浙江大学
ZheJiang University

数学建模

浙江大学数学科学学院　谈之奕

tanzy@zju.edu.cn

运筹与统计

博弈论概述

博弈论

- 博弈论（对策论）（**game theory**）
  - 研究由一些带有相互竞争性质的主体所构成的体系的理论。它能以数字表示人的行为或为人的行为建立模式，研究对抗局势中最优的对抗策略和稳定局势，以及如何追求各方的最优策略和决定对策的结果，协助人们在一定规则范围内寻求最合理的行为方式

    ——《中国大百科全书（第二版）》

  - 数学的一个分支，用于分析竞争的形势，这种竞争的结果不仅依赖于个人自己的抉择及机会，而且还依赖于其他局中人的抉择。由于竞争结果依赖于所有局中人的行为，每个局中人都企图预测其他局中人的可能抉择，以确定自己的最佳对策。如何合理地进行这些相互依存的战略策划就是博弈论的主题

    ——《不列颠百科全书（国际中文版）》

田忌赛马

局	齐王	田忌	结果
1	$A+$	$A-$	齐王胜
2	$B+$	$B-$	齐王胜
3	$C+$	$C-$	齐王胜

3:0

局	齐王	田忌	结果
1	$A+$	$C-$	齐王胜
2	$B+$	$A-$	田忌胜
3	$C+$	$B-$	田忌胜

1:2

齊使者如梁，孫臏以刑徒陰見，說齊使。齊使以爲奇，竊載與之齊。齊將田忌善而客待之。忌數與齊諸公子馳逐重射。孫子見其馬足不甚相遠，馬有上、中、下輩。於是孫子謂田忌曰："君弟重射，臣能令君勝。"田忌信然之，與王及諸公子逐射千金。及臨質，孫子曰："今以君之下駟與彼上駟，取君上駟與彼中駟，取君中駟與彼下駟。"既馳三輩畢，而田忌一不勝而再勝，卒得王千金。於是忌進孫子於威王。威王問兵法，遂以爲師。

——《史记•孙子吴起列传》

博弈论

数学建模

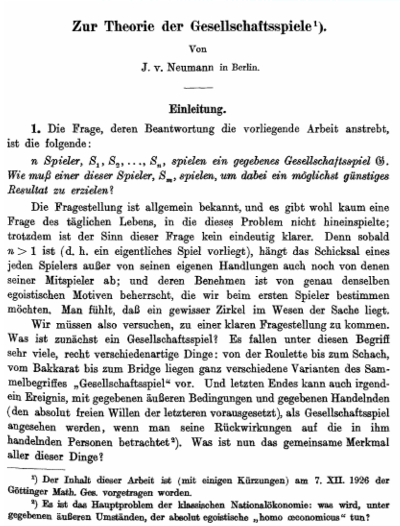
右：**John von Neumann（1903－1957）**

匈牙利裔美国数学家

左： **Oskar Morgenstern（1902 –1977）**

奥地利裔美国经济学家

Spring Lake, 1946



Zur Theorie der Gesellschaftsspiele[1]).

Von

J. v. Neumann in Berlin.

Einleitung.

1. Die Frage, deren Beantwortung die vorliegende Arbeit anstrebt, ist die folgende:

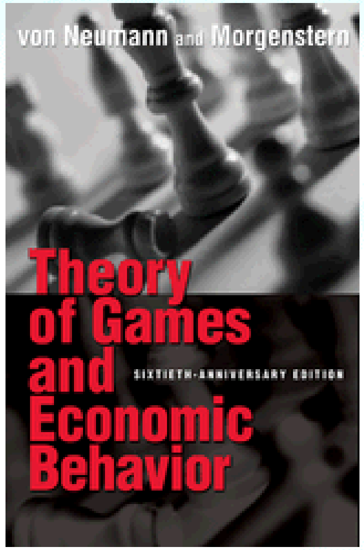
n Spieler, $S_1, S_2, \ldots, S_n$, spielen ein gegebenes Gesellschaftsspiel $\mathfrak{G}$. Wie muß einer dieser Spieler, S_m, spielen, um dabei ein möglichst günstiges Resultat zu erzielen?

Die Fragestellung ist allgemein bekannt, und es gibt wohl kaum eine Frage des täglichen Lebens, in die dieses Problem nicht hineinspielte; trotzdem ist der Sinn dieser Frage kein eindeutig klarer. Denn sobald $n > 1$ ist (d. h. ein eigentliches Spiel vorliegt), hängt das Schicksal eines jeden Spielers außer von seinen eigenen Handlungen auch noch von denen seiner Mitspieler ab; und deren Benehmen ist von genau denselben egoistischen Motiven beherrscht, die wir beim ersten Spieler bestimmen möchten. Man fühlt, daß ein gewisser Zirkel im Wesen der Sache liegt.

Wir müssen also versuchen, zu einer klaren Fragestellung zu kommen. Was ist zunächst ein Gesellschaftsspiel? Es fallen unter diesen Begriff sehr viele, recht verschiedenartige Dinge: von der Roulette bis zum Schach, vom Bakkarat bis zum Bridge liegen ganz verschiedene Varianten des Sammelbegriffes „Gesellschaftsspiel" vor. Und letzten Endes kann auch irgendein Ereignis, mit gegebenen äußeren Bedingungen und gegebenen Handelnden (den absolut freien Willen der letzteren vorausgesetzt), als Gesellschaftsspiel angesehen werden, wenn man seine Rückwirkungen auf die in ihm handelnden Personen betrachtet[2]). Was ist nun das gemeinsame Merkmal aller dieser Dinge?

[1]) Der Inhalt dieser Arbeit ist (mit einigen Kürzungen) am 7. XII. 1926 der Göttinger Math. Ges. vorgetragen worden.

[2]) Es ist das Hauptproblem der klassischen Nationalökonomie: was wird, unter gegebenen äußeren Umständen, der absolut egoistische „homo oeconomicus" tun?



von Neumann, J., Morgenstern, O., *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1944

von Neumann J. Zur theorie der gesellschaftsspiele. Mathematische annalen, 100(1), 295-320, 1928.

