数学系《随机过程》测验

作业编号__________________姓名________________________学号________________________

一. 设$\{X_n; n \geq 0\}$是时齐的Markov链，状态空间为$\{1,2,3\}$, 一步转移矩阵为: $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

已知$P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = 1/2$. 计算(1)$P(X_2 = 2)$; (2)$P(X_0 = 2, X_2 = 2)$;

(3)$P(X_0 = 2 | X_2 = 2, X_3 = 1)$; (4) $P(X_1 \neq 3, X_2 \neq 3, X_3 = 3 | X_0 = 1)$;

(5) $E(T_3)$, 这里$T_3 = \min\{n \geq 0 : X_n = 3\}$.

二. 设$\{X_n; n \geq 0\}$是时齐的Markov链，状态空间为$\{1,2,3,4,5,6\}$, 一步转移矩阵为：

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. 画出状态转移图；　　2. 求出所有的互达等价类，并指出哪些是闭集；

3. 求出各状态的周期,并指出哪些是正常返状态，哪些是零常返状态,哪些是暂留(或说瞬时)状态；

4. 计算所有正常返态的平均回转时;

5. 若$X_0 = 1$, 计算$\lim_{n\to\infty}(X_n = 1)$和$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 2)$.

三. 设$X_0 = 1$, $I = \{1, 2\}$. 抛一枚均匀的硬币. 若出现正面, 则$\{X_0, X_1, \cdots\}$是时齐Markov链, 状态空间为I, 一步转移矩阵为$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 若出现反面, 则$\{X_0, X_1, \cdots\}$是时齐Markov链, 状态空间为$I$, 一步转移矩阵为$Q = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$.

1. 计算$P(X_3 = 1 | X_1 = 1, X_2 = 1)$;
2. 计算$P(X_3 = 1 | X_1 = 2, X_2 = 1)$;
3. $\{X_0, X_1, \cdots\}$是Markov链吗？说明理由.

四. 设$\{X_n; n\geq 0\}$是时齐的Markov链, 状态空间为整数集$\mathbb{Z}$, 一步转移概率为:$p_{00}=1$, $p_{i,i+1}=p_{i,i-1}=1/2$, $\forall\, i\neq 0$. 对状态i, 令$T_i=\min\{n\geq 0: X_n=i\}$. 设$X_0=1$.

(1)对$N\geq 2$, 计算$E(\sum_{i=0}^{T_N} 1_{\{X_i=1\}})$, 这里$1_{\{X_i=1\}}=\begin{cases}1, & 若X_i=1;\\ 0, & 若X_i\neq 1.\end{cases}$ (2)计算$E(\sum_{i=0}^{\infty} 1_{\{X_i=1\}})$.