Sesiune 2019

1. Determinați seria Taylor asociată funcției f în punctul $x_0=0$ $f:(-2,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{x+2}{2-x}$. Aduceți expresia găsită la forma cea mai simplă.

Seria Taylor: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, $x\in\mathbb{R}$

Calculăm derivata de ordin n:

$f(x)=\ln\frac{x+2}{2-x}=\ln(x+2)-\ln(2-x)$

$f'(x)=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2-x}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}$

$g(x)=(x+c)^{-1}$

$g'(x)=-1(x+c)^{-2}$ $\quad g''(x)=2(x+c)^{-3}$ $\quad g^{(3)}(x)=-6(x+c)^{-4}$

$\Rightarrow g^{(n)}(x)=(-1)^n\cdot n!\,(x+c)^{-n-1}=P(n)$

I Verificăm $P(1)$ „A"

$P(1)$: $g'(x)=((x+c)^{-1})'=-(x+c)^{-2}$ „A"

II Presupunem $P(k)$ „A"

$P(k)$: $g^{(k)}(x)=(-1)^k\,k!\,(x+c)^{-k-1}$

III Demonstrăm $P(k+1)$ „A"

$P(k+1)$: $g^{(k+1)}(x)=(-1)^{k+1}(k+1)!\,(x+c)^{-k-2}$

$P(k+1)$: $(g^{(k)}(x))'=[(-1)^k\,k!\,(x+c)^{-k-1}]'$

$=(-1)^k\cdot k!\cdot-(k+1)\cdot(x+c)^{-k-2}$

$=(-1)^{k+1}\cdot(k+1)!\,(x+c)^{-k-2}$ „A"

$\Rightarrow P(n)$: „A"

$f^{(n)}(x)=\begin{cases}\ln(x+2)-\ln(2-x), & n=0\\ [(\ln(x+2)-\ln(2-x))']^{n-1}, & n\neq0\end{cases}$

$[(\ln(x+2)-\ln(2-x))']^{n-1}=\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}\right)^{(n-1)}=\left(\frac{1}{x+2}\right)^{(n-2)}-\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n-2)}$

$=(-1)^{n-1}(n-1)!\,[(x-2)^{-n}-(x-2)^{-n}]$

$f^{n}(0)=\begin{cases}0, & n=0\\ (-1)^{n-1}(n-1)!\,(2^{-n}-(-2)^{-n}), & n\neq0\end{cases}$

$f^{n}(0)=\begin{cases}0, & n-\text{par}\\ (n-1)!\,2\cdot2^{-n}=(n-1)!\,2^{-n+1}, & n-\text{impar}\end{cases}$

Seria Taylor $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{m}(0)}{m!} \cdot x^m$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m! \cdot 2^{-2m}}{(2m+1)!} \cdot x^{2m+1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 2^{-2m}}{2m+1} x^{2m+1}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{1-2m}}{2m+1} \cdot x^{2m+1}.$$

2. Determinați valorile parametrului $\alpha > 0$ pentru care integrala improprie este convergentă $J(\alpha) = \int_0^1 \frac{x-1}{x^\alpha - 1} dx$. Calculați $J(3)$.

Proprietățile cu p și λ

P1. $a, b, p \in \mathbb{R}$, $f: [a,b) \to [0, \infty)$ funcție pozitivă și local integrabilă pe $[a,b)$ și $\exists \lim_{x \nearrow b} (b-x)^p \cdot f(x) = \lambda$ atunci

dacă $p < 1$ și $\lambda < \infty \Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)\,dx$ - convergentă

dacă $p \geq 1$ și $\lambda > 0 \Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)\,dx$ - divergentă

$\Rightarrow \lim_{x \nearrow 1} (1-x)^p \cdot f(x) = \lambda$

$$\lim_{x \nearrow 1} (1-x)^p \cdot \frac{x-1}{x^\alpha - 1} = \lim_{x \nearrow 1} (1-x)^p \frac{\cancel{x-1}}{\frac{(1+(x-1))^\alpha - 1}{x-1} \cdot \cancel{(x-1)}}$$

$\frac{(1+(x-1))^\alpha - 1}{x-1} = \alpha$

$$= \lim_{x \nearrow 1} (1-x)^p \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x \nearrow 1} (1-x)^p$$

alegem $p = 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \lim_{x \nearrow 1} (1-x)^0 = \frac{1}{\alpha} \cdot 1 = \frac{1}{\alpha}$

$p < 1$ și $\frac{1}{\alpha} < \infty \Rightarrow \int_0^1 \frac{x-1}{x^\alpha - 1}$ - convergentă $\forall \alpha > 0$

$$J(3) = \int_0^1 \frac{x-1}{x^3-1} dx = \int_0^1 \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1} dx$$

