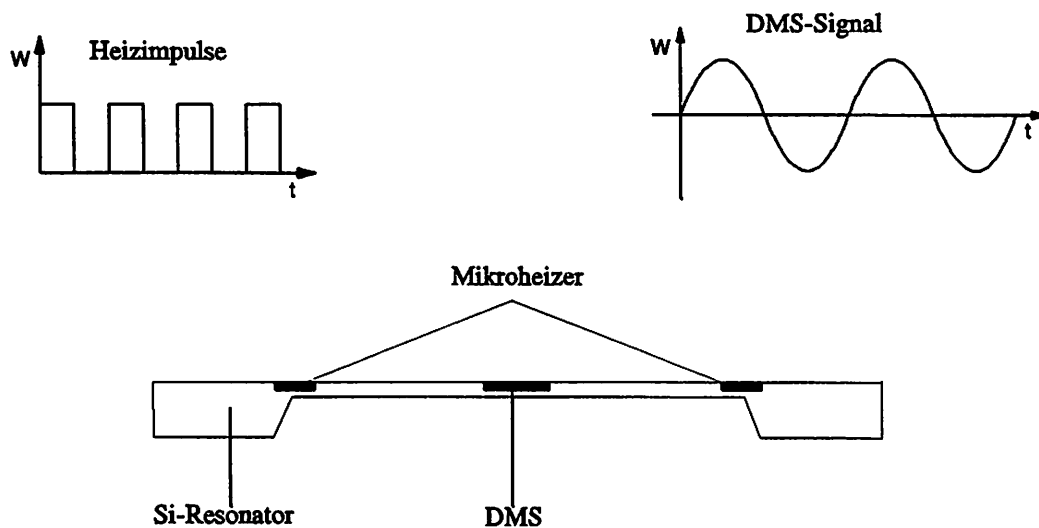
## 2 Stand der Technik

### 2.1 Frequenzanaloges Sensorprinzip

Das frequenzanaloge Sensorprinzip beruht auf der Abhängigkeit der Eigenfrequenz eines Resonators von einer äußeren physikalischen Größe (z.B. Druck, Kraft, Temperatur). Dabei beeinflusst diese physikalische Größe die innere Spannung oder verändert die Trägheit des Resonators über eine Massenbelegung. Die Resonanzfrequenz stellt als Meßgröße ein quasidigitales Ausgangssignal dar. Diese Ausgangsfrequenz kann mit einer Referenzfrequenz verglichen werden, so daß auf die äußere physikalische Größe zurückgeschlossen werden kann. Der Sensor läßt sich einerseits durch seine passiven Resonatoreigenschaften wie Eigenfrequenz, Schwingungsmoden und der Kopplung zur Meßgröße, andererseits durch die Eigenschaften der Schwingungsanregung und -abtastung, beispielsweise der Modenselektivität, der Effizienz der Energieeinkopplung und der Auflösung des Abfragesystems, charakterisieren [ABV93]. In dieser Arbeit soll ein frequenzanaloger Balkensensor mit elektrothermischer Anregung und resistiver Abtastung untersucht werden. Dieser Sensortyp wird im folgenden näher beschrieben.

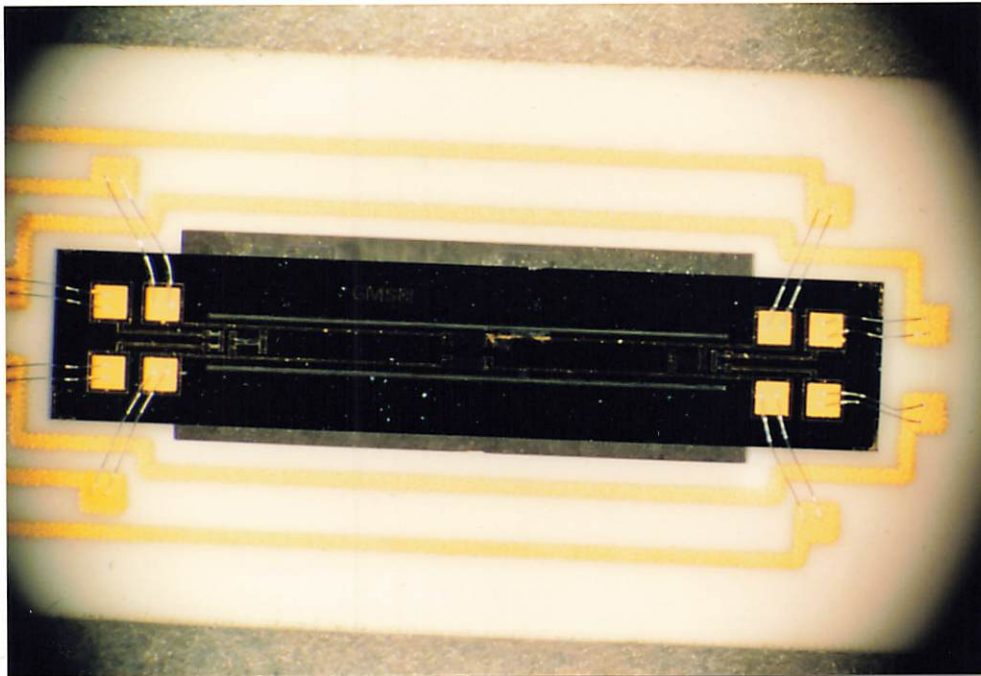
#### 2.1.1 Elektrothermisches Anregungsprinzip

Das vereinfachte Funktionsprinzip des Sensors ist in **Bild 2.1** schematisch dargestellt. An den Enden des Biegebalkens sind Mikroheizer angebracht, die als NiCr-Widerstände auf die Sensoroberfläche aufgesputtert sind. Diesen Heizwiderstände wird impulsartig Strom zugeführt, wobei elektrische Leistung in Wärme umgesetzt wird. Dadurch erwärmt sich der Sensor lokal. Durch die große Wärmesenke, die die Einspannung für den Balken darstellt, kann die Wärme gut abfließen. Somit entsteht an den Balkenenden lokal eine impulsartige Temperaturüberhöhung. Da die Wärmeausdehnungskoeffizienten von Silizium und dem darüberliegenden Schichtsystem verschieden sind, treten infolge des bimorphen Schichtsystems (bimetallisches Verhalten) Auslenkungen auf. Somit wird der Balken durch die impulsartigen Temperaturüberhöhungen zum Schwingen angeregt.



