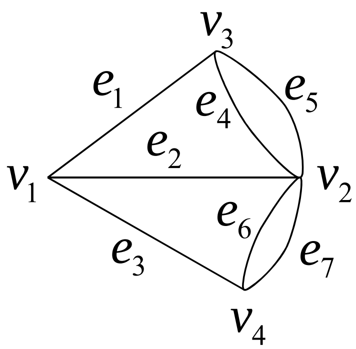
图论模型

浙江大学　谈之奕

图

数学建模 MATH T

- 图（graph）
  - 有序二元组 $G=(V,E)$
    - V 为顶点集，V 中元素称为顶点（vertex）
    - E 为边集，E 中元素称为边（edge）
    - E 中每条边 e 与 V 中两个顶点关联（incident）
      - 若与边关联的两个顶点有序，则称图为有向图（digraph），否则称为无向图
  - 度
    - 无向图 G 中与顶点 v 关联的边的数目称为 v 的度（degree），记为 $\deg_G(v)$，或 $d(v)$
      - 图的所有顶点的度的最大值与最小值分别称为最大度和最小度，记为 $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$
      - （握手定理）所有顶点度之和等于边数的 2 倍 $\sum_{v\in V}\deg_G(v)=2|E|$



$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$

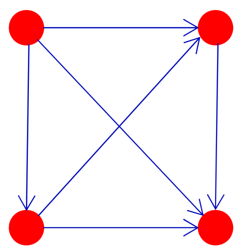
$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}$

$e_1=v_1v_3$，$e_2=v_1v_2$，$e_3=v_1v_4$，

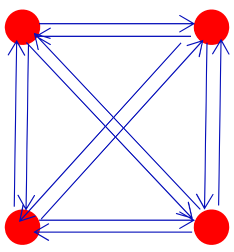
$e_4=v_2v_3$，$e_5=v_2v_3$，

$e_6=v_2v_4$，$e_6=v_2v_4$

图可以用以点表示顶点，以曲线段表示边的图形来表示，但图与图形表示（diagrammatic representation）中点和曲线段在图形中的相对位置无关



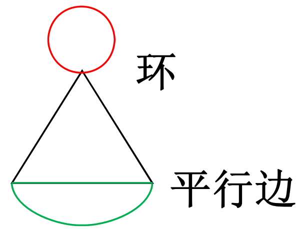
竞赛图（tournament）



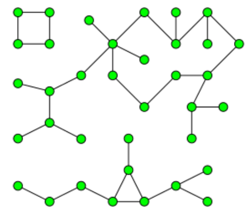
有向图与无向图

简单图

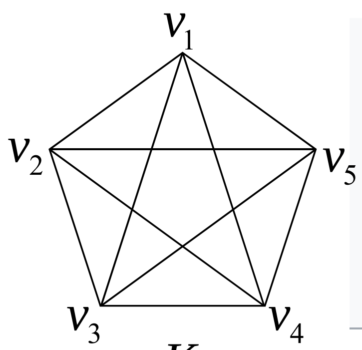
- 简单图
  - 两端点相同的边称为环（loop），两端点分别相同的多条边称为平行边（parallel edges）
  - 既没有环，也没有平行边的图称为简单图（simple graph）。不是简单图的图称为多重图（multigraph）
- 完全图
  - 任何两个不同顶点之间都有边相连的简单图称为完全图（complete graph）
  - n 个顶点的完全图记为 K_n，K_n 的边数为 $\dfrac{n(n-1)}{2}$
- 简单图的顶点数与边数
  - 若 $G=(V,E)$ 为简单图，则边数的上界为 $|E| \leq \dfrac{|V|(|V|-1)}{2}$
  - 边数接近上界的称为稠密图（dense graph），边数远离上界的称为稀疏图（sparse graph）



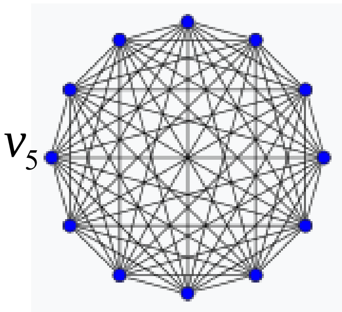
多重图



稀疏图



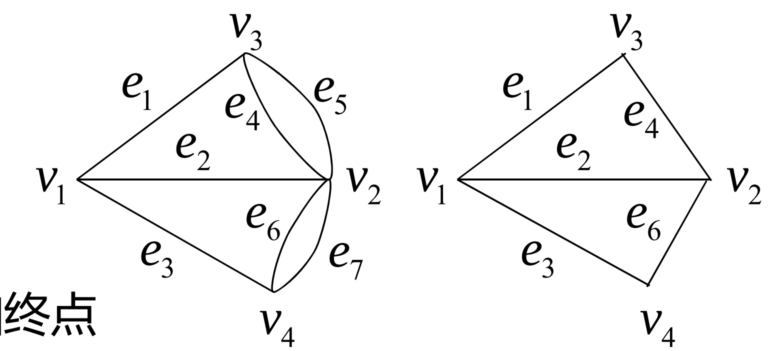
K_5



K_{12}

路

- 途径、路、迹、圈
  - 顶点和边交替出现的序列 $v_{i_0}e_{i_1}v_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k}v_{i_k}$，且序列中与每条边相邻的两个顶点为该边的两个端点，称为连接顶点 v_{i_0} 和 v_{i_k} 的途径（walk）
    - 若图为简单图，可省略途径中边的符号
  - 经过边互不相同的途径称为迹（trail）
    - 起点和终点相同的迹称为闭迹
  - 经过顶点互不相同的途径称为路（path）
    - 起点和终点相同，其余顶点互不相同，也不与起点和终点相同的途径称为圈（cycle）
- 路的长度
  - 边赋权图中一条路所含边的权之和称为它的长度



$v_1e_1v_3e_4v_2e_5v_3e_1v_1e_2v_2e_6v_4e_3v_1e_2v_2e_7v_4$

迹 $v_1v_3v_2v_1v_4v_2$

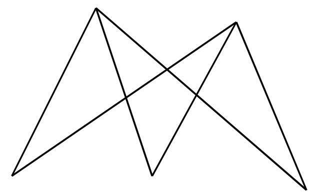
路 $v_1v_3v_2v_4$

圈 $v_1v_3v_2v_1$

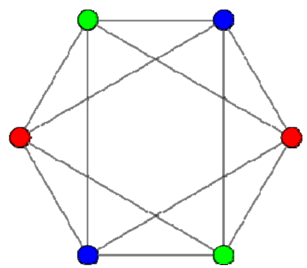
二部图与连通

数学建模
MATH T

- 二部图
  - 若图的顶点集可以划分为两个非空集合 X 和 Y，使得图中任一条边的两个端点分属 X,Y 两个集合，则称该图为二部图（bipartite graph），记为 $G=(X\cup Y, E)$
    - X 中所有顶点与 Y 中所有顶点都有边相连的二部图称为完全二部图
  - G 是二部图当且仅当 G 中不存在奇圈
- 连通
  - 若无向图中两顶点 u,v 之间有路相连，则称 u,v 连通（connected）
  - 无向图中任意两顶点均连通的图称为连通图（connect graph）



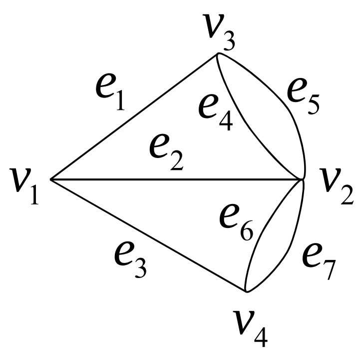
完全二部图 $K_{2,3}$

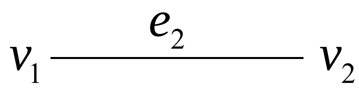


完全3部图 $K_{2,2,2}$

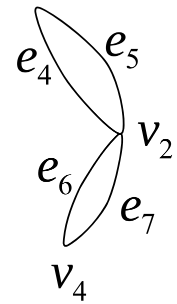
图

- 子图
  - 图 $G'=(V',E')$ 称为图 $G=(V,E)$ 的一个子图（subgraph），若 $V'\subseteq V$，$E'\subseteq E$，且 G 中边的关联关系在 G' 中保持不变
    - 生成子图：$V'=V$
    - 导出子图：$G(V')$, $G\setminus V'$, $G(E')$, $G\setminus E'$
- 树
  - 连通的无圈图称为树（tree）
  - 图 G 的为树的生成子图为称生成树（spanning tree）

