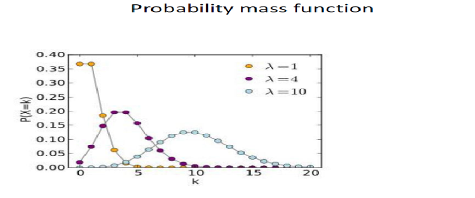
一、Poisson

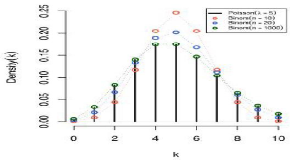
Poisson人物介绍

Siméon Denis Poisson (21 June 1781 – 25 April 1840), was a French mathematician, geometer, and physicist. He obtained many important results, but within the elite Académie des Sciences he also was the final leading opponent of the wave theory of light and was proven wrong on that matter by Augustin-Jean Fresnel.

His name is one of the 72 names inscribed on the Eiffel Tower.

Siméon Denis Poisson (1781-1840)


Probability mass function
0.40
0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
P(X=k)
0
5
10
15
20
k
λ = 1
λ = 4
λ = 10



Comparison of the Poisson distribution (black lines) and the binomial distribution with n=10 (red circles), n=20

二、Poisson流

Poisson流用于描述随机服务系统，如

电信局电话总机接受电话呼叫；

客户前往4S店修理汽车；

顾客前往大型超市购买商品；

乘客前往候车亭等候公共汽车

服务系统和设施是固定的，事先安排好的。

随机性主要源于顾客流，流量大小是随机的。

原因在于个顾客在某时刻是否需要服务是随机的。

Poisson 流具有下列属性：

(1) 平稳性

前往某服务设施寻求服务的顾客流是平稳的；

(2) 独立性

各个顾客在某时刻是否前往某服务设施寻求服务相互独立；

(3) 稀有性

短时间内，最多只有一名顾客寻求服务。

上述属性的数学解释如下：

令$N(0)=0$。当$t>0$时，用$N(t)$表示$(0,t]$时间内某服务系统接受顾客服务的次数。

因此，$N(t), t\geq 0$是连续时间、取非负整数值的随机过程，亦称作计数过程。

(1) 平稳性

$$N(t)-N(s) \overset{d}{=} N(t-s), \qquad s<t$$

(2) 独立性

$$N(t)-N(s) \text{ 与 } N(s) \quad \text{独立}$$

(3) 稀有性

$$P(N(t+\Delta t)-N(t)=1)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

$$P(N(t+\Delta t)-N(t)\geq 2)=o(\Delta t)$$

其中参数λ被称为Poisson 流的强度，它的大小表示该服务系统的繁忙程度。

λ越大，系统越繁忙；λ越小，表示寻求该服务的人少。

2. Poisson 过程

令$N(0)=0$。当$t>0$时，用$N(t)$表示强度为λ的Poisson流在$(0,t]$时间内的顾客数。

那么$N(t)$服从参数为λt的Poisson分布：

$$P(N(t)=k)=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \qquad k=0,1,2,\cdots,$$

证明: (方法1)

固定$t>0$。对任意$n\geq 1$，将$[0,t]$等分称n个小区间，

$$0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=t$$

每个小区间长度为$\frac{1}{n}$。随着n增大，区间长度变小。

(1) $k=0$

$$\begin{aligned} P(N(t)=0) &= P(\bigcap_{k=1}^{n}\{N((t_{k-1},t_k])=0\}) \\ &\overset{\text{独立性}}{=} \prod_{k=1}^{n} P(\{N((t_{k-1},t_k])=0\}) \\ &\overset{\text{平稳性}}{=} P(N((0,\frac{t}{n}])=0)^n \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& P(N((0,\frac{t}{n}]) = 0) \\
& = 1 - P(N((0,\frac{t}{n}]) = 1) + P(N((0,\frac{t}{n}]) \geq 2) \\
& \overset{\text{稀有性}}{=} 1 - \frac{\lambda t}{n} + o(\frac{1}{n})
\end{aligned}
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
P(N(t) = 0) &= \left(1 - \frac{\lambda t}{n} + o(\frac{1}{n})\right)^n \\
&= e^{-\lambda t}, \quad n \to \infty
\end{aligned}
$$

(2) $k=1$

$$
\begin{aligned}
& P(N(t)=1) \\
& =\sum_{k=1}^{n} P\Big(\{N((t_{k-1},t_k])=1\},\bigcap_{i\neq k}\{N((t_{i-1},t_i])=0\}\Big) \\
& =\sum_{k=1}^{n} P(N((t_{k-1},t_k])=1)\prod_{i\neq k} P(N((t_{i-1},t_i])=0) \\
& =nP(N((0,\frac{t}{n}])=1)\Big(P(N((0,\frac{t}{n}])=0)\Big)^{n-1} \\
& =n(\frac{\lambda t}{n}+o(\frac{1}{n}))\Big(1-\frac{\lambda t}{n}+o(\frac{1}{n})\Big)^{n-1} \\
& =\lambda t e^{-\lambda t}, \quad n\to\infty
\end{aligned}
$$

(3) $k=2$

$$
\begin{aligned}
&P(N(t)=2) \\
&=\sum_{k=1}^{n} P\Big(\{N((t_{k-1},t_k])=2\}, \bigcap_{i\neq k}\{N((t_{i-1},t_i])=0\}\Big) \\
&\quad+\sum_{1\le k<j\le n} P\Big(N((t_{k-1},t_k])=1, N((t_{j-1},t_j])=1, \\
&\qquad \bigcap_{i\neq k,j}\{N((t_{i-1},t_i])=0\}\Big)
\end{aligned}
$$

注意到:

$$\sum_{k=1}^{n} P\Big(\{N((t_{k-1},t_k]) = 2\}, \bigcap_{i\neq k}\{N((t_{k-1},t_k]) = 0\}\Big)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} P(N((t_{k-1},t_k]) = 2) P(\bigcap_{i\neq k}\{N((t_{k-1},t_k]) = 0\}$$
$$\to 0, \quad n \to \infty$$

$$\sum_{1\leq k<j\leq n} P\Big(N((t_{k-1},t_k]) = 1, N((t_{j-1},t_j]) = 1,$$
$$\bigcap_{i\neq k,j}\{N((t_{i-1},t_i]) = 0\}\Big)$$
$$\to \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t}, \quad n \to \infty$$

那么，

$$P(N(t)=2)=\frac{(\lambda t)^2}{2}e^{-\lambda t}$$

类似地，对任意$k>2$

$$P(N(t)=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

证明: (方法2)

