习题7.4.

1(1) $\det A(\lambda)=\det\begin{pmatrix}1 & \lambda+1 & \lambda^2+1\\ & \lambda^2-\lambda-1 & \lambda^3+\lambda-1\\ & 0 & 0\end{pmatrix}=0$. 故 $r(A(\lambda))=2$.

$\det B(\lambda)=\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ & \lambda+1 & \lambda-1\\ & & 0\end{pmatrix}=0$ 故 $r(B(\lambda))=2$

$\det C(\lambda)=\det\begin{pmatrix}1 & \lambda & 0\\ & -\lambda & 1\\ & -\lambda^3-\lambda+2 & \lambda^2+1\end{pmatrix}=-2$ 故 $r(C(\lambda))=3$

$\det D(\lambda)=(\lambda^2-1-\lambda^3)(\lambda^2-1-\lambda^3)=(\lambda^3-\lambda^2+1)^2$ 故 $r(D(\lambda))=3$.

$r(A)=r(B)=2$ $r(C)=r(D)=3$. $C(\lambda)$. $D(\lambda)$ 满秩.

(2) $C(\lambda)$ 可逆.

$$C^*(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda^3+\lambda-2 & -\lambda^3-\lambda & \lambda\\ \lambda^2+1 & \lambda^2+1 & -1\\ -\lambda^3-\lambda+4 & \lambda^3+\lambda-2 & -\lambda\end{pmatrix} \text{ 故 } C^{-1}(\lambda)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\lambda^3+\lambda-2 & -\lambda^3-\lambda & \lambda\\ \lambda^2+1 & \lambda^2+1 & -1\\ -\lambda^3-\lambda+4 & \lambda^3+\lambda-2 & -\lambda\end{pmatrix}$$

2(2): $$\begin{pmatrix}1-\lambda & \lambda^2 & \lambda\\ \lambda & \lambda & -\lambda\\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & \lambda^2+\lambda & 0\\ \lambda & \lambda & -\lambda\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & \lambda^2+\lambda & \\ & \lambda & -\lambda\\ & & \lambda^2+\lambda\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda^2+\lambda\end{pmatrix}$$

4. $$\begin{pmatrix}\lambda^2 & \lambda & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_3}\begin{pmatrix}1 & \lambda & \lambda^2\\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-r_2\cdot\lambda]{r_1-r_3\cdot\lambda^2}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$$

故 $A(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & 0 & r^2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & r & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}E\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

6.(1) $\det(xE_n-A)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$. 由于 x^n 系数不为0.

$\det(xE_n-A)$ 一定不是常数. 故其不可逆.

(2) 令 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$. 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 中有 n 个根 $x_1\cdots x_n$.

则对 $x=x_1$ 或 $x_2\cdots$ 或 x_n. xE_n-A 在 $P^{n\times n}$ 中不可逆.

1.(1). 由于 $\exists A_1=(1)$. 故1阶行列式因子为1.

由于 $\exists A_2=\begin{pmatrix}1&0\\ \lambda(\lambda+1)&-3\end{pmatrix}$ $\det A=-3$ 故2阶行列式因子为1.

$\det A=-2\lambda^2(\lambda+1)(\lambda^2-1)=-2\lambda^2(\lambda+1)(\lambda-1)^2$. 故 $\lambda^2(\lambda+1)(\lambda-1)^2$ 为3阶行列式因子

(3). 化为 $\begin{pmatrix}1&&\\&\lambda&\\&&-\lambda^3-\lambda^2\end{pmatrix}$ 故1.2.3阶行列式因子为

$1.\ \lambda.\ \lambda^4+\lambda^3$

4. 将初等因子按降幂排列

$\lambda^2\quad \lambda^2\quad \lambda\quad 1\quad 1$

$(\lambda+1)^3\quad \lambda+1\quad 1\quad 1\quad 1$ 对应相乘得不变因子组.

$\lambda-1\quad \lambda-1\quad 1\quad 1\quad 1$

$1.\ 1.\ \lambda.\ \lambda^2(\lambda+1)(\lambda-1).\ \lambda^2(\lambda+1)^3(\lambda-1).$

故其标准型为 $\mathrm{diag}(1.\ 1.\ \lambda.\ \lambda^2(\lambda^2-1).\ \lambda^2(\lambda+1)^2(\lambda^2-1))$

5. $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&&&&a_0\\-1&\lambda&&&a_1\\&-1&\ddots&&\vdots\\&&\ddots&\lambda&\vdots\\&&&&\lambda+a_{n-1}\end{vmatrix}$ 设 D_i 为 $|\lambda E-A|$ 的 i 阶行列式因子.

d_i 为不变因子.

故有 $D_n=\det(\lambda E-A)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$.

又存在一个 $n-1$ 阶子式 $\begin{vmatrix}-1&\lambda&&\\&-1&\lambda&\\&&\ddots&\lambda\\&&&-1\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}$. 故 $D_{n-1}=|(-1)^{n-1}|$ 同理 $D_i=1$ 或 -1 $(i\neq n)$.

由 $D_{n-1}\cdot d_n = D_n \Rightarrow d_n = \lambda^n + \cdots + a_0$. 由 $d_i \cdot D_i = D_{i+1} \Rightarrow d_i = 1$ $i \neq n$.

故 $d_1 = d_2 = \cdots = d_{n-1} = 1$. $d_n = \lambda^n + \cdots + a_0$.

7.(1). $A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \\ & \lambda^2 \end{pmatrix}$

$B(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \\ & \lambda \end{pmatrix}$ 标准型不同. 故不等价.

8. $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 显然等价. 只需证 $A(\lambda)$ 与 $C(\lambda)$ 等价.

由 $(f(\lambda), g(\lambda)) = 1$. $\exists\, u(\lambda), v(\lambda)$, s.t. $u(\lambda)f(\lambda) + v(\lambda)g(\lambda) = 1$.

$A(\lambda) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \\ & g(\lambda) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u(\lambda)f(\lambda) & \\ & v(\lambda)g(\lambda) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & v(\lambda)g(\lambda) \\ v(\lambda)g(\lambda) & v(\lambda)g(\lambda) \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & \\ & v(\lambda)g(\lambda)[1 - v(\lambda)g(\lambda)] \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \\ & u(\lambda)v(\lambda)f(\lambda)g(\lambda) \end{pmatrix}$.

由于 $\partial(f(\lambda)) + \partial(g(\lambda))$ 是与其等价的矩阵所能达到的最高次数. 故 $u(\lambda)f(\lambda)v(\lambda)g(\lambda) = c f(\lambda)g(\lambda)$. c 是常数 非0.

故 $A(\lambda)$ 与 $C(\lambda)$ 等价. 故 $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ 等价.