中国科学院研究生院

2012 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称：高等代数

考生须知：

1．本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟。
2．所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

1．(15 分)　证明 多项式 $f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$ 没有重根。

2．(20 分)　设多项式 $g(x)=p^k(x)g_1(x)(k\geq 1)$，多项式 $p(x)$ 与 $g_1(x)$ 互素。证明：对任意多项式 $f(x)$ 有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{r(x)}{p^k(x)}+\frac{f_1(x)}{p^{k-1}(x)g_1(x)}$$

其中，$r(x),f_1(x)$ 都是多项式，$r(x)=0$ 或 $\deg(r(x))<\deg(p(x))$。

3．(20 分)　已知 n 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}$$

其中，$\sum_{i=1}^{n}a_i=1,\ \ \sum_{i=1}^{n}a_i^2=n$。

1) 求 A 的全部特征值；

2) 求 A 的行列式 $\det(A)$ 和迹 $\mathrm{tr}(A)$。

4．(15 分) 设数域 k 上的 n 阶方阵 A 满足 $A^2=A$，V_1, V_2 分别是齐次线性方程组 $Ax=0$ 和 $(A-I_n)x=0$ 在 k^n 中的解空间，试证明：$\mathrm{k}^n=V_1\oplus V_2$，其中 I_n 代表 n 阶单位矩阵，$\oplus$ 表示直和。

5．(20 分) 设n阶矩阵A可逆，α,β均为n维列向量，且$1+\beta^T A^{-1}\alpha \neq 0$，其中$\beta^T$表示$\beta$的转置。

1）证明矩阵$P=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\beta^T & 1 \end{pmatrix}$可逆，并求其逆矩阵；

2）证明矩阵$Q=A+\alpha\beta^T$可逆，并求其逆矩阵。

6．(20 分) 证明：任何复数方阵A都与它的转置矩阵A^T相似。

7．(22 分) 在二阶实数矩阵构成的线性空间$\mathrm{R}^{2\times 2}$中定义：

$$(A,B)=\mathrm{tr}(A^T B), \quad \forall A,B\in \mathrm{R}^{2\times 2}$$

其中，A^T表示矩阵A的转置，$\mathrm{tr}(X)$表示矩阵X的迹。

1) 证明(A,B)是线性空间$\mathrm{R}^{2\times 2}$的内积；

2) 设W是由$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$生成的子空间。试求$W^{\perp}$的一组标准正交基。

8．(18 分) 设$T_1,T_2,\cdots,T_n$是数域上线性空间V的非零线性变换，试证明存在向量$\alpha\in V$，使得$T_i(\alpha)\neq 0, i=1,2,\cdots,n$。

中国科学院 2012 高等代数试题答案

（hfg1964 解答，仅供参考）

1. 证法 1 用反证法，若多项式 $f(x)$ 有重根，则 $f(x)$ 有重因式，以下证明 $f(x)$ 没有重因式：

设 $(f(x), f'(x)) = d(x)$，由 $f'(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}$，则 $d(x) \mid [f(x) - f'(x)]$，即得 $d(x) \mid x^n$，故 $d(x)$ 只可能为 $1, x, x^2, \cdots, x^n$ 之一者，如果 $d(x) \neq 1$，那么 $x \mid d(x)$，故有 $x \mid f(x)$，得 $x \mid 1$，矛盾。

证法 2 若有重根 c，则 $f(c) = f'(c) = 0 \Rightarrow f(c) - f'(c) = 0$，即 $\frac{1}{n!}c^n = 0$，得 $c = 0$，即 $f(0) = 0$，矛盾。