令$p_k(t) = P(N(t) = k)$。

(1) $k = 0$

$$\begin{aligned} & p_0(t+\Delta t) \\ = \;& P(N(t+\Delta t) = 0) \\ = \;& P(N(t) = 0, N((t, t+\Delta t]) = 0) \\ = \;& P(N(t) = 0) P(N((t, t+\Delta t]) = 0) \\ = \;& p_o(t)(1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)) \end{aligned}$$

$$p_0(t+\Delta t) - p_0(t) = -\lambda p_0(t) \Delta t + +o(\Delta t))$$

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t)$$

注意到：$N(0) = 0$，

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}$$

(2) $k \geq 1$

$$
\begin{aligned}
& p_k(t+\Delta t) \\
= \; & P(N(t+\Delta t)=k) \\
= \; & P(N(t)=k, N((t,t+\Delta t])=0) \\
& +P(N(t)=k-1, N((t,t+\Delta t])=1) \\
& +P(N(t)\leq k-2, N((t,t+\Delta t])\geq 2) \\
= \; & P(N(t)=k)P(N((t,t+\Delta t])=0) \\
& +P(N(t)=k-1)P(N((t,t+\Delta t])=1) \\
& +P(N(t)\leq k-2)P(N((t,t+\Delta t])\geq 2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_k(t+\Delta t) &= p_k(t)(1-\lambda\Delta t + o(\Delta t)) \\
&\quad + p_{k-1}(t)(\lambda\Delta t + o(\Delta t)) \\
&\quad + o(\Delta t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& p_k(t+\Delta t) - p_k(t) \\
& = -\lambda p_k(t)\Delta t + o(\Delta t)) \\
& + p_{k-1}(t)(\lambda\Delta t + o(\Delta t)) \\
& + o(\Delta t)
\end{aligned}
$$

令$\Delta t \to 0$，

$$p'_k(t) = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t)$$

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

三、Poisson 过程：

- Poisson 过程

假设$N(t), t \geq 0$是非负整数值随机过程，并且具有下列性质：

(1) (初始值为0)

$$P(N(0) = 0) = 1$$

(2) (平稳性)

假设$s < t$，$N(t) - N(s)$与$N(t-s)$具有相同分布：

$$N(t) - N(s) \stackrel{d}{=} N(t-s), \qquad s < t$$

(3) (独立性)

假设$s < t$，$N(t) - N(s)$与$N(s)$相互独立；

(4) (Poisson 分布)

$$P(N(t)=k)=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \qquad k=0,1,2,\cdots,$$

那么称$N(t),t\geq 0$为强度为λ的Poisson 过程。

- Poisson 过程的数字特征

1. 均值函数

$$\mu_t = EN(t) = \lambda t$$

因此

$$\lambda = EN(1) = \frac{EN(t)}{t}$$

即λ是单位时间内顾客寻求服务的个数，同时是平均强度。

2. 方差函数

$$Var(N(t)) = \lambda t$$

3. 相关函数

假设$s < t$，计算$EN(s)N(t) =?$

$$
\begin{aligned}
EN(s)N(t) &= EN(s)(N(t)-N(s)+N(s)) \\
&= EN(s)(N(t)-N(s)) + EN(s)^2 \\
&\overset{\text{独立性}}{=} EN(s)E(N(t)-N(s)) + EN(s)^2 \\
&\overset{\text{平稳性}}{=} EN(s)EN(t-s) + EN(s)^2 \\
&= \lambda^2 s(t-s) + \lambda^2 s^2 + \lambda s \\
&= \lambda^2 st + \lambda s
\end{aligned}
$$

- Poisson 过程的分布规律

1. 1-维分布

$$N(0) = 0, \quad N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t), \quad t > 0$$

2. 2-维分布

假设$s < t$

$$\begin{aligned}
& P(N(s) = l, N(t) = m) \\
= \quad & P(N(s) = l, N(t) - N(s) = m - l) \\
\overset{\text{独立性}}{=} \quad & P(N(s) = l) P(N(t) - N(s) = m - l) \\
\overset{\text{平稳性}}{=} \quad & P(N(s) = l) P(N(t - s) = m - l) \\
= \quad & \frac{(\lambda s)^l e^{-\lambda s}}{l!} \cdot \frac{(\lambda(t - s))^{m-l} e^{-\lambda(t-s)}}{(m - l)!}
\end{aligned}$$

3. k-维分布

假设$t_1 < t_2 < \cdots < t_k$

$$
\begin{aligned}
& P(N(t_1) = m_1, N(t_2) = m_2, \cdots, N(t_k) = m_k) \\
= \ & P(N(t_1) = m_1, N(t_2) - N(t_1) = m_2 - m_1, \cdots \\
& \cdot N(t_k) - N(t_{k-1}) = m_k - m_{k-1}) \\
= \ & P(N(t_1) = m_1) P(N(t_2) - N(t_1) = m_2 - m_1) \cdots \\
& \cdot P(N(t_k) - N(t_{k-1}) = m_k - m_{k-1}) \\
= \ & \frac{(\lambda t_1)^{m_1} e^{-\lambda t_1}}{m_1!} \cdots \frac{(\lambda(t_k - t_{k-1}))^{m_k - m_{k-1}} e^{-\lambda(t_k - t_{k-1})}}{(m_k - m_{k-1})!}
\end{aligned}
$$

- Poisson 过程的样本曲线

根据定义，$N(t), t \geq 0$是连续时间、取非负整数值的随机过程，因此它一定是阶梯型曲线。

但如何确定跳跃点呢？

注意，$N(0) = 0$；

在第一个顾客到来之前，$N(t) = 0$；

令S_1表示第一个顾客到达时刻，那么

$$N(t) = 0, \quad t < S_1; \quad N(S_1) = 1$$

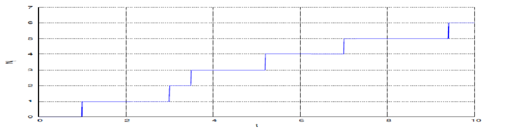
在第一个顾客到来之后，在第二个顾客到来之前，$N(t) = 1$；令S_2表示第二个顾客到达时刻，那么

$$N(t) = 1, \quad S_1 \leq t < S_2; \quad N(S_2) = 2$$

一般地，令S_n表示第n个顾客到达时刻，那么

$$N(t) = n - 1, \quad S_{n-1} \le t < S_n; \quad N(S_n) = n$$

这样，$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$是Poisson过程的跳跃点，跳跃高度为1. 曲线如下：



Sample path of a Poisson process $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

记$S_0=0$。这样，实直线上点列$S_0,S_1,S_2,\cdots,S_n,\cdots$,可以看作是Poisson流。从而，

$$\begin{aligned} N(t) &= \sharp\{n\geq 0; S_n\leq t\} \\ &= \max\{n\geq 0; S_n\leq t\} \end{aligned}$$

- $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ 的分布：

(1) S_1的分布

$$S_1 > t \Leftrightarrow N(t) = 0, \quad t \geq 0$$

因此，

$$\begin{aligned} P(S_1 > t) &= P(N(t) = 0) \\ &= e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

$$S_1 \sim \exp(\lambda)$$

所以，S_1是参数为λ的指数分布。

(2) S_2的分布

$$S_2 > t \Leftrightarrow N(t) \le 1, \quad t \ge 0$$

因此,

$$\begin{aligned} P(S_2 > t) &= P(N(t) \le 1) \\ &= e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t}, \quad t \ge 0 \end{aligned}$$

$$S_2 \sim \lambda^2 t e^{-\lambda t}$$

(3) S_n的分布

$$S_n > t \Leftrightarrow N(t) \leq n-1, \quad t \geq 0$$

因此，

$$\begin{aligned} P(S_n > t) &= P(N(t) \leq n-1) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} P(N(t) = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

$$S_n \sim \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}$$

- 等候时间的分布

令$X_0 = 0,\ X_1 = S_1 - S_0,\ X_2 = S_2 - S_1, \cdots,$

$X_n = S_n - S_{n-1},$

(1) $X_1 \sim \exp(\lambda)$

(2)

$$\begin{aligned}
P(X_2 > t) &= P(S_2 - S_1 > t) \\
&= \int_0^{\infty} P(S_2 - S_1 > t | S_1 = s) P(S_1 = s) ds \\
&= \int_0^{\infty} P(S_2 > t + s | S_1 = s) P(S_1 = s) ds \\
&= \int_0^{\infty} P(N(t+s) - N(s) = 0) P(S_1 = s) ds \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \lambda e^{-\lambda s} ds = e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

