2. 求证 $m^*(E)=\inf\{m(O): E\subset O,\ O \overset{\subset}{\text{open}} R\}$.

证明: $LHS=\inf\{\sum_n l(I_n): E\subset \bigcup_n I_n$ 且 $I_n \overset{\subset}{\text{open}} R\}$.

$\forall O \overset{\subset}{\text{open}} R$. O 至多为可数个开集的并. i.e. $O=\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ $J_n \overset{\subset}{\text{open}} R$.

故由可测集的可数可加性: $m(O)=m(\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n)=\sum_{n=1}^{\infty} m(J_n)=\sum_{n=1}^{\infty} l(J_n)$.

从而 $RHS=\inf\{\sum_n l(J_n): E\subset \bigcup_n J_n,\ J_n \overset{\subset}{\text{open}} R\}$. $LHS=RHS$.

3. 设 $E\subset R$. $M>0$. 求证 $m^*(E)=\inf\{\sum l(I_n): I_n \overset{\subset}{\text{open}} R$ 是开区间. $l(I_n)<M$, $E\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\}$.

证明: 已经有 $m^*(E)=\inf\{\sum_n l(I_n),\ I_n \overset{\subset}{\text{open}} R,\ E\subset \bigcup_n I_n\}$. 故只需证 R 中任一开集可写为一簇开区间的并且它们的测度相等. (在相差 ε 的意义下).

由定义. $\exists\{J_n\}$ s.t. $m^*(E)=\sum_n l(J_n)$. 则若 J_n 中 $\exists k>0$. s.t. $l(J_k)>M$.

① $l(J_k)<+\infty$. 即 $J_k=(a.b)$. 则令 $I_1=(a_1,b_1)\subset(a.b)$ $a_1=a$. $b_1=M-\frac{1}{m}+a$.

取 $I_2=(a_2.b_2)$ 其中 $a_2=M-\frac{2}{m}+a$. $b_2=2M-\frac{3}{m}+a$. 以次下去. 必 $\exists n$. s.t. $b_n\geq b$.

此时取 $b_n=b$. 则有 $\sum l(I_n)-l(J_k)=\frac{n-1}{m}$ 而 n 至多是 $[\frac{b-a}{M}]+1$. 令 $m\to\infty$.

则有 $\sum l(I_n)-l(J_k)=0$. 故 $\sum l(I_n)=l(J_k)$. 且 $\forall n$. $l(I_n)\leq M-\frac{1}{m}<M$.

② $l(J_k)=+\infty$. 即 $J_k=(a,+\infty)$. 同①的作法.有:

$$\sum l(I_n)-l(J_k)=\frac{n-1}{m}\leq\frac{[\frac{b-a}{M}]}{m}\leq\frac{\frac{b-a}{M}+1}{m}=\frac{1}{m}+\frac{b-a}{Mm}\quad(\text{这里 } b\to+\infty)$$

令 $m=b^2$. 则 $\sum l(I_n)-l(J_k)\leq\lim_{b\to\infty}(\frac{1}{b^2}+\frac{b-a}{Mb^2})=0$. $\forall M>0$. 固定.

综上有: $m^*(E)=\inf\{\sum l(I_n): I_n$ 开区间, $E\subset\bigcup_n I_n$ 且 $l(I_n)<M.\}$

5. 若 $d(E_1,E_2)=\inf\{d(x_1,x_2): x_1\in E_1.\ x_2\in E_2\}>0$. 求证 $m^*(E_1\cup E_2)=m^*(E_1)+m^*(E_2)$.

证明: 只需证 $E_1\cap E_2=\phi$. (由可测的可数可加性即可得需证的).

反设 $E_1\cap E_2\neq\phi$. 则 $\exists x_0\in E_1\cap E_2$. 则 $d(E_1.E_2)\leq d(x_0,x_0)=0$.