棋类游戏

- 棋类游戏（**The game of chess**）
  - 每盘比赛由白方先行，黑白双方交替走子，每方走子遵循一定的规则
  - 每盘比赛有白胜、黑胜、平局三种结果
  - 每盘比赛在有限步内终止
- 状态、局势和策略
  - 状态：棋盘上棋子和它们所在的位置
    - 开局状态 X_0
    - 比赛第 k 步，某一方走子，状态由 X_k 变为 X_{k+1}
  - 局势：从开局到第 k 步的状态序列 $(X_0, X_1, \cdots, X_k)$
  - 策略：对每个可能的局势 $(X_0, X_1, \cdots, X_k)$，将走子一方给出下一个状态 X_{k+1}

棋类游戏

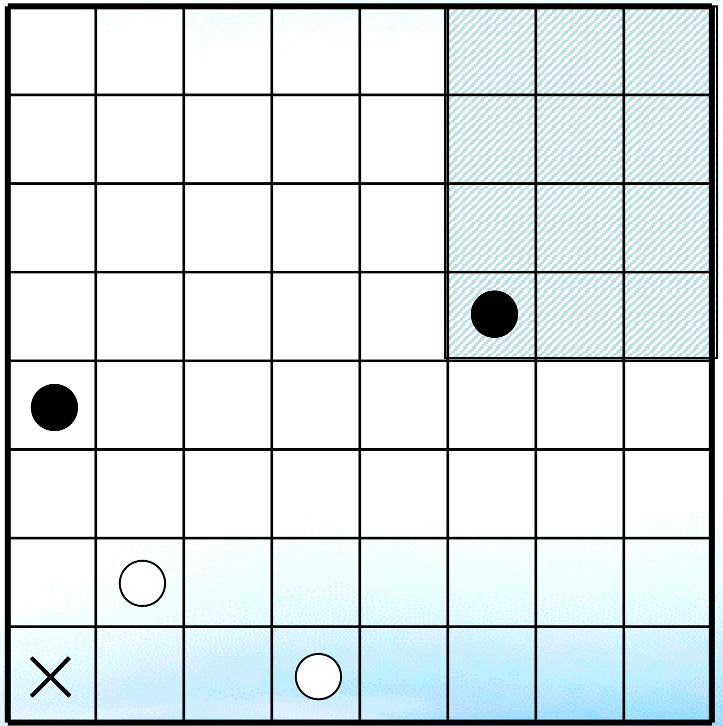
数学建模

- 策略与胜负
  - 初始状态和双方的策略S_W和 S_B，完全确定一盘比赛的进程和胜负
  - 白方制胜策略 S_W：对黑方的任意策略 S_B，由 S_W 和 S_B决定的比赛结果为白胜
  - 白方保平策略S_W：对黑方的任意策略 S_B，由 S_W和 S_B决定的比赛结果为白胜或平局
- **von Neumann定理**
  - 对棋类游戏，以下三条有且恰有一条成立
    - 白方有一制胜策略
    - 黑方有一制胜策略
    - 双方有一保平策略

$$X_1 = S_W(X_0)$$
$$X_2 = S_B(X_0, X_1)$$
$$X_3 = S_W(X_0, X_1, X_2)$$
$$\cdots\cdots$$
$$X_{2k+1} = S_W(X_0, X_1, X_2, \cdots, X_{2K})$$
$$X_{2k+2} = S_B(X_0, X_1, X_2, \cdots, X_{2K+1})$$

Chomp

- **Chomp游戏**
  - 一 m 行 n 列的棋盘，左下角的方格标为 $(1,1)$，右上角的方格标为 (n,m)，其余方格标号以此类推
  - 初始时棋盘为空，黑白双方轮流在棋盘的方格中摆子
  - 若格 (i_0, j_0) 中已有子，任一方不能在格 $(i,j), i \ge i_0, j \ge j_0$ 中摆子
  - 在格 $(1,1)$ 中摆子的一方失败
- 若 $n=m$，先手方有制胜策略
  - 第一步先手方在 $(2,2)$ 摆子
  - 若后手方选择 $(i,1)$，先手方选择 $(1,i)$



数学建模

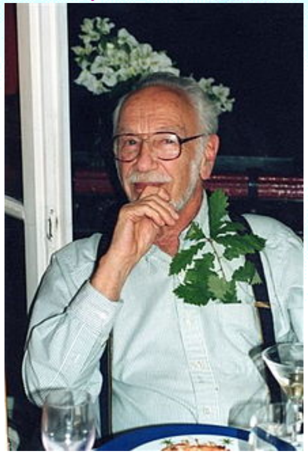
Chomp

- 若 $n \neq m$，先手方有制胜策略
  - 游戏符合**von Neumann**定理棋类游戏的条件
  - 游戏没有平局，或者先手方有制胜策略，或者后手方有制胜策略
  - 若后手方有制胜策略，则先手方有制胜策略　矛盾
    - 先手方第一步在 (n,m) 摆子，后手方按其制胜策略在(i_0, j_0)摆子，不论先手方后续如何摆子，后手方按其制胜策略均能获胜
    - 先手方第一步在 (i_0, j_0)摆子，不论后手方后续如何摆子，先手方按后手方的制胜策略均能获胜，由此得到先手方的制胜策略

后手方必胜策略　1　2　3　4　后手胜

先手方必胜策略　1　2　3　先手胜

目前尚未找到具体的制胜策略，n,m 较小时的制胜策略可通过计算机求得



David Gale

（1921- 2008）

美国数学家、经济学家

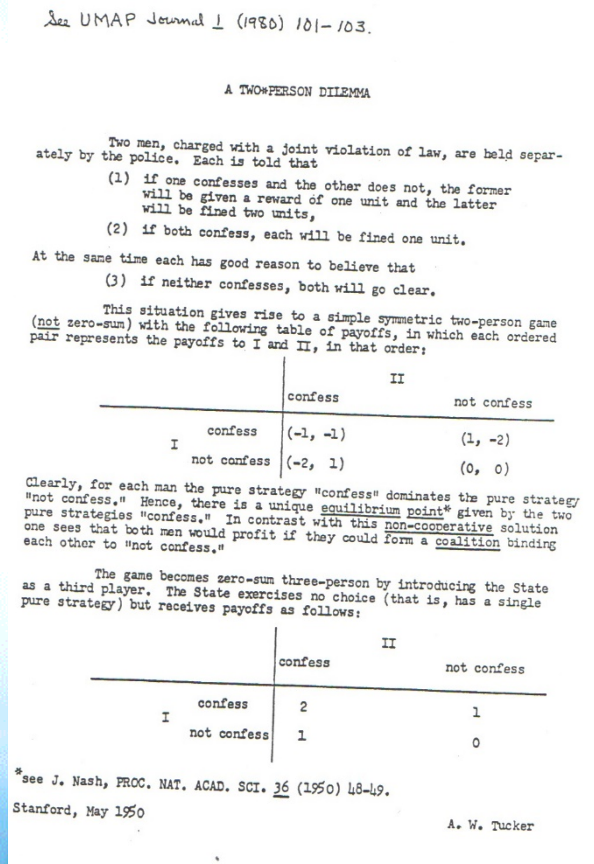
Gale D. A curious Nim-type game. *American Mathematical Monthly*, 81, 876–879, 1974

博弈的要素

- 参与者（**player**）：参与博弈的决策主体
- 策略（**strategy**）：参与者可以采取的行动方案
  - 某个参与者的策略全体组成策略集（**strategy set**）
- 局势（**outcome**）：所有参与者采取各自的行动后形成的状态
- 收益（**payoff**）：各个参与者在不同局势下获得的利益
- 规则（**rule**）：对参与者行动的先后顺序、参与者获知信息的多少等内容的具体规定

囚徒困境

- 囚徒困境（**Prisoner's Dilemma**）
  - 甲、乙两人共同犯罪，警方掌握了一部分犯罪事实，将他们带到警局分别讯问
    - 若两人均承认所有罪行，则各被判处**6**个月徒刑
    - 若一人认罪，一人不认罪，前者被轻判**1**个月徒刑，后者被重判**9**个月徒刑
    - 若两人均不认罪，则以部分罪行各被判处**2**个月徒刑



See UMAP Journal 1 (1980) 101–103.