**Bild 2.1:** Schematische Darstellung des frequenzanalogen Sensorprinzips mit elektrothermischer Anregung und resistiver Abtastung

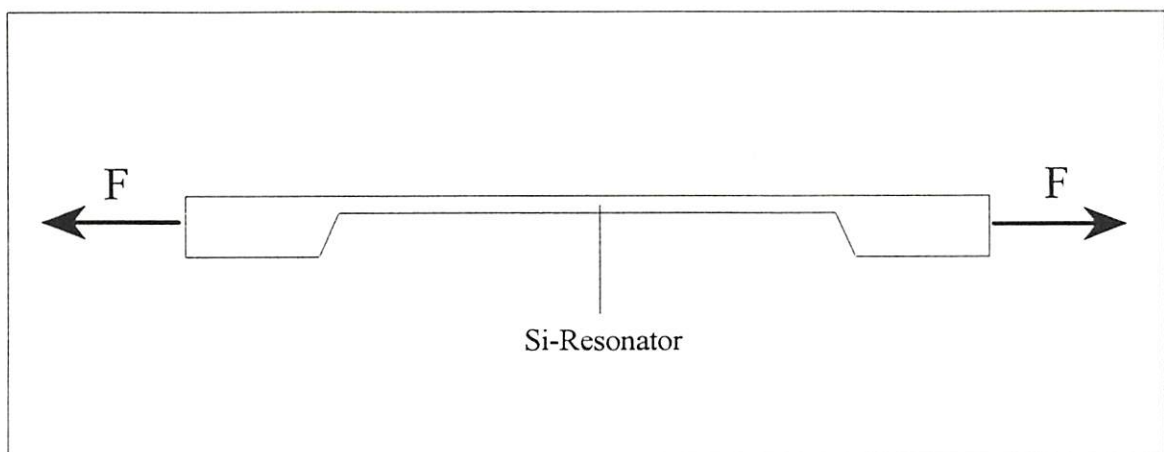
Zur resistiven Abtastung des Sensorsignals wurden auf der Sensoroberfläche zusätzlich NiCr-Widerstände aufgebracht. Diese Widerstände sind zu einer Vollbrücke verschaltet und funktionieren nach dem Prinzip der Dehnmeßstreifen (DMS). Abhängig von der Durchbiegung des Balkens liefern diese Widerstände ein elektrisches Signal. Dieses DMS-Signal ist das Sensornutzsignal, das zum einen zur Schwingungsabtastung benutzt wird, zum anderen kann mit Hilfe der Frequenz des DMS-Signals auf die zu messende Größe geschlossen werden. Für die Regelung des Heizsignals und die Auswertung des DMS-Signals ist eine elektronische Anregungs- und Auswerteschaltung verantwortlich [Wie93]. Die lichtmikroskopische Aufnahme eines Sensors ist in **Bild 2.2** dargestellt. Im folgenden werden die Anwendungen des frequenzanalogen Kraftsensors und des frequenzanalogen Strömungssensors betrachtet.



**Bild 2.2:** Lichtmikroskopische Aufnahme des Sensors

### 2.1.2 Frequenzanaloger Kraftsensor

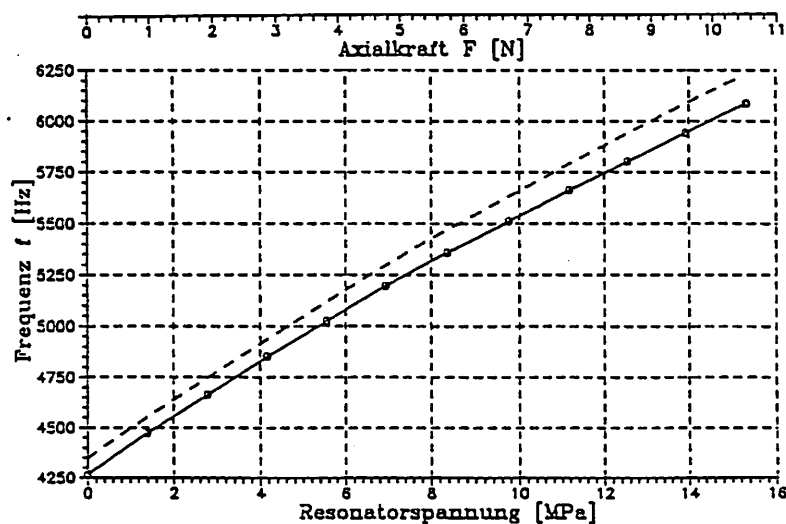
Die Längskraftempfindlichkeit der oben beschriebenen Sensoren, mit einer Balkenlänge von 10 mm wurde in [Mül92] untersucht. Dabei wurde die Resonanzfrequenz in Ab-



**Bild 2.3:** Prinzip des frequenzanalogen Kraftsensors

hängigkeit einer axial einwirkenden Kraft optisch abgetastet. Das Kraftsensorprinzip ist in **Bild 2.3** dargestellt. Um den Einfluß der Temperatur möglichst gering zu halten, wurde der Sensor im Niedertemperaturbereich ( $P_{\text{Heiz}} = 50 \text{ mW}$ ,  $P_{\text{DMS}} = 0 \text{ mW}$ ) betrieben. Bei dieser Betriebsart ist die Eigenerwärmung des Sensors sehr gering ( $\Delta T$  zur Umgebung  $< 4 \text{ K}$ ). Die Grundfrequenz betrug im unbelasteten Zustand  $4265 \text{ Hz}$ . Im Kraftbereich bis etwa  $11 \text{ N}$  wurde eine Frequenzverschiebung von  $1820 \text{ Hz}$  gemessen. Geht man von einer Gesamtquerschnittsfläche des Sensors von ca.  $7,1 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$  aus, ergibt sich eine mechanische Längsspannung im Balken von rund  $15,4 \text{ MPa}$ . Daraus errechnet sich eine Spannungsempfindlichkeit von etwa  $118 \text{ Hz/MPa}$ .

