第一次小测

luojunxun

2023 年 4 月 16 日

集合

(集族):$\mathcal{X} = \{A \subset X\}$: 即 X 的某些子集构成的集合

(幂集):$\mathcal{P}(X) = \{X$ 的所有子集构成的集合 $\}$

(集族的并):$\bigcup A = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{x|\exists A \subset X; s.t. x \in A\}$

(集族的交):$\bigcap A = \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{x|\forall A \subset X; x \in A\}$

这里的 Λ 是指标集, 可以是有限集也可以是无限集

性质

Theorem 集合运算的性质: *1. 集合自己是自己的子集　2. 集合的包含关系具有传递性　3. 集合的取交取并运算有交换律, 结合律, 分配律　4. 并集的补等于补集的交; 交集的补等于补集的并*

(De-Moagan 公式): $(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c = \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c; (\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$

(对称差):$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A) = A \cup B - A \cap B$ 满足交换律

(直积):$X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2)|x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$ 称为 X_1 和 X_2 的直积

同样可以定义 n 维直积 (或者可数多直积)$\prod\limits_{k=1}^{n} X_i$

在无穷维直积 $\prod\limits_{k=1}^{\infty} X_i$ 中定义内积 $< x, y >= \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i y_i$

定义度量 (p 范数)$||x||_p = (\sum_{i=1}^{\infty} x_i^p)^{\frac{1}{p}} < +\infty; p \geq 1$

这时候构成的空间我们称为巴拿赫空间 $(l^p)(p \geq 1)$(无穷维)

特别的: 当 $p = 2$ 时, 我们称其为希尔伯特空间 (无穷维)(l^2)

在 n 维希尔伯特空间 (也就是欧几里得空间) 中的范数为 $Euclid$ 范数, 且有如下性质

1. 非负性 $d(x, y) \geq 0$ 当且仅当 $x = y$ 取等

2. 对称性 $d(x, y) = d(y, x)$

3. 三角不等式 $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$

事实上所有良定义的度量都要满足这三条性质

赋范空间的构成:$x \in l^p \iff \sum_{i=1}^{n} x_i^p$ 收敛

Example:$x = (\frac{1}{1^{\frac{3}{4}}}, \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}}, \cdots, \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}, \cdots)$ 不属于 l^1 但是属于 l^2

集合序列的极限

(集合序列):$\{A_n\}_{n=1}^{\infty} = \{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots\}$

若有 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ 称序列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单增

若有 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ 称序列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单减

(上下极限):

$B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n$; 称 $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的交是序列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的上极限, 记作 $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq n} A_n$
$C_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_n$; 称 $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的并是序列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的下极限, 记作 $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k\geq n} A_n$

性质:

1.$x \in \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \iff \forall N, \exists n > N, s.t. x \in A \iff \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中有无穷多项包含 x

(就是说任何大的 N 后都有包含 x 的集合, 但是这并不说明此后的集合都包含 x, 从而也可以

有无穷多项集合不包含 x)

2.$x \in \varliminf\limits_{n\to\infty} A_n \iff \exists N_x, s.t. \forall n > N_x, x \in A_n \iff \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中只有有限多项不包含 x

(就是说有一个 N 可以控制 x, 使得从此以后的项都包含 x, 那么前面只有有限项不包含 x)

3. $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n \subset \varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n$(即下极限包含在上极限中)

4. 当且仅当上极限等于下极限的时候称 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限存在, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$

5. 当 A_n 单调的时候 $\{A_n\}$ 一定有极限, 此时 (分别为单调增和单调减; , ,)

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \begin{cases} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \\ \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \end{cases}$$

Proof:[A_n 单调]

1.A_n 增: $\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k\geq n} A_k = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

$\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k\geq n} A_k = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

故上极限等于下极限等于 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

2.A_n 减: $\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

$\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k\geq n} A_k = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

故上极限等于下极限等于 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

(集合序列极限的相关性质):

1. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset \varliminf\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k\geq n} A_k \subset \varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k\geq n} A_k \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

2.$(\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n)^c = \varlimsup\limits_{n\to\infty} (A_n)^c \quad (\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n)^c = \varliminf\limits_{n\to\infty} (A_n)^c$

证明用德摩根律配合上下极限的定义就行

映射

(映射):X, Y 是两个集合, 在其中定义了一个关系 f, 使得 $\forall x \in X, \exists! y \in Y, s.t. x \to y$

y 是 x 在 f 下的像,x 是 y 在 f 下的原像

满射:$\forall y \in Y, \exists x \in X, s.t. y = f(x)$ 称 f 是一个满射, 或者完全映射

单射:$\forall x_1 \neq x_2, f(x_1) \neq f(x_2)$ 称 f 是一个单射 (或者一一映射, 这里和数分的说法有矛盾, 数分的一一映射指的是这里的双射)

双射: 既是单射又是满射;

