



浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

几何模型

浙江大学 谈之奕



安全观演



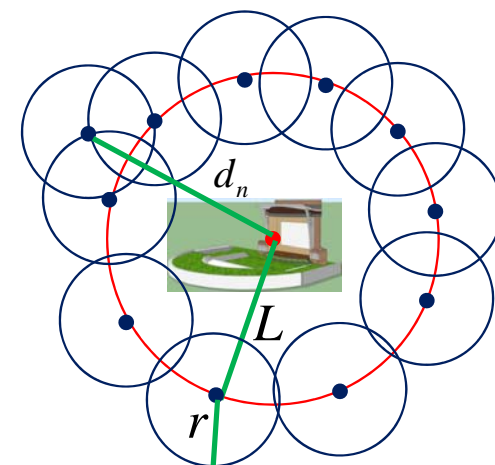
安全观演



数学
建模
MATH T

• 安全观演

- 广场某处正在进行一场露天表演，若干人先后到达附近并选择一个地点观看表演
 - 观众选择地点的要求
 - 与舞台中心的距离不小于 L
 - 与之前到达的任一观众的距离不小于 r
 - 在满足上述要求的情况下，观众选择与舞台中心距离最近的某个点
 - 观众选择地点的方式
 - 有引导：观众在工作人员引导下到达满足要求的地点
 - 无引导：观众自行选择满足要求的地点
- 观演距离
 - 求第 n 个到达的观众与舞台中心的距离 d_n 的估计





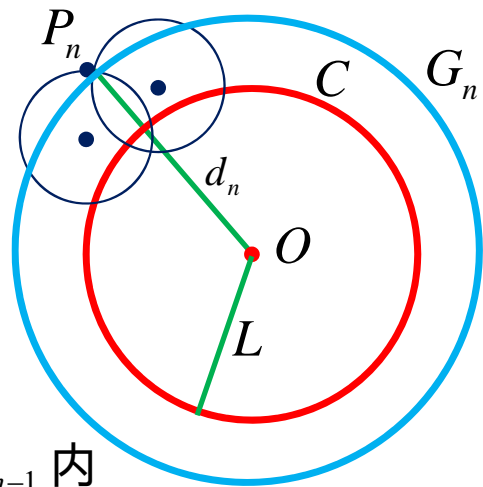
观演距离

- 观演距离

- 记舞台中心为 O 。以 O 为圆心, 半径为 R 的圆为 C
- 记第 i 个到达的观众为 A_i , 所选位置为 P_i 。以 P_i 为圆心, r 为半径的圆为 C_i
 - $d_i = |OP_i| \geq L$
 - P_i 不在圆 C 内, 也不在圆 C_1, C_2, \dots, C_{i-1} 内
 - $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$
 - 若 $d_i > d_{i+1}$, 则 A_i 到达时可选择 P_{i+1} , 矛盾

- (无引导) 观演距离的上界

- 观众 A_n 无法选到与点 O 距离小于 d_n 的点
 - 以 O 为圆心, 半径为 d_n 的圆内的所有点均在圆 C 或 C_1, C_2, \dots, C_{n-1} 内
 - $\pi \cdot d_n^2 \leq (n-1) \cdot \pi r^2 + \pi L^2 \Rightarrow d_n \leq \sqrt{(n-1)r^2 + L^2}$



