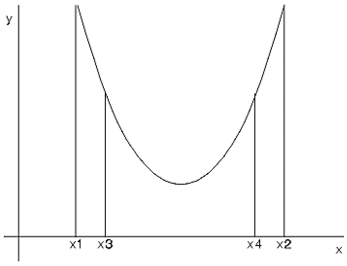
AULA - MÉTODOS NUMÉRICOS

1. OPTIMIZAÇÃO UNIDIMENSIONAL – REGRA DA SECÇÃO ÁUREA

A *Regra da Secção Áurea* ou *Razão de Ouro* permite a pesquisa unidimensional de um mínimo (ou máximo) de uma função.



Definido o intervalo de "busca" [x_1, x_2], o algoritmo reduz o intervalo em torno de um valor óptimo global. O "ponto-chave" do método é a forma como o algoritmo divide o intervalo de busca utilizando um número conhecido como a "razão áurea":

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = B$$

$$A = B^2$$

O método desenvolve-se da seguinte forma: dado um intervalo de pesquisa fechado [x_1, x_2], são gerados dois novos pontos (x_3 e x_4) utilizando a *razão áurea*, tal que:

$$x_3 = x_1 + A * (x_2 - x_1)$$

$$x_4 = x_1 + B * (x_2 - x_1)$$

A cada iteração, os dois novos pontos (x_3 e x_4) são **sempre gerados** por estas duas expressões.

<u>Algoritmo para pesquisa de um mínimo:</u>

Se f (x_3) **<** f (x_4)

(na próxima iteração)

$x_1 = x_1$ (ou seja, mantém)

$x_2 = x_4$ (ou seja o x_2 na presente iteração é substituído pelo x4 da iteração anterior).

Caso contrário,

$x_1 = x_3$ (ou seja o x_1 na presente iteração é substituído pelo x_3 da iteração anterior).

$x_2 = x_2$ (ou seja, mantém)

<u>Algoritmo para pesquisa de um máximo (apenas muda o sinal da condição para >)</u>

Se f (x_3) **>** f (x_4)

(na próxima iteração)

$x_1 = x_1$ (ou seja, mantém)

$x_2 = x_4$ (ou seja o x_2 na presente iteração é substituído pelo x4 da iteração anterior).

Caso contrário,

$x_1 = x_3$ (ou seja o x_1 na presente iteração é substituído pelo x_3 da iteração anterior).

$x_2 = x_2$ (ou seja, mantém)

Para terminar o processo devemos definir uma tolerância para um erro aceitável.

Exercício 1: Seja a função f (x) = $(2 * x^2 + 1) - 5 * \cos(10 * x)$

a) Pesquisar pelo método da secção áurea um mínimo (relativo) que se encontra no intervalo [-1,0].
b) Pesquisar pelo método da secção áurea um máximo (relativo) que se encontra no intervalo [-1,0].

Adopte como tolerância $|x_1 - x_2| \leq 0.001$ para a) e b).

2. OPTIMIZAÇÃO MULTIDIMENSIONAL – MÉTODO DO GRADIENTE

– Como uma primeira abordagem podemos representar graficamente a função (plot 3D) no Maxima.
– Calcular o gradiente da função dada f(x,y):

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial f}{y} \end{bmatrix}$$

– O ponto seguinte é dado por:

$$X_{n+1} = X_n - h.\nabla$$

– *h* é um “multiplicador”, controla o passo e é decidido pelo utilizador;
– ∇ indica a direção da pesquisa;
– Como paragem podemos adotar uma tolerância para o erro, como no método anterior.

Para começar o processo de otimização devemos arbitrar um valor razoável de *h*, por exemplo *h = 1* e verificar o que acontece ao ponto seguinte (se o valor da função diminui – aproximamo-nos do mínimo; se o valor da função aumenta – afastamo-nos do mínimo):

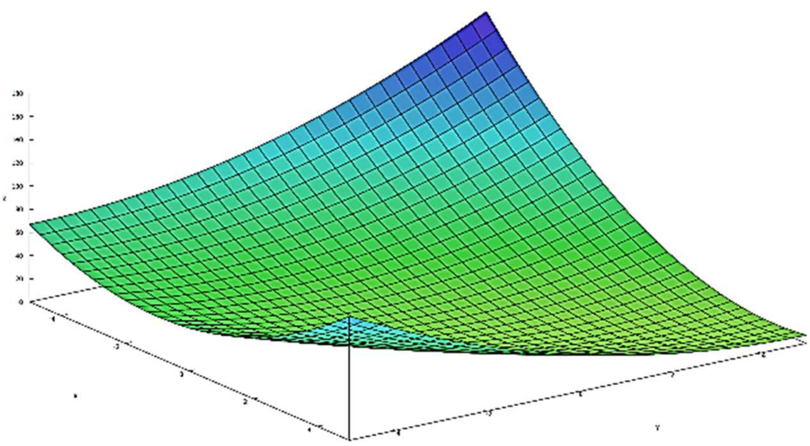
Se f (X_{n+1}) < f (X_n)

dar um passo novo e continuar o processo, por exemplo, fazer h =2 (estamos no caminho da descida da função);

Se f (X_{n+1}) > f (X_n)

(estamos a afastar do mínimo) **não efetivar** o passo (ou seja, voltar atrás e não usar esse passo), voltar à iteração anterior e diminuir o passo, por exemplo h =h/2.

Método funciona bem na descida da função, mas na região mais plana já não funciona tão bem:



Consideramos que o método aponta vagamente para o mínimo quando:

- A função decresce sucessivamente. Quando obtivermos um valor superior ao anterior, então *encontramos* um mínimo.
- Quando estipulamos um critério de paragem.
- Quando o valor da função não varia, mesmo reduzindo h a h/2 sucessivamente.

Exercício 2: Pesquisar um mínimo da seguinte função: f (x,y) = $y^2 - 2*x*y - 6*y + 2*x^2 + 12$, pelo Método do Gradiente, partindo do ponto inicial (x_0, y_0) = (1, 1). Use a tolerância $|X_{n+1} - X_n| \leq 0.01$, como critério de paragem.