$A \subset X. B \subset Y$ 有:

1.$f(A) = \{f(x)|x \in A\} \subset Y$ 称为 A 在 f 下的像

2.$f^{-1}(B) = \{x \in X|f(x) \in B\} \subset X$ 称为 B 在 f 下的原像

映射性质: 复合映射, 复合映射满足交换律

Theorem 定理: $f : X \to Y, \Gamma$ 是指标集

1.$f(\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$ $\quad f(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) \subset \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$

2.$B_1 \subset B_2 \subset Y \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$

3.$f^{-1}(\bigcup\limits_{\beta\in\Gamma} B_\gamma) = \bigcup\limits_{\beta\in\Gamma} f(B_\gamma)$

4.$f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$

Proof:[1 的证明] $y \in f(\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) \iff \exists x \in \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma, s.t. y = f(x) \iff \exists \gamma_0 \in \Gamma, s.t. x \in A_{\gamma_0} \iff y = f(x) \in f(A_{\gamma_0}) \subset \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$ 得证

$y \in f(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) \iff \exists x \in \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma, s.t. y = f(x) \Rightarrow \quad \forall \gamma \in \Gamma, \exists x_\gamma \in A_\gamma s.t. y = f(x_\gamma) \Rightarrow \forall \gamma \in \Gamma, y \in f(A_\gamma) \Rightarrow y \in \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$

(这里的不等号主要是因为 f 不一定是单射, 第一个推出符号拉回来的时候 A_γ 可以没有公共的 x_γ)

其他的证明是平凡的

特征函数

($\mathcal{X}_A(x)$): $A \subset X : \mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ \\ 0 & x \in X - A \end{cases}$

Theorem 性质:

$$\text{1. 集合相等当且仅当他们的特征函数相等}$$

$$2. A \subset B \to \mathcal{X}_A(x) \leq \mathcal{X}_B(x)$$

$$3. \mathcal{X}_{A\cap B}(x) = \mathcal{X}_A(x)\mathcal{X}_B(x)$$

$$4. \mathcal{X}_{A\cup B}(x) = \mathcal{X}_A(x) + \mathcal{X}_B(x) - \mathcal{X}_{A\cap B}(x)$$

$$5. \mathcal{X}_{A-B}(x) = \mathcal{X}_A(x)(1 - \mathcal{X}_B(x))$$

$$6. \mathcal{X}_{A\Delta B}(x) = |\mathcal{X}_A(x) - \mathcal{X}_B(x)|$$

$$7. \mathcal{X}_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n}(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathcal{X}_{A_n}(x)$$

$$8. \mathcal{X}_{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n}(x) = \underline{\lim_{n\to\infty}} \mathcal{X}_{A_n}(x)$$

证明在最后手写

集合的等价, 基数 (势)

(集合等价):A 和 B 等价即 A,B 之间存在一个双射; 称 A,B 有相同的基数, 用 $A \sim B$ 表示

Theorem 集族的并的等价: $\{A_\lambda|\lambda \in \Lambda\}, \{B_\lambda|\lambda \in \Lambda\}$ 分别是两个元素两两不交的集族, 如果 $\forall\lambda \in \Lambda, A_\lambda \sim B_\lambda \Rightarrow \bigcup\{A_\lambda|\lambda \in \Lambda\} \sim \bigcup\{B_\lambda|\lambda \in \Lambda\}$

Proof:[集族并的等价] 因为 $\forall\lambda \in \Lambda, A_\lambda \sim B_\lambda$ 故 $\exists f_\lambda$ 是 A_λ 到 B_λ 的双射, 定义 $f; s.t. f_{|A_\lambda} = f_\lambda$ 即可 (这里用到了集族的元两两不交)

(集合的划分): 1. 有限集 2. 无限集: 可数集 & 不可数集

所谓可数集就是能和自然数集建立一一对应的集合 (换言之其中的元能以一个顺序完全排列), 若否的无限集就是不可数集.

Theorem 1.4.3:

1. 任一无限集必包含一个可数子集

2. 可数集的任一无限子集是可数集

3. 至多可数个可数集的并是可数的

Proof:[1.4.3] $1.a_1 \in A, a_n \in A - \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} a_k$ 那么 $\{a_n\}$ 就是一个可数子集

$$2.E \subset A \sim N, \begin{pmatrix} n_1 = \min\{n : a_n \in E\} \\ n_2 = \min\{n : a_n \in E \text{ 且} n > n_1\} \\ n_3 = \min\{n : a_n \in E \text{ 且} n > n_2\} \\ \cdots \end{pmatrix} \text{那么 } E = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots\}$$

就是一个可数集

3. 类似 $Cauchy$ 乘积

1.4.3 推论:Q 是可数集

Theorem 凡无限集必定和其一真子集等价: 证明如下

Lemma 若 A 是无限集且 B 至多是可数集, 则 $A \sim A \cup B$**: 不妨设** $A \cap B \neq \emptyset$**, 若否**

