1. 解：(1) $ET(t)=ET_0\cdot E(-1)^{N(t)}=0$ $ET(t)=ET_0\cdot E(-1)^{N(t)}=0$;

不妨设 $t\geq s$，则有

$$Cov(T(s),T(t))=E(T(s)T(t))=E({T_0}^2(-1)^{N(s)+N(t)})=E((-1)^{2N(t)+N(t-s)})$$

$$=E(-1)^{N(t-s)}=\sum_{k\text{为偶}}\tfrac{(\lambda(t-s))^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)}-\sum_{k\text{为奇}}\tfrac{(\lambda(t-s))^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)}$$

$$=\sum_{k\geq 0}\tfrac{(-\lambda(t-s))^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)}=e^{-\lambda(t-s)}\cdot e^{-\lambda(t-s)}=e^{-2\lambda(t-s)}$$

故，$Cov(T(s),T(t))=e^{-2\lambda|t-s|}$.

(2) $EX(t)=E\int_0^t T_0\cdot(-1)^{N(s)}ds=ET_0\cdot E\int_0^t(-1)^{N(s)}ds=0$;

不妨设 $t\geq s$，$Cov(T(s),T(t))=E(T(s)T(t))=E(\int_0^s(-1)^{N(s)}ds\cdot\int_0^t(-1)^{N(s)}ds)$

$$=E(\int_0^s\int_0^t(-1)^{N(s)+N(t)}dtds)=\int_0^s\int_0^t E(-1)^{N(s)+N(t)}dtds$$

$$=\int_0^s\int_0^t e^{-2\lambda(t-s)}dtds=\int_0^t e^{-2\lambda t}dt\cdot\int_0^s e^{2\lambda s}ds$$

$$=-\tfrac{1}{2\lambda}(e^{-2\lambda t}-1)\cdot\tfrac{1}{2\lambda}(e^{2\lambda s}-1)$$

$$=-\tfrac{1}{4\lambda^2}(e^{-2\lambda t}-1)(e^{2\lambda s}-1)$$

故，$Cov(T(s),T(t))=-\tfrac{1}{4\lambda^2}(e^{-2\lambda(t\vee s)}-1)(e^{2\lambda(t\wedge s)}-1)$.

2. 解：(1) $P(N(0.5)=1)=2e^{-2}$;

(2) $P(N(2.5)=5)=\tfrac{10^5}{5!}e^{-10}$.

3. 解：(1) $P(N(1)=2)=2e^{-2}$;

(2) $P(N(1)=2，N(3)=6)=P(N(1)=2，N(3)-N(1)=4)=2e^{-2}\cdot\tfrac{4^4}{4!}e^{-4}=\tfrac{64}{3}e^{-6}$

(3) $P(N(1)=2|N(3)=6)=\dfrac{P(N(1)=2，N(3)=6)}{P(N(3)=6)}=\dfrac{\frac{64}{3}e^{-6}}{\frac{6^6}{6!}e^{-6}}=\tfrac{80}{243}$

(4) $P(N(3)=6|N(1)=2)=\dfrac{P(N(1)=2，N(3)=6)}{P(N(1)=2)}=\dfrac{\frac{64}{3}e^{-6}}{2e^{-2}}=\tfrac{32}{3}e^{-4}$

4. 解：(1) $P(N(1)\leq 2)=e^{-2}+\tfrac{2}{1!}e^{-2}+\tfrac{2^2}{2!}e^{-2}=5e^{-2}$

(2) $P(N(1)=1，N(2)=3)=P(N(1)=1，N(2)-N(1)=2)=\frac{2}{1!}e^{-2}+\frac{2^2}{2!}e^{-2}=4e^{-2}$

(3) $P(N(1)\geq 2\big|N(1)\geq 1)=\dfrac{P(N(1)\geq 2)}{P(N(1)\geq 1)}=\dfrac{1-3e^{-2}}{1-e^{-2}}$.

5. 解：(1) $EN(2)=4$

(2) $EN(1)^2=VarN(1)+[EN(1)]^2=2+4=6$

(3) $E(N(1)N(2))=E[N(1)\cdot(N(1)+N(2)-N(1))]$

$$=EN(1)^2+E[N(1)(N(2)-N(1))]=6+4=10$$

(4) $E(N(1)N(2)N(3))$

$$=E[N(1)\cdot(N(1)+N(2)-N(1))\cdot(N(1)+N(2)-N(1)+N(3)-N(2))]$$

$$=EN(1)^3+4EN(1)^2EN(1)+[EN(1)]^3$$

$$=22+4\times 6\times 2+8=78.$$

6. 解：(1) $E(N(t)\big|T=t)=E(N(t))=2t$;

$$E(N(t)^2\big|T=t)=4t^2+2t$$

(2) $E(N(t))=E[E(N(t)\big|T)]=E(2T)=3$;

$$Var(N(t))=E[Var(N(t)\big|T)]+Var(E(N(t)\big|T))$$

$$=E(2T)+Var(2T)=3+4\times\frac{1}{12}=\frac{10}{3}.$$

9. 解：$P(T\leq t)=P(T_1\leq t,T_2\leq t,T_3\leq t)=(1-e^{-\lambda_1 t})(1-e^{-\lambda_2 t})(1-e^{-\lambda_3 t})$,