$\Delta = 1 - 4 = -3$

$$x^2+x+1 = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}\right] = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$J(3) = \int_0^1 \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx = \lim_{u \nearrow 1} \int_0^u \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx$$

$t = x + \frac{1}{2}$ pt $x = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

pt $x = u \Rightarrow t = u + \frac{1}{2}$

$$\lim_{u \nearrow 1} \int_{\frac{1}{2}}^{u+\frac{1}{2}} \frac{1}{t^2 + \frac{3}{4}} dt = \lim_{u \nearrow 1} \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} \Big|_{\frac{1}{2}}^{u+\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{u \nearrow 1} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{2u+1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{3}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{\cancel{6}_3} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

3. Se dă funcția $f: \overline{B}(O_2, 1) \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Arătați că f este continuă în $(0,0)$.

f - continuă în $(0,0) \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x^0)$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) \Rightarrow$ e continuă

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\in[0,1]} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} y \cdot \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\in[0,1]} = 0.$$

b) Determinați valorile extreme ale lui f. Atinge funcția aceste valori? Justificați.

x^0 - pct critic $\Leftrightarrow \nabla f(x^0) = 0_m$

T. Fermat: $x_0 \in \text{int}A$, f - derivabil în x_0 și x^0 - pct. de extrem $\Rightarrow x^0$ - pct critic.

I aflăm punctele critice din interior în afară de $(0,0)$; $x^0 \in \text{int}A$

$\nabla f(x,y) = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2) - (x^3+y^3)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3y^2(x^2+y^2) - (x^3+y^3)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\begin{cases} 3x^2(x^2+y^2) - (x^3+y^3)2x = 0 \\ 3y^2(x^2+y^2) - (x^3+y^3)\cdot 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x[3x(x^2+y^2) - 2(x^3+y^3)] = 0 \\ y[3y(x^2+y^2) - 2(x^3+y^3)] = 0 \end{cases}$$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$, $(x,y) \neq (0,0)$.
$y = 0 \Rightarrow x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x(x^2+y^2) - 2(x^3+y^3) = 0 \\ 3y(x^2+y^2) - 2(x^3+y^3) = 0 \end{cases} -$$

$(3x - 3y)(x^2+y^2) = 0 \ / : x^2+y^2 \qquad x^2+y^2 > 0$

$3x - 3y = 0 \Rightarrow x = y$

$3x^3 + 3x^3 - 2x^3 - 2x^3 = 2x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ nu sunt pct. critice

II aflăm punctele critice din frontieră ; $x^0 \in \operatorname{fr} A$

$x^2+y^2-1=0$ $\quad$ $x^2+y^2=1$

$\Rightarrow f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = x^3+y^3$ $\quad$ $(x,y) \neq (0,0)$

restricția $x^2+y^2-1=0$

$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda F(x,y)$

$= x^3+y^3+\lambda(x^2+y^2-1)$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2+\lambda 2x \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2+\lambda 2y \qquad \dfrac{\partial f}{\partial \lambda} = x^2+y^2-1$

Punctele de extrem sunt printre punctele critice.

$$\begin{cases} 3x^2+2\lambda x=0 \\ 3y^2+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(3x+2\lambda)=0 \\ y(3y+2\lambda)=0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

I pt $x=0 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1 \Rightarrow (0,-1)$ și $(0,1)$

II pt $y=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow (1,0)$ și $(-1,0)$

III $3x+2\lambda=0$ $\quad$ $3y+2\lambda=0$

$x=\dfrac{-2\lambda}{3}$ $\quad$ $y=\dfrac{-2\lambda}{3}$ $\Rightarrow x=y$ $\quad x^2+y^2=1 \Leftrightarrow 2x^2=1 \Rightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ și $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$f(0,0)=0 \quad f(1,0)=1 \quad f(0,1)=1 \quad f(-1,0)=-1 \quad f(0,-1)=-1$

$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{2}^3}\cdot\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$(1,0)$ și $(0,1)$ – pct. de maxim ; $f(-1,0)$ și $(0,-1)$ – pct. de minim.

se atinge în $(0,1)$ și $(1,0)$

* Dacă avem domeniu compact, funcția își atinge extremele.

4.a) Definiți noțiunea de șir fundamental de numere reale

$\forall \varepsilon > 0, p \in \mathbb{N}, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

b) Dați exemplu de un șir fundamental și nemonoton. Justificați.

$x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0 \Rightarrow$ e convergent $\Rightarrow$ e fundamental