取 $B_1 = B - A$**, 则** $A \cup B = A \cup B_1$;

由定理 1.4.3:A 包含一个可数子集, 记为 E:

$$\text{考虑 } h : A \to A \cup B = \begin{cases} i : A - E \to A - E \subset A \cup B \\ f^{-1} \circ g : E \to E \cup B \; here : E \overset{g}{=\!=} N; E \cup B \; B \overset{f}{=\!=} N \end{cases}$$

从而 $A \sim A \cup B$

由引理和定理 1.4.3:A 有一个可数子集 E, 且 $A-E$(无限集) 和 $A=(A-E)\cup E$ 等价

Example:$\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 R 中两两不交的开区间族, 则其至多可数: Λ 是有限集则显然有限, 当其为无限集:$\forall\lambda\in\Lambda,\exists\gamma_\lambda\in Q\cap I_\lambda$ $f:\{\gamma_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subset Q\to\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ $so\ \overline{\overline{\{I_\lambda\}}}_{\lambda\in\Lambda}\le\overline{\overline{Q}}$

证明 A 最多是可数集:从上面的例题可以看出证明一个集合最多是可数集可以建立一个A 到 Q 的单射来证明

(连续统势): 闭区间 $[0,1]$ 是不可数集, 与其等价的集合我们都称为连续统, 称其有连续统势

Theorem 连续统势: 任何区间具有连续统势, 特别的 R 是实属连续统

连续统势

一.n 元数列全体 (A) 具有连续统势:

$$B_{n,m}=\{n\text{元数列}\{a_k\},k\geq m:a_k=0\}.\ \text{则}\bigcup_{n=1}^{\infty}B_{n,m}\text{为 n 元数列全体}$$

Proof:[n 元数列全体具有连续统势] 证明无限 n 元数列具有连续统势

1. 有限 n 元数列全体可数: 有限集的可数并是可数集

2. 往证无限 n 元数列 $\sim(0,1]$

$$\forall x\in(0,1],\exists!k_1.s.t.\tfrac{k_1-1}{n}<x\leqslant\tfrac{k_1}{n}$$

$$\text{取 } a_1=k_1-1,\ \text{又有唯一的 } k_2,s.t.\tfrac{k_1-1}{n}+\tfrac{k_2-1}{n^2}<x\leqslant\tfrac{k_1-1}{n}+\tfrac{k_2}{n^2}$$

$$\text{取 } a_2=k_2-1,\ \text{以此类推, 有:}\textstyle\sum_{i=1}^{m}\frac{k_i-1}{n^i}<x\leqslant\sum_{i=1}^{m-1}\frac{k_i-1}{n^i}+\frac{k_m}{n^m}$$

$$\text{令 m 趋近于无穷就有 } x=\textstyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{n^i}$$

从而我们得到一个映射 $f:(0,1]\to A:f(x)=f(x)=\{a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots\}$. 且 f 是双射

二. 可数集的子集全体有连续统势

(只需证 N 即可)

Proof:$[N\sim\mathcal{P}(N)]$ $f:\mathcal{P}(N);\to$ 二元数列全体;$f(A)=\{a_1,a_2,\cdots\}$, $f(\varnothing)=\{0,0,\cdots\}$:

$$and\ a_n = \begin{cases} 1, & n \in A \\ 0, & n \in \mathbf{N} - A \end{cases}$$ 是一个双射

三. 至多可数个有连续统势的集的直积有连续统势

也是证明其与二元数列全体等价

(推论):1.平面R^2, 和空间R^3有连续统势, 一般的$R^n \sim R^\infty$有连续统势

2. 实数列全体有连续统势

基数比较

Theorem *Bernstein* **定理:** *1. 对任何集* $A, \overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{A}}$

2. 若 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{C}}$则$\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{C}}$

3. 若 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{A}}$则$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$

Theorem 1.1:$A_0 \supset A_1 \supset A_2, and\ A_0 \sim A_2$ 则 $a_0 \sim A_2$

(基数大小关系):$\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}} \iff$ 存在从 A 到 B 的单射 $\iff \exists B_1 \subset B\ s.t.\ A \sim B_1$

. (严格小则集合之间没有双射)

Example:R 上的连续函数有连续统势

Theorem 1.4.12: *不存在基数最大的集*:$\mu < 2^\mu$

Proof:[1.4.12] 先证明 $\mu \leq 2^\mu$, 我们发现 $\phi : A \to \mathcal{P}(A); \phi(x) = \{x\}$ 是单射, 从而 A 的基数小于等于 $\mathcal{P}(A)$

再证明 $\mu \neq 2^\mu$, 反设存在相等, 则存在一个 A 到其幂集的双射 $f : A \to \mathcal{P}(A); x \to f(x) \in \mathcal{P}(A)$. 作集合 $A^*\{x \in A | x \notin f(x)\} \subset A$ 从而 $A^* \in \mathcal{P}(A)\ i.e. \exists x^* \in A, s.t. f(x^*) = A^*$

$1. x^* \in A^*$: 但根据 A^* 定义, 矛盾,$2. x^* \notin A^* \Rightarrow x \in A^*$ 矛盾! 综上证毕!