A TWO-PERSON DILEMMA

Two men, charged with a joint violation of law, are held separately by the police. Each is told that

(1) if one confesses and the other does not, the former will be given a reward of one unit and the latter will be fined two units,

(2) if both confess, each will be fined one unit.

At the same time each has good reason to believe that

(3) if neither confesses, both will go clear.

This situation gives rise to a simple symmetric two-person game (not zero-sum) with the following table of payoffs, in which each ordered pair represents the payoffs to I and II, in that order:

		II: confess	II: not confess
I	confess	(-1, -1)	(1, -2)
	not confess	(-2, 1)	(0, 0)

Clearly, for each man the pure strategy "confess" dominates the pure strategy "not confess." Hence, there is a unique equilibrium point* given by the two pure strategies "confess." In contrast with this non-cooperative solution one sees that both men would profit if they could form a coalition binding each other to "not confess."

The game becomes zero-sum three-person by introducing the State as a third player. The State exercises no choice (that is, has a single pure strategy) but receives payoffs as follows:

		II: confess	II: not confess
I	confess	2	1
	not confess	1	0

*see J. Nash, PROC. NAT. ACAD. SCI. 36 (1950) 48-49.

Stanford, May 1950

A. W. Tucker

Tucker, A.W., A two-person dilemma, Unpublished Manuscript, 1950. Reprint, On jargon: The prisoner's dilemma. *UMAP Journal*, 1, 101, 1980.

囚徒困境

数学建模

- 参与者：甲、乙
- 策略集（甲、乙）
  - 坦白、沉默

- 局势（收益）
  - 甲坦白 –1、乙沉默 –9
  - 甲沉默 –9、乙坦白 –1
  - 甲沉默 –2、乙沉默 –2
  - 甲坦白 –6、乙坦白 –6

囚徒乙

囚徒甲	甲 \ 乙	沉默	坦白
	沉默	$(-2, -2)$	$(-9, -1)$
	坦白	$(-1, -9)$	$(-6, -6)$

当参与者只有两个时，博弈可以用简洁的表格形式表示

囚徒困境

- 占优策略
  - 不论对方选择哪种策略，本人选择坦白均优于选择沉默
- 稳定局势
  - 双方坦白是一种稳定局势
  - 双方沉默、一方坦白一方沉默均不是稳定局势

囚徒乙

囚徒甲		沉默	坦白
	沉默	$(-2, -2)$	$(-9, -1)$
	坦白	$(-1, -9)$	$(-6, -6)$

囚徒乙

囚徒甲		沉默	坦白
	沉默	$(-2, -2)$	$(-9, -1)$
	坦白	$(-1, -9)$	$(-6, -6)$

博弈分类

- 合作博弈（**cooperative game**）与非合作博弈（**non-cooperative game**）
  - 在合作博弈中，部分参与者可组成联盟（**coalition**）以获得更大收益；在非合作博弈中，参与者决策独立进行
- 静态博弈（**static game**）与动态博弈（**dynamic game**）
  - 在静态博弈中，所有参与者同时决策（或在决策时不知道其它参与者的决策）
- 完全信息（**complete information**）与不完全信息
  - 完全信息指所有参与者均掌握其它参与者的策略集、收益等信息
  - 完美信息（**perfect information**）指在动态博弈中所有参与者均掌握其它参与者之前已作的决策

运筹与统计

矩阵博弈

矩阵博弈

- 二人零和（**zero-sum**）有限博弈（完全信息静态博弈）
  - 参与者为两人：甲、乙
  - 每人的可行策略集为有限集，设甲、乙的策略集分别为$\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$和$\{Y_1,Y_2,\cdots,Y_n\}$，所有的局势形如(X_i,Y_j)
  - 对任一局势，两人收益之和为零
- 博弈可用一个矩阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 来表示，称为收益矩阵（**payoff matrix**），其中 a_{ij} 为局势 (X_i,Y_j)下甲的收益，该局势下乙的收益为 $-a_{ij}$

极小极大原则

- 若甲选择策略 X_s，不论乙如何选择，其收益至少为 $\min\limits_{1\le t\le n} a_{st}$。甲可选择策略使其达到最大，其值为
$$\max_{1\le s\le m}\min_{1\le t\le n} a_{st}$$
收益矩阵每行元素最小值中的最大值
- 若乙选择策略 Y_t，不论甲如何选择，其收益至少为 $\min\limits_{1\le s\le m}(-a_{st})$。乙可选择策略使其达到最大，其值为 $\max\limits_{1\le t\le n}\min\limits_{1\le s\le m}(-a_{st}) = -\min\limits_{1\le t\le n}\max\limits_{1\le s\le m} a_{st}$

收益矩阵每列元素最大值中的最小值

浙江大学
ZheJiang University

数学建模

鞍点

- $\max\limits_{1\le s\le m}\min\limits_{1\le t\le n} a_{st} \le \min\limits_{1\le t\le n}\max\limits_{1\le s\le m} a_{st}$
  - 设 $a_{ij}=\max\limits_{1\le s\le m}\min\limits_{1\le t\le n} a_{st}$，

    $a_{kl}=\min\limits_{1\le t\le n}\max\limits_{1\le s\le m} a_{st}$
- 若 $\max\limits_{1\le s\le m}\min\limits_{1\le t\le n} a_{st}=\min\limits_{1\le t\le n}\max\limits_{1\le s\le m} a_{st}$，则存在元素 a_{il}，它既是所在行的最小值，又是所在列的最大值，称为鞍点（**saddle point**）

