

# 浙江大学 2011 — 2012 学年春夏 学期

## 《点集拓扑》课程期末考试试卷

课程号: 06110130 开课学院: 数学系

考试试卷: ☒ A 卷、B 卷 (请在选定项上打  $\checkmark$ )

考试形式: ☒ 闭、开卷 (请在选定项上打  $\checkmark$ ), 允许带\_\_\_\_\_入场

考试日期: 2012 年 6 月 12 日 8:00-10:00, 考试时间: 120 分钟

### 诚信考试、沉着应考、杜绝违纪

请注意: 所有题目必须做在答题本上!

做在试卷纸上的一律无效!

请勿将答题本拆开或撕页! 如发生此情况责任自负!

考生姓名: \_\_\_\_\_ 学号: \_\_\_\_\_ 所属院系: \_\_\_\_\_

---

**提示:** 此试卷后面的草稿纸可以撕下; 答题本上无需抄题, 但要标明序号; 在答题本上做题时, 首先使用正面 (右面), 最后写不下时可使用反面; 此试卷在考试结束时需单独回收, 而草稿纸可自行处理.

1. (10 分) 设  $X = \{a, b, c, d\}$ . 令  $\mathcal{S} = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{d\}\}$ . 证明  $\mathcal{S}$  是  $X$  的一个拓扑子基. 并列  
出此拓扑子基生成拓扑中的所有闭集.
2. (10 分) 设  $(X, d)$  是度量空间.  $K$  是紧子集,  $C$  是  $X$  的闭集. 则  $K \cap C = \emptyset$  当且仅当  
 $d(K, C) := \inf\{d(x, y) | x \in K, y \in C\} > 0$ . 给出一个反例说明“紧子集”不能换成“闭集”.
3. 判断是否正确并给出理由.(每小题判断是否正确 2 分, 给出理由 3 分, 本题共 30 分)
  - (a) 可数个闭集的并集是闭集.
  - (b) 连通子集的内部仍为连通子集.
  - (c) 连通子集的边界仍为连通子集.
  - (d)  $[0, 1]$  与  $[0, 1)$  同胚.
  - (e) 度量空间是第二可数空间.
  - (f) 紧 Hausdorff 空间可以找到一个度量使其度量诱导拓扑为原有拓扑.

4. (15 分) 记  $\mathcal{B}_1 = \{[a, b] | a, b \in \mathbb{R}\}$ ,  $\mathcal{B}_2 = \{(a, +\infty) | a \in \mathbb{R}\}$ .
- (a) 验证  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  都是  $\mathbb{R}$  的拓扑基. 其生成的拓扑空间分别记为  $\mathbb{R}_l$  (称为下限拓扑) 和  $\mathbb{R}'$ .
- (b) 比较  $\mathbb{R}$  (带有通常拓扑),  $\mathbb{R}_l$ ,  $\mathbb{R}'$  之间的粗细.
- (c) 证明  $\mathbb{R}_l$  是不连通的.
- (d) 称  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  下半连续, 若对任意  $x_0 \in \mathbb{R}$ , 有  $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0)$ . 证明:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  下半连续当且仅当  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}'$  连续
5. (10 分)  $X = C([0, 1], \mathbb{R})$  表示区间  $[0, 1]$  上的所有连续函数构成的集合. 定义其上度量  $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| | 0 \leq x \leq 1\}$ . 证明  $(X, d)$  是一个完备度量空间. (可以使用数学分析中的结论而无需重复证明.)
6. (10 分) 证明紧空间到 Hausdorff 空间的连续双射是一个同胚.
7. (8 分) 证明  $\mathbb{R}$  中的闭区间  $[0, 1]$  粘合成一点所得到的商空间  $\mathbb{R}/[0, 1]$  与  $\mathbb{R}$  同胚. 如果是将开区间  $(0, 1)$  粘合成一点会怎样?
8. (7 分) 叙述 Urysohn 引理, 并证明一个连通的正规拓扑空间若含有至少两个点, 则必含有不可数多个点.