所以，

$X_2 \sim \exp(\lambda)$

进而，X_1, X_2相互独立。

(3) 类似地，

$X_n \sim \exp(\lambda)$

并且，$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$,相互独立，服从指数分布。

注意：

$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$,是顾客寻求服务的到达时刻；

$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$,是各个顾客之间的间隔时间。

- Poisson 过程可以有下列解释：

假设$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$,是一列独立同分布的指数随机变量，令$S_0 = 0$，$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$。

定义$N(0) = 0$;

$$N(t) = \max\{n \geq 0, S_n \leq t < S_{n+1}\}, \quad t > 0$$

计算$N(t)$的分布？

(1)

$$\begin{aligned} P(N(t) = 0) &= P(S_1 > t) \\ &= P(X_1 > t) \\ &= e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

(2)

$$
\begin{aligned}
P(N(t)=1) &= P(S_1 \leq t < S_2) \\
&= P(X_1 \leq t < X_1 + X_2) \\
&= \int_0^t P(X_2 > t-s)\lambda e^{-\lambda s} ds \\
&= \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\lambda e^{-\lambda s} ds \\
&= \lambda t e^{-\lambda t}, \quad t > 0
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
P(N(t)=k) &= P(S_k \le t < S_{k+1}) \\
&= P(S_k \le t < S_k + X_{k+1}) \\
&= \int_0^t P(X_{k+1} > t-s) P(S_k = s) ds \\
&= \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \frac{\lambda^k s^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda s} ds \\
&= \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad t > 0
\end{aligned}
$$

因此，$N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t)$ 。

$N(t)$ 具有增量独立平稳性：

$$\begin{aligned} & P(N(t)-N(s)=k|N(s)=l) \\ = \quad & \frac{P(N(t)-N(s)=k, N(s)=l)}{P(N(s)=l)} \\ = \quad & \frac{P(N(t)=k+l, N(s)=l)}{P(N(s)=l)} \\ = \quad & \frac{P(S_l \leq s < S_{l+1}, S_{k+l} \leq t < S_{k+l+1})}{P(N(s)=l)} \end{aligned}$$

$k = 0$,

$$\begin{aligned}
& P(S_l \leq s < S_{l+1}, S_l \leq t < S_{l+1}) \\
= \;& P(S_l \leq s < t < S_{l+1}) \\
= \;& \int_0^s P(S_l = u) P(X_{l+1} > t - u) du \\
= \;& \int_0^s \frac{\lambda^l u^{l-1}}{(l-1)!} e^{-\lambda u} e^{-\lambda(t-u)} du \\
= \;& \frac{\lambda^l s^l}{l!} e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

对任意$l \geq 0$

$$\begin{aligned}
& P(N(t) - N(s) = 0 | N(s) = l) \\
= \;& e^{-\lambda(t-s)} = P(N(t) - N(s) = 0)
\end{aligned}$$

$k \geq 1$,

$$
\begin{aligned}
& P(S_l \leq s < S_{l+1}, S_{k+l} \leq t < S_{k+l+1}) \\
= & \int_0^s P(S_l = u)du \int_{s-u}^{\infty} P(X_{l+1} = v)dv \\
& \int_0^{t-(u+v)} P(S_{k+l} - S_{l+1} = w)dw \\
& P(X_{k+l+1} \geq t - (u+v+w)) \\
= & \frac{\lambda^l s^l}{l!} \cdot \frac{\lambda^k (t-s)^k}{k!} e^{-\lambda t}
\end{aligned}
$$

这样，对任意$k \geq 1$, $l \geq 0$

$$
\begin{aligned}
& P(N(t) - N(s) = k | N(s) = l) \\
= & \frac{\lambda^k (t-s)^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)} = P(N(t) - N(s) = k)
\end{aligned}
$$

因此，$N(t)-N(s)$和$N(s)$相互独立，并且与$N(t-s)$具有相同的分布。

$N(t), t \geq 0$是强度为λ的Poisson 过程。

四、条件分布

假设$N(t), t \geq 0$是一个强度为$\lambda > 0$的Poisson过程。给定时间$t > 0$，$N(t)$是参数为λt的Poisson随机变量。

现在考虑在$N(t) = n$的条件下，n个顾客到达时刻的分布？

(1) $n = 0$，没有顾客到达

(2) $n = 1$，在$(0, t]$内只有一个顾客到达。假设该顾客到达时刻为S_1，求S_1的分布？

任意给定$0 < s < t$

$$
\begin{aligned}
P(S_1 > s | N(t) = 1) &= \frac{P(S_1 > s, N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)} \\
&= \frac{P(N(0, s] = 0, N((s, t]) = 1)}{P(N(t) = 1)}
\end{aligned}
$$

根据增量独立和平稳性，上式等于

$$
\begin{aligned}
&= \frac{P(N(0,s]=0)P(N((s,t])=1)}{P(N(t)=1)} \\
&= \frac{e^{-\lambda s}\lambda(t-s)e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} \\
&= \frac{t-s}{t}
\end{aligned}
$$

这样，S_1的条件分布为$(0,t)$上得均匀分布。

(3) $n=2$，在$(0,t]$时间内有两个顾客到达。假设第一个顾客到达时刻为S_1，第二个顾客到达时刻为S_2，求(S_1,S_2)的联合分布？

任意给定$0<s_1<s_2<t$

$$
\begin{aligned}
& P(s_1<S_1\le s_1+\Delta s_1, s_2<S_2\le s_2+\Delta s_2|N(t)=2) \\
= & \frac{P(s_1<S_1\le s_1+\Delta s_1, s_2<S_2\le s_2+\Delta s_2, N(t)=2)}{P(N(t)=2)} \\
= & \frac{1}{P(N(t)=2)}P(N(0,s_1]=0, N(s_1,s_1+\Delta s_1]=1, \\
& N(s_1+\Delta s_1,s_2]=0, N(s_2,s_2+\Delta s_2]=1, N(s_2+\Delta s_2,t]=0
\end{aligned}
$$

根据增量独立和平稳性，上式等于

$$
\begin{aligned}
& \frac{2!}{(\lambda t)^2 e^{-\lambda t}} e^{-\lambda s_1} \lambda \Delta s_1 e^{-\lambda \Delta s_1} e^{-\lambda(s_2-(s_1+\Delta s_1))} \\
& \quad \lambda \Delta s_2 e^{-\lambda \Delta s_2} e^{-\lambda(t-(s_2+\Delta s_2))} \\
= \; & \frac{2!}{t^2} \Delta s_1 \Delta s_2
\end{aligned}
$$

这样，(S_1, S_2)的条件密度为:

$$
p_{S_1,S_2|N(t)=2}(s_1, s_2) = \frac{2!}{t^2}, \quad 0 < s_1 < s_2 < t
$$

(4) 任意n。在$(0,t]$时间内有n个顾客到达。假设第k个顾客到达时刻为S_k，求$(S_1,\cdots,S_n)$的联合分布？

类似地，可推导$(S_1,\cdots,S_n)$的条件密度为:

$$p_{S_1,\cdots,S_n|N(t)=n}(s_1,\cdots,s_n)=\frac{n!}{t^n},\quad 0<s_1<\cdots<s_n<t$$

