10.7.

1.(1). $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. 令 $|A-\lambda E| = (\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda-6) \Rightarrow \lambda_1=-2 \quad \lambda_2=3 \quad \lambda_3=6$

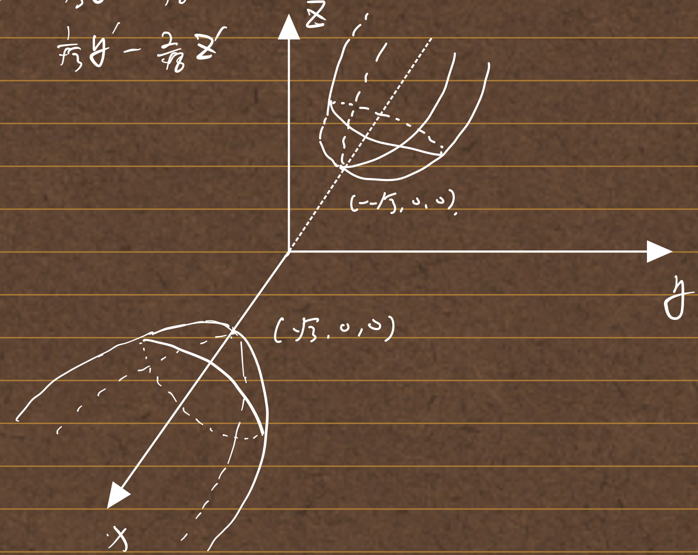
当 $\lambda=-2$ 时对应的特征向量为 $X_1=(1/\sqrt2, 1/\sqrt2, 0)^T = \frac{1}{\sqrt2}(1,1,0)^T$

当 $\lambda=3,6$ 时,同理有 $X_2=(-1/\sqrt3, 1/\sqrt3, 1/\sqrt3) = \frac{1}{\sqrt3}(-1,1,1)$

$X_3=(-1/\sqrt6, 1/\sqrt6, -2/\sqrt6) = \frac{1}{\sqrt6}(-1,1,-2)$

令 $U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt2 & -1/\sqrt3 & -1/\sqrt6 \\ 1/\sqrt2 & 1/\sqrt3 & 1/\sqrt6 \\ 0 & 1/\sqrt3 & -2/\sqrt6 \end{pmatrix}$ $U^TAU = \mathrm{diag}(-2,3,6)$.

现在坐标转换 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = U\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ 即 $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt2}x' - \frac{1}{\sqrt3}y' - \frac{1}{\sqrt6}z' \\ y = \frac{1}{\sqrt2}x' + \frac{1}{\sqrt3}y' + \frac{1}{\sqrt6}z' \\ z = \frac{1}{\sqrt3}y' - \frac{2}{\sqrt6}z' \end{cases}$ 下化为



$-2x'^2+3y'^2+6z'^2+2\sqrt2x'+6\sqrt6z'+14=0$

配方得 $-2(x'-\frac{\sqrt2}{2})^2+3y'^2+6(z'+\frac{\sqrt6}{2})^2+6=0$

令 $\begin{cases} x^* = x'-\frac{\sqrt2}{2} \\ y^* = y' \\ z^* = z'+\frac{\sqrt6}{2} \end{cases}$ 有 $-2x^{*2}+3y^{*2}+6z^{*2}+6=0$.

即 $\frac{x^{*2}}{3}-\frac{y^{*2}}{2}-\frac{z^{*2}}{1}=1$ 双叶双曲面

(3). 令 $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 由 $|\lambda E-A| = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$ $\lambda_1=\lambda_2=1$ $\lambda_3=-2$.

由此解出 A 的三个特征向量分别为 $X_1=(1,1,0)^T$ $X_2=(1,0,-1)^T$ $X_3=(1,-1,1)$.

