1.解：注意：将题目中条件“ $X(t)=\left[\frac{t}{h(t)}\right]^{1/2}B(t)$ ”改为“ $X(t)=\left[\frac{t}{h(t)}\right]^{-1/2}B(t)$ ”.

(1) 由于 $B(t)\sim N(0,t)$，所以 $B(h(t))\sim N(0,h(t))$. 从而

$$EB(h(t))=0\text{，}Var\left(B(h(t))\right)=h(t).$$

(2) 对每一个 $t\geq 0$，

$$B(h(t))\sim N(0,h(t))\text{，}X(t)=\left[\frac{t}{h(t)}\right]^{-1/2}B(t)\sim N(0,h(t)),$$

故 $B(h(t))\overset{d}{=}X(t)$.

(3) 设 $s>t$，则有 $\mathrm{cov}(B(h(t)),B(h(s)))=h(t)\wedge h(s)=h(s)$，

$$\mathrm{cov}(X(t),X(s))=\left[\frac{t}{h(t)}\right]^{-1/2}\left[\frac{s}{h(s)}\right]^{-1/2}\cdot\mathrm{cov}(B(t),B(s))=\left[\frac{ts}{h(t)h(s)}\right]^{-1/2}\cdot s\text{，}$$

故 $\mathrm{cov}(B(h(t)),B(h(s)))\neq\mathrm{cov}(X(t),X(s))$，所以作为过程而言，两者不同分布. (注：两个过程同分布是指所有的有限维分布均相同.)

2. 解：(1) $EX(t)=ae^{-\alpha t}$，$Var\left(X(t)\right)=\sigma^4 t$.

(2) 要证 $(X(t),t\geq 0)$ 是正态过程，只需证明其任意的有限维分布时正态分布即可，即证明有限维分布的任意线性组合是正态随机变量.

任给 $0\leq t_1<t_2<\cdots<t_k$，考虑 k 维随机向量 $(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_k))$ 的任意线性组合 $a_1X(t_1)+a_2X(t_2)+\cdots+a_kX(t_k)$，$a_i\in R,1\leq i\leq k$，显然是正态随机变量. 所以，$(X(t),t\geq 0)$ 是正态过程.

(3) 任给 $0\leq t_1<t_2$，考虑 $(X(t),t\geq 0)$ 的增量

$$X(t_2)-X(t_1)=ae^{-\alpha t_2}-ae^{-\alpha t_1}+\sigma^2(B(t_2)-B(t_1)).$$

显然，由 $B(t)$ 的独立增量性可知上述增量具有独立性，从而独立增量性成立. 另一方面，该增量是依赖于时间 t_1,t_2 的，所以不具有平稳性.

3. 证明：下面只证 $X(t)\overset{d}{=}M(t)$，$M(t)\overset{d}{=}|B(t)|$ 的证明见课本 198 页.

$$X(t)=\max_{0\le s\le t}B(s)-B(t)=\max_{0\le s\le t}(B(s)-B(t))=-\min_{0\le s\le t}(B(t)-B(s))$$

$$\overset{d}{=}-\min_{0\le s\le t}(B(t-s))\overset{d}{=}\max_{0\le s\le t}B(t-s)=\max_{0\le s\le t}B(s)=M(t).$$

4. 解：

$$EY(t)=E\left(h\int_0^t X(s)ds\right)=h\int_0^t EX(s)ds=h\int_0^t E(x+\mu s+B(s))ds$$

$$=h\int_0^t (x+\mu s)ds=h\left(xt+\tfrac{1}{2}\mu t^2\right)$$

$$E[Y(t)]^2=E\left(h^2\left(\int_0^t X(s)ds\right)\left(\int_0^t X(u)du\right)\right)$$

$$=h^2E\left(\left(\int_0^t X(s)ds\right)\left(\int_0^t X(u)du\right)\right)$$

$$=h^2\int_0^t\int_0^t E(X(s)X(u))duds$$

$$=h^2\int_0^t\int_0^t\left(x^2+x\mu s+\mu ux+\mu^2us+\sigma^2 s\wedge u\right)duds$$

$$=h^2\left(x^2t^2+x\mu t^3+\tfrac{1}{4}\mu^2t^4+\tfrac{1}{3}\sigma^2t^3\right)$$

