AULA 03/11/2020 Métodos Numéricos – Sistemas de Equações Lineares – Lecture Notes

1. MÉTODO GAUUS-JACOBI, MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL – Estimativa dos resíduos (03/11)

Em cada iteração deve subsituir os valores de cada incógnita no sistema de equações dado, e subtrair ao termo independente. Esse é o resíduo em cada equação do sistema em cada iteração. O resíduo deverá diminuir ao longo das iterações e aproximar-se de zero.

Usar o mesmo sistema de equações lineares da aula anterior. A solução do sistema é aceitável com um erro de 10^{-6}.

2. MÉTODO DE KHALESTKY ou de CHOLESTKY (03/11)

Consiste em transformar o sistema dado em duas matrizes triangulares, [L] e [U], construídas em simultâneo segundo a regra: a cada coluna de L constrói-se uma linha de U.

A 1ª coluna de L é extamente igual aos coeficientes da 1ª coluna do sistema dado. O método de Khalesky pode ser descrito pela seguinte sequência de operações:

1. A . x = b
2. A = L . U
3. L . y = b
4. U . x = y (desta expressão tiram o valor de x_1, x_2, x_3, sendo as incógnitas do sistema dado)

A decomposição A = L . U é operada pela escrita alternada de uma coluna da matriz L, seguida da escrita da linha correspondente da matriz U, começando pelos passos 1 e 2 e repetindo em seguida 3 e 4 (abaixo):

1. $l_{i1} = a_{i1}$
2. $u_{1j} = \frac{a_{1i}}{b_{11}}$
3. $l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} \, . \, c_{kj}\, , (i \geq j)$
4. $u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} \, . \, c_{kj}}{l_{ii}}\, , (i < j)$

Exercício a desenvolver na aula pelo Método de Khaletsky (03/11):

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = -1 \\ x + y + z = 8 \\ 2x + z = 5 \end{cases}$$

3. INTEGRAÇÃO NUMÉRICA INTEGRAIS DEFINIDOS SIMPLES – QUADRATURA (03/11)

Integral definido: $I = \int_a^b f(x)\,dx$

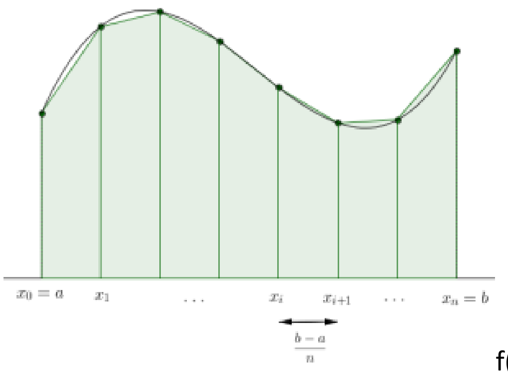
O integral definido é calculado numericamente, resultando numa estima **S** (soma de parcelas) e num erro **ε** tal que: $I = S + \varepsilon$

Regra dos Trapézios

Método de 2ª ordem, consiste na divisão da região de integração em fatias verticais (trapézios). O número de fatias ou trapézios representa o número de intervalos *n*. Aproximação da função integranda por uma recta.

$n = \frac{(b-a)}{h}$, o que é equivalente a $h = \frac{(b-a)}{n}$

$$S = \frac{h}{2}\left[\boldsymbol{f(a)} + \mathbf{2}f(a+h) + \mathbf{2}f(a+2h) + \mathbf{2}f(a+3h) + \mathbf{2}f(a+4h) + \cdots + \mathbf{2}f(a+(n-1)h) + \boldsymbol{f(a+nh)}\right]$$

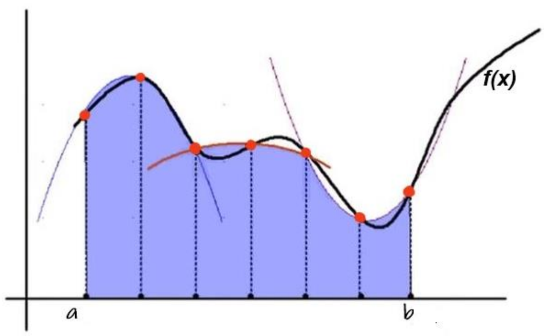


f(a+*n*h) = f(b)

