插值理论

luojunxun

2023 年 3 月 14 日

summary: 本章讨论的是如果有 n 个点 $(x_i, f(x_i)); (i = 0, 1, \cdots, n)$, 如何找到一个函数 $\phi(x)$ 去拟合函数 $f(x)$, 精确的穿过这 n 个点

$f(x)$称为被插值函数,$\phi(x)$称为插值函数,x_i称为插值节点

$\phi(x_i) = f(x_i)$称为插值条件,$[a, b]$称为插值区间,$R(x) = f(x) - \phi(x)$称为插值余项 [?]

多项式插值

(Lagrange 插值多项式):$\phi(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x)$

若 n 次多项式 $l_j(x); (j = 0, 1, 2 \cdots, n)$ 在 n+1 个节点 $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ 上满足:

$l_k(x_j) = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}, (j, k = 0, 1, \ldots, n)$ 则称这 n+1 个 n 次多项式为节点 $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ 上的 n 次插值基函数.

lagrange:$l_k(x) = \prod\limits_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}$

由此可得:$L_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$ 称为 lagrange 插值函数

Lagrange 插值多项式性质和误差估计: 1.$L_n(x)$ 还可以写为 $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}$

其中 $\omega_{n+1} = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$

$\omega'_{n+1}(x_k) = (x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)$

$2.R(x)=f(x)-\phi(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x);\xi\in[a,b]$

3. 次数小于 n 的多项式用 n 次多项式去做插值得到的插值函数就是原函数, 从而没有误差;

特别的, 令 $y\equiv 1$, 从而有 : $1\equiv\sum\limits_{k=1}^{n}l_k(x)$

Lagrange 插值的弊端就是, 根据上述 n+1 个点能都计算出所有的插值基函数, 但是如果突然新增一个点, 所有的插值基函数都要重新进计算一次. 因此我们引入 Newton 插值, 他的优点就是每次新增一个新点时只需要在末尾增加一项即可, 具有" 继承" 的特性

Lemma 均差: $f[x_i]=f(x_i)$**称为** $f(x)$ **在**x_i**上的零阶均差**

$f\left[x_i,x_{i+1}\right]=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}$**称为 f(x) 在**$x_i,x_{i+1}$**上的一阶均差**

$f\left[x_i,x_j\right]=\frac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j-x_i}$**称为 f(x) 在**$x_i,x_j$**上的一阶均差**

$f\left[x_i,x_j,x_k\right]=\frac{f[x_j,x_k]-f[x_i,x_j]}{x_k-x_i}$**称为 f(x) 在**$x_i,x_j,x_k$**上的二阶均差**

$f\left[x_0,x_1,\cdots x_k\right]=\frac{f[x_1,\cdots,x_k]-f[x_0,\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}$**k 阶均差**

$f\left[x_0,x_1,\cdots,x_k\right]=\sum_{i=0}^{k}\frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_k)}$**为 f(x) 的 k 阶均差 (差商)**

[?]

(Newton 插值多项式):

$$N(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+c_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$\mathrm{N_n(x)=f\left(x_0\right)+f\left[x_0,x_1\right]\left(x-x_0\right)+f\left[x_0,x_1,x_2\right]\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)+\cdots+}$$
$$\mathrm{f\left[x_0,x_1,\cdots,x_n\right]\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\cdots\left(x-x_{n-1}\right)}$$

Newton 插值多项式性质和误差估计:

$1.R_n(x)=f(x)-P_n(x)=f\left[x_0,x_1,\cdots,x_n,x\right]\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\cdots\left(x-x_{n-1}\right)\left(x-x_n\right)$

2. 差商具有线性性若 $f(x)=a\varphi(x)+b\psi(x)$, 则

$$f\left[x_0,x_1,\cdots,x_k\right]=a\varphi\left[x_0,x_1,\cdots,x_k\right]+b\psi\left[x_0,x_1,\cdots,x_k\right]$$

3. 由于插值多项式唯一, 比较与拉格朗日的最高次项系数就

有:$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\omega'_{n+1}(x_i)}$

4. 差商对称性 $f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = f[x_{i_0}, x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}]$