$\chi = 2^{\chi_0}$

(连续统假设;CH:): 在阿列夫零和阿列夫之间没有别的基数

summary: 这里的 R^n 是 n 维欧式空间, 在其中已经定义了范数和距离

(邻域):$x \in R^n, \epsilon > 0; V(x,\epsilon) = \{y \in R^n | d(x,y) < \epsilon\}$ 称为 x 的 ϵ 邻域

. E 称为 x 的邻域 $\iff \exists \epsilon > 0 \; s.t. V(x,\epsilon) \subset E$

Theorem 定理 1.5.1:$V(x,\epsilon)$ 是其每一点的邻域

(R^n中的开集和闭集):$G \subset R^n$ 是其中每一点的邻域, 则称 G 是开集; 补集是开集的集合称为闭集

Theorem 定理 1.5.2:*1.* 全空间和空集定义为既开又闭集 *2.* 开集的有限交和任意并是开集 *3.* 闭集的任意交和有限并是开集

Theorem 定理 1.5.4:$F \subset R^n$是闭集 $\iff$ F中的任何点列$\{x_n\}$如果收敛到x,那么$x \in F$: 也就是说闭集中的点列如果收敛, 那么一定收敛到它自身中

Proof:[定理 1.5.4] 充分性:假定 F 是闭集,$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是 F 中的数列, 并且收敛到 x, 如果$x \notin F, i.e. x \in F^c$.从而存在 x 的足够小的邻域包含在$F^c$ 中, 但是由于数列是收敛的, 当 n 充分大的时候, 数列中的点将全部属于这个邻域, 从而这些点在 F 的补集中, 但是数列的点在 F 中取, 这就产生了矛盾

. 必要性: 假定任意 F 中的数列收敛到 $x \in F$, 反设 F^c 不是开的, 则 $\exists x_0 \in F^c, s.t. \forall \epsilon > 0, V(x_0,\epsilon)$ 不是 x_0 的邻域, 按照 $\epsilon = \frac{1}{k}, k \in N$, 取 $x_k \in V(x_0, \frac{1}{k}) \cap F$, 就构成了 F 中的一个数列, 但是这个数列收敛到了 F^c 中, 这与条件相悖, 从而证明了结论.

(R 中开集): 显然 R 中开区间是 R 中开集

. 若$G \subset R$是开集,(a,b)是 R 中开区间, 若:$(a,b) \subset G$但是$a,b \notin G$.则 (a,b) 称为 G 的构成区间其中 a,b 可以是无穷

Lemma 1.5.1: G 是 R 中开集, 那么 G 中每一个点都属于 G 的一个构成区间

Proof :$\forall x \in G, \exists \epsilon > 0, s.t. o(x,\epsilon) \subset G, let : a = \inf\{a' < x | (a',x) \subset G\}, b = \sup\{b' > x | (x,b') \subset G\}$ **这里 a,b 都不属于 G, 否则 a,b 是内点, 从而不是确界**

Theorem 定理 1.5.5:R 中开集 G 至多是可数个两两不交的开区间的并

. 由引理 *1.5.1,*G 是 G 的构成区间的并, 构成区间是不交的, 这样就是一族开区间的并, 从而至多是可数的

(R^n *中集的内点, 内核, 附着点和闭包):* E 是 x 的邻域, 则 x 称为 E 的内点;E 的内点的全体称为 E 的内核记为 E^o; 若 x 的任一邻域与 E 交非空, 称 x 是 E 的附着点 (孤立点也是附着点);E 的附着点全体称为 E 的闭包, 记为 $\overline{E}$

Theorem 定理 1.5.6: 内核是包含于集的最大开集, 闭包是包含集的最小闭集 *(反证法)*

1.5.6: 集是开集等价于集和内核相等, 集是闭集等价于集和闭包相等

Theorem $x \in \overline{E}$**:** 存在 E 中点列使得其收敛到 x

(R^n *中的聚点, 导集, 孤立点和完备集):* 聚点:$E \subset R^n, \forall V(x,\epsilon) : (V - \{x\}) \cap E \neq \emptyset$ 则 x 称为

E 的聚点. 也就是存在 E 中的数列 (充分大的时候不恒等于 x) 收敛到 x;

聚点全体称为集合 E 的导集, 记为 E'