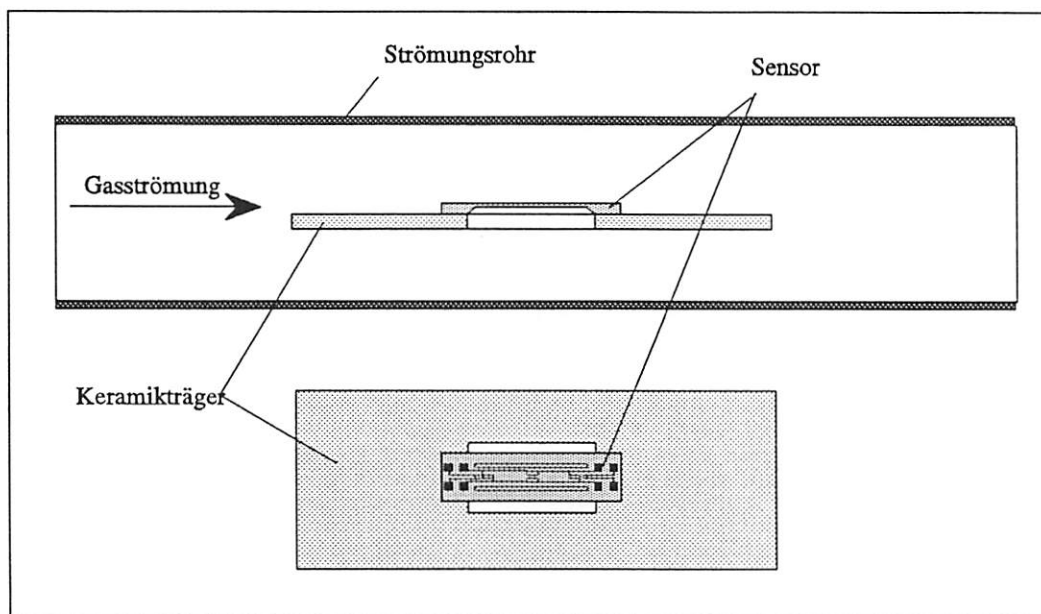
Parallel zu den Messungen wurde die Kraftempfindlichkeit des Sensors mit FEM untersucht. Für eine Zugvorspannung von  $15,2 \text{ MPa}$  wurde eine Frequenzänderung von etwa  $1868 \text{ Hz}$  berechnet. Das entspricht einer Empfindlichkeit von ungefähr  $123 \text{ Hz/MPa}$  [Bar93]. Die Empfindlichkeit der Sensoren läßt sich gut über die Querschnittsfläche der Verstärkungsstege und des Balkenresonators für Kraftsensoranwendungen in verschiedenen Kraftbereichen einstellen. In **Bild 2.4** sind die experimentellen und numerisch berechneten Ergebnisse dargestellt.



**Bild 2.4:** Abhängigkeit der Resonanzfrequenz von einer Axialkraft und der Spannung im Resonator im Vergleich mit FEM-Berechnungen [Bar93].

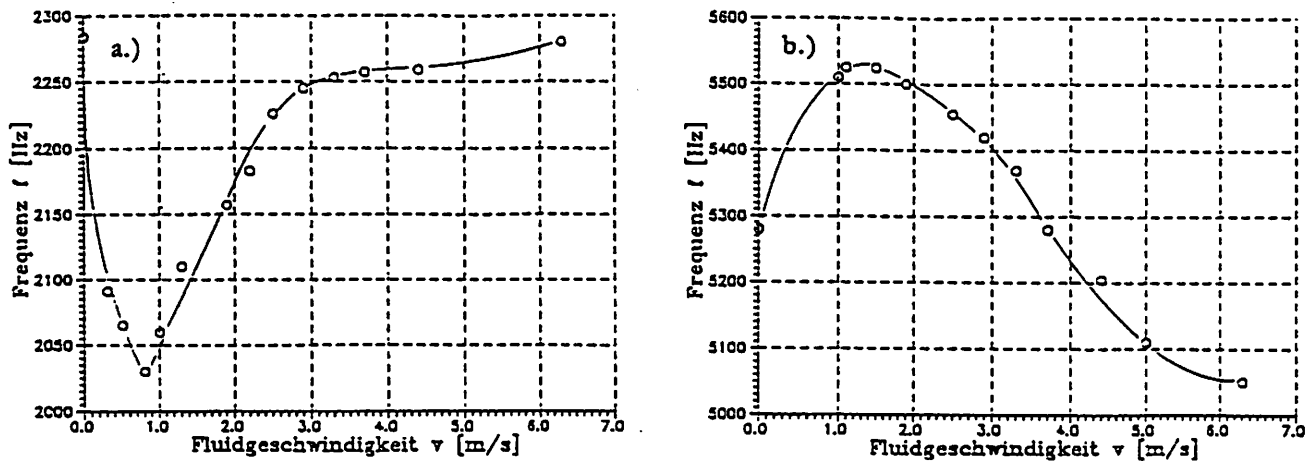
### 2.1.3 Frequenzanaloger Strömungssensor

Zur Untersuchung des Einflusses einer Gasströmung (Luft) auf das Sensorverhalten, wurden Sensoren auf Keramikträgersubstrate montiert und in ein Strömungsrohr parallel zum Gasfluß eingebaut. In **Bild 2.5** ist der Versuchsaufbau schematisch dargestellt.



**Bild 2.5:** Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus zur experimentellen Untersuchung des Strömungssensors

Mit diesem Versuchsaufbau wurden Messungen durchgeführt, bei denen die Resonanzfrequenz in Abhängigkeit der Strömungsgeschwindigkeit aufgenommen wurde. Dazu wurde eine elektronische Anrege- und Auswerteschaltung entwickelt [Wie93]. Bei diesen Messungen wurden Sensoren mit einer Balkenlänge von 10 mm verwendet. Die Balkendicke beträgt etwa  $50\text{ }\mu\text{m}$ , die Balkenbreite 1 mm. In **Bild 2.6** sind die experimentell ermittelten Zusammenhänge zwischen Resonanzfrequenz und Strömungsgeschwindigkeit dargestellt. Diese Messungen wurden für zwei verschiedene DMS-Leistungen ( $P_{\text{DMS}}$ ) durchgeführt. Das Strömungsverhalten des Sensors ist offensichtlich komplexer als das Verhalten unter axialer Krafteinwirkung (vgl. Abschnitt 2.1.2). Das Strömungsverhalten des Sensors zu charakterisieren und den Einfluß verschiedener Parameter zu untersuchen, ist der Inhalt dieser Arbeit.



