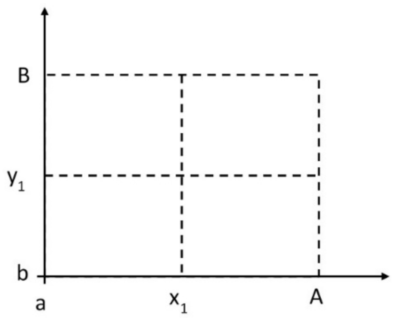
AULA 17/11/2020 - MÉTODOS NUMÉRICOS

1. INTEGRAÇÃO NUMÉRICA - INTEGRAIS MÚLTIPLOS - CUBATURA 17/11/2020

Os integrais múltiplos são resolvidos por iteração sobre as variáveis, sendo calculados como integrais simples nessa variável, sendo todas as restantes constantes. As fórmulas são apresentadas para o integral duplo, mas são facilmente extensíveis.

Considere a malha quadrada, que representa um rectângulo de lados paralelos aos eixos. Divida-se em 2 partes, segundo cada eixo ($n_x = 2$ e $n_y = 2$).



Aplica-se a regra de Simpson ou dos Trapézios, conforme o caso. Desta figura podemos tirar que:

- O limite inferior do integral é “a” e o limite superior é “A”, segundo xx.
- O limite inferior do integral é “b” e o limite superior é B, segundo yy.
- O número de intervalos em que o domínio de integração foi dividido, segundo xx, é $n_x = 2$.
- O número de intervalos em que o domínio de integração foi dividido, segundo yy, é $n_y = 2$.
- O passo de integração pode ser calculado por:

$$h_x = \frac{(A-a)}{n_x} \qquad \text{e} \qquad h_y = \frac{(B-b)}{n_y}$$

Para deduzir as expressões que permitem estimar o integral duplo segundo *xx* e segundo *yy*, devem em cada integral **fixar x** e fazer variar $\mathbf{y_0}$, $\mathbf{y_1}$ **and** $\mathbf{y_2}$.

Exemplo: Método de Simpson:

$$\int_a^A dx \int_b^B f(x,y)\, dy = \int_a^A \left\{\frac{h_y}{3}[f(x,y_0) + 4f(x,y_1) + f(x,y_2)]\right\} dx = \frac{h_y}{3}\left\{\int_a^A [f(x,y_0)]dx + 4\int_a^A [f(x,y_1)]dx + \int_a^A [f(x,y_2)]\, dx\right\}$$

Aplica-se de novo a regra (Simpson ou Trapézios) a cada integral: **fixar y e fazer variar** $\mathbf{x_0}$, $\mathbf{x_1}$ **e** $\mathbf{x_2}$. As expressões finais resultam em:

$$S_S = \int_a^A dx \int_b^B f(x,y)\, dy = \frac{h_x h_y}{9}\left[\sum\nolimits_0 + 4\sum\nolimits_1 + 16\sum\nolimits_2\right], \textit{Método de Simpson}$$

$$S_T = \int_a^A dx \int_b^B f(x,y)\, dy = \frac{h_x h_y}{4}\left[\sum\nolimits_0 + 2\sum\nolimits_1 + 4\sum\nolimits_2\right], \textit{Método dos Trapézios}$$

$\sum_0$ = soma dos valores da função nos vértices da malha,
$\sum_1$ = soma dos valores da função nos pontos médios da malha,
$\sum_2$ = valor da função no centro da malha.

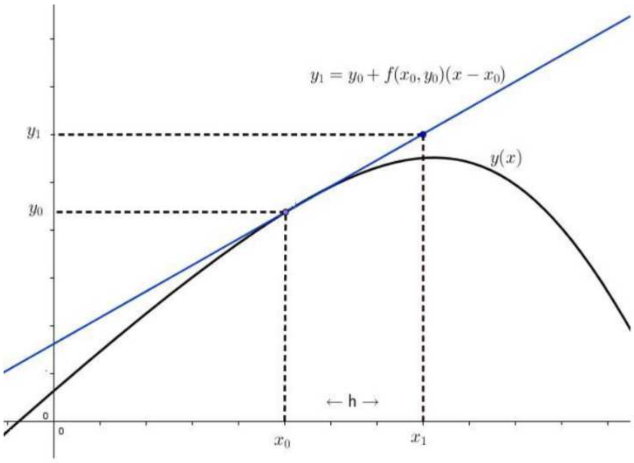
Exercício 1: Seja o integral duplo $\int_0^{0.5} \int_0^{0.5} (e^{(y-x)})\, dy\, dx$, considere $n_x = 2$ e $n_y = 2$.

a. Faça uma estimativa do valor do integral pelo Método dos Trapézios e pelo Método de Simpson.
b. O passo escolhido é adequado?
c. Calcule o QC para cada método bem como o erro associado à estimativa obtida por cada método (ε'').

2. INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS 17/11/2020

2.1 MÉTODO DE EULER (VER CAPÍTULO 5)

$$\frac{dy}{dy} = y' = f(x, y), formas\ equivalentes\ de\ representar\ uma\ equação\ diferencial$$



Começa-se por um ponto inicial (x_0, y_0), e calculamos a incinação da curva y' = f(x0, y0) (inclinação ou tangente) e avançamos mais um pouco ao longo da direcção assim definida. Considera-se o novo ponto atingido como um ponto de partida e continua-se a proceder deste modo. Após um número suficente de pequenos passos (h = x-x_0, logo x = x_0 + h) temos a solução no intervalo finito pretendido (intervalo de integração).

Método de 1ª ordem, se o passo for adequado, **QC ≅ 2,** e o erro é calculado por: **ε '' = (S''- S').**

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \\ y_{n+1} = y_n + h \, . f(x_n, y_n) \end{cases}$$

Sendo f(x_n, y_n) a equação diferencial que se pretende integrar numericamente pelo Método de Euler.

Exercício 2: Seja a equação diferencial de 1ª ordem:

$$\frac{dy}{dx} = y' = x^2 + y^2$$

Estime o valor do integral da equação numérica pelo Método de Euler. Considere como intervalo de integração entre 0 e 1.4, e um passo de 0.1, calcule o QC e o erro, ε '' = (S''- S'). Considere como ponto de partida (x_0, y_0) = (0,0). Verifique se o passo escolhido é adequado. Caso não seja continue o processo numérico até que se verifique QC ≅ 2.

$$\int_0^{1.4} (x^2 + y^2)\, dx$$

2.2 MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE SEGUNDA ORDEM RK2 (VER CAPÍTULO 5)

Parte-se de um ponto inicial (x_0, y_0);

Calcular o ponto seguinte:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \\ y_{n+1} = y_n + h\,.\,f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}.y_n') \end{cases}$$

Sendo, $y'_n = f(x_n, y_n)$

<u>Exercício 3 (RK2)</u>: Seja a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{y}' = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2$$

Estime o valor do integral da equação numérica pelo Método de **Runge-Kutta de segunda ordem**. Considere o intervalo de integração entre 0 e 1.4, e um passo de 0.1, calcule o QC e o erro, ε '' = (S''- S')/3. Considere como ponto de partida (x_0, y_0) = (0,0). Verifique se o passo escolhido é adequado. Caso não seja continue o método numérico até que se verifique **QC ≅ 4.**

$$\int_0^{1.4} (x^2 + y^2)\ dx$$

2.3 MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM RK4 (VER CAPÍTULO 5)

Parte-se de um ponto inicial (x_0, y_0); calcular o ponto seguinte:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\,\delta_{y1} + \frac{1}{3}\,\delta_{y2} + \frac{1}{3}\,\delta_{y3} + \frac{1}{6}\,\delta_{y4} \end{cases}$$

$$\delta_{y1} = h.f(x_n, y_n)$$
$$\delta_{y2} = h.f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{\delta_{y1}}{2}\right)$$
$$\delta_{y3} = h.f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{\delta_{y2}}{2}\right)$$
$$\delta_{y4} = h.f\left(x_n + h, y_n + \delta_{y3}\right)$$

<u>Exercício 4 (RK4)</u>: Seja a equação diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{y}' = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2$$

Estime o valor do integral da equação numérica pelo Método de **Runge-Kutta de quarta ordem**. Considere o intervalo de integração entre 0 e 1.4, e um passo de 0.1, calcule o QC e o erro, ε '' = (S''- S')/15. Considere como ponto de partida (x_0, y_0) = (0,0). Verifique se o passo escolhido é adequado. Caso não seja continue o processo numérico até que se verifique **QC ≅ 16.**