蛛网模型

浙江大学 谈之奕

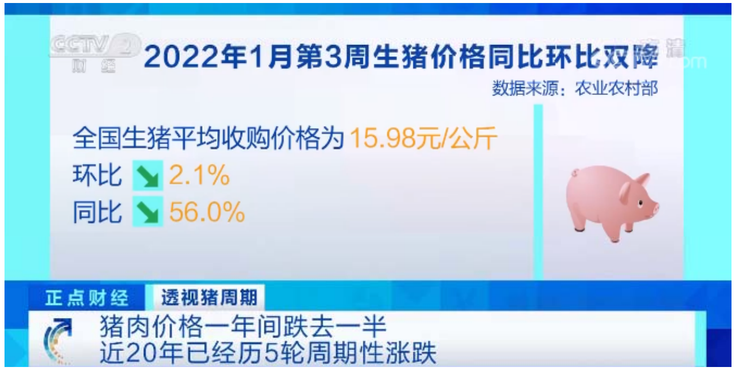
“猪”周期

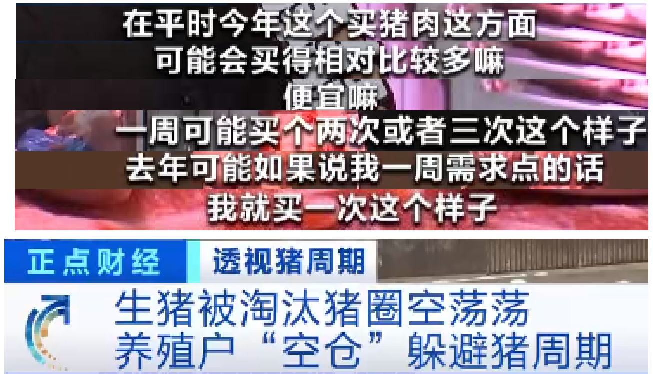
数学建模

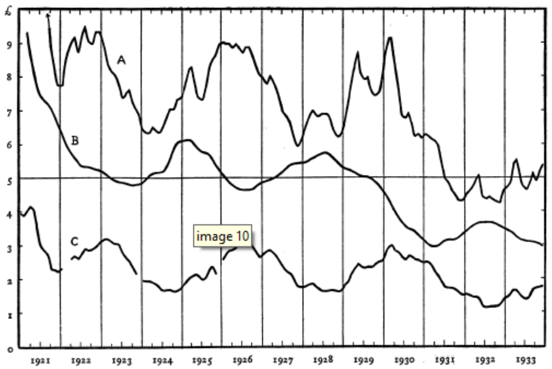
MATH T

- 透视“猪周期”

CCTV-2《正点财经》栏目2022年1月28日播出







（同期声）本轮猪周期自2018年5月开启，上行周期持续27个月，猪价从每公斤10元左右上涨至每公斤近40元，下行周期从2021年1月持续至今，猪价从每公斤40元下行到最低每公斤跌破10元。

去年年初受到多种因素的影响，食品价格，特别是猪肉价格上涨比较快……猪肉价格去年年初涨幅超过100%，之前连续上涨19个月

——国家统计局局长在2021年1月18日国务院新闻办公室新闻发布会上答记者问

1920-1934年英国肉猪价格、喂养肉猪所需饲料价格、仔猪价格变化曲线

Coase RH, Fowler RF, Bacon production and the pig-cycle in Great Britain. *Economica (New Series*), 2(6), 142-167, 1935.

经济学与经济模型

- 经济学（economics）
  - 研究人类社会各个发展阶段之各种经济活动、经济关系、经济运行规律的科学
- 经济数学模型（economic mathematical model）
  - 广泛用于经济研究、经济分析的数学模型。是用数学形式，对经济理论假说进行数量化，以探讨客观经济过程的本质联系及其规律的一种经济研究与管理的工具
    - 经济数学模型是研究分析经济数学关系的重要工具，是经济理论和经济现实的中间环节。它能起到明确思路、加工信息、验证理论、计算求解、分析和解决问题的作用
    - 经济数学模型不能过于简化，否则会难以把握经济现实；又不能过于复杂，否则会难以加工处理和管理操作
    - 模型好坏的标准不是方程的多少，而是吻合度（符合所反映经济过程的数量关系的程度）和实用度（用于理论分析、经济预测、政策评价所取得的效果）的统一
    - 模型的建立要受到人们对客观经济现实认识能力和仿真手段的限制，还表现在它的应用是有条件的，不能脱离研究对象的复杂性，数据的准确性和应用者的学识、经验与判断能力

