Sesiune 2018

1. Studiați convergența seriei cu termeni pozitivi în funcție de valorile parametrului $a>0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}$$

I Criteriul raportului al lui d'Alembert

dacă $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = \Delta \in \overline{\mathbb{R}}$ atunci $\begin{cases} \Delta>1 \Rightarrow \sum x_n \text{ - convergentă} \\ \Delta<1 \Rightarrow \sum x_n \text{ - divergentă} \end{cases}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}}{a^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} a^{\cancel{1}+\cancel{\frac{1}{2}}+\dots+\cancel{\frac{1}{n}}-\cancel{1}-\cancel{\frac{1}{2}}-\dots-\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n+1}} \overset{\circ}{=} 1$$ nu decide

II Criteriul lui Raabe-Duhamel

dacă $\exists \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right) = R \in \overline{\mathbb{R}}$ atunci $R>1 \Rightarrow \sum x_n$ - convergentă
$R<1 \Rightarrow \sum x_n$ - divergentă

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n\left(a^{-\frac{1}{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{a^{-\frac{1}{n+1}}-1}{-\frac{1}{n+1}} \cdot \left(-\frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln a \cdot \frac{-n}{n+1} = -\ln a$$

$\frac{-1}{n+1} = \ln a$

comparăm $-\ln a$ cu 1

$-\ln a < 1 \quad / \cdot (-1)$

$\ln a > -1 \quad / e$

$e^{\ln a} > e^{-1}$ $\qquad a<\frac{1}{e}$ - e divergentă

$a > \frac{1}{e} \Rightarrow$ pt $a<\frac{1}{e}$ - e convergentă

pt $a=\frac{1}{e} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{\ln n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{\ln n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

constanta lui Euler

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - seria armonică, e divergentă

$$\xrightarrow{C.C.} \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}}{\left(\frac{1}{e}\right)^{\ln n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n} \overset{\neq 0}{=} \left(\frac{1}{e}\right)^{\gamma} \in (0,\infty)$$

$l>0$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{\ln n}$ - divergentă $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}$ - divergentă

III Criteriul lui Bertrand

dacă $\exists \lim_{n\to\infty} \ln n\left[n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)-1\right] = B \in \overline{\mathbb{R}}$ atunci

dacă $B>1 \Rightarrow \sum x_n$ - convergentă
$B<1 \Rightarrow \sum x_n$ - divergentă

2. Studiați convergența integralei improprii.
$\int_0^1 (\ln x)^2 dx$

Proprietăți cu p și λ

P.3. $a,b,p \in \mathbb{R}$, $f:(a,b] \to [0,\infty)$ - f pozitivă local integrabilă pe $(a,b]$
și $\exists \lim_{x \searrow a} (x-a)^p \cdot f(x) = \lambda$ atunci $\begin{cases} p<1, \lambda<+\infty \Rightarrow \int_{a+0}^b f(x)dx - \text{convergentă} \\ p\geq 1, \lambda>0 \Rightarrow \int_{a+0}^b f(x)dx - \text{divergentă} \end{cases}$

$(a,b] \Leftrightarrow (0,1]$

$\lim_{x\searrow 0} x^p (\ln x)^2$ luăm $p=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim_{x\searrow 0} x^{\frac{1}{2}}(\ln x)^2 = \lim_{x\searrow 0} \frac{(\ln x)^2}{x^{-\frac{1}{2}}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{l'H.}{=}} \lim_{x\searrow 0} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{x\searrow 0} \frac{-4\ln x \cdot \cancel{\frac{1}{x}}}{x^{-\frac{1}{2}}\cdot \cancel{x^{-1}}}$

$= \lim_{x\searrow 0} \frac{-4\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}} \overset{\frac{-\infty}{\infty}}{\underset{l'H}{=}} \lim_{x\searrow 0} \frac{-4\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{x\searrow 0} \frac{8\cdot \cancel{\frac{1}{x}}\cdot x}{x^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x\searrow 0} 8\cdot x^{\frac{1}{2}} = 0$

