

Fer Sroter

Modellierung mikromechanischer Membranen

D I P L O M A R B E I T

Technische Universität Chemnitz
Fachbereich Elektrotechnik
Institut für Feinwerk- und Mikrotechnik i.G.

eingereicht von Andreas Schroth
geboren am 30. Juni 1966 in Dresden

Betreuer: Doz. Dr.-Ing. habil. Häntschei
 Doz. Dr.-Ing. habil. Allnoch

Außerschulischer Betreuer: Dipl.-Phys. Fabula,
 Hahn-Schickard-Institut für Mikro- und Informations-
 technik, Villingen-Schwenningen

Chemnitz, 28. Februar 1992

Technische Universität Chemnitz
Fachbereich Elektrotechnik
Institut für Feinwerktechnik und Mikrotechnik i. G.

Chemnitz, den 24.07.91
472-14130 dr.hä.-sc

Aufgabenstellung für

Diplomarbeit

(Art der wissenschaftlichen Arbeit)

Schroth, Andreas 30. 6. 1966 14005
Name, Vorname Geburtsdatum Fachrichtung

Thema: Modellierung mikromechanischer Membranen

(Ausführliche Aufgabenstellung siehe Rückseite)

Betreuer: Doz. Dr.-Ing. habil. Häntsche (Akademischer Grad und Name)

Außerschulischer Betreuer: Dipl.-Ing. Fabula, Hahn-Schickard-Institut
(Akademischer Grad und Name)

Tag der Ausgabe: 1. 9. 1991

Tag der Abgabe:

Abgabetermin: 10. 1. 1992

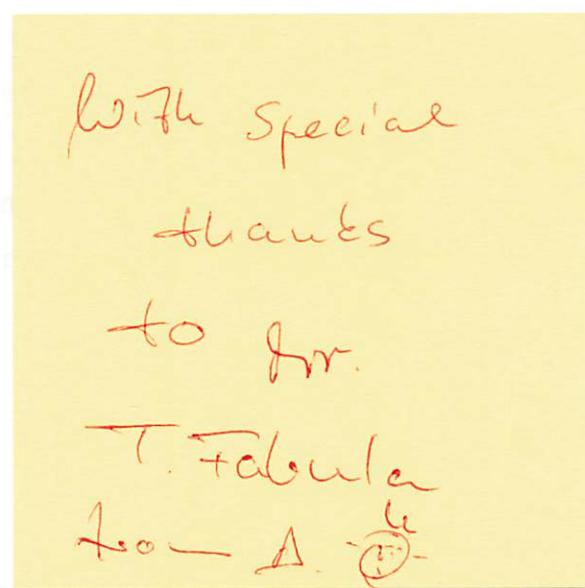
Prof. Dr.-Ing. Olbrisch
(Prüfungsausschußvorsitzender)


Doz. Dr.-Ing. habil. Häntschele
(Verantwortlicher Hochschullehrer)

Aufgabenstellung

Mittels des FEM-Programmes "ANSYS" sind Si-Membranen nach folgenden Gesichtspunkten zu analysieren:

- Berechnung der Eigenfrequenzen und -schwingungsformen (Modalanalyse)
- Frequenzgangverhalten unter Berücksichtigung von Dämpfungseffekten
- Berechnung der druckabhängigen Eigenfrequenzänderung
- Berechnung der Empfindlichkeit und Linearität der Sensorkennlinie
- isotroper/anisotroper Materialeinsatz
- Einfluß der Randbedingungen (ideal feste bzw. flexible Einspannung)
- lineares/nichtlineares FEM-Modellverhalten
- Einfluß von Membranvorspannung auf die Empfindlichkeit und das Resonanzverhalten
- Temperatureinfluß auf die Resonanzfrequenz (wärmeinduzierte mechanische Spannungen)
- Temperatureinfluß auf Spannungszustand eines bimorphen Sensors (z. B. Silicium-Pyrex)



Bibliographische Beschreibung

Verfasser: Schroth, Andreas

Matrikel: 87

Titel: Modellierung mikromechanischer Membranen
81 Seiten, 11 Abbildungen, 12 Tabellen, 17 Diagramme,
26 Literaturstellen

Verteidigung: 1992

Referat:

Für eine mikromechanische, quadratische, fest eingespannte Membran wird ein finite Elemente Modell erstellt und auf seine Genauigkeit hin untersucht. Mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode wird die Verschiebung der Eigenfrequenzen der Membran bei Beaufschlagung mit einem Druck beschrieben. Für diesen Zusammenhang, der in einem Teilbereich linear verläuft, werden analytische Gleichungen aufgestellt. Diese Gleichungen werden durch Messungen qualitativ bestätigt. Als weitere Einflußfaktoren auf das dynamische Verhalten der Membran wurden Temperatureinflüsse und Schichtspannungen untersucht.

Bei der Untersuchung der Dämpfungseffekte bei Schwingung in Luft wurde ein Überwiegen des akustischen Dämpfungsanteiles festgestellt.

An Beispielen wird die Verwendung der hergeleiteten Gleichungen zur Sensordimensionierung oder zur Parameterbestimmung an existierenden Membranen gezeigt.

Deskriptoren:

Dämpfung, Drucksensoren, Finite-Elemente-Methode, Frequenzanaloge Sensoren, Membran, Mikromechanik, Schichtspannungen

Inhaltsverzeichnis

	<u>Seite</u>
Verzeichnis der Formelzeichen	3
1 Einführung	4
1.1 Mikrosystemtechnik	4
1.2 Beschreibungsmethoden	5
1.3 Aufgabenstellung	7
2 Einfluß der Modellparameter auf das dynamische Verhalten	8
2.1 Problemstellung	8
2.2 Analytische Zusammenhänge	8
2.3 Verwendete FE-Modelle	11
2.4 Ergebnisse	13
2.4.1 Allgemeine Beobachtungen	13
2.4.2 Quantitative Ergebnisse	14
2.5 Folgerungen für das zu verwendende Modell	15
2.6 Dynamisches Verhalten unter statischer Belastung	16
3 Eigenfrequenzverschiebung unter Druckeinwirkung	19
3.1 Überblick	19
3.1.1 Problemstellung	19
3.1.2 Lösungsansatz	19
3.1.3 Variationen des Simulationsmodells	20
3.2 Membranmittenauslenkung als Funktion des wirkenden Druckes	21
3.2.1 Theoretischer Ansatz	21
3.2.2 Vorgaben und Lösungen	24
3.2.3 Ergebnisse	25
3.2.4 Geltungsbereiche und Fehler	27
3.3 Eigenfrequenzverschiebung als Funktion der Membranmittenauslenkung	32
3.3.1 Ansätze	32
3.3.2 Ergebnisse	32
3.3.3 Geltungsbereich und Fehler	33
3.4 Eigenfrequenzverschiebung als Funktion des wirkenden Druckes	37

3.5	Einfluß lateraler Spannungen in der Membran	40
4	Messungen	43
4.1	Meßobjekte und Schwingungsanregung	43
4.2	Meßaufbau	44
4.3	Meßergebnisse	47
4.3.1	Geometrische Abmaße	47
4.3.2	Dynamisches Verhalten	49
4.4	Fehlerbetrachtung	52
4.5	Zusammenfassung	52
5	Dämpfungseinflüsse	53
5.1	Problemstellung	53
5.2	Dämpfungsursachen	53
5.3	Darstellungen und Beschreibungsgrößen	54
5.4	Dämpfungseffekte in ANSYS	58
5.5	Simulation	58
5.5.1	Prozentualer Dämpfungskoeffizient ξ	59
5.5.2	Anregungseinfluß und Modendämpfung	61
5.5.3	Fluiddämpfung	64
5.6	Messungen	65
5.6.1	Anregungseinfluß	65
5.6.2	Dämpfungsverhalten höherer Moden	66
5.7	Zusammenfassung	68
6	Anwendungen	69
6.1	Geometriedimensionierung	70
6.2	Schichtspannungsbestimmung	71
7	Zusammenfassung	73
	Literaturverzeichnis	75
	Verzeichnis der Diagramme	79
	Tabellenverzeichnis	80
	Abbildungsverzeichnis	81
	Anhangsverzeichnis	81

Verzeichnis der Formelzeichen

- a: Membranseitenlänge
c,k: Federkonstante, Steifigkeit
d: Auslenkung
D: Biegesteifigkeit einer Platte nach Gleichung (3.4)
 $D(\omega)$: Dynamischer Vergrößerungsfaktor
E: Elastizitätsmodul
 η : Empfindlichkeit
 f, f_{ij} : Eigenfrequenz
 f_0 : Grundfrequenz
F: Kraft
 θ : Phasenwinkel
h: Membrandicke
 λ_{ij} : Normierte Eigenfrequenz
m: Masse
 ν : Poissonzahl
 ω, ω_{ij} : Eigenkreisfrequenz
 ω_a : Frequenz der Anregung
p: Druck
 p_0 : Referenzdruck
Q: Schwingungsgüte
 ρ : Dichte
 σ : Mechanische Spannung
 ξ : Prozentualer Dämpfungskoeffizient (Lehrsches Dämpfungsmaß)

1 Einführung

1.1 Mikrosystemtechnik

Das Gebiet der Mikrosystemtechnik ist ein relativ neues Forschungsgebiet, das zur Zeit eine starke Entwicklung erfährt. Entstanden ist es aus den Erfordernissen der Aktorik und Sensorik, in denen die Elektronik mittlerweile einen hohen Miniaturisierungsgrad erreicht hat, die zugehörigen mechanischen Wandlerelemente sich aber noch immer auf dem Stand feinmechanischer Größenordnungen ($> 100\mu\text{m}$) befinden. Hinzu kommen unerwünschte Störeinflüsse an der durch verschiedene Herstellungstechnologien verursachten Schnittstelle zwischen Wandlerelement und Elektronik. Um diese zu vermeiden und gleichzeitig die angestrebte Miniaturisierung in der Mechanik bis in die Größenordnung der Mikroelektronik (Größenordnung $1\mu\text{m}$) zu erreichen, wurden bisher in der Mikroelektronik angewandte Technologien in die Mechanik (Mikromechanik) eingeführt. Das Ziel sind z. B. Sensor- und Aktorelemente, bei denen mikromechanische Wandlerelemente und die zugehörige Auswerteelektronik mit der gleichen Technologie monolithisch auf einem Träger (Chip) hergestellt werden.

Gleichzeitig ist damit die Verwendung von für die Mechanik neuen Materialien verbunden. Besondere Bedeutung hat dabei das Halbleiterelement Silizium, das die Basis für die Halbleiterelektronik bildet. Bei seiner Anwendung in der Mikromechanik ergeben sich durch die einkristalline Struktur (Diamantgitter) Anisotropien im mechanischen und technologischen Verhalten und damit spezifische, in der klassischen Mechanik bisher nicht auftretende Geometrien und physikalische Effekte.

Aus diesem Grunde existieren zu mikromechanischen Wandlerelementen nur vereinzelt Erfahrungen, eine vollständige systematisierte Beschreibung des Verhaltens dieser sowie Gestaltungsregeln zur Optimierung des Entwurfes sind Gegenstand der Forschung.

Besonders problematisch ist dabei die Vielzahl der auf das Wandlerelement einwirkenden Effekte. Das Gesamtverhalten des mikromechanischen Elementes stellt sich als eine Überlagerung aller dieser Effekte, wie thermische Abhängigkeiten, Verspannung durch Mehrschichtaufbau, Störeinkopplung über die Einspannung, anisotropes Materialverhalten und zugrundeliegenden Geometrien dar. Das durch die kleinen Abmessungen der Elemente verursachte komplexe Verhalten bedingt entsprechend aufwendige Simulationsmodelle. Um

die einzelnen Anteile der jeweiligen Störeffekte auf den angestrebten Wandlereffekt abschätzen zu können, müssen diese aus der Simulation abgeleitet und einzeln untersucht werden. Das Ziel ist eine Aufstellung aller Einflußfaktoren auf das Gesamtverhalten des Elementes, um bei der Anwendung eines bestimmten Wandlereffektes andere, unerwünschte Einflüsse durch geeignete Maßnahmen ausschließen oder zumindest minimieren zu können.

Im Vergleich zur herkömmlichen mechanischen Konstruktion ergibt sich ein weiterer Unterschied beim Entwurf mikromechanischer Elemente durch die Verwendung der Mikroelektroniktechnologie. Da die Produktion im Waferverbund stattfindet, muß durch eine aus technologischer Sicht günstige Geometrie und Dimensionierung eine hohe Ausbeute ermöglicht werden. In den Entwurf fließen demzufolge in starkem Maße technologische Parameter und Randbedingungen ein [Büt91], [Heu89].

1.2 Beschreibungsmethoden

Die Beschreibung mikromechanischer Systeme durch Simulation erfordert

- die Idealisierung des Systems auf eine berechenbare Form (Modellbildung),
- die Aufstellung der Gleichgewichts- und Bewegungsgleichungen, die das idealisierte System beschreiben,
- die Lösung dieser Gleichungen und
- die Interpretation der Ergebnisse [Bat86].

Das Modell besteht aus der Geometrie des Systems, den Materialeigenschaften, den Randbedingungen und Lasten. Je nach Komplexität des zu beschreibenden Effektes richtet sich der Umfang des Modells, welcher wesentlich die Interpretation des Ergebnisses beeinflußt. Die für kontinuierliche Systeme aufzustellenden Bestimmungsgleichungen beziehen sich auf ein typisches differentielles Element des Systems. Mit den zugehörigen Rand- und bei zeitabhängigen Problemen Anfangsbedingungen ergeben sich Differentialgleichungssysteme, deren Gültigkeit für das ganze System gesichert sein muß.

Für einfache Systeme sind diese noch geschlossen lösbar. Bei komplexeren Systemen müssen zur Lösung Näherungsverfahren wie das Verfahren des gewichteten Restes oder das Ritzsche Verfahren verwendet werden [Bat86].

Bei der Methode der finiten Elemente (FEM) wird die Gesamtstruktur als Verbund einzelner Strukturelemente idealisiert (Diskretisierung). Für diese werden die beschreibenden Differentialgleichungen in stückweise linearisierter Form aufgestellt. Die Darstellung erfolgt in Matrixschreibweise. Die Addition dieser Elementmatrizen ergibt die das Gesamtsystem beschreibende Systemmatrix. Mit Hilfe der Systemgleichgewichtsbedingungen lässt sich für die einzelnen Elemente das statische und dynamische Verhalten ableiten und das Verhalten des Systems in jedem Punkt approximieren. Je feiner die finite Elementeunterteilung erfolgt, umso besser ist die Näherung an das Verhalten der realen Struktur, umso höher aber auch der Rechenaufwand.

Diese Methode ist in verschiedenen Programmsystemen implementiert. Das in dieser Arbeit verwendete kommerzielle Programm ANSYS der Firma Swanson Analysis Systems Inc. bietet umfassende Möglichkeiten zur Simulation komplexer Strukturen und Effekte.

Im Preprozessor wird ein FE-Modell der Strukturgeometrie erstellt und mit finiten Elementen vernetzt. Die Mathematische Ansatzfunktion dieser Elemente wird durch den verwendeten Elementtyp (STIF) festgelegt und reicht von eindimensionalen Stabelementen über zweidimensionale Plattenelemente bis zu dreidimensionalen Multi-Field-Elementen mit anisotropen Materialeigenschaften. Die Elemente besitzen verschiedene Knotenpunkte, über welche sie miteinander in Beziehung stehen. Über die an den Knotenpunkten vorgebbaren Verschiebungen, Lasten und Temperaturen lassen sich Modellrandbedingungen (Einspannungen, Kräfte) einbeziehen.

In der Berechnungsphase können verschiedenartige Analysen durchgeführt werden. Neben dem statischen Verhalten (Spannungen und Verschiebungen) können Eigenfrequenzen, Eigenmoden sowie transientes-, Temperatur- und Frequenzverhalten simuliert werden. Nichtlineare Effekte (Material-, Geometrie-) sind durch iterative Berechnungsverfahren (Newton-Raphson) einbeziehbar. Auch kombinierte Berechnungen wie zum Beispiel die Eigenfrequenzen und -moden eines durch eine äußere Last verformten Elementes sind durchführbar.

Die Auswertung der Berechnungen erfolgt mit Hilfe eines Postprozessors, der neben der numerischen auch eine graphische Darstellung der Ergebnisse unterstützt.

1.3 Aufgabenstellung

Das mikromechanische Wandlerelement Membran besitzt eine relativ einfache Strukturgeometrie. Aus diesem Grunde ist es eines der bisher am meisten in mikromechanischen Aktoren und Sensoren verwendeten Elemente. Aus der klassischen Mechanik sind für die statischen und dynamischen Eigenschaften dieser Struktur Beschreibungsmethoden bekannt. Diese beschränken sich jedoch meist auf lineares Bauteilverhalten oder berücksichtigen die für den mikromechanischen Anwendungsfall relevanten Effekte (Materialanisotropie, Einspannungsbedingungen) überhaupt nicht.

In der Arbeit soll mit Hilfe des FEM-Programmes ANSYS die Wirkung verschiedener äußerer Einflüsse auf das dynamische Verhalten eines solchen Membranelementes untersucht werden. Ziel ist dabei die Aufstellung von analytischen Zusammenhängen zur Beschreibung eines frequenzanalogen Drucksensors, der die sich bei Druckbeaufschlagung ändernde Eigenfrequenz der Membran als Maß für die Druckgröße verwendet.

Die Eigenfrequenzen und -schwingungsformen im unbelasteten Falle dienen der Charakterisierung des Elementes. Durch Vergleich entsprechend verschiedener Modelle wird der Einfluß des anisotropen Materialverhaltens und der Einspannungsart (fest, lose) untersucht. Aus der Simulation von Membranen verschiedener Abmessungen unter Druckbeaufschlagung können analytische Beschreibungen für diesen Einzelzusammenhang gefundenen werden. Im Anschluß sollen durch entsprechende Untersuchungen die Wirkungen weiterer Einflüsse wie z.B. Temperatur und Membranvorspannungen auf Eigenfrequenz und Frequenzverhalten geprüft werden. Um die für die Sensorfunktion wesentlichen Dämpfungseffekte zu erfassen, muß von gemessenen Schwingungsgüten ausgegangen und diese im FEM-Modell eingebunden werden. Daher sollten die durch Simulation gefundenen Zusammenhänge durch experimentelle Messungen verifiziert werden.

2 Einfluß der Modellparameter auf das dynamische Verhalten

2.1 Problemstellung

Zur Bewertung der mit FE-Modellierung gewonnenen Ergebnisse ist die Kenntnis der Folgen von im verwendeten Simulationsmodell getroffenen Idealisierungen nötig. Aus diesem Grunde werden für eine unbelastete, fest eingespannten Membran mit der Kantenlänge a und der Membrandicke h verschiedene FE-Modelle aufgestellt. Diese variieren in Finite-Element-Typ, Symmetrieeigenschaften, Materialkennwerten (isotrop, orthotrop, anisotrop) und Einspannungsart.

Für jede Modellvariante werden mittels einer dynamischen Analyse (KAN,2 = Modalanalyse) Eigenfrequenzen und -formen bestimmt. Die so gewonnenen Eigenfrequenzen werden mit den Ergebnissen analytischer Rechnungen und untereinander verglichen. Daraus können quantitative Schlüsse auf Abweichungen der Ergebnisse in Abhängigkeit der einzelnen Modellparameter gezogen werden.

2.2 Analytische Zusammenhänge

Die Grundlage zur Beschreibung des mechanischen Elementes Membran bilden die Kirchhoffsche und die Mindlinsche Theorie der Platten [Tim70], [Bat86]. Diese behandeln ebene Elemente, deren lateralen Abmessungen a wesentlich größer als ihre Dicke h sind ($a/h > 10$), [Ble84]). Dabei wird unterschieden zwischen

- Membran: biegeschlaffes Element; besitzt nur Normal- und Schubspannungen zur Lastabtragung, die parallel zur Membranoberfläche verlaufen (Membranspannungszustand);
- Platte: biegsteifes Element; besitzt zusätzliche Quer- und Biegenormalspannungen (Biegespannungszustand);
- Schale: Membran oder Platte mit gewölbter Oberfläche [Dub87].

Membranen liegen vor bei extrem dünnen Elementen, deren Dicke im Verhältnis zur lateralen Ausdehnung vernachlässigt werden kann. Platten haben eine endliche Dicke.

Aus der die Bewegung eines frei schwingenden Feder-Masse-Systems ohne Dämpfung beschreibenden Differentialgleichung

$$m \frac{\delta^2 d}{\delta t^2} + cd = 0 \quad \text{mit } d = \text{Auslenkung} \quad (2.1)$$

*m = Masse
c = Federkonstante*

ergibt sich mit dem Lösungsansatz $d(t) = d_0 \sin(\omega t)$ die Eigenfrequenz ω des Systems mit $\omega^2 = c/m$.

Für ein diskretisiertes Mehrmassensystem mit n Massen als Näherung der kontinuierlich verteilten Gesamtmasse ergibt sich ein System von n Gleichungen vom Typ (2.1) und entsprechend n Eigenfrequenzen. Bei einer räumlichen Anordnung der diskreten Massen ergibt sich für die Auslenkung d zusätzlich zur Zeit- eine Ortsabhängigkeit. Diese gibt die zur jeweiligen Eigenfrequenz gehörende Schwingungsform (Eigenmode) wieder. Die Lösung hat dann die Form:

$$d(x, y, t) = d(x, y) \cos(\omega_n t) \quad (2.2)$$

Der Index n bezeichnet den Schwingungsmodus. In Abhängigkeit von den Randbedingungen ist Gleichung (2.1) geschlossen lösbar oder nicht. Für eine quadratische, fest eingespannte Platte ist keine geschlossene Lösung möglich [Ble84]. Diese erfolgt deshalb über numerische Näherungsverfahren nach der Ritzschen Methode ([Ble84], [You50]) oder dem Verfahren nach Galerkin ([Pon91]).

Für die Eigenfrequenzwerte wird in [Ble84] angegeben:

$$f_{ij} = \frac{\lambda_{ij}^2}{2 \pi a^2} \sqrt{\frac{Eh^2}{12 \rho (1-\nu^2)}} \quad (2.3)$$

mit E : isotroper Elastizitätsmodul,
 ν : Poissonzahl,
 a,h : Seitenlänge, Dicke der Membran,
 i,j : Anzahl der Halbwellen in x- bzw. y-Richtung,
 und ρ : Dichte (Materialhomogenität angenommen)

Die Konstante λ hängt von den Einspannungsbedingungen und dem Seitenverhältnis der

Membran ab und wird auch als normierte Eigenfrequenz des jeweiligen Schwingungsmodes bezeichnet.

Für eine quadratische, homogene, fest eingespannte Membran sind in Tabelle 2.1 die normierten Eigenfrequenzen angegeben. Die zugehörigen Modenbilder sind in Anhang 2.1 abgebildet.

Tabelle 2.1: normierte Eigenfrequenzen λ_{ij}

		λ^2_{ij}	λ^2_{ij}	λ^2_{ij}
Material:		isotrop	isotrop	anisotrop
Literatur:		[Ble84]	[Pon91]	[Pon91]
Mode ij				
1	11	35,99	35,99	35,16
2	21	73,41	73,39	71,91
3	12	73,41	73,39	71,91
4	22	108,30	108,22	104,35
5	31	131,60	131,78	130,09
6	13	132,20	132,41	130,67
7	32	165,15	165,16	159,73
8	23	165,15	165,16	159,73
9	33	---	220,32	211,34

Dabei bezeichnet der Zusatz "isotrop" Lösungen für isotropes Materialverhalten, während "anisotrop" die richtungsabhängigen Materialeigenschaften des Siliziumkristalles berücksichtigt.

In [Ble84] ist zusätzlich eine nach Rayleigh über Energieüberlagerung hergeleitete rekursive Näherungsformel angegeben, die die Eigenfrequenzen auf etwa 5% genau ermittelt:

$$f_{ij} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{G_{1i}^4 + G_{2j}^4 + 2J_{1i}J_{2j} + 2\nu(H_{1i}H_{2j} - J_{1i}J_{2j})}{a^4 + b^4}} \sqrt{\frac{E h^3}{12\gamma(1-\nu^2)}} \quad (2.4)$$

Für eine quadratische Membran mit $a=b$ sowie $\gamma=\rho h$ ergibt sich

$$f_{ij} = \frac{\pi h}{2a^2} \sqrt{\frac{E}{12\rho(1-\nu^2)}} \sqrt{G_{1i}^4 + G_{2j}^4 + 2J_{1i}J_{2j} + 2\nu(H_{1i}H_{2j} - J_{1i}J_{2j})} \quad (2.5)$$

Dabei sind die dimensionslosen Konstanten $G_{k,n}$, $J_{k,n}$ und $H_{k,n}$ ($k=1,2$; $n=i,j$) abhängig von der Einspannungsart.

Für fest eingespannte Platten gilt:

$$n=1: G_{k,n} = 1,506 ; H_{k,n} = J_{k,n} = 1,248$$

$$n > 1: G_{k,n} = n+0,5 ; H_{k,n} = J_{k,n} = (n+0,5)^2 [1 - 2/((n+0,5)\pi)]$$

wobei $G_{1,n}$, $H_{1,n}$, $J_{1,n}$ für $n=i$ = Halbwellenanzahl in x- Richtung

und $G_{2,n}$, $H_{2,n}$, $J_{2,n}$ für $n=j$ = Halbwellenanzahl in y- Richtung

einzusetzen sind.

Weiterführende Literatur zur Theorie der Eigenschwingungen und -frequenzen von Platten und Schalen findet sich in [Ble84], [Gio82], [You50], [Tim90], [Mei86], [Tim70].

2.3 Verwendete FE-Modelle

Für die vorgegebene quadratische, fest eingespannte Silizium-Membran mit der Seitenlänge $a=9200\mu\text{m}$ und der Dicke $h=100\mu\text{m}$ wurden jeweils die ersten zwölf Eigenfrequenzen berechnet. Die die dazu verwendeten, in Tabelle 2.2 aufgelisteten und in den Bildern 2.1-2.3 abgebildeten 21 unterschiedlichen FE-Modelle unterscheiden sich in der Dimension der Elemente (Schalen bzw. Volumenelemente), den speziellen ANSYS-Elementtypen (E.typ: STIF nn) und den damit verbundenen Elementansatzfunktionen, den Materialkennwerten und der Symmetrieeigenschaften. Um den Einfluß der Einspannung zu ermitteln wurde die unendlich steife Einspannung (fest) bei Schalenmodellen mit der einer endlichen steifen Bulkmaterialieinspannung (90° bzw. $54,7^\circ$ Winkel) verglichen.

