28. 解：(1) 对于转移概率矩阵

$$P_1=\begin{bmatrix}0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25\\ 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0\\ 0.5 & 0 & 0.25 & 0.25\\ 0.10 & 0.20 & 0.30 & 040\end{bmatrix},$$

$p_{12}p_{23}p_{34}p_{41}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{640}\neq 0=p_{14}p_{43}p_{32}p_{21}$，从而由定理 4.11 可知 P_1 对应的 Markov 链是不可逆的.

(2) 对于转移概率矩阵

$$P_2=\begin{bmatrix}0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9}\\ \frac{1}{10} & \frac{4}{10} & 0 & \frac{5}{10}\\ 0 & \frac{2}{7} & \frac{5}{7} & 0\end{bmatrix},$$

可求得其平稳分布为 $\pi=\begin{pmatrix}\frac{2}{15} & \frac{3}{10} & \frac{1}{3} & \frac{7}{30}\end{pmatrix}$, 经验证满足 $\pi_i p_{ij}=\pi_j p_{ji}, 1\le i,j\le 4$. 从而由定理 4.10 可知，$P_2$ 对应的 Markov 链是可逆的.

(3) 对于转移概率矩阵

$$P_3=\begin{bmatrix}0.1 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.4\\ 0 & 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

可求得其平稳分布为 $\pi=\begin{pmatrix}\frac{5}{41} & \frac{45}{328} & \frac{27}{328} & \frac{45}{164} & \frac{45}{164} & \frac{9}{82}\end{pmatrix}$, 且满足 $\pi_i p_{ij}=\pi_j p_{ji}$，$1\le i,j\le 6$.

从而由定理 4.10 可知，P_3 对应的 Markov 链是可逆的.

(4) 对于转移概率矩阵

$$P_4=\begin{bmatrix}0.5 & 0.1 & 0.4\\ 0.2 & 0.4 & 0.4\\ 0.3 & 0.2 & 0.5\end{bmatrix},$$

$p_{13}p_{32}p_{21}=0.016\neq 0.012=p_{12}p_{23}p_{31}$，从而由定理 4.11 可知 P_4 对应的 Markov 链是不可逆的.

31. 解：**首先, 题中几处记号需做如下修改**

$$\beta_n=\frac{b_n}{b_0+b_1+\cdots+b_n},$$

$$\sigma_n=b_0+b_1+\cdots+b_n.$$

下面, 我们用数学归纳法证明命题： $p_{00}^{(n)}=\frac{1}{\sigma_n}$， $p_{0k}^{(n)}=\begin{cases}\frac{b_k}{\sigma_n},k\le n\\ 0,k>n\end{cases}$.

(1) 当 $n=1$ 时,

$$p_{00}^{(1)}=\frac{b_0}{b_0}\left(\beta_0-\beta_1\right)=1-\frac{b_1}{b_0+b_1}=\frac{b_0}{b_0+b_1},$$

$$p_{01}^{(1)}=\frac{\beta_1}{\beta_0}=\frac{b_1}{b_0+b_1}，\ p_{0i}^{(1)}=0,\forall i>1,$$

命题成立.

(2) 假设 $n=m$ 时, 命题成立, 则对于 $n=m+1$，有：

$$p_{00}^{(m+1)}=\sum_{i=0}^{\infty}p_{0i}^{(m)}p_{i0}^{(1)}=\sum_{i=0}^{m}p_{0i}^{(m)}p_{i0}^{(1)}=\sum_{i=0}^{m}\frac{b_i}{\sigma_m}\frac{b_0}{b_i}\left(\beta_i-\beta_{i+1}\right)=\frac{b_0}{\sigma_m}\left(\beta_0-\beta_{n+1}\right)=\frac{1}{\sigma_{m+1}};$$

当 $k>m+1$ 时，$p_{0k}^{(m+1)}=0$；

当 $k=m+1$ 时，$p_{0k}^{(m+1)}=\sum_{i=0}^{\infty}p_{0i}^{(m)}p_{ik}^{(1)}=\sum_{i=k-1}^{m}p_{0i}^{(m)}p_{ik}^{(1)}=p_{0,k-1}^{(m)}p_{k-1,k}^{(1)}=\frac{b_{k-1}}{\sigma_m}\frac{\beta_k}{\beta_{k-1}}=\frac{b_k}{\sigma_{m+1}}$；

当 $k<m+1$ 时，$p_{0k}^{(m+1)}=\sum_{i=0}^{\infty}p_{0i}^{(m)}p_{ik}^{(1)}=\sum_{i=k-1}^{m}p_{0i}^{(m)}p_{ik}^{(1)}=p_{0,k-1}^{(m)}p_{k-1,k}^{(1)}+\sum_{i=k}^{m}p_{0i}^{(m)}p_{ik}^{(1)}$

$$=\frac{b_{k-1}}{\sigma_m}\frac{\beta_k}{\beta_{k-1}}+\sum_{i=k}^{m}\frac{b_i}{\sigma_m}\frac{b_k}{b_i}\left(\beta_i-\beta_{i+1}\right)$$

$$=\frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_m}\frac{b_k}{\sigma_k}+\sum_{i=k}^{m}\frac{b_k}{\sigma_m}\left(\beta_i-\beta_{i+1}\right)$$

$$=\frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_m}\frac{b_k}{\sigma_k}+\frac{b_k}{\sigma_m}\left(\beta_k-\beta_{m+1}\right)$$

$$=\frac{b_k}{\sigma_m}\left(\frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k}+\beta_k-\beta_{m+1}\right)$$

$$=\frac{b_k}{\sigma_m}\left(\frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k}+\frac{b_k}{\sigma_k}-\frac{b_{m+1}}{\sigma_{m+1}}\right)$$

$$=\frac{b_k}{\sigma_{m+1}}.$$

从而由数学归纳法可知，原命题对于所有的正整数 n 均成立.

由转移概率的定义可知，该 Markov 链是不可约的. 从而该 Markov 链是瞬时的当且仅当状态 0 是瞬时的，进一步等价于 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma_n}<\infty$.