2．分析：只需证明 $f(x) = r(x)g_1(x) + p(x)f_1(x)$

证明 由 $(p(x), g_1(x)) = 1$，得 $p(x)u(x) + g_1(x)v(x) = 1$，则

$$f(x) = p(x)u(x)f(x) + g_1(x)v(x)f(x),$$

对其中的 $v(x)f(x)$，用 $p(x)$ 来除，用带余除法，$v(x)f(x) = p(x)q(x) + r(x)$，这里 $r(x) = 0$ 或 $\deg r(x) < \deg p(x)$，故得

$$\begin{aligned} f(x) &= p(x)u(x)f(x) + g_1(x)[p(x)q(x) + r(x)] \\ &\triangleq r(x)g_1(x) + p(x)f_1(x) \end{aligned}$$

于是 $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{r(x)}{p^k(x)} + \frac{f_1(x)}{p^{k-1}(x)g_1(x)}$

3．解 根据公式 $\det(\lambda I_n - AB) = \lambda^{n-m}\det(\lambda I_m - BA)$，这里 A 为 $n \times m$ 矩阵，B 为 $m \times n$ 矩阵。

由 $A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - I$，则

$$\det(\lambda I - A) = \det[(\lambda+1)I - \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}]$$

$$= (\lambda+1)^{n-2} \det[(\lambda+1)I_2 - \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}]$$

$$= (\lambda+1)^{n-2} \det\begin{pmatrix} \lambda+1-n & -1 \\ -1 & \lambda+1-n \end{pmatrix} = (\lambda+1)^{n-2}(\lambda+2-n)(\lambda-n),$$

故所有特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-2} = -1$，$\lambda_{n-1} = n-2$，$\lambda_n = n$。其余略。

4．证法 $\forall \alpha \in K^n$，由$\alpha = (\alpha - A\alpha) + A\alpha$，其中$\alpha - A\alpha \in V_1$，$A\alpha \in V_2$，故$K^n \subseteq V_1 + V_2$，故有$K^n = V_1 + V_2$，至于$V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$，很容易证明$V_1 \cap V_2 = \{0\}$，或者利用幂等矩阵的性质$rank(A) + rank(I-A) = n$，得

$$\dim V_1 + \dim V_2 = n = \dim(K^n) = \dim(V_1 + V_2)。$$

5．分析：用分块初等变换

$$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\beta^T & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & \alpha \\ 0 & 1+\beta^T A^{-1}\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ \beta^T A^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1+\beta^T A^{-1}\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I - \dfrac{\alpha\beta^T A^{-1}}{1+\beta^T A^{-1}\alpha} & -\dfrac{\alpha}{1+\beta^T A^{-1}\alpha} \\ \beta^T A^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} - \dfrac{A^{-1}\alpha\beta^T A^{-1}}{1+\beta^T A^{-1}\alpha} & -\dfrac{A^{-1}\alpha}{1+\beta^T A^{-1}\alpha} \\ \dfrac{\beta^T A^{-1}}{1+\beta^T A^{-1}\alpha} & \dfrac{1}{1+\beta^T A^{-1}\alpha} \end{pmatrix}$$

证明 （1）由$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\beta^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A^{-1} - \dfrac{A^{-1}\alpha\beta^T A^{-1}}{1+\beta^T A^{-1}\alpha} & -\dfrac{A^{-1}\alpha}{1+\beta^T A^{-1}\alpha} \\ \dfrac{\beta^T A^{-1}}{1+\beta^T A^{-1}\alpha} & \dfrac{1}{1+\beta^T A^{-1}\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

（2）分析：$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\beta^T & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A+\alpha\beta^T & 0 \\ -\beta^T & 1 \end{pmatrix}$，

证明 （方法一） $\begin{pmatrix} I & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\beta^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+\alpha\beta^T & 0 \\ -\beta^T & 1 \end{pmatrix}$，由（1）知 $\begin{pmatrix} A+\alpha\beta^T & 0 \\ -\beta^T & 1 \end{pmatrix}$可逆，故$A+\alpha\beta^T$可逆，仿照（1）的方法，得

$$\begin{pmatrix} A+\alpha\beta^T & 0 \\ -\beta^T & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1}-\dfrac{A^{-1}\alpha\beta^T A^{-1}}{1+\beta^T A^{-1}\alpha} & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$$

