POPA
MONICA
215

Lucrare de control
Sisteme dinamice

5. $\begin{cases} y_1' = 4y_1 + 6y_2 \ (1) \\ y_2' = 2y_1 + 3y_2 \end{cases}$

Derivăm prima ecuație:

$y_1'' = 4y_1' + 6y_2'$

Înlocuim y_1' și y_2':

$y_1'' = 4(4y_1 + 6y_2) + 6(2y_1 + 3y_2)$

$\Leftrightarrow y_1'' = 16y_1 + 24y_2 + 12y_2 + 18y_2$

$\Leftrightarrow y_1'' = 28y_1 + 42y_2$

Din (1) $\Rightarrow 6y_2 = y_1' - 4y_1 \Leftrightarrow y_2 = \dfrac{y_1' - 4y_1}{6}$

Înlocuim y_2:

$y_1'' = 28y_1 + \cancel{42}\left(\dfrac{y_1' - 4y_1}{\cancel{6}}\right)$

$\Leftrightarrow y_1'' = \cancel{28y_1} + 7y_1' - \cancel{28y_1} \Leftrightarrow y_1'' - 7y_1' = 0$

ec. caracteristică pt ec. omogenă obținută:

$r^2 - 7r = 0 \Rightarrow \begin{matrix} r_1 = 7 \\ r_2 = 0 \end{matrix}$

$\theta_1(x) = e^{7x}$

$\theta_2(x) = e^0 = 1$

$\Rightarrow y_1(x) = c_1 e^{7x} + c_2,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Cum $y_2 = \dfrac{y_1' - 4y_1}{6} \Leftrightarrow y_2(x) = \dfrac{7c_1e^{7x} - 4(c_1e^{7x} + c_2)}{6}$

$\Leftrightarrow y_2(x) = \dfrac{7c_1e^{7x} - 4c_1e^{7x} - 4c_2}{6} = \dfrac{3c_1e^{7x}}{6} - \dfrac{4c_2}{6}$

$= \dfrac{c_1e^{7x}}{2} - \dfrac{2c_2}{3},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ sol sist este:

$\begin{cases} y_1(x) = c_1e^{7x} + c_2,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \\ y_2(x) = \dfrac{c_1e^{7x}}{2} - \dfrac{2c_2}{3},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$

1) $y' = \frac{x^2y + y^3}{x^3} \Leftrightarrow y' = \frac{x^2y}{x^3} + \frac{y^3}{x^3} = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^3$

Fie $z(x) = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx \Rightarrow y' = z'x + z$, înlocuind obținem:

$y' = z + z^3 \Leftrightarrow z'x + \cancel{z} = \cancel{z} + z^3 \Leftrightarrow z'x = z^3 \mid : \frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow z' = z^3 \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow$ se observă soluția singulară $z = 0 \Rightarrow y = 0$

Pentru $z \neq 0$ avem:

Știm $z' = \frac{dz}{dx}$ astfel:

$\frac{dz}{dx} = z^3 \cdot \frac{1}{x} \mid \cdot dx \Leftrightarrow dz = z^3 \cdot \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \frac{1}{z^3} dz = \frac{1}{x} dx \mid \int$

$\Leftrightarrow \int \frac{1}{z^3} dz = \int \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow -\frac{1}{2z^2} = \ln|x| + c_0$, ~~$c_0 := c$~~ ~~$c_0 := \ln c$~~

~~$\Leftrightarrow -\frac{1}{2z^2} = \ln(x \cdot c) \mid \cdot (-2) \Leftrightarrow \frac{1}{z^2} = \ln(x \cdot c)^{-2}$~~

~~$\Leftrightarrow z^2 = \ln(x \cdot c)^{+2} \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{\ln(x \cdot c)^2}$~~

~~Cum $y = z \cdot x \Rightarrow y = x \cdot z = \pm x\sqrt{\ln(x \cdot c)^2}$~~

~~2) a) $(x^2+1)y' = 2xy$~~

$-\frac{1}{2z^2} = \ln|x| + c_0 \mid (-2) \Leftrightarrow \frac{1}{z^2} = -2\ln|x| - 2c_0$, $-2c_0 := c$

$\Leftrightarrow \frac{1}{z^2} = -2\ln|x| + c \Leftrightarrow z^2 = \frac{1}{c - 2\ln|x|}$

$\Leftrightarrow z = \pm\sqrt{\frac{1}{c - 2\ln|x|}} = \pm\frac{1}{\sqrt{c - 2\ln|x|}}$

Cum $y = z \cdot x \Rightarrow y = \pm\frac{x}{\sqrt{c - 2\ln|x|}}$, $c \in \mathbb{R}$.