若 $x \in E, x \notin E'$ 称 x 是 E 的孤立点

没有孤立点的闭集称为完备集

Example: 区间 $E = (1, 2]$ 的导集是 $E' = [1, 2]$ 且 E 没有孤立点, 任何闭区间是完备集

Theorem 定理 1.5.8: $x \in E' \iff \exists \{x_k\} \subset R^n, x_k \neq x, x_k \to x$

Theorem 定理 1.5.9: $\overline{E} = E \cup E'$, 并且 E 是完备集的充要条件是其和其导集相等

Proof:[1.5.9] 1.$E' \subset \overline{E}$ 因为聚点都是附着点, 从而有 $E \cup E' \subset \overline{E}$; 反过来, 任取 $x \in \overline{E}$ 有 $\{x_k\} \subset E, x_k \to x$ 则或者存在 $x_j \in \{x_k\}, s.t. x_j = x$ 从而 $x \in E$ 或者 $\forall j : x_j \neq x$. 但是 $x_k \to x$, 从而 $x \in E'$ $i.e. \overline{E} \subset E \cup E'$

2. 必要性是显然的, 因为这就意味着 E 中的每个点都是聚点 (没有孤立点) 充分性:E 完备, 则 E 是闭集, 从而有 $\overline{E} = E \cup E' = E \Rightarrow E' \subset E$ 再证 $E \subset E'$ 则 E 中任意一点 x 的任意领域都包含 E 中的点, 从而存在一个取自于 E 中的数列, 其极限是 x 并且每一项都不等于 x, 从而 x

是聚点

运算性质: (i) $(A^c)^\circ = (\bar{A})^c$ (ii) $\overline{A^c} = (A^\circ)^c$; (iii) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;

(iv) $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B} : [A = (0,1); B = (1,2)]$; (v) $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ : [A \cap B = \emptyset]$

(vi) $(A \bigcap B)^\circ = A^\circ \bigcap B^\circ$.

(疏集和稠集): 疏集: 任何非空开集必有非空开子集和其不相交; 稠集: 任何非空开集和其交非空

Example: 整数集是实数集的疏集, 有理数集是实数集的稠集

Theorem 定理 1.5.10: $E \subset R^n$

1.E 是疏集 $\iff (\overline{E})^o = \emptyset$;

2.E 是稠集 $\overline{E} = R^n$

Theorem 1.5.10′**:** *若* $A \subset B, \overline{A} \supset B$ *称* A *是* B *的稠子集: 例如* $A = (0,1) \cap Q, B = (0,1)$

Proof:[1.5.10] 1. 充分性: 反设闭包中存在一个内点 x, 那么存在 x 的开领域 V 包含于 E 的闭包, 从而 V 中的点都是附着点. 任取 V 中另一点 y, 因为 y 是 E 的附着点, 从而存在 y 的开领域和 E 的交非空, 这里我们构造了开集 V 和他的一个开子集 V(y), 并且开子集和 E 的交非空, 这和 E 是疏集矛盾; 必要性: 也就是说 E 的闭包中没有内点, 任取 $x \in R^n$, 在 x 的任一领域中一定存在 y 不是 E 的闭包中的点, 从而 $y \in (\overline{E})^c$(开集), 也就说存在 y 的领域与 E 的闭包的交是空集, 从而与 E 交也是空集, 这也就是说任一开领域 V(x) 中有一开领域 V(y) 与 E 交空, 由于 x 是任取的, 那么 E 是疏集.
2. 充分性:$\overline{E} \subset R^n$ 是确定的. 任取 x 是全空间中的点, 由于 E 是稠集, 从而 x 的任一开领域与 E 有交, 这就是附着点的定义, 从而 $x \in \overline{E}$; 必要性: 任取 x 是全空间中的点, 由于 x 是附着点, 从而 x 的领域和 E 交非空. 由 x 的任意性即知 E 是稠集

R 中的完备集 F: 首先 F 是闭的且没有孤立点, 从而 F^c 是开的, 由定理 1.5.5 其至多是可数个开集的并, 并且这些开集的端点互异, 否则 F 有孤立点了.

Theorem 定理 1.5.11: R 中集 F 是完备的当且仅当 R-F 是至多可数个两两不相交的无相同端点的开区间的并

构造 R 中的 Cantor 完备集 [1]:

该集合是通过下述方法构造的: 1. 将区间 $[0,1]$ 三等分，去掉中间的开区间 $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ ，得到两个闭区间的并集

$$F_1=\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]=F_{1,1}\cup F_{1,2}.$$

2. 分别将区间 $F_{1,1},F_{1,2}$ 再三等分，去掉中间的开区间 $\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right),\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$ ，得到四个闭区间的并集

$$F_2=\left[0,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right]=F_{2,1}\cup F_{2,2}\cup F_{2,3}\cup F_{2,4}.$$