$p<1$ și $\lambda<\infty \Rightarrow \int_0^1 (\ln x)^2 dx$ este convergentă

$\int_0^1 (\ln x)^2 dx = \lim_{v\searrow 0} \int_v^1 (\ln x)^2 dx = \lim_{v\searrow 0} x(\ln x)^2 \Big|_v^1 - \int_v^1 \cancel{x}\cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx$

$= \lim_{v\searrow 0} (\ln 1)^2 - v(\ln v)^2 - 2\int_v^1 \ln x\, dx = \lim_{v\searrow 0} -v(\ln v)^2 - 2\left[x\ln x\Big|_v^1 - \int_v^1 \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}dx\right]$

$= \lim_{v\searrow 0} -v(\ln v)^2 - 2\cdot\ln 1 + 2v\ln v + 2x\Big|_v^1 = \lim_{v\searrow 0} 2v\ln v - v(\ln v)^2 + 2 - 2v$

$= 2 + \lim_{v\searrow 0} 2v\ln v - \lim_{v\searrow 0} v(\ln v)^2$

$\lim_{v\searrow 0} 2v\ln v = 2\lim_{v\searrow 0} v\ln v = 2\lim_{v\searrow 0} \frac{\ln v}{\frac{1}{v}} \overset{\frac{-\infty}{\infty}}{\underset{l'H}{=}} 2\lim_{v\searrow 0} \frac{\frac{1}{v}}{-\frac{1}{v^2}} = 2\cdot 0 = 0.$

$\lim_{v\searrow 0} v(\ln v)^2 = \lim_{v\searrow 0} \frac{(\ln v)^2}{\frac{1}{v}} \underset{l'H}{=} \lim_{v\searrow 0} \frac{2\ln v\cdot\frac{1}{v}}{-\frac{1}{v^2}} = \lim_{v\searrow 0} -2\frac{\ln v}{\frac{1}{v}} \underset{l'H}{=}$

$\lim_{v\searrow 0} \frac{-2\cdot\frac{1}{v}}{-\frac{1}{v^2}} = \lim_{v\searrow 0} -2\cdot\frac{1}{v}(-v^2) = 0.$

$\Rightarrow 2 + \lim_{v\searrow 0} 2v\ln v - \lim_{v\searrow 0} v(\ln v)^2 = 2+0-0 = 2.$

3. Determinați constanta $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^y(x\sin x + ay\cos x)$ verifică relația

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y(1\sin x + x\cdot\cos x + ay(-\sin x)) = e^y(\sin x + x\cos x - ay\sin x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^y(\cos x + 1\cdot\cos x + x\cdot(-\sin x) - ay\cdot\cos x)$$

$$= e^y(2\cos x - x\sin x - ay\cdot\cos x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^y(x\sin x + ay\cos x) + e^y(a\cos x) = e^y(x\sin x + ay\cos x + a\cos x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^y(x\sin x + ay\cos x + a\cos x + a\cos x) = e^y(x\sin x + ay\cos x + 2a\cos x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^y(2\cos x \cancel{- x\sin x} \cancel{- ay\cos x} \cancel{+ x\sin x} \cancel{+ ay\cos x} + 2a\cos x) = 0$$

$$e^y(2\cos x + 2a\cos x) = 0$$

$$2e^y\cos x(1+a) = 0 \Rightarrow a+1=0 \Rightarrow a=-1.$$

4. a) Definiți noțiunea de derivată într-un punct după direcția unui vector, a unei funcții de variabilă vectorială ($\dim \mathbb{R}^m$)

$f: A \to \mathbb{R}$ o funcție, $x^0 \in A$ și $v \in \mathbb{R}^m$.

dacă $\exists \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(x^0 + t\cdot v) - f(x^0)}{t}$ ea se numește derivata lui f în x^0 după direcția vectorului v și se notează cu $f'_v(x^0)$.

b) Dați exemplu de o funcție neconstantă $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ și calculați derivata sa în punctul $(1,0,1)$ după direcția vectorului $(0,1,0)$.

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x+y+z$

$$f'_{(0,1,0)}(1,0,1) = \lim_{t\to 0} \frac{f((1,0,1)+t(0,1,0)) - f(1,0,1)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f((1,0,1)+(0,t,0)) - f(1,0,1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(1,t,1) - f(1,0,1)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{2}+t-\cancel{2}}{t} = 1$$