**Bild 2.6:** Abhängigkeit der Resonanzfrequenz von der Strömungsgeschwindigkeit  
[Wie93]: a)  $P_{\text{DMS}} = 150 \text{ mW}$ , b)  $P_{\text{DMS}} = 330 \text{ mW}$

## 2.2 Methode der finiten Elemente

Der Grundgedanke der FE-Methode besteht darin, eine beliebige, verformbare, kontinuierliche Geometrie in möglichst einfache Grundbausteine, sogenannte finite Elemente, zu zerlegen. Für diese Elemente sollten sich wenigstens näherungsweise Beziehungen zwischen Kräften und Verformungen aufstellen lassen. Mit Hilfe der Elementlösungen kann dann unter Berücksichtigung von Gleichgewichts- und geometrischen Verträglichkeitsbedingungen eine Lösung für die Gesamtstruktur gefunden werden. Lasten und Verformungen der Struktur können jedoch nur an festen Punkten, den sogenannten Knoten, exakt definiert werden. Diese Knoten verbinden die Einzelelemente untereinander. Die Art der Aufteilung einer Struktur sowie die Wahl des Elementtyps beeinflussen die Genauigkeit der Lösungen erheblich.

### 2.2.1 Strukturmechanische Simulation

Bei der strukturmechanischen Simulation kann man grundsätzlich zwischen statischer und dynamischer Berechnung unterscheiden. Bei der statischen Berechnung wird folgendes Gleichungssystem gelöst:

$$[K] \cdot u = F \quad (2-1)$$

Dabei ist  $[K]$  die Steifigkeitsmatrix,  $u$  der Vektor der Knotenverschiebungen und  $F$  der Lastvektor. Im Gegensatz dazu werden bei einer dynamischen Berechnung die Knotengeschwindigkeiten  $\dot{u}$  und -beschleunigungen  $\ddot{u}$  mit berücksichtigt:

$$[M] \cdot \ddot{u} + [C] \cdot \dot{u} + [K] \cdot u = F \quad (2-2)$$

Dabei ist  $[M]$  die Massenmatrix und  $[C]$  die Dämpfungsmatrix des Systems. Der Dämpfungsterm kann in der Regel bei der Modalanalyse vernachlässigt werden, da die dämpfungsbedingten Frequenzänderungen bei Resonatoren mit hoher Güte sehr gering sind.

Bisher wurde davon ausgegangen, daß  $[C]$  und  $[K]$  konstant sind. Dies ist nur bei linearen Problemen der Fall. Für nichtlineare Probleme (große Knotenverschiebungen, Spannungsversteifung, temperaturabhängige Materialdaten, ...) sind  $[C]$  und  $[K]$  nicht mehr konstant, sondern hängen von den Verschiebungen und den inneren Kräften ab. Aus diesem Grunde werden solche nichtlinearen Probleme iterativ gelöst.

Das Verhalten der einzelnen Elemente wird durch sogenannte Ansatzfunktionen beschrieben. Für einen beidseitig gelagerten Biegebalken sind die Ansatzfunktionen von der Form [Mül93]:

$$u_y(x) = \sum_{i=1}^n (u_{yi} \cdot f_i(x) + ROT_{zi} \cdot g_i(x)) \quad (2-3)$$

dabei sind  $u_{yi}$  und  $ROT_{zi}$  unbekannte Knotenverschiebungsgrößen bzw. Knotenrotationsgrößen, zusammengefaßt im Vektor  $u$ .  $f_i(x)$  und  $g_i(x)$  sind Formfunktionen, in der Regel einfache Polynome ( $x$ ,  $x^2$ ,  $x^3$ , ...). Jeder Elementtyp ist fest mit einer Formfunktion verbunden. Somit legt die Wahl eines Elementtyps eine Ansatzfunktion für die Berechnung fest.

In dieser Arbeit wurde für die strukturmechanischen Berechnungen das Programmpaket ANSYS benutzt. Dieses FE-Programmpaket besteht im wesentlichen aus drei Teilen:

- Preprozessor, zur Modellgenerierung und zum Festlegen der Randbedingungen
- Gleichungslöser, zum Lösen der Gleichungssysteme
- Postprozessor, zur Auswertung der Ergebnisdaten.



ANSYS stand in den Versionen 4.4A und 5.0 auf folgenden Rechnern zur Verfügung:

- PC-486, MS-DOS 5.0
- DEC-Station 5200, ULTRIX 4.2A
- HP-Workstation 730, HP-UX 9.01.

### 2.2.2 Strömungsmechanische Simulation

Die strömungsmechanische Simulation basiert auf der numerischen Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen, die die Grundlage der gesamten Strömungsmechanik bilden. Die allgemeine Behandlung dieser Gleichungen ist geschlossen analytisch nicht möglich. Man ist weitgehend auf Vereinfachungen, also Näherungsgleichungen, angewiesen [Epp88]. Die Anwendung des numerischen Verfahrens nach Galerkin auf die Navier-Stokes-Gleichungen führt im einfachsten Fall auf das nichtlineare Gleichungssystem:

$$[K(u)] \cdot u = F \quad (2-4)$$

Dabei ist  $[K]$  die globale Systemmatrix, die sich aus der unsymmetrischen Konvektionsmatrix und einer symmetrischen Matrix, die Diffusions-, Druck- und Kontinuitäts-terme enthält, zusammensetzt. Der Vektor  $u$  enthält die unbekannten Knotenvariablen und  $F$  ist ein Vektor, der Lasten und Randbedingungen enthält [FTM91]. Da diese Gleichungen nichtlinear sind, müssen sie iterativ gelöst werden. Zur iterativen Lösung gibt es verschiedene Algorithmen, die sich z.B. durch das Konvergenzverhalten unterscheiden. Im folgenden sind einige Lösungsverfahren aufgezählt:

- Newton-Raphson-Verfahren
- Modifiziertes Newton-Raphson-Verfahren
- Segregated-Algorithmus-Verfahren.

In dieser Arbeit wurde FIDAP zur strömungsmechanischen Simulation eingesetzt. Dieses Programmpaket erlaubt die Simulation laminarer sowie turbulenter Strömungen kompressibler oder inkompressibler Fluide. Es können zwei- oder dreidimensionale Modelle berechnet werden. FIDAP stand in der Version 6.04 auf folgenden Rechner zur Verfügung:

- PC-486, MS-DOS 5.0
- HP-Workstation 730, HP-UX 9.01

## 2.3 Experimentelle Ausstattung

Zu experimentellen Untersuchungen standen zwei Meßplätze am HSG-IMIT zur Verfügung:

- ein optischer Meßplatz zur Aufnahme von Modenspektren und
- ein optischer Meßplatz zur Oberflächenmessung.

