

1. 设  $\{X_n; n \geq 0\}$  是时齐的 **Markov** 链, 状态空间  $I = \{1, 2, 3\}$ ,

$X_0 = 1$ , 一步转移矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

计算  $P(X_3 = 2 \mid \tau_3 > 3)$ .

8. 设  $\{X_n\}$  是一时齐马尔可夫链, 状态空间为  $\{0, 1, 2\}$ , 一步转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

设  $P(X_0=0) = P(X_0=1) = P(X_0=2) = \frac{1}{3}$ .

- (1) 计算  $P(X_2=0 | X_0=0)$  和  $P(X_0=0 | X_2=0)$ ;
- (2) 计算  $P(X_1=0)$  和  $P(X_1=0, X_3=0, X_4=1, X_6=1)$ ;
- (3) 计算  $f_{11}^{(n)}$ ,  $f_{11}$  和  $\mu_1$ .

这里  $f_{11}^{(n)} = P(\tau_1 = n | X_0 = 1)$ ,  $f_{11} = P(\tau_1 < \infty | X_0 = 1)$ ,

$\mu_1 = E(\tau_1 | X_0 = 1)$ ,

其中  $\tau_1 = \min\{n \geq 1 : X_n = 1\}$  为状态1的首中时.

10. 设  $\{X_n\}$  是一时齐马尔可夫链, 状态空间为  $\{0, 1, 2, 3\}$ , 一步转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

设  $P(X_0=0) = P(X_0=1) = P(X_0=3) = \frac{1}{3}$ .

(1) 计算  $P(X_1=1, X_3=2)$ ,  $P(X_2=1)$  和  $P(X_{10}=0)$ ;

(2) 求出各状态的常返性, 并计算正常返态的平均回转时.