

Θεώρημα Courcelle

Εφαρμογές της Λογικής στην Πληροφορική, ΣΗΜΜΥ, ΕΜΠ

Νίκος Τσιλιβής, AM: 03114078

Οκτώβριος 2019

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη και η παρουσίαση ενός μετά-θεωρήματος της θεωρίας γραφημάτων, το οποίο είναι γνωστό ως θεώρημα του Courcelle και συσχετίζει την εκφραστικότητα μιας συγκεκριμένης λογικής γλώσσας με την ύπαρξη αλγορίθμων για την επίλυση συγκεκριμένων συνδυαστικών προβλημάτων σε γραφήματα. Συγκεκριμένα, κάθε ιδιότητα γραφήματος που είναι εκφράσιμη στην λογική γλώσσα MSO_2 είναι αποκρίσιμη σε γραμμικό χρόνο για όλα τα γραφήματα που έχουν φραγμένο treewidth.

1 Εισαγωγή

Αρχικά θα παρουσιάσουμε τα Αυτόματα Δέντρων (Tree Automata), τα οποία αποτελούν μια γενίκευση των γνωστών στην Θεωρία Υπολογισιμότητας DFA (Deterministic Finite Automata). Στην συνέχεια εισαγάγουμε τις έννοιες tree decomposition και treewidth γραφημάτων. Παρουσιάζουμε το ανάλογο του θεωρήματος των Myhill-Nerode για τα Tree Automata, ορίζουμε την γλώσσα MSO_2 και αποδεικνύουμε τελικά το θεώρημα του Courcelle. Η προσέγγιση που θα ακολουθήσουμε βασίζεται στο [1].

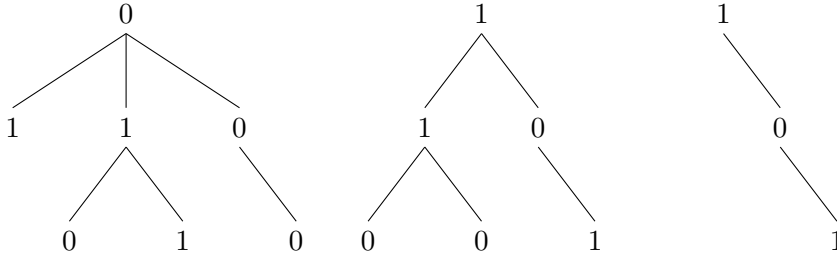
2 Αυτόματα Δέντρων

Έστω αλφάβητο Σ . Θεωρούμε Δέντρα T με ρίζα r_T , τα οποία έχουν ετικέτες σε κάθε κόμβο γράμματα από το Σ , με τον κάθε κόμβο να έχει πεπερασμένο πλήθος παιδιών. Το σύνολο των Δέντρων επί του Σ συμβολίζεται με Σ^{**} (Σχ. 1).

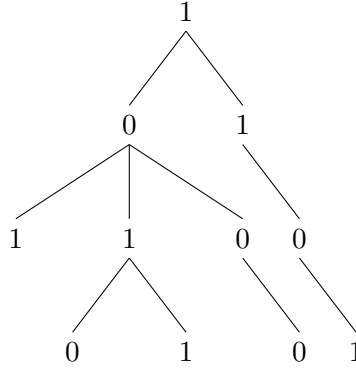
Σκοπός μας είναι να επεκτείνουμε την ιδέα της αναγνώρισης συμβολοσειρών από αυτόματα για την κλάση των Δέντρων. Όπως τα DFA επεξεργάζονται από αριστερά προς τα δεξιά μια συμβολοσειρά, έτσι χρειάζεται να θεωρήσουμε μια έννοια διάσχισης των δέντρων. Εδώ θα παρουσιάσουμε bottom-up αυτόματα, δηλαδή αυτόματα που εκκινούν από τα φύλλα και καταλήγουν στην ρίζα. Η μετάβαση μεταξύ καταστάσεων καθορίζεται από την κατάσταση των παιδιών του τρέχοντος κόμβου και από την ετικέτα του. Τυπικά ορίζουμε:

Ορισμός 2.1. (Ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα Δέντρων) Ένα Αυτόματο Δέντρων αποτελείται από μία 5άδα $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$ και έναν αριθμό f , όπου:

- Q : ένα πεπερασμένο σύνολο από καταστάσεις
- Σ : ένα πεπερασμένο αλφάβητο για τις ετικέτες στους κόμβους
- δ : η συνάρτηση μετάβασης $\bigcup_{1 \leq i \leq f} \underbrace{(Q \times Q \times \dots \times Q)}_{i \text{ times}} \times \Sigma \rightarrow Q$



Σχήμα 1: Δέντρα επί του $\{0, 1\}$



Σχήμα 2: $T_1 \odot_1 T_2$, όπου T_1, T_2 το πρώτο και το τρίτο δέντρο του Σχ. 1

- S : το σύνολο των αρχικών καταστάσεων $S \subseteq Q$
- F : το σύνολο των τελικών καταστάσεων $F \subseteq Q$

Όπως κάνουμε και στην περίπτωση των DFA, προκειμένου να συντομεύσουμε την περιγραφή του υπολογισμού ενός αυτόματου, επεκτείνουμε την συνάρτηση δ ώστε να λαμβάνει ως όρισμα ολόκληρα Δέντρα.