Bild 2.1: Modelle 1 bis 5

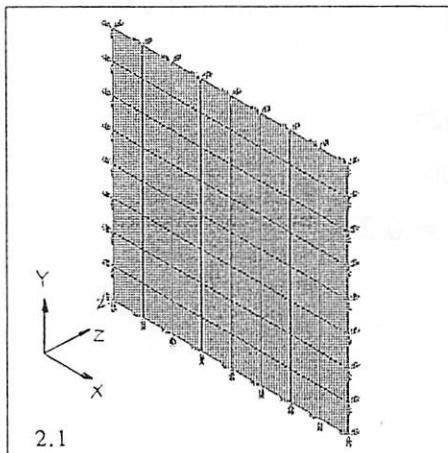


Bild 2.2: Modelle 6 bis 16

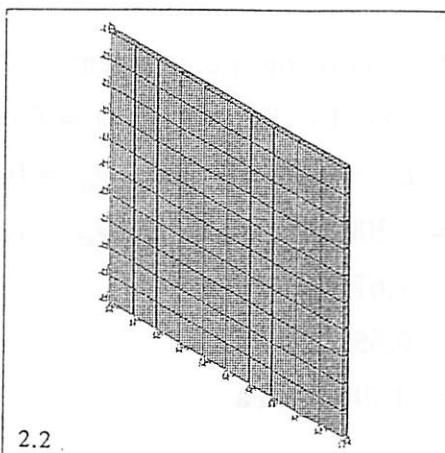


Bild 2.3: Modelle 17 bis 21

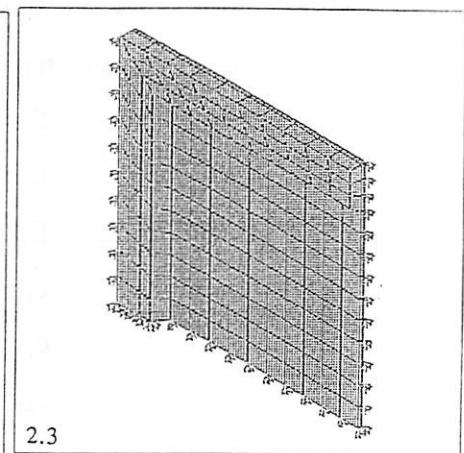


Tabelle 2.2: Übersicht der berechneten FE-Modelle

Nr.	Dim.	E.typ	Material	Symmetrie	Elemente	Knoten	
1	2D	43	E, ν	Vollmem.	361	400	
2	2D	43	ortho	Vollmem.	361	400	
3	2D	93	E, ν	Vollmem.	361	1160	
4	2D	93	ortho	Vollmem.	144	481	
5	3D	45	E, ν	Halbmem.	276	624	einlagig
6	3D	45	ortho	Halbmem.	276	624	
7	3D	95	E, ν	Halbmem.	128	1019	
8	3D	95	ortho	Halbmem.	276	2110	
9	3D	64	aniso	Vollmem.	529	1152	
10	3D	45	E, ν	Halbmem.	384	612	dreilagig
11	3D	45	ortho	Halbmem.	570	880	
12	3D	95	ortho	Halbmem.	144	941	
13	3D	64	aniso	Viertelmem.	192	324	
14	3D	64	aniso	Halbmem.	570	880	
15	3D	64	aniso	Vollmem.	588	900	
16	3D	64	aniso	Vollmem.	1587	2304	Referenzmodell

Variation der Einspannungsart:

17	3D	64	aniso	Viertelmem.	256	578	fest
18	3D	64	aniso	Viertelmem.	960	1700	bulk (90°)
19	3D	64	aniso	Viertelmem.	672	1188	bulk (54,7°)
20	3D	64	ortho	Viertelmem.	960	1700	bulk (90°)
21	3D	64	aniso	Viertelmem.	960	1700	bulk (54,7°)

Die jeweils verwendeten Materialkennwerte betragen:

- a.) isotrop: $E = 1,689 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ $\nu = 0,0625$
- b.) orthotrop: $E_x = E_y = 1,689 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ $\nu_{xy} = 0,0625$
 $E_z = 1,300 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ $\nu_{xz} = \nu_{yz} = 0,278$
- c.) anisotrop: $c_{11} = 1,674 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$
 $c_{12} = 0,652 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$
 $c_{44} = 0,796 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$

Die Komponenten c_{ij} des Elastizitätsmoduls für Silizium beziehen sich auf die (100)-Kristallrichtung, d.h. das Koordinatensystem der finiten Elemente wurde um 45° (parallel zur (110)-Richtung) bezüglich der Z-Achse gedreht. Ein Vergleich der anisotropen Rechnungen mit den isotropen ergibt, daß in guter Näherung für (100)-orientierte, entlang der (110)-Kante ausgerichtete Silizummembranen mit den isotropen Materialkennwerten $E = 1,689 \cdot 10^{11}$ Pa und $\nu = 0,0625$ sowohl statische als auch dynamische Problemberechnungen durchgeführt werden können.

2.4 Ergebnisse

2.4.1 Allgemeine Beobachtungen

Aus dem Vergleich der Ergebnisse der Simulationen (Anhang 2.2) ergeben sich Aussagen zum qualitativen Verhalten der berechneten Eigenfrequenzen in Abhängigkeit vom verwendeten Modell.

Ist das Modell zu grob vernetzt (Modelle 10,15), so sind die berechneten Eigenfrequenzen um einen erheblichen Betrag größer als die mit den übrigen Modellen ermittelten. Die so modellierte Membran erscheint wesentlich zu steif. Aus diesem Grund sind die Ergebnisse dieser Modelle aus der quantitativen Auswertung herauszunehmen. Um diesen Effekt zu vermeiden, empfiehlt sich ein Verhältnis von Kantenlänge zu Elementgröße von größer zehn. Bei Reduzierung des Modells auf eine Halb- bzw. Viertelmembran unter Zuhilfenahme der Symmetriebefehle des ANSYS-Programmes wird ein Teil der Eigenfrequenzen nicht mehr berechnet (siehe Anhang 2.2). Dies kann Verfälschung der berechneten Frequenzen zur Folge haben. Insbesondere können unsymmetrische Schwingungsformen trotz der Berücksichtigung anisotropen Materialverhaltens nicht erfaßt werden. Die damit ermittelten Amplituden sind aus dem gleichen Grund nicht mit denen des Vollmodells vergleichbar.

Im Unterschied zu einlagigen Modellen tritt bei mehrlagigen eine größere Differenz zwischen den jeweils symmetrischen Moden (z.B. f_{12}, f_{21}) auf, wobei eine der Frequenzen dem theoretischen Wert entspricht, die andere in der Regel höher liegt. Hervorgerufen wird dies durch Schwingungsanteile in lateraler Richtung, die durch einlagige Modelle nicht erfaßt werden. Dieser Effekt wird u.a. durch eine Deformation des Modenbildes sichtbar wird. In der Realität können Unsymmetrien im Modenbild auch durch Material- und Dicken-

inhomogenitäten hervorgerufen werden.

Eine Klassifizierung der zur Eigenfrequenzfolge gehörenden Modenbilder erweist sich als schwierig. In der Theorie wird deshalb das jeweilige Modenbild f_{ij} als Überlagerung der Halbwellen i in x-Richtung bzw. j in y-Richtung interpretiert (siehe Anhang 2.1). Die dabei theoretisch existierenden Varianten werden durch konkrete Randbedingungen (Einspannung) eingeschränkt, so daß zum Beispiel das Modenbild f_{21} einer fest eingespannten Membran nicht gleich dem einer lose gelagerten ist. Die Reihenfolge der Modenbilder muß nicht immer mit der nach Eigenfrequenzgröße geordneten Frequenzfolge übereinstimmen (z.B. $f_{33} > f_{41}, f_{14}$).

2.4.2 Quantitative Ergebnisse

Durch Vergleich der simulierten Eigenfrequenzen untereinander können Aussagen über den prozentualen Modellfehler in Abhängigkeit des jeweiligen varierten Modellparameters getroffen werden.

Zum Begriff "Fehler" ist zu bemerken, daß kein im eigentlichen Sinne exakter Bezugswert für einen Fehler existiert. Alle Simulationsmodelle (einschließlich der analytischen Lösung des Differentialgleichungssystems) sind Näherungen der Realität. Je nach Anzahl der in das Modell einbezogenen Parameter gibt es in mehr oder weniger guter Näherung das Verhalten des realen Objektes wieder. Als Vergleichsbasis wurde deshalb das die meisten Parameter berücksichtigende und mit dem höchsten Vernetzungsaufwand erstellte Modell 16 gewählt. Zum anderen ist das Verhalten eines realen Objektes nur bis zu einem bestimmten Genauigkeitsgrad bestimmbar. Die Meßwerte schwanken selbst bei idealen Meßbedingungen auf Grund nicht quantitativ zu erfassender Material- und Technologieabweichungen (Kristallversetzungen, Ätzungsgenauigkeiten etc.) um einen Mittelwert. Abschätzungen ergeben, daß die dadurch verursachte Ungenauigkeit etwa mit 3% anzunehmen ist. Ein innerhalb dessen liegender Wert kann somit als genau angenommen werden. Weitere Modellverfeinerungen zur Genauigkeitserhöhung über diese Schranke hinaus erscheinen daher wenig sinnvoll. Die angegebenen prozentualen Fehler sind somit als Abweichungen der Modelle untereinander zu verstehen und nicht als Grad ihrer Übereinstimmung mit der Realität.

Bildet man das statistische Mittel aus allen errechneten Werten, erhält man eine Streuung, die je nach Schwingungsmodus zwischen 1 und 4,3% liegt.

Einzelne extreme Abweichungen sind durch zu grobe Vernetzung verursacht; im übrigen Mittel ist die Abweichung zwischen den Modellen kleiner als $\pm 5\%$.

Dabei ist zu beobachten, daß bei dem Grundmodus (Mode 11) die prozentuale Abweichung am kleinsten ist. Je höher der Modus, um so größer werden die Abweichungen. Zu erklären ist dies damit, daß die durch Modellvariation auftretenden Unterschiede (isotrop \leftrightarrow anisotrop, einlagig \leftrightarrow mehrlagig, 2-D \leftrightarrow 3-D usw.) sich in ihren Wirkungen (Überlagerungen, geänderte Steifigkeiten) erst bei höheren Schwingungsmoden deutlicher auswirken. Niedrige Frequenzen entsprechen eher noch dem in der Theorie angenommenen Idealfall einer "Platte".

In Tabelle 2.3 sind die für das dynamische Verhalten des simulierten Objektes in Abhängigkeit der in das Modell einbezogenen Parameter auftretenden prozentualen Abweichungen vom Referenzmodell dargestellt. Die Basis für die Prozentwertermittlung ist dabei immer der kleinere Absolutwert.

Die Angaben selbst sind als obere Fehlerschranke zu sehen. Auf Grund der Vielzahl der sonst nötigen Rechnungen können die Werte nicht statistisch belegt werden. Da die Abweichungen in der Regel erst bei höheren Moden relevante Größen erreichen, sind zum Vergleich in Klammern die Werte für den Grundmodus (f_{11}) angegeben.

Weitere Fehlereinflüsse, wie z.B. das Auftreten von Überlagerungen durch Querschwingungen bei dreilagigem Modell oder das Wegfallen von Moden bei Viertel- oder Halbmembranmodellen sind nicht berücksichtigt.

Mit der Annahme, daß das Modell 16 innerhalb des oben genannten 3%-Bereiches liegt (d.h. höchste Genauigkeit besitzt), kann davon ausgehend die obere Fehlerschranke für ein einfacheres Modell durch Addition der Relativfehler erhalten werden. Diese Schranke liegt weit über dem tatsächlichen Wert.

2.5 Folgerungen für das zu verwendende FE-Modell

Das im Anwendungsfall zu verwendende Modell hängt ab von der geforderten Genauigkeit und den zu untersuchenden Effekten.

Für eine einfache Überschlagsrechnung genügt mit hinreichender Genauigkeit (Abweichung < 10%) die analytische Berechnung nach den Gleichungen (2.3) oder (2.4).

Zweidimensionale Modelle mit den Elementtypen STIF43 oder STIF93 eignen sich zu idealisierten bildlichen Darstellungen der Schwingungsmoden. Die Genauigkeit der Eigenfrequenzen ist in etwa gleich der der analytischen Rechnungen.

Bei genaueren Anforderungen empfiehlt sich ein dreidimensionales Modell mit mehreren Lagen (mindestens drei), da einlagige Modelle in der Regel zu niedrige Frequenzwerte ergeben. Dafür können zwei Elementtypen verwendet werden, STIF 45 (mit orthotropen Materialeigenschaften, Modell 11) und STIF 64 (anisotrope Materialeigenschaften, Modelle 14,16). Die mit dem Element STIF 45 berechneten Eigenfrequenzen liegen um etwa 3% höher als die mit STIF 64 (Modell 16) ermittelten.

Ob ein Voll-, Halb- oder Viertelmodell der Membran (mit Symmetriebedingung) verwendet wird, hängt von der vertretbaren Rechenzeit (Modelle 11,14: mittel, Modell 16: hoch) und der verfügbaren Speicherkapazität im Verhältnis zur gewünschten Genauigkeit ab.

2.6 Dynamisches Verhalten unter statischer Belastung

Bei der Simulation des dynamischen Verhaltens einer durch eine Last statisch verformten Membran haben Modellvereinfachungen für die statische Analyse ebenfalls Abweichungen des Ergebnisses zur Folge. Aus diesem Grunde wurden die Modelle 17,18 und 19 mit einem in drei Stufen variiertem Druck beaufschlagt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2.4 dargestellt. Der Vergleich der Auslenkungen ergab zwischen rechtwinkliger und schräger Einspannung keine Unterschiede. Die Abweichung zum fest eingespannten Modell ist kleiner als 4%.

Für die Vergleichsspannung SIG1 ergibt das Modell 17 eine Abweichung größer als 17% gegenüber dem Modell 19. Zwischen den Modellen 18 und 19 ist die Abweichung kleiner als 1%.

Für das für die weiteren Simulationen zu verwendende Modell sind für die statische Analyse die Werte der Auslenkung unter Drucklast wesentlich. Für die folgenden dynamischen Simulationen ist daher eine hohe Genauigkeit der simulierten Werte erforderlich, da aus diesen analytische Zusammenhänge abgeleitet werden sollen. Da nicht alle Eigenfrequenzen berechnet werden sollten, bietet sich ein zu Modell 19 adäquates Modell an.

Tabelle 2.3 Vergleich der Modellparameterinflüsse auf die Eigenfrequenzen

Vernetzungsgüte:

- bei zu grober Finite-Elemente-Vernetzung beträgt der Fehler > 20 %
- bei feiner Vernetzung, d.h. Elementlänge/Membranseitenlänge < 1/10, ist der Restfehler < 3 %

Einspannungsart:

- fest \Leftrightarrow Rand rechtwinklig: < 1,5 %
- Rand rechtw. \Leftrightarrow Rand 54,74°: < 0,6 %
- fest \Leftrightarrow Rand 54,74°: < 2,3 %

Materialkennwerte:

- isotrop \Leftrightarrow orthotrop: < 1,3 % (0,1 %)
- orthotrop \Leftrightarrow anisotrop: < 3,0 % (2,9 %)
- isotrop \Leftrightarrow anisotrop: < 3,1 % (3,1 %)

Membransymmetrie:

- Viertelmem. \Leftrightarrow Halbmem.: < 3,6 % (1,8 %)
- Halbmem. \Leftrightarrow Vollmem.: < 0,2 % (0,2 %)
- Viertelmem. \Leftrightarrow Vollmem.: < 4,0 % (1,6 %)

Elementlagen: bei Volumenmodellen

- einlagig \Leftrightarrow dreilagig: 3,1 % (1,6 %)

Grundmodell:

- analytisch \Leftrightarrow FEM (2D): 5,5 % (0,1 %)
- FEM (2D) \Leftrightarrow FEM (3D): 4,1 % (0,8 %)
- analytisch \Leftrightarrow FEM (3D): 9,8 % (0,9 %)

Tabelle 2.4 Vergleich von Spannungen und max. Durchbiegung bei Druckbeaufschlagung

Druck in kPa	Modell Nr.	σ_x _{min/max} in MPa	σ_z in MPa	SIG1 in MPa	uz in μm
1	17	-2,38	-0,017	2,38	0,69
		+2,38	+0,017		
18		-2,07	-0,186	2,03	0,71
		+2,03	+0,074		
19		-2,07	-0,211	2,01	0,72
		+2,01	+0,088		
9	17	-21,4	-15,6	21,5	6,21
		+21,4	+0,155		
18		-18,6	-1,53	18,3	6,39
		+18,3	+0,674		
19		-18,6	-1,92	18,2	6,44
		+18,2	+0,798		
16	17	-37,6	-0,278	38,4	11,0
		+38,4	+0,276		
18		-32,7	-2,84	32,8	11,4
		+32,8	+1,21		
19		-32,7	-3,52	32,6	11,5
		+32,6	+1,45		

mit:

- σ_x , σ_y , σ_z : Maximalspannungen in x-, y-, z-Richtung; $\sigma_x = \sigma_y$
- SIG1 : Maximalwert der Vergleichsspannung (nach Hauptspannungshypothese)
- uz : maximale Durchbiegung in z-Richtung

3 Eigenfrequenzverschiebung unter Druckeinwirkung

3.1 Überblick

3.1.1 Problemstellung

Das mikromechanische Grundelement "Membran" soll unter Benutzung der Ergebnisse des zweiten Abschnittes auf seine Eignung als frequenzanaloges Sensorelement untersucht werden. Ziel ist eine Beschreibung des Frequenzverhaltens einer quadratischen, fest eingespannten Siliziummembran unter einer Belastung durch eine Flächenlast, in diesem Falle einem Druck. Dabei sollen aus den FEM-Simulationsergebnissen analytische Zusammenhänge gewonnen und überprüft werden, die dieses Verhalten beschreiben, um als Dimensionierungshilfe bei der Konstruktion zu dienen.

3.1.2 Lösungsansatz

Eine Änderung der Eigenfrequenz wird durch eine Versteifung der Platte verursacht (sog. Spannungsversteifung). Die Ursache dafür sind Zugspannungen in der Mittelebene der Platte parallel zur Oberfläche, die im linearen Modell vernachlässigt werden. Sie treten bei großer Auslenkung der Membran auf, sind also vom Grad der Deformation abhängig, nicht aber von der Ursache derselben. Es ist also prinzipiell gleich, ob eine Mittenauslenkung d durch Druck, Beschleunigung oder andere mögliche Lasten entstanden ist, wesentlich ist ihr Betrag. Im vorliegenden Fall wird die Untersuchung auf Grund der Aufgabenstellung auf eine Druckursache beschränkt.

Aus diesen Überlegungen folgt eine Zweiteilung des Zusammenhangs und damit der Untersuchungen:

- Mittenauslenkung d als Funktion des einwirkenden Druckes p (statisches Problem)
- Frequenzverschiebung Δf als Funktion der Mittenauslenkung d (dynamisches Problem)

Für b) kann auch der Zusammenhang Eigenfrequenzverschiebung Δf als Funktion der inneren Membranspannung σ_M aufgestellt werden. Da aber eine Auslenkung experimentell leichter als die Membranmittenspannung zu ermitteln ist, wurde auf deren Betrachtung verzichtet.

Durch die Verknüpfung der beiden Einzelzusammenhänge a) und b) können Schlüsse auf das Gesamtverhalten der Eigenfrequenz f_0 als Funktion des Druckes p und der Geometrieparameter a und h gezogen werden.

Insbesondere für die Sensoranwendung sind Bereiche interessant, in denen $f_0=f(p)$ in guter Näherung linear verläuft (Linearitätsfehler < 1 %).

3.1.3 Variationen des Simulationsmodells

Als Grundmodell für die Finite-Elemente-Modellierung dient das einer dreidimensionalen Membran mit realer Einspannung (Böschungswinkel=54,74°) und anisotropem Materialverhalten, wobei nur ein Viertel der Membran dargestellt wird und symmetrische Randbedingungen (Befehl SYMBC) angenommen werden (Bild 2.3). Vernetzt wurde das Modell mit einer mittleren Knoten- und Elementezahl ($N \approx 1000$, $E \approx 500$). Der durch dieses relativ komplexe Modell erhöhte Rechenzeitaufwand (ca. 0,5h je statisch-dynamischer Analyse auf einer DECstation 3100) ist auf Grund der geforderten quantitativ möglichst genauen Aussagen nötig.

Die sich aus Vernetzung, Beschränkung auf ein Viertelmodell und iterativer Näherung ergebende Abweichung dieses Modells ist mit ca. $\pm 3\%$ abzuschätzen (siehe Abschnitt 2). Das Grundmodell wurde in fünf verschiedenen Parameterpaaren (a,h) variiert simuliert, um Aussagen über Abhängigkeiten sowohl vom Geometrieparameter a als auch h zu erhalten.

Die Varianten sind

Modell	a in μm	h in μm	a/h	f_0 (theor.) in kHz
1	9200	100	92	16,674
2	9200	50	184	8,337
3	9200	25	368	4,168
4	4600	50	92	33,348
5	2300	50	46	133,391

Die Abmessungen orientieren sich an bereits gefertigten Membranen und anwendungsrelevanten Größenordnungen ($1 \text{ kHz} < f_0 < 100 \text{ kHz}$).

Zum Aufstellen der analytischen Zusammenhänge gibt es zwei prinzipiell mögliche Heran-

gehensweisen. Zum ersten können sie aus der näherungsweise Lösung der entsprechenden Differentialgleichung abgeleitet, oder zum zweiten durch Regression mittels den aus der Simulation bzw. der Messung erhaltenen, in Zahlenwerten vorliegenden Abhängigkeiten gefunden werden.

Im folgenden wurde nach dem zweiten Prinzip vorgegangen, da die nichttrivialen Lösungen im ersten Fall den Zeit- und Aufgabenrahmen gesprengt hätten. Die Regressionsansätze selbst sind entweder direkt Literaturstellen entnommen oder selbst formuliert worden.

3.2 Membranmittenauslenkung als Funktion des wirkenden Druckes

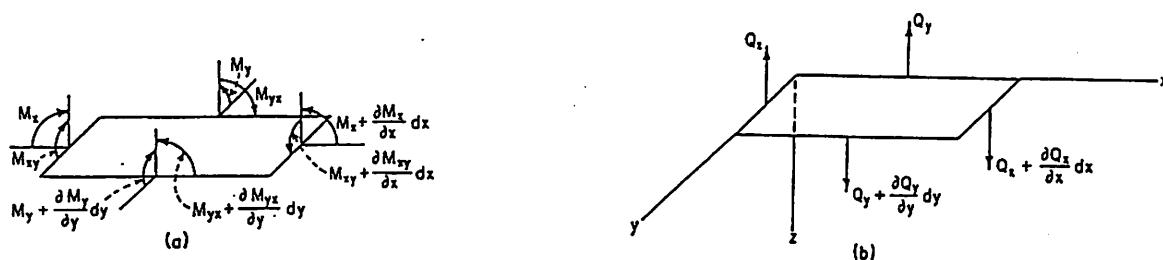
3.2.1 Theoretischer Ansatz

Die Differentialgleichungsansätze für das betrachtete Problem einer unter einer Flächenlast p (Druck) um den Wert $d(x,y)$ ausgelenkten Platte ergeben sich aus Ansätzen aus der Kirchhoffschen Plattentheorie. Unter einer Platte wird dabei ein Element verstanden, dessen laterale Ausdehnung relativ zu dessen Dicke groß ist (siehe Abschnitt 2).

In [Tim70] sind diese für verschiedene Fälle hergeleitet:

1. Sehr dünne Platte bei kleinen Auslenkungen: Es treten keine Spannungen parallel zur Membranoberfläche auf und das Moment um die z-Achse ist Null.

Bild 3.1: Spannungen und Momente nach [Tim70]



Für das statische Gleichgewicht ergeben sich folgende Ansätze (siehe Bild 3.1):

Linienspannungen:

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q_x}{\delta x} dx dy + \frac{\delta Q_y}{\delta y} dy dx + p dx dy &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\delta Q_x}{\delta x} + \frac{\delta Q_y}{\delta y} + p &= 0 ; \quad Q_i = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \tau_{iz} dz ; \quad i=x, y \end{aligned} \quad (3.1)$$

Liniemomente:

$$\begin{aligned} \frac{\delta M_{xy}}{\delta x} - \frac{\delta M_y}{\delta y} + Q_y &= 0 \\ \frac{\delta M_{yx}}{\delta y} + \frac{\delta M_x}{\delta x} - Q_x &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

mit $M_{xy} = -M_{yx}$; $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ folgt:

$$\frac{\delta^2 M_x}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 M_y}{\delta y^2} - 2 \frac{\delta^2 M_{xy}}{\delta x \delta y} = -p \quad (3.3)$$

aus

$$\begin{aligned} M_i &= -D \left(\frac{\delta^2 d}{\delta i^2} + v \frac{\delta^2 d}{\delta j^2} \right) ; \quad i=x, y ; \quad j=y, x \\ M_{xy} &= -M_{yx} = D(1-v) \frac{\delta^2 d}{\delta x \delta y} ; \quad D := \frac{Eh^3}{12(1-v^2)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

folgt der Differentialgleichungsansatz für die Auslenkung $d = d(x, y)$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\delta^4 d}{\delta x^4} + 2 \frac{\delta^4 d}{\delta x^2 \delta y^2} + \frac{\delta^4 d}{\delta y^4} \right] &= \frac{p}{D} \\ \Delta \Delta d &= \frac{p}{D} \quad \text{mit} \quad \Delta d = \frac{\delta^2 d}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 d}{\delta y^2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Mit den entsprechenden Randbedingungen ergeben sich daraus Lösungen, die für kleine Auslenkungen gültig sind, die auftretende Spannungsversteifung bei zunehmender Auslenkung aber nicht berücksichtigen.

2. Eine sehr dünne Platte bei kleinen Auslenkungen mit lateralen Spannungen parallel zur Oberfläche (N_x , N_y , N_{xy}) und lateraler Last $F(X, Y)$.

Mit dem Gleichgewicht eines differentiellen Volumenelementes der Platte

$$\frac{\delta N_x}{\delta x} + \frac{\delta N_{xy}}{\delta y} = 0 ; \quad \frac{\delta N_{xy}}{\delta x} + \frac{\delta N_y}{\delta y} = 0 \quad (3.6)$$

erweitert sich Gleichung (3.5) um einen Anteil "innerer Last":

$$\Delta \Delta d = \frac{1}{D} (p + N_x \frac{\delta^2 d}{\delta x^2} + N_y \frac{\delta^2 d}{\delta y^2} + 2 N_{xy} \frac{\delta^2 d}{\delta x \delta y}) \quad (3.7)$$

Kommt eine äußere Kraft hinzu, erweitert sich der Gleichgewichtsansatz um die beiden Anteile der Kraft in x- und y-Richtung. Gleichung (3.7) erhält einen Anteil "äußerer Last":

$$\Delta \Delta d = \frac{1}{D} (p + N_x \frac{\delta^2 d}{\delta x^2} + N_y \frac{\delta^2 d}{\delta y^2} + 2 N_{xy} \frac{\delta^2 d}{\delta x \delta y} - X \frac{\delta d}{\delta x} - Y \frac{\delta d}{\delta y}) \quad (3.8)$$

3. Eine Platte bei großer Auslenkung (Large Deflection)

In diesem Ansatz werden die inneren Lateralspannungen N_{ij} durch eine Funktion $F(x, y)$ ausgedrückt, die deren Abhängigkeit vom Ort auf der Platte wiedergibt und zum Beispiel durch einen Verformungsverlauf bestimmt sein kann:

$$N_x = h \frac{\delta^2 F}{\delta y^2} ; \quad N_y = h \frac{\delta^2 F}{\delta x^2} ; \quad N_{xy} = -h \frac{\delta^2 F}{\delta x \delta y} \quad (3.9)$$

Mit Gleichung (3.7) folgt:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta d &= \frac{h}{D} \left(\frac{p}{h} + \frac{\delta^2 F}{\delta y^2} \frac{\delta^2 d}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 F}{\delta x^2} \frac{\delta^2 d}{\delta y^2} - 2 \frac{\delta^2 F}{\delta x \delta y} \frac{\delta^2 d}{\delta x \delta y} \right) \\ \Delta \Delta F &= E \left[\left(\frac{\delta^2 d}{\delta x \delta y} \right)^2 - \frac{\delta^2 d}{\delta x^2} \frac{\delta^2 d}{\delta y^2} \right] ; \quad \Delta F = \frac{\delta^2 F}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 F}{\delta y^2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Geschlossene Lösungen existieren für keine der angeführten Differentialgleichungen. Für Gleichung (3.5) gibt es Ansätze über eine Reihenentwicklung, zu den Gleichungen (3.8) und (3.10) einige numerische Lösungen für Spezialfälle, die über die Energiemethode bzw. das Prinzip der virtuellen Verschiebung abgeleitet werden [Tim70].

