1. $x=(x_1,x_2\dots x_n)$ $y=(y_1,y_2\cdots y_n)$ $z=(z_1,z_2\cdots z_n)$

(1). $|x-y|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\geq 0$

当 $x_i=y_i$, $i=1,2\dots n$ 时 成立 $|x-y|=0$. 此时 $y=x$

(2) $|x-y|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}=|y-x|$

(3) $|x-z|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}[(x_i-y_i)+(y_i-z_i)]^2}$

令 $x_i-y_i=a_i$ $y_i-z_i=b_i$

有 $\sum(a_i+b_i)^2=\sum a_i^2+\sum b_i^2+2\sum a_ib_i\leq\sum a_i^2+\sum b_i^2+2\sqrt{\sum a_i^2\sum b_i^2}$ (柯西不等式)

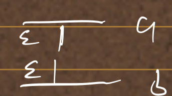
$=(\sqrt{\sum a_i^2}+\sqrt{\sum b_i^2})^2$

i.e. $\sqrt{\sum(a_i+b_i)^2}\leq\sqrt{\sum a_i^2}+\sqrt{\sum b_i^2}$ 当且仅当 $a_i=b_i$ 取"="

即有 $|x-z|\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2}=|x-y|+|y-z|$.

2. 只需证明 $\{x_k\}$ 的每个分量的收敛极限只唯一的 (记为 y_n).

反设 $\lim_{n\to\infty}y_n=a\neq\lim_{n\to\infty}y_n=b$. (不妨设 $a>b$)



即 $\forall\varepsilon>0\ \exists N>0\ \forall n>N$ $|y_n-a|<\varepsilon$ $|y_n-b|<\varepsilon$ 取 $\varepsilon=\frac{a-b}{2}$

则 $\forall n>N$ $\frac{b-a}{2}<y_n-a$ 即 $y_n>\frac{a+b}{2}$. $y_n-b<\frac{a-b}{2}$ 即 $y_n<\frac{a+b}{2}$

即 $\frac{a+b}{2}<y_n<\frac{a+b}{2}$ $\to\leftarrow$! 故 $a=b$.

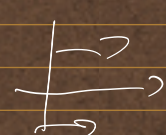
从而 $\{x_k\}$ 的极限唯一

3. 设 $\lim_{k\to\infty}x_k=m$ $\lim_{k\to\infty}y_k=n$. 即 $\forall\varepsilon>0\ \exists K>0\ \forall k>K$. $|x_k-m|<\frac{\varepsilon}{\alpha}$
$|y_k-n|<\frac{\varepsilon}{\beta}$

此时 $|\alpha x_k+\beta y_k-\alpha m-\beta n|<|\alpha(m+\frac{\varepsilon}{\alpha})+\beta(n+\frac{\varepsilon}{\beta})-\alpha m-\beta n|=2\varepsilon$

故 $\lim_{k\to\infty}(\alpha x_k+\beta y_k)=\alpha\lim_{k\to\infty}x_k+\beta\lim_{k\to\infty}y_k$.

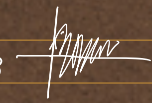
4. (1) $S^0=\{(x,y)\mid x>0,y\neq0\}$ $\partial S=\{(x,y)\mid x>0\wedge y=0$ 或 $x=0\wedge y\neq0\}$



$S'=\{(x,y)\mid x\geq0\}$

(2) $S^\circ=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1\}$ $\partial S=\{(x,y)\mid x^2+y^2=0 或 1\}$

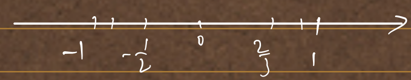
$S'=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$

(3) $S^\circ=\{(x,y)\mid 0<x<1, |y|<\sin\frac{1}{x}\}$ $\partial S=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ y=\sin\frac{1}{x},\ y=0\}$ 

$S'=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ |y|\le\sin\frac{1}{x}\}$

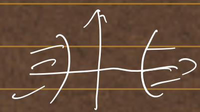
5. (1) $S=\{(-1)^k\frac{k}{k+1}\mid k=1,2,\dots\}=\{(-1)^k(1-\frac{1}{k+1})\mid k=1,2,\dots\}=\{1-\frac{1}{k+1}\mid k=2n\}\cup\{-1+\frac{1}{k+1}\mid k=2n+1\}$

$S'=\{1,-1\}$



(2) $S=\{(\cos\frac{2k}{5}\pi,\ \sin\frac{2k}{5}\pi)\mid k=1,2,\dots\}$

$S'=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$

(3) $S'=\{(x,y)\mid y^2-x^2+1\le 0\}$ 

6. 充分性.

