

Examen Calcul numeric

6 iunie 2024

Setul 1

Problema 1 *Se consideră problema cu valori pe frontieră*

$$y'' = g(x, y, y'), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \quad (1)$$

(a) *Ea poate fi discretizată notând $u_k = y(x_k)$ și înlocuind derivata întâi și a doua prin formulele*

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$
$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

relative la o grilă de puncte echidistante $x_k = a + \frac{k}{n+1}h$, $k = 0, 1, \dots, n, n+1$, $h = \frac{b-a}{n+1}$. Se ajunge la un sistem neliniar în necunoscutele u_k , $k = 1, \dots, n$. Concepeți o metodă de rezolvare aproximativă a problemei (1) bazată pe metoda lui Newton. (2p)

(b) *Aplicație: implementați metoda în MATLAB și rezolvați problema*

$$y'' = yy', \quad y(0) = 0, y(1) = 1$$

pentru $n = 100$ și precizia $0.5e - 6$. Cum verificați corectitudinea programului? (3p)

Problema 2 (a) *Determinați o formulă de cuadratură de tip Gauss de forma*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{2 \sinh \pi t} f(t) dt = A_1 f(t_1) + A_2 f(t_2) + R(f)$$

care să aibă grad maxim de exactitate. (3p)

(b) *Aproximați integrala*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} (x + \cos x + 1) dt,$$

cu 6 zecimale corecte folosind o cuadratură de tip Laguerre. (1p)

Setul 2

Problema 3 *Se consideră problema cu valori pe frontieră*

$$y'' = g(x, y, y'), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \quad (2)$$

- (a) *Ea poate fi discretizată notând $u_k = y(x_k)$ și înlocuind derivata întâi și a doua prin formulele*

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$
$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

relative la o grilă de puncte echidistante $x_k = a + \frac{k}{n+1}h$, $k = 0, 1, \dots, n, n+1$, $h = \frac{b-a}{n+1}$. Se ajunge la un sistem neliniar în necunoscutele u_k , $k = 1, \dots, n$. Concepeți o metodă de rezolvare aproximativă a problemei (2) bazată pe metoda lui Newton. (2p)

- (b) *Aplicație: implementați metoda în MATLAB și rezolvați problema*

$$y'' = y'(y+1), \quad y(0) = 0, y(1) = 1$$

pentru $n = 100$ și precizia $0.5e-6$. Cum verificați corectitudinea programului? (3p)

Problema 4 (a) *Determinați o formulă de cuadratură de tip Gauss de forma*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} f(t) dt = A_1 f(t_1) + A_2 f(t_2) + R(f)$$

care să aibă grad maxim de exactitate. (3p)

- (b) *Aproximați integrala*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} (x + \cos x + 1) dt,$$

cu 6 zecimale corecte folosind o cuadratură de tip Laguerre. (1p)