Ορισμός 2.2. Συνάρτηση μετάβασης $\hat{\delta}$ (ορισμός μέσω του σχήματος της πρωταρχικής αναδρομής):

$$\begin{cases} \hat{\delta}(q_j, \alpha) = \delta(q_j, \alpha), q_j \in S \\ \hat{\delta}(T_1 \odot_\alpha \dots \odot_\alpha T_n) = \delta(\hat{\delta}(T_1), \dots, \hat{\delta}(T_n), \alpha) \end{cases}$$

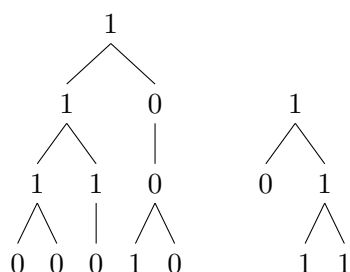
όπου με $T_1 \odot_\alpha T_2$ συμβολίζουμε το Δέντρο που προκύπτει από έναν κόμβο με ετικέτα α , αν του προσαρτήσουμε ως παιδιά τα υποδέντρα T_1, T_2 (Σχ. 2). Λέμε ότι $T \in \Sigma^{**}$ αν $\hat{\delta}(T) \in F$.

Για την καλύτερη κατανόηση της λειτουργίας των TA, παραθέτουμε ένα παράδειγμα λειτουργίας ενός αυτομάτου για 2 συγκεκριμένα δέντρα.

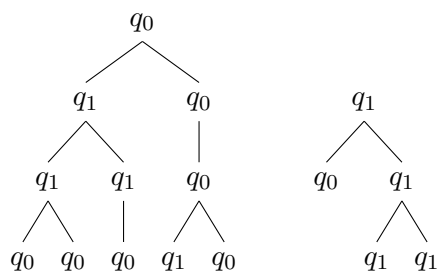
Παράδειγμα 2.1. Έστω TA 2 καταστάσεων $M = (\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \delta, \{q_0\}, \{q_1\})$ με $f = 2$, όπου η συνάρτηση μετάβασης προσδιορίζεται από τον παρακάτω πίνακα:

Καταστάσεις	Ετικέτα κόμβου	$\delta()$
q_0	0	q_0
q_0	1	q_1
q_1	0	q_1
q_1	1	q_1
q_0, q_0	0	q_0
q_0, q_0	1	q_1
q_0, q_1	0	q_0
q_0, q_1	1	q_1
q_1, q_0	0	q_0
q_1, q_0	1	q_0
q_1, q_1	0	q_0
q_1, q_1	1	q_1

Θα τροφοδοτήσουμε ως είσοδο στο παραπάνω αυτόματο τα εξής 2 Δέντρα:



Όπως τονίσαμε, τα αυτομάτα Δέντρων ξεκινάνε το parsing των εισόδων από τα φύλλα και κατευθύνονται προς τη ρίζα. Για παράδειγμα, στο 1ο Δέντρο το αυτόματο εξετάζει τα φύλλα 0, 0, 0, 1, 0 και οδηγείται στις καταστάσεις q_0, q_0, q_0, q_1, q_0 αντίστοιχα (βλ. 1η και 2η γραμμή του πίνακα). Στο επόμενο επίπεδο, υπάρχουν 3 κόμβοι. Για τον 1ο, η ετικέτα του έχει τιμή 1 και το υποδέντρο του βρίσκεται στην κατάσταση q_0, q_0 , άρα θα μεταβεί στην κατάσταση $\delta(q_0, q_0, 1) = q_1$. Ομοίως συμπληρώνουμε τις υπόλοιπες τιμές στους κόμβους. Σχηματικά έχουμε:



Όπως βλέπουμε, το αυτόματο με είσοδο το πρώτο Δέντρο καταλήγει στην κατάσταση $q_0 \notin F$ και άρα λέμε ότι δεν το αποδέχεται, ενώ με το δεύτερο οδηγείται στην $q_1 \in F$.

△

Για το αυτόματο M του προηγούμενου παραδείγματος μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι αποδέχεται κάθε δυαδικό δέντρο που αποτελείται μόνο από άσσους, ενώ απορρίπτει εισόδους που

περιέχουν μόνο μηδενικά (ανεξαρτήτως τοπολογίας). Επακόλουθο είναι επομένως να αναρωτηθούμε ποία είναι η μορφή των Δέντρων που αποδέχεται αυτό (και οποιοδήποτε άλλο) ΤΑ και αν υπάρχει ένας συμπαγής τρόπος περιγραφής της **γλώσσας** αποδοχής (όπως πχ συμβαίνει με τις κανονικές εκφράσεις και τα DFA). Οι απαντήσεις σε αυτά τα ερωτήματα υπάρχουν και ακολουθούν πιστά τις αντίστοιχες που δίνουμε για τις κανονικές γλώσσες και τα DFA. Για τους σκοπούς μας, δεν χρειάζεται να εμβαθύνουμε και απλά αναφέρουμε πως οι συγκεκριμένες γλώσσες αποτελούν ένα υποσύνολο των context-free γλωσσών.