Der optische Meßplatz zur Aufnahme von Modenspektren besteht aus einem Laservibrometer und einem Spektrum-Analysator. Zur Durchführung der Versuche gibt es ein Meß- und Steuerprogramm. Der optische Meßplatz zur Oberflächenmessung enthält ein optisches Tastschnittgerät, das nach dem Autofocus-Verfahren arbeitet und zur Messung von Oberflächenbeschaffenheiten eingesetzt wird.

### 2.3.1 Laservibrometer und Spektrum-Analysator

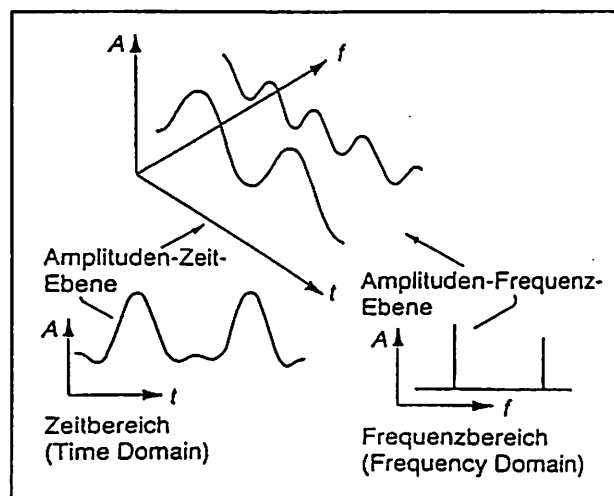
#### *Laservibrometer:*

Das Laservibrometer (Polytec OFV 1102, [Pol91]) wird eingesetzt, um berührungslos Schwingungen von Strukturen zu erfassen. Es ist nach dem Prinzip eines Mach-Zehnder-Interferometers aufgebaut, und arbeitet auf der Grundlage des Heterodyn-Meßprinzips. Das Meßverfahren beruht auf dem Laser-Doppler-Effekt.

Die schwingende Struktur wird mit kohärentem Laserlicht bestrahlt. Durch die Bewegung der Struktur ist das von der Oberfläche reflektierte Licht in seiner Frequenz verschoben. Diese Frequenzverschiebung beruht auf dem Dopplereffekt und ist von der Geschwindigkeit des Schwingers abhängig. Die Frequenz des reflektierten Signals wird mit der Frequenz des Meßsignals verglichen. Daraus erhält man die Frequenzverschiebung, die in einem Signalprozessor analysiert wird und am Ausgang als zeitabhängiges Spannungssignal zur Verfügung steht. Ein akustooptischer Modulator verschiebt das elektromagnetische Feld des Referenzstrahls gegenüber dem Feld des Meßstrahls in seiner Frequenz. Dadurch kann die Bewegungsrichtung der schwingenden Struktur ermittelt werden. Mit dem Laservibrometer können zum einen Schwingungsamplituden bis  $A = 8 \text{ nm}$  gemessen werden, zum anderen steht auch die Geschwindigkeit der Schwingung als Meßgröße zur Verfügung [Lew90].

### Spektrum-Analysator:

Vom Laservibrometer erhält der Spektrum-Analysator (HP 3588A, [Man90]) ein Signal im Zeitbereich, z.B. den Verlauf der Amplitude über die Zeit. Dieses analoge Signal wird im Spektrum-Analysator in den Frequenzbereich transformiert (Fouriertransformation), (siehe **Bild 2.7**). Man erhält also den Amplitudeverlauf über der Frequenz. Diese Amplituden-Frequenz-Verläufe werden als Spektrogramm oder Spektrum bezeichnet. Das Aufspalten der Schwingungssignale in die einzelnen Frequenzanteile wird Spektrumanalyse genannt.