摘自《中国大百科全书》（第二版）

数学建模

MATH T

经济

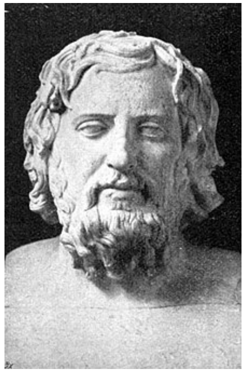
経済
（日语）

economy

经国济民
经邦济世

仕途经济

oikonomia
（[希腊]家庭经济管理）



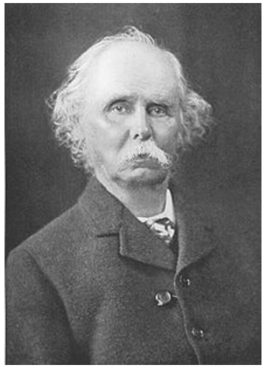
Xenophon of Athens
（约前430一前354）
古希腊哲学家、历史学家
著有Oeconomicus一书

微观经济学

数学建模

MATH T

- 微观经济学（microeconomics）
  - 通过对个体经济单位的经济行为的分析，说明在现代经济社会中市场机制的运行及其对经济资源的配置
- 商品、货币与价格
  - 商品（commodities）：在社会分工的体系中，经济上相互独立的生产者所生产的、以自己的属性满足人的某种需要、为他人（即为社会）消费、通过交换进入把它当作使用价值的人的手里的劳动产品和服务
  - 货币（money）：在商品交换中逐渐分离出来的固定地充当一般等价物的特殊商品。是价值量发展到一般价值形式的产物
  - 价格（price）：市场经济和商品交换中最常用的范畴，是商品与货币交换的比例，直接表明单位商品交换价值的实际货币量
    - 市场经济是以市场机制作为配置资源的主要方式的经济，市场配置资源主要是通过价格的调节作用实现的



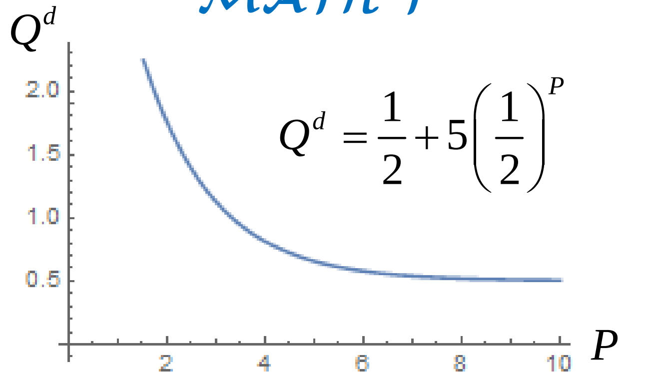
Alfred Marshall
（1842－1924）
英国经济学家

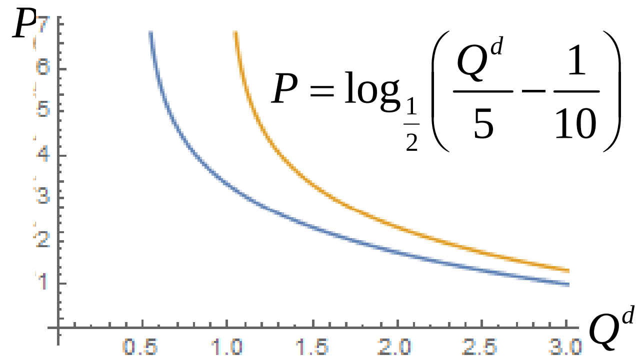
Principles of Economics
（经济学原理）

1890年初版，1920年第八版。集19世纪70年代以后西方经济学发展之大成，为微观经济学理论体系的建立奠定了基础。核心是均衡价格论

需求

- 需求（demand）
  - 一种商品的需求是消费者在一定时期内在各种可能的价格水平下，愿意并且能够购买的该商品的数量
  - 决定需求数量的主要因素有商品的价格、消费者的收入水平、相关商品的价格、消费者的偏好、消费者对该商品的价格预期
    - 商品的价格是最基本的因素
  - 需求函数表示一种商品的需求数量和影响该需求数量的各种因素之间的相互关系
    - 需求函数 $Q^d = f(P)\left(P = f^{-1}(Q^d)\right)$ 表示一种商品的需求数量与该商品的价格之间的一一对应关系　减函数
      - 需求量的变动：其他条件不变，由价格的变动所引起
      - 需求的变动：价格不变，由其他因素变动所引起