故有 $(A+\alpha\beta^T)^{-1} = A^{-1}-\dfrac{A^{-1}\alpha\beta^T A^{-1}}{1+\beta^T A^{-1}\alpha}$。

（方法二） 仿照$(I_m+BA)^{-1}=I_m-B(I_n+AB)^{-1}A$的证明方法，把$A+\alpha\beta^T$先化为$A+\alpha\beta^T=A(I+A^{-1}\alpha\cdot\beta^T)$，得到

$(A+\alpha\beta^T)^{-1}=(I+A^{-1}\alpha\cdot\beta^T)^{-1}A^{-1}=[I-A^{-1}\alpha(1+\beta^T\cdot A^{-1}\alpha)^{-1}\beta^T]A^{-1}$

$=A-\dfrac{A^{-1}\alpha\beta^T A^{-1}}{1+\beta^T A^{-1}\alpha}$，详细步骤从略。

6． 证明 由于$\lambda I-A$与$\lambda I-A'$具有完全相同的行列式因子，得证。

7．解法 设$X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$，注意到$X\in W^{\perp}\Leftrightarrow(X,A)=0,(X,B)=0$，得一线性方程组可求出基础解系，得$W^{\perp}$的一组基$X_1,X_2$，用施密特正交化方法把$X_1,X_2$化为标准正交基即得。略。

8．证明 我们先证明若T_1,T_2为非零线性变换，则存在向量$\alpha\in V$，使得$T_1(\alpha)\neq 0$，$T_2(\alpha)\neq 0$：因为T_1,T_2非零，故有向量α_1,α_2，使得$T_1(\alpha_1)\neq 0$，$T_2(\alpha_2)\neq 0$，若$T_2(\alpha_1)\neq 0$，或$T_1(\alpha_2)\neq 0$，则结论成立。以下设$T_2(\alpha_1)=0$且$T_1(\alpha_2)=0$，取$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，则$T_1(\alpha)=T_1(\alpha_1+\alpha_2)=T_1(\alpha_1)+T_1(\alpha_2)=T_1(\alpha_1)\neq 0$，同理$T_2(\alpha)\neq 0$。

以下用数学归纳法证明，为说明这种方法，也为了书写简单计，我们仅把结论推广到三个线性变换T_1,T_2,T_3，（不难用同样的方法写出一般证明，略）根据上面证明，我们找到了向量$\alpha\in V$，使$T_1(\alpha)\neq 0$，$T_2(\alpha)\neq 0$，如果$T_3(\alpha)\neq 0$，结论得证。故不妨设$T_1(\alpha)\neq 0$，$T_2(\alpha)\neq 0$，而$T_3(\alpha)=0$，又设有向量$\beta\in V$，使

得$T_3(\beta)\neq 0$，考虑对任意常数k，有$T_1(k\alpha+\beta)=kT_1(\alpha)+T_1(\beta)$，因为$T_1(\alpha)$与$T_1(\beta)$为固定向量，而$T_1(\alpha)\neq 0$，故使$T_1(k\alpha+\beta)=kT_1(\alpha)+T_1(\beta)=0$的$k$至多只有一个，同理使$T_2(k\alpha+\beta)=0$的$k$至多也只有一个，即对无穷多个$k$，使$T_1(k\alpha+\beta)\neq 0$，$T_2(k\alpha+\beta)\neq 0$，而$T_3(k\alpha+\beta)=kT_3(\alpha)+T_3(\beta)=T_3(\beta)\neq 0$，得证。

注 1：根据证明，对任意有限多个线性变换，结论同样成立，而不仅限于n个线性变换；

注 2：一些教科书中有结论：设$V_1,V_2,\cdots,V_s$是n维线性空间的s个非平凡子空间，则有向量α，使得$\alpha\notin V_i$。如果利用该结论的话，可以不妨设诸T_i既非零变换，又非可逆变换，构造子空间$V_i=\ker T_i=\left\{\xi\,\middle|\,T_i(\xi)=0\right\}$，即得。