求导，得到$T$的密度函数为：

$$p(t)=\lambda_1e^{-\lambda_1 t}(1-e^{-\lambda_2 t})(1-e^{-\lambda_3 t})+\lambda_2e^{-\lambda_2 t}(1-e^{-\lambda_1 t})(1-e^{-\lambda_3 t})$$

$$+\lambda_3e^{-\lambda_3 t}(1-e^{-\lambda_1 t})(1-e^{-\lambda_2 t})$$

10. 解：首先，由由定理 3.6 知：

$$(S_1,S_2,S_3\big|N(t)=3)\overset{d}{=}(U_{(1)},U_{(2)},U_{(3)})$$

$$P(S_3\leq 3)=[P(U\leq s)]^3=(\tfrac{s}{t})^3,\forall 0\leq s\leq t$$

从而，$p_{S_3|N(t)=3}(s)=3\frac{s^2}{t^3}$，$E(S_3|N(t)=3)=\int_0^t s\cdot 3\frac{s^2}{t^3}ds=\frac{3}{4}\frac{s^4}{t^3}\Big|_0^t=\frac{3}{4}t$.

11. 解：(1) $E(S_1S_2|N(1)=2)=E(U_{(1)}U_{(2)})=E(U_1U_2)=\frac{1}{4}$；

(2) $E(S_1+S_2+\cdots+S_5|N(1)=5)=E(U_1+U_2+\cdots+U_5)=\frac{5}{2}$.

12. 解：由由定理 3.6 知：

$$(S_1,S_2,S_3|N(t)=3)\overset{d}{=}(U_{(1)},U_{(2)},U_{(3)})$$

故，$p_{(S_1,S_2,S_3|N(t)=3)}(x,y,z)=6$ (可见教材 55 页(3.17)式)

作变量替换$\begin{cases}U=\frac{S_1}{S_2}\\V=\frac{1-S_3}{1-S_2}\\W=S_2\end{cases}$，等价于$\begin{cases}S_1=UW\\S_2=W\\S_3=1-V+VW\end{cases}$，从而其雅克比行列式为：

$$|J|=\begin{vmatrix}w&0&u\\0&0&1\\0&w-1&v\end{vmatrix}=w-w^2$$

所以，$p_{(U,V,W)}(u,v,w)=p_{(S_1,S_2,S_3|N(t)=3)}(x,y,z)\cdot|J|=6w(1-w)$

$$p_{(U,V)}(u,v)=\int_R p_{(U,V,W)}(u,v,w)dw=\int_0^1 6w(1-w)dw=1.$$

13. 解：首先，$(X_n,n\ge 1)$ 是独立同分布的参数为 $\lambda$ 的指数分布随机变量，密度函数记为：

$q(x)=\lambda e^{-\lambda x},x>0$.

由于随机变量序列 $(X_n,n\ge 1)$，$(Z_n,n\ge 1)$ 均为独立同分布的，且两序列间也独立，从而 $(X_n+Z_n,n\ge 1)$ 亦为独立同分布的随机变量，且其密度函数为：

$$f(x)=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda u}p(x-u)du$$

记 $W_k=\min_{1\le n\le k}\{S_n+Z_n\}$，则有 $P(W>w)=\lim_{k\to\infty}P(W_k>w)$.

其中，$P(W_k>w)=P(S_1+Z_1>w,S_2+Z_2>w,\cdots,S_k+Z_k>w)$

$$=P(S_1+Z_1>w)P(S_2+Z_2>w)\cdots P(S_k+Z_k>w)$$
$$=(\int_w^{\infty}f(x)dx)^k$$

故，$P(W>w)=\lim\limits_{k\to\infty}P(W_k>w)=(\int_w^{\infty}f(x)dx)^k=\begin{cases}1,\text{若}\int_w^{\infty}f(x)dx=1;\\0,\text{若}\int_w^{\infty}f(x)dx<1.\end{cases}$

14. 解: (1) 由定理 3.6 知：

$$(S_1,S_2\big|N(t)=2)\overset{d}{=}(U_{(1)},U_{(2)})$$

其中，$U_{(1)},U_{(2)}$ 为区间 $[0,t]$ 上 2 个独立同分布均匀随机变量 $U_1,U_2$ 的次序统计量.