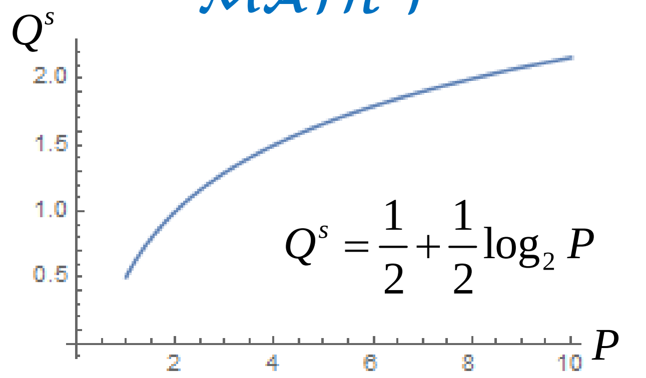
供给

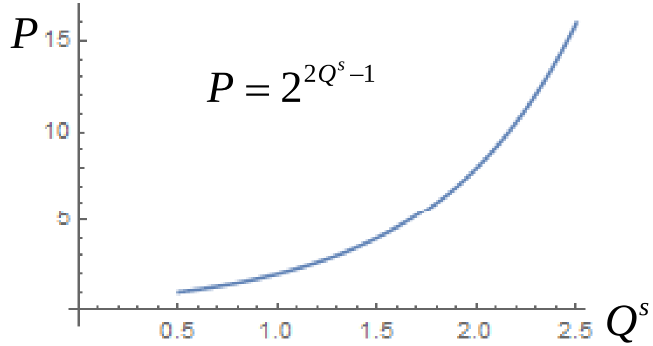
数学建模

MATH T

- 供给（supply）
  - 一种商品的供给是指生产者在一定时期内在各种可能的价格水平下，愿意并且能够提供出售的该商品的数量
  - 决定供给数量的主要因素有商品的价格、生产的成本、相关商品的价格、生产的技术水平、生产者对未来的价格预期
  - 供给函数表示一种商品的供给量与影响该商品供给量的各种因素之间的相互关系
    - 供给函数 $Q^s = g(P)$ $\left(P = g^{-1}(Q^s)\right)$ 表示一种商品的供给量与该商品的价格之间的一一对应关系　　增函数