$\lim_{k\to\infty}x_k=x \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists K>0\ \forall k>K,\ |x_k-x|<\varepsilon$.

又 $x_k\in S$. 故 $O(x,\varepsilon)$ 内有无穷多个 S 内的点. 即 x 是点集 S 的聚点.

必要性

x 是点集 S 的聚点, 则 $\forall\delta>0\ \exists x_i\in O(x,\delta)$ $i=1,2,\dots$

由于 δ 是任意小的.

对 δ_1 取 $x_1\in O(x,\delta_1)$, 再令 $\delta_2<\delta_1$ 取 $x_2\in O(x,\delta_2)$. 依次下去. 得到一个闭区域套 $O(x,\delta_1)\subset O(x,\delta_2)\subset\cdots\subset O(x,\delta_n)\subset\cdots$ 且 $\exists!\ x\in\bigcap_{i=1}^{\infty}O(x,\delta_i)$

即 $\lim_{k\to\infty}x_k=x$. #

7. 开集中的每个点都是内点, 所以一定是聚点.

闭集中的点有可能是孤立点. 孤立点不是聚点.

8. 对每一个内点 x_0 $\exists\delta$ s.t. $\forall x\in O(x_0,\delta)$. $x\in S$. 则 $\forall x'\in S$, $\exists\delta$ s.t. $\forall x\in O(x',\delta)$. $x\in S$. 由开集定义. S 是开集.

9. 当 S 无孤立点时.

$\bar{S}^c = S^c$. 而 $S' = \{x_n \mid \forall \delta > 0\ O(x_n, \delta) \cap S \neq \emptyset\}$ （任意的 δ 保证 x 的邻域取到∞）

故 $S'^c = \{x_n \mid \exists \delta_0 > 0\ O(x_n, \delta) \cap S = \emptyset\}$

即 $\forall x_0 \in S'^c$, $\exists \delta_0 > 0$ s.t. $\forall x \in (x_0, \delta)$. $x \in S'^c$ $(\delta_0 < \delta)$.

即 S'^c 是开集. 故 S' 是闭集.

显然 $A \cup \{x_0\}$ 是闭集. 若 A 是闭集.

故 $\bar{S} = S \cup S'$ 是闭集.

10. $E \setminus F = E \cap F^c$ F^c 是开集. 有限开集的交是开集. 故 $E \setminus F$ 是开集

$F \setminus E = F \cap E^c$. E^c 是闭集. 有限闭集的交是闭集. 故 $F \setminus E$ 是闭集.

11. 反设 $\exists \{a \neq b\} \in \bigcap_{k=1}^{\infty} S_k$. 与极限的唯一性矛盾. 故 $a = b$.

12. $x_n = \ln n$ $\lim_{n \to \infty} (x_{n+1} - x_n) = \lim_{n \to \infty} \ln \frac{n+1}{n} = 0$. 但 $\lim_{n \to \infty} \ln n \to +\infty$. 不收敛.

13. E, F 是紧集. 则对任一开覆盖都有有限子开覆盖包含 E, F. 取两子开覆盖的并即覆盖 $E \cap F$ 和 $E \cup F$.

14. 设 $\{U_\alpha\}$ 是该点集的一个开覆盖. 则 $\exists x_0 \in \bigcup_\alpha U_\alpha \mid \{0\} \cup \{\frac{1}{k}\}\ k = 1, 2, \cdots\}$.

取 $\{U_\alpha\} \mid \{x\}$. 即为一子开开覆盖包含 $\{0\} \cup \{\frac{1}{k}\}$ $k = 1, 2, \cdots\}$.

15. 设子列一点有收敛子列 $\{x_k\}$. $\lim_{k \to \infty} x_k = x$.

则 $\forall \varepsilon > 0$ $\exists K > 0$ $\forall k > K$ $|x_k - x| < \varepsilon$. i.e. $\exists$ 无穷多 x_n s.t. $x_n \in O(x, \varepsilon)$.

由定义. x 是其聚点.