1. 设$\{X_n\}$是一时齐Markov链,状态空间为$\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$,一步转移概率为$p_{01}=p_{32}=p_{67}=1$, $p_{10}=p_{12}=p_{21}=p_{23}=p_{54}=p_{56}=p_{76}=p_{77}=0.5$, $p_{43}=p_{44}=p_{45}=\frac{1}{3}$.

(1)写出所有互达等价类,并判断哪些是闭的?

(2)求出各状态的周期和常返性,并计算正常返态的平均回转时.

(3)计算$\lim_{n\to\infty}p_{45}^{(n)}$和$\lim_{n\to\infty}p_{67}^{(n)}$.

2. 蜘蛛和苍蝇在0和1两个位置上独立地依循Markov链移动一直到它们相遇时,蜘蛛吃掉苍蝇.

它们的初始位置分别是0和1,转移矩阵分别为$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$. 如果假定它们相遇后将永远呆在相遇的位置. 令$X_n$和$Y_n$分别表示$n$时蜘蛛和苍蝇的位置, 令$Z_n = (X_n, Y_n)$.

(1)说明$\{Z_n\}$是一个时齐Markov链,写出状态空间和一步转移矩阵;

(2)计算蜘蛛在位置0吃掉苍蝇的概率.

（3）求蜘蛛遇见苍蝇的平均步数.

3.设$\{X_n\}$是一时齐的不可约$Markov$链，状态空间 $I=\{1,2,3\}$,

一步转移矩阵为：$P=\begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

令$q_i=P(X_{\tau_3-1}=2\mid X_0=i)$，它表示从$i$出发最终从状态2转移到状态3的概率.　计算$q_1$和$q_2$.

4. ξ服从参数为$0<p<1$的几何分布是指:

$$P(\xi=n)=(1-p)^{n-1}p, n=1,2,\ldots$$

证明ξ具有如下的无记忆性:

对任意正整数m,n,

$$P(\xi-m=n \mid \xi>m)=P(\xi=n).$$

5.设顾客到达系统的时间间隔独立同服从参数为p的几何分布. 各个顾客服务时间独立同服从参数为μ的几何分布, 且与顾客到达过程独立.这里$0 < p, \mu < 1$.

系统中只有一个服务员. 用X_n表示n时系统里的顾客数.

则$\{X_n\}$是时齐的Markov链.

(i)写出$\{X_n\}$的一步转移概率;

(ii)$\{X_n\}$正常返当且仅当p和μ满足什么条件;

(iii)求出正常返时$\{X_n\}$的平稳分布.

6.(此题不用做在作业本上)

考虑下面状态转移图对应的时间齐次马氏链.

(1)求出所有的互达等价类, 并指出哪些是闭的;

(2)求出各状态的周期和常返性(需指明暂留,

正常返还是零常返);

(3)计算$\lim_{n\to\infty} p_{43}^{(n)}$.