在微观经济分析中，为了简化分析过程，在不影响结论的前提下，大多使用线性需求函数与线性供给函数





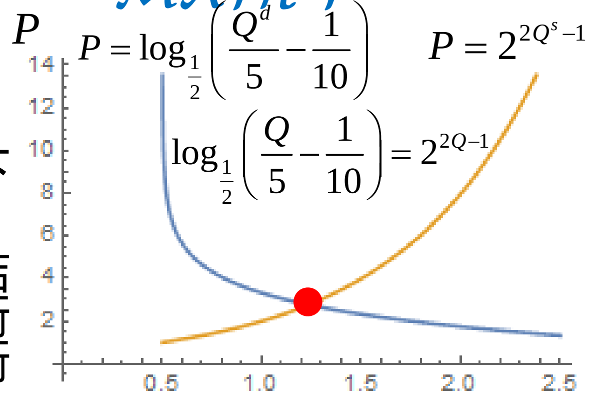
数学建模

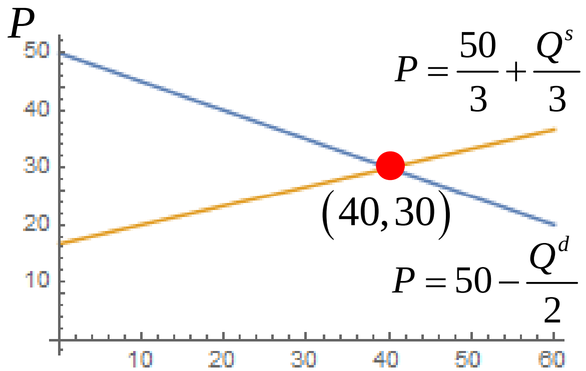
MATH T

均衡

- 均衡（equilibrium）
  - 经济学中的均衡指经济系统中变动着的各种力量在相互作用之后所达到的“平衡”状态，即相对静止状态。如果没有外界扰动因素，这种状态会持续下去
- 均衡价格（equilibrium price）
  - 市场上某种商品的需求量和供给量相等时的价格。均衡价格水平下的相等的供求数量称为均衡数量
  - 均衡价格是市场上商品的需求和供给这两种相反力量共同作用的结果，是在市场供求力量自发作用下形成的。一旦市场价格偏离均衡价格，需求量和供给量就会出现不一致的非均衡状态，这种非均衡状态在市场机制的作用下会逐步消失，从而恢复到均衡价格水平
  - 供求定理
    - 需求变动引起均衡价格同方向的变动，均衡数量同方向的变动
    - 供给变动引起均衡价格反方向的变动，均衡数量同方向的变动

    如果需求和供给同时发生变动，均衡价格和均衡数量的变化无法确定





价格弹性

数学建模

MATH T

- 需求价格弹性（price elasticity of demand）
  - 在其他条件不变的情况下，需求量变化率与价格变化率的比值。反映需求量变化对价格变化的敏感程度

$$Q^d = f(P)$$

$$e = -\cancel{\frac{\Delta Q}{\Delta P}}$$

$$e_d = -\frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}} = -\frac{\Delta Q}{\Delta P}\frac{P}{Q}$$

弧弹性

$$e_d = -\frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}$$

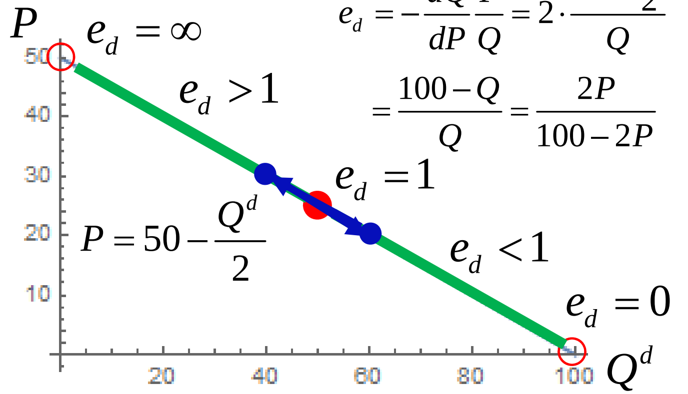
点弹性

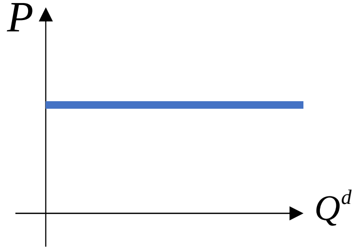
  - $e_d > 1$：富有弹性（elastic）
    - 需求量对价格变动的反应敏感
    - 销售收入与商品价格呈反方向变动
  - $e_d < 1$：缺乏弹性（inelastic）
    - 需求量对价格变动的反应欠敏感
    - 销售收入与商品价格呈同方向变动

$e_d = 1$

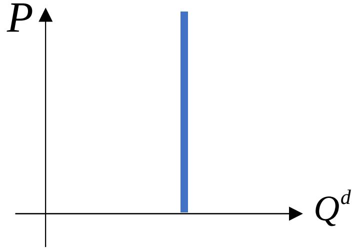
单位弹性

$$e_d = -\frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q} = 2\cdot\frac{50-\frac{Q}{2}}{Q} = \frac{100-Q}{Q} = \frac{2P}{100-2P}$$