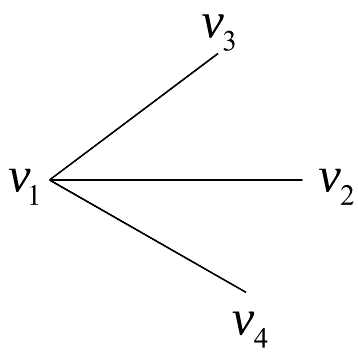


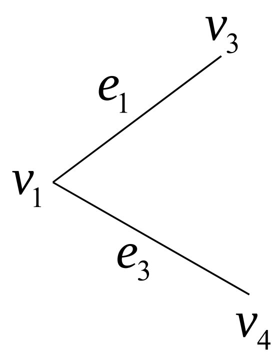


$G(\{v_1,v_2\})$

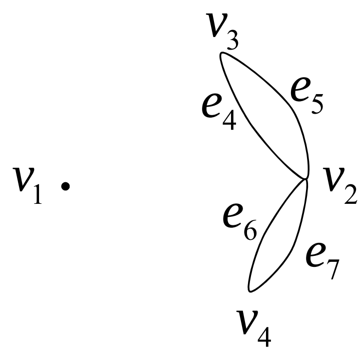


$G\setminus\{v_1\}$





$G(\{e_1,e_3\})$

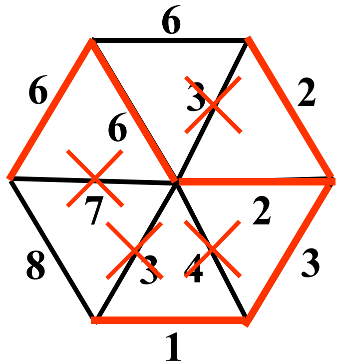


$G\setminus\{e_1,e_2,e_3\}$

最小生成树

数学建模
MATH T

- 最小生成树（minimum spanning tree，MST）
  - 赋权图所有生成树中总权和最少的生成树称为最小生成树
- Kruskal 算法
  - 将连通图 $G=(V,E)$ 的所有边按权非降顺序排列
  - $F=\varnothing$ ，$j=1$
  - 若图 $T=(V,F\cup\{e_j\})$不含圈，则令 $F=F\cup\{e_j\}$
  - 若 $|F|=|V|-1$，终止，$T=(V,F)$ 即为最小生成树。否则，返回上一步



Otakar Borůvka
（1899－1995）
捷克数学家

Joseph Bernard Kruskal
(1928 –2010)
美国数学家、计算机科学家

Borůka O, O jistém problému minimálním (About a certain minimal problem), *Práce mor. Přírodově d. spol. v Brně III*, 3, 37-58, 1926

Kruskal JB. On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 7, 48-50, 1956

最短路

- 最短路
  - 图 $G=(V,E)$ 中起点为 s，终点为 t 的长度最短的路称为 s 到 t 的最短路（shortest path）
- 最短路的算法
  - Bellman–Ford算法：无负权圈图上某个顶点到其余顶点的最短路
  - Dijkstra算法：非负权图上某个顶点到其余顶点的最短路
    - Dijkstra算法目前可在 $\Theta(|E|+|V|\log|V|)$时间内实现
  - Floyd–Warshall算法：无负权圈图上所有点对之间的最短路

Fredman ML, Tarjan RE. Fibonacci heaps and their uses in improved network optimization algorithms. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 34 (3), 596–615, 1987.

Edsger Wybe Dijkstra
（1930 –2002）
荷兰计算机科学家
1972年Turing奖得主

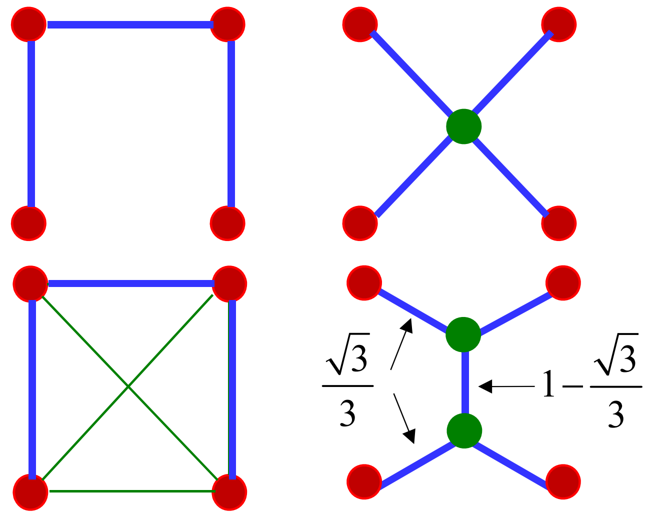
Robert W Floyd
（1936 –2001）
美国计算机科学家
1978年Turing奖得主

Robert Endre Tarjan
(1948-)
美国计算机科学家
1986年图灵奖得主
1982年首届ICM
Nevanlinna奖得主

最短连接

- 最短连接
  - 给定**Euclidean**平面上 n 个点，如何用总长度最短的若干条线段将它们连接起来
- 用最小生成树解决最短连接问题
  - 构造 n 个顶点的赋权完全图 K_n ，边的权为它的两个端点的**Euclidean**距离
  - 求 K_n 的最小生成树
- 最小Steiner树问题（minimum Steiner tree）
  - 允许增加任意多个Steiner点的最短连接
- Gilbert-Pollak猜想
  - 最小Steiner树长度不小于最小生成树长度的$\frac{\sqrt{3}}{2}$倍
    - $n=3,4,5,6$ 时猜想成立

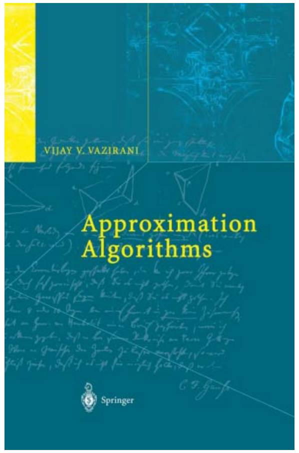
Gilbert EN, Pollak HO. Steiner minimal trees. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 16, 1–29, 1968.



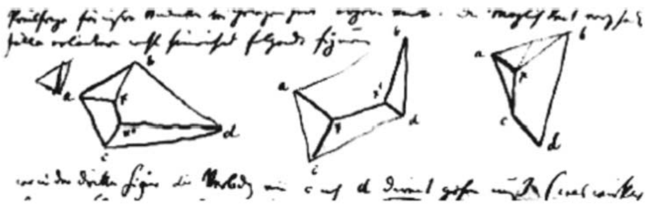
Pollak HO. Some remarks on the Steiner problem. *Journal of Combinatorial Theory A*, 24, 278-295, 1978.
Du DZ, Hwang FK, Yao EY, The steiner ratio conjecture is true for five points. *Journal of Combinatorial Theory A*, 38, 230-240, 1985.
Rubinstein JH, Thomas DA, The Steiner ratio conjecture for six points. *Journal of Combinatorial Theory A*, 58, 54-77, 1991.

最小Steiner树

数学
建模
MATH T



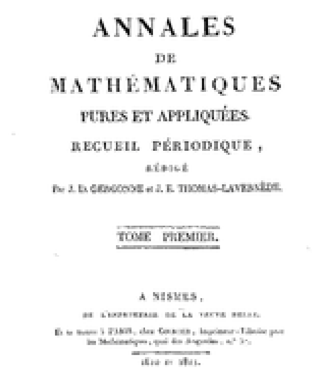
Vazirani VV. *Approximation Algorithms*. Springer, 2004
封面题图：Gauss 致天文学家Schumacher的信（1836）



Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)
德国数学家

"I have on occasion considered the railroad connection between Harburg, Bremen, Hannover and Braunschweig, and I myself have thought that this problem would be an excellent prize problem for our students."

Joseph Diez Gergonne （1771－1859）
法国数学家


ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.
RECUEIL PÉRIODIQUE,
TOME PREMIER.
A NISMES,

Annales de Mathématiques pures et appliquées，又名Annales de Gergonn，1810-1831间出版

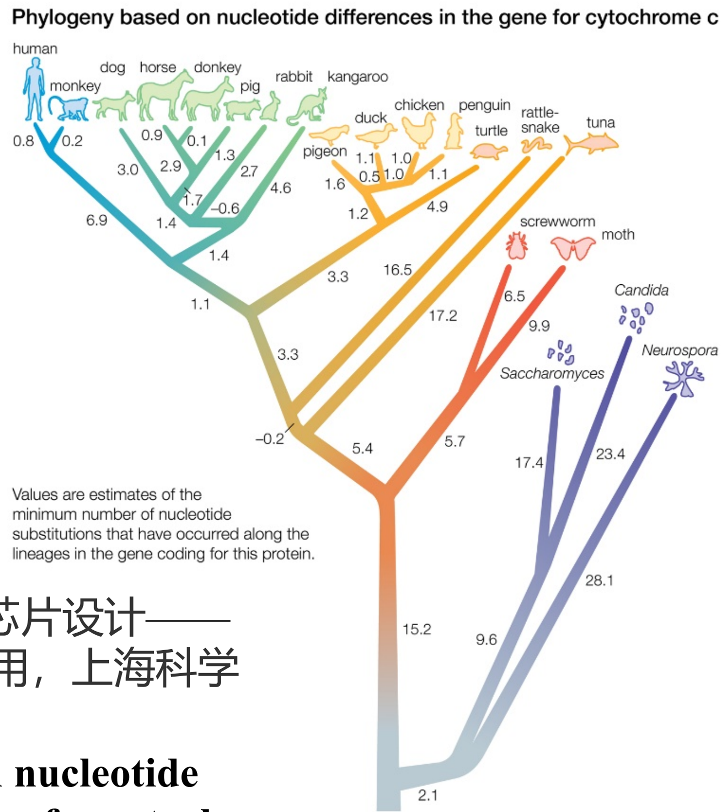
Gergonne JD. Solutions purement géométriques des problèmes de minimis proposés aux pages 196, 232 et 292 de ce volume, et de divers autres problèmes analogues. *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, 1, 375–384, 1810

最小Steiner树

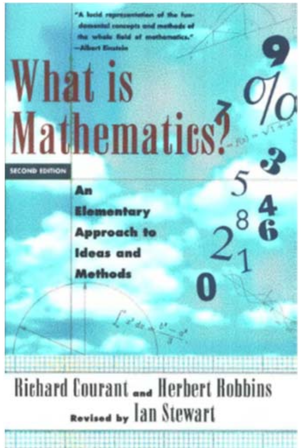
数学
建模
MATH T

- 应用
  - 进化树
  - 芯片设计

Korte B, Vygen J, 芯片设计——组合优化的特殊应用，上海科学技术出版社，2009.