3 Tree decomposition και Treewidth

Κατά την μελέτη των ιδιοτήτων των γράφων, αρκετά συχνά οι ιδέες που χρησιμοποιούμε απλοποιούνται στην περίπτωση των δέντρων. Παραδείγματος χάριν, ο χρωματικός αριθμός κάθε δέντρου είναι 2, ενώ το minimum vertex cover ενός δέντρου μπορεί να βρεθεί εύκολα σε χρόνο $\mathcal{O}(|V|)$. Η πολυπλοκότητα των εννοιών ανεβαίνει όσο εισάγονται κύκλοι σε ένα γράφημα, ωστόσο έχει παρατηρηθεί ότι γραφήματα που "μοιάζουν" με δέντρα επιδέχονται καλές αλγοριθμικές λύσεις ακόμη και για NP-hard προβλήματα. Οι έννοιες των tree decomposition και treewidth ορίζουν με σαφήνεια (και πετυχημένα, όπως αναδεικνύει μια πληθώρα αλγοριθμικών ιδεών) το πόσο πολύ "μοιάζει" ένα γράφημα με δέντρο.

Ορισμός 3.1. (Tree decomposition) Έστω γράφημα $G = (V, E)$. Ένα δέντρο T καλείται tree decomposition του G , αν ισχύουν τα παρακάτω:

- Κάθε κόμβος t του T αποτελείται από ένα σύνολο $B_t \subseteq V$ κορυφών του G (καλείται bag), με $\bigcup_t B_t = V$
- Για κάθε ακμή $e = (u, v) \in G$, υπάρχει bag B_t τ.ώ. $\{u, v\} \subseteq B_t$
- Για κάθε κόμβο $u \in G$, το υπογράφημα του T που αποτελείται απ' όλα τα bags που περιέχουν τον u είναι συνεκτικό.

Ορίζουμε ως πλάτος του tree decomposition το μέγεθος της μεγαλύτερης bag μείον ένα.

Ορισμός 3.2. (Treewidth) Ορίζουμε ως treewidth ενός γραφήματος, το ελάχιστο πλάτος μεταξύ των tree decompositions του. Είναι δηλαδή:

$$tw(G) \triangleq \min_{T: T \text{ tree decomposition of } G} \{\max_{t \in T} (|B_t| - 1)\}$$

Για τις ανάγκες της εργασίας μας, το σημαντικό που χρειάζεται να γνωρίζουμε είναι πώς να υπολογίζουμε το treewidth και tree decompositions. Δυστυχώς, η εύρεση του treewidth για ένα τυχόν γράφημα είναι αρκετά δύσκολη.

Θεώρημα 1. [Arnborg, Corneil, Proskurowski 1987] Το παρακάτω πρόβλημα απόφασης είναι NP-hard: Δεδομένου ενός γραφήματος G και ενός αριθμού k , έχει το G treewidth το πολύ k ;

Ωστόσο, αν το treewidth θεωρηθεί ως σταθερά tw , τότε υπάρχει γραμμικός αλγόριθμος εύρεσης ενός tree decomposition πλάτους tw .

Θεώρημα 2. [Bodlaender, Kloks 1996] Δεδομένου ενός γραφήματος G , υπάρχει αλγόριθμος που επιστρέφει ένα tree decomposition του G πλάτους w (αν υπάρχει) σε χρόνο $\mathcal{O}(2^{\mathcal{O}(w^3)} \cdot |G|)$

Επομένως, αυτό που χρειάζεται να κρατήσουμε είναι πως για γραφήματα με φραγμένο tree-width, μπορούμε σε γραμμικό χρόνο να αποκτήσουμε ένα tree decomposition για το γράφημα αυτό, μέσω του αλγόριθμου του Bodlaender.

γράφημα $G \longrightarrow$ tree decomposition $\longrightarrow \dots$

4 Parse trees

Σκοπός μας είναι να συνδέσουμε τα γραφήματα φραγμένου treewidth με τα αυτόματα της 1ης ενότητας.

Ορισμός 4.1. (t-boundaried γραφήματα) Ένα **t-boundaried** γράφημα είναι ένα γράφημα G μαζί με t διακεκριμένους κόμβους του, οι οποίοι λαμβάνουν ως ετικέτα τις τιμές $\{1, \dots, t\}$. Οι t αυτοί κόμβοι αποτελούν το *σύνορο* του και τους συμβολίζουμε με $\partial(G)$.

Εν συνεχεία, θα ορίσουμε βασικούς τελεστές παραγωγής t-boundaried γραφημάτων.

Ορισμός 4.2. (Κόλληση γραφημάτων) Έστω t-boundaried γραφήματα G_1, G_2 . Συμβολίζουμε με $G_1 \oplus G_2$ το γράφημα που προκύπτει αν "κολλήσουμε" τα G_1, G_2 στα σύνορα, δηλαδή πάρουμε την ένωση των 2 γραφημάτων και ταυτίσουμε τους κόμβους στα σύνορα που έχουν ίδιες ετικέτες.

Ο τελεστής \oplus αποτελεί ειδική περίπτωση ενός γενικότερου τελεστή \otimes .

Ορισμός 4.3. (Τελεστής \otimes t-boundaried γραφημάτων) Ονομάζουμε n -αδικό τελεστή t-boundaried γραφημάτων ένα γράφημα $G = (V, E)$ μαζί με n το πλήθος $1 - 1$ συναρτήσεις $f_i : \{1, \dots, t\} \rightarrow V$.

Οι τελεστές αυτού του είδους μπορούν να θεωρηθούν ως τα δομικά στοιχεία των t-boundaried γραφημάτων, όπως γίνεται εμφανές με το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3. (Parsing theorem) Υπάρχει γραμμικός αλγόριθμος μετατροπής ενός tree decomposition πλάτους t σε ένα δυαδικό parse tree, μέσω της χρήσης $t+1$ -boundaried τελεστών.