将 X_1, X_2 正交化,再单位化.令 $\eta_1=\frac{1}{\sqrt2}(1,1,0)^T$ $\eta_2=\frac{1}{\sqrt6}(1,-1,-2)$ $\eta_3=\frac{1}{\sqrt3}(1,-1,1)$

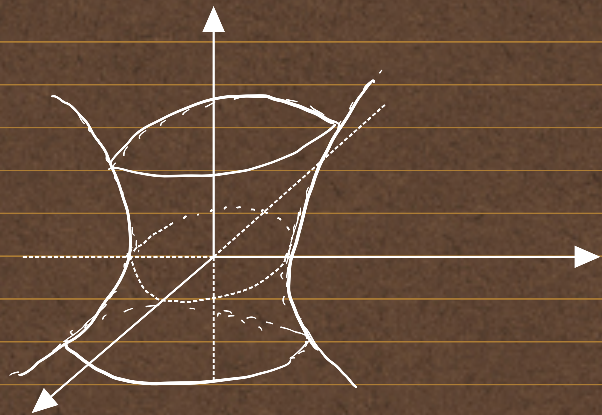
令 $U=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix} 1/\sqrt2 & 1/\sqrt6 & 1/\sqrt3 \\ 1/\sqrt2 & -1/\sqrt6 & -1/\sqrt3 \\ 0 & -2/\sqrt6 & 1/\sqrt3 \end{pmatrix}$. 则 $U^{-1}AU=\mathrm{diag}(1,1,-2)$

在坐标变换 $\begin{cases} x = 1/\sqrt2\,x' + 1/\sqrt6\,y' + 1/\sqrt3\,z' \\ y = 1/\sqrt2\,x' - 1/\sqrt6\,y' - 1/\sqrt3\,z' \\ z = -2/\sqrt6\,y' + 1/\sqrt3\,z' \end{cases}$ 下,原式化为 $x'^2+y'^2-2z'^2-2\sqrt2x'+\frac{4}{\sqrt6}y'+\frac{4}{\sqrt3}z'+1=0$

即为 $(x'-\sqrt2)^2+(y'+\frac{2}{\sqrt6})^2-2(z'-\frac{1}{\sqrt3})^2=1$ 再令 $\begin{cases} x^*=x'-\sqrt2 \\ y^*=y'+\frac{2}{\sqrt6} \\ z^*=z'-\frac{1}{\sqrt3} \end{cases}$ 代入上式.

有 $x^{*2}+y^{*2}-2z^{*2}=1$.

为单叶双曲面.



(3). 令 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}$ 以 $|\lambda E-A|=0=\lambda(\lambda-3)(\lambda+1)$ $\lambda_1=0$ $\lambda_2=-1$ $\lambda_3=3$

分别求出A从属于$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$的特征向量分别为 $x_1=\frac{1}{\sqrt3}(1,1,1)^T$ $x_2=\frac{1}{\sqrt2}(1,0,-1)^T$ $x_3=\frac{1}{\sqrt6}(1,-2,1)^T$

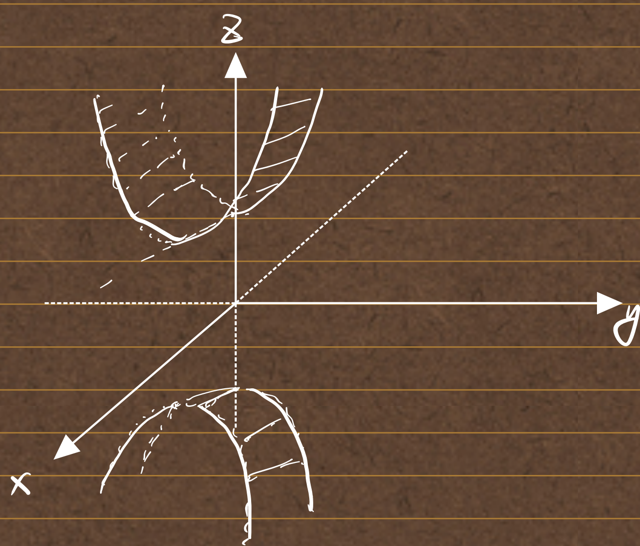
令 $U=(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}1/\sqrt3&1/\sqrt2&1/\sqrt6\\1/\sqrt3&0&-2/\sqrt6\\1/\sqrt3&-1/\sqrt2&1/\sqrt6\end{pmatrix}$ 那么 $U^TAU=diag(0,-1,3)$

即在坐标变化 $\begin{cases}x=1/\sqrt3\,x'+1/\sqrt2\,y'+1/\sqrt6\,z'\\y=1/\sqrt3\,x'+0-2/\sqrt6\,z'\\z=1/\sqrt3\,x'-1/\sqrt2\,y'+1/\sqrt6\,z'\end{cases}$ 下. 原方程化为 $-y'^2+3z'^2+\frac{5}{\sqrt2}y'-\frac{3}{\sqrt6}z'-5=0$

即为 $-(y'-\frac{5}{2\sqrt2})^2+3(z'-\frac{1}{2\sqrt6})^2=2$.