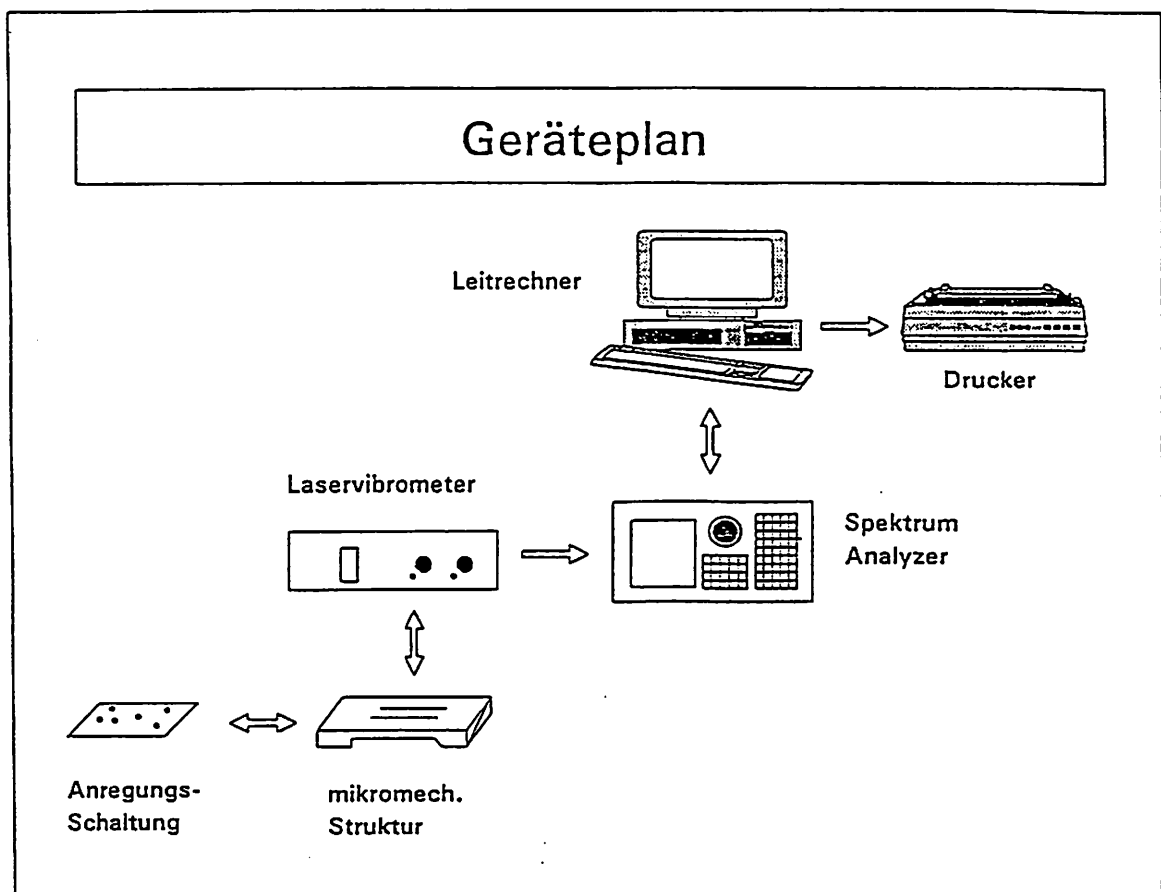


**Bild 2.7:** Die Beziehung zwischen Zeit- und Frequenzbereich [Sch90]

Im Spektrum-Analysator ist ein Filter mit einer festen Frequenz integriert. Das Eingangssignal wird multiplikativ mit einer veränderlichen Oszillatorfrequenz überlagert. Die Differenz zwischen dem abstimmbaren Oszillatorsignal und dem Eingangssignal entspricht der Frequenz des Filters. Die multiplizierten Amplituden von Oszillator- und Eingangssignal gelangen durch den Filter und werden am Display dargestellt. Durch die Variation der Oszillatorfrequenz bestimmt man den abgetasteten Frequenzbereich. Dieses Verfahren wird auch als Superheterodyn-Verfahren bezeichnet. Bei der Forderung nach einer hohen Auflösung in einem großen Frequenzbereich, wobei die Meßzeit gering sein sollte, müssen Kompromisse eingegangen werden. Eine hohe Auflösung mit geringer Filterbandbreite ist nur möglich, wenn der Filter eine genügend große Einschwingzeit zur Verfügung hat. Hochauflösende Messungen sollten daher nur in einem kleinen Meßbereich durchgeführt werden [Sch90].

### Meßaufbau:

In **Bild 2.8** ist der Geräteplan des optischen Meßplatzes zur Aufnahme von Modenspektren dargestellt. Die zu vermessende mikromechanische Struktur wird mit einer elektronischen Anregungsschaltung zum Schwingen angeregt. Mit Hilfe des Laservibrometers wird die Schwingung der mikromechanischen Struktur optisch abgetastet. An den Ausgang des Laservibrometers ist ein Spektrum-Analysator angeschlossen. In diesem Spektrum-Analysator wird das Ausgangssignal des Laservibrometers verarbeitet und als Modenspektrum dargestellt. Zur Steuerung und Auswertung der Messungen steht ein Steuer- und Meßprogramm zur Verfügung, das auf einem Leitrechner installiert ist. Der Leitrechner ist mit dem Spektrum-Analysator über eine HP-IB-Schnittstelle verbunden [Mül92]. Zur Ausgabe der Meßergebnisse ist am Leitrechner ein Drucker angeschlossen.



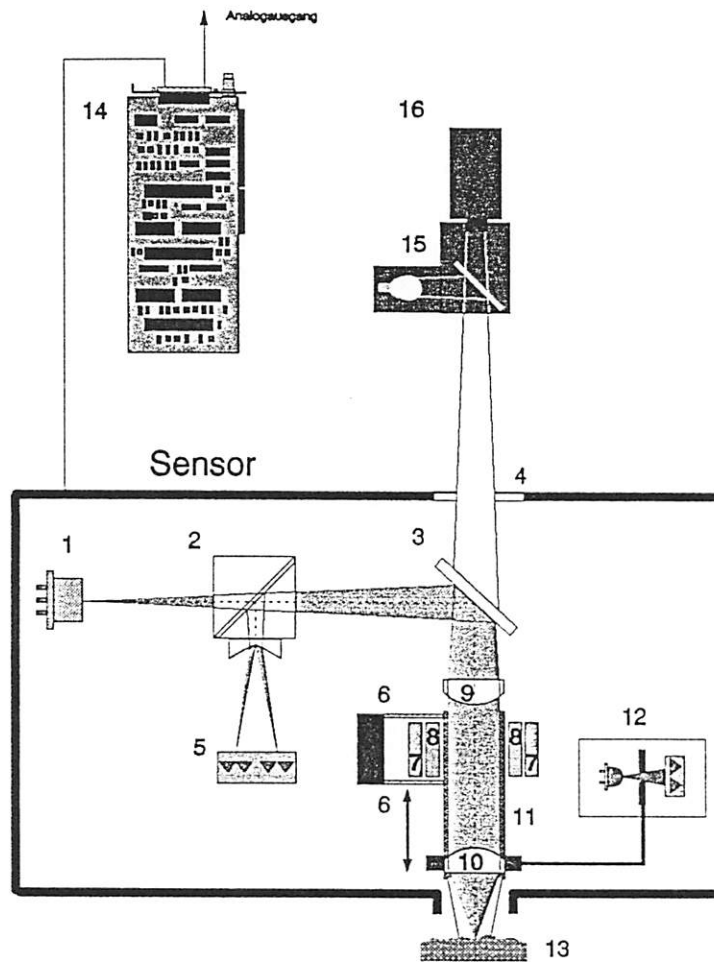
**Bild 2.8:** Geräteplan des optischen Meßplatzes zur Aufnahme von Modenspektren [Mül92]

### 2.3.2 Optisches Tastschnittgerät

Das optische Tastschnittgerät arbeitet nach dem Autofocus-Verfahren. Ein Laserstrahl, erzeugt von einer Laserdiode, wird als Meßlichtstrahl verwendet. Dieser Meßlichtstrahl wird auf die zu vermessende Oberfläche geleitet. Das von dieser Oberfläche reflektierte Licht trifft im Meßtaster auf eine Differentialfotodiode. Bei einer Abstandsänderung zwischen Oberfläche und Sensor, wie sie während einer Oberflächenmessung ständig vorkommt, bewegt sich der auf das Differentialfotodiodenpaar abgebildete Lichtfleck so, daß die eine der beiden Dioden mehr beleuchtet wird. Aufgrund der Diodenkennlinie ist der daraus resultierende Meßbereich sehr klein (abhängig von der Reflektivität der Oberfläche einige  $\mu\text{m}$ ). Das Diodenausgangssignal wird auf einen Regelkreis gegeben, um die Tasterlinse laufend so zu verschieben, daß der abgebildete Lichtfleck symmetrisch auf die Monitorfotodioden fällt. Damit ist sichergestellt, daß der Brennpunkt des Meßlichtstrahls immer auf der zu vermessenden Oberfläche liegt. Über die Nachregelung der Tasterlinse erhält man die Oberflächenbeschaffenheit der Oberfläche. Dieses Verfahren wird auch als Autofocus-Verfahren bezeichnet [UBM]. Das Funktionsschema des optischen Tastschnittgeräts ist in **Bild 2.9** schematisch dargestellt.

