Samu Tamminen 013976176 samutamm@cs.helsinki.fi

Määrittelydokumentti

Aineopintojen harjoitustyö: Tietorakenteet ja algoritmit

Matriisilaskin

Ohjelmani suorittaa pyydettyjä laskutoimituksia matriiseille. Se osaa yhteenlaskea matriiseja, kertoa niitä skalaarikertoimilla ja toisilla matriiseilla, laskea matriisin transpoosi ja selvittää matriisin determinantin. Jos kurssin puitteissa jää aikaa, toteutan ohjelmalle myös toiminnallisuuden käänteismatriisin selvittämiseen.

Matriisien yhteenlasku, skalaarilla kertominen ja transpoosin selvittäminen ovat melko triviaaleja operaatioita. Yhteenlaskussa kahden samaa tyyppiä/kokoa olevan matriisin alkiot lasketaan yhteen ja palautetaan samankokoinen matriisi uusilla alkion arvoilla. Matemaattisesti
$A,\ B\ \in R^{m\,x\,n}.\ (A+B)(i,j)\ =\ A(i,j)\ +\ B(i,j)\ kaikilla\ i \in \{1,...,m\}\ ja\ j \in \{1,...,n\}$.
Skalaarikertolaskussa käydään yhdestä matriisista kaikki alkiot läpi ja kerrotaan kukin alkio skalaarikertoimena toimivana luvulla. Matemaattisesti ilmaistuna:
$A \in R^{m\,x\,n}\ ja\ c\ \in R.\ (cA)(i,j)\ =\ c\ \cdot\ A(i,j)\ \ kaikilla\ i \in \{1,...,m\}\ ja\ j \in \{1,...,n\}$.
Matriisin transpoosi on matriisi, jossa rivit ja sarakkeet ovat vaihdettu keskenään.
Kahden matriisin kertolasku edellyttää, että ensimmäisessä matriisissa on yhtä paljon sarakkeita kuin toisessa rivejä. Matriisien $A \in R^{m\,x\,n}\ ja\ B \in R^{n\,x\,p}\ tulolle\ AB \in R^{m\,x\,p}\ pätee$

$$(AB)(i,j) = A(i,1)B(1,j) + A(i,2)B(2,j) + ... + A(i,n)B(n,j) = \sum_{k=1}^{n} A(i,k)B(k,j)\ kaikilla\ i \in \{1,...,m\}\ ja\ j \in \{1,...,p\}$$

Matriisin determinantti on luku, josta selviää muunmuassa, onko matriisilla käänteismatriisia. Determinantti voidaan laskea vain neliömatriiseille. Determinantti on määritelty yhden, kahden ja kolmen rivin kokoisille matriiseille. Sitä suurempien matriisien determinantti lasketaan pienempien yhdistelmänä. Determinantin määritelmä ei mahdu tähän dokumenttiin.

Edelläkuvatuista toiminnoista yhteenlasku ja skalaarikertolasku sekä transpoosin selvittäminen ratkeavat ajassa O(n), missä n on matriisien alkioden määrä. Matriisikertolaskussa käytän Strassenin algoritmiä, jonka aikavaatimus on $O(n^2)$. Determinantin selvittämisessä käytän LU-hajotelmaa, jonka aikavaativuus on $O(n^3)$. Yksinkertaisempi ratkaisu determinantin selvittämiseen veisi aikaa $O(n!)$, joten LU-hajoitelma on huomattavasti nopeampi, joskin hidas myöskin.

Ohjelmalle annetaan syötteenä komentoriviltä matriiseja tai polku tiedostoon, josta ne löytyvät ja se tulostaa tulokset komentoriville. En osaa enkä ehdi tehdä Windows-ympäristössä järkevästi toimivaa käyttöliittymää.

Totetutan ohjelman Clojure-ohjelmointikielellä.

Lähteet:

- Introduction to Algorithms (Cormen etc)
- http://en.wikipedia.org/wiki/Transpose
- http://en.wikipedia.org/wiki/Minor_(linear_algebra)#Matrix_of_cofactors
- http://en.wikipedia.org/wiki/Determinant#2.C2.A0.C3.97.C2.A02_matrices
- http://en.wikipedia.org/wiki/LU_decomposition