3. 这样一直进行下去，到第 n 次分割后得到 2^n 个闭区间的并集

$$F_n=\bigcup_{j=1}^{2^n}F_{n,2^j}.$$

取极限就得到 Cantor 三分集

$$F=\lim_{n\to\infty}F_n$$

定义 $f(x)=\frac{2k-1}{2^{n+1}},x\in F_{n+1,k},k=1,2,\cdots,2^n$ 称为 Cantor 函数

Cantor 集 (函数) 的性质: 1. 零测集 2. 非空有界闭集 3. 完备集 4. 疏集 5. 不可数集

Cantor 函数几乎处处导数值为零但却是个单调增函数

Cantor 三分集

(性质): 1.Cantor 三分集没有内点:$(\overline{C})^o=C^o=\emptyset$

2.$G=[0,1]-C$ 是稠子集

3.C 有连续统势

R^n 中的长方体

(开长方体): $\prod\limits_{k=1}^{n}(a_k, b_k)$; 同样能定义半开长方体, 闭长方体

其中 $b_k - a_k$ 称为边长, $\prod\limits_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$ 称为体积; 当所有的边长都相等的时候, 对应的长方体称为方体.

Theorem 定理 1.5.14: R^n 中任意开集是可数个两两不相交的半开方体的并

R^n 中的连续函数, 点和集之间的距离

(连续函数 f): 如数学分析中的定义: 自变量充分靠近的时候, 函数值也充分靠近

Theorem 5.15: 实值函数 f 在 R^n 上连续的充要条件是:$\forall \alpha > 0$ 集合 $A_\alpha = \{x|f(x) > \alpha\}, A_\alpha = \{x|f(x) > \alpha\}$ 是开集

Proof:[5.15]

$$\text{必要性: 任取一点 } x \in A_\alpha \Rightarrow f(x) - \alpha > 0 \Rightarrow \exists V(x), s.t. \forall y \in V(x) : f(y) - \alpha > 0$$

$$\text{(连续函数的保号性)}$$

$$\text{充分性: 任取 } x \in R^n.\ \text{记 } A = \{y|f(y) > f(x) - \epsilon\}, B = \{y|f(y) < f(x) + \epsilon\}$$

(这里相当于取 $\alpha = f(x) \pm \epsilon$):$\rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow \exists V(x) \subset A \cap B \Rightarrow \forall y \in V(x), f(x) - \epsilon < f(y) < f(x) + \epsilon.\ i.e.\ |f(x) - f(y)| < \epsilon \Rightarrow f \in C$

Lemma 1.5.2: $D \subset R^n; \forall x, y \in R^n : |d(x, D) - d(y, D)| \leq d(x, y)$

Theorem 1.5.16:$D \subset R^n : d(x, D)$是$x \in R^n$的一致连续函数

Theorem 1.5.17(Bolzano-Weierstrass):R^n 中的有界点列必有收敛子列

Theorem 1.5.18:$F \overset{closed}{\subset} R^n, x \in R^n \Rightarrow \exists y \in F\ s.t.\ d(x, y) = d(x, F)$ 于是当$x \notin F$: $d(x, F) > 0$

Theorem 1.5.19(闭集套定理):$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$是R^n中的一列单调减的非空有界闭集, 则 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k \neq \emptyset$

开覆盖, 紧集

Theorem 1.5.20: R^n 中的紧集是有界闭集

Theorem 1.5.21:$F \overset{compact}{\subset} R^n, f \in C(F) \Rightarrow (i:) f$ 在 F 上有界并且能取到最大最小值

$(ii:) f$ 在 F 上一致连续$i.e.\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, s.t.\forall d(x,y) < \delta, x, y \in F : |f(x) - f(y)| < \epsilon$

Proof:[1.5.21] 1. 只需证明连续函数把紧集映射成紧集:任取$f(F)$的开覆盖$H = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda \supset f(F); \forall H_\lambda \in H$,

考虑其原像$f^{-1}(H_\lambda)$, 则根据连续映射的性质-开集的原像是开集$f^{-1}(H_\lambda) \overset{open}{\subset} R^n$;

$\Rightarrow \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(H_\lambda) \supset F$; 则这是 F 的一个开覆盖, 但 F 是紧的, 则$\exists\Lambda'$是有限集 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda'} f^{-1}(H_\lambda) \supset F$.

再取其像就有$f(F) \subset f(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda'} f^{-1}(H_\lambda)) = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda'} H_\lambda$ $i.e.$任意 f(F) 的开覆盖有有限子覆盖, 从而 f(F) 是紧集

2. 首先由 f 的连续性有 $\forall x \in F, \forall\epsilon > 0, \exists\delta_x > 0\ s.t. \forall y \in O(x, \delta_x) : |f(x) - f(y)| < \epsilon$;

这里 $\bigcup\limits_{x\in F} O(x, \delta_x) \supset F$是 F 的开覆盖, 由 F 的紧致性:$\exists G \subset F$是有限集$s.t. \bigcup\limits_{x\in G} O(x, \delta_x) \supset F$