- 第k个顾客到达时刻的分布：

$$P(S_k\leq s|N(t)=n)=\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}(\frac{s}{t})^j(1-\frac{s}{t})^{n-j},\quad 0\leq s\leq t$$

$$(S_k\leq s|N(t)=n)\sim\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}(\frac{s}{t})^k(1-\frac{s}{t})^{n-k},\quad 0\leq s\leq t$$

回忆，假设$U_1, U_2, \cdots, U_n$是$[0,t]$上n个独立同分布的均匀随机变量。记次序统计量为

$$U_{(1)} \leq U_{(2)} \leq \cdots \leq U_{(n)}$$

那么$U_{(1)}, U_{(2)}, \cdots, U_{(n)}$的联合概率密度为

$$p_{U_{(1)},\cdots,U_{(n)}}(s_1, \cdots, s_n) = \frac{n!}{t^n}, \quad 0 < s_1 < \cdots < s_n < t$$

所以，

$$(S_1, \cdots, S_n | N(t) = n) \stackrel{d}{=} (U_{(1)}, \cdots, U_{(n)})$$

例1. 假设$N(t), t \geq 0$是强度为λ的Poisson过程，$S_1, S_2, \cdots$,是顾客依次到达时刻。令$f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$的函数，证明：

$$E\sum_{i=1}^{N(t)} f(S_i) = \lambda \int_0^t f(s)ds$$

$$\begin{aligned}
E\sum_{i=1}^{N(t)} f(S_i) &= \sum_{n=0}^{\infty} E(\sum_{i=1}^{n} f(S_i)|N(t)=n)P(N(t)=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E(\sum_{i=1}^{n} f(U_{(i)}))P(N(t)=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E(\sum_{i=1}^{n} f(U_i))P(N(t)=n)
\end{aligned}$$

$U_i \sim U(0,t)$，所以上式

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{t}\int_0^t f(s)ds \sum_{n=0}^{\infty} nP(N(t)=n) \\
&= \lambda \int_0^t f(s)ds
\end{aligned}
$$

例2. 假设$N(t), t \geq 0$是强度为λ的Poisson过程，$S_1, S_2, \cdots$,是顾客依次到达时刻。已知$N(t) = 2$，求$E(S_1 S_2 | N(t) = 2)$?

$$
\begin{aligned}
E(S_1 S_2 | N(t) = 2) &= E(U_{(1)} U_{(2)}) \\
&= E(U_1 U_2) \\
&= (EU_1)^2 = \frac{t^2}{4}
\end{aligned}
$$

例3. 某电视台提供收费节目，自申请受理后收费，每单位时间a元。根据经验，在$(0,t]$内申请该节目的客户数量$N(t)$服从强度为λ的Poisson过程。每一年度初，电视台需要对下一年度的收入进行预测评估。考虑到利率浮动，采用贴现算法，即t时刻的1元相当于0时刻的$e^{-\alpha t}$元。问该电视台在下一年度内(即时间区间为$[0,1]$)平均收益为多少？

假设该电视台在下一年度内(即时间区间为$[0,1]$)总收益为Z，求$EZ=?$
假设下一年度共有N个顾客申请收看该节目，第i个顾客申请时刻为S_i。因此，第i个顾客缴费为$a(1-S_i)$ 元。经过贴现后，电视台预算收益为$a(1-S_i)e^{-\alpha S_i}$。所以年度总收益为

$$Z=\sum_{i=1}^{N} a(1-S_i)e^{-\alpha S_i}$$

平均收益

$$
\begin{aligned}
EZ &= E\sum_{i=1}^{N} a(1-S_i)e^{-\alpha S_i} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E(\sum_{i=1}^{N} a(1-S_i)e^{-\alpha S_i}|N=n)P(N=n) \\
&= a\sum_{n=0}^{\infty} E(\sum_{i=1}^{n} (1-U_{(i)})e^{-\alpha U_{(i)}})P(N=n) \\
&= a\sum_{n=0}^{\infty} E(\sum_{i=1}^{n} (1-U_i)e^{-\alpha U_i})P(N=n) \\
&= a\sum_{n=0}^{\infty} nE((1-U_1)e^{-\alpha U_1})P(N=n) \\
&= aENE((1-U_1)e^{-\alpha U_1})
\end{aligned}
$$

$$EN = \lambda$$

$$\begin{aligned} E((1-U_1)e^{-\alpha U_1}) &= \int_0^1 (1-u)e^{-\alpha u} du \\ &= \frac{\alpha - 1 + e^{-\alpha}}{\alpha^2} \end{aligned}$$

五、Poisson过程的合并与分解

1. Poisson过程的合并

假设$N_i(t), t \geq 0, i = 1, 2$是两个相互独立的Poisson过程，强度分别为$\lambda_1, \lambda_2$。令

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t)$$

那么，$N(t), t \geq 0$是强度为$\lambda_1 + \lambda_2$的Poisson过程。

验证：

(1) $N(0)=0$

(2) 对每一个$t>0$，

$$N(t)\sim\mathcal{P}((\lambda_1+\lambda_2)t)$$

$$\begin{aligned}
P(N(t)=k) &= P(N_1(t)+N_2(t)=k) \\
&= \sum_{l=0}^{k} P(N_1(t)=l)P(N_2(t)=k-l) \\
&= \sum_{l=0}^{k} \frac{(\lambda_1 t)^l e^{-\lambda_1 t}}{l!}\frac{(\lambda_2 t)^{k-l} e^{-\lambda_2 t}}{(k-l)!} \\
&= \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k t^k e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{k!}
\end{aligned}$$

(3) $N(t), t \geq 0$ 增量平稳

假设$0 < s < t$，验证

$$N(t) - N(s) \stackrel{d}{=} N(t-s)$$

注意，

$$N(t) - N(s) = N_1(t) - N_1(s) + N_2(t) - N_2(s)$$

$$N(t-s) = N_1(t-s) + N_2(t-s)$$

$$N_1(t) - N_1(s) \stackrel{d}{=} N_1(t-s), \quad N_2(t) - N_2(s) \stackrel{d}{=} N_2(t-s)$$

并且N_1和N_2相互独立，所以$N(t), t \geq 0$ 增量平稳

(4) $N(t), t \geq 0$ 增量独立

假设$0 < s < t$，验证

$$N(s), N(t) - N(s) \quad 相互独立$$

事实上，

$$\begin{aligned}
& Ee^{aN(s)+b(N(t)-N(s))} \\
= \; & Ee^{aN_1(s)+b(N_1(t)-N_1(s))} Ee^{aN_2(s)+b(N_2(t)-N_2(s))} \\
= \; & Ee^{aN_1(s)} Ee^{b(N_1(t)-N_1(s))} Ee^{aN_2(s)} Ee^{b(N_2(t)-N_1(s))} \\
= \; & Ee^{a(N_1(s)+N_2(s))} Ee^{b(N_1(t)-N_1(s)+N_2(t)-N_1(s))} \\
= \; & Ee^{aN(s)} Ee^{b(N(t)-N(s))}
\end{aligned}$$

