

浙江大学 2023 - 2024 学年春夏学期

《 数学建模 (H) 》课程期中练习

姓名: _____ 学号: _____ 所属院系: _____

一、小剧场一排有 n 个座位。由于各排之间空隙较小, 如果某座位已有人入座, 则入座者必须起身才能让后来者通过该座位。若一与会者进入会场时该排有若干个座位可供其选择, 则他以相等的概率选择其中一个座位就坐。

(1) 若该排座位只有左侧一个入口, 所有与会者一旦就坐就不愿起身让后来者通过。记 E_n 为该排最终入座人数的期望, 试写出 E_n 满足的递推关系, 并求 E_n ;

(2) 若该排座位在左右两侧均有入口, 所有与会者以 p 的概率起身让后来者通过, 以 $1-p$ 的概率不让后来者通过。记 F_n 为该排最终入座人数的期望, 试写出 F_n 满足的递推关系。

二、一球状水滴, 初始半径为 $a \geq 0$, 在 $t=0$ 时刻以初速度 $v=0$ 在重力作用下穿过均匀的云层下落, 吸收水蒸气后仍保持球状, 但半径逐渐增大。记 t 时刻水滴的质量、半径和速度分别为 $m(t), r(t)$ 和 $v(t)$, ρ 为水的密度, g 为重力加速度, 空气阻力不计。

(1) 假设单位时间内, 水滴质量增加值与其表面积成正比, 比例系数为 c 。试写出 $r(t)$ 的表达式和 $v(t)$ 满足的微分方程;

(2) 假设单位时间内, 水滴质量增加值与其大圆面积和速度的乘积成正比, 比例系数为 k 。试写出 $r(t)$ 满足的微分方程;

(3) 试求出 (1) 中 $v(t)$ 的表达式, 并证明

$$v(t) = \frac{gt}{4} \left(1 + \frac{a}{r} + \frac{a^2}{r^2} + \frac{a^3}{r^3} \right)。$$

三、一赛季有 $r+1$ 名选手 A_1, A_2, \dots, A_{r+1} 参加。赛季中的每场比赛在两名选手间进行。一场比赛的参赛者只有胜、负两种结果, 两名选手获胜的概率相等。所有选手按编号顺序排为一队列。首先由队列中的前两位选手进行比赛, 胜者与队列中下一位选手进行比赛, 负者重新排在队列的末尾。上述过程持续进行下去, 直至有一人连续战胜所有其他选手, 整个赛季结束。

(1) 假设选手共 3 人, 即 $r=2$ 。在第一场比赛 A_2 战胜 A_1 的情况下, 试给出整个赛季包含 n 场比赛时, 获胜的选手及其获胜的概率;

(2) 求 $r=2$ 时, 每位选手获胜的概率;

(3) 一由 n 个数字 0 或 1 组成的序列, 最后 $r-1$ 位均为数字 1, 但在前 $n-1$ 位中不包含连续 $r-1$ 位数字 1 的子序列, 其中 r 为一给定整数。记所有这样的序列的总数为 a_n 。试写出 a_n 满足的递推关系;

(4) 记 b_n 为整个赛季包含 n 场比赛的概率。试写出 b_n 满足的递推关系。