Phylogeny based on nucleotide difference in the gene for cytochrome C, Encyclopædia Britannica



Jakob Steiner
（1796－1863）
瑞士数学家

§5. STEINER'S PROBLEM

1. Problem and Solution

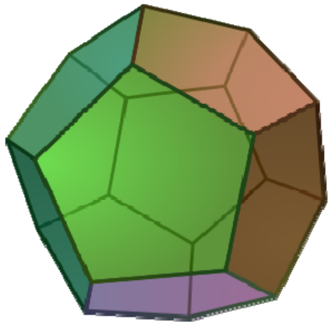
A very simple but instructive problem was treated by Jacob Steiner, the famous representative of geometry at the University of Berlin in the early nineteenth century. Three villages A, B, C are to be joined by a

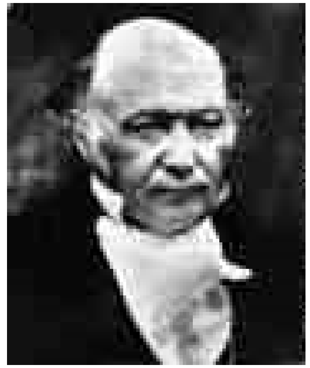
Courant R, Robbins H, *What Is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*, 1941年初版, 1996年Oxford University Press出版修订本(中译本：什么是数学:对思想和方法的基本研究，左平、张饴慈译，复旦大学出版社)

Hamiltion图

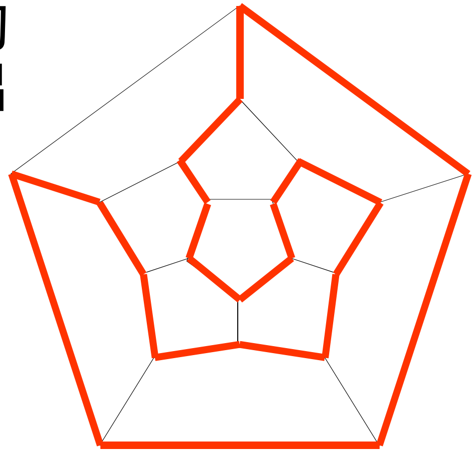
- Hamiltion圈与Hamiltion图
  - 经过图的所有顶点恰好一次的圈称为 Hamilton 圈（Hamilton cycle）
  - 存在Hamilton圈的图称为Hamilton图
- Icosian game（Hamiltion,1857）
  - 一个正十二面体的二十个顶点各代表一个城市，是否有一条从某个城市出发，沿正十二面体的棱行走，经过每个城市恰好一次，最后回到出发城市的路线

Amsterdam, Ann Arbor, Berlin, Budapest, Dublin, Edinburgh, Jerusalem, London, Melbourne, Moscow, Novosibirsk, New York, Paris, Peking, Prague, Rio di Janeiro, Rome, San Francisco, Tokyo, Warsaw





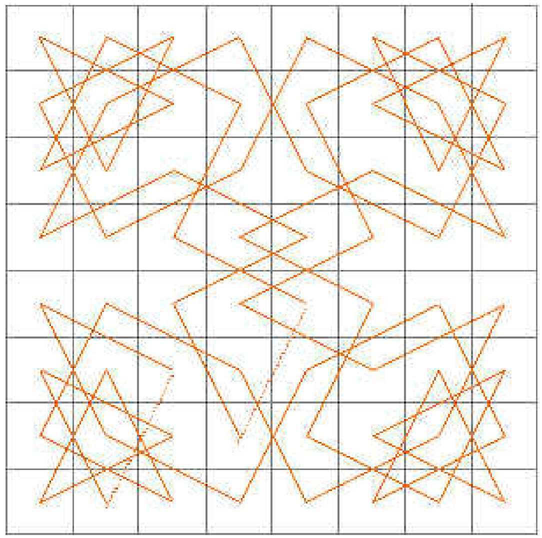
William Rowan Hamilton
爱尔兰数学家
(1805-1865)



Hamiltion图

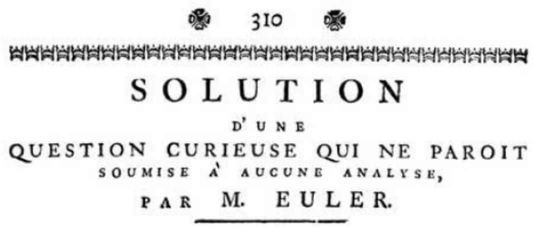
数学
建模
MATH T

- 骑士环游（Knight’s tour）
  - 在 8×8 国际象棋棋盘上，马能否按其走子规则，从一个格子出发，经过其它格子恰好一次，最后回到起点
    - 构造“跳马图”，每一格子为图的一个顶点，两个格子之间有边相连当且仅当马可按走子规则从一个格子跳到另一个格子
  - $m\times n\,(m\le n)$ 方格棋盘对应的“跳马图”为Hamiltonian图，除非
    - m,n 均为奇数
    - 或 $m=1,2,4$
    - 或 $m=3, n=4,6,8$



Euler L, Solution of a curious question which does not seem to have been subjected to any analysis, *Mémoires de l‘Academie Royale des Sciences et Belles Lettres*, 15, 310–337, 1759

Schwenk AJ. Which rectangular chessboards have a knight’s tour? *Mathematics Magazine*, 64, 325-332, 1991.

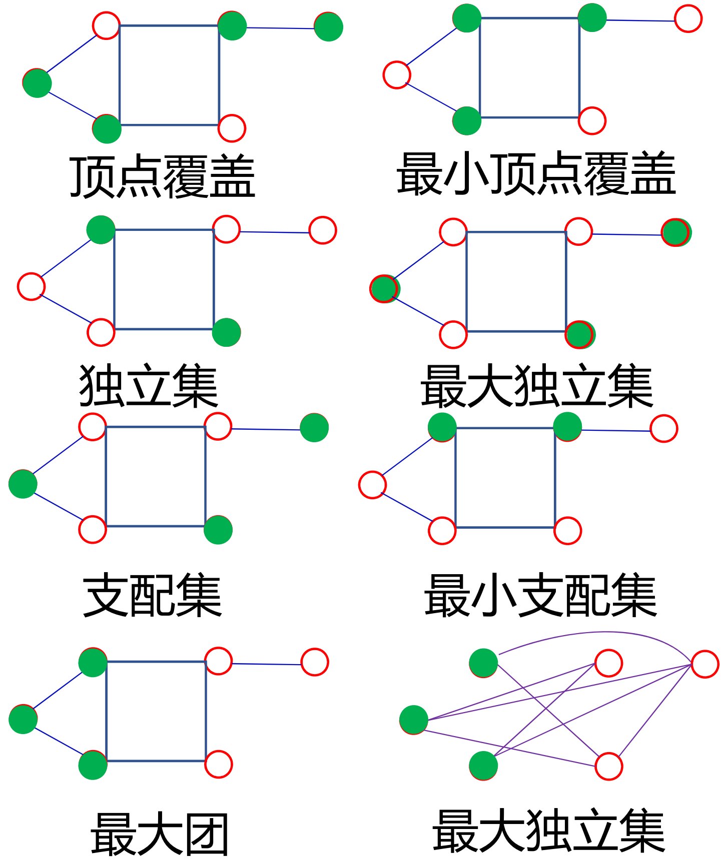

310

SOLUTION
D'UNE
QUESTION CURIEUSE QUI NE PAROIT
SOUMISE À AUCUNE ANALYSE,
PAR M. EULER.

数学建模 MATH T

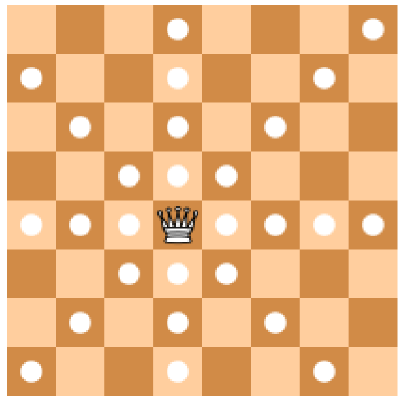
特殊顶点集

- 顶点覆盖、独立集、支配集与团
  - V 的子集 S 称为 G 的顶点覆盖（vertex cover），若 E 中每条边至少有一个端点在 S 中
  - V 的子集 S 称为 G 的独立集（independent set），若 S 中任何两个顶点在 G 中均不相邻
  - V 的子集 S 称为 G 的支配集（dominated set），若任意 S 中顶点均与某个 $V \setminus S$ 中顶点关联
  - V 的子集 S 称为 G 的团（clique），若 G 中任何两个顶点在 S 中均相邻
- 特殊顶点集的关系
  - S 是 G 的独立集当且仅当 $V \setminus S$ 是 G 的顶点覆盖
  - S 是 G 的独立集当且仅当 S 是 $G^c = (V, E^c)$ 的团