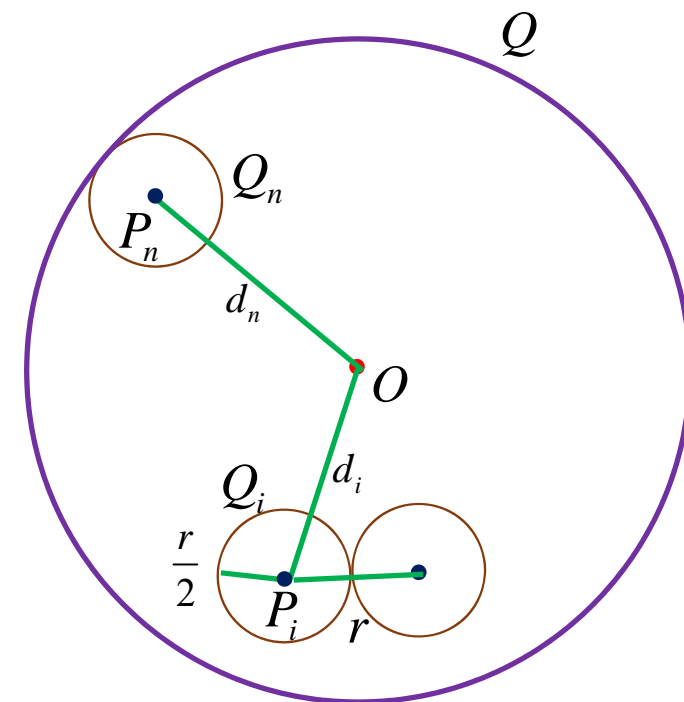


观演距离

- 观演距离的下界

- 记以 P_i 为圆心, $\frac{r}{2}$ 为半径的圆记为 Q_i
 - 圆 Q_1, Q_2, \dots, Q_n 两两互不相交
 - 圆 Q_1, Q_2, \dots, Q_n 均在以 O 为圆心, 半径为 $d_n + \frac{r}{2}$ 的圆内
- $\pi \left(d_n + \frac{r}{2} \right)^2 \geq n \cdot \pi \left(\frac{r}{2} \right)^2 \Rightarrow d_n \geq \left(\frac{\sqrt{n}}{2} - \frac{1}{2} \right) r$

$$L=10, r=1, n=1000 \quad 15.31 \leq d_n \leq 33.15$$



安全观演



数学
建模
MATH T

• 安全观演

• 无遮视野

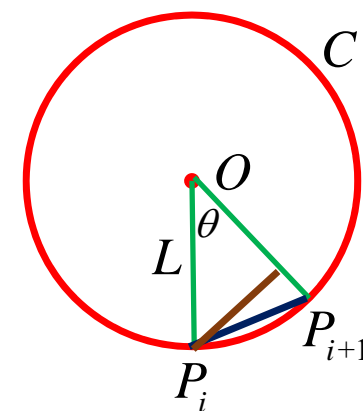
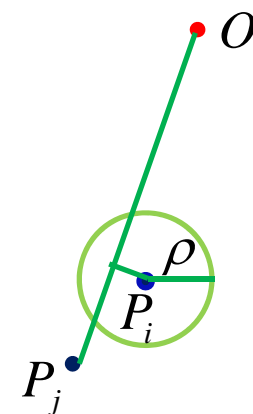
- 若以 P_i 为圆心, ρ 为半径的圆周与线段 OP_j 相交, 则 A_j 被 A_i 遮挡
- 若 A_j 不被 A_i 遮挡, 点 P_i 到直线 OP_j 的距离大于 ρ

• (有引导) 无遮视野人数的下界

• n 名观众位于 C 的内接正 n 边形顶点

- 相邻两顶点 P_i 与 P_{i+1} 夹角 $\theta = \angle P_i O P_{i+1} = \frac{2\pi}{n}$
 - $|P_i P_{i+1}| = 2L \sin \frac{\theta}{2} = 2L \sin \frac{\pi}{n}$
 - P_i 到直线 OP_j 距离为 $L \sin \theta = L \sin \frac{2\pi}{n}$
- $$\Rightarrow \begin{cases} 2L \sin \frac{\pi}{n} \geq r \\ L \sin \frac{2\pi}{n} \geq \rho \end{cases}$$

$$L = 10, n = 60 \quad 2L \sin \frac{\pi}{n} \approx 1.04672, L \sin \frac{2\pi}{n} \approx 1.04528$$