Η απόδειξη του παραπάνω χρησιμοποιεί 6 τελεστές συνολικά:

- \emptyset : δημιουργεί $t+1$ το πλήθος κόμβους, με ετικέτες $1, \dots, t+1$.
- γ : μεταθέτει κατά ένα (modulo $t+1$) την ετικέτα κάθε κόμβου στο σύνορο.
- i : εναλλάσσει τους κόμβους με ετικέτα $1, 2$.
- e : προσθέτει μία ακμή μεταξύ των κόμβων $1, 2$.
- u : προσθέτει έναν κόμβο και τον ονομάζει 1 .
- \oplus (βλ. ορισμό 4.2)

Η απόδειξη γίνεται αρκετά τεχνική μόλις γίνει κατανοητή η λειτουργία των τελεστών και γι' αυτό δεν την παραθέτουμε. Το σημαντικό είναι πως πλέον για **κάθε** γράφημα φραγμένου treewidth έχουμε μια αναπαράσταση του ως ένα δυαδικό δέντρο, σαν κι αυτά με τα οποία τροφοδοτήσαμε ΤΑ στην 1η ενότητα. Φαίνεται, επομένως, πως το μόνο που απομένει για να αποδειχτεί κάποια

δομική ιδιότητα ενός γραφήματος φραγμένου treewidth είναι να κατασκευάσουμε αυτόματο που να την εκφράζει. Ευτυχώς για μας που θέλουμε να αποδείξουμε την αποκρισμότητα μια μεγάλης κλάσης προβλημάτων και θα απαιτείτο η δημιουργία πολλών αυτομάτων, υπάρχει ένα θεώρημα ανάλογο του, γνωστού από την θεωρία των κανονικών γλωσσών, Myhill-Nerode. Ορίζουμε κάποιες βασικές έννοιες, που είναι απαραίτητες ώστε να το παρουσιάσουμε.

Ορισμός 4.4. (Σύμπαντα γραφημάτων)

1. Μεγάλο σύμπαν, U_t^{large} : Περιέχει όλα τα t-boundaried γραφήματα.
2. Μικρό σύμπαν, U_t^{small} : Περιέχει τα t-boundaried γραφήματα που μπορούν να παραχθούν από parse trees.

Ορισμός 4.5. (Κανονική σχέση ισοδυναμίας γραφημάτων) Έστω \mathcal{U} ένα σύμπαν t-boundaried γραφημάτων, $G_1, G_2 \in \mathcal{U}$ και F μια οικογένεια γραφημάτων στο \mathcal{U} , τότε λέμε ότι $G_1 \sim_F G_2$ αν:

$$\forall H \in \mathcal{U} (G_1 \oplus H \in F \iff G_2 \oplus H \in F)$$

Ορισμός 4.6. (t-finite state) Έστω F οικογένεια γραφημάτων. Λέμε ότι η F είναι t-finite state όταν τα parse trees που αντιστοιχούν στο σύνολο $F \cap U_t^{\text{small}}$ είναι finite state (δηλαδή υπάρχει TA που τα αναγνωρίζει).

Υπενθυμίζουμε ότι ο δείκτης μίας σχέσης ισοδυναμίας είναι ο αριθμός των κλάσεων του. Είμαστε έτοιμοι τώρα να διατυπώσουμε το βασικό θεώρημα αυτής της ενότητας.

Θεώρημα 4. (Γραφοθεωρητικό ανάλογο του Myhill-Nerode) Έστω μια οικογένεια γραφημάτων F . Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1. η F είναι t-finite state.
2. η σχέση \sim_F είναι πεπερασμένου δείκτη.

Επομένως, αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει αυτόματο που να αναγνωρίζει μια οικογένεια γραφημάτων F , αρκεί να δείξουμε ότι η σχέση ισοδυναμίας \sim_F που επάγει έχει πεπερασμένο δείκτη. Με αυτόν ακριβώς τον τρόπο θα αποδείξουμε στην επόμενη ενότητα το θεώρημα του Courcelle.

$$\text{γράφημα } G \longrightarrow \text{tree decomposition} \longrightarrow \text{parse tree}$$

5 MSO_2 και απόδειξη θεωρήματος Courcelle

5.1 Monadic Second Order Logic (MSO_2)

Πρόκειται για μία λογική γλώσσα για γραφήματα. Αποτελεί κομμάτι των Δευτοροβάθμιων Λογικών (Second Order Logic), όπου επιτρέπεται η χρήση ποσοδεικτών επί κατηγορημάτων, με την διαφορά ότι στην συγκεκριμένη γλώσσα η εφαρμογή των ποσοδεικτών περιορίζεται σε κατηγορήματα ενός ορίσματος (monadic). Το παραπάνω μάς επιτρέπει την εφαρμογή ποσοδεικτών επί συνόλων, μιας και τα σύνολα είναι εκφραστικώς ισοδύναμα με monadic κατηγορήματα. Αποτελείται από τα παρακάτω σύμβολα:

- Λογικούς συνδέσμους \wedge, \vee, \neg

- Μεταβλητές για κόμβους/ακμές, καθώς και σύνολα κόμβων/ακμών
- Ποσοδείκτες \exists, \forall επί μεταβλητών (παντός είδους)
- 5 δυαδικές σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών που ορίσαμε:
 1. $u \in U$, όπου το u είναι μεταβλητή κόμβου και το U μεταβλητή συνόλου κόμβων
 2. $d \in D$, όπου το d είναι μεταβλητή ακμής και το D μεταβλητή συνόλου ακμών
 3. $inc(d, u)$, όπου το d είναι μεταβλητή ακμής, u μεταβλητή κόμβου και σημασιολογικά ερμηνεύουμε ότι η ακμή d προσπίπτει στον κόμβο u
 4. $adj(u, v)$, όπου τα u, v είναι μεταβλητές κόμβων και σημασιολογικά ερμηνεύουμε ότι οι κόμβοι u, v είναι γειτονικοί
 5. Σχέση ισότητας = μεταξύ μεταβλητών (παντός είδους)

Ακολουθούν ορισμένα παραδείγματα, για να καταστούν σαφείς ορισμένες απ' τις εκφραστικές δυνατότητες της γλώσσας.