$$Var(Y(t))=E(Y(t))^2-(EY(t))^2=\tfrac{1}{3}h^2\sigma^2t^3.$$

5. 证明：积分过程 $X(t)=e^{\int_0^t B(s)ds},t\ge 0$ 是正态过程，且

$$EW(t)=0,\ VarW(t)=\tfrac{1}{3}t^3.$$

从而，$\forall t\ge 0,W(t)\sim N\left(0,\tfrac{1}{3}t^3\right)$. 计算特征函数，并对其赋值，可得

$$EX(t)=Ee^{W(t)}=Ee^{\sqrt{\frac{1}{3}t^2}\cdot\frac{W(t)}{\sqrt{\frac{1}{3}t^2}}}=e^{\frac{1}{3}t^2\cdot\frac{t}{2}}=e^{\frac{1}{6}t^3}.$$

6. 解：$\tau_a=\inf\{t:X(t)=a\}=\inf\{t:xe^{B(t)}=a\}=\inf\{t:B(t)=\ln\frac{a}{x}\}=T_{\ln\frac{a}{x}}$.

其中，T_a 的密度函数由(7.17)式给出：

$$f_a(t)=\frac{|a|}{\sqrt{2\pi}t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{a^2}{2t}},t>0.$$

故τ_a的密度函数为

$$g_a(t)=f_{\ln\frac{a}{x}}(t)=\frac{\left|\ln\frac{a}{x}\right|}{\sqrt{2\pi}t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\left(\ln\frac{a}{x}\right)^2}{2t}},t>0\,.$$

$$E\tau_a=\int_0^\infty t\frac{\left|\ln\frac{a}{x}\right|}{\sqrt{2\pi}t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\left(\ln\frac{a}{x}\right)^2}{2t}}dt=\int_0^\infty\frac{\left|\ln\frac{a}{x}\right|}{\sqrt{2\pi}t^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{\left(\ln\frac{a}{x}\right)^2}{2t}}dt=\infty\,.$$

7. 解：(1) $P(U\le 0)=0$，$P(U\le 1)=1$.

当$u\in(0,1)$时,

$$P(U\le u)=P\left((\sin\theta)^2\le u\right)=P\left(-\sqrt{u}\le\sin\theta\le\sqrt{u}\right)=\frac{2\arcsin\sqrt{u}}{\pi}.$$

(2) 作变量替换$\begin{cases}X_1=r\sin\alpha\\X_2=r\cos\alpha\end{cases},r>0$，$\alpha\in[0,2\pi]$. 相应的雅克比行列式为

$$|J|=\left|\frac{\partial(X_1,X_2)}{\partial(r,\alpha)}\right|=r\,.$$

由于(X_1,X_2)的联合密度函数为

$$p(x_1,x_2)=p(x_1)p(x_2)=\tfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{X_1^2+X_2^2}{2}}=\tfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}.$$

从而，(r,α)的联合密度函数为

$$q(r,\alpha)=\tfrac{1}{2\pi}re^{-\frac{r^2}{2}}.$$

经简单计算可得，α的边际密度函数为

$$p_\alpha(\alpha)=\frac{1}{2\pi},\alpha\in[0,2\pi].$$

所以，α是$[0,2\pi]$上的均匀分布. 进而,

$$\frac{X_1^2}{X_1^2+X_2^2}=\sin^2\alpha\overset{d}{=}U\,.$$

(3) 由(1)可知，U的分布函数为

$$P(U\le u)=\begin{cases}0,u\le 0\\\frac{2\arcsin\sqrt{u}}{\pi},0<u<1\\1,u\ge 1\end{cases}.$$

从而，可计算$1-U$的分布函数

$$P(1-U\le u)=P(U\ge 1-u)=1-P(U\le 1-u)=\begin{cases}0,u\le 0\\ \frac{2\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\sqrt{1-u}\right)}{\pi},0<u<1\\ 1,u\ge 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0,u\le 0\\ \frac{2\arcsin\sqrt{u}}{\pi},0<u<1\\ 1,u\ge 1\end{cases}.$$

故，$1-U\overset{d}{=}U$.