皇后问题

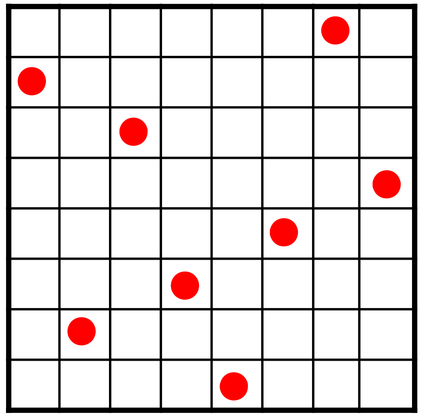
- 皇后问题
  - 八皇后问题　　　　　　最大独立集
    - 在 8×8 国际象棋棋盘上，最多可放置几个皇后，使得任一皇后不会被其他皇后吃掉
  - 五皇后问题　　　　　　最小支配集
    - 在 8×8 国际象棋棋盘上，最少需放置几个皇后，使得任何一个格子上的棋子可被至少一个皇后吃掉
- 皇后问题的图论模型
  - 构造“皇后图”，每个格子为图的一个顶点，两个格子之间有边相连当且仅当位于一个格子中的皇后可吃掉另一个格子中的子

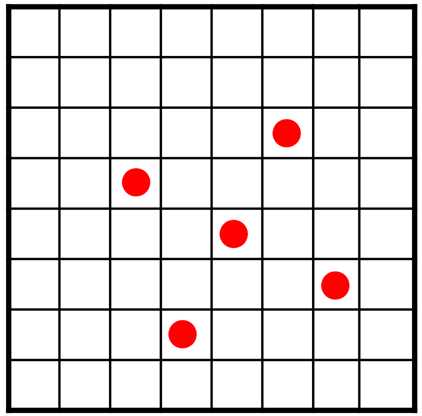


皇后图（Queen's graph）

5：10(2), 6：4(1), 7：40(6)
8：92(12), 9：352(46)
10: 724(92)，……
27: 34,907,967,154,122,528
(29,363,495,934,315,694)

皇后问题不同解的数量

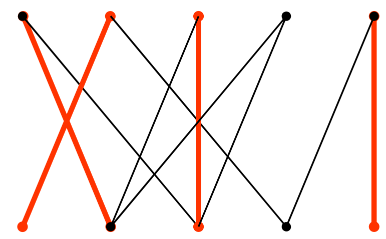




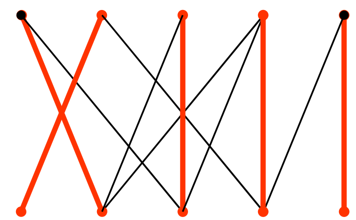
匹配

- 匹配
  - 图 $G=(V,E)$ 边集 E 的一个非空子集 M 称为 G 的一个匹配（matching），若 G 中任一顶点至多与一条 M 中的边关联
    - 赋权图的匹配的权为匹配中包含的边的权之和
- 完美匹配与最优匹配
  - 若 G 中所有顶点都与匹配 M 中某条边关联，则称 M 为完美匹配（perfect matching）
  - 无权图中边数最多的匹配称为最大基数匹配
  - 赋权图中权最大的匹配称为最大权匹配
  - 若赋权图存在完美匹配，权最小（大）的完美匹配称为最小（大）权完美匹配

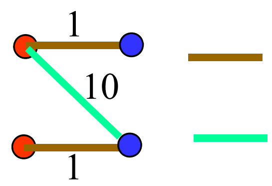
指派问题



最大基数匹配，非完美匹配



完美匹配



完美匹配
(最大基数匹配)
最大权匹配

Hall定理

数学
建模
MATH T

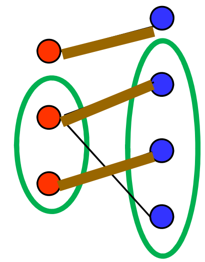
- Hall定理
  - 设 $G=(X\cup Y,E)$ 为二部图，则存在匹配 M，使得 X 中的任一个顶点均与 M 中某条边关联的充要条件是 $|S|\le|N_G(S)|,\forall S\subseteq X$，这里 $N_G(S)$ 为 G 中所有与 S 相邻的顶点集
- Frobenius定理
  - 设 $G=(X\cup Y,E)$ 为二部图，则 G 有完美匹配的充要条件是 $|X|=|Y|$，且对任意 $S\subseteq X$ 或 $S\subseteq Y$，均有 $|S|\le|N_G(S)|$

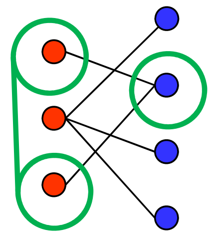
Philip Hall
（1904－1982）
英国数学家

Ferdinand Georg Frobenius
（1849－1917）
德国数学家

Hall P, On Representatives of Subsets, *Journal of the London Mathematical Society*, 10 (1): 26–30, 1935.

Frobenius GF, *Über zerlegbare Determinanten*. Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 274–277, 1917.



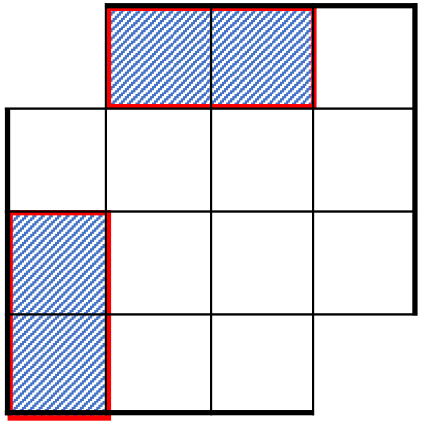


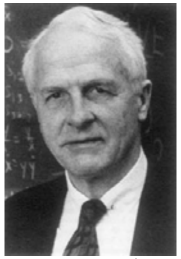
Hall定理

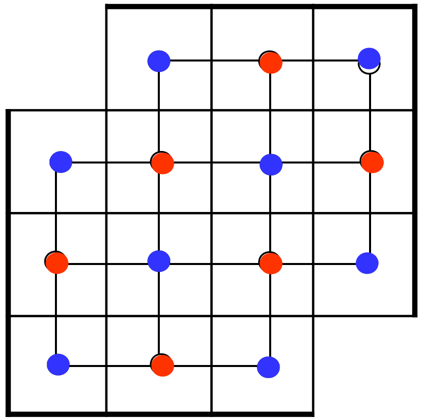
数学建模 MATH T

• Hall定理的等价定理

Hall定理	完美匹配存在性
König–Egerváry定理	**0-1**矩阵的项秩与覆盖
König定理	二部图的匹配与边覆盖
Menger定理	顶点互不相同的路
最大流最小割定理	网络流
Birkhoff–Von Neumann定理	双随机矩阵分解
Dilworth定理	偏序集中的链与反链







Denes König
匈牙利数学家
(1884-1944)

Jenő Egerváry
匈牙利数学家
(1891-1958)

Karl Menger
奥地利数学家
(1902-1985)

Garrett Birkhoff
美国数学家
(1911-1996)

Robert Palmer Dilworth
美国数学家
(1914-1993)

Hall定理

数学建模
MATH T

- **Putnam 2012B3**
  - **A round-robin tournament of $2n$ teams lasted for $2n-1$ days, as follows. On each day, every team played one game against another team, with one team winning and one team losing in each of the n games. Over the course of the tournament, each team played every other team exactly once. Can one necessarily choose one winning team from each day without choosing any team more than once?**
    - 任取 m 天，必有至少 m 支队在这 m 天中至少获胜一场
      - 任取 m 支队，若不合要求，其中必有一支在这 m 天的比赛中均失败，它的 m 个对手队即为所求
    - 构造二部图 $G=(X\cup Y,E)$，其中 X 中顶点代表各天，Y 中顶点代表各队，每队对应的顶点与该队获胜日期对应的顶点有边相连
    - G 满足Hall定理条件，故存在关联 X 中所有顶点的匹配，该匹配所关联的 Y 中顶点即为所求的 $2n-1$ 支队

William Lowell Putnam Mathematical Competition

2012B3
总分前189名该题得分

得分	人数	2分	4人
10分	44人	1分	21人
9分	2人	0分	48人
8分	3人	空白	61人

欧洲冠军联赛

- 欧洲冠军联赛
  - Article 18： Match system – round of 16, quarter-finals and semi-finals
    - The round of 16 pairings are determined by means of a draw in accordance with the following principles:
      - Clubs from the same association cannot be drawn against each other
      - Group winners must be drawn against runners-up from a different group
      - The runners-up play the first leg at home
    - The eight winners of the round of 16 contest the quarter-finals. The quarter-final pairings are determined by means of a draw

——Selected from "Regulations of the UEFA Champions League 2015-18 Cycle, 2017/18 Season"

资格赛（按联赛水平分配名额）（**First/Second/Third qualifying round, play-off round**）

小组赛（**Group stage**）（**32**队，**8**小组）

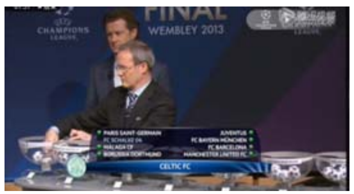
淘汰赛（**Knockout phase**）（**Round of 16, quarter-final, semi-final, final**）