故 $E(S_1\big|N(t)=2)=E(U_{(1)})=\frac{k}{n+1}t=\frac{t}{3}$

(2) 同理于(1), 可得：$E(S_3\big|N(t)=5)=E(U_{(3)})=\frac{k}{n+1}t=\frac{t}{2}$

16. 解：首先，由全期望公式有：

$$EZ(t)=\sum_{n=0}^{\infty}E\left[(\sum_{k=1}^{n}\xi_k e^{-\gamma(t-S_k)})\big|N(t)=n\right]\cdot P(N(t)=n)$$

其中，$E(\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k e^{-\gamma(t-S_k)})=E(\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k e^{-\gamma(t-U_k)})$

$$=\sum_{k=1}^{n}E(\xi_k e^{-\gamma(t-U_k)})=\sum_{k=1}^{n}E\xi_k\cdot Ee^{-\gamma(t-U_k)}=n\mu\cdot\tfrac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma t}$$

从而，$EZ(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}n\mu\cdot\frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma t}\cdot P(N(t)=n)=\mu\frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma t}\cdot EN(t)=\frac{\mu\lambda}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})$

同理于上式，有：

$$EZ(t)^2=\sum_{n=0}^{\infty}E\left[(\sum_{k=1}^{n}\xi_k e^{-\gamma(t-S_k)})^2\big|N(t)=n\right]\cdot P(N(t)=n)$$

$$E(\sum_{k=1}^{n}\xi_k e^{-\gamma(t-S_k)})^2=E(\sum_{k=1}^{n}\xi_k e^{-\gamma(t-U_k)})^2=E(\sum_{1\le j,k\le n}\xi_k\xi_j e^{-\gamma(t-U_j)}e^{-\gamma(t-U_k)})$$

$$=E(\sum_{j\neq k}\xi_k\xi_j e^{-\gamma(t-U_j)}e^{-\gamma(t-U_k)}+\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2 e^{-2\gamma(t-U_k)})$$
$$=\sum_{j\neq k}E(\xi_k\xi_j e^{-\gamma(t-U_j)}e^{-\gamma(t-U_k)})+\sum_{k=1}^{n}E(\xi_k^2 e^{-2\gamma(t-U_k)})$$
$$=\sum_{j\neq k}E\xi_k E\xi_j\cdot Ee^{-\gamma(t-U_k)}\cdot Ee^{-\gamma(t-U_j)}+\sum_{k=1}^{n}E\xi_k^2\cdot Ee^{-2\gamma(t-U_k)}$$
$$=n(n-1)\mu^2(\tfrac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma t})^2+n(\mu^2+\sigma^2)\cdot\tfrac{1-e^{-2\gamma t}}{2\gamma t}$$
$$=n^2\mu^2(\tfrac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma t})^2+n[(\mu^2+\sigma^2)\cdot\tfrac{1-e^{-2\gamma t}}{2\gamma t}-\mu^2(\tfrac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma t})^2]$$

从而， $$EZ(t)^2=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2\mu^2(\tfrac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma t})^2+n[(\mu^2+\sigma^2)\cdot\tfrac{1-e^{-2\gamma t}}{2\gamma t}-\mu^2(\tfrac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma t})^2]\right)\cdot P(N(t)=n)$$

$$=\mu^2(\tfrac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma t})^2\cdot EN(t)^2+[(\mu^2+\sigma^2)\cdot\tfrac{1-e^{-2\gamma t}}{2\gamma t}-\mu^2(\tfrac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma t})^2]\cdot EN(t)$$
$$=\mu^2(\tfrac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma t})^2\cdot(\lambda t+\lambda^2t^2)+[(\mu^2+\sigma^2)\cdot\tfrac{1-e^{-2\gamma t}}{2\gamma t}-\mu^2(\tfrac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma t})^2]\cdot\lambda t$$
$$=\tfrac{\mu^2\lambda^2}{\gamma^2}(1-e^{-\gamma t})^2+\tfrac{\lambda(\mu^2+\sigma^2)}{2\gamma}(1-e^{-2\gamma t})$$

$$VarZ(t)=EZ(t)^2-(EZ(t))^2$$

$$=\tfrac{\mu^2\lambda^2}{\gamma^2}(1-e^{-\gamma t})^2+\tfrac{\lambda(\mu^2+\sigma^2)}{2\gamma}(1-e^{-2\gamma t})-\tfrac{\mu^2\lambda^2}{\gamma^2}(1-e^{-\gamma t})^2$$
$$=\tfrac{\lambda(\mu^2+\sigma^2)}{2\gamma}(1-e^{-2\gamma t})$$