Παράδειγμα 5.1. Θα εκφράσουμε στην γλώσσα MSO_2 την ιδιότητα 3-colorability, δηλαδή την ύπαρξη χρωματισμού κορυφών με 3 χρώματα. Υπενθυμίζουμε ότι για να θεωρηθεί έγκυρος ένας χρωματισμός κορυφών πρέπει γειτονικές κορυφές να μην έχουν το ίδιο χρώμα και φυσικά πρέπει να δώσουμε ένα χρώμα σε κάθε κορυφή. Αν θεωρήσουμε ως ένα σύνολο τους κόμβους του κάθε χρώματος, τα παραπάνω είναι ισοδύναμα με την ύπαρξη 3 συνόλων κορυφών τα οποία σχηματίζουν μία διαμέριση των κόμβων του γραφήματος και καθένα απ' αυτά είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο. Γράφουμε:

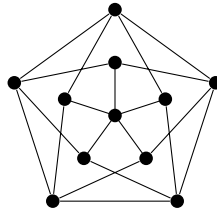
$$3\text{-colorability} \equiv \exists X_1, X_2, X_3 \subseteq V(\text{part}(X_1, X_2, X_3) \wedge \text{indp}(X_1) \wedge \text{indp}(X_2) \wedge \text{indp}(X_3)),$$

όπου

- $\text{part}(X_1, X_2, X_3) \equiv \forall v \in V((v \in X_1 \vee v \in X_2 \vee v \in X_3) \wedge \neg(v \in X_1 \wedge v \in X_2) \wedge \neg(v \in X_1 \wedge v \in X_3) \wedge \neg(v \in X_2 \wedge v \in X_3))$
- $\text{indp}(X) \equiv \forall u, v \in X \neg \text{adj}(u, v)$

△

Παράδειγμα 5.2. Ένα διάσημο συνδυαστικό πρόβλημα αποτελεί η ύπαρξη ή μη ενός κύκλου Hamilton σε ένα γράφημα. Υπενθυμίζουμε ότι κύκλος Hamilton ονομάζεται ένας κύκλος που περνάει απ' όλες τις κορυφές του γραφήματος ακριβώς μία φορά. Ένα γράφημα που έχει κύκλο Hamilton ονομάζεται Hamiltonian. πχ είναι το παρακάτω γράφημα Hamiltonian;



Για να εκφράσουμε την ιδιότητα αυτή στην γλώσσα MSO_2 πρέπει να σκεφτούμε με σύνολα κορυφών/ακμών. Η ύπαρξη ενός κύκλου Hamilton επάγει αυτόματα ένα σύνολο ακμών (ας τις ονομάσουμε κόκκινες). Πρέπει να διασφαλίσουμε ότι επισκεπτόμαστε κάθε κορυφή μία φορά και αυτό γίνεται αν απαιτήσουμε κάθε κορυφή να ακουμπάει σε ακριβώς 2 κόκκινες ακμές. Τέλος, απαιτούμε το κόκκινο επαγόμενο υπογράφημα να είναι συνεκτικό. Έχουμε λοιπόν:

$$\text{Hamiltonicity} \equiv \exists R \subseteq E(\text{conn}(R) \wedge \forall v \in V \deg 2(v, R)),$$

όπου

- $\text{conn}(R) \equiv \forall Y \subseteq V[(\exists u \in V(u \in Y) \wedge \exists v \in V(v \notin Y)) \Rightarrow (\exists e \in R, u \in Y, v \notin Y(\text{inc}(u, e) \wedge \text{inc}(v, e)))]$
- $\deg 2(u, R) \equiv \exists e_1, e_2 \in R[(e_1 \neq e_2 \wedge \text{inc}(e_1, u) \wedge \text{inc}(e_2, u) \wedge (\forall e_3 \in R(\text{inc}(e_3, u) \Rightarrow (e_3 = e_1 \vee e_3 = e_2))))]$

△

5.2 Θεώρημα Courcelle

Είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε το βασικό θεώρημα.

Θεώρημα 5. Έστω ϕ μία πρόταση στην γλώσσα MSO_2 και F η οικογένεια γραφημάτων που την ικανοποιεί. Η σχέση \sim_F έχει πεπερασμένο δείκτη στο U_t^{large}

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι με $\partial(G)$ συμβολίζουμε το σύνορο ενός t-boundaried γραφήματος G και αποκαλούμε εσωτερικό του G το σύνολο των κόμβων $V_G \setminus \partial(G)$.