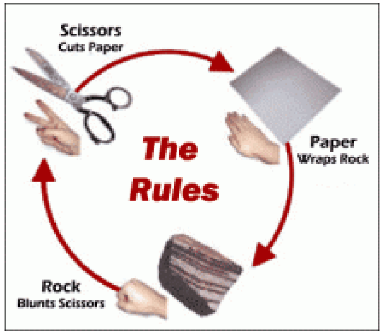
$$\left(\begin{matrix}
a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1n}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \le & a_{il} & \cdots & a_{in}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \le & \vdots & \vdots\\
a_{k1} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kl} & \cdots & a_{kn}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{ml} & \cdots & a_{mn}
\end{matrix}\right)$$

$$\boxed{\max\limits_{1\le s\le m}\min\limits_{1\le t\le n} a_{st} \qquad \min\limits_{1\le t\le n}\max\limits_{1\le s\le m} a_{st}}$$

(X_i,Y_l)是稳定局势

矩阵博弈

$$\begin{pmatrix} 4 & \boxed{0} & 2 \\ 3 & \boxed{2} & 5 \\ \boxed{-5} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} 石头 & 剪刀 & 布 \end{array} \\ \begin{array}{c} 石头 \\ 剪刀 \\ 布 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & \boxed{-1} \\ \boxed{-1} & 0 & 1 \\ 1 & \boxed{-1} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(X_2, Y_2)是稳定局势

$$\boxed{\max_{1\le s\le m}\min_{1\le t\le n} a_{st} = \min_{1\le t\le n}\max_{1\le s\le m} a_{st}}$$

稳定局势
不存在

混合策略

- 混合策略与期望收益
  - 若参与者可以以一定的概率分布选择若干个不同的策略，这样的策略称为混合策略（**mixed strategy**）；若参与者每次行动都选择某个确定的策略，这样的策略称为纯策略（**pure strategy**）
  - 甲以概率 x_i 选择策略 X_i，$i=1,\ldots,m$，其中 $x_i \ge 0$，且 $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$，该混合策略也可用 m 维列向量 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$ 表示，类似地，乙的混合策略也可用 n 维列向量 $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$ 表示
  - 甲、乙的混合策略集分别为 $\mathbf{X}=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_m)^{\mathbf{T}} \mid x_i \ge 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\right\}$ 和 $\mathbf{Y}=\left\{(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathbf{T}} \mid y_j \ge 0, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\right\}$
  - 若甲、乙采用的混合策略分别为 $\mathbf{x}\in\mathbf{X}, \mathbf{y}\in\mathbf{Y}$，甲的期望收益（**expected payoff**）为 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j a_{ij}$，乙的期望收益为 $-\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}$

极小极大定理

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- （von Neumann极小极大定理，**Minimax Theorem**）
  - 设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，则存在 $\mathbf{x}^*\in\mathbf{X},\mathbf{y}^*\in\mathbf{Y}$

$$\mathbf{x}^{*\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}^* = \max_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}\min_{\mathbf{y}\in\mathbf{Y}}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y} = \min_{\mathbf{y}\in\mathbf{Y}}\max_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}$$

When George B. Dantzig first described a linear programming problem to John von Neumann in 1947, von Neumann immediately saw that the problem of finding an optimal strategy for a player of a matrix game (zero-sum two-person game) was a linear programming problem. But since there are two players in a matrix game, von Neumann suggested that linear-programming problems came in pairs. This conjecture was proved by David Gale, Harold W. Kuhn and Albert W. Tucker in 1948

——Nering, E.D., Tucker, A.W., *Linear Programming and Related Problems*, 1993

双矩阵博弈

- 若二人博弈不是零和的，双方的收益需用两个矩阵分别表示，称这样的博弈为双矩阵博弈（**bimatrix game**）
  - 囚徒困境即为双矩阵博弈
- **1964**年，**Lemke**和**Howson**给出了求双矩阵博弈稳定局势的算法，该算法需要指数时间

从零和到双赢

(−2, −2)	(−9, −1)
(−1, −9)	(−6, −6)

$$\begin{pmatrix} -2 & -9 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$$

Lemke, C. E., Howson, J. T., Equilibrium points of bimatrix games. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 12, 413–423, 1964

运筹与统计

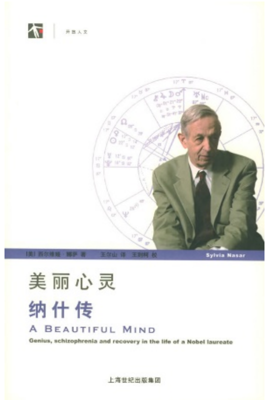
Nash均衡

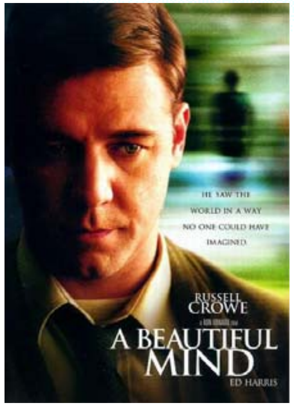
Nash均衡

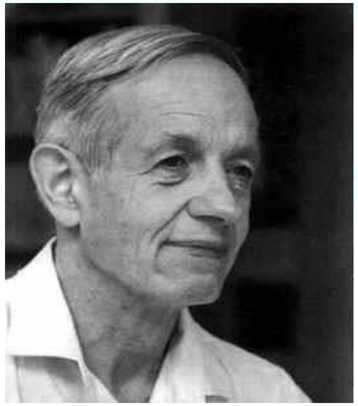
浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- Nash 均衡（Nash equilibrium）
  - （完全信息静态）博弈的某个局势，每一个理性的参与者都不会单独偏离它
  - 对每一个参与者，在其他参与者策略不变情况下，单独采取其他策略，收益不会增加







Nasar S. *A Beautiful Mind The Life of Mathematical Genius and Nobel Laureate John Nash*. Simon and Schuster, 2011

A Beautiful Mind, 2001年出品，**Ron Howard**导演，第**74**届奥斯卡最佳影片奖

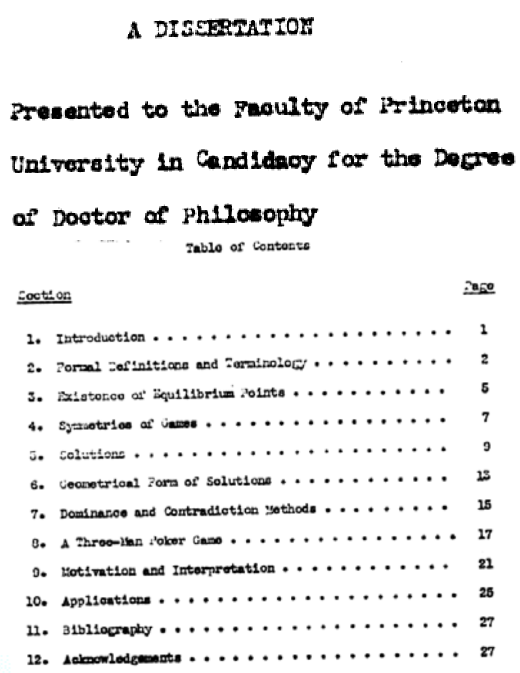
John Forbes Nash
（**1928**－**2015**）
美国数学家、经济学家
1994年**Nobel**经济学奖得主
2015年**Abel**奖得主

Nash均衡

- **Nash 定理**
  - 若参与者有限，每位参与者的策略集均有限，收益函数均为实值函数，则博弈必存在混合策略意义下的**Nash**均衡

Nash, J. F., Jr., Equilibrium points in n-person games, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36, 48–49, 1950.

