第二周作业

1. 设 $\{X_t; t\geq 0\}$ 是一个正态过程

$\mu_X(t)=1$, $C_X(s,t)=2\min(s,t)$.

① 对 $t>s\geq 0$, 求 $X(t)-X(s)$ 的分布.
问 $\{X_t\}$ 是平稳增量过程吗? 为什么?

② 问 $\{X_t\}$ 是独立增量过程吗? 为什么?

2. 设 $X=\{X_t; -\infty<t<\infty\}$ 是宽平稳过程, 均值函数为 μ_X, 自相关函数为 $r_X(\tau)$. 存在常数 M 使 $|X_t|\leq M$ 对所有 t 成立. 设对每一个 $\omega\in\Omega$, 都有样本轨道 $X_t(\omega)$ 是 t 的连续函数. 令 $Y_n(\omega)=\int_n^{n+1}X_t(\omega)dt$, $n\in\mathbb{Z}$.
求 $Y=\{Y_n; n\in\mathbb{Z}\}$ 的均值函数和自相关函数,
并证明 Y 是宽平稳过程.

下面的 9, 10, 13

(2) 计算 $P(Y_1 ...$

2. 设 $X(t)=At+B, t\geqslant 0$, 这里 A 和 B 独立同分布, $P(A=1)=P(A=-1)=\frac{1}{2}$.

(1) 写出并画出 $\{X(t)\}$ 的所有样本函数;

(2) 计算 $(X(1),X(2))$ 的联合分布律和边际分布律.

3. 设 $X(t)=At+(1-|A|)B, t\geqslant 0$, 这里 A 和 B 独立同分布, $P(A=0)=P(A=1)=P(A=-1)=\frac{1}{3}$.

(1) 写出 $\{X(t)\}$ 的所有样本函数;

(2) 计算 $P(X(1)=1)$, $P(X(2)=1)$ 和 $P(X(1)=1,X(2)=1)$.

4. 设 $Z(t)=AXt+1-A, t\geqslant 0$, 这里 A 和 X 相互独立, $P(A=0)=P(A=1)=\frac{1}{2}$, $X\sim N(1,1)$.

(1) 计算 $P(Z(1)<1)$, $P(Z(2)<2)$, $P(Z(1)<1,Z(2)<2)$;

(2) 计算 $\mu_Z(t)$, $R_Z(s,t)$.

5. 独立重复地掷一颗均匀的骰子, 用 Z_n 表示前 n 次中掷出 6 点的次数.

(1) 计算 $P(Z_2=1,Z_5=3,Z_7=5)$;

(2) 求 $P(Z_{18000}>2900)$ 的近似值;

(3) 若掷骰子一直到恰好出现 20 次 6 点为止, 问需掷多于 180 次的概率近似为多少?

6. 设股票价格过程 $\{S_n; n=0,1,\cdots\}$ 满足 $S_0=100$, $S_n=\max\{S_{n-1}+X_n,1\}$, $\forall n\geqslant 1$. 这里 $X_1,X_2,\cdots$ 独立同分布, $P(X_i=-1)=P(X_i=3)=0.5$. 计算 $P(S_1>100,S_2>100,S_3>100,S_4>100)$ 和 $P(S_{20}=116\mid S_{10}=110,S_{16}=112)$.

7. 甲、乙两人在玩一种游戏, 用 V_n 表示前 n 次甲赢的总次数, W_n 表示甲恰好赢 n 次的时刻. 则对任何 $k,n\geqslant 1$, 事件 $\{W_k>n\}$, $\{W_k\geqslant n\}$, $\{W_k<n\}$, $\{W_k\leqslant n\}$ 分别与下列哪个事件相等:

(A) $\{V_n\leqslant k\}$, (B) $\{V_n<k\}$, (C) $\{V_n>k\}$, (D) $\{V_n\geqslant k\}$,
(E) $\{V_{n-1}\leqslant k\}$, (F) $\{V_{n-1}<k\}$, (G) $\{V_{n-1}>k\}$, (H) $\{V_{n-1}\geqslant k\}$.

8. 设 $\{X(t); t\geqslant 0\}$ 是正态过程, $\mu_X(t)=0$, $C_X(t,s)=\cos(t-s)$. 问 $X(t)$, $X(t)+X(s)$ 分别服从什么分布?

9. 设 $X(t)=At+B, t\geqslant 0$, 这里 A 和 B 独立同分布, $E(A)=\mu$, $D(A)=\sigma^2>0$.

(1) 计算 $\mu_X(t)$, $R_X(s,t)$ 和 $C_X(s,t)$;

(2) 若 $A\sim N(0,1)$, 证明 $\{X(t)\}$ 是正态过程; 并求出 $X(t)$, $X(t)-X(s)$,

$X(t)+X(s)$ 的分布.

10. 设 $X_0, X_1, \cdots$ 独立同分布, $P(X_0=1)=p=1-P(X_0=0)$, $0<p<1$. 令 $Y_n = X_n+X_{n+1}+X_{n+2}$. 计算

(1) Y_n 的分布律;

(2) $\{Y_0=2\}$ 条件下, Y_1 的条件分布律;

(3) $P(Y_0=1, Y_1=0, Y_2=1)$;

(4) $\{Y_n\}$ 的均值函数和自协方差函数.

11. 一台接收机接收信号, 发报机在时刻 t 发出的信号是 $X(t)$, 但来自附近的其他通信噪声影响了接收机的信号. 假设现有 n 台其他的发报机, 第 i 台发报机的强度为 a_i, 在时刻 t 发出的信号是 $X_i(t)$. 则接收机在时刻 t 收到的信号为

$$Z(t) = X(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i(t).$$

假设随机过程 $\{X(t); t\geqslant 0\}$, $\{X_i(t); t\geqslant 0\}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 两两不相关. 已知 $\mu_X(t)$, $\mu_{X_i}(t)$, $C_X(t,s)$, $C_{X_i}(t,s)$, 计算 $\mu_Z(t)$, $C_Z(t,s)$, $C_{ZX}(t,s)$.

12. 设随机过程 $\{X(t); t\in T\}$ 和 $\{Y(t); t\in T\}$ 不相关,

$$Z(t)=a(t)X(t)+b(t)Y(t)+c(t), \quad t\in T,$$

这里 $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ 都是通常的函数. 已知 $\mu_X(t)$, $\mu_Y(t)$, $C_X(s,t)$, $C_Y(s,t)$, 求 $\mu_Z(t)$ 和 $C_Z(s,t)$.

13. 已知随机过程 $\{X(t); t\in(-\infty,\infty)\}$ 的均值函数和自相关函数, 求过程 $\{Y(t); t\in(-\infty,\infty)\}$ 的均值函数和自相关函数, 并求 $R_{XY}(s,t)$, 这里

$$Y(t)=X(t)+X(t+1), \quad t\in(-\infty,\infty).$$

14. 设随机过程 $\{X(t); t\in(-\infty,\infty)\}$ 和 $\{Y(t); t\in(-\infty,\infty)\}$ 相互独立, 已知它们的均值函数和自相关函数. 令 $Z(t)=X(t)Y(t)$, $t\in(-\infty,\infty)$, 求 $\mu_Z(t)$, $R_Z(s,t)$, $R_{XZ}(s,t)$.