Έστω $fr(0), fr(1), Fr(0), Fr(1)$ τα σύνολα των ελεύθερων μεταβλητών κόμβων, ακμών, συνόλων κόμβων, συνόλων ακμών, αντίστοιχα, της ϕ και $Free$ η ένωση των παραπάνω. Ένας μερικός εξοπλισμός σ για το $Free$ αποτελείται από τα παρακάτω:

1. Ξεχωριστά σύνολα $int_0(\sigma), \partial_0(\sigma) \subseteq fr(0)$ και μία απεικόνιση $f_\sigma^0 : \partial_0(\sigma) \rightarrow \{1, \dots, t\}$
2. Ξεχωριστά σύνολα $int_1(\sigma), \partial_1(\sigma) \subseteq fr(1)$ και μία απεικόνιση $f_\sigma^1 : \partial_1(\sigma) \rightarrow \{1, \dots, t\}^2$
3. Για κάθε μεταβλητή συνόλου κόμβων $U \in Fr(0)$, ένα σύνολο $U_\sigma \subseteq \{1, \dots, t\}$
4. Για κάθε μεταβλητή συνόλου ακμών $D \in Fr(1)$, ένα σύνολο $D_\sigma \subseteq \{1, \dots, t\}^2$

Γράφουμε $Free(\sigma) = int_0(\sigma) \cup \partial_0(\sigma) \cup int_1(\sigma) \cup \partial_1(\sigma) \cup Fr(0) \cup Fr(1)$.

Ορίζουμε ένα t-boundaried γράφημα $X = (V, E, B, f(\cdot))$ να είναι **σ -μερικώς εξοπλισμένο** αν έχει διακεκριμένους κόμβους, ακμές, σύνολα κόμβων/ακμών για κάθε στοιχείο του $Free(\sigma)$ και ικανοποιούνται οι παρακάτω ιδιότητες:

1. Αν η u είναι μεταβλητή κορυφής και $u \in int_0(\sigma)$, τότε πρέπει η κορυφή που αντιστοιχεί στην u , έστω u^X , να ανήκει στο εσωτερικό του X .
2. Αν η u είναι μεταβλητή κορυφής και $u \in \partial_0(\sigma)$, τότε πρέπει η κορυφή u^X να είναι η μοναδική κορυφή για την οποία $f(u^X) = f_\sigma^0(u)$.
3. Αν η d είναι μεταβλητή ακμής και $d \in int_1(\sigma)$, τότε η ακμή d^X πρέπει να έχει τουλάχιστον ένα απ' τα άκρα της στο εσωτερικό του X .

4. Αν η d είναι μεταβλητή ακμής και $d \in \partial_1(X)$, τότε η ακμή $d^X = (u^X, v^X)$ πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $f_\sigma^1(d) = \{f(u^X), f(v^X)\}$.
5. Αν η U είναι μεταβλητή συνόλου κόμβων και $U \in Fr(0)$, τότε το σύνολο κορυφών U^X του X πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $f(U^X \cap \partial(X)) = U_\sigma$.
6. Αν η D είναι μεταβλητή συνόλου ακμών και $D \in Fr(1)$, τότε το σύνολο ακμών D^X του X πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $\{\{f(u^X), f(v^X)\} : (u^X, v^X) \in E\} \cap \partial^2(X) = D_\sigma$.

Ορίζουμε επίσης το συμπληρωματικό μερικό εξοπλισμό $\bar{\sigma}$ του σ . Πρέπει να ικανοποιεί τα παρακάτω:

1. $\partial_0(\bar{\sigma}) = \partial_0(\sigma)$ και $f_{\bar{\sigma}}^0 = f_\sigma^0$
2. $int_0(\bar{\sigma}) = fr(0) - \partial_0(\sigma) - int_0(\sigma)$
3. $\partial_1(\bar{\sigma}) = \partial_1(\sigma)$ και $f_{\bar{\sigma}}^1 = f_\sigma^1$
4. $int_1(\bar{\sigma}) = fr(1) - \partial_1(\sigma) - int_1(\sigma)$
5. Για κάθε μεταβλητή συνόλου κορυφών $U \in Fr(0)$: $U_{\bar{\sigma}} = U_\sigma$
6. Για κάθε μεταβλητή συνόλου ακμών $D \in Fr(1)$: $D_{\bar{\sigma}} = D_\sigma$

Το παραπάνω είναι κατασκευασμένο έτσι ώστε για κάθε γραφήματα X, Z εξοπλισμένα με $\sigma, \bar{\sigma}$ αντίστοιχα, η πρόταση στην οποία αναφερόμαστε να έχει συνεπή ερμηνεία για το γράφημα $X \oplus Z$.

Έστω πρόταση ϕ, σ ένας μερικός εξοπλισμός για το $Free$ της πρότασης και X, Y σ -μερικώς εξοπλισμένα t-boundaried γραφήματα. Γράφουμε $X \sim_\phi Y$ όταν $\forall \bar{\sigma}$ -μερικώς εξοπλισμένο t-boundaried γράφημα Z ισχύει

$$X \oplus Z \models \phi \iff Y \oplus Z \models \phi$$

Είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε τον βασικό ισχυρισμό με τη χρήση επαγωγής πάνω στην δομή της πρότασης ϕ . Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι για κάθε πρόταση $\phi \in MSO_2$, με μερικό εξοπλισμό σ , η σχέση \sim_ϕ έχει πεπερασμένο δείκτη στο σύμπαν των t-boundaried σ -μερικώς εξοπλισμένων γραφημάτων.