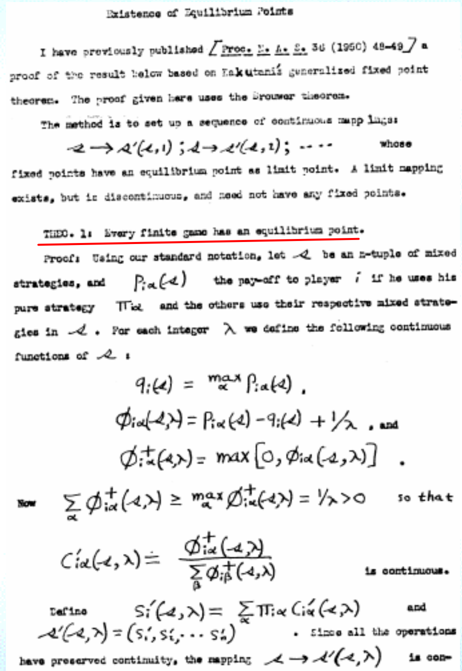
Nash, J. F., Jr., Non-Cooperative Games, *Annals of Mathematics, 54*, 286-295, 1951



A DISSERTATION

Presented to the Faculty of Princeton University in Candidacy for the Degree of Doctor of Philosophy

Table of Contents



Existence of Equilibrium Points

I have previously published [Proc. N. A. S. 36 (1950) 48–49] a proof of the result below based on Kakutani's generalized fixed point theorem. The proof given here uses the Brouwer theorem.

The method is to set up a sequence of continuous mappings: $s \to s'(s,1)$; $s \to s'(s,2)$; $\cdots$ whose fixed points have an equilibrium point as limit point. A limit mapping exists, but is discontinuous, and need not have any fixed points.

THEO. 1: Every finite game has an equilibrium point.

Proof: Using our standard notation, let s be an n-tuple of mixed strategies, and $p_{i\alpha}(s)$ the pay-off to player i if he uses his pure strategy $\pi_{i\alpha}$ and the others use their respective mixed strategies in s. For each integer λ we define the following continuous functions of s:

$$q_i(s) = \max_\alpha p_{i\alpha}(s),$$

$$\phi_{i\alpha}(s,\lambda) = p_{i\alpha}(s) - q_i(s) + 1/\lambda, \text{ and}$$

$$\phi^+_{i\alpha}(s,\lambda) = \max[0, \phi_{i\alpha}(s,\lambda)].$$

Now $\sum_\alpha \phi^+_{i\alpha}(s,\lambda) \geq \max_\alpha \phi^+_{i\alpha}(s,\lambda) = 1/\lambda > 0$ so that

$$C'_{i\alpha}(s,\lambda) = \frac{\phi^+_{i\alpha}(s,\lambda)}{\sum_\beta \phi^+_{i\beta}(s,\lambda)}$$ is continuous.

Define $s'_i(s,\lambda) = \sum_\alpha \pi_{i\alpha} C'_{i\alpha}(s,\lambda)$ and $s'(s,\lambda) = (s'_1, s'_2, \cdots s'_n)$. Since all the operations have preserved continuity, the mapping $s \to s'(s,\lambda)$ is con-

Nash, J. F., Jr., *Non-cooperative games*, Thesis, Princeton University, 1950.

不动点定理

数学建模

- （**Brouwer**）设 $C \subset \mathbb{R}^n$ 是一个非空有界闭凸集，$f: C \to C$ 连续，则存在 $x^* \in C$，使得 $f(x^*) = x^*$
- （**Kakutani**）设 $C \subset \mathbb{R}^n$ 是一个非空有界闭凸集，$P_0(C)$ 是 C 中所有非空子集的集合，集值映射 $F: C \to P_0(C)$ 满足对任意 $x \in C$，$F(x)$ 是 C 中的非空闭凸集，且 F 在 C 上上半连续，则存在 $x^* \in C$，使得 $x^* \in F(x^*)$

Luitzen Egbertus Jan Brouwer
（**1881 - 1966**）
荷兰数学家

Shizuo Kakutani
（角谷 静夫）
（**1911 - 2004**）
日本数学家

Kakutani S, A generalization of Brouwer's fixed point theorem. *Duke Mathematical Journal*, 8, 457–459, 1941.

最优反应函数

数学建模

- 设参与者 i 的策略集为 A_i，收益函数为 $u_i(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，其中 $a_i \in A_i$。用 a_{-i} 表示其他参与者的策略组合 $(a_1,\cdots,a_{i-1},a_{i+1},\cdots,a_n)$
- 最优反应函数（**best response function**）
  - $B_i(a_{-i}) = \left\{a_i^* \mid u_i(a_i^*,a_{-i}) \ge u_i(a_i,a_{-i}), \forall a_i \in A_i\right\}$
  - 给定除参与者 i 外其他参与者的策略，参与者 i 选择其最优反应函数给出的集合中的策略可获得最大收益
  - 定义 $\mathscr{B}(a) = (B_1(a_{-1}), B_2(a_{-2}), \cdots, B_n(a_{-n}))$
- 局势 $\mathbf{a}^* = \left(a_1^*, a_2^*, \cdots, a_n^*\right)$ 为**Nash** 均衡的充要条件
  - $a_i^* \in B_i(a_{-i}^*), i = 1,\cdots,n$ $\boxed{\mathbf{a}^* \in \mathscr{B}(\mathbf{a}^*)}$
  - 每位参与者的策略均是对其他参与者选择策略的一个最优反应

Nash 均衡

- 矩阵博弈的稳定局势即为 **Nash 均衡**，**Nash** 定理是极小极大定理向多人博弈和非零和博弈的推广
- **Nash** 定理仍是一个存在性证明，求（近似）**Nash** 均衡的复杂性证明与算法设计是当前算法博弈论（**Algorithmic Game Theory**）的研究热点之一

Nash went to see von Neumann a few days after he passed his generals. …… Nash started to describe the proof he had in mind for an equilibrium in games of more than two players. But before he had gotten out more than a few disjointed sentences, von Neumann interrupted, jumped ahead to the yet unstated conclusion of Nash's argument, and said abruptly, “That's trivial, you know. That's just a fixed point theorem.”

