1、证：不妨设 $X=m$，$Y=n$

$f: X\times Y \longrightarrow mn$

$(x,y) \longmapsto xn+y$

$\forall z \in mn$

$z=kn+l$，$0\le k\le m-1, 0\le l\le n$

故 f 是满射，由带余除法性质知 f 是单射。故 $|X\times Y|=|X||Y|=mn$

2. 证：假设 $2^{n_1}3^{m_1}=2^{n_2}3^{n_2}$，则 $2^{n_1-n_2}=3^{m_2-m_1}$

由于2与3互素，故而 $n_1=n_2$，$m_1=m_2$，i.e. f 是单射。这说明 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 与 $\mathbb{N}$ 的一个无限子集有一一对应，从而 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 可数。从而说明可数集的笛卡尔积是可数集。

3. 证：设 V 是线性空间，

令 $\mathcal{F}=\{A\subset V \mid A$ 是 V 中线性无关向量构成的集合$\}$（非空）

则 $\mathcal{F}$ 按集合的包含关系构成偏序集，任取 $\mathcal{F}$ 的全序子集

$B=\{A_\alpha \mid \alpha\in A, A_\alpha\in\mathcal{F}\}$，则 $\bigcup_{\alpha\in A}A_\alpha$ 是 B 的上界。事实上，$\forall A_\alpha\in B$，

则 $A_\alpha\subset\bigcup_{\alpha\in A}A_\alpha$；$\bigcup_{\alpha\in A}A_\alpha$ 中的所有向量线性无关，假设有一组向量是线性相关的，由于 B 是全序集，故 $\exists\alpha_0\in A$, s.t. A_{α_0} 包含这组向量(矛盾)。故而 $\bigcup_{\alpha\in A}A_\alpha\in\mathcal{F}$。由 Zorn 引理知，$\mathcal{F}$ 中有极大元，记为 H。则 H 的向量组成 V 的一组基（若 V 中有向量 x 不能由 H 线性表示，则 $H\cup\{x\}\in\mathcal{F}$，这与 H 的极大性矛盾）。

4. 证：

假设结论不成立，则有S的非空真子集A，s.t. $\forall x\in A$，$P(x)$均不成立

由于A是良序集，故而A有最小元a' $(a<a')$。依题，$\forall y\in S_{a'}$，$P(y)$均成立，从而$P(a')$成立（矛盾）。故假设不成立。