$e_d = \infty$ 完全弹性



$e_d = 0$ 完全无弹性

- 销售收入

$$\frac{d(PQ)}{dP} = Q + P\frac{dQ}{dP} = Q(1-e_d)$$

谷贱伤农　多收了三五斗

籴甚贵，伤民；甚贱，伤农

——《汉书·食货志上》

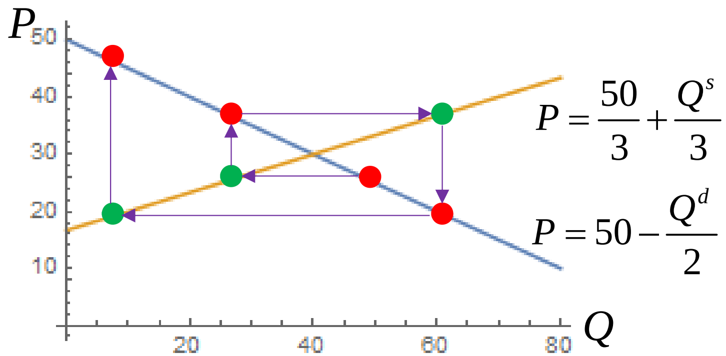
动态模型

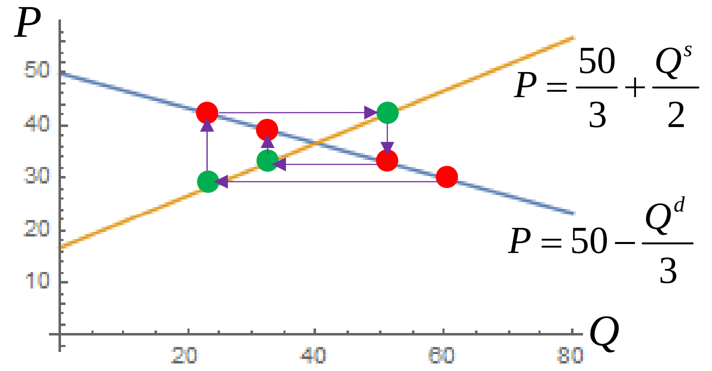
数学建模

MATH T

- 静态与动态
  - 静态模型与静态分析
    - 变量没有时间先后的差别
    - 变量的调整时间被假设为零
    - 考察既定条件下变量相互作用下所呈现的状态
  - 动态模型与动态分析
    - 区分变量在时间上的先后差别
    - 研究不同时点上变量之间的相互关系
    - 考察不同时点上变量的相互作用在状态形成和变化过程中所起的作用和在时间变化过程中状态的实际变化过程
- 动态均衡价格模型
  - 对生产周期较长的商品，商品的供给量通常由前一生产周期的价格决定

$$Q_k^s = g(P_{k-1}) \qquad Q_k^d = f(P_k) \qquad Q_k^d = Q_k^s$$





数学建模

MATH T

蛛网模型

- 蛛网模型（**The Cobweb Model**）
  - 研究某些生产周期较长且不宜储存的商品均衡价格的动态稳定性的模型
    - 当商品的市场实际价格偏离均衡价格后，在市场机制的作用下，实际价格是否能回到原有的均衡价格水平，即均衡价格是否动态稳定，并考察它所需要具备的条件

Nicholas Kaldor
（1908－1986）
英国经济学家

提出

- Schultz H, *Der Sinn der Statistischen Nachfragen*, Heft 10, Veroffentlichungen der Frankfurter Gesellschaft fur Konjunkturfor-schung, 1930.（Page 34）
- Ricci U, Die "Synthetische Okonomie" von Henry Ludwell Moore, *Zeitschrift fuir Nationalokonomie*, 1, 649-668, 1930.
- Tinbergen J, Bestimmung und Deutung von Angebotskurven: Ein Beispeil, *Zeitschrift fur National Okonomie*, 1, 669-679, 1930.

命名：Kaldor N, A Classificatory Note on the Determination of Equilibrium, *Review of Economic Studies*， 1(2)，122-136, 1934.

推广：Ezekiel M, The Cobweb Theorem, *The Quarterly Journal of Economics*, 52, 255-280, 1938