——Nasar, S., *A Beautiful Mind*

双人博弈

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- **Battle of the Sexes**

女

男		看球	逛街
	看球	(3,1)	(0, 0)
	逛街	(0, 0)	(1, 3)

- **Chicken（hawk-dove）**

乙

甲		避	冲
	避	(0,0)	(–1, 1)
	冲	(1, –1)	(–5, –5)

- **Boxed Pigs**
  - 猪圈的一端有一个食槽，另一端安装了一个按钮。按一下按钮，将有**10**个单位的猪食进入食槽
  - 按按钮需要相当于两个单位的成本，并且由于需从按钮处回到食槽，吃食的数量也将减少

小

大		按	等
	按	(5,1)	(4, 4)
	等	(9, –1)	(0,0)

Stag or Hare

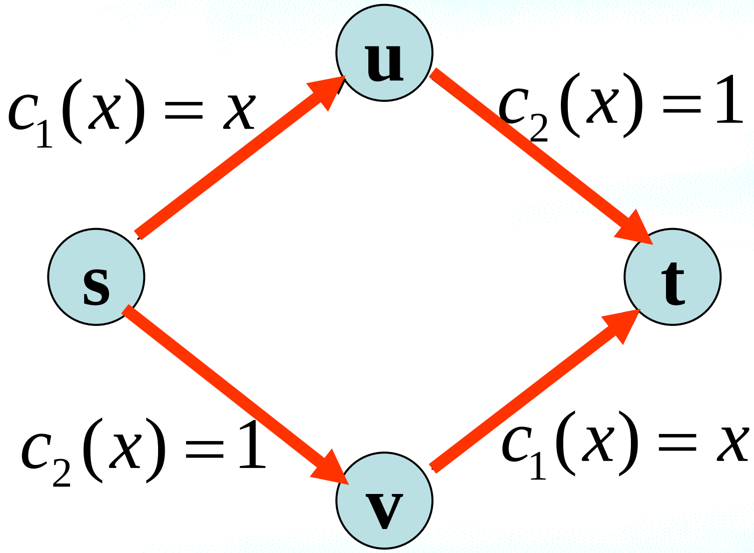
- 一群猎人相约去打猎，猎场中有鹿和兔两种动物，鹿的价值远大于兔的价值。每个猎人在打猎时只能专注于一种猎物，猎到某猎物后他即中止打猎
- 一头鹿需要所有人协力才能捕获，一只兔只要单人努力即可捕获，所有人协力获得的猎物收益由所有人平分
- 所有人捕鹿或所有人捕兔是两个**Nash**均衡

不用説遙远的将来，甚至連第二天的事情都不会想到。如果大家在捕一只鹿，每人都很知道应該忠实地守着自己的崗位。但是如果有一只兎从其中一人的眼前跑过，这个人一定会毫不迟疑地去追捕这只兎；当他捕到了兎以后，他的同伴們因此而沒有捕到他們的猎获物这件事，他会不大在意，这是无須怀疑的。

让•雅克•卢梭著：论人类不平等的起源和基础，**1755.**（李常山译，商务印书馆**1962**年版）

Braess 悖论

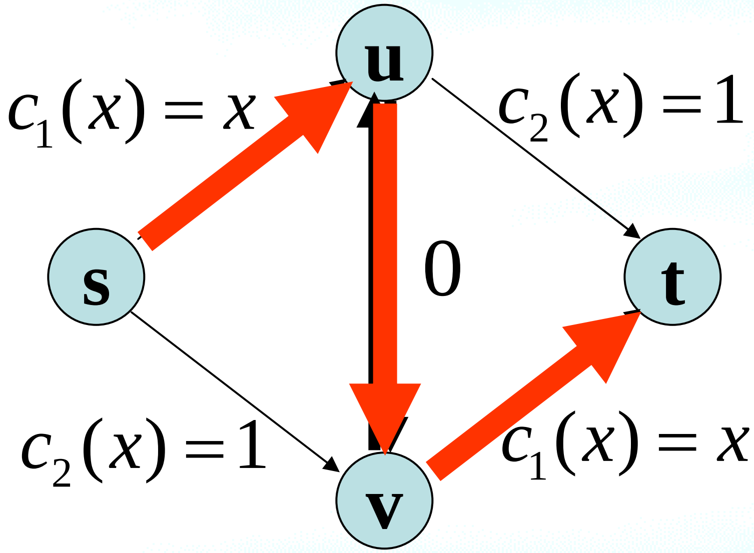
- 从 s 到 t 有s-u-t 和s-v-t两条道路，每个路段通行时间与路况有关，也与通过路段车流量有关
- 半数机动车选择 s-u-t 路，半数机动车选择s-v-t 路是一个Nash均衡，所有机动车行驶总时间为 $c_1\left(\frac{1}{2}\right)+c_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$



将车流量单位化为 [0,1] 间的数，$c(x)$表示该路段车流量为x时通过该路段需要的时间

Braess 悖论

- 新建一条从 u 到 v的双向快速通道，通行时间可忽略不计
- 所有机动车选择 s-u-v-t路为 Nash 均衡。所有机动车行驶总时间为 $2c_1(1)=2$
- Nash 均衡未必是每个参与者的最优选择，也未必是某种整体利益最优的局势



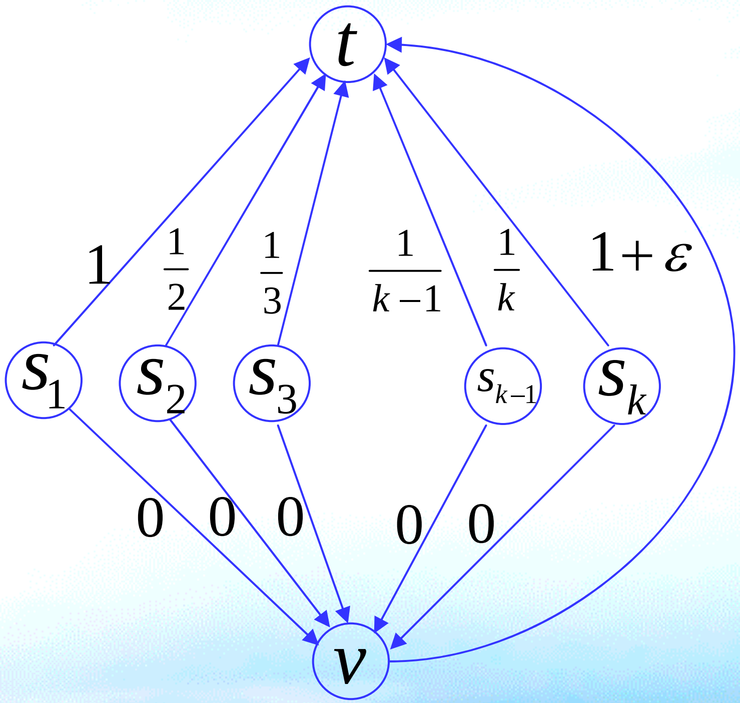
Inefficiency of Equilibria

Braess, D., Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung. *Unternehmensforschung*, 12, 258–268, 1969. （英译版） On a Paradox of Traffic Planning, *Transportation Science*, 39, 446–450, 2005.