Zur Steuerung und Auswertung der Messungen gibt es ein Meßprogramm, das auf einem Rechner installiert ist. Dieser Rechner ist über eine Schnittstellenkarte mit dem Meßgerät verbunden. Eingesetzt werden kann dieses Meßgerät zur Messung von:

- Abständen,
- Profilen,
- Rauhtiefen und
- Reflexionswerten.



- 1 Laserdiode, 2 Prisma mit Teilerspiegel, 3 Teilerspiegel, 4 Fenster, 5 Fotodioden,  
6 Blattfedern, 7 Spule, 8 Magnet, 9 Kollimatorlinse, 10 Objektiv, 11 Tubus,  
12 Lichtschrankenmeßsystem, 13 Meßobjekt, 14 PC - Karte, 15 Mikroskop mit  
Beleuchtung, 16 CCD - Kamera.

**Bild 2.9:** Schematische Darstellung des Autofocus-Meßsystems [UBM]

### 3 Theoretische Grundlagen

#### 3.1 Beidseitig eingespannter Biegebalken

##### 3.1.1 Einfluß einer axialen Kraft

In [Bou91] ist die analytische Betrachtung der Schwingung eines beidseitig eingespannten Biegebalkens als kontinuierliches System beschrieben. Geht man davon aus, daß die Dicke des Balkens klein gegenüber seiner Länge und Breite ist und daß der Balken ideal fest eingespannt ist, genügt ein eindimensionales Modell zur Beschreibung. Geht man weiterhin davon aus, daß der Balken homogen und ideal prismatisch ist und daß eine Kraft in axialer Richtung wirkt, kann die Biegeschwingung des Balkens für kleine Amplituden durch folgende lineare partielle DGL beschrieben werden [Wea90]:

$$\hat{EI} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - F \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\rho A \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3-3a)$$

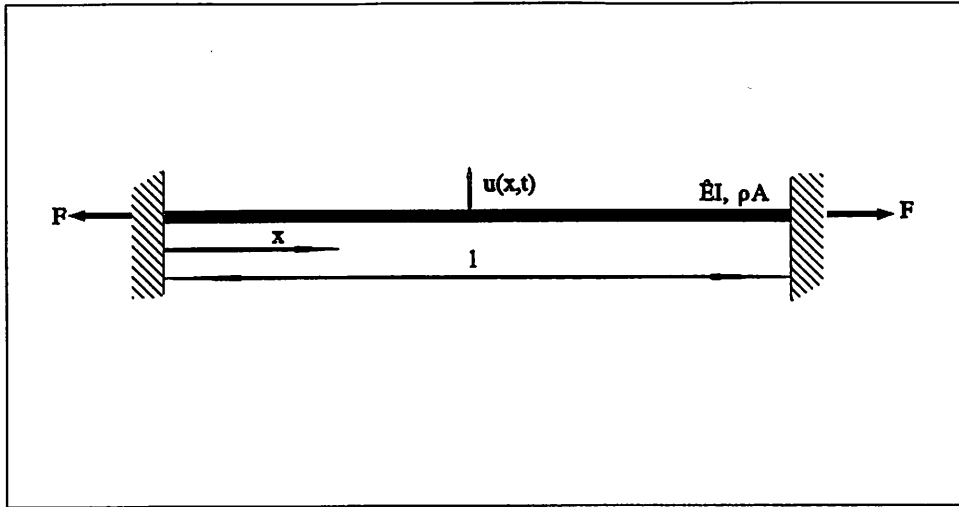
Dabei gelten folgende Randbedingungen:

$$u|_{x=0,l} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0,l} = 0 \quad (3-3b)$$

In Gleichung (3-3) ist  $u(x, t)$  die dynamische Auslenkung des Balkens, wobei  $x$  der Ort in axialer Richtung auf dem Balken und  $t$  die Zeit ist (**Bild 3.1**).  $\hat{E} = E/1-\nu^2$  ist der reduzierte Elastizitätsmodul des Balkenmaterials,  $F$  ist die axial einwirkende Kraft und  $\rho$  die Materialdichte. Die Querschnittsfläche  $A$  und das Flächenträgheitsmoment  $I$  sind Größen, die lediglich von der Geometrie des Balkens abhängen.

Die Lösung von Gleichung (3-3) läßt sich darstellen als [Wea90]:

$$u(x, t) = \sum_n X_n \left( \frac{x}{l} \right) \cdot (A_n \cdot \cos \omega_n t + B_n \cdot \sin \omega_n t) \quad (3-$$



**Bild 3.1:** Beidseitig eingespannter Biegebalken (Biegesteifigkeit  $\hat{EI}$ , Masse pro Längeneinheit  $\rho A$  und Länge  $l$ ) unter axialer Krafteinwirkung  $F$  [Bou91]

Dabei ist  $\omega_n$  die Kreisfrequenz und  $X_n$  die Formansatzfunktion für die  $n$ -te Mode ( $A_n$ ,  $B_n$  sind Konstanten). Unter Berücksichtigung von Gleichung (3-4) läßt sich Gleichung (3-3) in eine gewöhnliche DGL für  $X_n$  umformulieren. Die Lösung dieser DGL führt zu exakten Lösungen der Gleichung (3-3) [Bou91]. Für den unbelasteten Biegebalken ergeben sich die Eigenfrequenzen  $f_n$  zu:

$$f_n = \frac{k_n^2}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{\hat{EI}}{\rho A l^4}} \quad (3-5)$$

Die exakten Lösungen zur Berechnung der Eigenfrequenzen unter Berücksichtigung der axialen Kraft sollen hier nicht betrachtet werden. Sie können durch:

$$f_n(F) = f_n(0) \cdot \sqrt{1 + \gamma_n \cdot \frac{Fl^2}{12\hat{EI}}} \quad (3-6)$$

gut approximiert werden. Dabei ist  $\gamma_n$  ein Koeffizient, der den Einfluß der axialen Kraft  $F$  auf die Versteifung des Resonators, relativ zum Einfluß der Biegesteifigkeit, beschreibt. Der durch die Approximation auftretende Fehler ist kleiner als 0,5 %, wenn:

$$\gamma_n \cdot \frac{Fl^2}{12\hat{EI}} < 1 \quad (3-7)$$



Werte für  $k_n$ ,  $f_n/f_0$  und  $\gamma_n$  sind in **Tabelle 3.1** aufgelistet.

n	$k_n$	$f_n/f_0$	$\gamma_n$
1	4,730	1,0000	0,2949
2	7,8532	2,7566	0,1453
3	$(n + 1/2)\pi$ <i>10,99557</i>	$\left(\frac{k_n}{4,73}\right)^2$ <i>5,4039777</i>	$12 \frac{(k_n-2)}{k_n^3}$

**Tab. 3.1:** Werte für die Koeffizienten in Gleichung (3-5) und (3-6):  
 $k_n$  und  $f_n$  für  $F = 0$  [Bou91]

### 3.1.2 Temperatureinfluß

In Abschnitt 3.1.1 wurde der Einfluß einer axialen Kraft auf die Resonanzfrequenz eines beidseitig eingespannten Balkens betrachtet. In diesem Abschnitt soll der Einfluß der Temperatur auf das Sensorverhalten betrachtet werden.