蛛网模型

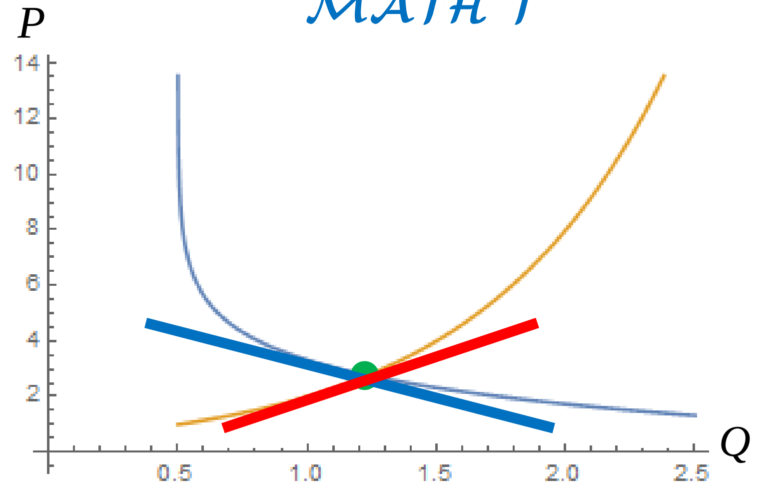
数学建模

MATH T

- 蛛网模型
  - 记在周期 n 某种商品的供求量为 x_n ，价格为 y_n
  - 需求函数 $x_n = f(y_n)$ ，供给函数 $x_{n+1} = g(y_n)$ ，需求函数的反函数 $y_n = h(x_n)$ ，均衡点 (x_0, y_0) 满足 $y_0 = h(x_0)$ 和 $x_0 = g(y_0)$
  - 在均衡点附近用线性函数近似 h 和 g
    - α ：商品需求量减少一个单位时价格的上涨量
      - $\frac{1}{\alpha}$ ：商品价格上涨一个单位时需求量的减少量
    - β ：商品价格上涨一个单位时（下一周期）供给量的增加量
  - 差分方程及其解
    - $x_{n+1} - x_0 = -\alpha\beta(x_n - x_0)$

      $x_{n+1} - x_0 = (-\alpha\beta)^n (x_1 - x_0)$

$$\alpha\beta < 1 \Leftrightarrow \beta < \frac{1}{\alpha}$$



$$y_n - y_0 = -\alpha(x_n - x_0) \qquad \alpha = -h'(x_0)$$

$$x_{n+1} - x_0 = \beta(y_n - y_0) \qquad \beta = g'(y_0)$$

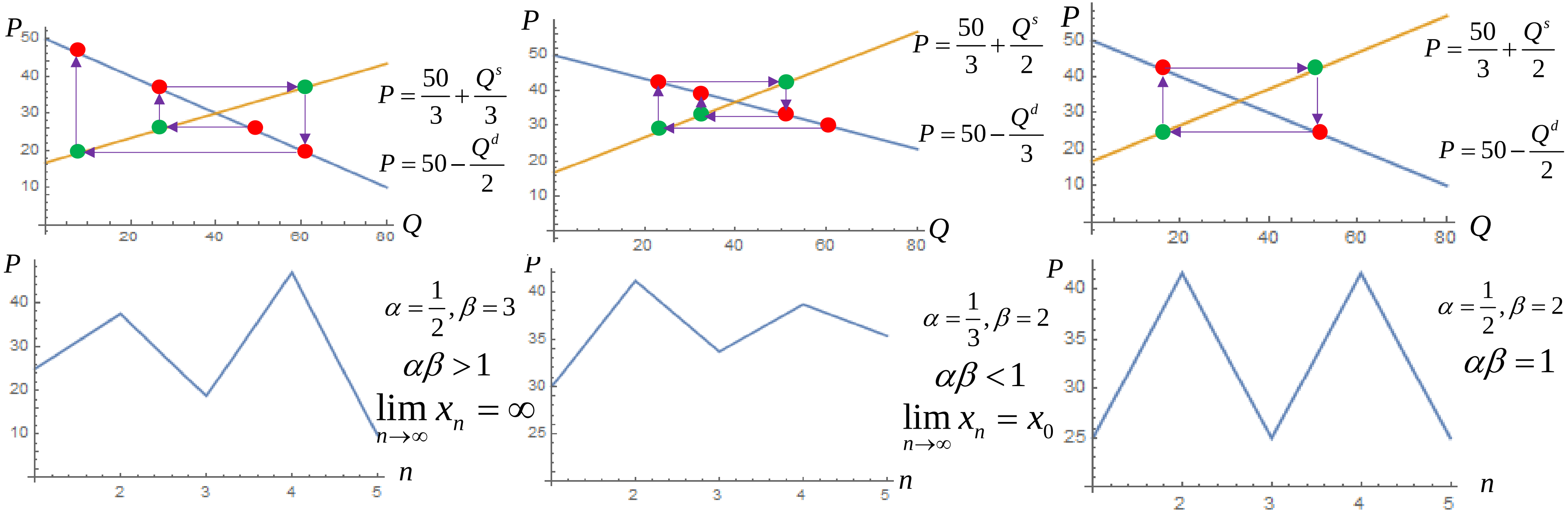
蛛网模型

数学建模

MATH T

- 均衡的稳定性
  - 当一个均衡价格体系在受到干扰而偏离均衡点时，如果这个体系在市场机制的作用下能回到均衡点，则称这个均衡价格体系是稳定均衡，否则是不稳定均衡