~~2) $(x^2+1)y' = 2xy$~~

~~$\Leftrightarrow y' = \frac{2xy}{x^2+1}$~~

~~I ec. omogenă:~~

~~$(x^2+1)y' = 0$~~

~~$\Leftrightarrow y'x^2 + y'$~~

Scanned with CamScanner

3) $y'' = e^x + \cos(2x)$

$\Leftrightarrow y' = \int e^x + \cos(2x)\,dx = \int e^x\,dx + \int \cos(2x)\,dx$

$= e^x + c_1 + \frac{\sin(2x)}{2}, \; c_1 \in \mathbb{R}$

$y = \int e^x + \frac{\sin(2x)}{2} + c_1\,dx = \int e^x\,dx + \frac{1}{2}\int \sin(2x) + \int c_1\,dx$

$= e^x + \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(2x)}{2}\right) + c_1 x + c_2$

$= e^x - \frac{\cos(2x)}{4} + c_1 x + c_2, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

4) a) $y'' + y = x^3 - 1$

I ec. omogenă: $y'' + y = 0$

ec caracteristică atașată: $r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_{1/2} = \pm i$

$\Rightarrow y_1(x) = \cos x, \; y_2(x) = \sin x.$

$\Rightarrow y_0(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

II ec. particulară:

$y'' + y = x^3 - 1$; $x^3 - 1$ este un $P_3(x)$

$\Rightarrow f(x) = x^3 - 1.$

$y_p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$y_p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$y_p''(x) = 6ax + 2b$

Înlocuim în ec. inițială:

$6ax + 2b + ax^3 + bx^2 + cx + d = x^3 - 1$

$\Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + (6a + c)x + d = x^3 - 1$

$\Rightarrow$ sistemul $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ 6a + c = 0 \\ d = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -6 \\ d = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow y_p(x) = x^3 - 6x - 1$

$\Rightarrow$ Sol generală a sist: $y = y_0(x) + y_p(x)$

$\Rightarrow y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x^3 - 6x - 1, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

1 b) $\begin{cases} y'' + y = x^3 - 1 \\ y(0) = 0 \\ y(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$

Știm din pct a că sol. generală a ec. $y'' + y = x^3 - 1$

este $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x^3 - 6x - 1$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$y(0) = 0 \Leftrightarrow y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 + 0 - 6 \cdot 0 - 1$

$= c_1 - 1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 1$

$y(\frac{\pi}{2}) = 1 \Leftrightarrow y(\frac{\pi}{2}) = 1 \cos\frac{\pi}{2} + c_2 \sin\frac{\pi}{2} + (\frac{\pi}{2})^3 - 6\frac{\pi}{2} - 1$

$= 0 + c_2 + \frac{\pi^3}{8} - 3\pi - 1 = 1$

$\Leftrightarrow c_2 = -\frac{\pi^3}{8} + 3\pi + 2$

$\Rightarrow$ sol generală a ec este:

$y = \cos x + (2 + 3\pi - \frac{\pi^3}{8}) \sin x + x^3 - 6x - 1$

2. a) $(x^2+1)y' = 2xy$

$\frac{y'}{y} = \frac{2x}{1+x^2} \; | \cdot y$

$\Leftrightarrow y' = \frac{2x}{1+x^2} \cdot y \Rightarrow y = 0$ sol singulară

pentru $y \neq 0$

știm $y' = \frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+x^2} \cdot y \; | \cdot dx \Leftrightarrow dy = \frac{2x}{1+x^2} dx \cdot y \; | \cdot \frac{1}{y}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{y} dy = \frac{2x}{1+x^2} dx \; | \int \Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{2x}{1+x^2} dx$

$\Leftrightarrow \ln|y| = \int \frac{(1+x^2)'}{(1+x^2)} dx \Leftrightarrow \ln|y| = \ln|1+x^2| + c_0$, $c_0 := \ln c$, $c_0, c \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \ln|y| = \ln|1+x^2| + \ln c \Leftrightarrow \ln|y| = \ln(c(1+x^2)) \; | e$

$\Leftrightarrow y = c(x^2+1)$ sol generală, $c \in \mathbb{R}$.

b) $\begin{cases} (x^2+1)y' = 2xy \\ y(0) = 2 \end{cases}$

Din (a) știm sol gen pt ec: $(x^2+1)y' = 2xy$: $y = c(x^2+1)$, $c \in \mathbb{R}$

$y(0) = 2 \Leftrightarrow (0 \cdot c + c) = 2 \Leftrightarrow c = 2$

$\Rightarrow$ sol generală: $y = 2(x^2+1)$