网络设计博弈

数学建模

- 现有一由若干节点和线路组成的通讯网络，每个使用者可借此网络建立两点之间的通讯联系，为此需向网络所有者购买线路使用权
- 每条线路价格不同。若多个使用者共同使用某线路，费用由这些使用者分摊
- k 个使用者，起点分别为 s_i，$i=1,\cdots,k$，终点均为 t
- 从所有使用者整体利益来看，使用者 i 选择 s_i-v-t 是最优的，总费用是 $1+\varepsilon$
- 使用者 i 选择 s_i-t 是唯一的一个**Nash**均衡，总费用为 $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}=O(\ln k)$



浙江大学
ZheJiang University

运筹与统计

合作博弈

讨价还价

数学建模

- 讨价还价（**bargaining**）问题
  - 两人协商分配一笔总额为**1**万元的资金，约定如果达成协议，双方可以按协议取走各自应得的部分；若未达成协议，则两人分文不得，资金收归他用
- 用 (x,y) 记甲、乙讨价还价后获得的资产。讨价还价后两人资产所有可能组成的集合记为 S，谈判破裂后两人可得的资产为 $d_0=(x_0,y_0)\in S$ 。一个讨价还价问题可用 $\langle S,d_0\rangle$ 来表示
  - $S=\{(x,y)\mid x+y\le 1 \text{且} x\ge 0, y\ge 0\}$, $d_0=(0,0)$

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

讨价还价

- 讨价还价问题的解为一个函数 φ，对每个讨价还价问题 $\langle S, d_0 \rangle$，有一个唯一的 $d^* = (x^*, y^*) \in S$ 与之对应
  - 至少存在一 $(\bar{x}, \bar{y}) \in S$，使得 $\bar{x} > x_0$ 且 $\bar{y} > y_0$
  - S 为有界闭凸集
- **Nash**应用公理化思想，首次给出了讨价还价问题的一种解

THE BARGAINING PROBLEM[1]

BY JOHN F. NASH, JR.

A new treatment is presented of a classical economic problem, one which occurs in many forms, as bargaining, bilateral monopoly, etc. It may also be regarded as a nonzero-sum two-person game. In this treatment a few general assumptions are made concerning the behavior of a single individual and of a group of two individuals in certain economic environments. From these, the solution (in the sense of this paper) of the classical problem may be obtained. In the terms of game theory, values are found for the game.

INTRODUCTION

A TWO-PERSON bargaining situation involves two individuals who have the opportunity to collaborate for mutual benefit in more than one way. In the simpler case, which is the one considered in this paper, no action taken by one of the individuals without the consent of the other can affect the well-being of the other one.

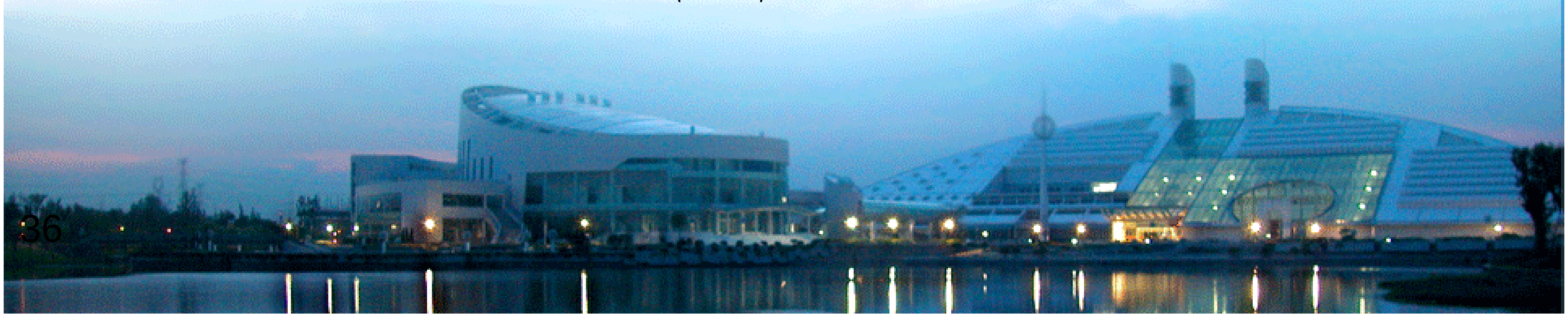
The economic situations of monopoly versus monopsony, of state trading between two nations, and of negotiation between employer and labor union may be regarded as bargaining problems. It is the purpose of this paper to give a theoretical discussion of this problem and to obtain a definite "solution"—making, of course, certain idealizations in order to do so. A "solution" here means a determination of the amount of satisfaction each individual should expect to get from the situation, or, rather, a determination of how much it should be worth to each of these individuals to have this opportunity to bargain.

Nash, J. F., Jr., The Bargaining Problem. *Econometrica*, 18, 155–162, 1950.

公理与定理

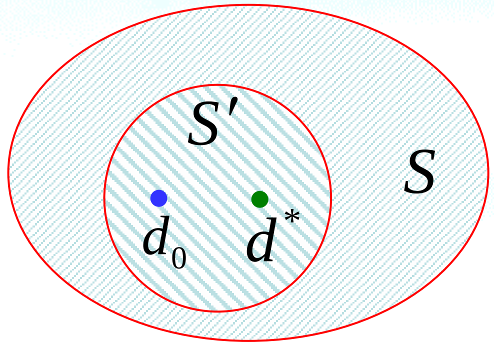
数学建模

- 设有讨价还价问题 $\langle S, d_0 \rangle$，其解为 $d^* = (x^*, y^*)$
  - 公理 I（**Pareto有效性**）若 $d' = (x', y')$ 满足 $x' \geq x^*$，$y' \geq y^*$，且 $d' \neq d^*$，则 $d' \notin S$
  - 公理 II（对称性）若 $x_0 = y_0$ 且集合 S 是对称的，即若 $(x, y) \in S$，必有 $(y, x) \in S$，则 $x^* = y^*$
  - 公理III（仿射不变性）设 $\alpha_i > 0, \beta_i, i = 1, 2$ 为实数，记 $\tilde{S} = \{(\alpha_1 x + \beta_1, \alpha_2 y + \beta_2) \mid (x, y) \in S\}$，$\tilde{d}_0 = (\alpha_1 x_0 + \beta_1, \alpha_2 y_0 + \beta_2)$ 则讨价还价问题 $\langle \tilde{S}, \tilde{d}_0 \rangle$ 的解 $d^* = (\alpha_1 x^* + \beta_1, \alpha_2 y^* + \beta_2)$