Regra de Simpson

Método de 4ª ordem consiste na divisão da região de integração em fatias verticais (trapézios). O número de fatias ou trapézios representa o número de intervalos *n*. Aproximação da função integranda por uma parábola.

$$S = \frac{h}{3}\left[\boldsymbol{f(a)} + \mathbf{4}f(a+h) + \mathbf{2}f(a+2h) + \mathbf{4}f(a+3h) + \mathbf{2}f(a+4h) + \cdots + \mathbf{4}f(a+(n-1)h) + \boldsymbol{f(a+nh)}\right]$$



f(a+*n*h) = f(b)

O erro nos métodos de integração numérica:

Quociente de Convergência (QC) e a Estimativa do erro (ε).

Quociente de Convergência

O **QC** permite validar a avaliação do erro pelo Resto de Lagrange, e a sua estima pela diferença entre dois cálculos do integral. Necessita do cálculo de três estimas:

- **S** com passo **h,**
- **S'** com passo **h/2, (podemos chamar h')**
- **S''** com passo h/4 **(podemos chamar h'')**

Se o valor do **QC** for satisfeito, significa que o passado escolhido (h'') para estimativa do integral é adequado.

$QC_T = \frac{S'-S}{S''-S'} \approx 4$, no caso do Método dos Trapézios.

$QC_S = \frac{S'-S}{S''-S'} \approx 16$, no caso do Método de Simpson.

Estimativa do erro (ε).

Então o erro pode ser estimado por:

$\boldsymbol{\varepsilon''_T = \frac{S''-S'}{3}}$, no caso do Método dos Trapézios.

$\boldsymbol{\varepsilon''_S = \frac{S''-S'}{15}}$, no caso do Método de Simpson.

1 - Exercício a desenvolver na aula:

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{sen(x)}{x^2} dx$$

1. Calcular uma estimativa do integral pelo Método dos Trapézios.
2. Calcular uma estimativa do integral pelo Método de Simpson.
3. Verificar se o passo escolhido (h´´) é adequado (implica calcular **QC** para cada um dos métodos com 3 estimativas do integral: S calculado com h; S' calculado com h'=h/2; S´´ calculado com h''= h'/2).
4. Calcular uma estimativa do erro cometido, para cada método (ε''_T, ε''_S).

2 – Exercício a desenvolver na aula - estime o valor do Integral pelo Método dos Trapézios e pelo Método de Simpson

t (s)	v (m/s)
1	5
2	6
3	5.5
3.5	5.6
4	7
5	7.4
6	8.5
7	8
8	6
9	7
10	5

Neste caso não temos a expressão analítica a partir da qual estes valores foram calculados. Como sugestão, podemos começar por adotar um passo ***h*** menor possível. O número de intervalos (***n***) terá de ser analisado pelos valores da função que são fornecidos.

Notas:

- A ordem do método dá uma indicação da rapidez da convergência do método para a solução analítica quando se diminui o passo na integração numérica. No entanto, quando se diminui o passo, aumentam-se os erros podendo ocorrer divergência dos resultados.
- A diferença entre o valor da função e a aproximação (pela recta dos rectângulos ou pela parábola) representa o erro cometido.
- Se ***n*** é grande, temos uma aproximação grosseira, e se ***n*** diminuir, melhora a aproximação.
- Quanto maior ***n*** e menor ***h***, melhor a aproximação pela diminuição do erro, no entanto, isto implica a soma das várias parcelas, o que aumenta a propagação dos erros de truncatura e de arredondamento.
- A regra é dividir o passo sucessivamente a metade (ou seja, duplica o Nº de intervalos, ***n***).
- Ver erro Erro Calculado e Erro Observado no texto de apoio.