上述结论对任意有限个Poisson过程成立：

假设$N_i(t), t \geq 0, i = 1, 2, \cdots, m$是$m$个相互独立的Poisson过程，强度分别为$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$。令

$$N(t) = \sum_{i=1}^{m} N_i(t)$$

那么，$N(t), t \geq 0$是强度为$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i$的Poisson过程。

2. Poisson过程的分解

假设寻求某种服务的顾客分为两类，来自类型I的可能性为p，来自类型II的可能性为$1-p$。

令$t>0$，用$N(t)$表示$(0,t]$内寻求服务的顾客总数，$N_1(t)$表示$(0,t]$内寻求服务的I型顾客个数，$N_2(t)$表示$(0,t]$内寻求服务的II型顾客个数。

已知$N(t),t\geq 0$是强度为λ的poisson 过程，

求$N_1(t)$和$N_2(t)$的分布？

- $N_1(t), t \geq 0$是一个强度为$p\lambda$的Poisson过程，

$N_2(t), t \geq 0$是一个强度为$(1-p)\lambda$的Poisson过程，

并且N_1和N_2相互独立。

验证：

(1) $N_1(t), t \geq 0$是一个强度为$p\lambda$的Poisson过程

(2) $N_2(t), t \geq 0$是一个强度为$(1-p)\lambda$的Poisson过程

(3) N_1和N_2相互独立

- $N_1(t) \sim \mathcal{P}(p\lambda t)$:

$$
\begin{aligned}
P(N_1(t)=k) &= \sum_{n=k}^{\infty} P(N_1(t)=k|N(t)=n)P(N(t)=n) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \\
&= \frac{p^k (\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{((1-p)\lambda t)^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \frac{p^k (\lambda t)^k e^{-p\lambda t}}{k!}
\end{aligned}
$$

- $N_1(t), t \geq 0$增量独立、平稳

所以，$N_1(t), t \geq 0$是一个强度为$p\lambda$的Poisson过程

类似地，$N_2(t), t \geq 0$是一个强度为$(1-p)\lambda$的Poisson过程

- N_1和N_2相互独立：

$$
\begin{aligned}
& P(N_1(t)=k, N_2(t)=l) \\
= \;& P(N_1(t)=k, N(t)=k+l) \\
= \;& P(N_1(t)=k|N(t)=k+l)P(N(t)=k+l) \\
= \;& \binom{k+l}{k} p^k(1-p)^l \frac{(\lambda t)^{k+l} e^{-\lambda t}}{(k+l)!} \\
= \;& \frac{(p\lambda t)^k e^{-p\lambda t}}{k!} \frac{((1-p)\lambda t)^k e^{-(1-p)\lambda t}}{l!} \\
= \;& P(N_1(t)=k)P(N_2(t)=l)
\end{aligned}
$$

- 上述分解可以推广到多个类型：

假设寻求某种服务的顾客可分为m个类型，类型$1, 2, \cdots, m$，且每个顾客来自第i类型的概率为p_i。用$N(t)$ $(t > 0)$ 表示在$(0, t]$内顾客寻求服务的总数，$N_i(t)$表示在$(0, t]$内第i类型顾客寻求服务的个数。如果$N(t), t \geq 0$ 是强度为λ的Poisson 过程，那么，

(1) $N_i(t), t \geq 0$是强度为λp_i的Poisson 过程

(2) $N_i(t), t \geq 0$ $1 \leq i \leq m$ 相互独立

- 问题：如果顾客是否来自第i类型的概率与到达时刻有关，$N_i(t)$服从什么分布？

In probability theory, Raikov's theorem, named after Dmitry Raikov, states that if the sum of two independent random variables X and Y has a Poisson distribution, then both X and Y themselves must have the Poisson distribution. It says the same thing about the Poisson distribution that Cramer's theorem says about the normal distribution. It can readily be shown by mathematical induction that the same is true of the sum of more than two independent random variables.

六、复合Poisson 过程

- 先看以下三个实例。

例1. 某保险公司开展某种风险投保业务。根据调查，保险公司在$(0,t]$内受到索赔的次数$N(t)$服从强度为λ的Poisson过程，每位顾客索赔量是随机的，服从分布$G(x)$。问，该保险公司在$(0,t]$内支付索赔额为多少?

假设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$是顾客索赔量，那么保险公司在$(0,t]$内支付的总索赔额为

$$Z(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}\xi_i$$

例2. 某粒子加速器在$(0,t]$内释放的粒子个数$N(t)$服从强度为λ的Poisson过程，每个粒子能量是随机的，服从分布$G(x)$。问，该粒子加速器在$(0,t]$内释放的总能量为多少？假设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$是粒子能量，那么该粒子加速器在$(0,t]$内释放的总能量为

$$Z(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}\xi_i$$

例3. 某机床零件在工作中受到撞击造成磨损。在$(0,t]$内受到撞击的次数$N(t)$服从强度为λ的Poisson过程，每次撞击造成的磨损量是随机的，服从分布$G(x)$。问，该零件在$(0,t]$内受到磨损总量为多少?

假设$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots$是每次撞击造成的磨损量，那么该零件在$(0,t]$内受到磨损总量为

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i$$

- 考虑下列问题:

假设$N(t), t \geq 0$是强度为λ的Poisson过程，

$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots$是一列随机变量。令

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i$$

这样，$Z(t), t \geq 0$是连续时间参数、取实值的随机过程。

一般情况下，$Z(t), t \geq 0$不再是Poisson 过程；

称$Z(t), t \geq 0$为复合Poisson过程。

进一步，假设$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots$是一列独立同分布随机变量，并且与$N(t), t \geq 0$独立。假设$E\xi_1 = \mu$，$Var(\xi_i) = \sigma^2$。我们可以计算$Z(t)$的数学期望和方差：

(1) $Z(t)$的数学期望

$$
\begin{aligned}
EZ(t) &= E\sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i \\
&\overset{\text{全期望公式}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} E(\sum_{i=1}^{n} \xi_i | N(t) = n) P(N(t) = n) \\
&\overset{\text{独立性}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} E(\sum_{i=1}^{n} \xi_i) P(N(t) = n) \\
&\overset{\text{同分布}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} n\mu P(N(t) = n)
\end{aligned}
$$

所以

$$EZ(t) = \mu\lambda t$$

(2) $Z(t)$的方差

$$Var(Z(t)) = E(Z(t))^2 - (EZ(t))^2$$

$$\begin{aligned} E(Z(t))^2 &= E(\sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i)^2 \\ &\overset{\text{全期望公式}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} E((\sum_{i=1}^{n} \xi_i)^2 | N(t) = n) P(N(t) = n) \\ &\overset{\text{独立性}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} E(\sum_{i=1}^{n} \xi_i)^2 P(N(t) = n) \end{aligned}$$

注意到，

$$\begin{aligned} E(\sum_{i=1}^{n}\xi_i)^2 &= Var(\sum_{i=1}^{n}\xi_i)+(E\sum_{i=1}^{n}\xi_i)^2 \\ &= n\sigma^2+n^2\mu^2 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} E(Z(t))^2 &= \sum_{n=0}^{\infty}(n\sigma^2+n^2\mu^2)P(N(t)=n) \\ &= \sigma^2\lambda t+\mu^2((\lambda t)^2+\lambda t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(Z(t)) &= \sigma^2\lambda t+\mu^2((\lambda t)^2+\lambda t)-(\mu\lambda t)^2 \\ &= (\sigma^2+\mu^2)\lambda t \end{aligned}$$

