1.书本习题四　15(**2**)

计算各状态的周期，还需要指出互达等价类，并哪些状态是正常返，哪些是零常返，哪些是暂留，并且计算出正常返态的平均回转时.

2.设$\{X_n\}$是时齐的不可约正常返**Markov**链. 根据结论

"对所有状态i, j都有$f_{ij}=1$"(下一节课证明)和

“如果状态i正常返, 则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_{ii}^{(k)}=\frac{1}{\mu_i}$”

证明：(1)对所有状态i, j, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_{ij}^{(k)}=\frac{1}{\mu_j}$

(2)对所有j, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}P(X_k=j)=\frac{1}{\mu_j}$,不依赖于初始分布.

3. 某人有 3 把伞放在家或办公室用于来往于家和办公室之间，当且仅当天下雨且手边有伞时，带一把伞走，到达后放下，下雨的概率为 $p, 0 < p < 1$. 用 X_n 表示他第 n 次出 (家或办公室) 门时手边的伞的数目，则 $\{X_n\}$ 是一时齐 Markov 链。

(1) 写出 $\{X_n\}$ 的状态空间和一步转移矩阵，并求它的平稳分布.

(2) 计算此人被雨淋的概率的极限，并证明不管 p 取何值，此极限小于 $\frac{1}{12}$.

(3) 计算此人相邻两次被雨淋的平均时间间隔.

4. 独立重复掷骰子，用 S_n 表示前 n 次点数之和，用 Z_n 表示 S_n 除以 4 的余数。则 Z_n 是一时齐的 Markov 链。

(1) 写出 $\{Z_n\}$ 的状态空间和一步转移矩阵，并求它的平稳分布.

(2) 求 $\lim_{n\to\infty} P(S_n$ 是 4 的倍数 $)$.

14. 罐 A 和 B 共装有 N 个球，每次从这 N 个球中等可能地取出一球，然后选一个罐子（选中罐 A 的概率为 p，选中罐 B 的概率为 $1-p$，$0<p<1$），再把取出的球放到这个罐子中，用 X_n 表示 n 次选取后罐 A 中的球数，则 $\{X_n\}$ 是一时齐马尔可夫链.

（1）写出状态空间和一步转移概率；

（2）若 $N=3$，$p=0.5$，求平稳分布和罐 A 变空的平均时间间隔（即求 μ_0）.