- Δείχνουμε αρχικά τον ισχυρισμό για τις ατομικές φόρμουλες. Αυτές μπορεί να είναι της μορφής:

- $u \in U$
- $d \in D$
- $inc(e, u)$
- $adj(u, v) \equiv \exists d \in D(inc(d, u) \wedge inc(d, v))$,

όπου με την τελευταία πρόταση υποδηλώνουμε ότι χρειάζεται να ελεγχθούν μόνο οι 3 πρώτες προτάσεις (μιας και η 4η θα καλυφθεί απ' την συνέχεια της επαγωγής). Έχουμε λοιπόν:

- $\phi = u \in U$. Εδώ είναι $Free = \{u, U\}$ και πρέπει να πάρουμε περιπτώσεις για τα διάφορα σ με τα οποία μπορούμε να εξοπλίσουμε την ϕ .

- $\phi = d \in D$
 - * Έστω $\sigma : \partial_1 = \{d\}, int_1 = \emptyset, D_\sigma = \emptyset$, τότε προφανώς $\bar{\sigma} = \sigma$ και $\forall X, Z (X \oplus Z) \not\models \phi$, αφού $d \notin D$ (εφόσον το D περιορίζεται σε ακμές στο εσωτερικό των γραφημάτων). Άρα όλα τα t-boundaried σ -μερικώς εξοπλισμένα γραφήματα είναι ισοδύναμα ως προς την \sim_ϕ , δηλαδή ο δείκτης ισούται με 1.
 - * Έστω $\sigma : \partial_1 = \{d = (u^X, v^X)\}, int_1 = \emptyset, \{u^X, v^X\} \subseteq D_\sigma$, τότε $\bar{\sigma} = \sigma$ και τετριμμένα η \sim_ϕ έχει πάλι μία κλάση μιας και $X \oplus Z \models \phi \forall X, Z$.
 - * Ομοίως αποδεικνύουμε ότι ο δείκτης είναι πεπερασμένος και για τις υπόλοιπες περιπτώσεις.
- $\phi = inc(e, u)$
 - * Έστω $\sigma : \partial_1 = \emptyset, int_1 = \{e\}, \partial_0 = \{u\}, int_0 = \emptyset$, τότε $\bar{\sigma} : \partial_1 = int_0 = int_1 = \emptyset, \partial_0 = \{u\}$. Η αλήθεια της ϕ δεν επηρεάζεται από το κόλλημα του γραφήματος Z , αφού δεν προσθέτει την ακμή e , άρα είναι $X \sim_\phi Y$ ανν:

$$X \models \phi \iff Y \models \phi$$

Επομένως, τα γραφήματα χωρίζονται σε 2 κλάσεις ισοδυναμίας, αναλόγως με την αλήθεια της ϕ σε αυτά (αν είναι ένα άκρο της e ο κόμβος u ή όχι). Δηλαδή δείκτης ίσος με 2.

- * Εντελώς ανάλογα μπορούμε να δείξουμε το ίδιο και για τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

- Για το επαγωγικό βήμα θεωρούμε ότι η πρόταση ϕ γράφεται με έναν από τους παρακάτω τρόπους:

1. $\phi = \neg\phi'$
2. $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$
3. $\phi = \exists u\phi'$
4. $\phi = \exists d\phi'$
5. $\phi = \exists U\phi'$
6. $\phi = \exists D\phi'$,

όπου οι μεταβλητές που εμφανίζονται είναι ελεύθερες στην πρόταση ϕ' . Ως συνήθως σε αποδείξεις επαγωγής επί μιας λογικής γλώσσας, υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για τα ϕ_1, ϕ_2, ϕ' που εμφανίζονται στους παραπάνω ορισμούς και θα δείξουμε την αλήθεια για την ϕ σε καθεμία περίπτωση. Για όλες τις περιπτώσεις θα ορίσουμε μία κατάλληλη σχέση ισοδυναμίας, θα αποδείξουμε ότι έχει πεπερασμένο δείκτη και θα δείξουμε ότι αποτελεί εκλέπτυνση της ζητούμενης σχέσης \sim_ϕ .

1. $\phi = \neg\phi'$.

Από επαγωγική υπόθεση, η $\sim_{\phi'}$ έχει πεπερασμένο δείκτη. Έστω X, Y τ.ώ. $X \sim_{\phi'} Y$, δηλαδή

$$X \oplus Z \models \phi' \iff Y \oplus Z \models \phi' \forall Z$$

Έστω ότι τα X, Y δεν είναι ϕ ισοδύναμα, δηλαδή υπάρχει Z τ.ώ:

$$X \oplus Z \models \phi \text{ και } Y \oplus Z \not\models \phi$$

ή

$$X \oplus Z \models \phi \text{ και } Y \oplus Z \models \neg\phi$$

ή ισοδύναμα

$$X \oplus Z \models \neg\phi' \text{ και } Y \oplus Z \models \phi',$$

άτοπο. Επομένως, $X \sim_\phi Y$ για κάθε X, Y με $X \sim_{\phi'} Y$, δηλαδή αποδείξαμε ότι η $\sim_{\phi'}$ αποτελεί εκλέπτυνση της \sim_ϕ και, άρα, η \sim_ϕ δεν μπορεί παρά να έχει και αυτή πεπερασμένο δείκτη.

2. $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$.