$let\ \delta = \min\limits_{x\in G}\{\delta_x\}$, 则有:$\forall x, y \in F, d(x,y) < \delta : |f(x) - f(y)| < \epsilon$ 从而 f 一致连续 [2][3]

work: 闭集是可数个开集的交, 开集是可数个闭集的并

(外测度):$m^*(E) = \inf\{\sum\limits_n l(I_n) | \{I_n\}_{n\geq 1}$是一列开区间并且$E \subset \bigcup\limits_n I_n\}$

(次可加性):$m^*(\bigcup\limits_n E_n) \leq \sum\limits_n m^*(E_n)$

(可测集):$E \subset R : if : m^*(E) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$. 就称 E 是勒贝格可测集, 事实上这时候有 $m^*(E) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$; 定义 $m(E) = m^*(E)$

用 Ω 表示可测集全体

(定理 2.3.2): 外测度是零的集合是可测集, 并且测度为零, 称为零测集. 换言之可数集是零测集

区间的测度就是区间的长度

集合 E 可测从而补集可测

任意区间是可测的, 且区间的测度就是区间的长度

Lemma 2.3.2:$\{E_n\}_{n\geq 1}$ **是一列不交的可测集, 则** $\bigcup_n E_n \in \Omega$ (Ω, m) 空间中有限个元的并和交都是可测的; 可数个可测集的交和并也是可测集; 集合做差也封闭

实轴上的所有开集 (闭集) 可测

($G_\delta-$ 型集):$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n; G_n \overset{open}{R}$
($F_\sigma-$ 型集):$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n; F_n \overset{closed}{R}$

可测集测度的可数可加性:$\{E_n\}_{n\geq 1} \subset \Omega$ 且两两不交的时候:$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$

(定理 2.3.6): 集合序列满足 1.$\{E_n\}$ 单增或者 2.$\{E_n\}$ 单减并且 $m(\{E_n\}) < \infty$: 就有测度的极限等于极限的测度 i.e. $\lim_{n\to\infty} m(E_n) = m(\lim_{n\to\infty} E_n)$

(E 关于 y 的平移):$E \subset R, y \in R : E_y = \{x + y | x \in E\}$ 称为 E 关于 y 的平移

Lemma 2.4.1:$E, F \subset R, \forall y \in R \Rightarrow$

$(i) : E \cap F_y = (E_{-y} \cap F)_y$

$(ii) : (E^c)_y = (E_y)^c$

$(iii) : m^*(E) = m^*(E_y)$

Proof:[2.4.1]$1 : z \in (E_{-y} \cap F)_y \iff z - y \in E_{-y} \quad \& \quad z \in F_y \iff (z - y) - (-y) = z \in E \quad \& \quad z - y \in F \iff z \in E \cap E_y$

$2.z \in (E^c)_y \iff z - y \in E^c \iff z - y \notin E \iff z \notin E_y \iff z \in (E_y)^c$

$3.\forall I\text{开区间} : l(I) = l(I_y) \Rightarrow E \subset \bigcup_n I_n \Rightarrow E_y \subset \bigcup_n (I_n)_y \Rightarrow m^*(E_y) \leq \sum_{n=1}^{\infty} l((I_n)_y) = \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) = m^*(E) \Rightarrow m^*(E) = m^*((E_y)_{-y}) \leq m^*(E_y) \Rightarrow m^*(E) = m^*(E_y)$

Theorem 2.4.1 测度平移不变性:E 可测, 那么 $\forall y \in R, E_y$ 可测并且有 $m(E) = m(E_y)$

Proof:[2.4.1]$\forall A \subset R : m^*(A) = m^*(A_{-y}) \overset{E\text{可测}}{\geq} m^*(A_{-y} \cap E) + m^*(A_{-y} \cap E^c) = m^*((A \cap E_y)_{-y}) + m^*((A \cap E_y^c)_{-y}) = m^*(A \cap E_y) + m^*(A \cap (E_y)^c)$ 因此 E_y 可测

不可测集案例

$\forall x \in [0,1] : E(x) = \{y \in [0,1] : y - x \in Q\}$

$(i) : [0,1] = \bigcup\{E(x) : x \in [0,1]\}$ & $(ii) : x_1 - x_2 \in Q \iff E(x_1) = E(x_2)$ & $(iii) : \forall x_1, x_2 \in [0,1] : E(x_1) = E(x_2)$或者$E(x_1) \cap E(x_2) = \emptyset$ & $(iv) : \exists F \subset [0,1] s.t. \forall x_1, x_2 \in F : x_1 \neq x_2 \iff E(x_1) \cap E(x_2) = \emptyset$

下面证明 F 不可测

$let\ \{r_n\}_{n=1}^{\infty} = [-1,1] \cap Q$ & $F_n = F_{r_n} = \{x + r_n : x \in F\} \rightleftarrows$

