可测函数用连续函数来逼近

luojunxun

2023 年 4 月 24 日

Theorem 3.3.1:$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 定义在 $F \overset{compact}{\subset} R^n, f_n \in C(F)$, 若 f_n 一致收敛到 f, 那么 $f \in C(F)$

Theorem 3.3.2(Egoroff):f 和 f_n 都是测度有限的集合 D 上的几乎处处有限 *(有限是说 $\forall x, f(x) < \infty$)* 的可测函数, 若 f_n 在 D 上几乎处处收敛到 f, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists F \overset{closed}{\subset} D, s.t.\ m(D-F) < \epsilon$ 且,f_n 在 F 上一致收敛到 f

有限: 有界一定有限, 有限不一定有界, 例如 $f(x) = 1/x$, 在 (0,1) 有限但无界

Lemma 3.3.1:$F \overset{closed}{\subset} R, f \in C(F)$**, 则 f 可开拓成** $f^* \in C(R)\ \&\ \sup\limits_{x\in R}|f^*(x)| = \sup\limits_{x\in R}|f(x)|$

Proof:[3.3.1]$F^c = \bigcup(a_n, b_n) \overset{open}{\subset} R$, 开区间不相交。$f^* = \begin{cases} f(x) & \in F \\ \text{线性} & x \in [a_n, b_n]\ bounded \\ f(a_n) & x \in [a_n, b_n), b_n = \infty \\ f(b_n) & x \in (a_n, b_n], a_n = -\infty \end{cases} \Rightarrow$

$f^* \in C(R)$ 是 f 的开拓

Lemma 3.3.2: 设 f 是可测集 D 上的简单函数, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists f^* \in C(D), s.t. m(\{f \neq f^*\}) < \epsilon$

Theorem 3.3.3(Lusin): 设 f 是可测集 D 上几乎处处有限的可测函数, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists f^* \in C(D), s.t. m(\{f \neq f^*\}) < \epsilon\ \&\ \sup\limits_{x\in D}|f^*(x)| \leq \sup\limits_{x\in D}|f+(x)|$

推论: 设 f 是可测集 D=[a,b] 上几乎处处有限的可测函数, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists f^* \in C(D)$ $s.t. m(\{f \neq f^*\}) < \epsilon\ \&\ \max\limits_{x\in D}|f^*(x)| \leq \sup\limits_{x\in D}|f(x)|$