除了数字特征外，$Z(t), t \geq 0$具有

(i) 增量独立

给定$0 < s < t$，

$$Z(s), Z(t) - Z(s) \quad 相互独立$$

$$\begin{aligned}
Ee^{aZ(s)+b(Z(t)-Z(s))} &= E_N[E_\xi e^{aZ(s)+b(Z(t)-Z(s))}] \\
&= E_N[E_\xi e^{aZ(s)} E_\xi e^{b(Z(t)-Z(s))}] \\
&= E_N[(Ee^{a\xi_1})^{N(s)} (Ee^{a\xi_1})^{N(t)-N(s)}] \\
&= E_N[(Ee^{a\xi_1})^{N(s)}] E_N[(Ee^{a\xi_1})^{N(t)-N(s)}] \\
&= Ee^{aZ(s)} Ee^{b(Z(t)-Z(s))}
\end{aligned}$$

(ii) 增量平稳

给定$0 < s < t$,

$$Z(t) - Z(s) \stackrel{d}{=} Z(t-s)$$

$$\begin{aligned}
Ee^{a(Z(t)-Z(s))} &= E_N[E_\xi e^{a(Z(t)-Z(s))}] \\
&= E_N(Ee^{a\xi_1})^{N(t)-N(s)} \\
&= E_N[(Ee^{a\xi_1})^{N(t-s)}] \\
&= Ee^{aZ(t-s)}
\end{aligned}$$

- $Z(t), t \geq 0$不再是Poisson过程，其分布一般情况下很难求。事实上，

$$
\begin{aligned}
& P(Z(t) > z) \\
= \quad & P(\sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i > z) \\
\overset{\text{全概率公式}}{=} \quad & \sum_{n=0}^{\infty} P(\sum_{i=1}^{n} \xi_i > z | N(t) = n) P(N(t) = n) \\
\overset{\text{独立性}}{=} \quad & \sum_{n=0}^{\infty} P(\sum_{i=1}^{n} \xi_i > z) P(N(t) = n)
\end{aligned}
$$

即使知道每个ξ_i的分布，很难给出$\sum_{i=1}^{n} \xi_i$的分布。

例3 (续). 假设每次撞击量ξ_i独立同分布，服从参数为β的指数分布；进一步假设$\xi_i, i \geq 1$与撞击次数$N(t)$独立。当累积磨损量超过α时，零件不能继续使用，需要更换。问该零件的平均使用寿命为多少？

假设零件寿命为随机变量η，问题在于求$E\eta$。

记$(0, t]$内零件受到撞击造成的总磨损量为$Z(t)$，

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i$$

注意，

$$\eta \geq t \Leftrightarrow Z(t) \leq \alpha$$

$$P(\eta \geq t) = P(Z(t) \leq \alpha)$$

平均寿命为

$$
\begin{aligned}
E\eta &\overset{\text{分部积分公式}}{=} \int_0^{\infty} P(\eta \geq t)dt \\
&= \int_0^{\infty} P(Z(t) \leq \alpha)dt \\
&= \int_0^{\infty} P(\sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i \leq \alpha)dt \\
&\overset{\text{全概率公式}}{=} \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \leq \alpha)P(N(t) = n)dt
\end{aligned}
$$

下面计算

$$P(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \le \alpha)$$

注意，ξ_i服从参数为β的指数分布。用$\tilde{N}(t), t \ge 0$表示强度为β的Poisson过程，根据指数分布和Poisson过程之间的关系，

$$\begin{aligned} P(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \le \alpha) &= P(\tilde{N}(\alpha) \ge n) \\ &= \sum_{m=n}^{\infty} P(\tilde{N}(\alpha) = m) \\ &= \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(\alpha\beta)^m e^{-\alpha\beta}}{m!} \end{aligned}$$

所以

$$
\begin{aligned}
E\eta &= \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=n}^\infty \frac{(\alpha\beta)^m e^{-\alpha\beta}}{m!} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} dt \\
&= \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=n}^\infty \frac{(\alpha\beta)^m e^{-\alpha\beta}}{m!} \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} dt \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{m=0}^\infty (m+1) \frac{(\alpha\beta)^m e^{-\alpha\beta}}{m!} \\
&= \frac{1+\alpha\beta}{\lambda}
\end{aligned}
$$

参数含义:

(1) λ是平均撞击次数。λ越大，撞击次数越多，零件受损越严重，使用寿命越短;

(2) β 是每次撞击时平均磨损量的倒数。β越大，每次撞击时平均磨损量越小，所以寿命越长;

(3) α 是设计时允许零件受损的上限。α越大，寿命越长

例1 (续). 经典破产概率

- 保险公司— 初始盈余$u \geq 0$;
- 保险业务— 保单;
- 顾客购买保单投保— 保费$c > 0$;
- 顾客损失索赔— $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$;
- $[0,t]$ 总的索赔次数— $N(t)$, $N(0) = 0$;
- $[0,t]$ 索赔总量:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad S(0) = 0$$

- 公司盈余(Surplus Process)

$$U(t) = u + ct - S(t)$$

- 基本假设
- $(N(t), t \geq 0)$ Poisson 过程，参数$\lambda > 0$;

$$\lambda = \frac{EN(t)}{t}$$

- $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 独立同分布;

$$X_1 \sim F(x), \quad F(0) = 0$$

$$EX_1 = m_1, \quad Var(X_1) = \sigma^2$$

$$EX_1^k = m_k, \quad M_X(r) = Ee^{rX_1}$$

- 保费确定:

$$c = (1+\theta)\lambda m_1$$

- $\{X_n, n \geq 1\}$与$(N(t), t \geq 0)$独立
- 破产概率

$$\psi(u) = P(U(t) < 0, \quad \text{对某个}t) = P(\text{最终破产概率})$$

给定$t > 0$

$$\psi(u,t) = P(U(s) < 0, \quad \text{对某个}s < t)$$

- 生存概率

$$\phi(u) = 1 - \psi(u)$$

- 经典结果

Theorem

假设存在$\gamma > 0$使得

$$Ee^{rX_1} < \infty, \quad 0 \le r < \gamma$$

令R 是下列方程的解：

$$\lambda E e^{rX_1} - \lambda - cr = 0$$

那么

$$\psi(u) \le e^{-Ru} \quad Lundberg's \text{ 不等式}$$

Theorem

假设$X_1 \sim exp(\alpha)$. 那么

$$\phi(u) = 1 - \psi(u) = 1 - \psi(0)e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u}$$

$$\psi(0) = \frac{\lambda m_1}{c} = \frac{1}{1+\theta}$$

- 破产概率的近似计算:

回忆

$$U(t) = u + ct - S(t)$$

那么

$$EU(t) = u + ct - \lambda m_1 t$$

$$E(U(t) - EU(t))^2 = Var(S(t)) = \lambda m_2$$

$$E(U(t) - EU(t))^3 = \lambda m_3$$

令$\tilde{\lambda}$, $\tilde{c}$ $\tilde{\alpha}$由下列方程确定：

$$u + ct - \lambda m_1 t = u + \tilde{c}t - \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\alpha}}t$$

$$\lambda m_2 = 2\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\alpha}^2}$$

$$\lambda m_3 = 6\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\alpha}^3}$$