稳定均衡 $\Leftrightarrow \alpha\beta < 1$



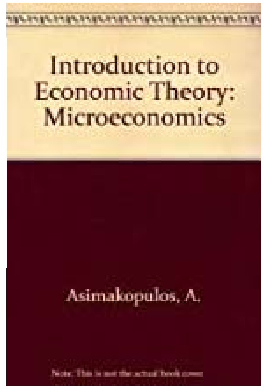
数学建模

MATH T

蛛网模型

- 蛛网模型
  - 在美国，1972年由于暴风雨和恶劣的气候，土豆产量大幅度下降，从而土豆价格上涨
  - 随着土豆价格的上涨，农场主便扩大土豆的种植面积，使土豆产量在1974年达到历史最高水平
  - 结果，土豆供给量大幅度增加导致土豆价格又急剧下降
    - 以缅因州土豆为例，1磅土豆的价格由1974年5月的13美分降为1975年3月的2美分，该价格比平均生产成本还低
  - 在普林斯·爱德华岛，当农场主们都因土豆价格下降而缩减土豆的种植面积时，唯有一个农场主不这样做。因为这个农场主根据长期的经营经验，相信土豆价格将上升，而眼下正是自己增加土豆生产的时候

转引自高鸿业《西方经济学》（第5版），中国人民大学出版社，2011



Athanasios Asimakopulos
（1930－1960）
加拿大经济学家

***Introduction to Economic Theory: Microeconomics*, Oxford University Press, 1978**

蛛网模型

- 蛛网模型
  - 假设商品的供求量由前两个周期的价格决定
    - 需求函数 $x_n = f(y_n)$ ，供给函数 $x_{n+2} = g(y_{n+1}, y_n)$ ，需求函数的反函数 $y_n = h(x_n)$
      - 供给函数简化为 $x_{n+2} = g\left(\dfrac{y_{n+1}+y_n}{2}\right)$
    - 均衡点 (x_0, y_0) 满足 $y_0 = h(x_0)$ 和 $x_0 = g(y_0)$
    - 在均衡点附近用线性函数近似 h 和 g
      - $y_n - y_0 = -\alpha(x_n - x_0)$ $x_{n+2} - x_0 = \beta\left(\dfrac{y_{n+1}+y_n}{2} - y_0\right)$

$$2(x_{n+2}-x_0) = \beta(y_{n+1}+y_n-2y_0) = \beta(y_{n+1}-y_0+y_n-y_0) = \beta(-\alpha(x_{n+1}-x_0)-\alpha(x_n-x_0))$$

$$2x_{n+2}+\alpha\beta x_{n+1}+\alpha\beta x_n = 2(1+\alpha\beta)x_0$$ 二阶线性常系数非齐次差分方程

$z_n = x_n - x_0$ $z_n \to 0 \Leftrightarrow x_n \to x_0\ (n\to\infty)$ $2z_{n+2} = \beta(-\alpha z_{n+1} - \alpha z_n)$

$$2z_{n+2}+\alpha\beta z_{n+1}+\alpha\beta z_n = 0$$ 二阶线性常系数齐次差分方程

数学建模

MATH T

差分方程

- 二阶线性常系数齐次差分方程 $x_{n+2}+a_1x_{n+1}+a_2x_n=0$
  - 若 $x_n=f(n)$ 是方程的解，则 $x_n=cf(n)$ 也是方程的解；若 $x_n=f_1(n)$ 和 $x_n=f_2(n)$ 都是方程的解，则 $x_n=f_1(n)+f_2(n)$ 也是方程的解
  - 若 $x_n=\lambda^n$ 是方程的解，则 λ 满足 $\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$
  - 特征方程（characteristic equation）$\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$
    - 特征方程有两个不同的根 λ_1,λ_2
      - 差分方程的通解为 $x_n=C_1\lambda_1^n+C_2\lambda_2^n$，其中 C_1,C_2 为常数
    - 特征方程只有一根，则 $a_2=\frac{a_1^2}{4}$，根 $\lambda=-\frac{a_1}{2}$
      - 差分方程的通解为 $x_n=C_1\lambda^n+C_2k\lambda^n$，其中 C_1,C_2 为常数
  - 解 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$ 当且仅当 $|\lambda_1|<1,|\lambda_2|<1$（或 $|\lambda|<1$）

$$|a+b\mathbf{i}|=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$x_n=\cancel{c_1n^2}+c_2n+c_3 \qquad x_n=\cancel{\frac{c_3n+c_4}{c_1n+c_2}}$$