欧洲冠军联赛

数学
建模
MATH T

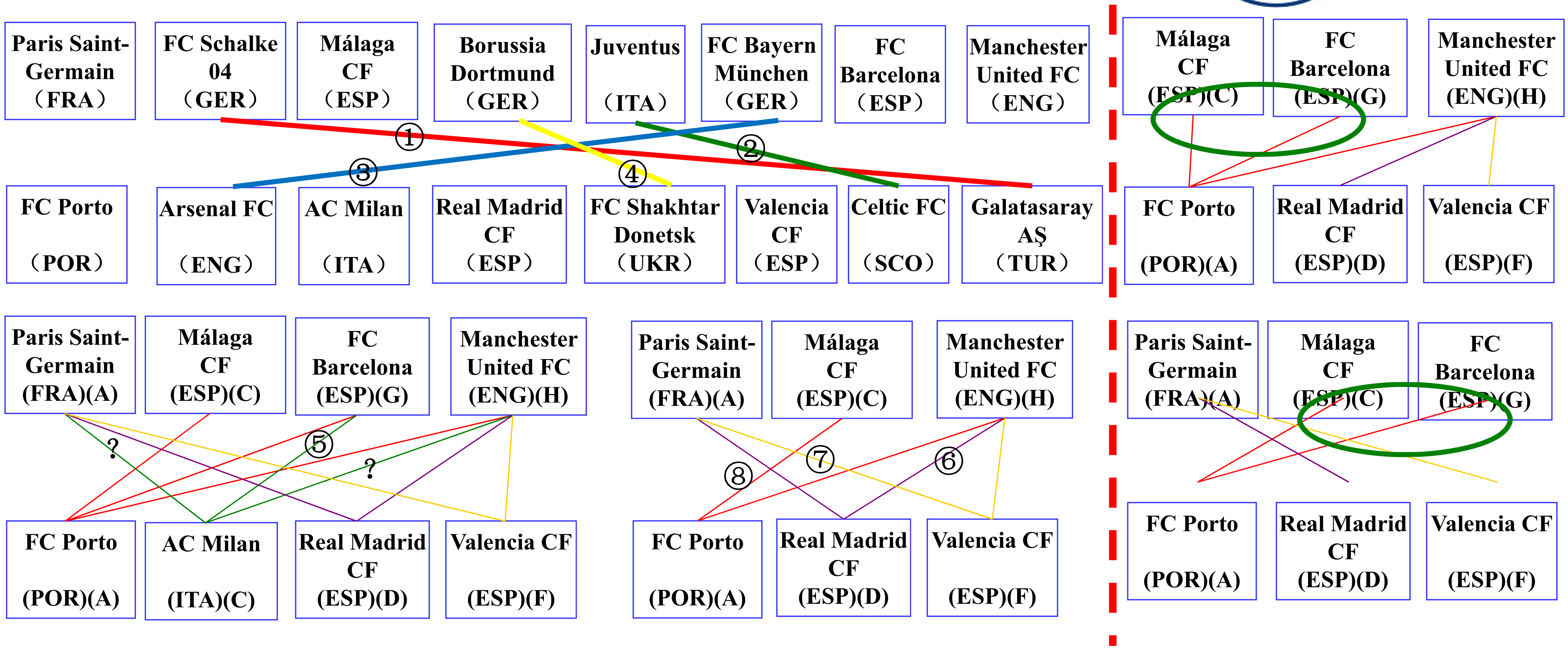
- UEFA Champions League 2012/13 Season

	A	B	C	D	E	F	G	H
winner	Paris Saint-Germain（FRA）	FC Schalke 04（GER）	Málaga CF（ESP）	Borussia Dortmund（GER）	Juventus（ITA）	FC Bayern München（GER）	FC Barcelona（ESP）	Manchester United FC（ENG）
runners-up	FC Porto（POR）	Arsenal FC（ENG）	AC Milan（ITA）	Real Madrid CF（ESP）	FC Shakhtar Donetsk（UKR）	Valencia CF（ESP）	Celtic FC（SCO）	Galatasaray AŞ（TUR）


欧洲冠军联赛

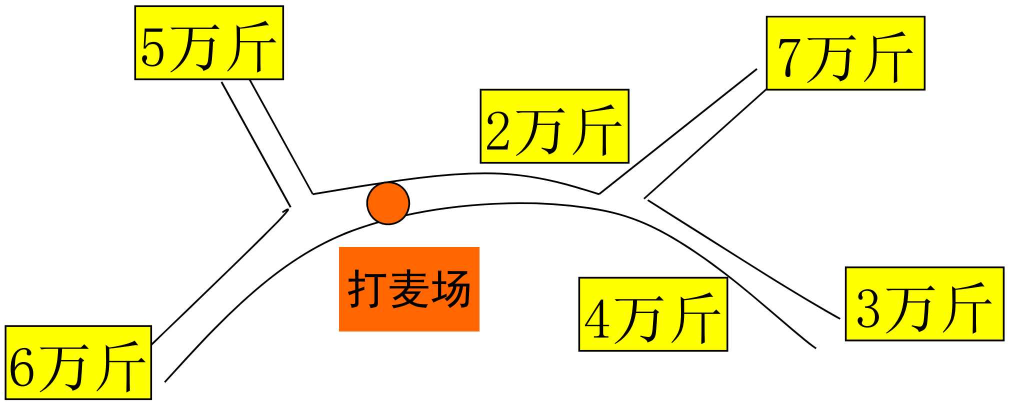
数学建模
MATH T



选址问题

数学建模 MATH T

- 打麦场的选址问题
  - 有了固定的发点和固定的道路来寻求最好的收点，使运输力为最经济的问题
  - 图上的1-median选址问题



第 11 卷 第 1 期 数学学报 Vol. 11, No. 1
1961 年 3 月 ACTA MATHEMATICA SINICA March, 1961

数学方法在麦收中的应用* **

華罗庚等

在中共北京市委农村工作部的統一領导下，中国科学院数学研究所、力学研究所、中国科学技术大学、北京师范学院、北京农业机械化学院、北京师专、北京工农师院等七个单位的部分师生，参加了北京市郊的麦收工作。这次工作的着眼点在于試用数学方法来选定运輸力最省的打麦場場址的問題。在工作中也遇到了不少其他可以运用数学方法来处理的問題。本文是由这次工作的技术資料中选摘几段而写成的，着重在方法和結論，証明說得簡单一些，对急待应用而在数学上感覚困难的讀者，不妨将証明略去不讀。

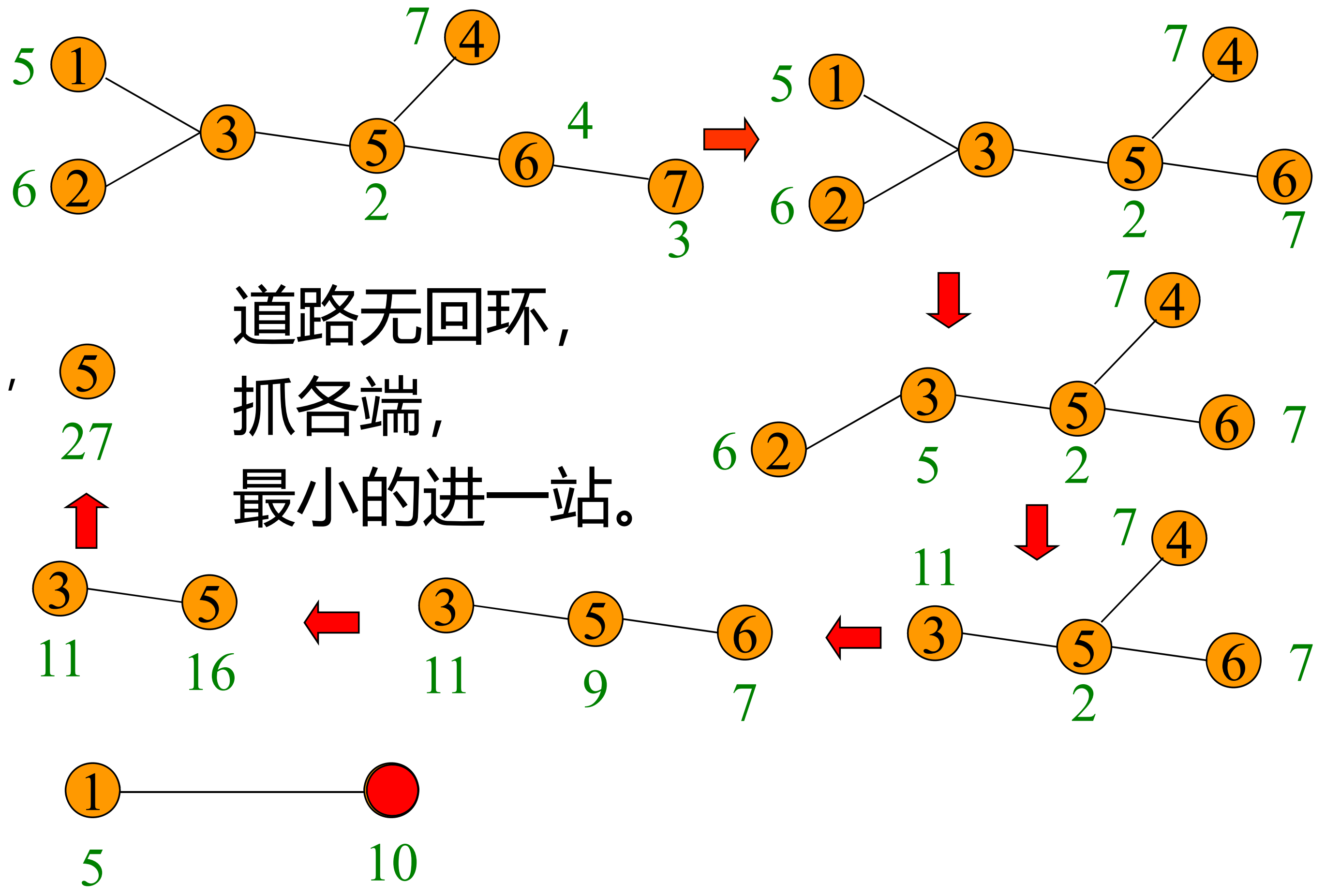
华罗庚等，数学方法在麦收中的应用．数学学报，1961, 11，63-75.

