AULA 24/11/2020 - MÉTODOS NUMÉRICOS

1. INTEGRAÇÃO NUMÉRICA – SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Aplicam-se os métodos já anteriormente estudados (Euler, RK2 e RK4) às duas equações que compõem o sistema. Não esquecer que agora temos uma variável independente (x) e duas variáveis dependentes (y e z).

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y' = f(x_n, y_n, z_n) \\ \dfrac{dz}{dx} = z' = g(x_n, y_n, z_n) \end{cases}$$

MÉTODO DE EULER

- Método de 1ª ordem, se o passo for adequado, **QC ≅ 2,** e o erro é calculado por: **ε '' = (S''- S').**

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \\ y_{n+1} = y_n + h \,.\, f(x_n, y_n, z_n) \\ z_{n+1} = z_n + h \,.\, g(x_n, y_n, z_n) \end{cases}$$

MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE SEGUNDA ORDEM RK2

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \\ y_{n+1} = y_n + h \,.\, f\left(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2} . y_n', z_n + \dfrac{h}{2} . z_n'\right) \\ z_{n+1} = z_n + h \,.\, g(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2} . y_n', z_n + \dfrac{h}{2} . z_n') \end{cases}$$

- Método de 2ª ordem, se o passo for adequado, **QC ≅ 4,** e o erro é calculado por: **ε '' = (S''- S')/3.**

MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM RK4

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{1}{6}\,\delta_{y1} + \dfrac{1}{3}\,\delta_{y2} + \dfrac{1}{3}\,\delta_{y3} + \dfrac{1}{6}\,\delta_{y4} \\ z_{n+1} = z_n + \dfrac{1}{6}\,\delta_{z1} + \dfrac{1}{3}\,\delta_{z2} + \dfrac{1}{3}\,\delta_{z3} + \dfrac{1}{6}\,\delta_{z4} \end{cases}$$

$$\delta_{y1} = h. f(x_n, y_n, z_n)$$
$$\delta_{y2} = h. f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{\delta_{y1}}{2}, z_n + \frac{\delta_{z1}}{2}\right)$$
$$\delta_{y3} = h. f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{\delta_{y2}}{2}, z_n + \frac{\delta_{z2}}{2}\right)$$
$$\delta_{y4} = h. f\left(x_n + h, y_n + \delta_{y3}, z_n + \delta_{z3}\right)$$

$$\delta_{z1} = h. g(x_n, y_n, z_n)$$
$$\delta_{z2} = h. g\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{\delta_{y1}}{2}, z_n + \frac{\delta_{z1}}{2}\right)$$
$$\delta_{z3} = h. g\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{\delta_{y2}}{2}, z_n + \frac{\delta_{z2}}{2}\right)$$
$$\delta_{z4} = h. g\left(x_n + h, y_n + \delta_{y3}, z_n + \delta_{z3}\right)$$

- Método de 4ª ordem, se o passo for adequado, **QC ≅ 16,** e o erro é calculado por: **ε '' = (S''- S')/15.**

Exercício: Considere o sistema de equações diferenciais. Integre numericamente o sistema pelos métodos de Euler, RK2 e RK4 entre 0 e 0,5.

Calcule o QC e o erro para cada um dos métodos. Indique, para cada método, se o passo usado é adequado.

Dados:

$x_0 = 0$; $y_0 = 1$; $z_0 = 1$

$h = 0,1$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y' = zy + x \\ \dfrac{dz}{dx} = z' = zx + y \end{cases}$$

2. INTEGRAÇÃO NUMÉRICA – EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE ORDEM SUPERIOR

$$\boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = x} \qquad \textbf{Equação 1}$$

Necessário transformar a equação diferencial de 2ª ordem num **sistema de equações diferenciais de 1ª ordem**. Não se pode aplicar os métodos (Euler, RK2 e RK4) directamente a uma equação diferencial de 2ª ordem.

1º Introduz-se uma variável auxiliar por mudança de variável:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = z} \qquad \textbf{Equação 2}$$

2º Deriva-se em ordem a x:

$$\boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}}$$

3º Reescreve-se a equação diferencial de 1ª ordem por substituição na Equação 1 e usando a Equação 2 para compor o sistema:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = x \leftrightarrow \frac{dz}{dx} + 3z + 2y = x \leftrightarrow \frac{dz}{dx} = x - 3z - 2y$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z \\ \dfrac{dz}{dx} = x - 3z - 2y \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} y' = z \\ z' = x - 3z - 2y \end{cases}$$

Aplicam-se os métodos como no exercício anterior.

Considere os dados seguintes: $x_0 = 0$; $y_0 = 0$ e $z_0 = 0$.

O passo de integração é $h = 0,025$. O intervalo de integração é de 0 a 0,5.

Calcule o valor do integral, estime o QC e o erro para cada um dos métodos.