浙江大学20_13_－20_14学年_秋冬_学期

《 高等代数Ⅰ 》课程期末考试试卷

课程号：__061B0040__，开课学院：__数学系__

考试试卷：A卷√、B卷（请在选定项上打√）

考试形式：闭√、开卷（请在选定项上打√），允许带___________入场

考试日期：_2014_年_1_月_14_日,考试时间：_120_分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

考生姓名：______________学号：______________所属院系：_____________

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得分									
评卷人									

注：解答过程均需要有合理、详细的理由.

1. （本题10分）求4 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_1 & a & b_3 & b_4 \\ b_1 & b_2 & a & b_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & a \end{vmatrix}$（其中 $a \neq b_i$, $i=1,2,3,4.$）的值.

2. （本题10分）求2阶方阵 X 使得 $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. （本题20分）已知矩阵组 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$，试求出该矩阵组的秩及一个极大线性无关组,并用该极大线性无关组线性表示组中的其余矩阵.

4. （本题15分）试求正交替换化实二次型 $X^T \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X$ 为标准形.

5. （本题 10 分）设$\mathbb{R}$ 为实数域, 求 $\mathcal{A} \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ 使得 $\mathcal{A}(e_1) = \mathcal{A}(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$\mathcal{A}(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, 这里 e_1, e_2, e_3 是 $\mathbb{R}^3$ 的常用基.

6. （本题 15 分）设 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的 n 维线性空间, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 中的一个基, 若 $\mathcal{A} \in End_{\mathbb{R}}(V)$ 满足

$$\left(\mathcal{A}(\alpha_1), \mathcal{A}(\alpha_2), \cdots, \mathcal{A}(\alpha_n)\right) = \left(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\right) \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix},$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为实数,

1) 试求 $\mathcal{A}$ 的所有两两互异的特征值.

2) 结论“$\mathcal{A}$ 在 V 中的任何一个基下的矩阵都不是对角阵的充分必要条件是 $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$”是否成立.

7. （本题 10 分）设 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的 n 维线性空间, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 中的一个基, $\theta \in (0, \pi)$ 满足 $|\cos\theta| < \dfrac{1}{n-1}$, 问是否存在一个定义在 V 上的内积函数使得 V 关于该内积成为欧氏空间, 同时 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为单位向量且两两夹角均为 θ.

8. （本题 10 分）若 A, B 为元素取自于同一数域上的 n 阶方阵, 矩阵序列如下构造

$$\begin{cases} A_0 = A, \\ A_{i+1} = A_i B - B A_i, \qquad i = 0, 1, \cdots. \end{cases}$$

如果 $A_{n^2} = B$, 试证明 $B=O$.

浙江大学2010－2011学年 秋冬 学期

《 高等代数 I 》课程期末考试试卷

课程号： 061B0040 ，开课学院： 理学院

考试试卷：A卷√、B卷（请在选定项上打√）

考试形式：闭√、开卷（请在选定项上打√），允许带＿＿＿＿＿＿入场

考试日期： 2011 年 1 月 13 日,考试时间： 120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

请注意：所有题目必须做在答题本上！

做在试卷纸上的一律无效！

请勿将答题本拆开或撕页！如发生此情况责任自负！

考生姓名：＿＿＿＿＿＿＿学号：＿＿＿＿＿＿＿所属院系：＿＿＿＿＿＿＿

(本试卷满分 100 分)

1．（15分）设向量组$\alpha_1=(1\quad 2\quad -2)^T,\alpha_2=(2\quad 3\quad 1)^T,\alpha_3=(-1\quad 2\quad a)^T$，向量$\beta=(2\quad 1\quad b)^T$。试求

（1）a,b取何值时，向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示？

（2）a,b取何值时，向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示且表示法唯一？并将$\beta$写成$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性组合。

2．（10分）设A是一个n阶实矩阵。试证明：A是某个欧氏空间的度量矩阵当且仅当A是正定的。

3．（10分）设A是一个n阶可逆反对称实矩阵，α是一个n元实列向量，b是一个实数。试证明

（1）$\alpha^T A\alpha=0$；

（2）$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{pmatrix}$可逆当且仅当$b\neq 0$。

4．（10分）设$a_1a_2\cdots a_n\neq 0$，试证明：

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2+a_2 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & \cdots & n-1+a_{n-1} & n-1 \\ n & n & \cdots & n & n+a_n \end{vmatrix} = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{a_i}\right)。$$

5．（10 分）设 A 是一个幂零矩阵（即存在正整数 m 使得 $A^m = O$），试证明：如果 A 可对角化，则 $A = O$。

6．（10 分）设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是一个实随机矩阵（即对于任意的 $1 \le i, j \le n$，有 $a_{ij} \ge 0$ 且 $\sum_{t=1}^{n} a_{it} = 1$），试证明：

（1）若 λ_0 是 A 的一个实特征值，则 $-1 \le \lambda_0 \le 1$；

（2）$\lambda = 1$ 是 A 的一个特征值。

7．（10 分）设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{pmatrix}$。

（1）试证明：齐次线性方程组 $A^T AX = 0$ 与 $AX = 0$ 同解；

（2）试问 a 为何值时齐次线性方程组 $A^T AX = 0$ 有唯一解、有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。

8．（10 分）设 V 是一个 n 维线性空间，σ 是 V 上的一个线性变换。如果存在向量 $\alpha \in V$ 使得 $\sigma^{n-1}(\alpha) \ne \theta$（$V$ 中的零向量）且 $\sigma^n(\alpha) = \theta$，试证明：

（1）$\alpha, \sigma(\alpha), \sigma^2(\alpha), \ldots, \sigma^{n-1}(\alpha)$ 是 V 的一组基；

（2）试求 σ 在基 $\alpha, \sigma(\alpha), \sigma^2(\alpha), \ldots, \sigma^{n-1}(\alpha)$ 下的矩阵。

9．（15 分）设 $\alpha = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)^T, A = \alpha\alpha^T$。

（1）试证明：A 的秩 $= 1$；

（2）试证明：α 是 A 的一个特征向量；

（3）试求一个正交矩阵 Q 和一个对角阵 Λ 使得 $Q^{-1}AQ = \Lambda$。