In der FE-Simulation dagegen können diese Effekte sowie zusätzlich die Anisotropie des Werkstoffes (Differentialgleichungsansatz in [Pon91]) berücksichtigt und Probleme dieser Art numerisch gelöst werden.

3.2.2 Vorgaben und Lösungen

Im wesentlichen werden in der Literatur drei verschiedene Ansätze zur Lösung des Problems für den geforderten statischen Zusammenhang angegeben:

a) Im ersten Falle wird von dünnen Platten kleiner Auslenkung ausgegangen. Die über den Reihenansatz berechnete Lösung zu (3.5) ist dann:

$$d = k_1 \frac{Pa^4}{D} \quad (3.11)$$

Die Konstante k_1 ist in Tabelle 3.1 mit der jeweiligen Literaturquelle angegeben. Die Werte differieren, ohne jedoch signifikante Änderung des Ergebnisses zur Folge zu haben.

Tabelle 3.1: Konstanten k_1

Quelle	[Dub87]	[Gio82]	[Tim70]
k_1	0,00128	0,00133	0,00126

b) Der zweite Ansatz geht von Gleichung (3.11) aus, überlagert dem Verlauf aber noch einen nichtlinearen Anteil LF [Pfe89]:

$$d = k_2 \frac{Pa^4}{D} (1 + LF) \quad (3.12)$$

In [Pfe89] ist für die quadratische, fest eingespannte Platte keine Lösung angegeben. In Anlehnung an dort betrachtete Geometrien wird der nichtlineare Anteil LF mit einem

geometrie- und materialabhängigem Referenzdruck p_0 wie folgt definiert:

$$LF := k_3 \left(\frac{P}{P_0} \right)^n \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

und $P_0 := \frac{h}{a^4} D$

Die Aufgabe besteht im Folgenden darin, die Konstanten k_2 , k_3 sowie n zusammen mit dem Geltungsbereich der Beziehung zu ermitteln.

c) Im dritten Fall ([Ton91], [Cha87]) wird von Gleichung (3.8) ausgehend große Auslenkung angenommen und eine die Randbedingungen erfüllende Lösung angegeben:

$$P = \frac{Eh^4}{4(1-v^2)(\frac{a}{2})^4} [\alpha_1 \frac{d}{3h} + \alpha_2 \frac{4d^3}{h^3}] \quad (3.14)$$

Mit $\alpha_1 = 50,3815$ und $\alpha_2 = 1,5816$ für quadratische Platten (weitere Geometrien siehe [Ton91]) ergibt sich:

$$P = \frac{Eh^4}{(1-v^2)(\frac{a}{2})^4} (4,19847 \frac{d}{h} + 1,5816 \frac{d^3}{h^3}) \quad (3.15)$$

Zusätzlich dazu sind in [Tim70] und [Gio82] Zusammenhänge für die Beziehung $p=p(d)$ im nichtlinearen Fall in graphischer Form angegeben, ohne daraus eine analytische Beziehung abzuleiten.

3.2.3 Ergebnisse

Mit dem Programmsystem ANSYS wurden die in Abschnitt 3.1 beschriebenen Modellvarianten unter einer in Stufen steigenden Drucklast simuliert. Grenzkriterium für die maximale Druckbelastung ist eine maximale Vergleichsspannung SIG1 von etwa 0,3 GPa, die sich an in der Literatur angegebenen Bruchspannungen von 0,1 bis 1 GPa orientiert. Es wurden statische Berechnungen (KAN,0 Analyse) unter Berücksichtigung von großen Auslenkungen (KAY,6,1) und der Spannungsversteifung (KAY,8,1) durchgeführt. Die so

berechneten Kurvenverläufe $p=p(d)$ sind Ausgangspunkt für einen Vergleich mit den analytischen Ansätzen nach 3.2.2 und daraus folgender Bestimmung der gesuchten Konstanten.

Zu a) Mit Gleichung (3.11) wurden die Modellvarianten nach Abschnitt 3.1 analytisch berechnet, wobei die Druckbeaufschlagung mit den gleichen Werte wie die Simulation erfolgte. Verwendet wurde dazu eine mittlere Konstante $k_1=0,0013$ (nach [Dub87]).

Der Vergleich der nichtlinear simulierten Kurve mit der berechneten ergab eine Übereinstimmung bis zu einer relativen Auslenkung $d/h=0,8$ (Fehler 10%), die den linearen Bereich des Zusammenhangs begrenzt.

Zu b) Im Falle des Ansatzes (3.12) sind die Konstanten k_2 , k_3 und n zu bestimmen.

Für sehr kleine Auslenkungen kann angenommen werden, daß der Anteil LF im Ansatz verschwindet. Es ergibt sich damit der dem Ansatz (3.11) ($k_2 = k_1$) adäquate Zusammenhang:

$$d = k_2 \frac{a^4}{D} p \quad (3.16)$$

Eine Regression mit den aus der Simulation gewonnenen Wertepaaren (p,d) für Auslenkungen $d/h < 1/7$ ergaben für k_2 Werte zwischen $0,00122 < k_2 < 0,00140$. Daraus folgt ein mittlerer Wert $k_2 = 0,00136$. Ein Vergleich mit k_1 zeigt Übereinstimmung mit den Werten nach [Gio82], [Tim70] und [Dub87].

Die Ermittlung der Konstanten k_3 erfolgt auf gleichem Wege, wobei das ermittelte k_2 verwendet wird. Für Wertepaare (p,d) bestimmt sich k_3 demzufolge nach der Beziehung:

$$k_3 = \left(\frac{dD}{k_2 a^4 p} - 1 \right) \left(\frac{p_0}{p} \right)^n \quad (3.17)$$

Für $n=1$ ergibt sich ein mittleres $k_3 \approx -0,00024$, für $n=2$ ein $k_3 \approx -0,00005$. Ein Vergleich der Geltungsbereiche zeigt, daß ein $n=1$ günstiger ist und geringere Abweichungen ergibt.

Die Gleichung (3.12) wird damit zu:

$$d = 0,00136 \frac{a^4}{D} p \left(1 - 0,00024 \frac{p}{p_0} \right) \quad (3.18)$$

Zu c) In Beziehung (3.15) sind die randbedingungsabhängigen Konstanten für quadratische, fest eingespannte Platten bereits berücksichtigt. Allerdings wird p in Abhängigkeit von d dargestellt, gefordert ist aber die umgekehrte Beziehung.

Gleichung (3.15) wird deshalb mit Hilfe der Cardanischen Lösungsformel [Bro87] nach d/h aufgelöst:

$$\frac{d}{h} = \sqrt[3]{\frac{p}{2K} + \sqrt{k_a + (\frac{p}{2K})^2}} - \frac{k_b}{\sqrt[3]{\frac{p}{2K} + \sqrt{k_a + (\frac{p}{2K})^2}}} \quad (3.19)$$

mit

$$K = \frac{Eh^4}{(1 - v^2) (\frac{a}{2})^4} \alpha_2$$

und $k_a = \left(\frac{\alpha_1}{36\alpha_2} \right)^3 = 0,6957 ; \quad k_b = \frac{\alpha_1}{12\alpha_2} = 2,658$

Weitere für die Auslenkung fest eingespannter dünner Platten angegebene Gleichungen gehen von einer Membran aus. Dabei wird die Biegesteifigkeit D der Platte vernachlässigt und reine Biegung angenommen. Diese Annahme trifft jedoch auf die betrachteten Modelle nicht zu, so daß weit abweichende Ergebnisse entstehen und die Beziehungen an dieser Stelle nicht weiter betrachtet werden.

3.2.4 Geltungsbereiche und Fehler

Alle drei betrachteten analytischen Zusammenhänge (3.11), (3.12), (3.19) ergeben mit den entsprechenden Konstanten in ihren Geltungsbereichen Ergebnisse mit Abweichungen kleiner $\pm 6\%$ im Vergleich zu den FE-Berechnungen. Dabei sind die relativen Fehler bei kleinen Auslenkungen am größten und verringern sich mit zunehmender Auslenkung.

In den Diagrammen 3.1a-c werden die numerisch mit ANSYS und analytisch mit den Gleichungen (3.12) sowie (3.19) ermittelten Werte für drei verschiedene Geometrien zu p_0 bzw. h normiert dargestellt.

Für die Geltungsbereiche folgt daraus:

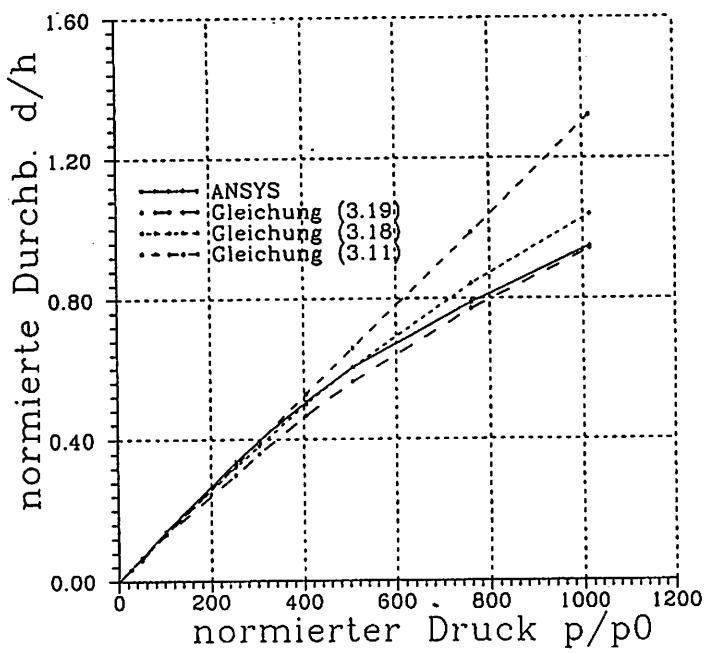


Diagramm 3.1a: Membranmittenauslenkung bei Druck,
a: 9200 μm , h: 100 μm

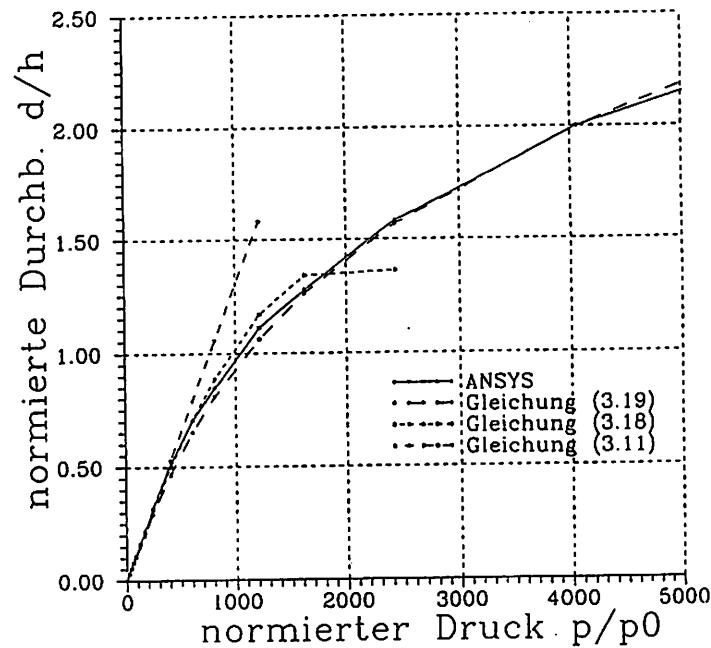


Diagramm 3.1b: Membranmittenauslenkung bei Druck,
a: 9200 μm , h: 50 μm

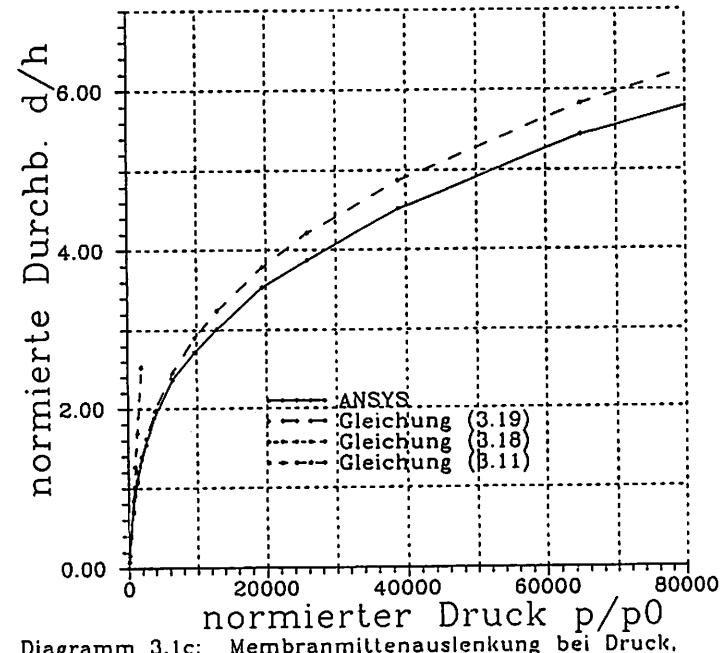


Diagramm 3.1c: Membranmittenauslenkung bei Druck,
a: 9200 μm , h: 25 μm

Gleichung (3.11):

Dieser Zusammenhang gilt erwartungsgemäß bis zu einer Auslenkung von $d/h < 0,8$, d.h. einem Druck p/p_0 bei oben genanntem Fehler. Bei größeren Auslenkungen ergeben sich Abweichungen zu den nichtlinearen Berechnungen von größer als 10%.

Gleichung (3.12):

Durch das Einfügen des nichtlinearen Korrekturgliedes LF in Gleichung (3.11) zur Berücksichtigung der Nichtlinearität wurde der Gültigkeitsbereich (bei gleicher Genauigkeit) bis zu einer Auslenkung $d/h < 1,3$ erweitert. Dann fallen die berechneten Werte sehr stark ab. Eine Erweiterung des Bereiches wäre durch anfügen weiterer Korrekturglieder höherer Potenzen ($\dots \Sigma k_n \cdot (p/p_0)^n$; Polynomannäherung) möglich. Dieser Fall wurde hier aber nicht weiter betrachtet. Der Vorteil dieser Gleichung gegenüber Gleichung (3.19) ist ihre relativ einfache und überschaubare Struktur.

Gleichung (3.19):

Der Geltungsbereich dieser Gleichung ist nicht begrenzt, wobei der relative Fehler bei großer Auslenkung in etwa konstant 6-7% bleibt (siehe Diagramme). Eine Verbesserung der Genauigkeit durch Variation der Materialkennwerte E und ν (begründet in der eigentlichen Anisotropie des hier isotrop angenommenen Materials) bzw. der Konstanten α_1 und α_2 für einzelne Geometrien wurde versucht (siehe Diagramm 3.2). Es zeigte sich jedoch, daß dabei die Werte für andere Geometrien wieder ungenauer wurden. Aus diesem Grunde wurden die zuvor verwendeten Werte für E , ν , α_1 und α_2 als genügend genau beibehalten.

Allgemeine Gesichtspunkte:

Der allgemeine Verlauf des Zusammenhangs Membranauslenkung - Druck ist der einer Potenzreihenentwicklung. Die obere Grenze wird bestimmt durch die Bruchspannung von Silizium (s.o.), hier mit 0,3 GPa angenommen. Im ANSYS-Programm entspricht dies der Vergleichsspannung nach der Hauptspannungshypothese (SIG1). Bis zu einer Auslenkung von etwa $d/h < 1/7$ bis $1/5$ kann d als linear abhängig zu p angenommen werden, für größere Werte wird der Linearitätsfehler größer als 5%.

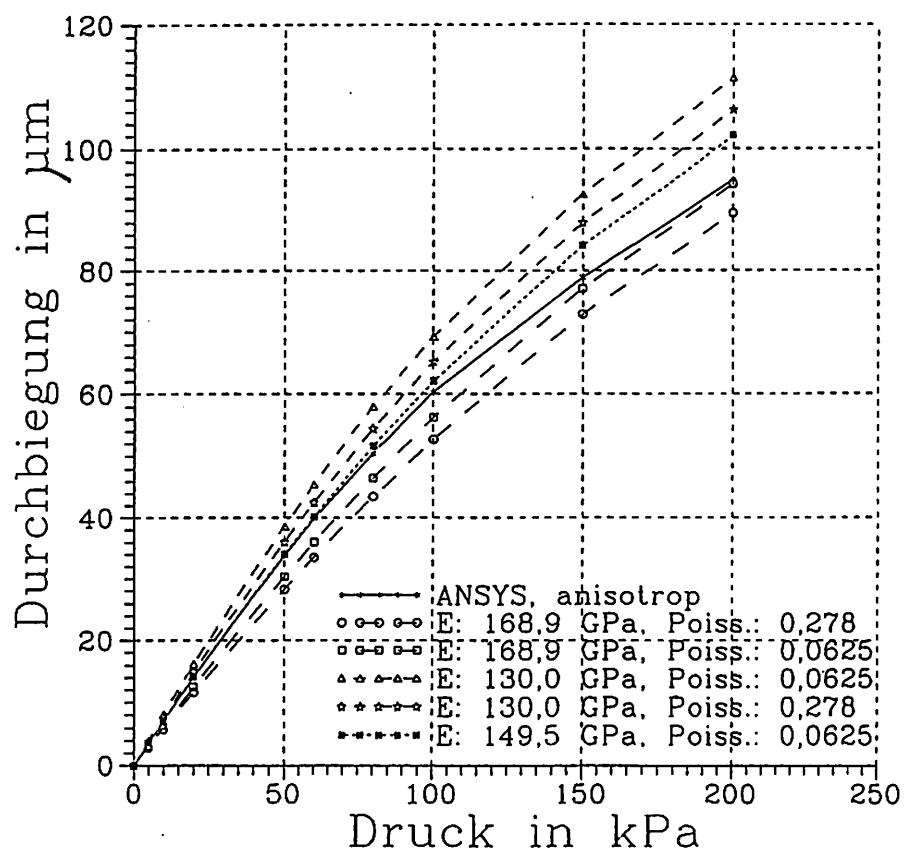


Diagramm 3.2: Membranmittenauslenkung bei Druck,
Materialparametereinfluss

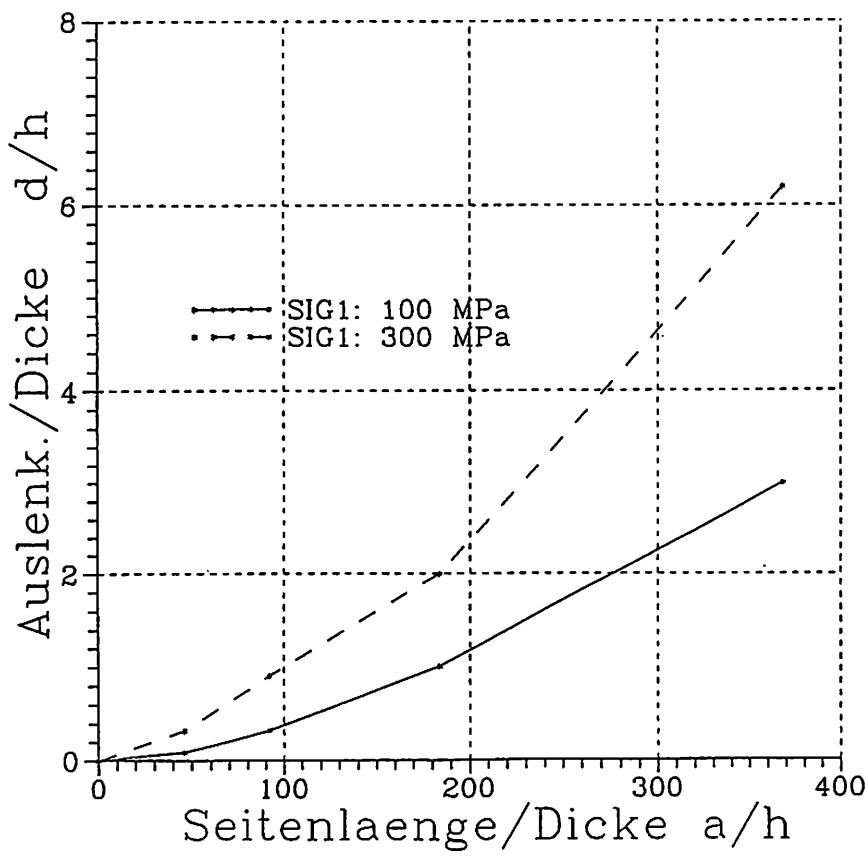


Diagramm 3.3: Maximale Auslenkung bei Bruchspannung
als Funktion des Seiten/Dickenverhältnisses

Der mit $d/h = d/h(p/p_0)$ normierte Verlauf ist mit Abweichungen von $\pm 5\%$ für alle verwendeten Modelle (entsprechend ihres Geltungsbereiches) deckungsgleich.

Dies bedeutet, dass der Verlauf des Zusammenhangs abhängig ist von der Form der Platte und der Art der Einspannung, nicht aber von den Größen a und h bzw. deren Verhältnis a/h . Letzteres bestimmt aber den Wert $d/h = d/h(\text{SIG1}_{\max})$, d.h. bei welcher Auslenkung die Bruchspannung erreicht wird. In Tabelle 3.2 sind für die simulierten Geometrien die zu den maximalen Vergleichsspannungen SIG1_{\max} gehörenden d/h angegeben. In Diagramm 3.3 ist der Zusammenhang graphisch dargestellt.

Tabelle 3.2: Auslenkung bei Bruchspannung

a in μm	h in μm	a/h	$d/h(0,1 \text{ GPa})$	$d/h(0,3 \text{ GPa})$
9200	100	92	0,32	0,9
9200	50	184	1,0	2,0
9200	25	368	3,0	6,2
4600	50	92	0,33	0,9
2300	50	46	0,09	0,32

Je kleiner das Verhältnis a/h ist, bei umso kleineren Auslenkungen wird die Bruchspannung erreicht und umgekehrt. Zu beachten ist bei der Verwendung der Werte, daß das benutzte ANSYS-Modell für Spannungswerte u.U. um den abgeschätzten Faktor zwei bis drei kleinere Werte liefert (siehe Abschnitt 2.7).

3.3 Eigenfrequenzverschiebung als Funktion der Membranmittenauslenkung

3.3.1 Ansätze

Für das dynamische Gleichgewicht einer Platte unter einer Flächenlast p ist in [Pon91] angegeben:

$$\frac{\delta^2 d}{\delta t^2} + \frac{Dh^2}{\rho} \Delta \Delta d = 0 \quad (3.20)$$

Bei Beachtung großer Auslenkung ergibt sich mit den Differentialgleichungen (3.10) der Ansatz:

$$\frac{\delta^2 d}{\delta t^2} + \frac{h^3}{\rho} \left(\frac{p}{h} + \frac{\delta^2 F}{\delta y^2} \frac{\delta^2 d}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 F}{\delta x^2} \frac{\delta^2 d}{\delta y^2} - 2 \frac{\delta^2 F}{\delta x \delta y} \frac{\delta^2 d}{\delta x \delta y} \right) = 0 \quad (3.21)$$

Geschlossene oder numerische Lösungen für dieses System, die eine analytische Darstellung des Zusammenhangs $\Delta f = \Delta f(p)$ erlauben würden, sind nicht trivial und bisher nicht bekannt [Pon91]. Um zu einem diesen Zusammenhang beschreibenden analytischen Gleichung zu kommen, muß zusätzlich zum in Abschnitt 3.2 ermittelten Zusammenhang $d = d(p)$ eine analytische Darstellung der Beziehung $\Delta f = \Delta f(d)$ hergeleitet und diesem überlagert werden.

In [Utt87] ist für die Frequenzänderung in Abhängigkeit von der Membranmittenauslenkung angegeben:

$$f = f_0 \sqrt{1 + c \left(\frac{d}{h}\right)^2} \quad (3.22)$$

wobei c eine von Einspannung und Membranform abhängige Konstante ist und z.B. für kreisförmige, fest eingespannte Membranen mit $c = 1,464$ angegeben wird.

3.3.2 Ergebnisse

Mit dem Programmsystem ANSYS wurde zu den in 3.1.1 genannten fünf Modellen im Anschluß an die statische Simulation eine dynamische Berechnung durchgeführt (Kommando /FREQ), wodurch die durch die Auslenkung d hervorgerufene Versteifung der Platte mit berücksichtigt wird. Es wurden die ersten sechs Eigenfrequenzen berechnet, wobei zu

beachten ist, daß durch das Viertelmodell nicht alle Eigenfrequenzen erfaßt werden (siehe Abschnitt 2.4). Es wurden 300 Schwingungsfreiheitsgrade (MDOF=master degrees of freedom) vorgegeben und mit Spannungsversteifung (KAY,8,1=stress stiffening) gerechnet. Die so erhaltenen Wertepaare ($d, \Delta f$) wurden genutzt, um nach Gleichung (3.22) eine den Zusammenhang beschreibende analytische Gleichung zu erhalten.

Dabei wurde auf zwei Wegen vorgegangen.

Zum einen erfolgte ausgehend von (3.22) mit Hilfe der simulierten Wertepaare (d, f) eine Bestimmung der Konstanten c aus der Beziehung

$$c = \left(\left(\frac{f}{f_0} \right)^2 - 1 \right) \left(\frac{h}{d} \right)^2 \quad (3.23)$$

Die für jedes Wertepaar etwas differierenden c wurden gemittelt und zu einem c_m zusammengefaßt. Dabei ergab sich ein Wert von $c_m = 1,25$.

Zum anderen wurde versucht, mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate eine Gleichung der Form

$$\frac{f}{f_0} = \sqrt{a + b \left(\frac{d}{h} \right)^2} \quad (3.24)$$

möglichst günstig in die Wertepaare-Schar zu legen. Dies gelang für jedes einzelne Modell sehr gut (Korrelationskoeffizient $r=0,9994 \dots 0,9998$), jedoch mit Differenzen zwischen den Geometrievarianten ($a=0,927 \dots 1,006$; $b=1,02 \dots 1,285$).