解得：

$$\tilde{\alpha} = \frac{3m_2}{m_3}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{9\lambda m_2^3}{2m_3^2}$$

$$\tilde{c} = c - \lambda m_1 + \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\alpha}}$$

- Devylder 近似公式:

$$\psi(u) \approx \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\alpha}\tilde{c}} e^{-(\tilde{\alpha}-\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{c}})u}$$

参考书:

Dickson, D. Insurance Risk and Ruin, University of Melbourne

七、非齐次Poisson 过程

在前面我们介绍了齐次Poisson 过程。

齐次Poisson 过程具有平稳性，它所描述的顾客流在任何时间段内到达的个数只与时间间隔长度有关，与时间区间的起点和端点无关。

但在许多实际问题中，顾客流并不是平稳的。如

电信局接受电话呼叫；

顾客前往大型商场购物；

乘客前往车站候车；

失业人员前往就业中心登记。

这些服务系统接受顾客服务的繁忙程度明显与时间有关。

- 非齐次Poisson 流具有独立性和稀有性。

更具体地说，令$N(t), t > 0$表示$(0, t]$时间内顾客到达的个数。

(1) 独立性

$$N(t) - N(s) \text{ 与 } \quad N(s) \quad \text{独立}$$

(2) 稀有性：存在一个函数$\lambda(t)$使得

$$P(N(t+\Delta t) - N(t) = 1) = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

$$P(N(t+\Delta t) - N(t) \geq 2) = o(\Delta t)$$

其中参数$\lambda(t)$被称为Poisson 流的强度函数，它的大小表示该服务系统的繁忙程度。

Theorem

假设$N(0)=0$，$N(t), t>0$ 满足上述独立性和稀有性，那么对任意$0\le s<t$

$$P(N(s,t]=k)=\frac{m(s,t)^k e^{-m(s,t)}}{k!},\quad k\ge 0$$

其中

$$N(s,t]=N(t)-N(s),\quad m(s,t)=\int_s^t \lambda(u)du$$

证明：

- 可采用微分方程的方法加以证明。

证明: 先回顾$\lambda(t) \equiv \lambda$ 的证明

令$p_k(t) = P(N(t) = k)$。

(1) $k = 0$

$$
\begin{aligned}
& p_0(t+\Delta t) \\
= \quad & P(N(t+\Delta t) = 0) \\
= \quad & P(N(t) = 0, N((t, t+\Delta t]) = 0) \\
= \quad & P(N(t) = 0) P(N((t, t+\Delta t]) = 0) \\
= \quad & p_o(t)(1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t))
\end{aligned}
$$

$$
p_0(t+\Delta t) - p_0(t) = -\lambda p_0(t) \Delta t + +o(\Delta t))
$$

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t)$$

注意到：$N(0) = 0$，

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}$$

(2) $k \geq 1$

$$
\begin{aligned}
& p_k(t+\Delta t) \\
= \;& P(N(t+\Delta t)=k) \\
= \;& P(N(t)=k, N((t,t+\Delta t])=0) \\
& +P(N(t)=k-1, N((t,t+\Delta t])=1) \\
& +P(N(t)\leq k-2, N((t,t+\Delta t])\geq 2) \\
= \;& P(N(t)=k)P(N((t,t+\Delta t])=0) \\
& +P(N(t)=k-1)P(N((t,t+\Delta t])=1) \\
& +P(N(t)\leq k-2)P(N((t,t+\Delta t])\geq 2)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} p_k(t+\Delta t) &= p_k(t)(1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)) \\ &\quad +p_{k-1}(t)(\lambda\Delta t+o(\Delta t)) \\ &\quad +o(\Delta t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & p_k(t+\Delta t)-p_k(t) \\ & = -\lambda p_k(t)\Delta t+o(\Delta t)) \\ & +p_{k-1}(t)(\lambda\Delta t+o(\Delta t)) \\ & +o(\Delta t) \end{aligned}$$

令$\Delta t \to 0$，

$$p_k'(t) = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t)$$

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

- 对于一般强度函数$\lambda(t)$，完全类似地得到

$$p_k'(t) = -\lambda(t)p_k(t) + \lambda(t)p_{k-1}(t)$$

归纳假设$p_{k-1}(t) = \frac{(\int_0^t \lambda(u)du)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\int_0^t \lambda(u)du}$.

$$\begin{aligned}(p_k(t)e^{\int_0^t \lambda(u)du})' &= (p_k'(t) + \lambda(t)p_k(t))e^{\int_0^t \lambda(u)du} \\ &= \lambda(t)p_{k-1}(t)e^{\int_0^t \lambda(u)du}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}p_k(t)e^{\int_0^t \lambda(u)du} &= \int_0^t \lambda(s)p_{k-1}(s)e^{\int_0^s \lambda(u)du}ds \\ &= \int_0^t \lambda(s)\frac{(\int_0^s \lambda(u)du)^{k-1}}{(k-1)!}ds\end{aligned}$$

$$p_k(t)e^{\int_0^t \lambda(u)du} = \frac{(\int_0^t \lambda(u)du)^k}{k!}$$

$$p_k(t) = \frac{(\int_0^t \lambda(u)du)^k}{k!} e^{-\int_0^t \lambda(u)du}$$

例1. 某地急救设施使用次数$N(t)$服从Poisson 过程，强度函数为$\lambda(t)$

$$\lambda(t) = \begin{cases} 2t & 0 \le t < 1 \\ 2 & 1 \le t < 2 \\ 4-t & 2 \le t \le 4 \end{cases}$$

其中时间单位为小时。

求

$$P(N(2) = 2, N(2,4] = 2) =?$$

- 非齐次Poisson 过程各顾客到达时刻的分布

假设$N(t), t \geq 0$是强度函数为$\lambda(t)$的非齐次Poisson 过程，令$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$表示顾客依次到达时刻。以下计算它们的分布：

令$m(t) = \int_0^t \lambda(u)du$

$$\begin{aligned} P(S_1 > t) &= P(N(t) = 0) \\ &= e^{-m(t)} \end{aligned}$$

所以$S_1 \sim \lambda(t)e^{-m(t)}$

注意，这不再是指数分布。

$$
\begin{aligned}
P(S_2 > t) &= P(N(t) \le 1) \\
&= P(N(t)=0) + P(N(t)=1) \\
&= e^{-m(t)} + m(t)e^{-m(t)}
\end{aligned}
$$

所以$S_2 \sim \lambda(t)m(t)e^{-m(t)}$

令$X_1 = S_1$，$X_2 = S_2 - S_1$，

$$
\begin{aligned}
P(X_2 > t | X_1 = s) &= P(N(s, s+t] = 0)) \\
&= e^{-m(s,s+t)}
\end{aligned}
$$

显然，X_1和X_2不再独立，分布也不相同。

可以类似地得到其它到达时刻和时间间隔的分布。

例2. 某人患有周期性偏头痛。有时痛得厉害，需要服药。记

$N(t)$表示$(0,t]$内头痛的次数；

$N_m(t)$表示$(0,t]$内头痛厉害需要服药的次数；

$p(\tau)$表示如果在τ时刻出现头痛并且需要服药的概率。

求$N_m(t)$的分布？

应用全概率公式，

$$P(N_m(t)=k) \;=\; \sum_{n=k}^{\infty} P(N_m(t)=k|N(t)=n)P(N(t)=n)$$

假设S_i是出现第i次头痛的时刻，那么

$$\begin{aligned}
& P(N_m(t)=k|N(t)=n) \\
= \;& E\Big(\sum_{i_1,\cdots,i_k}\prod_{j=1}^{k} p(S_{i_j})\prod_{j\neq 1,\cdots,k}(1-p(S_{i_j}))|N(t)=n\Big) \\
= \;& E\Big(\sum_{i_1,\cdots,i_k}\prod_{j=1}^{k} p(U_{(i_j)})\prod_{j\neq 1,\cdots,k}(1-p(U_{(i_j)}))\Big)
\end{aligned}$$