而 $d(E_1.E_2)>0$. 故 $d(E_1.E_2)=0$. 矛盾! 证毕.

6. 设 $m^*(A)<\infty$. $m^*(B)<\infty$. 求证: $|m^*(A)-m^*(B)|\leq m^*(A\triangle B)$.

证明: 先证明 $\forall A.B\subset R$. $m^*(A\setminus B)\geq m^*(A)-m^*(B)$.

① 当 $B\subset A$ 时. 有 $m^*(A)=m^*((A\setminus B)\cup B)\leq m^*(A\setminus B)+m^*(B)$.

即 $m^*(A\setminus B)\geq m^*(A)-m^*(B)$.

② 当 $B\not\subset A$ 时. 有 $m^*(A\setminus(A\cap B))=m^*(A\setminus B)\geq m^*(A)-m^*(A\cap B)$

而 $A\cap B\subset B$. 故 $m^*(A\cap B)\leq m^*(B)$. 从而 $m^*(A\setminus B)\geq m^*(A)-m^*(A\cap B)\geq m^*(A)-m^*(B)$.

这就证明了引理.

从而我们有 $m^*(A\Delta B)=m^*((A\cup B)\setminus(A\cap B))\geq m^*(A\cup B)-m^*(A\cap B)$.

这里不妨设 $m^*(A)\geq m^*(B)$. 则只需证 $m^*(A\cup B)-m^*(A\cap B)\geq m^*(A)-m^*(B)$.

这是显然的，因为 $m^*(A\cup B)\geq m^*(A)$. $m^*(A\cap B)\leq m^*(B)$. (由包含关系).

故原命题得证.

9. 设 $E\subset R$, $0<m^*(E)<\infty$. 求证：$f(x)=m^*((-\infty,x)\cap E)$ 是 x 的连续函数. 由此证明 $I=\{m^*(F):F\subset E\}$ 是有界闭区间.

证明：任取 $x_1, x_2\in R$. 不妨设 $x_2>x_1$.

则有 $f(x_2)-f(x_1)=m^*((-\infty,x_2)\cap E)-m^*((-\infty,x_1)\cap E)=m^*\{[(-\infty,x_1)\cup[x_1,x_2)]\cap E\}-$

$$m^*((-\infty,x_1)\cap E)\leq m^*((-\infty,x_1)\cap E)+m^*([x_1,x_2)\cap E)-m^*((-\infty,x_1)\cap E)$$

$$=m^*([x_1,x_2)\cap E)\leq m^*([x_1,x_2))=l([x_1,x_2))=x_2-x_1.$$

即 $\forall x_1,x_2\in R$. $|f(x_2)-f(x_1)|\leq|x_2-x_1|$. 故 $f(x)$ 一致连续. 从而 f 连续.

我们断言 $I=\{m^*(F):F\subset E\}=[0,m^*(E)]=\{f(x)\mid x\in R\}$. (~~后面证明~~

首先有：$\forall x\in R$. $(-\infty,x)\cap E\subset E$. 故 $f(x)\in I$. i.e. $\{f(x)\mid x\in R\}\subset I$ 中

~~其次：$\forall y\in I$~~. 先证 $[0,m^*(E)]=\{f(x)\mid x\in R\}$. 这是显然的. 因为当 $x\to-\infty$ 时. $f(x)\to 0$. 当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)\to m^*(E)$. 则在广义实数中有 $f(-\infty)=0$ $f(+\infty)=m^*(E)$. 又 f 是连续的. 故 f 可取到 $0\to m^*(E)$ 间的一切值. 从而 $[0,m^*(E)]=\{f(x)\mid x\in R\}$.

其次：$\forall y\in I$, $\exists F\subset E$, $m^*(F)=y$, 但 $0\leq y\leq m^*(E)$. 故 $\exists x_0\in R$. s.t. $y=f(x_0)$.

i.e. $I\subset\{f(x)\mid x\in R\}$. 从而 $I=\{f(x)\mid x\in R\}$. i.e. $I=[0,m^*(E)]$.