Goldman AJ, Optimal center location in simple networks, *Transportation Science*, 5, 212-221, 1971.

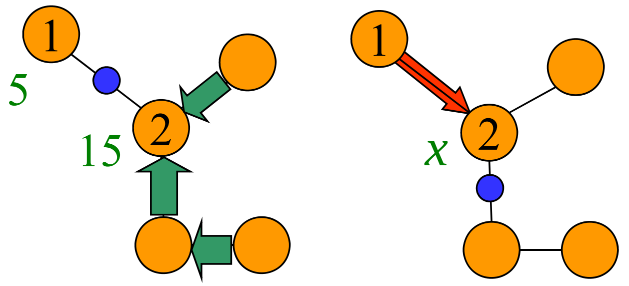
打麦场的选址问题

数学建模
MATH T

- 打麦场的选址问题
  - 若只有两站，应在产量多的麦田建站
  - 若①是各端产量最小者，②是①的邻点
    - 在①处或①②之间建场，不如在②处建场
    - 若不在①处或①②之间建场，①的麦子进入麦场必经过②



道路无回环，
抓各端，
最小的进一站。

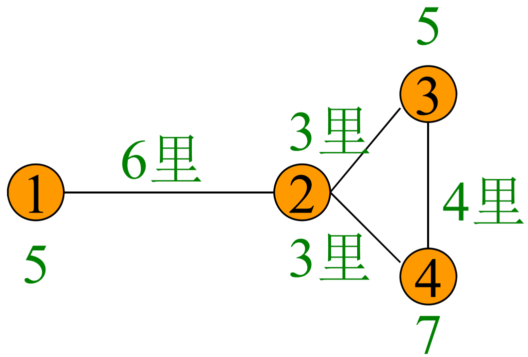


数学建模
MATH T

打麦场的选址问题

- 打麦场的选址问题

  道路有回环，每圈甩一段，
  化为无回环，然后照样算。
  甩法有不同，结果一一算，
  算后再比较，最优可立断。

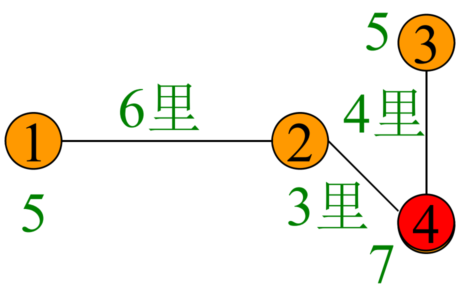


When no cycles are among the roads,
Take each of the ends,
Let the minimum move to the next.

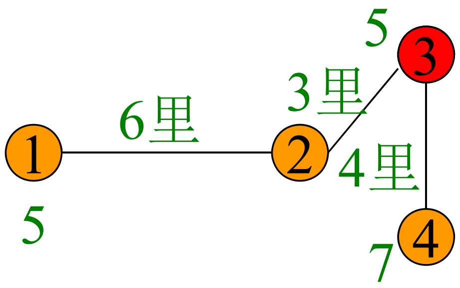
When cycles are among the roads,
Get rid of one edge of each cycle,
To reduce to the case of no cycles,
And then, compute in the previous way

For all different ways of taking off cycles,
Compute the results, one by one,
By comparing all results,
The optimum will be obtained.

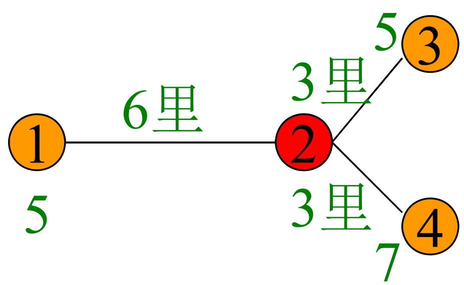
Burkard RE, OR Utopia, *European Journal of Operational Research*, 119, 224-234,1999



$$5\times 9+5\times 4=65$$



$$5\times 9+7\times 4=73$$



$$5\times 6+5\times 3+7\times 3=66$$

七桥问题

数学建模 MATH T

- 七桥问题
  - 在Konigsberg城，有七座桥梁建在Pregel河上，是否有一条从城中某处出发，经过每座桥梁恰好一次，最后回到出发点的路线
  - Danzig（今波兰格但斯克）市长Karl Leonhard Gottlieb Ehler致信Euler，转述了Danzig当地数学教授Heinrich Kuhn的问题

图论的起源可追溯到大数学家欧拉（Leonhard Euler）。1736 年欧拉来到德国的哥尼斯堡（Konigsberg，大哲学家康德的家乡，现在是俄罗斯的加里宁格勒），发现当地市民们有一项消遣活动，就是试图将下图中的每座桥正好走过一遍并回到原起点，从来没有人成功过。欧拉证明断这件事是不行能的，并写了一篇论文，通常以为这是图论的开始。

目前尚没有发现Euler曾到过Konigsberg的历史记载

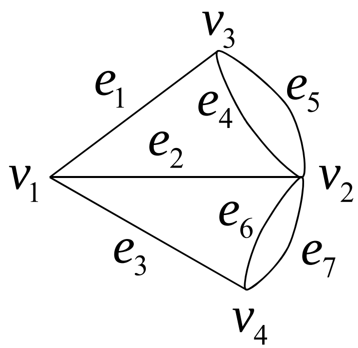
Konigsberg（哥尼斯堡），1255年由条顿骑士团建立的要塞，后为普鲁士公国的首府，德国东普鲁士的行政中心，1945年划归苏联，改名为加里宁格勒（Kaliningrad），现为俄罗斯的“飞地”

著名数学家希尔伯特（David Hilbert），哥德巴赫（Christian Goldbach），作家霍夫曼（E. T. A. Hoffmann，代表作胡桃夹子与鼠王）均出生于Konigsberg。哲学家康德（Immanuel Kant）一生居住在Konigsberg

数学
建模
MATH T

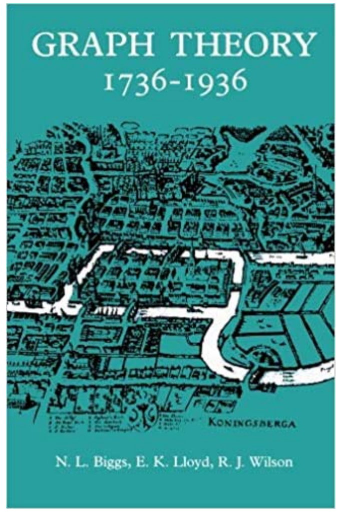
七桥问题

- Euler图
  - 经过图的所有边恰好一次的闭迹称为Euler回路（Eulerian circuit）。存在Euler回路的图为Euler图（Eulerian graph）
  - 一连通图是Euler图的充要条件是图中没有奇度顶点
  - 以河流分割而成的城市区域为顶点，桥梁为边，边的端点为该桥梁连接的两片区域。七桥问题等价于在该图中寻找一条闭迹



Euler L, Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis (The solution of a problem relating to the geometry of position). *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 8, 128–140, 1741

Leonhard Euler
(1707-1783)
瑞士数学家



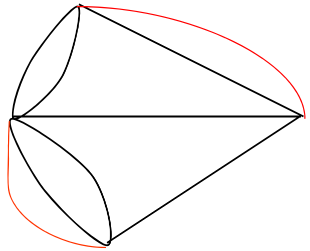
Biggs NL, Lloyd EK, Wilson RJ, Graph Theory 1736-1936, Oxford University Press, 1999

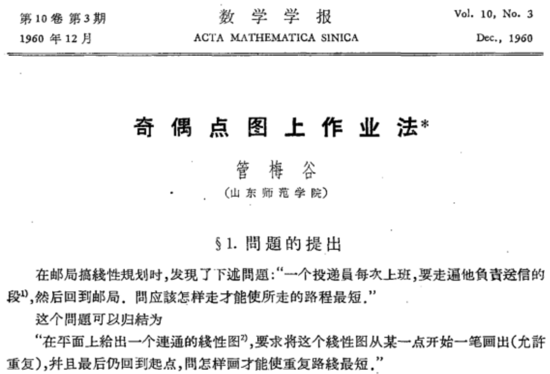
Euler对七桥问题的研究被公认为现代图论研究的起源

中国邮递员问题

数学
建模
MATH T

- 中国邮递员问题（Chinese Postman Problem，CPP）
  - 一个投递员每次上班，要走遍他负责送信的段，然后回到邮局。问应该怎样走才能使所走的路程最短
- 中国邮递员问题与Euler图
  - 将邮递员走过的区域建模为赋权图。街道为边，街道交汇处为顶点，边的权为街道的长度
  - 若赋权图是Euler图，任何一条Euler回路都是中国邮递员问题的最优解
  - 若赋权图不是Euler图，寻找一条总长度最短的回路，该回路可能经过某些边两次以上





第10卷 第3期　　数 学 学 报　　Vol. 10, No. 3
1960 年 12 月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　Dec., 1960

奇 偶 点 图 上 作 业 法*

管 梅 谷
（山 东 师 范 学 院）

§1. 問題的提出

在邮局搞綫性规划时，发現了下述問題："一个投递員每次上班，要走遍他負責送信的段[1]，然后回到邮局．問应該怎样走才能使所走的路程最短．"

这个問題可以归結为

"在平面上給出一个連通的綫性图[2]，要求将这个綫性图从某一点开始一笔画出（允許重复），并且最后仍回到起点，問怎样画才能使重复路綫最短．"

Edmonds J, Johnson EL, Matching, Euler tours and the Chinese postman. *Mathematical Programming*, 5, 88-124, 1973.