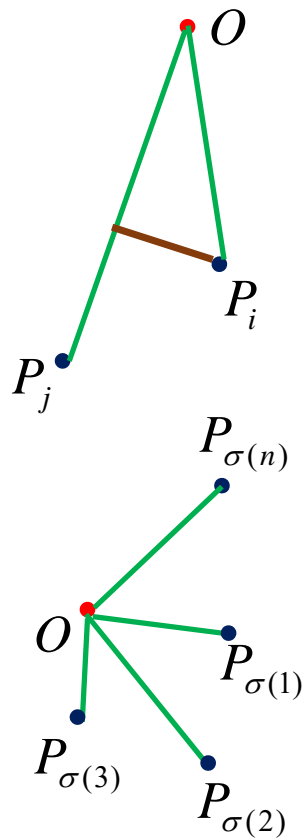
无遮视野

- 存在遮挡的充分条件

- 若 $d_i \leq d_j$, $\angle P_i O P_j$ 为锐角且 $\sin \angle P_i O P_j \leq \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_j} \right)$, 则 A_j 被 A_i 遮挡
 - 过 P_i 垂直于 OP_j 的直线垂足位于线段 OP_j 上
 - 点 P_i 到直线 OP_j 的距离为 $d_i \sin \angle P_i O P_j \leq d_i \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_j} \right) \leq \rho$

- 无遮视野人数的上界

- 若 n 名观众未发生遮挡
 - n 条线段在点 C 将周角分为 n 个角 $\angle P_{\sigma(i)} O P_{\sigma(i+1)}$, 这里 $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$ 是 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列, 并记 $\sigma(n+1) = \sigma(1)$
 - $2\pi = \sum_{i=1}^n \angle P_{\sigma(i)} O P_{\sigma(i+1)}$
 - $\sin \angle P_{\sigma(i)} O P_{\sigma(i+1)} > \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{d_{\sigma(i)}} + \frac{1}{d_{\sigma(i+1)}} \right)$



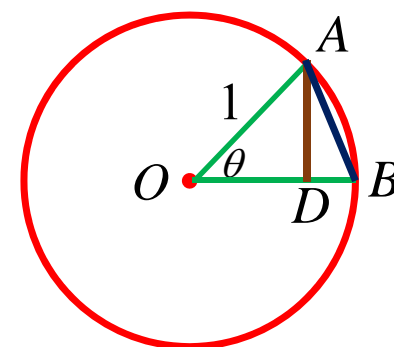
- 无遮视野人数的上界

$$d_n \leq \sqrt{(n-1)r^2 + L^2}$$

$$n \leq \left(\frac{\pi r}{\rho} \right)^2 + \frac{2\pi L}{\rho} \quad n \leq 732$$



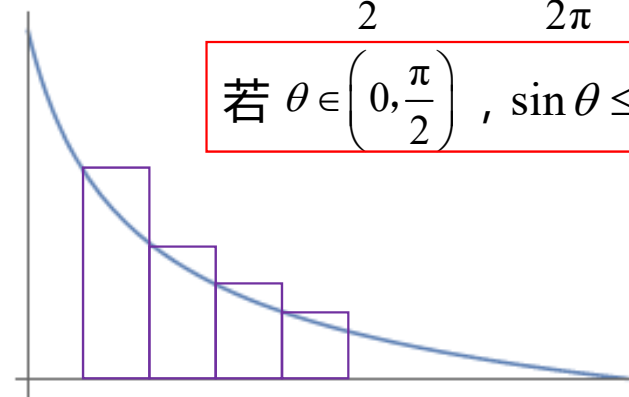
数学
建模
MATH T



$$S_{\triangle AOB} \leq S_{\text{扇形}AOB}$$

$$\frac{1}{2} \sin \theta \leq \pi \frac{\theta}{2\pi}$$

若 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin \theta \leq \theta$



谢 谢