$(1) : \forall m \neq n, F_m \cap F_n = \emptyset \quad since\ if\ \exists z \in F_m \cap F_n \Rightarrow \exists x_m, x_n \in F\ s.t. x_m + r_m = x_n + r_n \Rightarrow x_m - x_n = r_n - r_m \in Q \Rightarrow E(x_m) = E(x_n)$矛盾 $i.e. \{F_n\}_{n \geq 1}$互不相交

$(2) : [0,1] \subset \bigcup\limits_n F_n \subset [-1,2]$ 后者是显然的, 对于前者, 任取 $y \in [0,1], \exists x \in F\ s.t. y \in E(x) \Rightarrow y - x \in Q, let\ r_k = y - x \Rightarrow y \in F_k\ i.e. [0,1] \subset \bigcup\limits_n F_n$

假设 F 可测, 由 $thm2.4.1 : F_n$可测并且$m(F_n) = m(F)$, 由可数可加性 :

$1 = m([0,1]) \leq m(\bigcup\limits_n F_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} m(F_n) \leq m([-1,2]) = 3\ i.e. \leq 1 \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} m(F) \leq 3$ 若 $m(F) = 0$ 则和为零, 否则 $m(F)$ 严格大于零, 从而级数发散到无穷大. 两者都矛盾

思考题:R^n 中不可测集的构造和不可测集的构造机理

Theorem 2.5.1:*(1):E* 可测 $\iff (2) : \forall \epsilon > 0, \exists G \overset{open}{\supset} E\ s.t. m^*(G - E) < \epsilon \iff (3) : \forall \epsilon > 0, \exists F \overset{closed}{\subset} E\ s.t. m^*(E - F) < \epsilon$

Corollary 2.5.1:$1.E$可测 $\iff 2.\forall \epsilon > 0, \exists F, G$可测且:$F \subset E \subset G : m(G - F) < \epsilon \iff 3/\exists G_\delta$集$G \supset E\ s.t. m^*(G - E) = 0 \iff 4.\exists F_\sigma$集$F \subset E\ s.t. m^*(E - F) = 0$

Theorem 2.5.2: 设 E 可测并且测度有限, 那么 $\forall \epsilon > 0$, 存在有限个端点为有理数的开区间 $I_k, 1 \leq k \leq n, s.t. m(E \Delta G) < \epsilon$ 其中 $G = \bigcup\limits_{k=1}^{n} I_k$

代数,σ 代数与 Borel 集

*summary:*X 是非空集合,$\mathcal{F}$ 是 X 的一个非空集族

(代数): 说 $\mathcal{F}$ 是一个代数 $\iff$ $1.X \in \mathcal{F}$ $2.\forall F \in \mathcal{F}, F^c \in \mathcal{F}$ $3.\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}, F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$

这里实际上是有限并.

($sigma$ 代数): 拥有代数的一, 二条性质, 但第三条改成可数并封闭

Theorem 2.6.1 设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的一个代数: *$1.X, \emptyset \in \mathcal{F}$ $2.forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}, F_1 - F_2 \in \mathcal{F}, F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ 此时: 若 $\mathcal{F}$ 是 σ 代数, 那么 $\forall \{F_n\} \subset \mathcal{F}, \bigcap_n F_n \in \mathcal{F}$*

$(\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X))$: $1.A(\mathcal{F}) = \bigcap\{包含\mathcal{F}的所有代数\}$ $\quad 2.B(\mathcal{F}) = \bigcap\{包含\mathcal{F}的所有\sigma代数\}$

实轴上的开区间产生的 σ 代数称为 *Borel* σ 代数, 记为 $\mathcal{B}$, 其中的元称为 Borel 集. 开集和闭集都是 Borel 集, 粗略的说 Borel 集是有开集和闭集通过至多可数次并交差补生成的集合

Theorem 2.6.2: *Borel 集是可测的*

Proof:[2.6.3] 可测集全体 Ω 是一个包含所有开区间的 σ 代数, 但 $\mathcal{B}$ 是包含开区间的最小 σ 代数, 所以 $\mathcal{B} \subset \Omega$, 从而 Borel 集是可测集

Theorem 2.6.3: *设 h 是 R 上的严格单增连续函数, 那么 h 把 Borel 集映射为 Borel 集*存在是可测集但是不是 Borel 集的集合

如自然的想法扩充即可

Theorem 2.7.1: *$P \in R^p, Q \in R^q$ 可测, 那么 $P \times Q$ 是 R^{p+q} 中的可测集, 并且 $m(P \times Q) = m(P)m(Q)$*

参考文献

[1] "Cantor 三分集." [Online]. Available: https://zhuanlan.zhihu.com/p/54711962

[2] "紧集上的连续函数有界有最值." [Online]. Available: https://www.zhihu.com/question/521878593

[3] "紧集上的连续函数一致连续." [Online]. Available: https://www.zhihu.com/question/56393706