Έστω ένας μερικός εξοπλισμός σ για την ϕ . Είναι εμφανές ότι από τον σ επάγονται μερικοί εξοπλισμοί σ_1, σ_2 για τις προτάσεις ϕ_1, ϕ_2 αντίστοιχα (απλά κρατώντας τις απαραίτητες μεταβλητές που αντιστοιχούν στις ελεύθερες μεταβλητές καθεμίας εκ των προτάσεων). Με βάση τα σ_1, σ_2 ορίζουμε την σχέση ισοδυναμίας \sim ως $\sim_{\phi_1} \cap \sim_{\phi_2}$. Η \sim έχει πεπερασμένο δείκτη ως τομή σχέσεων ισοδυναμίας πεπερασμένου δείκτη (από επαγωγική υπόθεση οι $\sim_{\phi_1}, \sim_{\phi_2}$ έχουν πεπερασμένο δείκτη).

Έστω X, Y τ.ώ. $X \sim Y$, δηλαδή $\forall Z$:

$$X \oplus Z \models \phi_1 \iff Y \oplus Z \models \phi_1$$

και

$$X \oplus Z \models \phi_2 \iff Y \oplus Z \models \phi_2$$

Έστω ότι τα X, Y δεν είναι ϕ ισοδύναμα, δηλαδή υπάρχει Z τ.ώ:

$$X \oplus Z \models \phi \text{ και } Y \oplus Z \models \neg\phi \iff$$

$$\iff X \oplus Z \models \phi_1 \wedge \phi_2 \text{ και } Y \oplus Z \models \neg\phi_1 \vee \neg\phi_2$$

Άρα είτε παραβιάζεται η ισοδυναμία των X, Y ως προς ϕ_1 είτε ως προς ϕ_2 , **άτοπο.** Επομένως, $X \sim_\phi Y$, δηλαδή η \sim_ϕ έχει πεπερασμένο δείκτη.

3. $\phi = \exists u \phi'$, όπου u είναι μια ελεύθερη μεταβλητή κόμβου της ϕ' .

Ορίζουμε $a(X, Z)$ να συμβολίζει την πρόταση: Υπάρχει κορυφή u^X στο εσωτερικό του X τ.ώ: $X_u \oplus Z \models \phi'$, όπου X_u είναι το γράφημα X έχοντας εξοπλιστεί επιπλέον με την κορυφή u^X που αντιστοιχεί στην μεταβλητή u .

Με βάση τον παραπάνω ορισμό, ορίζουμε μία νέα σχέση ισοδυναμίας:

$$X \sim_{\exists u} Y : \forall Z [a(X, Z) \iff a(Y, Z)]$$

Η τελική σχέση που θα αποτελέσει εκλέπτυνση της \sim_ϕ σε αυτή την περίπτωση ορίζεται ως εξής $X \sim Y$ ανν:

(α) $X \sim_{\phi'} Y$

(β) $X_i \sim_{\phi'} Y_i \forall i \in \{1, \dots, t\}$, όπου με X_i συμβολίζουμε το μερικώς εξοπλισμένο t -boundaried γράφημα X , επιπλέον εξοπλισμένο με τον συνοριακό κόμβο με ετικέτα i που αντιστοιχεί στην μεταβλητή u , και

(γ) $X \sim_{\exists u} Y$

Η σχέση αυτή είναι πεπερασμένου δείκτη ως τομή 3 σχέσεων ισοδυναμίας πεπερασμένου δείκτη (απο επαγωγική υπόθεση και την αντιμεταθετικότητα του \oplus). Έστω

τώρα X, Y με $X \sim Y$ και υποθέτουμε ότι δεν είναι \sim_ϕ ισοδύναμα, δηλαδή υπάρχει Z τ.ώ:

$$X \oplus Z \models \phi \text{ και } Y \oplus Z \models \neg\phi$$

Έστω v η κορυφή του γραφήματος $X \oplus Z$ που αντιστοιχεί στην μεταβλητή u της πρότασης ϕ . Χρειάζεται να διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Η v ανήκει στο εσωτερικό του Z , τότε

$$X \oplus Z_u \models \phi' \iff Y \oplus Z_u \models \phi', \text{ λόγω της } (\alpha)$$

Δηλαδή $Y \oplus Z \models \phi$, άτοπο.

- Η v ανήκει στο σύνορο του X , τότε για κάποια ετικέτα $i \in \{1, \dots, t\}$ ισχύει

$$X_i \oplus Z_i \models \phi' \iff Y_i \oplus Z_i \models \phi', \text{ λόγω της } (\beta)$$

Δηλαδή $Y \oplus Z \models \phi$, άτοπο.

- Η v ανήκει στο εσωτερικό του X , τότε λόγω του (γ) υπάρχει κορυφή v' στο Y τ.ώ

$$X_u \oplus Z \models \phi' \iff Y_u \oplus Z \models \phi'$$

Δηλαδή $Y \oplus Z \models \phi$, άτοπο.

Επομένως βλέπουμε ότι η σχέση \sim_ϕ είναι πεπερασμένου δείκτη.

Εντελώς παρόμοια με το 3 αποδεικνύεται η ζητούμενη ιδιότητα για τις περιπτώσεις 4, 5, 6 και ολοκληρώνεται έτσι η επαγωγή, αλλά και η απόδειξη συνολικά. \square

Αναφορές

- [1] Downey, R.G., Fellows, M.R.: *Fundamentals of Parameterized Complexity*. Texts in Computer Science. Springer (2013)
- [2] Marek Cygan , Fedor V. Fomin , Lukasz Kowalik , Daniel Lokshtanov , Daniel Marx , Marcin Pilipczuk , Michal Pilipczuk , Saket Saurabh: *Parameterized Algorithms*, Springer Publishing Company, Incorporated, 2015