习题5.4.

2. 任取 $\alpha.\beta\in U$. $(f(\alpha).f(\beta))=(\alpha.\beta)$. 且 $f(\alpha).f(\beta)\in V$

那么 $(g(f(\alpha)),g(f(\beta)))=(f(\alpha).f(\beta))=(\alpha.\beta)$.

即 $(gf(\alpha).gf(\beta))=(\alpha.\beta)$. 即 gf 是正交映射.

$b_{11}\cdots b_{1n}$

4. $\Rightarrow$. $\exists\mathcal{A}$. s.t. $\mathcal{A}\alpha_i=\beta_i$.

那么 $(\beta_i.\beta_j)=(\mathcal{A}\alpha_i,\mathcal{A}\alpha_j)=(\alpha_i.\alpha_j)$

$\Leftarrow$ 若 $(\alpha_i,\alpha_j)=(\beta_i.\beta_j)$.

取 $\alpha_1\cdots\alpha_m$ 的一组线大线性无关组.不妨记为 $\alpha_1\cdots\alpha_r$. 并正交单位化.得 $\gamma_1.\gamma_2\cdots\gamma_r$.

$\gamma_k=\sum_{i=1}^{r}l_{ki}\alpha_i$ 那么有 $\{\gamma_k\}$ 是标准正交基. 令 $\tau_k=\sum_{i=1}^{r}l_{ki}\beta_i$

$(\tau_m,\tau_n)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}l_{mi}l_{nj}(\beta_i.\beta_j)=\sum_{i=1}^{r}l_{mi}l_{ni}(\beta_i.\beta_j)=\sum_{i=1}^{r}l_{mi}l_{ni}(\alpha_i.\alpha_j)=(\gamma_m.\gamma_n)$

故 $\{\tau_k\}$ 也是标准正交基. 将 $\gamma_1\cdots\gamma_r$ 扩充为 V 的一组基 $\gamma_1\cdots\gamma_r.\gamma_{r+1}\cdots\gamma_n$.

$\tau_1\cdots\tau_r$ 扩充成 V 的一组基 $\tau_1\cdots\tau_r,\tau_{r+1},\cdots\tau_n$. 则 $\exists\mathcal{A}$. $\mathcal{A}(\gamma_1\cdots\gamma_n)=(\tau_1\cdots\tau_r)A$.

故有 $\mathcal{A}\alpha_i=\beta_i$

5. G 是度量矩阵. 先取 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 是 f 的特征向量组. $(\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n)X_1,\cdots(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)X_n$.

(其中 $X_1\cdots X_n$ 是 A 的特征向量) 记为 $\beta_1\cdots\beta_n$

$f(\beta_1\cdots\beta_n)=(f(\beta_1)\cdots f(\beta_n))=(\beta_1\cdots\beta_n)\cdot diag(\overbrace{1\cdots1}^{r个}\ \overbrace{-1\cdots-1}^{n-r个})$.

故 $A=\begin{pmatrix}E_r & \\ & -E_{n-r}\end{pmatrix}$. 故 $A^TGA=G$.

再任取一组基. $(\gamma_1\cdots\gamma_n)$. 则 $\exists P$ 可逆. s.t. $(\gamma_1\cdots\gamma_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)P$.

故 f 在 $\gamma_1\cdots\gamma_n$ 下矩阵为 $P^{-1}AP$

$(P^{-1}AP)^TG(P^{-1}AP)=P^TA^T(P^{-1})^TGP^{-1}AP=A^2\cdot(P\cdot P^{-1})^TG(P^{-1}P)=G$.

故任取 V 的一组基. 有 $A^TGA=G$.

6. 设$\mathcal{A}$是正交变换 α是$\mathcal{A}$的特征向量

$(\alpha,\alpha)=(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\alpha)=(\lambda\alpha,\lambda\alpha)=\lambda^2(\alpha,\alpha)$.

$\Rightarrow \lambda^2=1$. 故 $\lambda=\pm 1$.

故正交变换的特征值模为 1.

习题 5.5.

1. $\mathcal{A}\alpha=\alpha-2(\alpha,\eta)\cdot\eta$ 令 $W=L(\eta)$. 有唯一分解 $\alpha=\beta+\gamma$. $\beta\in W$ $\gamma\in W^{\perp}$.

$\mathcal{A}\alpha=\mathcal{A}(\beta+\gamma)=\beta-2(\beta,\eta)\cdot\eta+\gamma-2(\gamma,\eta)\cdot\eta=-\beta+\gamma$.

有 $\mathcal{A}^2\alpha=I\alpha=\alpha$. 故 $\mathcal{A}^{-1}=\mathcal{A}$.

即 镜面反射的逆变是镜面反射.

2. $\mathcal{A}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=\left(\mathcal{A}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\mathcal{A}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$

令 $\varphi_1X=X-2(X,\eta_1)\eta_1$. $\eta_1=\dfrac{(\cos\theta-1,\sin\theta)^T}{|(\cos\theta-1,\sin\theta)^T|}$

$\varphi_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$ $\varphi_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}-2\dfrac{\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}\begin{pmatrix}\cos\theta-1\\\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\theta\\-\cos\theta\end{pmatrix}$

令 $\varphi_2X=X-2(X,\eta_2)\eta_2$. $\eta_2=\dfrac{(\sin\theta,-\cos\theta-1)^T}{|(\sin\theta,-\cos\theta-1)|}$.

$\varphi_2\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$ $\varphi_2\begin{pmatrix}\sin\theta\\-\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}$.

故 $\mathcal{A}=\varphi_2\varphi_1$.

其中. $\varphi_iX=X-2(X,\eta_i)\eta_i$.

$\eta_1=\dfrac{(\cos\theta-1,\sin\theta)^T}{|(\cos\theta-1,\sin\theta)^T|}$

$\eta_2=\dfrac{(\sin\theta,-\cos\theta-1)^T}{|(\sin\theta,-\cos\theta-1)^T|}$