公理与定理

- 公理Ⅳ （无关选择独立性）设 $\langle S,d_0\rangle$，$\langle S',d_0\rangle$ 为两讨价还价问题且 $S'\subset S$，若 $\langle S,d_0\rangle$ 的解 $d^*\in S'$，则 $\langle S',d_0\rangle$ 的解也是 d^*



- 讨价还价问题 $\langle S,d_0\rangle$ 满足公理Ⅰ－Ⅳ的解是唯一的，即为非线性规划（**NLP**）的最优解

$$
\begin{aligned}
& \max && (x-x_0)(y-y_0) \\
(\text{NLP})\ & s.t. && (x,y)\in S, \\
& && x\ge x_0
\end{aligned}
$$

存在唯一性

- $S\cap\{(x,y)\,|\,x\ge x_0\}$为有界闭集，二元连续函数$(x-x_0)(y-y_0)$最大值存在
- 若存在两个最优解$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$
  - $(x_1-x_0)(y_1-y_0)=(x_2-x_0)(y_2-y_0)$

    $\ge(\bar{x}-x_0)(\bar{y}-y_0)>0$

  $\Rightarrow x_1\ne x_0\Rightarrow x_1>x_0\qquad\Rightarrow x_1\ne x_2$
  - 不妨设$x_1<x_2$，则$y_1>y_2$，$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)\in S$ 凸性

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}-x_0\right)\left(\frac{y_1+y_2}{2}-y_0\right)=(x_1-x_0)(y_1-y_0)+\frac{1}{4}(y_2-y_1)(x_1-x_2)$$

$$>(x_1-x_0)(y_1-y_0)$$

矛盾

$$\begin{array}{ll}\max & (x-x_0)(y-y_0)\\ s.t. & (x,y)\in S,\\ & x\ge x_0\end{array}$$

S为有界闭凸集，且存在$(\bar{x},\bar{y})\in S$，$\bar{x}>x_0$，$\bar{y}>y_0$

证明满足公理

数学建模

- 若另有$(x',y')\neq(x^*,y^*)$满足$x'\geq x^*, y'\geq y^*$
  $(x'-x_0)(y'-y_0)>(x^*-x_0)(y^*-y_0)$
- 若$x_0=y_0$，则$y^*>y_0=x_0$，(y^*,x^*)也是最优解
- $(\alpha_1 x+\beta_1-(\alpha_1 x_0+\beta_1))(\alpha_2 y+\beta_2-(\alpha_2 y_0+\beta_2))$
  $=\alpha_1\alpha_2(x-x_0)(y-y_0)$
- 若**(NLP1)**的可行域包含在**(NLP2)**的可行域中，且**(NLP2)**的最优解是**(NLP1)**的可行解，则它也是**(NLP1)**的最优解

$$
\begin{array}{ll}
\max & (x-x_0)(y-y_0) \\
s.t. & (x,y)\in S, \\
 & x\geq x_0
\end{array}
$$

S 为有界闭凸集，且存在$(\bar{x},\bar{y})\in S$，$\bar{x}>x_0$，$\bar{y}>y_0$

(x^*,y^*)是唯一的最优解，且 $x^*>x_0, y^*>y_0$

最优解的性质

- 对任意的 $(x,y)\in S$，$\dfrac{x-x^*}{x^*-x_0}\le\dfrac{y^*-y}{y^*-y_0}$
  - 若存在 $(x',y')\in S$，$\dfrac{x'-x^*}{x^*-x_0}>\dfrac{y^*-y'}{y^*-y_0}$

$$(x'',y'')=\varepsilon(x',y')+(1-\varepsilon)(x^*,y^*)$$ 凸性

$$=(x^*+\varepsilon(x'-x^*),y^*+\varepsilon(y'-y^*))\in S$$

$$x''=x^*+\varepsilon(x'-x^*)\ge x_0$$

$$(x''-x_0)(y''-y_0)-(x^*-x_0)(y^*-y_0)$$

$$=\varepsilon\left((x^*-x_0)(y^*-y_0)\left(\frac{y'-y^*}{y^*-y_0}+\frac{x'-x^*}{x^*-x_0}\right)+\varepsilon(x'-x^*)(y'-y^*)\right)>0$$ 有界

矛盾

$$\begin{aligned}\max\quad & (x-x_0)(y-y_0)\\ s.t.\quad & (x,y)\in S,\\ & x\ge x_0\end{aligned}$$

S 为有界闭凸集，且存在 $(\bar{x},\bar{y})\in S$，$\bar{x}>x_0$，$\bar{y}>y_0$

(x^*,y^*) 是唯一的最优解，且 $x^*>x_0, y^*>y_0$

最优解的性质

- 令 $\mathscr{D}=\left\{(x,y)\,|\,\dfrac{x-x^*}{x^*-x_0}\le\dfrac{y^*-y}{y^*-y_0}\right\}=\left\{(x,y)\,|\,\dfrac{x-x_0}{x^*-x_0}+\dfrac{y-y_0}{y^*-y_0}\le 2\right\}$
  - 作仿射变换 $u(x)=\dfrac{x-x_0}{x^*-x_0},v(y)=\dfrac{y-y_0}{y^*-y_0}$

$\widetilde{\mathscr{D}}=\{(u,v)\,|\,u+v\le 2\}$

$$\langle S,d_0\rangle \xrightarrow[\text{公理IV}]{S\subseteq\mathscr{D}} \langle \mathscr{D},d_0\rangle \xrightarrow[\text{公理III}]{} \langle \widetilde{\mathscr{D}},(0,0)\rangle$$

$\xrightarrow[\text{公理 II}]{}$ 解在直线 $u=v$上

$\xrightarrow[\text{公理 I}]{}$ 解为 $(u,v)=(1,1)$ $\longrightarrow$ 解为 (x^*,y^*)

S 为有界闭凸集，且存在 $(x,y)\in S$，$x>x_0$，$y>y_0$

(x^*,y^*)是唯一的最优解，且 $x^*>x_0,y^*>y_0$

对任意的 $(x,y)\in S$，
$$\frac{x-x^*}{x^*-x_0}\le\frac{y^*-y}{y^*-y_0}$$

浙江大学
ZheJiang University

谢 谢