$$x_{n+3}+a_1x_{n+2}+a_2x_{n+1}=0$$

$$x_n=\lambda^n \qquad n\lambda^{n+2}+na_1\lambda^{n+1}+na_2\lambda^n=0$$

$$2\lambda^{n+2}+a_1\lambda^{n+1}=0$$

$$(n+2)\lambda^{n+2}+a_1(n+1)\lambda^{n+1}+a_2n\lambda^n=0$$

$$x_{n+2}-2x_{n+1}+5x_n=0 \quad 1,2,-1,-12,-19,22$$

$$\lambda^2-2\lambda+5=0 \qquad \lambda_1=1+2\mathbf{i},\lambda_2=1-2\mathbf{i}$$

$$x_n=C_1(1+2\mathbf{i})^n+C_2(1-2\mathbf{i})^n$$

$$\begin{cases}C_1(1+2\mathbf{i})+C_2(1-2\mathbf{i})=1\\C_1(1+2\mathbf{i})^2+C_2(1-2\mathbf{i})^2=2\end{cases} \qquad \begin{cases}C_1=-\frac{1}{4}\mathbf{i}\\C_2=\frac{1}{4}\mathbf{i}\end{cases}$$

$$x_n=-\frac{1}{4}\mathbf{i}(1+2\mathbf{i})^n+\frac{1}{4}\mathbf{i}(1-2\mathbf{i})^n$$

蛛网模型

数学建模

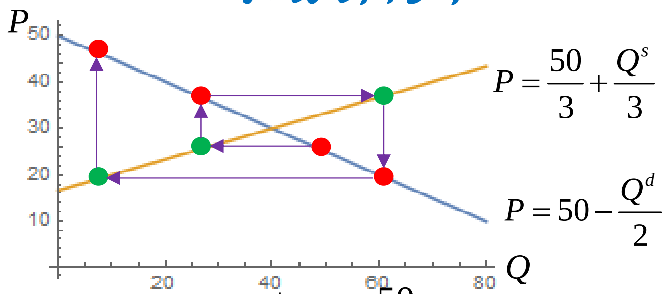
MATH T

- 蛛网模型
  - 差分方程 $2z_{n+2}+\alpha\beta z_{n+1}+\alpha\beta z_n=0$
  - 特征方程 $\lambda^2+\frac{\alpha\beta}{2}\lambda+\frac{\alpha\beta}{2}=0$
    - $\lambda_1=\frac{-\alpha\beta+\sqrt{(\alpha\beta)^2-8\alpha\beta}}{4},\lambda_2=\frac{-\alpha\beta-\sqrt{(\alpha\beta)^2-8\alpha\beta}}{4}$
      - $\alpha\beta\ge 8$ 时，$\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$，$\lambda_2=\frac{-\alpha\beta-\sqrt{(\alpha\beta)^2-8\alpha\beta}}{4}\le\frac{-\alpha\beta}{4}<-1$
      - $0<\alpha\beta<8$ 时，$\lambda_{1,2}=\frac{-\alpha\beta\pm\left(\sqrt{8\alpha\beta-(\alpha\beta)^2}\right)\mathbf{i}}{4}$

$$|\lambda_{1,2}|=\frac{\sqrt{(-\alpha\beta)^2+\left(\sqrt{8\alpha\beta-(\alpha\beta)^2}\right)^2}}{4}=\frac{\sqrt{8\alpha\beta}}{4}$$

- 当且仅当 $0<\alpha\beta<2$ 时，价格体系是稳定均衡

与供给量由前一个周期的价格决定相比，稳定的条件有所放宽



$y_n=50-\frac{x_n}{2}$ $\quad\frac{y_{n+1}+y_n}{2}=\frac{50}{3}+\frac{x_{n+2}}{3}$ $\quad(40,30)$

$4x_{n+2}+3x_{n+1}+3x_n=400$ $\quad 4z_{n+2}+3z_{n+1}+3z_n=0$

$y_1=20,y_2=32$ $\quad\frac{y_1+y_2}{2}=26$ $\quad x_3=28$ $\quad y_3=36$

$\frac{y_2+y_3}{2}=34$ $\quad x_4=52$ $\quad y_4=24$

$\frac{y_3+y_4}{2}=30$ $\quad x_5=40$ $\quad y_5=30$

$\frac{y_4+y_5}{2}=27$ $\quad x_6=31$ $\quad y_6=\frac{69}{2}$


谢 谢