3.3.3 Geltungsbereiche und Fehler

Die mit den Gleichungen (3.23) und (3.24) errechneten Kurven sind für den ersten Schwingungsmodus in den Diagrammen 3.4a,b im Vergleich mit den durch ANSYS numerisch ermittelten Werten dargestellt. Den Verlauf für höhere Moden zeigt Diagramm 3.5.

a) Kurvenverläufe:

Ein Vergleich der beiden möglichen Beziehungen nach (3.23) und (3.24) mit der durch ANSYS simulierten Kennlinie (Diagramme 3.4a,b) zeigt im Bereich $0 < d/h < 0,7$ einen

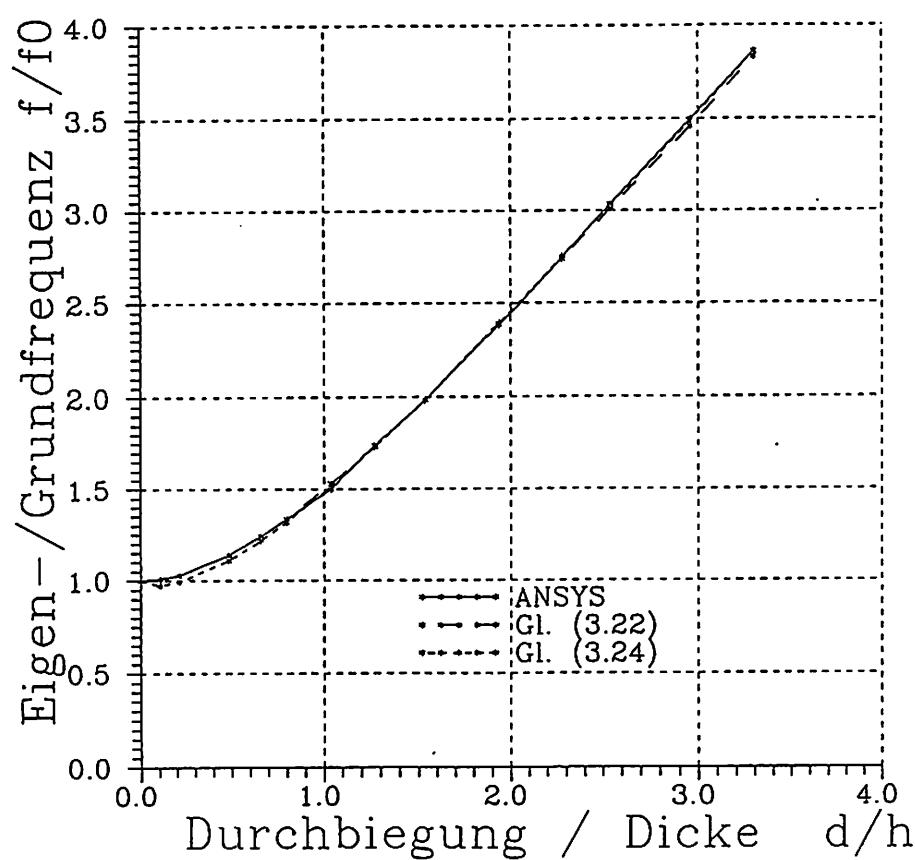


Diagramm 3.4a: Eigenfrequenzverschiebung bei Mittenauslenkung

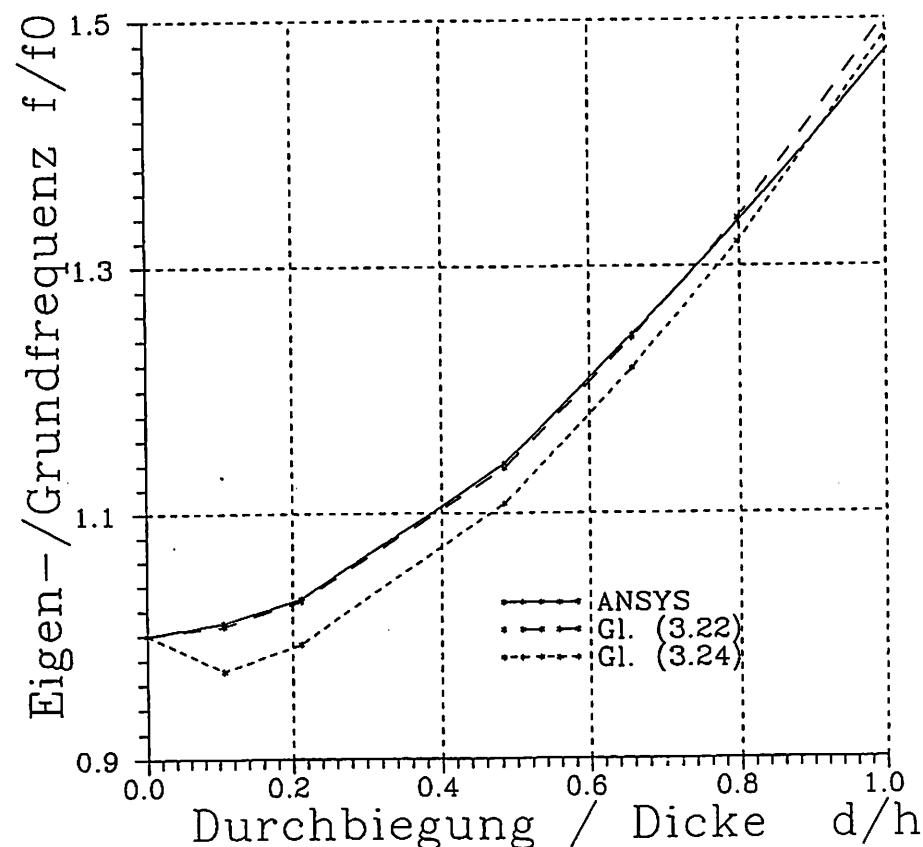


Diagramm 3.4b: Eigenfrequenzverschiebung bei Mittenauslenkung

deutlicheren Fehler für (3.24) von ca. 5% gegenüber (3.23). Im weiteren Verlauf ($d/h > 1,5$) wird dieser zwar kleiner als der für (3.23), beide liegen aber immer noch innerhalb der durch den Modellfehler gesetzten Genauigkeitsgrenze von ca. 3% (siehe Abschnitt 2). Da außerdem (3.24) nur für genau diese Geometrie ($a=9200\mu m$, $h=50\mu m$) zutreffend ist und für andere einen noch größeren Fehler aufweist, wird im weiteren von Beziehung (3.24) ausgegangen.

Der hohe Korrelationskoeffizient r der Regression für jedes einzelne Modell lässt aber darauf schließen, daß die angenommene Form der Regressionsfunktion (3.24) mit dem tatsächlichen Verlauf $\Delta f = \Delta f(d)$ gut übereinstimmt.

b) Geltungsbereiche:

Gleichung (3.23) kann mit $c=1,25$ für den gesamten Bereich als mit einem Fehler kleiner 5% behaftet als gute analytische Näherung der Kennlinie gelten. Einschränkungen ergeben sich u.U. aus dem Verhältnis a/h . Je kleiner dieses wird, um so größer ist die Abweichung von Gleichung (3.23) zur Simulation Diagramm 3.6. Als Grenze ist etwa ein Verhältnis von $a/h=50$ anzugeben. Dort beträgt der Fehler 10%. Zu erklären ist dieses Verhalten mit einer merklichen Abweichung der Geometrie vom theoretischen Modell einer Platte.

c) Fehler:

Für eine Auslenkung $d/h < 0,8$ ergeben sich für das nach (3.22) bestimmte c stärkere Abweichungen von Mittelwert 1,25 als für größere Auslenkungen. Da der durch c beeinflußte Anteil in (3.23) in diesem Bereich im Verhältnis zur Grundeigenfrequenz verschwindend klein ist, ist der Fehler des Ergebnisses f ebenfalls klein und f somit hinreichend genau (3%).

Im Bereich $d/h > 2$ nähert sich die Funktion einer Geraden an, da der durch c beeinflußte Anteil überwiegt. Der Verlauf kann dann näherungsweise beschrieben werden mit:

$$f = f_0 \sqrt{1,25} \frac{d}{h} \quad (3.25)$$

Liegt d/h zwischen 0,8 und 2, so ist der relative Fehler am größten (bis zu 7%).

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß der Fehleranteil im Verhältnis zum Absolutwert der Frequenz immer klein ist (< 10%). Allerdings ist zu beachten, daß bei kleinem Ver-

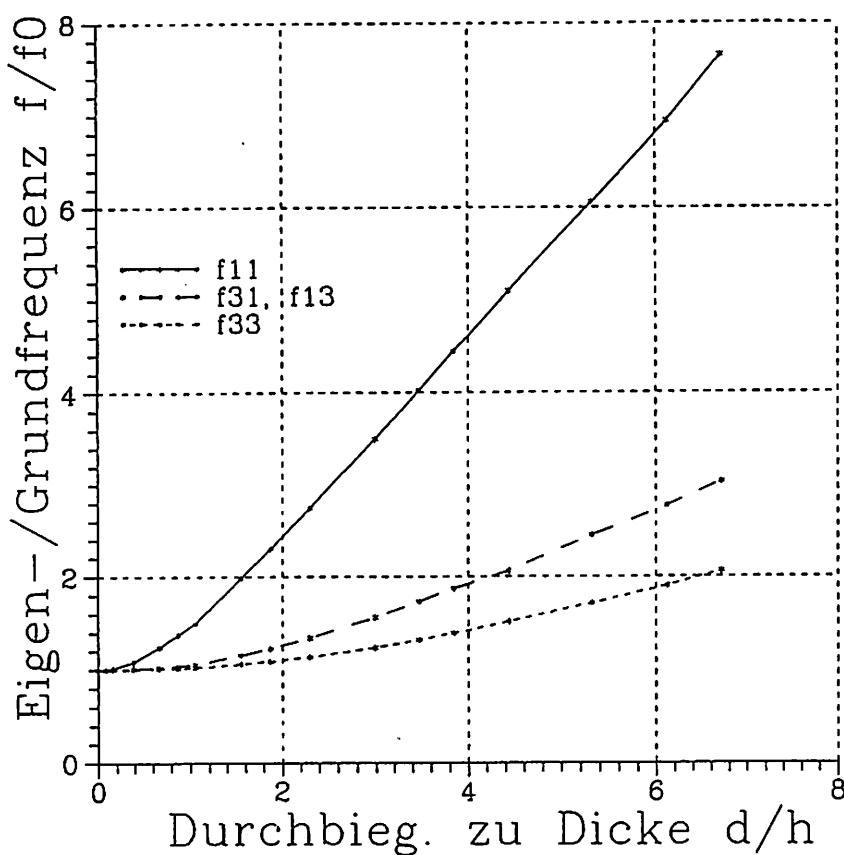


Diagramm 3.5: Eigenfrequenzverschiebung höherer Moden bei Membranmittenauslenkung

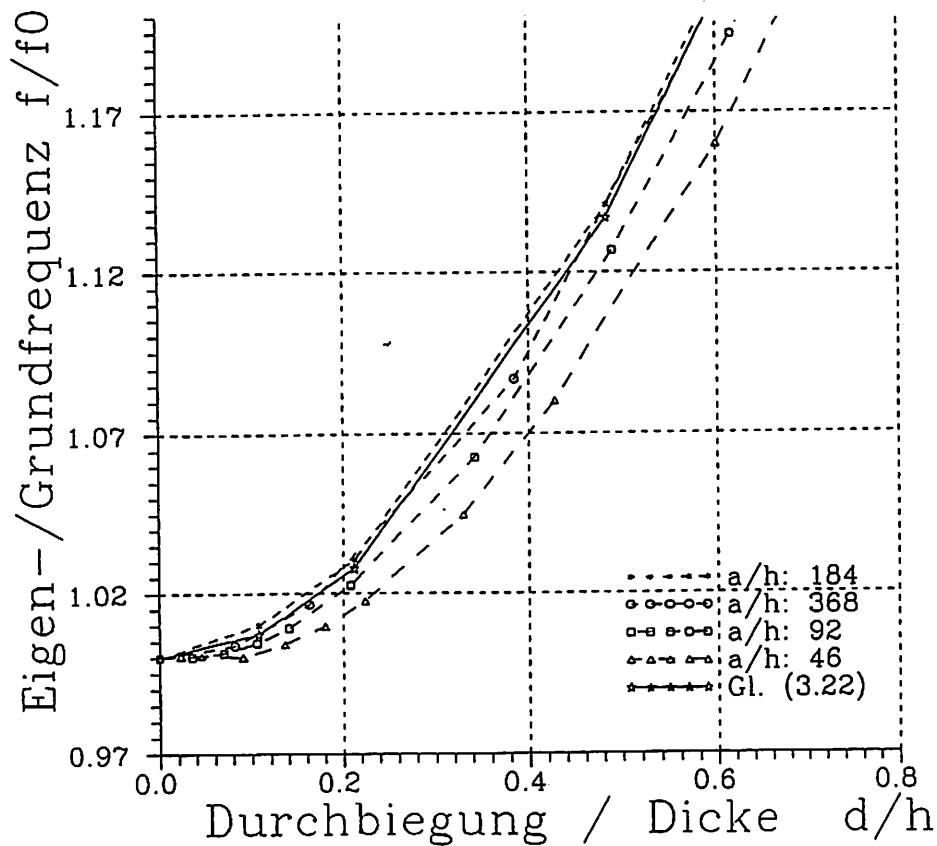


Diagramm 3.6: Einfluss des Seiten/Dickenverhältnisses a/h auf die Eigenfrequenzverschiebung

hältnis a/h , d.h. hoher Eigenfrequenz f_0 , der Absolutwert des Fehlers ebenfalls wächst und damit in die Größenordnung der Eigenfrequenzänderung je Auslenkung (=Empfindlichkeit des Wandlerelementes) kommen kann.

d) Höhere Eigenmoden

Die Konstante c ist in den benannten Grenzen unabhängig von den Geometrieparametern, gilt aber nur für jeweils einen Mode (in diesem Falle den Grundmode). Es wurden deshalb c für höhere Moden auf dem oben beschriebenen Wege ermittelt. So gilt für $f_{31}=f_{13}$ ein $c=0,17$ und für f_{33} ein $c=0,06$.

Es ist zu sehen, daß bei höheren Moden die relative Empfindlichkeit η/f_0 kleiner wird, die absolute Empfindlichkeit η aber auf Grund der höheren Grundfrequenz f_0 in etwa gleich bleibt.

3.4 Eigenfrequenzverschiebung als Funktion des wirkenden Druckes

Die sich aus den in den Abschnitten 3.1 und 3.2 durch Simulation bzw. analytisch ermittelten Zusammenhängen ergebenden Wertepaare $(p, \Delta f)$ sind in den Diagrammen 3.7a,b aufgetragen.

Aus der normierten Darstellung $f/f_0 = f/f_0(p/p_0)$ läßt sich eine Dreiteilung des Verlaufes ablesen. Sie läßt sich erklären aus der Überlagerung der Funktionen (a) $d/h = d/h(p/p_0)$ und (b) $f/f_0 = f/f_0(d/h)$.

Ausgehend von dieser Dreiteilung wurde für jeden der Bereiche eine analytische Gleichung angesetzt und auf ihre Gültigkeit hin überprüft:

1. Bereich ($0 < p/p_0 < 200$) $\Leftrightarrow (0 < d/h < 0,3)$

In diesem Bereich verläuft die Beziehung (a) noch linear, so daß sich das progressive Verhalten von Beziehung (b) diesem überlagert und formbestimmend ist.

Auf Grund der Bestimmung des Verlaufes in diesem Bereich gibt [Utt87] eine ähnlich lautende Funktion als Näherung an:

$$\frac{f}{f_0} = \sqrt{1 + m_1 \left(\frac{p}{p_0} \right)^2} \quad (3.26)$$

Die Konstante m_1 wird analog zu Abschnitt 3.3.2 durch Umstellen der Gleichung aus simulierten Wertepaaren gewonnen. Dabei ergab sich ein mittlerer Wert von $m_1 \approx 2 \cdot 10^{-6}$. Dieser schwankt jedoch erheblich zwischen den Geometrievariationen. Da in diesem Bereich die Empfindlichkeit und damit die maximal mögliche Auflösung im Bereich der Meßwert- bzw. Simulationswertfehler, also sehr niedrig liegen, ist dieser Bereich bei Anwendung als frequenzanaloges Sensorelement sehr unempfindlich. Damit wirkt sich der Fehler nur gering aus.

2. Bereich ($200 < p/p_0 < 800 \Leftrightarrow 0,3 < d/h < 0,8$)

Hier beginnt Beziehung (a) immer stärker degressiv zu werden und überlagert dies dem weiterhin progressiven Verhalten von Beziehung (b). Im Ergebnis heben sich pro- und degressive Anteile auf und es entsteht ein nahezu linearer Verlauf. Aus diesem Grund ist dieser Bereich für die Drucksensoranwendung besonders interessant.

Es wurde mit Hilfe der simulierten Wertepaare $(p/p_0, f/f_0)$ eine Regression mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate durchgeführt, wobei der Regressionsansatz lautet:

$$\frac{f}{f_0} = a + b \left(\frac{p}{p_0} \right) \quad (3.27)$$

Es ergaben sich mittlere Werte für die Konstanten von $a=0,94$ und $b=0,00048$. Die Abweichung der simulierten Kurve vom linearen Regressionsansatz (Linearitätsfehler) beträgt maximal $\pm 0,5\%$. Stärker ist die Abweichung der Werte a und b zwischen den Geometrievarianten, die bei 3% liegt.

3. Bereich ($p/p_0 > 800 \Leftrightarrow d/h > 0,8$)

Beziehung (b) verläuft nun nahezu linear (siehe Abschnitt 3.3), wogegen Beziehung (a) immer stärker degressiv wird und damit den weiteren Verlauf bestimmt.

Für diesen Bereich müßte analog zur Überlegung für den 1. Bereich ein Abhängigkeit der Form (3.19) als Ansatz dienen. Da in diesem Falle aber ein sehr hoher Aufwand zur Bestimmung der Konstanten nötig wäre, wurden zwei einfachere Ansätze angenommen und auf ihre Übereinstimmung mit der Kennlinie hin geprüft:

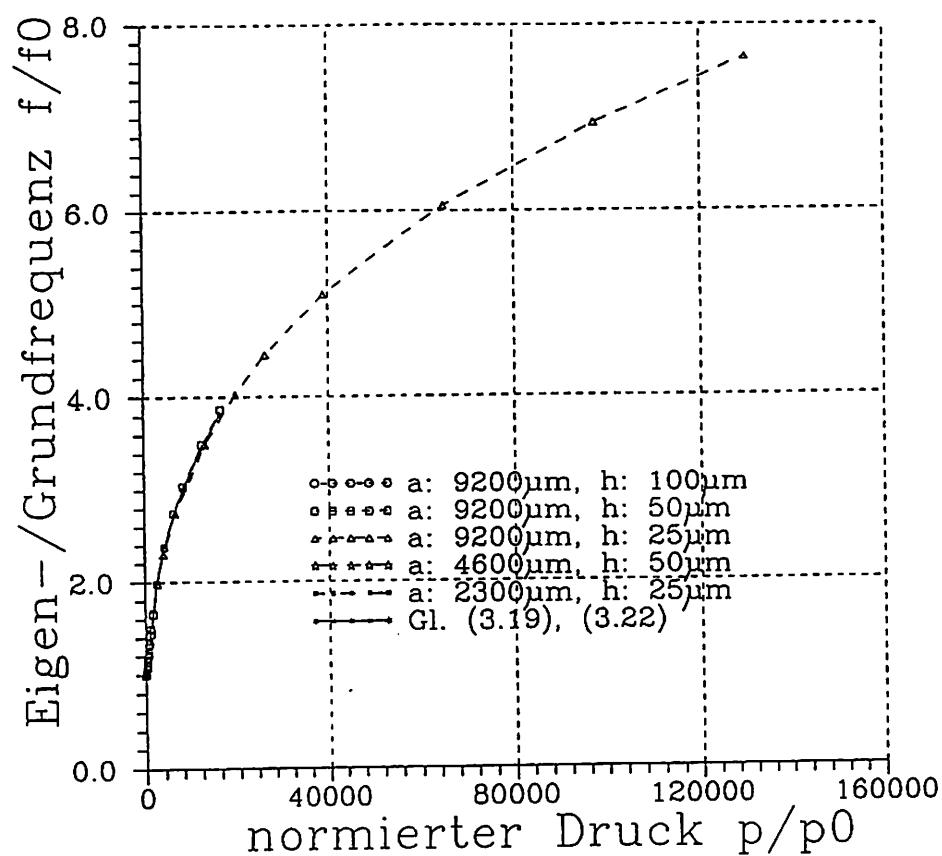


Diagramm 3.7a: Eigenfrequenzverschiebung bei Druck,
Bereich 3

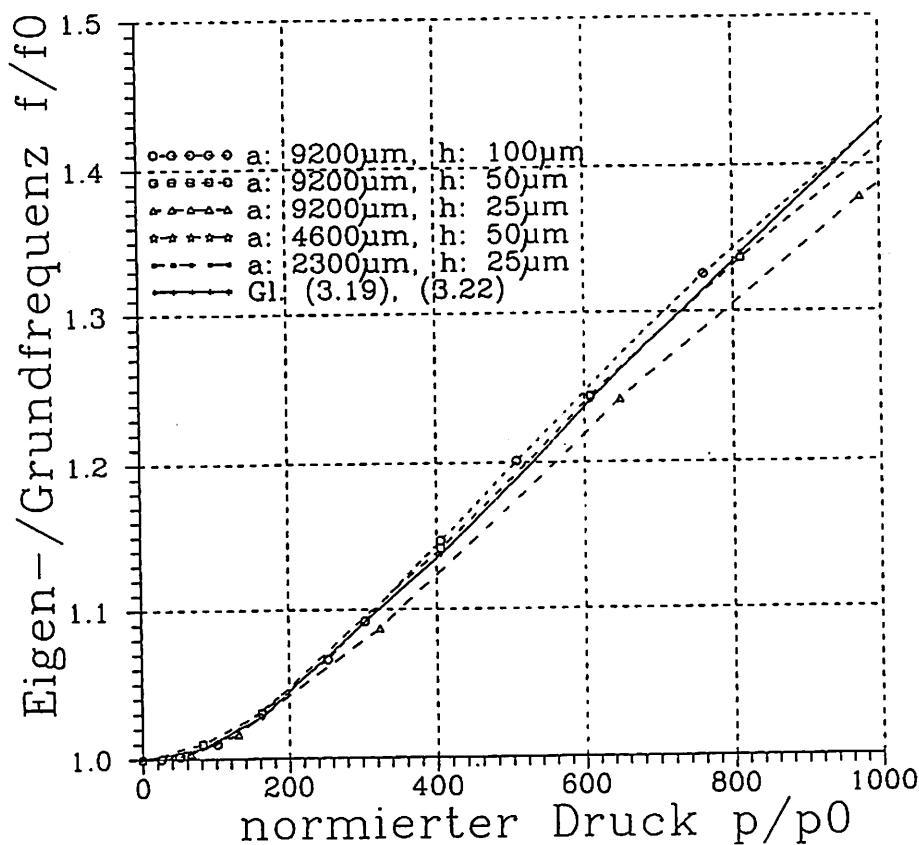


Diagramm 3.7b: Eigenfrequenzverschiebung bei Druck,
Bereiche 1,2 und 3

$$\frac{f}{f_0} = \sqrt{1 + m_{21} \left(\frac{p}{p_0} \right)} \quad (3.28)$$

$$\frac{f}{f_0} = \sqrt[3]{1 + m_{22} \left(\frac{p}{p_0} \right)} \quad (3.29)$$

Im Ergebnis ergab die Bestimmung der Konstanten für $m_{21}=0,001$ und für $m_{22}=0,0033$. Während Gleichung (3.28) bis zu einer Auslenkung von $d/h < 2,5$ den Kurvenverlauf mit einem Fehler von maximal 10% beschreibt, stellt Gleichung (3.29) eine Beschreibung des Zusammenhangs von $d/h=2,5$ bis mindestens $d/h=8$ bei einer Abweichung von kleiner als 5% dar.

Für eine überschlagsmäßige Berechnung des Sensorverhaltens in diesem Bereich empfiehlt sich daher aus Gründen der Übersichtlichkeit und Einfachheit eine Teilung des Bereiches bei $d/h=2,5$ und eine entsprechende Anwendung von Gleichung (3.28) und (3.29).

Werden genauere Aussagen gefordert, können diese über Anwendung der genauereren analytischen Gleichungen aus den Abschnitten 3.2 und 3.3 oder schließlich mit Hilfe von FEM-Simulationen gewonnen werden.

3.5 Einfluß lateraler Spannungen in der Membran

Laterale Spannungen in einer Membran verändern die Steifigkeit des Elementes. Sie können durch zwei Ursachen entstehen. Zum einen können Krafteinwirkungen von außen, zum anderen technologiebedingte Materialspannungen (z.B. durch temperaturbedingte Spannungen in Schichten, Störung der Gitterstruktur durch Dotieren) eine Spannungsentstehung im Membraninneren bewirken.

Der Einfluß lateraler Spannungen auf das dynamische Verhalten einer Membran ist in [Bou90] am Beispiel von temperaturinduzierten Spannungen untersucht worden. Für die Abhängigkeit der Eigenfrequenz von der Größe der Spannung σ wird für quadratische, isotrope, fest eingespannte Membranen angegeben:

$$\frac{f}{f_0} = \sqrt{1 + 0,22 \frac{\sigma(1 - v^2)}{E} \left(\frac{a}{h} \right)^2} \quad (3.30)$$

Bei der Beschreibung der Wirkung dieser Spannungen muß nach der Art der Spannungen in Druck- und Zugspannungen unterschieden werden.

Druckspannungen:

Laterale Druckspannungen entstehen bei äußerer Krafteinwirkung parallel zur Membranoberfläche in Richtung der Membranmitte. Die Ursachen solcher Kräfte können Umwelteinflüsse oder temperaturabhängige Volumenänderungen in steifer Einspannung sein.

Für drei verschiedene von außen in der beschriebenen Weise angreifende Kräfte wurden mit dem Geometriemodell 1 die Eigenfrequenzen bestimmt. Aus den in Tabelle 3.3 aufgeführten Frequenzwerten geht hervor, dass die Membran durch die einwirkenden Kräfte weicher geworden ist und sich demzufolge die Eigenfrequenzen verringert haben.

Tabelle 3.3: Eigenfrequenzen bei Druckspannung

Kraft je Kante in N	Durchbiegg. in μm	f_{11} in kHz	f_{31} in kHz	f_{13} in kHz	f_{33} in kHz
0	0	16,767	65,911	66,020	107,361
32	1,2	15,722	61,200	61,431	102,585
320	19,2	14,434	57,280	57,800	98,775
6401	69,9	13,261	54,327	56,204	95,692

Übersteigen die Spannungen einen bestimmten, aus dem Verhältnis a/h folgenden Wert, so beult sich die Membran aus.

Zugspannungen:

Zugspannungen können zusätzlich zu den für Druckspannungen genannten Ursachen die Folge von durch senkrecht zur Membranoberfläche wirkenden Kräften verursachten Auslenkungen der Membran sein. Die daraus resultierende Versteifung der Membran bewirkt eine Erhöhung der Eigenfrequenz. Dieser Effekt ist die Grundlage der in Abschnitt 3 behandelten Eigenfrequenzverschiebung bei Druckbeaufschlagung.

In beiden Fällen kann durch eine Bestimmung der Eigenfrequenz und der Geometrieparameter a und h über die Gleichungen (2.3) und (3.30) der in der Membran vorliegende Spannungszustand berechnet werden.

Im Falle eines Mehrschichtsystems, bei dem sich verspannte Schichten auf einem Siliziumsubstrat befinden, können beide beschriebenen Effekte gleichzeitig auftreten. Die unter einer Druckspannung stehende Schicht hat eine verminderte Steifigkeit und verringert dadurch die Eigenfrequenz des Systems. Übersteigt die Spannung die durch das Verhältnis a/h bestimmte Knickgrenze des Systems, kommt es zu einer Ausbeulung der Gesamtmembran. Dadurch entstehen in der Siliziumschicht Zugspannungen, die deren Steifigkeit und damit auch Eigenfrequenz um einen Betrag entsprechend der in Abschnitt 3.2 gefundenen Zusammenhänge erhöhen. Im Ergebnis wird sich die Eigenfrequenz des Gesamtsystems verändern. Ob sie sich erhöht oder verringert, hängt von dem Dickenverhältnis der Schichten und der Größe der inneren Spannung ab (siehe Abschnitt 6.2).

4 Messungen

4.1 Meßobjekte und Schwingungsanregung

Zur Überprüfung der theoretisch hergeleiteten Zusammenhänge wurden experimentelle Messungen durchgeführt und die geometrischen Abmessungen der Objekte, deren Eigenfrequenzen und die Eigenfrequenzverschiebung bei Druckbeaufschlagung ermittelt. Mit Hilfe der gemessenen geometrischen Abmessungen (Membrandicke und -seitenlänge) wurden mit den in den Abschnitten 2 und 3 hergeleiteten Gleichungen die Eigenfrequenzen und deren Verschiebung berechnet und mit den gemessenen Werten verglichen.