故 I 是有界闭区间.

12. 设 $0<m(E)<\infty$. 求证. 有测度皆为 $m(E)$ 的开集列 $\{G_n\}_{n\geq1}$, s.t. $m(E\Delta G_n)\to 0$.

证明：由于 $0<m(E)<\infty$. 则 E 是可测集. 从而 $m(E)=m^*(E)=\inf\{\sum_n l(I_n): E\subset\bigcup_n I_n, I_n\subset_{open} R\}$.

由定义. $\forall \varepsilon_k=\frac{1}{k}>0$, $\exists\{I_n^k\}_{n=1}^{\infty}$ 是 R 中开集列. s.t. $m(E)+\varepsilon_k>\sum_n l(I_n^k)$. (不妨取 I_n 非空)

那么取 $G_k=\bigcup_n I_n^k\subset_{open} R$. (开集的任意并开). 从而 $m(E)+\varepsilon_k>\sum_n l(I_n^k)$).

(~~可数可加性且由命题~~ 由可数可加性 $\sum_n l(I_n^k)=m(G_k)$. i.e. $m(E)+\varepsilon_k>G_k$.

又因为 $E\subset\bigcup_n I_n^k=G_k$. 故 $m(E)\leq m(G_k)$. 从而 $m(E)\leq m(G_k)<m(E)+\varepsilon_k$.

令 $k\to\infty$. 则 $\varepsilon_k\to 0$. 即有 $m(G_k)\to m(E)$. (实际为 $G_k\to E$).

从而 $m(E\Delta G_n)=m(G_n\setminus E)\to 0$. ($n\to\infty$ 时).

14. 求证R中全体可测集有基数2^c

证明: R中可测集全体为Ω. 显然 $\Omega \subset P(R)$. 故 $\bar{\bar{\Omega}} < 2^c$.

下面证明 $\bar{\bar{\Omega}} > 2^c$. 对于Cantor集. 它的~~子集~~测度为0, 故其子集测度也为0. 从而其子集均为可测集. 而我们知道 Cantor集C的基数为c.

故 $\overline{\overline{P(C)}} = 2^c$. 而~~显然~~ $P(C) \subset \Omega$. 故 $\bar{\bar{\Omega}} > 2^c$. ($P(\text{Cantor}) \subset \Omega \subset P(R)$)

从而 $\bar{\bar{\Omega}} = 2^c$

17. 设$E \subset R$, $m(E) > 0$. $0 < \alpha < 1$. 求证有开区间I使$m(I \cap E) > \alpha \cdot m(I)$.

取 $E \subset \bigcup_n I_n$.

① 当 $m(E) = \infty$时. 则 E中一定有区间, 或者是开的或是闭的或是半开半闭. 记为I. 取I°.

则 $m(I^\circ \cap E) = m(I^\circ) > \alpha \cdot m(I^\circ)$

② 当 $m(E) < \infty$时. 则~~∃ ... s.t. $E \subset \bigcup_n I_n$~~ 则 ∃ $\bigcup_n I_n$ $m(I_n) < \infty$ $(\forall n)$.

s.t. $E \subset \bigcup_n I_n$.

从而 $m(E) = m(E \cap (\bigcup_n I_n)) = m(\bigcup_n (E \cap I_n)) \le \sum_n m(E \cap I_n)$

取 I_m 为 s.t. $m(E \cap I_n)$最大的n. 则有 $\sum_n m(E \cap I_n) \le n \cdot m(E \cap I_m)$.

而 $m(E) \geq m(I_m)$ 故 $m(I_m) \le n \cdot m(E \cap I_m)$.

$\Rightarrow m(E \cap I_m) \geq \frac{1}{n} m(I_m)$. 故∃I. s.t. $m(E \cap I) > \alpha \cdot m(I)$.