再令 $\begin{cases}y^*=y'-\frac{5}{2\sqrt2}\\z^*=z'-\frac{1}{2\sqrt6}\end{cases}$ 有 $-y^{*2}+3z^{*2}=2$

为双曲柱面.



2.

(2) 令 $A=\begin{pmatrix}4&-2&2\\-2&1&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}$ 由 $|\lambda E-A|=0=\lambda^2(\lambda-6)$ $\lambda_1=\lambda_2=0$ $\lambda_3=6$.

其三个特征向量分别为 $x_1=(1,2,0)^T$ $x_2=(1,0,-2)^T$ $x_3=(2,-1,1)^T$

用Schmidt正交化正交单位化 x_1,x_2,x_3 有 $n_1=\frac{1}{\sqrt5}(1,2,0)^T$, $n_2=\frac{1}{\sqrt{30}}(2,-1,-5)^T$ $n_3=\frac{1}{\sqrt6}(2,-1,1)^T$

令 $U=(n_1,n_2,n_3)=\begin{pmatrix}1/\sqrt5&2/\sqrt{30}&2/\sqrt6\\2/\sqrt5&-1/\sqrt{30}&-1/\sqrt6\end{pmatrix}$ $U^TAU=diag(0,0,6)$.

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 5/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

化简方程为 $6z^2-\frac{4}{\sqrt5}x-\frac{8}{\sqrt{30}}y=0$ 令 $\begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta \end{cases}$ 其中 $\tan\theta=2/\sqrt6$.

化为 $x=\frac{3}{2}\sqrt3 z^2$ 为抛物柱面.

(4). 令 $A=\begin{pmatrix} 2 & -\frac52 & -1 \\ -\frac52 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ $|\lambda E-A|=0=\lambda(\lambda-\frac92)(\lambda+\frac92) \Rightarrow \lambda_1=0\ \ \lambda_2=\frac92\ \ \lambda_3=-\frac92$

得出 $x_1=\frac13(2,2,-1)^T\quad x_2=\frac{1}{\sqrt{18}}(1,1,4)^T\quad x_3=\frac{1}{\sqrt2}(1,-1,0)^T$

在 $U=\begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{18} & 1/\sqrt2 \\ 2/3 & 1/\sqrt{18} & -1/\sqrt2 \\ -1/3 & 4/\sqrt{18} & 0 \end{pmatrix}$ 下化为 $\frac92 y^2-\frac92 z^2-3x=0$

即 $3y^2-3z^2=2x$. 为双曲抛物面.

3. $2x^2+y^2+5z^2+4xz-4xy+2yz+2x+2y+d=0$

为 $2[x+(-y+z+\frac12)]^2-2(-y+z+\frac12)^2+y^2+5z^2+2yz+2y+d=0$

$-2(-y+z+\frac12)^2+y^2+5z^2+2yz+2y+d=-y^2+3z^2+6yz+4y-2z+d-\frac12$

$=-[y-(3z-2)]^2+(3z-2)^2+3z^2-2z+d-\frac12$

$3(z-2)^2+3z^2-2z+d-\frac12=6z^2-14z+d+11.5=6(z-\frac76)^2+d+\frac{10}{3}=0$

故 $d+\frac{10}{3}=0$ 即 $d=-\frac{10}{3}$

4. 曲线表示椭圆时. 表示椭圆抛物面

曲线表示双曲线时. 表示双曲抛物面

曲线表示抛物线时. 表示抛物柱面

5. $A=(a_{ij})_{3\times3}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. $f(x,y,z)=(x,y,z)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=X^TAX$

$\Rightarrow$

$X' = MX$ M是正交阵. $f(x,y,z) = X'^T(M^TAM)X' = \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 0.$

$tr(M^TAM) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0.$

过 过 $O(0,0,0)$, $a(1,1,1)$ 的直线是其一条直母线. 再求与之相垂直的线. 再做叉乘. 可得三条互相垂直的直母线.

$\Leftarrow$. 以三条直母线为轴建坐标系. $X = TX'$ 为变换公式. 则 $X'^T(T^TAT)X' = 0 = X'^T(b_{ij})X'$

则 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ 在其上 故 $b_{11} = b_{22} = b_{33} = 0$

$\Rightarrow a_{11} + a_{22} + a_{33} = tr(X^TAX) = 0$