Erwärmt man einen beidseitig eingespannten Balken, entstehen infolge der durch die feste Einspannung verhinderten Wärmeausdehnung Druckspannungen, die das Schwingungsverhalten des Balkens verändern. Übersteigt die Druckspannung im Balken einen kritischen Wert, knickt der Balken aus. Die Temperatur, bei der der Balken ausknickt, wird als kritische Temperatur bezeichnet. Die analytische Charakterisierung des Sensorverhaltens unter- und oberhalb dieser Temperatur erfordert eine unterschiedliche Beschreibungsweise. Basierend auf dem mathematischen Modellansatz in [Gei91] wurden in [Bar93] folgende analytische Beziehungen für die Resonanzfrequenz  $f$  hergeleitet:

$$f(\Delta T) = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{S - E\alpha \Delta T}{3\rho}}, \quad \text{für } 0 \leq \Delta T \leq \Delta T_{kr} \quad (3-7)$$

$$f(\Delta T) = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{E\alpha \Delta T - S}{\rho}}, \quad \text{für } \Delta T \geq \Delta T_{kr} \quad (3-8)$$

Dabei ist  $\Delta T$  die Temperaturdifferenz zu einer Referenztemperatur.  $\Delta T_{kr} = S/E\alpha$  ist die kritische Temperaturdifferenz, bei der die kritische Knicklast erreicht wird. Der Parameter

S enthält die Summe aus der herstellungsbedingten axialen Vorspannung und die aus der Biegesteifigkeit resultierende Spannung. E ist der isotrope Elastizitätsmodul des Balkenmaterials und  $\alpha$  der lineare Wärmeausdehnungskoeffizient.

### 3.2 Strömungsmessung

Der Durchfluß eines Fluids in einer gefüllten Rohrleitung ist durch die Stoffmenge gegeben, die in einem bestimmten Zeitintervall durch die Querschnittsfläche fließt. Zur Beschreibung des Durchflusses wird entweder der Volumendurchfluß

$$q_v = \dot{V} = \frac{dV}{dt} \quad (3-9)$$

oder der Massendurchfluß

$$q_m = \dot{m} = \frac{dm}{dt} \quad (3-10)$$

herangezogen, wobei V das Volumen, m die Masse und t die Zeit ist. Betrachtet man ein Volumenelement  $dV = A \cdot ds$  mit der Querschnittsfläche A, dann ergibt sich für den Volumendurchfluß:

$$\dot{V} = A \cdot \frac{ds}{dt} = A \cdot \bar{w} \quad (3-11)$$

Dabei ist ds die Länge des differentiellen Volumenelements dV und  $\bar{w}$  ist die mittlere Strömungsgeschwindigkeit. Der Massendurchfluß hängt über die Dichte  $\rho$  mit dem Volumendurchfluß zusammen. Allgemein gilt:

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho \cdot V) = V \cdot \frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \frac{dV}{dt} = V \cdot \dot{\rho} + \rho \cdot \dot{V} \quad (3-12)$$

Da die Fluidichte  $\rho$  bei der hier betrachteten stationären Strömung an jeder beliebigen Stelle des Strömungsrohres zeitlich konstant ist ( $\dot{\rho} = 0$ ), erhält man aus Gleichung (3-12):

$$\dot{m} = \rho \cdot \dot{V} = \rho \cdot \bar{w} \cdot A \quad (3-13)$$

Somit können der Volumen- und der Massendurchfluß über die mittlere Strömungsgeschwindigkeit berechnet werden. Geht man von einer laminaren Strömung in einem kreisrunden Rohr aus, findet man für die Geschwindigkeitsverteilung über dem Querschnitt in [Sig91]:

$$w(r) = \frac{Y_v}{4 \cdot \nu \cdot L} \cdot (R^2 - r^2) \quad (3-14)$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel, wobei  $Y_v$  die Verlustenergie,  $\nu$  die kinematische Viskosität,  $L$  die Rohrlänge  $R$  der Rohrradius und  $r$  die veränderliche Variable ist. Die Geschwindigkeitsverteilung einer voll ausgebildeten laminaren Rohrströmung ist also parabolisch. Die mittlere Geschwindigkeit dieser Rohrströmung ergibt sich anhand des folgenden integralen Ausdrucks:

$$\bar{w} = \frac{1}{A} \cdot \int_A w(r) dA \quad (3-15)$$

Berücksichtigt man, daß  $dA = 2r\pi \cdot dr$  und  $A = \pi R^2$  ist, so erhält man aus Gleichung (3-14) und (3-15):

$$\bar{w} = \frac{Y_v}{2\nu LR^2} \cdot \int_0^R r \cdot (R^2 - r^2) dr \quad (3-16)$$

Die Lösung dieses Intergrals führt zur mittleren Strömungsgeschwindigkeit:

$$\bar{w} = \frac{Y_v}{8\nu L} \cdot R^2 \quad (3-17)$$

Die maximale Strömungsgeschwindigkeit in der Rohrmitte ergibt sich zu:

$$w_{\max} = w(r=0) = \frac{Y_v}{4\nu L} \cdot R^2 \quad (3-18)$$

Aus Gleichung (3-17) und (3-18) erkennt man, daß  $\bar{w} = \frac{1}{2} \cdot w_{\max}$  ist. Somit genügt es, bei einer laminaren Rohrströmung die maximale Strömungsgeschwindigkeit zu bestimmen, um auf die mittlere Strömungsgeschwindigkeit und folglich auf den Volumen- und Massendurchfluß schließen zu können.