8. 解：不妨假设$t\ge s$，

$$E(Z(s)Z(t))=E\left(\int_0^s (B(v))^2dv\cdot\int_0^t (B(u))^2du\right)$$

$$=E\left(\int_0^t\int_0^s (B(v)B(u))^2dvdu\right)$$

$$=\int_0^t\int_0^s E(B(v)B(u))^2dvdu$$

其中，当$u>v$时，

$$E(B(v)B(u))^2=E(B(v)(B(v)+B(u)-B(v)))^2$$

$$=E\left(B(v)^2+B(v)(B(u)-B(v))\right)^2$$

$$=E\left(B(v)^4+2B(v)^3(B(u)-B(v))+B(v)^2(B(u)-B(v))^2\right)$$

$$=EB(v)^4+2EB(v)^3\cdot E(B(u)-B(v))+EB(v)^2\cdot E(B(u)-B(v))^2$$

$$=3v^2+0+v(u-v)$$

$$=2v^2+vu$$

$$=2(u\wedge v)^2+vu.$$

从而，

$$E(Z(s)Z(t))=\int_0^t\int_0^s \left(2(u\wedge v)^2+vu\right)dvdu$$

$$=\int_0^t\int_0^s 2(u\wedge v)^2dvdu+\int_0^t\int_0^s uvdvdu$$

$$=2\int_0^s\int_u^s u^2dvdu+2\int_0^s\int_0^u v^2dvdu+2\int_s^t\int_0^s v^2dvdu+\int_0^t\int_0^s uvdvdu$$

$$=\tfrac{1}{6}s^4+\tfrac{1}{6}s^4+2\times\tfrac{1}{3}s^3(t-s)+\tfrac{1}{4}t^2s^2$$

$$=\tfrac{2}{3}s^3t-\tfrac{1}{3}s^4+\tfrac{1}{4}t^2s^2 .$$

因此，$E\big(Z(s)Z(t)\big)=-\tfrac{1}{3}(s\wedge t)^4+\tfrac{2}{3}(s\wedge t)^3(s\vee t)+\tfrac{1}{4}(s\wedge t)^2(s\vee t)^2$.

10. 证明：由引理 7.4 可得

$$dX(t)=\left(1+\frac{B(t)}{2}\right)^2 dB(t)+\frac{1}{4}dt=\sqrt{X(t)}dB(t)+\frac{1}{4}dt .$$

14. 解：(1) 由引理 7.5 可得过程 $X(t)$ 满足的随机微分方程为

$$\begin{cases} dX(t)=tdB(t)+B(t)dt \\ X(t)=0 \end{cases};$$

(2) 由引理 7.5 可得过程 $X(t)$ 满足的随机微分方程为

$$\begin{cases} dX(t)=\dfrac{1}{1+t}dB(t)-\dfrac{X(t)}{1+t}dt \\ X(t)=0 \end{cases};$$

(3) 由引理 7.5 可得过程 $X(t)$ 满足的随机微分方程为

$$\begin{cases} dX(t)=\cos B(t)dB(t)-\dfrac{1}{2}X(t)dt \\ X(t)=0 \end{cases};$$

(4) 由引理 7.5 可知

$$dX(t)=1\cdot dB(t)-\left(\beta\cdot e^{-\beta t}\cdot\int_0^t e^{\beta s}B(s)ds\right)'dt+\frac{1}{2}\times 0\cdot dt$$

$$=dB(t)-\left(-\beta^2\cdot e^{-\beta t}\cdot\int_0^t e^{\beta s}B(s)ds+\beta\cdot e^{-\beta t}\cdot e^{\beta t}B(t)\right)dt$$

$$=dB(t)+\left(\beta^2\cdot\int_0^t e^{-\beta t+\beta s}B(s)ds-\beta\cdot B(t)\right)dt$$

$$=dB(t)+\big(\beta\cdot\big(B(t)-X(t)\big)-\beta\cdot B(t)\big)dt$$

$$=dB(t)-\beta X(t)dt$$

从而，过程 $X(t)$ 满足的随机微分方程为

$$\begin{cases} dX(t)=dB(t)-\beta X(t)dt \\ X(t)=0 \end{cases}.$$