Die Meßobjekte sind naßchemisch auf Zeit geätzte Siliziummembranen verschiedener Dicken, die freundlicherweise von der Robert Bosch GmbH zur Verfügung gestellt wurden. Sie sind mit Aluminium bzw. Zinkoxid (ZnO) beschichtet oder beschichtungslos. Da die Schichten z.T. eine im Verhältnis zur Siliziumdicke große Dicke haben, können sie Abweichungen zwischen den theoretischen Frequenzwerten und den Meßwerten verursachen, da die numerisch und analytisch berechneten Modelle von reinen Siliziummembranen ausgehen.

Zu Schwingungen wurden die Membranen auf drei verschiedene Arten angeregt. Im ersten Fall erfolgt die Anregung direkt durch eine auf die Membran aufgebrachte piezoelektrische ZnO -Schicht. Im zweiten Fall wird durch Auflegen der Membran auf einen Piezokeramikhochtöner angeregt. Hauptsächlicher Übertragungsmechanismus ist hierbei der Körperschall, da die über Luftschall aufgeprägten Schwingungsanteile viel zu schwach sind. Der Nachteil des zweiten, indirekten Anregungsverfahrens liegt im nicht konstanten Amplitudenspektrum des Piezokeramikschwingers, das dem Membranschwingungsspektrum überlagert ist und dieses somit verfälscht. Als dritte Anregungsart wurde versucht, die auf der Unterseite vollständig mit Aluminium beschichteten Membranenserie elektrostatisch zu Schwingungen anzuregen. Dazu wurde auf einer Leiterplatte mittels Lötzinn eine Kontaktierungsstruktur sowie eine Gegenelektrode zur Aluminiumschicht auf der Membranunterseite angebracht. Auf Grund der trotz geringen Elektrodenabstandes (ca. $7\mu m$) benötigten Spannungen wäre ein komplexerer Meßaufbau notwendig gewesen, um quantitativ auswertbare Meßergebnisse zu erhalten.

Bild 4.1a: Meßaufbau

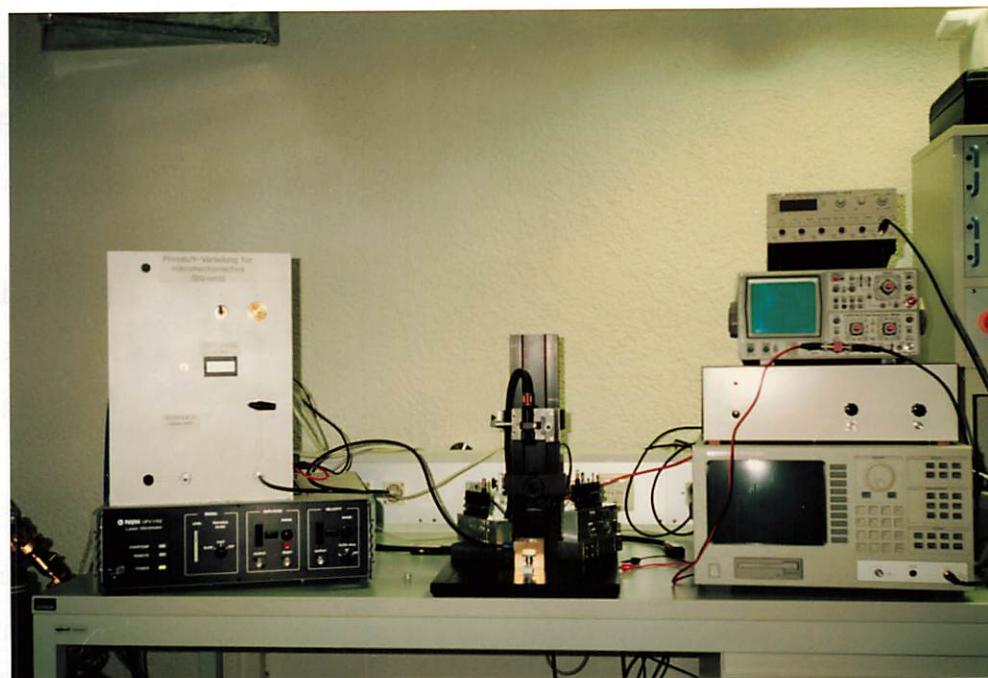
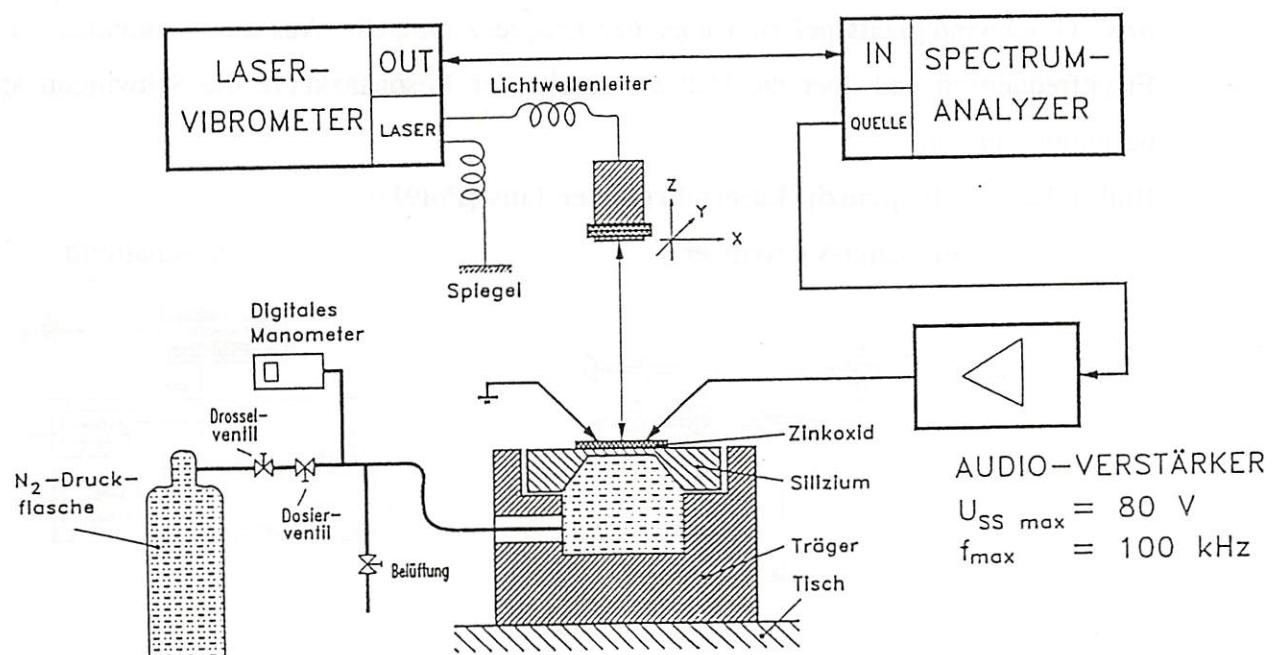


Bild 4.1b: Meßprinzip



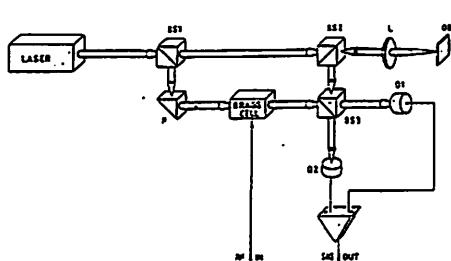
4.2 Meßaufbau

Der gesamte Meßaufbau besteht im wesentlichen aus vier Geräten. Zur Bestimmung der geometrischen Abmessungen Membranlänge und -dicke wurde das optische Meßsystem Mikrofocus der Firma UBM Meßtechnik GmbH verwendet. Zum Auslesen der Ausgangssignale des Laser Vibrometer OFV 1102 der Firma Polytec und zur Anregung sowie zur Auswertung der Frequenzspektren der Spectrum Analyzer HP 3588A der Firma Hewlett-Packard. Zur exakten Bestimmung der Dicke der Membranen diente die Ansicht im Raster-Elektronenmikroskop (REM) der Firma JEOL.

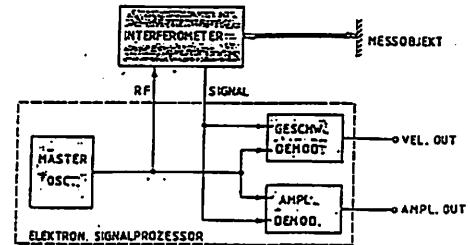
- a) Das Polytec-Laservibrometer basiert auf einem interferometrischem Meßprinzip. Das Ausgangssignal eines Mach-Zehnder-Interferometers wird genutzt, um Geschwindigkeit und Amplitude der mit einem Laser abgetasteten Schwingung unabhängig voneinander zu bestimmen (Bild 4.2).
- b) Das Prinzip des Microfocus-Meßsystems verdeutlicht Bild 4.3. Der vom Objekt reflektierte Laserstrahl wird durch Verstellen des Tubus für jede neue X-Position fokussiert. Der Verstellweg ist ein Maß für den Höhenunterschied auf dem Meßobjekt zwischen den beiden benachbarten X-Positionen und wird über eine entsprechende Software ausgewertet. Meßbar sind Oberflächenprofile mit einer Auflösung von ca. 10 nm .
- c) Mit Hilfe der eingebauten Signalquelle des HP-Spectrum-Analyzers wird die Membran in oben beschriebenen Arten zum Schwingen angeregt. Gleichzeitig wird das Ausgangssignal des Laservibrometers in den Spectrum-Analyzer eingespeist, der den vorgegebenen Frequenzbereich mit einer ebenfalls vorzugebenden Bandbreite durchmisst und als Amplituden- bzw. Geschwindigkeitsspektrum über der Frequenz darstellt. Aus diesem können u.a. die Eigenfrequenzen und über die Halbwertsbreite der Resonanzkurve die Schwingungsgüten bestimmt werden.

Bild 4.2.: Meßprinzip Laservibrometer (aus [Pol91])

Einpunkt-Vibrometer



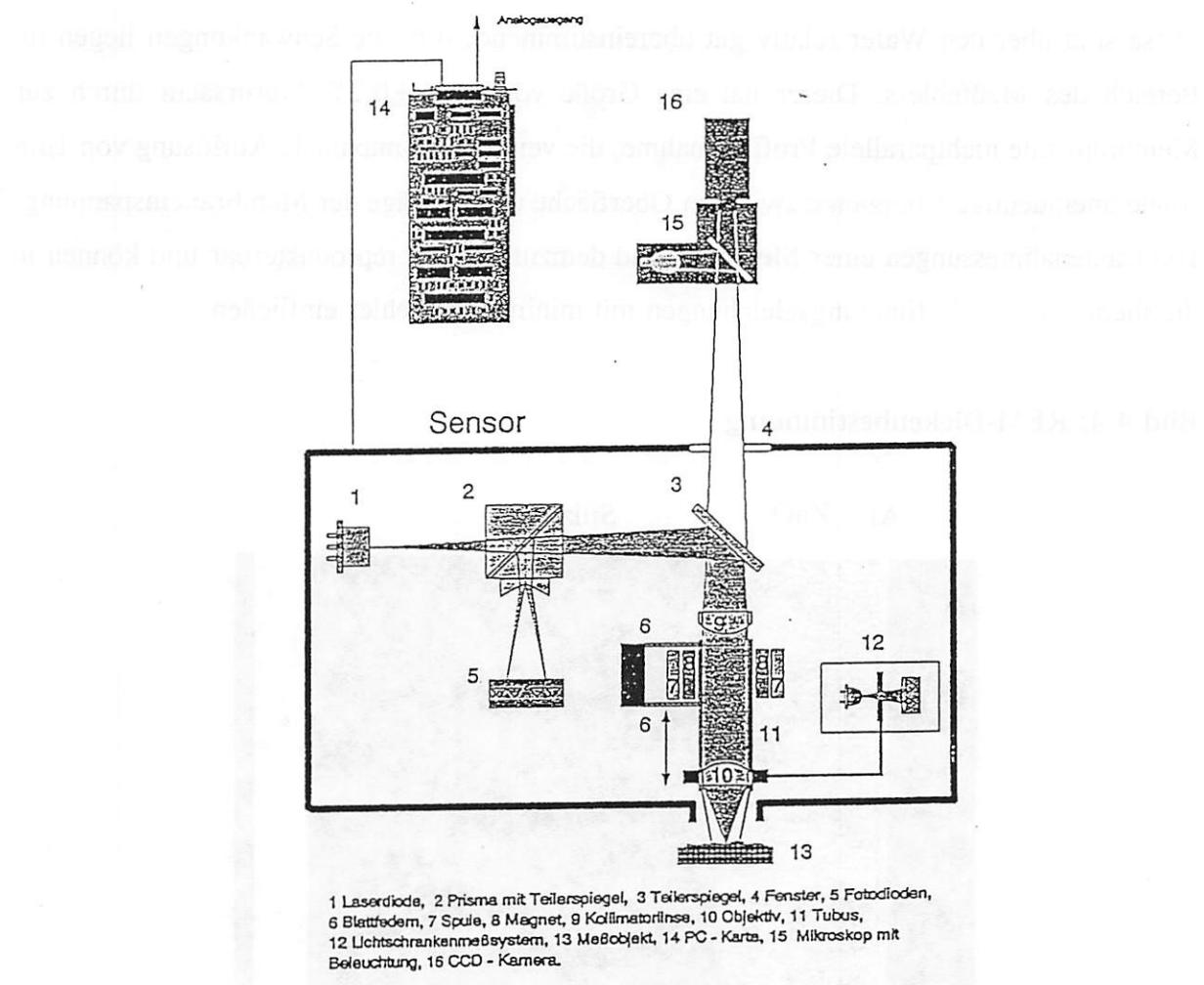
Prinzipschaltbild



Eine stufenweise Druckbeaufschlagung wurde durch eine freundlicherweise von der Robert Bosch GmbH zur Verfügung gestellte Druckdosiereinrichtung realisiert.

Der gesamte Meßaufbau zur Bestimmung des dynamischen Verhaltens ist in Bild 5.1a abgebildet, das Meßprinzip verdeutlicht Bild 5.1b. Dabei dienen ein kommerzieller Audio-Verstärker zur Erhöhung der Anregungsspannung und ein Oszilloskop zur Darstellung derselben.

Bild 4.3: Microfocus-Meßsystem (aus [UBM91])



4.3 Meßergebnisse

4.3.1 Geometrische Abmaße

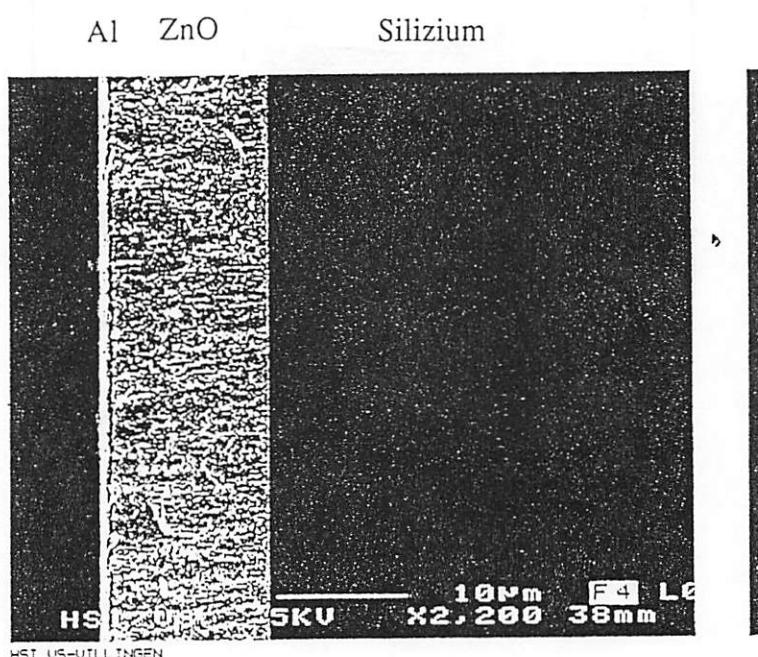
Durch die Aufnahme von Oberflächenprofilen parallel zu einer Kante der Membran konnten Aussagen über Grubentiefe und -breite, Breite der Grube am oberen Rand, Form der Oberfläche gewonnen werden. Die Dicke der Membran ergab sich über Differenzenbildung der Waferdicke und der Grubentiefe. Soweit möglich, wurden diese Messungen im Waferverbund durchgeführt um so Rückschlüsse auf Dicken- und damit Technologieschwankungen ziehen zu können.

Genaue Angaben zur Dicke der Membranen der jeweiligen Wafer konnten durch betrachten von Membranbruchstücken im REM erhalten werden (Bild 4.4).

- Laterale Membranabmessungen:

Diese sind über den Wafer relativ gut übereinstimmend, d.h. die Schwankungen liegen im Bereich des Meßfehlers. Dieser hat eine Größe von $\Delta a \approx \pm 0,2\%$, verursacht durch zur Membrankante nichtparallele Profilaufnahme, die verwendete maximale Auflösung von $1\mu\text{m}$ sowie uneindeutige Übergänge zwischen Oberfläche und Schräge der Membraneinspannung. Die Kantenabmessungen einer Membran sind demzufolge gut reproduzierbar und können in die theoretischen Bestimmungsgleichungen mit minimalem Fehler einfließen.

Bild 4.4: REM-Dickenbestimmung



- Membrandicke:

Die Bestimmung der Dicke aus der Differenz zwischen Grubentiefe und Waferdicke ist insofern problematisch, als dabei aus zwei relativ großen Werten ein kleiner ermittelt wird, die absoluten Fehler sich aber addieren. Die Folge sind Meßfehler in der Größenordnung von etwa $\pm 6\mu\text{m}$, die sich bei relativ dazu dünnen Membranen stark auswirken.

Im weiteren ist bei naßchemisch geätzten Membranen eine Balligkeit der Oberfläche zu beobachten, die auf einen stärkeren Ätzangriff an den Grubenkanten schließen läßt. Ihre Größe ist neben der absoluten Ätztiefe und der lateralen Größe der Membran von weiteren technologischen Faktoren abhängig. Sie bewegt sich zwischen $< 0,5\mu\text{m}$ für eine Seitenlänge von $a < 4\text{mm}$ über $1,5\mu\text{m}$ bei $a = 5\text{mm}$ bis zu $9\mu\text{m}$ bei $a = 9,5\text{mm}$. Dies bedeutet, daß die im FE-Modell angenommene Konstanz der Dicke über die gesamte Membranfläche für die vermessenen Membranen nicht zutrifft.

Im weiteren ergaben sich bei einem Dickenvergleich einzelner Membranen über dem Wafer Schwankungen bis zu einer Größe von $9\mu\text{m}$.

Beim Einsetzen einer Membrandicke in die theoretischen Gleichungen muß deshalb mit einer mittleren Dicke gerechnet werden, deren Ermittlung bei dünnen Membranen ($< 100\ \mu\text{m}$) unter Beachtung des Meßfehlers nur einen Näherungswert darstellt.

Die anhand des REM-Bildes bestimmte Dicke ist mit einem sich aus den Ausleseungenaigkeiten ergebenden Fehler von etwa $\pm 1,5\%$ behaftet, also für dünne Membranen wesentlich genauer als die mit Hilfe des UBM-Gerätes bestimmte. Aber selbst diese, nur durch Zerstörung der Membran anzuwendende Methode berücksichtigt nicht die Dickenschwankungen über der Membran. Das Modell stimmt für diesen Fall nicht genügend mit der Realität überein.

- Schichtparameter:

Diese haben direkt Einfluß auf das Membranverhalten. Mit ihrer Dicke vergrößern sie die Gesamtdicke der Membran, besitzen jedoch andere Materialkennwerte (E-Modul, Poisson-Zahl) und stimmen in diesem Falle nicht mehr mit dem einlagigen Modell überein. Die durch Schichtspannungen hervorgerufenen statischen Vorauslenkungen verändern die Steifigkeit der Membran und damit ihr dynamisches Verhalten wesentlich. Auch dieser Effekt wird durch das verwendete Modell nicht erfaßt, ist jedoch u.U. erheblich (bis zu $60\mu\text{m}$ Auslenkung bei einer Siliziummembrandicke von $25\mu\text{m}$).

4.3.2 Dynamisches Verhalten

Eigenfrequenzen:

Die aus Anhang 4.1, 5.1 und 5.2 ablesbaren Abweichungen der gemessenen Eigenfrequenzen von den nach Gleichung (2.3) berechneten haben zwei Ursachen.

Die mit ZnO beschichteten Membranen (Anhang 4.1, 5.1) erhalten durch die Spannungen in der Schicht eine Versteifung des Siliziums bei gleichzeitiger Erweichung des Schichtmaterials (siehe Abschnitt 3.5). In Tabelle 4.1 sind die sich nach Gleichung (3.24) aus Dicke und gemessener Eigenfrequenz ergebenden statischen Durchbiegungen zu den Membranen in Anhang 5.1 aufgeführt. Die berechneten Werte sind kleiner als die tatsächlich vorhandenen statischen Auslenkungen, d.h. die gemessenen Eigenfrequenzen liegen erwartungsgemäß zwischen den berechneten und den für die gemessenen statischen Durchbiegungen nach Gleichung (3.24) sich ergebenden. Je dünner dabei die verspannte Schicht im Verhältnis zur Gesamtdicke der Membran ist, umso geringer ist ihr Einfluß auf die Steifigkeit des Elementes, und die zu messende Eigenfrequenz wird der nach Gleichung (3.24) ermittelten entsprechen.

Tabelle 4.1: statische Auslenkung d nach gemessenen Eigenfrequenzen

Mem.-Nr.	ZnO1	ZnO2	ZnO3	ZnO4	ZnO5	ZnO7	ZnO8	ZnO9
d in μm	15,0	35,4	37,5	31,1	22,4	35,0	36,6	32,2

Zum zweiten wirken sich die Dickenschwankungen über der Membran erheblich auf den Frequenzwert aus (siehe Abschnitt 4.4). Für die in Anhang 5.2 aufgeführten Membranen ergeben sich rechnerische Eigenfrequenzen von 5670 Hz für die Dicke am Rand und von 7290 Hz für die Dicke in der Mitte. Der Mittelwert der gemessenen Eigenfrequenzen beträgt 6922 Hz. Daraus läßt sich unter Verwendung der Gleichung (2.3) eine mittlere Dicke von 42,7 μm berechnen, für die das Modell mit dem realen Verhalten übereinstimmt.

Eigenfrequenzverschiebung bei Druckbeaufschlagung:

Zur Beaufschlagung mit Druck wurden die Membranen in einen entsprechend gefertigten Aluminiumträger eingeklebt und dieser auf eine mit Druckquelle und -meßeinrichtung verbundene Fassung aufgeschraubt. Die Anregung erfolgte ausschließlich direkt. In Tabelle 4.2 sind die geometrischen Abmaße für die verwendeten Membranen zusammengestellt

Tabelle 4.2: Membranabmessungen

Bezeichnung	Länge a in μm	Ausl. in μm	$h(\text{Si})$ in μm	$h(\text{ZnO})$ in μm	$h(\text{Al})$ in μm	f_{ei} rechn. in Hz
ME150BO1-6	9500 ± 10	2	148 ± 5	15 ± 1	1	25488
MEM50BO1-2	9313 ± 10	40	$37,5 \pm 1$	$9 \pm 0,5$	$0,6 \pm 0,5$	7648

("Ausl." bezeichnet dabei die statische Vorauslenkung durch Schichtspannungen).

Die in den Diagrammen 4.1 und 4.2 dargestellten gemessenen Verläufe weichen im Betrag der Werte stark von den gleichzeitig eingetragenen, rechnerisch nach den in Abschnitt 3 aufgestellten Gleichungen ermittelten Werten ab. Sie sind sowohl in Druck- als auch in Frequenzrichtung zueinander verschoben. Die Ursache dafür liegt in der die Steifigkeit verändernden inneren Spannung der ZnO-Schicht.

In Diagramm 4.1 ist zu sehen, daß der gemessene Verlauf in der Form dem für eine Dicke von $h=150\mu\text{m}$ berechneten entspricht, der Wert der Eigenfrequenz aber niedriger liegt. Die Membran ist also weniger steif als eine reine Siliziummembran gleicher Geometrie, die Frequenzwerte sind in negativer Richtung parallel zur Frequenzachse verschoben. Über Gleichung (3.24) läßt sich aus dem gemessenen Verlauf die zu dieser Form korrespondierende Dicke berechnen. Für die gemessenen Membranen ergab sich ein $h=149\mu\text{m}$.

In Diagramm 4.2 ist der Verlauf durch die statische Auslenkung von $40\mu\text{m}$ (das entspricht einem Verhältnis $d/h \approx 1$) zusätzlich in negativer Richtung parallel zur Druckachse verschoben. Eine Korrektur der Werte läßt sich durch Addition des zu einer Auslenkung von $40\mu\text{m}$ gehörenden Druckes zu den gemessenen Druckwerten und eine anschließende Frequenzwertkorrektur analog zu Diagramm 4.1 erreichen. Voraussetzung dafür ist die Kenntnis der Membrandicke.

Unter Berücksichtigung dieser Korrekturen können die gemessenen Verläufe als qualitative Bestätigung der in Abschnitt 3 hergeleiteten Zusammenhänge gelten. Der vollständige, S-förmige Verlauf wird von keiner der beiden Membranvarianten durchlaufen. Die Membranen der Variante ME150Bo erreichen bei einem Druck von $p=3,8$ bar ihre Bruchgrenze. Dies entspricht einem Verhältnis d/h von etwa 0,6, liegt also noch im linearen Bereich. Die Kennlinie der Membran MEM50Bo1 beginnt auf Grund der statischen Auslenkung erst nach dem linearen Bereich und erreicht bei einem Druck von $0,8$ bar die Bruchgrenze.