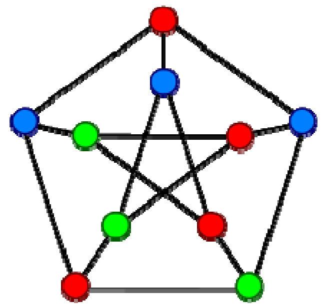
Kwan's article referred to optimizing a postman's route, was written by a Chinese author, and appeared in a Chinese math journal. （http://www.nist.gov/dads/HTML/chinesePostman.html）

管梅谷，奇偶点图上作业法，数学学报, **10, 263-266, 1960**

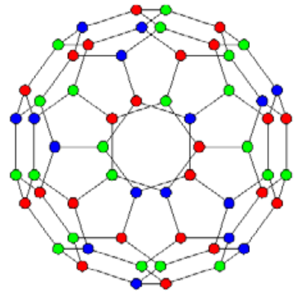
Kwan Mei-Ko, Graphic programming using odd or even points. *Chinese Mathematics*, 1, 273-277, 1962.

着色

- 顶点着色
  - 图 G 的顶点 k 着色是指将图 G 的每一个顶点用 k 种颜色之一着色，使得相邻的顶点不染同一种颜色
  - 图的顶点 k 着色等价于将图的顶点集划分为 k 个两两不相交的独立集之并
  - 图可顶点 k 着色的最小的 k 值称为图的色数（chromatic number），记为 $\chi(G)$
- 边着色
  - 图 G 的边 k 着色是指将图 G 的每一条边用 k 种颜色之一着色，使得相邻的边不染同一种颜色
  - 图的边 k 着色等价于将图的边集划分为 k 个两两不相交的匹配之并
  - 图可边 k 着色的最小的 k 值称为图的边色数（edge chromatic number），记为 $\chi'(G)$

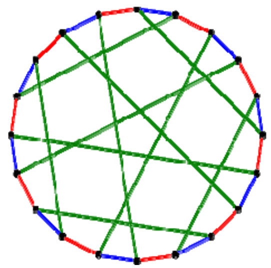


Petersen 图



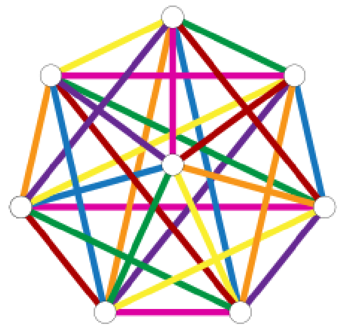
Buckyball图

$\chi(G)=3$



Desargues图

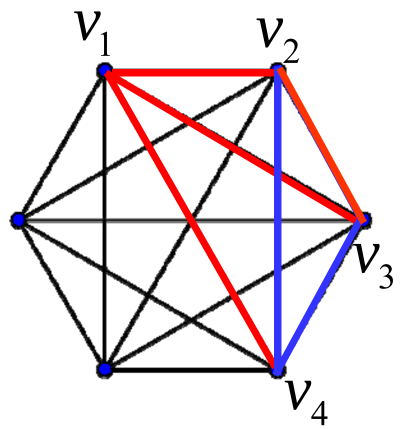
$\chi'(G)=3$

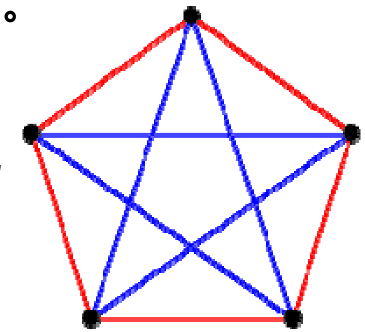


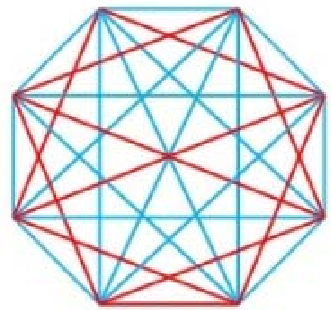
K_8 的边**7**着色

Ramsey数

- 红蓝着色
  - 用红、蓝两种颜色对完全图 K_6 的边进行着色，每条边着两种颜色中的一种，着色后的图中要么存在一个边全是红色的团 K_3，要么存在一个边全为蓝色的团 K_3
    - 任取 K_6 的一个顶点 v_1，与它关联的 5 条边中至少有三条着同一种颜色，不妨设为红色，其中三条边的另一端点分别为 v_2, v_3, v_4
    - 若边 v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4 均着蓝色，则它们组成一蓝色的 K_3。若 v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4 中有一条边着红色，不妨设为 v_2v_3 ，则 v_1, v_2, v_3 组成一个红色的 K_3
  - 对 K_5 进行类似着色，存在一种着色方案，其中既无红色的 K_3，也无蓝色的 K_3







Ramsey数

数学
建模
MATH T

- Ramsey数
  - 用红、蓝两种颜色对K_n的边进行着色，每条边着两种颜色中的一种。给定正整数 s,t，要求任一着色后的图中要么存在一个边全为红色的 K_s，要么存在一个边全为蓝色的K_t。n 的最小值称为Ramsey数，记为 $r(s,t)$

$r(3,3)=6 \quad r(4,4)=18, r(4,5)=25$

$r(3,4)=9, r(3,5)=14, r(3,6)=18, r(3,7)=23, r(3,8)=28, r(3,9)=36$

Erdös asks us to imagine an alien force, vastly more powerful than us, landing on Earth and demanding the value of $R(5,5)$ or they will destroy our planet. In that case, he claims, we should marshall all our computers and all our mathematicians and attempt to find the value. But suppose, instead, that they ask for $R(6,6)$. In that case, he believes, we should attempt to destroy the aliens.

——Spencer J, *Ten Lectures on the Probabilistic Method*

Frank Plumpton Ramsey (1903 –1930)

英国数学家、哲学家、经济学家

McKay BD, Radziszowski SP. R(4,5)=25. *Journal of Graph Theory*, 19, 309-322, 1995.

Ramsey FP. A contribution to the theory of taxation, *The Economic Journal*, 37: 47–61, 1927

Ramsey FP. A mathematical theory of saving, *The Economic Journal*, 38: 543-559, 1928

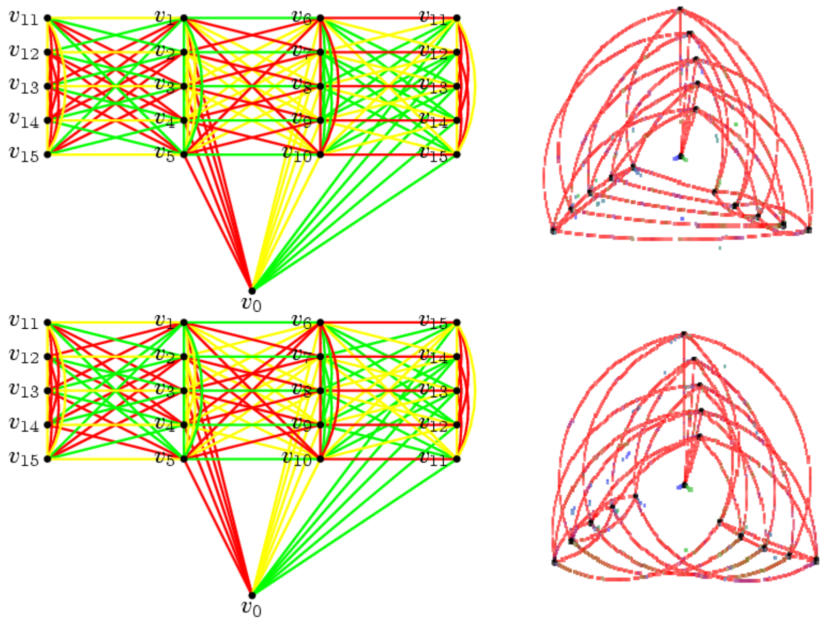
Ramsey FP, On a problem of formal logic, *Proceedings London Mathematical Society*, *S2*-30, 264–286, 1930.

Ramsey数

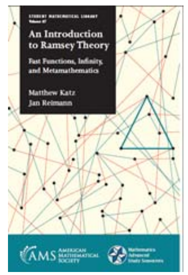
数学建模
MATH T

- Ramsey数
  - （IMO 1964）17 位科学家中每一位和其余16 位通信，在他们的通信中所讨论的仅有三个问题，而任两位科学家通信时所讨论的是同一问题，证明至少有三位科学家通信时所讨论的是同一问题
    - 选定科学家 v_1，他和其它16 位科学家中至少 6 位讨论的是同一问题
    - 若这 6 位科学家中的其中两位讨论的也是该问题，则这两位与 v_1 三人讨论的是同一问题
    - 若这 6 位科学家中的任两位讨论都是另两个问题之一，则由 $r(3,3)=6$，其中至少有三位讨论的是一个问题
  - $r(3,3,3)=17$

Greenwood RE, Gleason AM, Combinatorial Relations and Chromatic Graphs, *Canadian Journal of Mathematics,* 7, 1-7, 1955.

