积分逼近

luojunxun

2023 年 4 月 9 日

梯形求积公式

: $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$

抛物线求积公式 (Simpon 公式)

$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b))$

Newton-Cote 公式:

把 $[a,b]$ 区间 n 等份, 其分点为

$$x_i = a + ih, \quad i = 0,1,2,\cdots,n, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

过这 $n+1$ 个节点, 构造一个 n 次多项式

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\,\omega'(x_i)} f(x_i)$$

其中 $\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$. 用 $P_n(x)$ 代替 $f(x)$, 得

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx=\sum_{i=0}^n A_i f(x_i),$$
$$A_i=\int_a^b \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\,\omega'(x_i)}dx.$$

误差估计

对于一个一般的估计公式:$\int_a^b f(x)dx \approx \sum\limits_{k=0}^n A_k f(x_k)$

其中 A_k 是不依赖于函数 f 的常数, 如果对于任意的低于 m 次的多项式, 等式精确成立, 对任意 m+1 阶及以上多项式不能精确成立则称求积公式有 m 次代数精度

note: 梯形求积公式的代数精度是 1,Simpon 公式的代数精度是 3,Newton-Cote 公式的代数精度是 n, 当 n 是偶数的时候, 精度达到 n+1

Theorem 5.1: *若 $f(x)\in C^2[a,b]$, 则梯形求积公式有误差估计*

$$\begin{aligned} R_T(f) &= \int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] \\ &= -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta), \quad a\le\eta\le b \end{aligned}$$

Theorem 5.2: *若 $f(x)\in C^4[a,b]$, 则 Simpson 求积公式有误差估计*

$$\begin{aligned} R_S(f) &= \int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right] \\ &= -\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\eta), \quad a\le\eta\le b \end{aligned}$$

复化公式及其误差估计

T_n 复化梯形公式:$\int_a^b f(x)dx=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{x_{k+1}-x_k}{2}[f(x_k)+f(x_{k+1})]=\frac{h}{2}(f(x_0)+f(x_1)+f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1})+f(x_n))=\frac{h}{2}(f(a)+f(b)+2\sum\limits_{k=1}^{n-1}f(a+kh))$

若把区间 $2n$ 等分, 在每个区间上仍用梯形求积公式, 则可得 T_n, T_{2n} 之间的关系式

$$T_{2n}=\frac{1}{2}(T_n+H_n)$$
$$H_n=h\sum_{k=1}^n f\left(a+(2k-1)\frac{b-a}{2n}\right).$$

因为 Simpson 公式用到区间的中点, 在构造复合 Simpson 公式时必须把区间等分为偶数份. 为此, 令 $n=2m, m$ 是正整数, 在每个小区间 $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ 上用 Simpson 求积公式

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx \approx \frac{2h}{6}\left[f\left(x_{2k-2}\right)+4f\left(x_{2k-1}\right)+f\left(x_{2k}\right)\right]$$

其中 $h=\frac{b-a}{n}$, 因此

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \sum_{k=1}^{m}\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{m}\frac{h}{3}\left[f\left(x_{2k-2}\right)+4f\left(x_{2k-1}\right)+f\left(x_{2k}\right)\right] \\ &= \frac{h}{3}\left[f(a)+f(b)+4\sum_{k=1}^{m} f\left(x_{2k-1}\right)+2\sum_{k=1}^{m-1} f\left(x_{2k}\right)\right] =: S_n\end{aligned}$$

称 S_n 为复合 Simpson 公式.