50

$$F_{\text{Brust}} = 5,48 \cdot G_{\text{Bruch}} \left(\frac{h}{a} \right)^2$$

Theorie: 0,22 bar

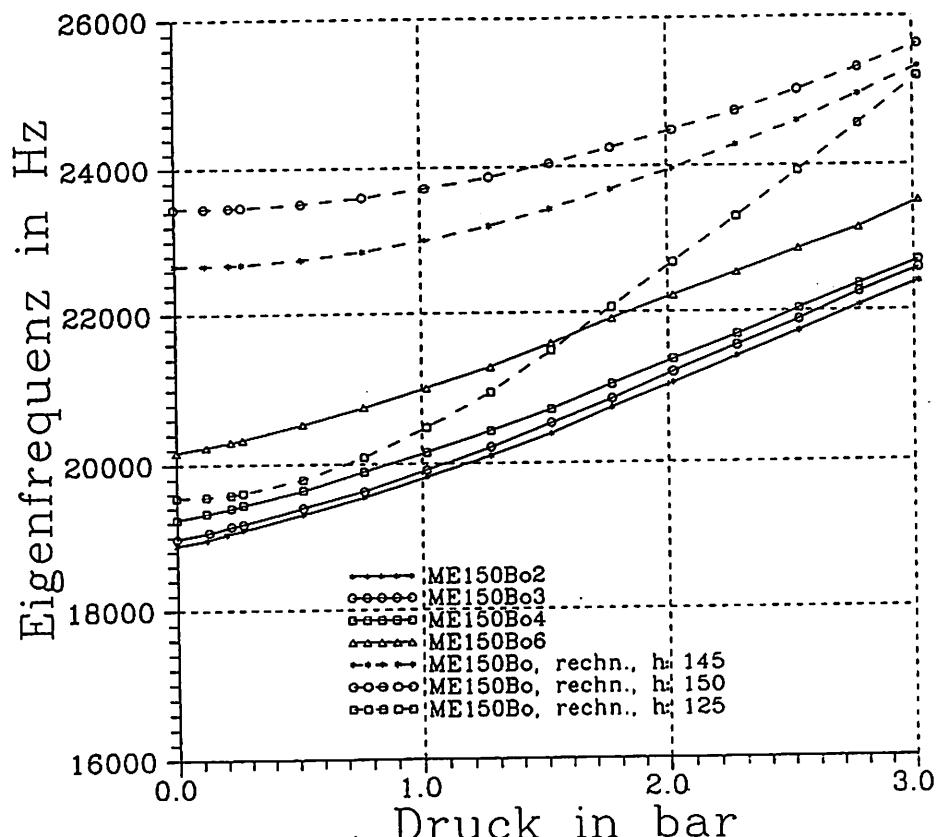


Diagramm 4.1.: Frequenzverschiebung bei Druckbeaufschlagung.
ME150Bo

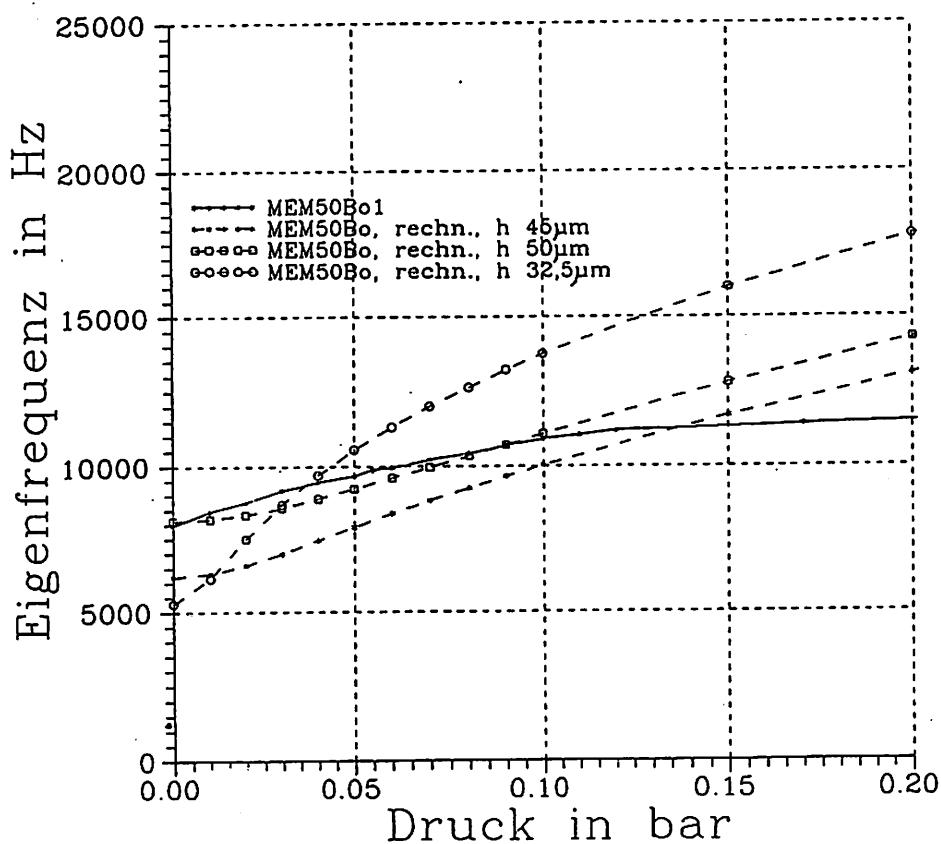


Diagramm 4.2.: Frequenzverschiebung bei Druckbeaufschlagung.
Mem 50Bo

4.4 Fehlerbetrachtung

Die Meßfehler der geometrischen Messungen setzen sich bei der analytischen Bestimmung des dynamischen Verhaltens nach den Gleichungen aus Abschnitt 3. fort. Für die Eigenfrequenz nach Gleichung (2.3) ergibt sich:

$$\Delta f = \sqrt{\frac{E}{12\rho(1-\nu^2)}} \sqrt{\left(\frac{\lambda^2}{2\pi a^2}\right)^2 \Delta h^2 + \left(\frac{\lambda^2 h}{\pi a^3}\right)^2 \Delta a^2} \quad (4.1)$$

Dabei werden konstante Materialkennwerte vorausgesetzt, eine Änderung des Elastizitätsmoduls durch eine Schicht ist also nicht berücksichtigt. Für die oben angegebenen Meßfehler folgt ein $\Delta f \approx \pm 1\text{kHz}$, wobei der Meßfehler für den Dickenwert Δh wesentlich stärker als ein Δa eingeht.

Weitere Quellen für Abweichungen der Meßwerte vom berechneten Wert liegen neben den bereits erläuterten Schichteffekten in der starken Temperaturabhängigkeit der Eigenfrequenzen. Bei Membran ME150Bo5 genügte die Erwärmung ($\Delta T \approx 10\text{K}$) infolge des Auflegens eines Fingers auf die Einspannung, um eine Frequenzverschiebung von etwa 150 Hz hervorzurufen.

In Umkehrung der Gleichungen aus Abschnitt 3 lassen sich aus den gemessenen dynamischen Größen und deren Verlauf die geometrischen Abmessungen der Membran bestimmen.

4.5 Zusammenfassung

Auf Grund der Meßbedingungen konnte die untersuchte Frequenzverschiebung nicht isoliert nachgewiesen werden. Es sind deshalb nur qualitative Aussagen möglich, wobei Eigenfrequenzveränderungen durch andere Effekte (Temperatur, innere Spannung, Mehrschichtsystem) erkannt und aus den Meßergebnissen herausgefiltert werden müssen.

Mit Hilfe daraus folgender Interpretationen der gemessenen Kurven läßt sich eine qualitative Übereinstimmung zwischen theoretischem und realem Verlauf ablesen, die als Indiz für die Richtigkeit des Modellansatzes für den speziellen Effekt der Eigenfrequenzverschiebung bei Druckbeaufschlagung gelten kann.

Um zu quantitativ verwertbaren Aussagen zu gelangen, muß dieser isoliert von anderen durch die Meßbedingungen (Meßaufbau und -durchführung, statistisch begründet Auswertung) auszuschließenden Frequenzverschiebungseffekten betrachtet werden.

5 Dämpfungseinflüsse

5.1 Problemstellung

Die bisherigen Betrachtungen zum dynamischen Verhalten der Membran sind unter Ausschluß von Dämpfungseffekten angestellt worden. Beim Einsatz in Sensoren oder Aktoren haben aber gerade diese einen großen Einfluß auf die Einsatzkennwerte des Bauelementes. Die in Abschnitt 4 durchgeführte meßtechnische Verifikation der Simulationsergebnisse ist ebenfalls durch Dämpfungseffekte beeinflußt. Es sollen deshalb Ursachen für die verschiedenen Dämpfungsphänomene untersucht werden und eine Möglichkeit zur Simulation dieser Effekte im Programm ANSYS gefunden werden. Insbesondere soll dabei die Wirkung von umgebenden Fluiden (Gasen oder Flüssigkeiten) auf das Schwingungsverhalten des Elementes untersucht werden.

5.2 Dämpfungsursachen

Wird ein schwingendes System gedämpft, so ist dies Ausdruck für einen stattfindenden Energieverlust. Der Grad der Verluste wird durch die Schwingungsgüte Q des Systems ausgedrückt. Sie ist definiert als der Quotient aus Gesamtenergie und Verlustenergie des Schwingers je Periode. Ein ideales, ungedämpftes System hätte demzufolge eine unendlich hohe Güte.

Die physikalischen Ursachen dieser Energieverluste können sein:

a) innere Dämpfung

Zu dieser zählen thermische Verluste durch innere Reibung der Teilchen im schwingenden Material (thermische Dämpfung) sowie durch Reibung an Korngrenzen und anderen strukturbedingten Unregelmäßigkeiten (Inhomogenitäten) im Material (Strukturdämpfung).

b) äußere Dämpfung

Diese kann verursacht werden durch Gleit- bzw. Haftreibung bei der Bewegung zweier Materialien aufeinander (trockene Reibung), durch die Bewegung des schwingenden Systems durch ein Fluid (viskose Dämpfung, Stoke-Reibung) oder durch Energieabgabe über Wechselwirkung mit den Molekülen des Fluids (akustische Dämpfung, Newton-Reibung).

c) Modendämpfung (Dämpfung durch die Anregungsart)

Ein diskretes Schwingungssystem besitzt bei n Freiheitsgraden n mögliche Eigenschwingungszustände mit entsprechenden Eigenfrequenzen und -schwingungsformen. Auf Grund dieser kann durch festgelegte Angriffspunkte oder -flächen der anregenden Kraft eine bestimmte Schwingungsform (Modenform) unterstützt werden. Gleichzeitig werden andere Moden unterdrückt, da das System in diesen zusätzliche Energie zur Überwindung der entgegengesetzten gerichteten Anregungskraft aufbringen muß und somit weitere Energie verliert.

Die Gesamtdämpfung des Systems setzt sich aus einer Überlagerung der Einzeldämpfungen zusammen. Die Dämpfungen lassen sich dabei über die entsprechenden, aus den jeweiligen Dämpfungsanteilen resultierenden Einzelgüten (innere Dämpfung $\Rightarrow Q_i$, äußere Dämpfung $\Rightarrow Q_a$, Modendämpfung $\Rightarrow Q_m$) ausdrücken. Nach [Ste91] gilt für die Abhängigkeit der Gesamtgüte von den Einzelgüten:

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_i} + \frac{1}{Q_a} + \frac{1}{Q_m} \quad (5.1)$$

Welche der Dämpfungsursachen den größten Einfluß auf die Systemdämpfung hat, hängt von der Geometrie, dem Material des Schwingers, der Anregung sowie den Rand- und Umgebungsbedingungen ab.

5.3 Darstellungen und Beschreibungsgrößen

Für die eine gedämpfte erzwungene Schwingung eines diskreten Systems mit der Massenmatrix $[M]$ und der Steifigkeitsmatrix $[K]$ beschreibende Differentialgleichung wird im allgemeinen eine der Geschwindigkeit \dot{x} proportionale Dämpfungsmaatrix $[C_v]$ angenommen:

$$[M] \cdot \ddot{x} + [C_v] \cdot \dot{x} + [K] \cdot x = F(t) \quad (5.2)$$

Diese gilt für reine viskose Dämpfung (geschwindigkeitsproportional). Bei kleinen Geschwindigkeiten ist diese Annahme erfüllt. Für größere Geschwindigkeiten hingegen muß die akustische Dämpfung berücksichtigt werden, die proportional zu höheren Potenzen n von \dot{x} sein kann. Für den Fall einer Newton-Reibung ist die Dämpfung vom Quadrat der Ge-

schwindigkeit abhängig [Ger82]. Bei sehr großen Geschwindigkeiten kann n Werte größer als 2 annehmen. Für Bewegung in geschmierten bzw. geölten Lagern wird $n=1/2$. Trockene Reibung und innere Dämpfung können in guter Näherung geschwindigkeitsunabhängig angenommen werden und lassen sich durch eine konstante Vorspannung $[K_d]$ in der Steifigkeitsmatrix interpretieren. Die Modendämpfung ergibt sich aus einer Ortsabhängigkeit der anregenden Kraft, so daß $F(t)$ zu $F(t,x)$ wird. Die Gleichung (5.2) erhält damit folgende Form (wobei n auch rationale Zahlenwerte annehmen kann):

$$[M] \cdot \ddot{x} + \sum_n [C_n] \cdot \dot{x}^n + [K + K_d] \cdot x = F(t,x) \quad (5.3)$$

Zur Berechnung dieses Differentialgleichungssystems bedarf es neben der Kenntnis der entsprechenden Randbedingungen geeigneter numerischer Lösungsverfahren. Hinzu kommt eine Zuordnung der physikalischen Dämpfungseffekte zu den Dämpfungsansätzen in der Differentialgleichung. Bei Bewegung eines Schwingers in einem Fluid wie zum Beispiel Luft wird von der Annahme ausgegangen, daß innere Dämpfung und trockene Reibung im Vergleich zu viskoser und akustischer Dämpfung vernachlässigt werden können, so daß allein diese zu betrachten sind.

Für den Fall reiner viskoser Dämpfung eines mit $F(t)=f_0 \sin(\omega_a t)$ angeregten Ein-Masse-Schwingers der Masse m ergibt sich aus dem Ansatz

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = \frac{f_0}{m} \sin(\omega_a t) \quad (5.4)$$

für den eingeschwungenen Zustand die stationäre Lösung

$$x(t) = \frac{f_0}{k} \frac{(1 - \gamma^2)\sin(\omega_a t) - 2\xi\gamma\cos(\omega_a t)}{(1 - \gamma^2)^2 + (2\xi\gamma)^2}$$

mit $k = m\omega^2$

$$\gamma = \frac{\omega_a}{\omega}$$

$$\xi = \frac{c}{c_k}$$

und $c_k = 2m\omega$, kritische Dämpfung
 ω = Eigenkreisfrequenz des Schwingers

[Ram90].

In der Amplituden-Phasen-Darstellung ergibt sich für die Amplitude $x(t, \omega)$ und den Phasenwinkel θ :

$$x(t, \omega) = x_{st} \cdot D(\omega) \cdot \sin(\omega_a t - \theta)$$

$$\text{und } \theta = \arctan \left[\frac{2 \xi \gamma}{1 - \gamma^2} \right] \quad (5.6)$$

mit $D(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \gamma^2)^2 + (2 \xi \gamma)^2}}$

$$x_{st} = \frac{f_0}{k} : \text{statische Auslenkung}$$

Der dynamische Vergrößerungsfaktor $D(\omega)$ gibt das Verhältnis zwischen statischer Auslenkung und dynamischer Amplitude in Abhängigkeit von der Frequenz an und ist im Resonanzfall am größten ($\omega_a = \omega$). Für die Resonanzüberhöhung D_{max} gilt dann:

$$D_{max} = \frac{1}{2 \xi} \quad (5.7)$$

Zur Bestimmung des Dämpfungswertes wird meist das prozentuale (Lehrsche) Dämpfungsmaß ξ angegeben. Es drückt u.a. die Verschiebung der Eigenkreisfrequenz des gedämpften Schwingers ω gegenüber ω_0 des ungedämpften aus [Mei86], [Nik90]:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - 2 \xi^2} \quad (5.8)$$

Da ξ frequenzabhängig ist, wurden von Rayleigh [Ram90] zwei frequenzunabhängige Größen α und β eingeführt, die die Dämpfungskonstante c auf die Masse m und die Steifigkeit k zurückführen:

$$c = \alpha m + \beta k \quad (5.9)$$

Mit $c = \xi c_{kr}$ folgt:

$$\xi = \frac{\alpha}{2 \omega} + \frac{\beta \omega}{2} \quad (5.10)$$

Der Wert von ξ lässt sich im Resonanzfall ebenso wie die Schwingungsgüte Q des Schwin-

gers aus der Halbwertsbreite ω_H und der Eigenfrequenz ω bestimmen. Dabei ist ω_H der Abstand zwischen den Frequenzen unter- und oberhalb von ω , bei denen der Phasenwinkel $\theta = 45^\circ$ und damit die Amplitude um den Faktor $\sqrt{2}$ abgefallen ist. Es gelten damit die Zusammenhänge:

$$Q = \frac{\omega}{\omega_H} \quad (5.11)$$

$$\xi = \frac{1 - \frac{1}{4Q}}{-1 + 2Q}$$

Bestimmt werden diese Werte im Wesentlichen durch die Viskosität des umgebenden Fluides.

Für den Fall einer überwiegend akustischen Dämpfung ist die Dichte des Fluides ausschlaggebend für den Wert der Dämpfung. Da die auftretenden Zusammenhänge nichtlinear sind, existiert keine geschlossene Darstellung.

In [Ger82] wird ausgehend von einem großen, sich mit hoher Geschwindigkeit durch ein Fluid bewegenden Körper für die Reibungskraft F_R bei Newton-Reibung

$$F_R = \frac{1}{2} c_w \rho A \dot{x}^2 \quad (5.12)$$

mit A : Reibfläche
 ρ : Dichte des Fluids
 c_w : geometrieabhängiger Widerstandsbeiwert

angegeben.

Für eine quadratische in Luft schwingende Siliziummembran wird in [Pra91] angenommen, daß die beobachtete Eigenfrequenzverschiebung gegenüber der Eigenfrequenz in Vakuum sowie der Wert für die Güte Q ausschließlich durch akustische Dämpfung verursacht wird. Eine Bestimmung der resultierenden Güte wird über den Energieansatz durchgeführt, wobei der Energieverlust über akustische Strahlung (Schallenergie) erfaßt wird. Eine Überprüfung der theoretisch bestimmten Güten mit Meßwerten zeigte jedoch große Abweichungen, die auf die demzufolge unzulässige Vernachlässigung der viskosen Dämpfung zurückgeführt werden. Welche der beiden Dämpfungen im konkreten Falle überwiegt, hängt sehr stark von

der Resonatorgeometrie, den Randbedingungen und dem Schwingungsmodus ab (siehe Abschnitt 5.6).

Die Dämpfung durch innere Reibung ist gegenüber viskoser und akustischer Dämpfung vernachlässigbar klein. Messungen in Vakuum ergaben für reines einkristallines Silizium einen Wert $Q \approx 10^6$, für hochbordotiertes Silizium ein $Q \approx 10^4$ [Ste91].

5.4 Dämpfungseffekte in ANSYS

Im Programmsystem ANSYS wird die Dämpfungsmatrix $[C]$ aus Einzelkomponenten aufgestellt [Koh89]:

$$[C] = \alpha [M] + (\beta + \beta_c) [K] + \sum_{j=1}^{NMAT} \beta_j [k_j] + \sum_{k=1}^{NEL} [c_k] \quad (5.13)$$

$$\text{mit } \beta_c = \frac{\xi}{\pi f}$$

Die Werte α und β entsprechen den Rayleighschen Koeffizienten und sind frequenzunabhängig. Über ξ erhält die Dämpfungsmatrix $[C]$ eine frequenzabhängige Komponente, die aber nur auf die Steifigkeit bezogen ist und nicht vollständig dem prozentualen Dämpfungsmaß nach Gleichung (5.10) entspricht. Materialdämpfungseffekte können durch die Konstante β_j berücksichtigt werden.

Bestimmte Elementtypen erlauben die Simulation nicht eindeutig auf eine Dämpfungsart rückführbaren Materialverhaltens wie zum Beispiel bei Fluiden. Aus deren Materialkennwerten (Dichte, Kompressibilität, Viskosität) wird eine Elementdämpfungsmatrix $[C_k]$ aufgestellt und in die Gesamtdämpfungsmatrix übernommen.

Die Größen NMAT und NEL geben die Zahl der eingesetzten Materialien und Elementtypen an.

5.5 Simulation

Um mit den Messungen vergleichbare Aussagen aus der Simulation zu erhalten, wurden von den FE-Modellen mit Hilfe der Harmonic-Response-Analyse (KAN,6; Verhalten im Fre-

quenzbereich) frequenzabhängige Amplitudenverläufe berechnet. Aus den erhaltenen Amplituden- und Phasenverläufen lassen sich die Güte Q sowie das prozentuale Dämpfungsmaß ξ auslesen. Die Geometrie entspricht der einer Siliziummembran mit der Seitenlänge $a=9200\mu\text{m}$ und der Dicke $h=100\mu\text{m}$.

5.5.1 Prozentualer Dämpfungskoeffizient ξ

An dem aus zweidimensionalen Schalenelementen (STIF93) bestehenden und am Rand fest eingespannten Plattenmodell (Modell 3) wurde bei einer ganzflächigen Anregung mit einer Kraft von $F_0=12 \cdot 10^{-6} \text{ N}$ für die erste Eigenfrequenz $f=16835\text{Hz}$ das Verhalten von Amplitude und Phase in Abhängigkeit des Dämpfungskoeffizienten ξ untersucht. Gleichzeitig wurde mit Hilfe der berechneten Halbwertsbreiten nach Gleichung (5.11) überprüft, wie gut der in Gleichung (5.13) für das ANSYS-Programm eingesetzte Koeffizient ξ_{ein} mit dem aus den simulierten Kurven ausgelesenen ξ_{aus} des theoretischen Ansatzes nach Beziehung (5.4) übereinstimmt. Zu beachten ist, daß das Programm bei diesem Analysentyp keine Nichtlinearitäten berücksichtigt.

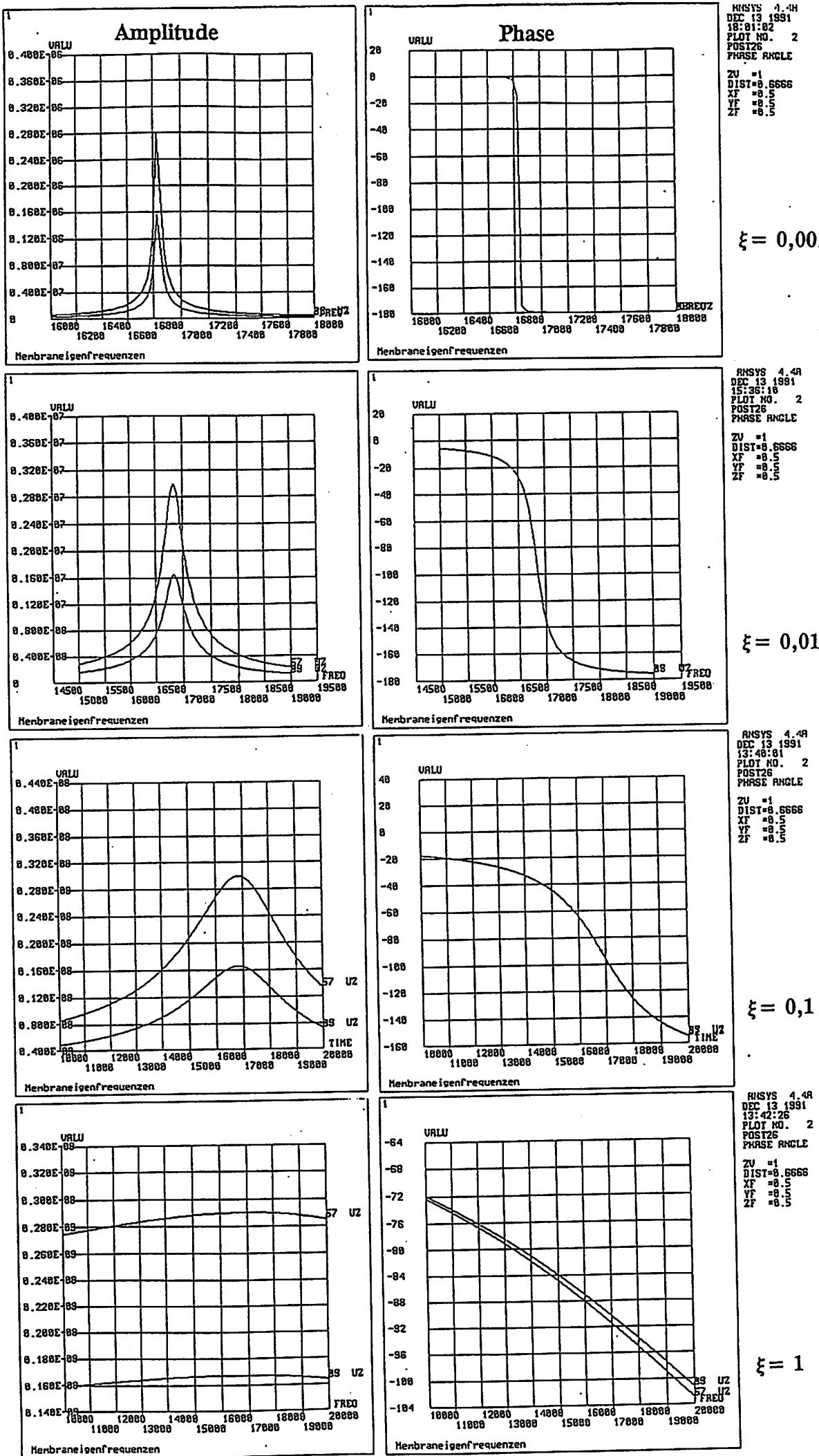
Tabelle 5.1.: Güte Q und Amplitude bei variiertem Dämpfungskoeffizienten ξ

ξ_{ein}	Amplitude in μm	Güte Q	ξ_{aus}
10^{-4}	2,9		unterhalb der Auflösung
10^{-3}	0,29	547,1	$0,91 \cdot 10^{-3}$
10^{-2}	0,029	48,6	$1,02 \cdot 10^{-2}$
10^{-1}	0,0029	4,56	0,105
1	0,00029	≈ 1	1
10	0,000029	< 1	

Aus Tabelle 5.1 ergibt sich beim Vergleich von ξ_{ein} und ξ_{aus} eine innerhalb der Ablesefehlertoleranz liegende Übereinstimmung. Das bedeutet, daß ein aus experimentellen Messungen bestimmtes ξ für folgende Simulationen als der die Dämpfung bestimmende Eingabewert $\text{DMPRT} = \xi_{\text{ein}}$ verwendet werden kann.

Diagramm 5.1 illustriert die Abhängigkeit des Amplituden- und Phasenverlaufes an der Resonanzstelle vom Maß der Dämpfung. Je größer der Dämpfungskoeffizient ist, umso flacher verläuft der Übergang. Aus Diagramm 5.2 ist ersichtlich, daß sich die Amplitude bei Resonanz mit dem prozentualen Dämpfungskoeffizienten umgekehrt proportional ändert.

Diagramm 5.1: Amplituden- und Phasenverlauf bei Variation des Dämpfungskoeffizienten ξ

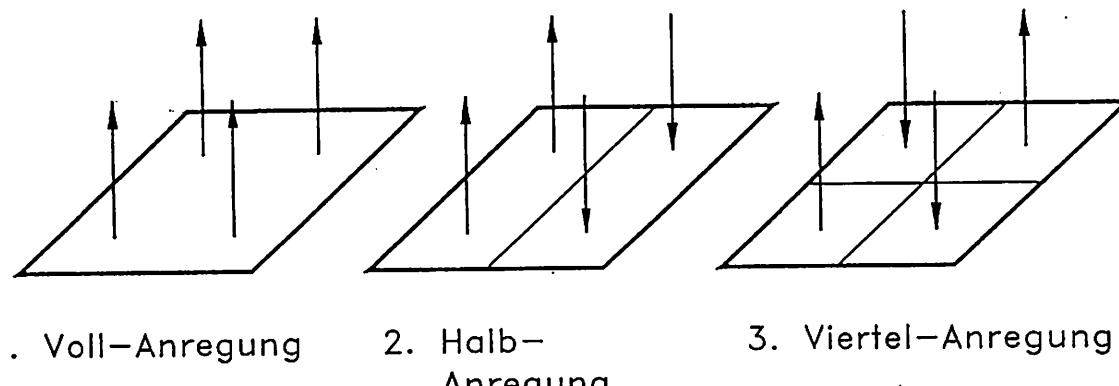


5.5.2 Anregungseinfluß und Modendämpfung

Das selbe Modell wurde bei konstantem $\xi=0,01$ mit variiertender Kraft f_0 ganzflächig angeregt und die Entwicklung der Amplituden der ersten drei Eigenfrequenzmoden bestimmt (siehe Diagramm 5.3). Ihre Größe ändert sich proportional zur Kraft, wobei das Ergebnis bei großen Amplituden ($> \frac{1}{3}h$) auf Grund der nicht einbezogenen Nichtlinearitätseffekte von der Realität abweicht.

Die Güte Q sowie der auszulesende Dämpfungskoeffizient ξ_{aus} bleiben unabhängig von der Größe der anregenden Kraft konstant.