令

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i_1,\cdots,i_k}\prod_{j=1}^{k}p(x_{i_j})\prod_{j\neq 1,\cdots,k}(1-p(x_{i_j}))$$

注意到，$f(x_1,\cdots,x_n)$是对称函数，所以

$$\begin{aligned} & E\Big(\sum_{i_1,\cdots,i_k}\prod_{j=1}^{k}p(U_{(i_j)})\prod_{j\neq 1,\cdots,k}(1-p(U_{(i_j)}))\Big) \\ = \ & E\Big(\sum_{i_1,\cdots,i_k}\prod_{j=1}^{k}p(U_{i_j})\prod_{j\neq 1,\cdots,k}(1-p(U_{i_j}))\Big) \\ = \ & \binom{n}{k}\Big(\int_0^t \frac{1}{t}p(x)dx\Big)^k\Big(\int_0^t \frac{1}{t}(1-p(x))dx\Big)^{n-k}dx \end{aligned}$$

将上式代入全概率公式得，

$$
\begin{aligned}
& P(N_m(t)=k) \\
= \ & \sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}\left(\int_0^t \frac{1}{t}p(x)dx\right)^k\left(\int_0^t \frac{1}{t}(1-p(x))dx\right)^{n-k}dx\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \\
= \ & \frac{(\lambda\int_0^t p(x)dx)^k}{k!}e^{-\lambda\int_0^t p(x)dx}
\end{aligned}
$$

例3. 考虑大型机场停车库进出车辆管理问题。根据统计，在$(0,t]$进入停车场的汽车数量服从强度为λ的齐次Poisson过程。每辆汽车停车时间与到达时刻独立，服从分布$G(x)$。求$(0,t]$内开出停车场的汽车数量$\tilde{N}(t)$的分布？假设第i辆车进入停车场的时刻为S_i，停车时间为ξ_i。该车在$(0,t]$内开出停车场当且仅当

$$\xi_i < t - S_i$$

那么

$$\tilde{N}(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \mathbf{1}_{(\xi_i < t - S_i)}$$

$$\begin{aligned} P(\tilde{N}(t)=k) &= P(\sum_{i=1}^{N(t)} \mathbf{1}_{(\xi_i<t-S_i)}=k) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} P(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(\xi_i<t-S_i)}=k|N(t)=n)P(N(t)=n) \end{aligned}$$

先计算

$$P(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(\xi_i<t-S_i)}=k|N(t)=n)$$

注意，给定$(0,t]$内有n辆车进入停车场，那么到达时刻$S_1,S_2,\cdots,S_n$和$U_{(1)},U_{(2)},\cdots,U_{(n)}$同分布。

$$
\begin{aligned}
& P\Big(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(\xi_i<t-S_i)} = k \Big| N(t)=n\Big) \\
= \quad & E_\xi P_S\Big(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(\xi_i<t-S_i)} = k \Big| N(t)=n\Big) \\
= \quad & E_\xi P_U\Big(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(\xi_i<t-U_{(i)})} = k\Big) \\
= \quad & E_U P_\xi\Big(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(\xi_i<t-U_{(i)})} = k\Big) \\
= \quad & E_U \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \mathbf{1}_{(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(x_i<t-U_{(i)})}=k)} \prod_i dG(x_i)
\end{aligned}
$$

令

$$f(y_1,\cdots,y_n)=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \mathbf{1}_{(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(x_i<t-y_i)}=k)}\prod_i dG(x_i)$$

那么$f(y_1,\cdots,y_n)$是一个对称函数。所以

$$\begin{aligned}
& P(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(\xi_i<t-S_i)}=k|N(t)=n) \\
= \quad & E_U\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \mathbf{1}_{(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(x_i<t-U_i)}=k)}\prod_i dG(x_i) \\
= \quad & P(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(\xi_i<t-U_i)}=k) \\
= \quad & \binom{n}{k}P(\xi_1<t-U_1)^k(1-P(\xi_1<t-U_1))^{n-k}
\end{aligned}$$

注意，

$$
\begin{aligned}
P(\xi_1 < t - U_1) &= \int_0^t \frac{1}{t} P(\xi_1 < t - s) ds \\
&= \int_0^t \frac{1}{t} G(s) ds
\end{aligned}
$$

这样，

$$
\begin{aligned}
& P(\tilde{N}(t) = k) \\
= & \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \Big(\int_0^t \frac{1}{t} G(s) ds \Big)^k \Big(1 - \int_0^t \frac{1}{t} G(s) ds \Big)^{n-k} P(N(t) = n) \\
= & \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \Big(\int_0^t G(s) ds \Big)^k \Big(t - \int_0^t G(s) ds \Big)^{n-k} \frac{\lambda^n e^{-\lambda t}}{n!}
\end{aligned}
$$

$$P(\tilde{N}(t)=k)=\frac{(\lambda\int_0^t G(s)ds)^k}{k!}e^{-\lambda\int_0^t G(s)ds}$$

- 时间变换

假设$\tilde{N}(t), t \geq 0$是强度函数为$\lambda(t)$的非齐次Poisson过程，并且$\lambda(t)$严格正的函数。

定义

$$m(s,t) = \int_s^t \lambda(u)du, \quad m(t) = m(0,t)$$

那么$m(t), t \geq 0$是严格增的正函数，其逆函数存在，记为$m^{-1}(t)$。

定义一个新过程

$$N(t) \quad = \quad \tilde{N}(m^{-1}(t))$$

$N(t), t \geq 0$是强度为1的齐次Poisson过程。

证明：

(1)

$$N(0) = \tilde{N}(m^{-1}(0)) = 0$$

(2)增量平稳

假设$0 \leq s < t$，

$$\begin{aligned} & P(N(t) - N(s) = k) \\ = & P(\tilde{N}(m^{-1}(t)) - \tilde{N}(m^{-1}(s)) = k) \\ = & \frac{(m(m^{-1}(t)) - m(m^{-1}(s)))^k}{k!} e^{-(m(m^{-1}(t)) - m(m^{-1}(s)))} \\ = & \frac{(t-s)^k}{k!} e^{-(t-s)}, \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

$N(t) - N(s)$是Poisson 分布，并且只与时间间隔长

(3) 增量独立

假设$0 \le s < t$，注意到$\tilde{N}$为增量独立过程，

$$
\begin{aligned}
& Ee^{aN(s)+b(N(t)-N(s))} \\
= \ & Ee^{a\tilde{N}(m^{-1}(s))+b(\tilde{N}(m^{-1}(t))-\tilde{N}(m^{-1}(s)))} \\
= \ & Ee^{a\tilde{N}(m^{-1}(s))}Ee^{b(\tilde{N}(m^{-1}(t))-\tilde{N}(m^{-1}(s)))} \\
= \ & Ee^{aN(s)}Ee^{b(N(t)-N(s))}
\end{aligned}
$$