习题 1.2

1. (1) $f(x)=(x^2+2)g(x)+x^2+6x-5$. $q(x)=x^2+2$ $r(x)=x^2+6x-5$

(2) $f(x)=(\frac{1}{3}x-\frac{7}{9})g(x)-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}$ $q(x)=\frac{1}{3}x-\frac{7}{9}$ $r(x)=-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}$

(3) $f(x)=(x^4+2x^3+3x^2+6x+14)g(x)+23$ $q(x)=x^4+2x^3+3x^2+6x+12$ $r(x)=23$

2. (1) $f(x)=(x^2-3x+7)g(x)+(a-3)x+b+7$. 故 $a=3$ $b=-7$

(2) $f(x)=[ax^2+(b+2a)x+2b+3a]g(x)+(4a+3b)x-(3a+2b-1)$

$$\begin{cases} 4a+3b=0 \\ 3a+2b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-4 \end{cases}$$ 成立.

3. $x^3-3px+2q=(x-a)(x^2+ax+a^2)+(3a^2-3p)x+2a^3+2q$

$$\begin{cases} 3a^2-3p=0 \\ 2a^3+2q=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=t \\ p=t^2 \\ q=-t^3 \end{cases}$$ $t\in R$. 即可.

4. $x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1})$. $n\geq 2$. 当 $n=1$ 成立.

故 $(x-a)\mid(x^n-a^n)$

5. "$\Leftarrow$" $x\mid f(x) \Rightarrow x\mid f^k(x)$

"$\Rightarrow$" $x\mid f^k(x) \Leftrightarrow x\mid f(x)\cdot f(x)\cdots f(x)$. 即 $x\mid f(x)$.

故 $x\mid f^k(x) \Leftrightarrow x\mid f(x)$

6. (1) $f(x)=5[(x-1)+1]^4-6[(x-1)+1]^3+[(x-1)+1]^2+4$

$=5(x-1)^4+14(x-1)^3+13(x-1)^2+4(x-1)+4$.

(2) $f(x)=2[(x+1)-2]^5+5[(x+1)-2]^4-[(x+1)-2]^3+10[(x+1)-2]-6$

$=2(x-1)^5-15(x-1)^4+37(x-1)^3-14(x-1)^2-2(x-1)+4$.

习题 1.3

1. 辗转相除.

$f(x)=2x-g(x)+(-6x^2-3x+9)$

$g(x)=(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3})(-6x^2-3x+9)+(-x+1)$

$-6x^2-3x+9=(6x+9)(-x+1)$

故 $(f(x),g(x))=-x+1$

代入有: $-x+1=g(x)-(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3})(f(x)-2xg(x))=(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3})f(x)+(-\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}x+1)g(x)$

即 $u(x)=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$ $v(x)=-\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}x+1$