Bild 5.1: Anregungsarten



Zur Untersuchung der Modendämpfung wurde die anregende Kraft im Wert konstant gehalten und in Angriffsrichtung in drei Fällen variiert (Bild 5.1). Tabelle 5.2 zeigt die simulierten im Vergleich zu den nach Gleichung (2.3) errechneten Eigenfrequenzen der jeweiligen Moden. Der Ablesefehler beträgt etwa 200 Hz. In Diagramm 5.4 sind für alle drei Anregungsformen die Amplituden in Abhängigkeit vom Schwingungsmodus aufgetragen. Für jeden Mode wurden die jeweils größten Amplituden dargestellt.

Tabelle 5.2: Eigenfrequenzen in Hz bei Anregungsvarianten nach Bild 5.1

Mode	11	21,12	22	31	13	32,23	33
1.Anr.	16923				68462		100000
2.Anr.	16800	35354		67700	68269	78461	100000
3.Anr.		35385	50000			78461	
Theor	16674	33992	50124	61036	61327	76496	102044

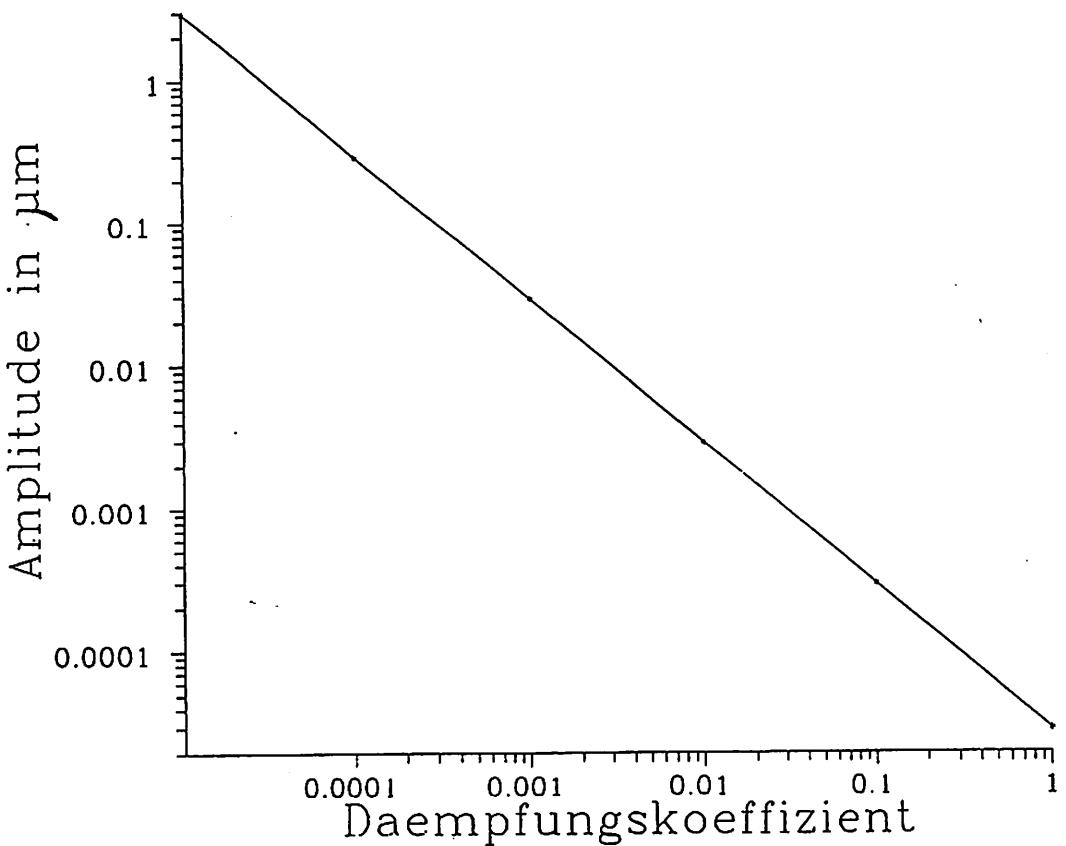


Diagramm 5.2: Amplitude bei veraenderlichem Daempfungskoeffizienten

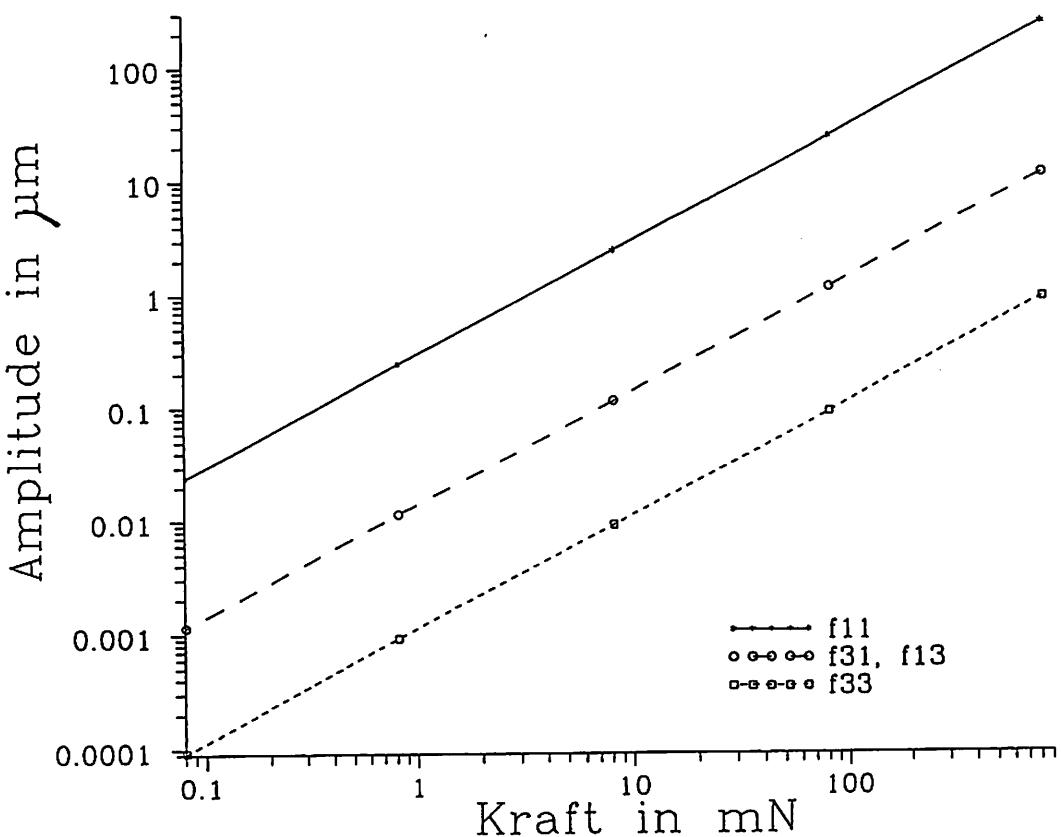
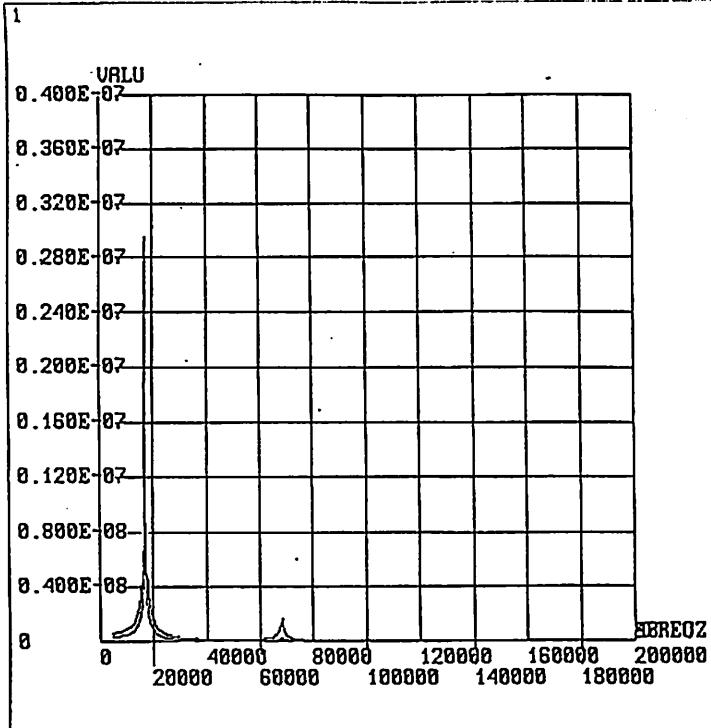
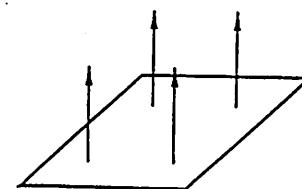


Diagramm 5.3: Amplitude bei veraenderlicher Anregungsgroesse

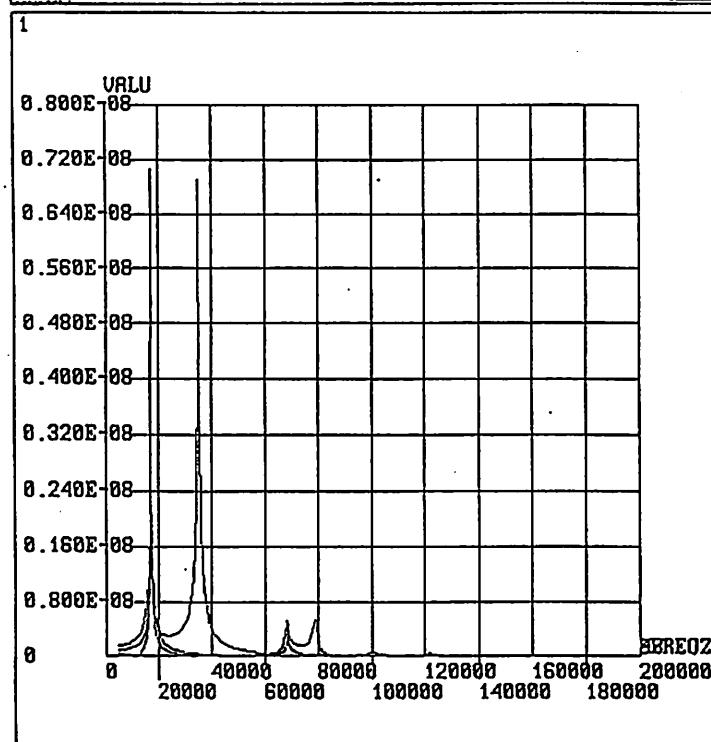
Diagramm 5.4: Amplitudenspektren bei Anregungsvariation



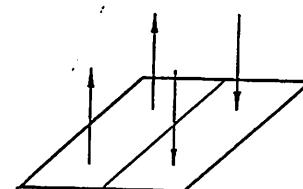
ANSYS 4.4R
DEC 9 1991
15:53:49
PLOT NO. 1
POST26
AMPLITUDE
ZU =1
DIST=0.6666
XF =0.5
YF =0.5
ZF =0.5



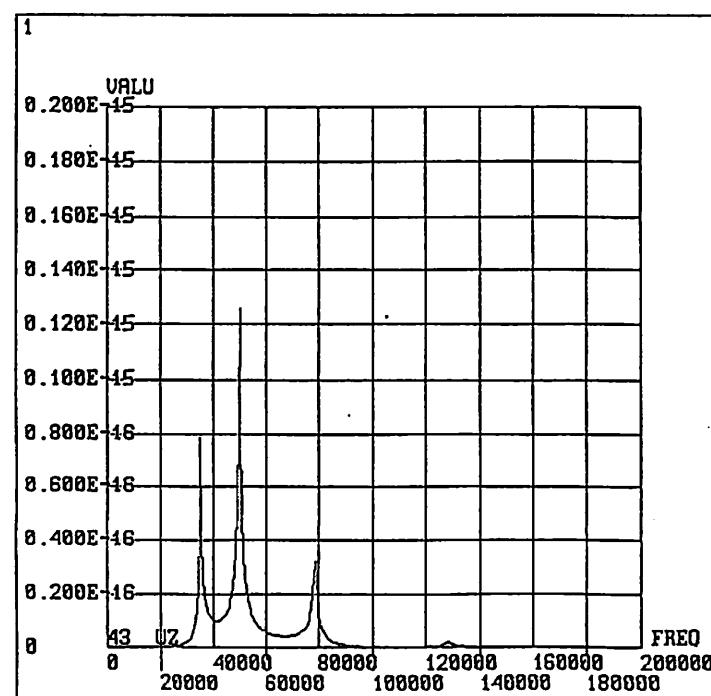
1. Voll-Anregung



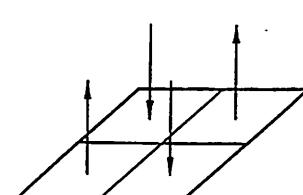
ANSYS 4.4R
DEC 9 1991
15:59:09
PLOT NO. 1
POST26
AMPLITUDE
ZU =1
DIST=0.6666
XF =0.5
YF =0.5
ZF =0.5



2. Halb-Anregung



ANSYS 4.4R
DEC 10 1991
33:52:34
PLOT NO. 1
POST26
AMPLITUDE
ZU =1
DIST=0.6666
XF =0.5
YF =0.5
ZF =0.5



3. Viertel-Anregung

Die Güten liegen für alle Moden unabhängig von der Anregung im Bereich $Q=35..65$ und sind unter Beachtung der Fehler des Ausleseverfahrens als in etwa gleich groß anzusehen. Die Amplituden der drei Anregungsvarianten verhalten sich zueinander wie Variante 1/2/3 = $1/0,239/1,844 \cdot 10^{-8}$. Daraus ist abzulesen, daß die Art der Anregung beim FE-Modell keinen Einfluß auf die Güte des Schwingers hat, wohl aber auf die angeregten Schwingungsmoden und deren Amplituden. Je höher die Ordnung des angeregten Modes ist, umso kleiner ist bei konstanter Anregungsstärke die maximale Auslenkung, und umso geringer ist der Amplitudenabstand zu den nächsten, mit angeregten Moden.

5.5.3 Fluiddämpfung

In den bisher verwendeten Modellen wurden Dämpfungseinflüsse durch einen aus Messungen bestimmten prozentualen Dämpfungskoeffizienten $\xi=0,01$ erfaßt. Um Aussagen über die Wirkung der einzelnen in Abschnitt 5.3 aufgeführten Dämpfungskomponenten, insbesondere der akustischen und viskosen Dämpfung treffen zu können, wurde das bereits in Abschnitt 3 verwendete dreidimensionale Viertelmodell der Membran mit realer Einspannung erweitert. Die auf der Ober- und der Unterseite der Membran angefügten Volumina sind mit einem Fluidelement (STIF80) vernetzt, daß durch die zugewiesenen Materialkoeffizienten für Luft bei 20°C (Dichte = $1,1881\text{kg/m}^3$, dynamische Viskosität = $17,98 \cdot 10^{-6}\text{kg/ms}$, Kompressibilität = 10^5Pa nach [Her89]) den umgebenden Luftraum abbilden soll (Bild 5.2). Die Materialdämpfung wird durch ein $\xi=10^{-5}$ einbezogen.

Die mit diesen Modelldaten abgeschätzten Güten von $Q>1000$ stimmen nicht mit den gemessenen Güten (siehe Abschnitt 5.6) überein. Trotz Variationen verschiedener Randbedingungen (Luftvolumina fest eingespannt bzw. unter Luftdruckbelastung) ergab sich keine Annäherung an die ermittelten Werte. Erst nach der Vergrößerung der Viskosität auf einen unrealistischen Wert von 10^2 fiel der Gütwert auf $Q=15$.

Ursachen für diese Diskrepanz können zum einen darin liegen, daß die gemessenen Güten weder durch akustische noch durch viskose Dämpfung, sondern durch andere Einflüsse wie z.B. Randeinspannungen und Anregungsspektrum geprägt sind. Zum anderen kann dieses Modell nur viskose Dämpfungseffekte berücksichtigen, da das verwendete Element nur viskose Eigenschaften des Fluides wiedergibt, andere (Kompression) aber nicht umfaßt. Die viskose Dämpfung hätte demzufolge einen wesentlich geringeren Einfluß auf die Gesamtdämpfung als der akustische Dämpfungsanteil.

5.6 Messungen

Der Meßaufbau, die Meßobjekte und die verwendeten Anregungsarten entsprechen den in Abschnitt 4 beschriebenen Meßbedingungen. Das Bestimmen der Gütewerte erfolgte über das Auslesen der Halbwertsbreite aus dem gemessenen Frequenzspektrum. Zur Schwingungsanregung wurden verschiedene Methoden angewendet.

5.6.1 Anregungseinfluß

Die in Anhang 5.1-2 zusammengefaßten Meßwerte für Güten verschiedener Membranen gleicher und unterschiedlicher Geometrie zeigen auf Grund der Ungenauigkeit der Meßmethode eine große Streuung.

Den Meßwerten ist zu entnehmen, daß bei direkter Anregung eine höhere Güte erzielt wird als bei indirekter Anregung durch einen Piezoschwinger. Zu erklären ist dies mit der Überlagerung des Anregungsspektrums mit dem Frequenzspektrum der zu messenden Membran.

Um das Anregungsspektrum aus den Ergebnissen herauszufiltern, wurden die Spektren der mit Aluminium beschichteten Membranen durch das Spektrum des Piezoschwingers dividiert und somit normiert (siehe Diagramm 5.5). Es zeigt sich die erwartete Erhöhung des Gütewertes. Schwankungen des Ergebnisses sind auf ungleiche Amplitudenmaßstäbe des Anregungs- und des Membranspektrums zurückzuführen und können durch eine Amplitudennormierung vor der Division verringert werden.

Tabelle 5.3: Güten höherer Moden für Membran ME150Bo2

Mode	11	13	33	
f_{ei} - gemessen	18830 Hz	73259 Hz	120058 Hz	170033 Hz
Güte Q	161	197	398	422
f_{ei} - berechnet	22674	83265	138766	

5.6.2 Dämpfungsverhalten höherer Moden

Eine mit ZnO beschichtete Membran wurde direkt angeregt und für vier Eigenfrequenzmoden die Güten bestimmt (siehe Tabelle 5.3). Es ist ein deutliches Anwachsen der Güte bei höheren Schwingungsmoden zu verzeichnen. Ursache dafür sind zum einen die im Vergleich zum Grundmode kleineren Schwingungsamplituden, welche geringere Geschwindigkeiten und damit geringere Dämpfungswerte zur Folge haben. Zum anderen wird auf Grund des Modenbildes weniger Schallenergie abgestrahlt, sondern das Fluid wird bewegt (siehe Bild 5.3). Die Folge ist ein zunehmender Anteil viskoser Dämpfung, wohingegen der Anteil der akustischen Dämpfung abnimmt [Ste91].

Bild 5.2: Akustische und viskose Dämpfungsanteile

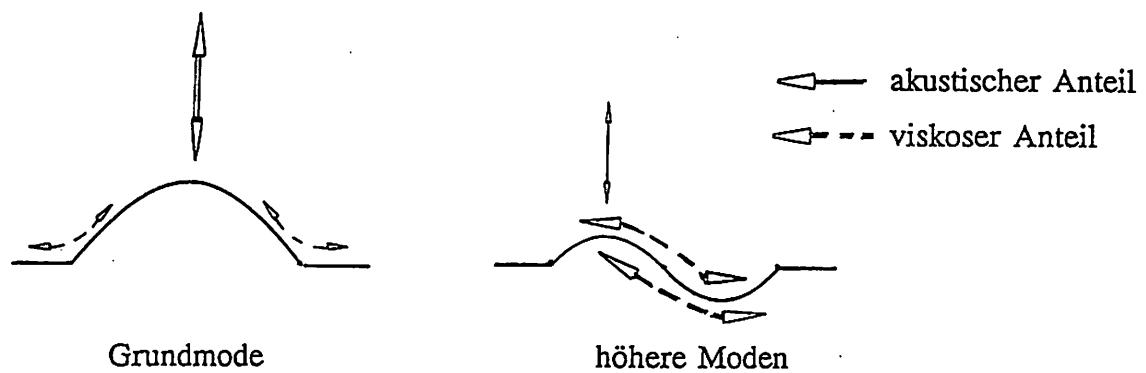
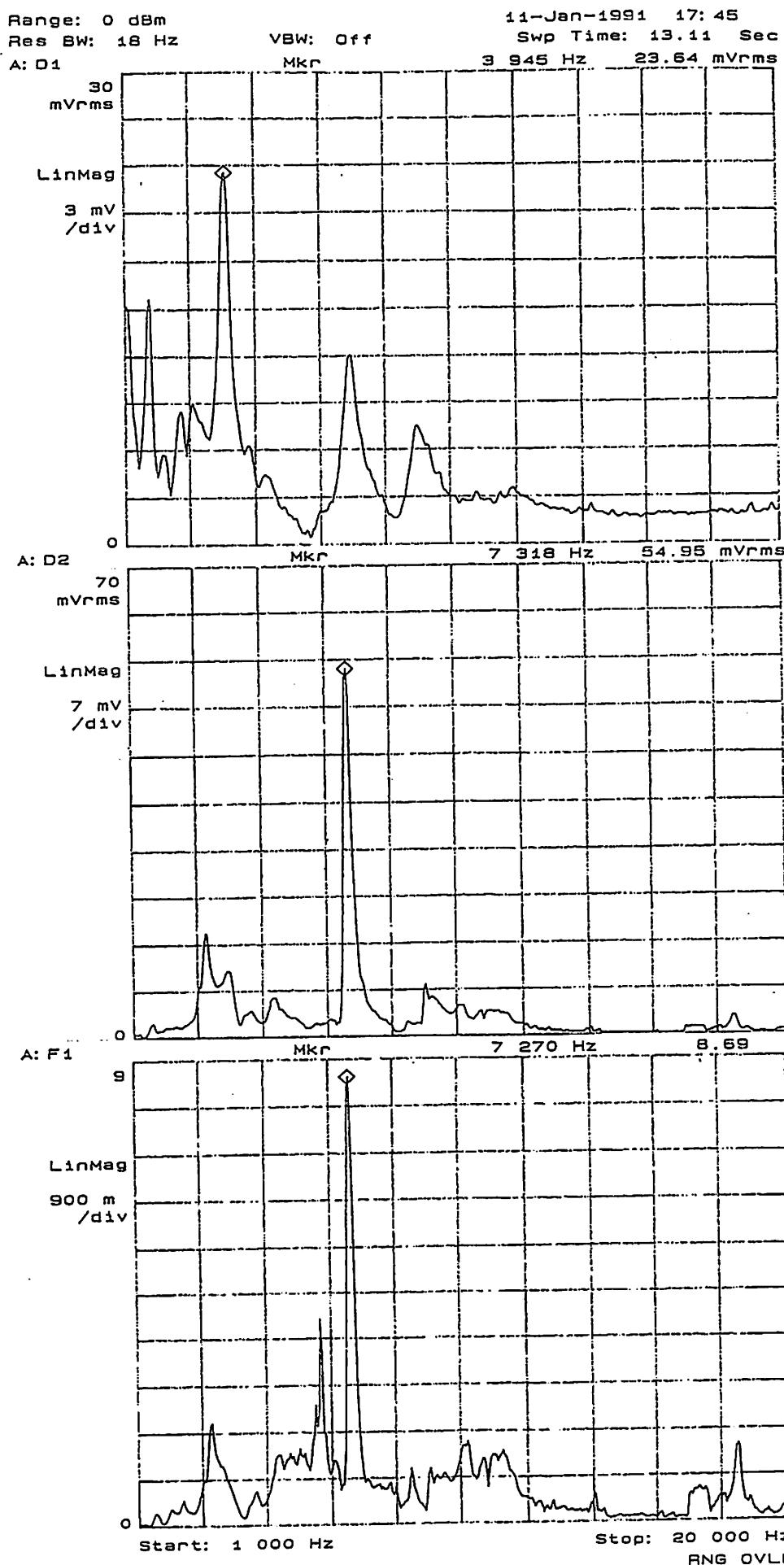


Diagramm 5.5: Amplitudenspektren der Membran ZnO8 (gemessen)



5.7 Zusammenfassung

Aus den Untersuchungen zur Dämpfung einer in einem Fluid schwingenden Siliziummembran geht hervor, daß neben dem umgebenden Medium auch Einspannung, Anregungsart und -stärke und Schwingungsmoden einen Einfluß auf die Güte des Membranelementes haben.

Die das Verhalten bestimmende Dämpfungsart ist bei Schwingung in Luft die akustische Dämpfung. Zu folgern ist dies aus der Erhöhung der Güte bei höheren Moden, die auf eine Abnahme der akustischen Dämpfung auf Grund des Modenbildes zurückgeführt werden kann. Dies erklärt auch die Abweichungen des FEM-Modells in 5.5.3 von der experimentellen Messung, da es nur die viskosen Eigenschaften des Fluides berücksichtigt.

Da akustische und viskose Dämpfung abhängig vom Betrag der Geschwindigkeit der Bewegung im Fluid sind, hat jede Änderung dieser (und damit der Amplitude) eine Änderung des Dämpfungskoeffizienten und damit der Güte zur Folge. Dies erklärt den starken Einfluß amplitudenbestimmender Größen wie Einspannung und Anregungsstärke auf die Güte.

Die Größenordnung der Güte einer frei in Luft (0,98 bar, 22°C) schwingenden Membran ist je nach Einspannung, Mode und Anregung mit $Q \approx 30..600$ anzugeben. Bei einseitiger Verkapselung, also starker Verkleinerung des Luftvolumens verringert sich die Güte etwa um den Faktor drei.

Zur Einbeziehung der Dämpfung in Simulationen mit dem Programm ANSYS genügt ein durch vorherige Messungen (auch an ähnlichen Objekten) bestimmtes ξ_{ein} .

Aus den Betrachtungen folgt, daß der Einfluß von Dämpfungseffekten auf das dynamische Verhalten nicht zu vernachlässigen ist. Um jedoch zu quantitativ verallgemeinerungsfähigen Aussagen zu gelangen, müssen Meßmethoden und Simulationsmodelle noch wesentlich verbessert werden.

6 Anwendungen

Die aufgestellten analytischen Beziehungen können zum einen zur Dimensionierung von frequenzanalogen Druckwandlerelementen dienen, indem aus vorgegebenen Funktionsparametern die geometrischen Abmessungen der Membran berechnet werden. Zum anderen besteht die Möglichkeit, für ein existierendes Objekt geometrische Abmessungen (z.B. Dicke) und technologische Parameter (z.B. Schichtspannung) zu bestimmen.

Die das Verhalten des Elementes bestimmenden technischen Parameter sind:

- a ... Membranseitenlänge
- h ... Membrandicke
- p_{\min} ... minimal zu messender Druck (i.a. = 0 kPa)
- p_{\max} ... maximal zu messender Druck
- f_0 ... Arbeitspunkt frequenzseitig (Arbeitsfrequenz)
- Δp_{\min} ... minimale Auflösung im Druckbereich, abhängig von gewünschter Meßgenauigkeit
- Δf_{\min} ... minimale Auflösung im Frequenzbereich, abhängig von der Auswerteschaltung
- η ... Empfindlichkeit in Hz/Pa, $\eta = b \cdot f_0 / p_0 = 0,00048 \cdot f_0 / p_0$ für Bereich 2
- F_L ... Linearitätsfehler; abhängig vom Arbeitsbereich des Sensorelementes. Für den Betrieb des Sensors im linearen Bereich steht F_L mit $F_L < 1\%$ (siehe Abschnitt 3.4) fest. Für andere Betriebsbereiche muß er durch entsprechende elektronische Auswerteschaltungen ausgeglichen werden, um die Kennlinie zu linearisieren.

Folgende analytische Beziehungen stehen zur Verfügung:

$$\begin{aligned} p = p(d,a,h) &\Leftrightarrow d = d(p,a,h) \\ f = f(p,a,h) &\Leftrightarrow p = p(f,a,h) \\ f = f(d,a,h) &\Leftrightarrow d = d(f,a,h) \\ f_0 = f(a,h) \\ f_0 = f(\Delta p_{\min}, LF, f_H) \\ f = f(f_0, a, h, \sigma) \end{aligned}$$

6.1 Geometriedimensionierung

Am Beginn einer Sensordimensionierung stehen die Anforderungen an den Meßbereich. Für einen Drucksensor wird dies der zu messende Druckbereich sein, verbunden mit der Forderung nach einem möglichst linearen Verlauf. Für den Druckbereich ist ein zu messender Maximaldruck p_{\max} vorgegeben. Ein linearer Verlauf ergibt sich für den Bereich 2 nach Abschnitt 3.3. Für die Annahme, daß bei Maximaldruck das obere Ende des linearen Bereiches erreicht sein soll, ergibt sich für p_0 ein Wert von $p_0 = p_{\max}/800$.

Aus Gleichung (3.13) folgt für das Verhältnis a/h:

$$\frac{a}{h} = \sqrt[4]{\frac{E}{12p_0(1 - v^2)}} \quad (6.1)$$

Eine der Abmessungen a oder h ist vorzugeben. Kriterien zur Bestimmung der Größenordnung sind die angestrebten mikromechanischen Abmessungen, bei Beachtung der technologischen Herstellungsgrenzen (ca. $1\mu\text{m}$).

Ergibt sich für das Verhältnis a/h ein Wert < 100 , so entsteht vor erreichen des Maximaldrucks in der Siliziummembran eine Spannung, die die Bruchspannung für Silizium übersteigt und zur Zerstörung der Membran führen kann (Siehe Abschnitt 3.2.4). In diesem Fall ist der Maximaldruckwert im linearen Bereich nach unten zu verschieben, $p_0 = p_{\max}/\text{var}$ mit $200 < \text{var} < 800$.

Aus den so bestimmten Werten für a und h lässt sich nach Gleichung (2.1) die Eigenfrequenz f_0 der Membran bestimmen.

Mit der maximalen Mittenauslenkung $d_{\max} = h \cdot 0,001\text{var}$ der Membran folgt für die maximale Frequenz:

$$f_{\max} = f_0 \sqrt{1 + 1,25 \left(\frac{d_{\max}}{h}\right)^2} = 0.94 + 0,00048 \frac{p_{\max}}{p_0} \quad (6.2)$$

Für die Empfindlichkeit des Sensors ergibt sich:

$$\eta = b \frac{f_0}{p_0} = 0.00048 \frac{f_0}{p_0} \quad (6.3)$$

Die durch die Auswerteschaltung zu realisierende minimale Frequenzauflösung gibt die Beziehung

$$\Delta f_{\min} = S F_L f_0 ; \quad S := 0,1 ; \quad F_L = 1\% \quad (6.4)$$

vor, wobei S ein Sicherheitsfaktor ist, um den Auslesefehler im Verhältnis zum Linearitätsfehler zu minimieren.

Für die minimale Auflösung im Druckmeßbereich folgt schließlich:

$$\Delta p_{\min} = \frac{\Delta f_{\min}}{\eta} \quad (6.5)$$

Damit ist der gewünschte frequenzanaloge Drucksensor hinsichtlich seiner technischen Parameter bestimmt.

6.2 Schichtspannungsbestimmung

In Abschnitt 3.5 ist der Effekt der Eigenfrequenzverschiebung durch eine verspannte Schicht auf der Membran beschrieben. Bei Kenntnis der Dicke und der Kantenlänge der Membran kann mit Hilfe der gemessenen Eigenfrequenz f_g die Spannung in der Schicht ermittelt werden. Voraussetzung ist, daß noch keine statische Auslenkung der Membran vorliegt. In diesem Falle müßte die gemessene Eigenfrequenz f_{ga} über die Umkehrung der in Abschnitt 3.4 hergeleiteten Gleichungen auf die Eigenfrequenz f_g ohne Auslenkung zurückgeführt werden. Dazu ist die Kenntnis der Auslenkung nötig.

Mit der ermittelten Frequenz f_g und der aus den Gleichungen (3.30) und (2.3) folgenden Beziehung

$$\sigma = 4,545 \rho \frac{h^2}{a^2} \left(\frac{4\pi^2 f_g^2 a^4}{\lambda^2 h^2} - \frac{E}{12\rho(1-v^2)} \right) \quad (6.6)$$

läßt sich die in der Schicht vorhandene innere Spannung ermitteln.

Ist die Schichtdicke im Verhältnis zur Dicke der Membran klein, so kann der Einfluß des Schichtelastizitätsmoduls auf den Gesamtanordnung vernachlässigt werden. Im anderen

Falle lässt sich ein gewichtetes E_w über eine Wichtung der einzelnen E-Module herleiten:

$$\hat{E}_w = \sum_i \frac{h_i^{Schicht}}{h_{gesamt}} \hat{E}_i^{Schicht} ; \quad \hat{E}_i = \frac{E_i}{1 - v_i^2} \quad (6.7)$$

In gleicher Weise ist für die Dichte ρ eine gewichtete Dichte ρ_w bestimmbar.

Für die gemessene Membran ME150Bo2 ergibt sich für eine Dicke des Siliziums von $h_{Si}=148\mu m$ und des Zinkoxides von $h_{ZnO}=15\mu m$ sowie einer Kantenlänge $a=9500\mu m$ und einer gemessenen Eigenfrequenz von $f_g=18884 Hz$ eine Spannung von $\sigma=-102,35 MPa$. Verwendet wurde dabei ein $E=1,689 \cdot 10^{11}$ und ein $\nu=0,0625$. Eine Korrektur ist auf Grund der großen Schichtdickenunterschiede nicht notwendig.

7 Zusammenfassung

Für das mikromechanische Element Membran wurden Finite-Elemente-Modelle aufgestellt und in Vernetzungsgrad, verwendetem Einzelementtyp, Materialkennwerten und Einspannung variiert. Die Ausgangsgeometrie bildete eine quadratische, fest eingespannte Membran.

Für jedes der Modelle erfolgte die Bestimmung der Eigenfrequenzen und -formen. Aus deren Vergleich wurden Aussagen zu prozentualen Abweichungen der Modelle untereinander sowie zu analytischen Gleichungen für dieses Problem abgeleitet, die in Abhängigkeit zum varierten Parameter aufgeführt sind.

Eines dieser Modelle wurde in Kantenlänge und Dicke variiert. Jede der Varianten erhielt eine Beaufschlagung mit stufenweise sich änderndem Druck. Mit Hilfe dieser statischen Simulation wurde eine analytische Beziehung zwischen Mittenauslenkung und beaufschlagtem Druck aufgestellt.

Von dem im ersten Simulationsschritt statisch verformten Modell wurden mit einer dynamischen Analyse Eigenfrequenzen und -formen bestimmt. Daraus ergab sich ein analytischer Zusammenhang für die Eigenfrequenzverschiebung in Abhängigkeit von der Mittenauslenkung der Membran.

Aus der Überlagerung beider Abhängigkeiten folgte der Zusammenhang für die Eigenfrequenzverschiebung als Funktion des wirkenden Druckes. Für dessen Verlauf ist eine Dreiteilung feststellbar. Für jeden der Teile wurde eine analytische Gleichung aufgestellt. Für kleine Drücke und demzufolge kleine Auslenkungen ist der Verlauf progressiv, für den zweiten Bereich verläuft der Zusammenhang linear, und für große Drücke ist der Verlauf degressiv.

Der Einfluß von Vorspannungen durch Schichten anderen Materials auf dem Silizium auf die Eigenfrequenz der Membran wurde untersucht und beschrieben. Eine Möglichkeit zur Ermittlung der Schichtspannung aus der Eigenfrequenzverschiebung wurde vorgestellt. Die Wirkung von Temperatureinflüssen auf das dynamische Verhalten der Membran wurde

abgeschätzt.

Durch Messungen an piezoelektrisch angeregten Membranen wurden die beschriebenen Zusammenhänge überprüft. Auf Grund der unvollkommenen Meßbedingungen und der Beschichtung der Meßobjekte mit ZnO kann nur eine qualitative Bestätigung dieser erfolgen.

Abschließend werden mögliche Anwendungen der in der Arbeit aufgestellten Zusammenhänge dargestellt. Ein Beispiel erläutert die Dimensionierung eines frequenzanalog arbeitenden Membranwandlerelementes, in einem zweiten Beispiel wird die Berechnung einer Schichtspannung aus einer gemessenen Eigenfrequenzverschiebung erläutert.

Literaturverzeichnis

- [Bat86] Bathe, K.-J.:
Finite-Elemente-Methoden
Springer-Verlag, Berlin, (1986)
- [Ble84] Blevins, R.D.:
Formulas for natural frequency and mode shape
R.E. Krieger Publishing Company, Malabar/Florida (1984)
- [Bou90] Bouwstra, S.:
Resonating microbridge mass flow sensor
Dissertation, Universität Twente, (1987)
- [Bro89] Bronstein, I.N.; Semendjajew, K.A.:
Taschenbuch der Mathematik
Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/M., 24.Aufl., (1989)
- [Büt91] Büttgenbach, S.:
Mikromechanik
B. G. Teubner, Stuttgart, (1991)
- [Cha87] Chan, H.-L.; Wise, K.D.:
Scaling limits in batch-fabricated silicon pressure sensors
IEEE Transaction on electronic devices, Vol.ED-34, N°4,
April (1987), S.850-858
- [Dub87] Dubbel, H.:
Taschenbuch für den Maschinenbau
Springer-Verlag, Berlin, 16. Aufl., (1987)

- [Ger82] Gerthsen, C.; Kneser, H.O.; Vogel, H.:
Physik
Springer Verlag, Berlin, (1982), 14. Auflage
- [Gio82] di Giovanni, M.:
Flat and corrugated diaphragm design handbook
Marcel Decker ,Inc., New York and Basel, (1982)
- [Her89] Hering, E.; Martin, R.; Stohrer, M.:
Physik für Ingenieure
VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf, (1989)
- [Heu89] Heuberger, A. (Hrsg.):
Mikromechanik
Springer-Verlag, Berlin, (1989)
- [Koh89] Kohnke, P.C.:
ANSYS Revision 4.4, Theoretical Manual
Swanson Analysis System, Inc., Houston, (1989)
- [Mei86] Meirovitch, L.:
Elements of vibration analysis
McGraw-Hill Book Company, New York, 2.ed., (1986)
- [Nik90] Nikitin, N.N.:
Kurs teoretitscheskoi Mechaniki
Wuisschaja Schkola, Moskwa, (1990)
- [Pfe89] Pfeifer, G.; Werthschützky, R.:
Drucksensoren
VEB Verlag Technik, Berlin, (1989)

- [Pol91] Operator's Manual:
OFV 1102 Vibrometer
Polytec GmbH, Waldbronn, (1991)
- [Pon91] Pons, P.; Blasquez, G.:
Natural vibration frequencies of silicon diaphragms
Tranducers of the IEEE, (1991), S.543-546
- [Pra91] Prak, A.; Blom, F.R.; Elwenspoek, M.; Lammerink, T.S.J.:
Q-factor and frequency shift of resonating silicon diaphragms in air
Sensors and Actuators, May (1991), S.691-698
- [Ram90] Ramm, E.; Müller, J.; Müller, G.; Schweizerhof, K.:
Dynamische Berechnungen mit der Methode der finiten Elemente
Seminarunterlagen, CAD-FEM GmbH Ebersberg, (1990)
- [Ste91] Stemme, G.:
Resonant silicon sensors
J. Micromech. Microeng., 1(1991), S.113-125
- [Tim70] Timoshenko, S.P.; Woinowsky-Krieger, S.:
Theory of plates and shells
McGraw-Hill Book Company, New York, 2.ed., (1970)
- [Tim90] Timoshenko, S.P.; Young, D.; Weaver, W.:
Vibration problems in engineering
John Wiley & Sons, Inc., New York, 5.ed., (1990)
- [Ton91] Tong, L.; Hsu, J.-T.; Ko, W.H.; Ding, X.:
The Analysis of Capacitive Pressure Sensors with Large Deflection
Transducers of the IEEE, San Francisco, (1991), S.185-187

- [UBM91] Optisches Meßsystem Microfocus
Bedienungsanleitung
UBM Meßtechnik GmbH, Ettlingen, (1991)
- [Utt87] Uttamachandi, D.; Thornton, K.E.B.; Nixon, J.; Culshaw, B.:
Optically excited resonant diaphragm pressure sensor
Electronics Letters, Feruary (1987), Vol.23 No.4, S.152-153
- [You50] Young, D.:
Vibration of rectangular plates by the Ritz method
Journal of applied mechanics ,Dec. (1950), S.448-453

Verzeichnis der Diagramme

<u>Diagr.-Nr.:</u>	<u>Titel</u>	<u>Seite</u>
Diagramm 3.1a:	Membranmittenauslenkung bei Druck, a: 9200 μm , h: 100 μm	28
Diagramm 3.1b:	Membranmittenauslenkung bei Druck, a: 9200 mm, h: 50 μm	28
Diagramm 3.1b:	Membranmittenauslenkung bei Druck, a: 9200 mm, h: 25 μm	28
Diagramm 3.2:	Membranmittenauslenkung bei Druck, Parametereinfluß	30
Diagramm 3.4a:	Eigenfrequenzverschiebung bei Mittenauslenkung	34
Diagramm 3.4b:	Eigenfrequenzverschiebung bei Mittenauslenkung	34
Diagramm 3.5:	Eigenfrequenzverschiebung höherer Moden bei Membranmittenauslenkung	36
Diagramm 3.6:	Einfluß des Seiten/Dickenverhältnisses a/h auf die Eigenfrequenzverschiebung	36
Diagramm 3.7a:	Eigenfrequenzverschiebung bei Druck, Bereich 3	39
Diagramm 3.7b:	Eigenfrequenzverschiebung bei Druck, Bereiche 1,2 und 3	39
Diagramm 4.1:	Frequenzverschiebung bei Druckbeaufschlagung, ME150Bo	51
Diagramm 4.2:	Frequenzverschiebung bei Druckbeaufschlagung, MEM50Bo	51
Diagramm 5.1:	Amplituden- und Phasenverlauf bei Variation des Dämpfungskoeffizienten ξ	60
Diagramm 5.2:	Amplitude bei veränderlichem Dämpfungskoeffizienten	62
Diagramm 5.3:	Amplitude bei veränderlicher Anregungsgröße	62
Diagramm 5.4:	Amplitudenspektrum bei Anregungsvariation	63
Diagramm 5.5:	Amplitudenspektren der Membran ZnO8 (gemessen)	67

Tabellenverzeichnis

<u>Tab.-Nr.:</u>	<u>Titel</u>	<u>Seite</u>
Tabelle 2.1:	Normierte Eigenfrequenzen λ_{ij}	10
Tabelle 2.2:	Übersicht der berechneten FE-Modelle	12
Tabelle 2.3:	Vergleich der Modellparametereinflüsse auf die Eigenfrequenzen	17
Tabelle 2.4:	Vergleich von Spannungen und max. Durchbiegung bei Druckbeaufschlagung	18
Tabelle 3.1:	Konstanten k_i	24
Tabelle 3.2:	Auslenkung bei Bruchspannung	31
Tabelle 3.3:	Eigenfrequenzen bei Druckspannung	41
Tabelle 4.1:	Statische Auslenkung d nach gemessenen Eigenfrequenzen	49
Tabelle 4.2:	Membranabmessungen	50
Tabelle 5.1:	Güte Q und Amplitude bei variiertem Dämpfungskoeffizienten ξ	59
Tabelle 5.2:	Eigenfrequenzen in Hz bei Anregungsvarianten nach Bild 5.1	61
Tabelle 5.3:	Güten höherer Moden für Membran ME150Bo2	65

Abbildungsverzeichnis

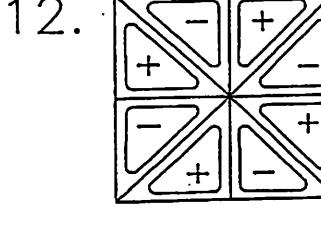
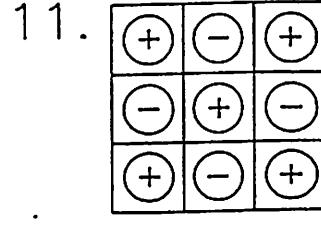
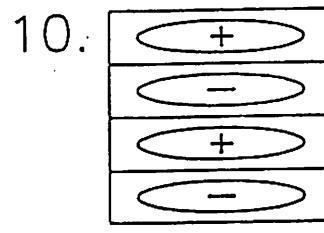
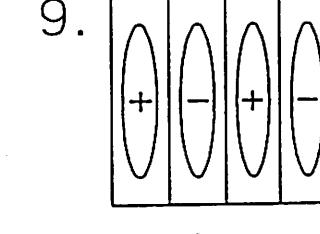
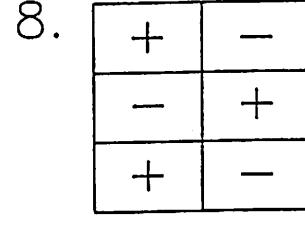
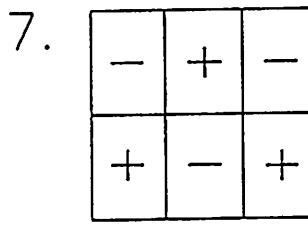
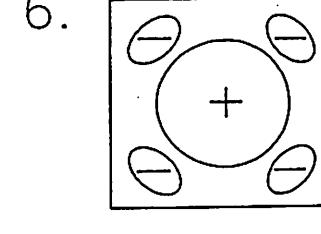
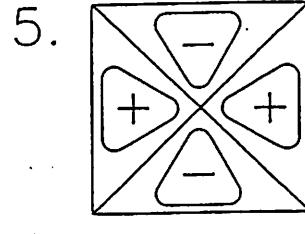
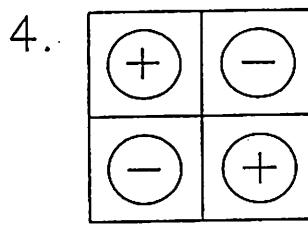
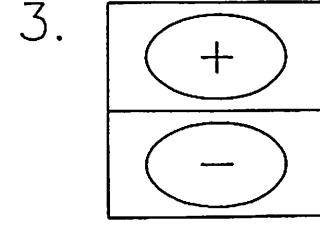
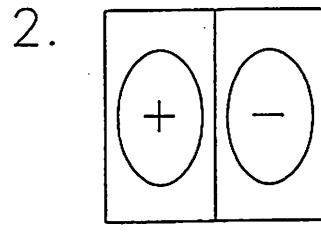
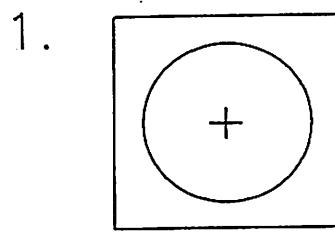
<u>Bild-Nr.:</u>	<u>Titel</u>	<u>Seite</u>
Bild 2.1:	Modelle 1 bis 5	11
Bild 2.2:	Modelle 6 bis 16	11
Bild 2.3:	Modelle 17 bis 21	11
Bild 3.1:	Spannungen und Momente nach [Tim70]	21
Bild 4.1a:	Meßaufbau	44
Bild 4.1b:	Meßprinzip	44
Bild 4.2:	Meßprinzip Laservibrometer	45
Bild 4.3:	Microfocus-Meßsystem	46
Bild 4.4:	REM-Dickenbestimmung	47
Bild 5.1:	Anregungsarten	61
Bild 5.2:	Akustische und viskose Dämpfungsanteile	66

Anhangsverzeichnis

<u>Anh.-Nr.:</u>	<u>Titel</u>
------------------	--------------

- Anhang 2.1: Schwingungsmodenbilder
- Anhang 2.2: Eigenfrequenzen in kHz; $a=9200 \mu\text{m}$; $h=100 \mu\text{m}$; Modelle nach Tabelle 2.2
- Anhang 4.1: Meßergebnisse für ZnO-beschichtete Membranen,
 $50 \mu\text{m}$ und $150 \mu\text{m}$ Solldicke
- Anhang 5.1: Meßergebnisse für ZnO-beschichtete Membranen,
 $25 \mu\text{m}$ Solldicke
- Anhang 5.2: Meßergebnisse für Al-beschichtete Membranen,
 $25 \mu\text{m}$ Solldicke

Anhang 2.1: Schwingungsmodenbilder



Anhang 2.2: Eigenfrequenzen in kHz; $a=9200 \mu\text{m}$, $h=100 \mu\text{m}$; Modelle nach Tabelle 2.2

Mode	analyt. Gl.(2.3)	Modell 1	Modell 2	Modell 3	Modell 4	Modell 5	Modell 6	Modell 7	Modell 8	Modell 9	Modell 10
11	16,670	16,681	16,674	16,651	16,641	16,817	16,787	16,759	16,780	16,248	17,212
21	34,0	34,138	34,113	33,939	33,902	34,393	34,527	34,355	34,257	33,616	35,936
12	34,0	34,138	34,113	33,941	33,902					33,616	
22	50,20	49,977	49,926	50,017	49,942					48,812	
31	60,95	61,702	61,628	60,804	60,680	62,826	62,645	62,122	61,493	61,871	66,410
13	61,22	62,011	61,939	61,1	60,987	63,124	62,951	62,413	61,794	62,085	66,558
32	72,34	76,327	76,216	76,224	76,048	79,457	78,923	77,707	76,949	75,904	87,264
23	72,34	76,332	76,221	76,237	76,048					75,908	
41	97,902	99,839	99,661	97,199	96,932					101,487	
14	97,902	99,875	99,695	97,305	96,932	102,481	102,151	100,504	98,682	101,510	110,385
33	102,31	100,945	100,755	101,655	101,315	107,457	106,372	103,832	102,551	101,558	122,383
42	113,0	112,93	112,686	111,833	111,369					114,960	

Anhang 2.2: Eigenfrequenzen in kHz; $a=9200\mu\text{m}$, $h=100\mu\text{m}$; Modelle nach Tabelle 2.2

[†]) Durch Querschwingungen überlagert, ^{*}) Mode 24

Mode	Modell 11	Modell 12	Modell 13	Modell 14	Modell 15	Modell 16	Modell 17	Modell 18	Modell 19	Modell 20	Modell 21
11	16,948	16,941	16,767	16,486	17,139	16,499	16,135	15,909	15,938	16,442	15,853
21	35,113	34,905		34,277	36,440	34,088					
12					36,446	35,279					
22					56,458	50,009					
31	64,085	63,676	65,911	63,356	69,043	63,361	60,666	59,789	60,443	60,673	59,520
13	64,461	63,987	66,020	63,693	69,323	69,580 [†]	60,905	60,030	60,675	60,963	59,768
32	81,239	79,642		78,602	91,635	78,297					
23					92,585	80,716 [*]					
41					117,271	105,791					
14	105,736	104,251		105,31	118,697	118,60 [†]					
33	110,468	107,053	117,361	106,597	132,171	107,332	97,337	95,913	98,545	101,758	95,454
42						120,94 [*]					

Anhang 4.1: Meßergebnisse für ZnO-beschichtete Membranen, 50 μ m und 150 μ m
Solldicke

geometrische Abmessungen: siehe Tabelle 4.2

Mem.-Nr.	ME150Bo2	ME150Bo3	ME150Bo4	ME150Bo6	MEM50Bo1
f _{ci} in Hz	18884	18908	19238	20169	7980

Anhang 5.1: Meßergebnisse für ZnO-beschichtete Membranen, 25 μ m Solldicke

geometrische Abmessungen: Dicke Silizium: 21,5 μ m ;REM
 Dicke ZnO: 4,8..4,9 μ m ;REM
 Dicke Al: 0,8..1 μ m ;REM
 Seitenlänge: (9296 \pm 6) μ m ;UBM

Theoretische erste Eigenfrequenz: 4088Hz

Mem.-Nr.:	stat. Durchb.	Anreg. direkt		Anreg. indirekt		aufgel.	
		f _{ei} [Hz]	Q	f _{ei} [Hz]	Q	f _{ei} [Hz]	Q
ZnO1	25 μ m	4770	25,1	4810	36		
ZnO2		7092	61,14	6690	48,5		
ZnO3	39 μ m	7368	88,8	6985	56,3	9700	13,7
ZnO4	32 μ m	6518	81,5	6298	31,8	9100	8,8
ZnO5	33,6 μ m			5490			
ZnO6		5392	22,4	5508	26		
ZnO7	38,6 μ m	7030	78,1	6392	53,3	9383	14,2
ZnO8	60,5 μ m			7245	53,7		
ZnO9	30,4 μ m	6662	50	6690	48,8		
ZnO10		5370	55,4	5564	19,6		

Die Werte für die statischen Durchbiegungen (außer ZnO8) sind zu klein, da die Membranen beim Messen auf der Oberseite auflagen. Die Auslesegenauigkeit der Eigenfrequenzen beträgt etwa \pm 8Hz. Im Fall "aufgel." wurden die Membranen auf einen anderen Wafer aufgelegt, wodurch das Luftvolumen an der Unterseite abgeschlossen wurde.

Anhang 5.2: Meßergebnisse für Al-beschichtete Membranen, $25\mu\text{m}$ Solldicke

geometrische Abmessungen: Dicke Membran: $(35 \pm 2)\mu\text{m}$; Rand
 $(45 \pm 2)\mu\text{m}$; Mitte

Seitenlänge: $(9334 \pm 4)\mu\text{m}$; UBM

theoretische erste Eigenfrequenz: 5670Hz, Rand - 7290Hz, Mitte

Mem.-Nr.	f_{ei} in Hz	Q	f_{ei} - normiert	Q - normiert
A11	6815	30,4	6552	87,4
A12	6890	31,75	6852	36,64
A13	6958	35,5	6418	77,3
A14	6320 ± 150		6368 ± 150	
A15	7025	55,3	6552	58,5

Normierte Werte sind aus dem nach Division durch das Anregungsspektrum der Piezokeramik entstandenem Frequenzspektrum ausgelesen.

E R K L Ä R U N G

Ich erkläre, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Andreas Schöfl

Chemnitz, 28. Februar 1992

Thesen zur Diplomarbeit

- Das nicht mehr mit geschlossenen analytischen Lösungen der zugehörigen Differentialgleichungen zu beschreibende dynamische Verhalten mikromechanischer Membranen kann mit der Finite-Elemente-Methode simuliert werden.
- Die Genauigkeit von Finite-Elemente-Modellen ist abhängig von Vernetzungsgrad, Elementtyp, Materialparametern und Idealisierung der Strukturgeometrie des Simulationsobjektes.
- Eine quadratische, fest eingespannte Membran ändert ihre Steifigkeit durch die bei Beaufschlagung mit einem Druck entstehende Auslenkung. Dadurch vergrößert sich der Wert der Eigenfrequenzen.
- Der mit Hilfe der Simulation errechnete Zusammenhang der Eigenfrequenzänderung bei Druckbeaufschlagung kann mit Hilfe analytischer Gleichungen beschrieben werden und verläuft in einem Teilbereich linear.
- Die Eigenfrequenz wird weiterhin beeinflußt durch Temperatur und Spannungen in Schichten auf der Membran.
- Eine quantitative Erfassung der Eigenfrequenzänderung bei Druck auf meßtechnischem Wege ist auf Grund der vielen möglichen Einflußfaktoren nur mit hohem Aufwand möglich.
- Dämpfungseffekte haben einen wesentlichen Einfluß auf das dynamische Verhalten und lassen sich über den prozentualen Dämpfungskoeffizienten beschreiben. Bei Schwingung einer Membran in Luft überwiegt der akustische Dämpfungsanteil.
- Die hergeleiteten analytischen Zusammenhänge lassen sich u.a. zur Dimensionierung von Drucksensoren oder zur Parameterbestimmung existenter mikromechanischer Membranen (Schichtspannungen, geometrische Abmessungen) verwenden.