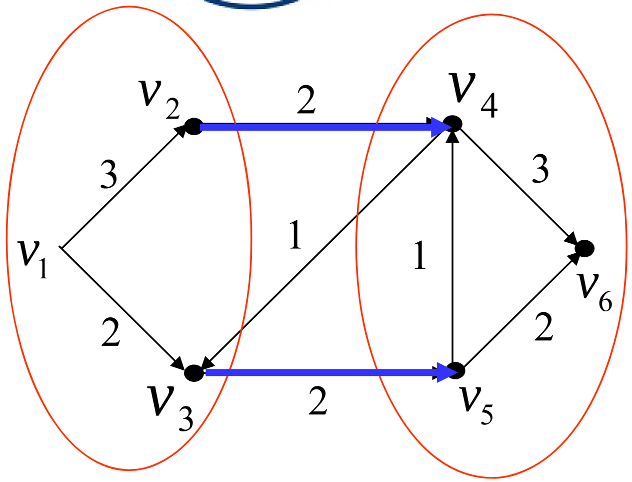


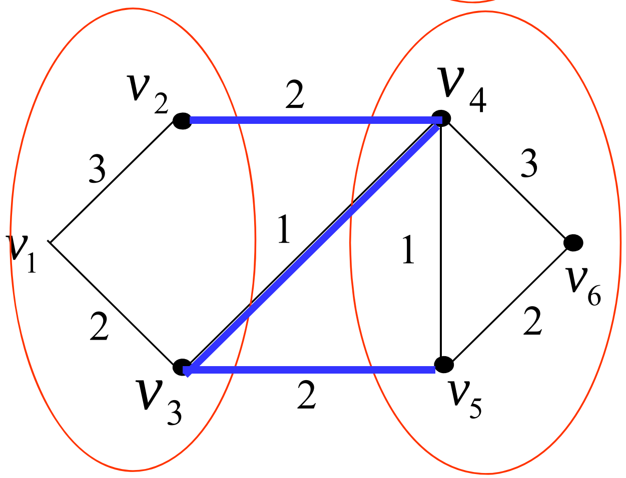
Katz M, Reimann J. *An Introduction to Ramsey Theory: Fast Functions, Infinity, and Metamathematics*, AMS, 2018.



割

- 割
  - 设 $S \subseteq V$ 为图 $G=(V,E)$ 顶点集的任一子集，$\overline{S}=V\setminus S$，边集 $(S,\overline{S})$ 称为 G 的割（cut）
    - 若 G 为无向图，$(S,\overline{S})$ 为端点分属 S 与 $\overline{S}$ 的边的集合
    - 若 G 为有向图，$(S,\overline{S})$ 为起点属于 S，终点属于 $\overline{S}$ 的弧的集合
  - 赋权图中割的权之和称为割量
    - 图中割量最小的割称为最小割（minimum cut）
    - 图中割量最大的割称为最大割（maximum cut）



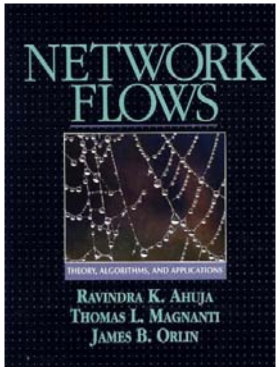


网络流

数学
建模
MATH T

- 网络（network）
  - 有向图 $N=(V,A)$
    - 以 v 为起点和终点的弧的集合分别记作 v^+, v^-
  - 对任一弧 $a\in A$，其容量（capacity）为非负数 $u(a)$，费用为数 $c(a)$
  - 对任一顶点 $v\in V$，其平衡量为数 $b(v)$
    - $\sum_{v\in V} b(v)=0$
- 网络流（flow）
  - 对任一弧 $a\in A$，流经弧 a 的流量为非负数 $f(a)$
    - (弧容量限制) $f(a)\le c(a)$
    - (顶点流量限制) $\sum_{a\in v^+} f(a)-\sum_{a\in v^-} f(a)=b(v)$

Ravindra K. Ahuja
(1956-)
印裔数学家



optym

Our story:

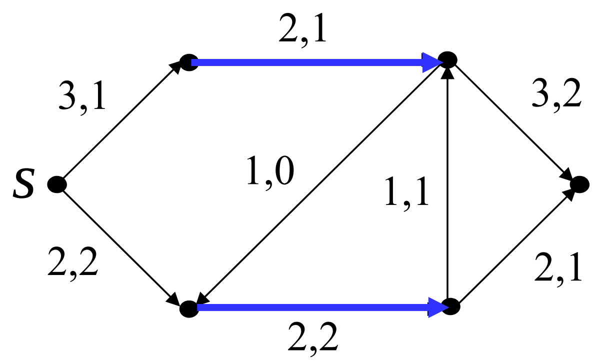
Optym was founded in 2000 by an MIT professor who literally wrote the book on network optimization. By combining network optimization algorithms with deep industry knowledge, we have solved complex decision problems arising in the transportation and logistics industry.

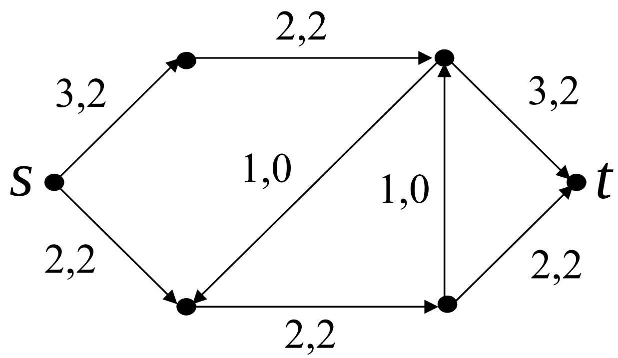
Ahuja RK, Magnanti TL, Orlin JB, *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*, Prentice Hall, 1993.

网络流

- 最小费用流（minimum cost flow）
  - 给定每个顶点的平衡量，求总费用 $\sum_{a \in v} f(a)c(a)$ 最小的可行流
- 最大流（maximum flow）
  - 除顶点 s,t 外，其余顶点的平衡量为 0
  - 求顶点 s 的平衡量的最大值，即网络中从 s 到 t 的最大流量
- 最大流最小割定理（Max-flow min-cut theorem）
  - 任一网络中，最大流量等于最小割量

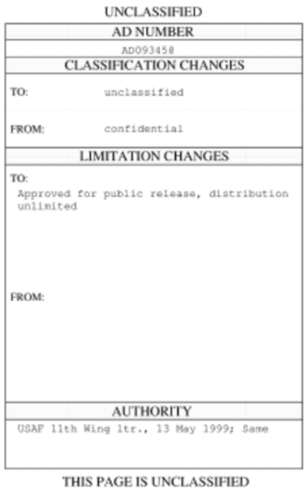
Ford LR, Fulkerson DR, Maximal flow through a network, ***Canadian Journal of Mathematics*****, 8, 399-404, 1956**





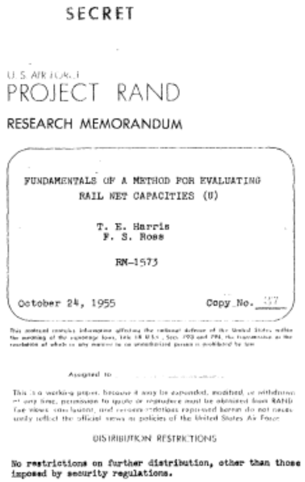
网络流

数学
建模
MATH T


UNCLASSIFIED

AD NUMBER	
AD093458	
CLASSIFICATION CHANGES	
TO:	unclassified
FROM:	confidential
LIMITATION CHANGES	
TO:	Approved for public release, distribution unlimited
FROM:	
AUTHORITY	
USAF 11th Wing ltr., 13 May 1999; Same	

THIS PAGE IS UNCLASSIFIED


SECRET

U.S. AIR FORCE
PROJECT RAND
RESEARCH MEMORANDUM

FUNDAMENTALS OF A METHOD FOR EVALUATING RAIL NET CAPACITIES (U)

T. E. Harris
F. S. Ross

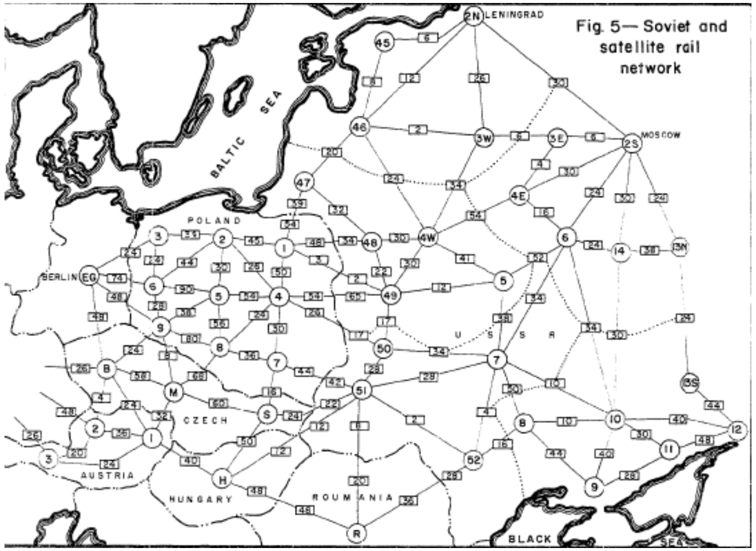
RM-1573

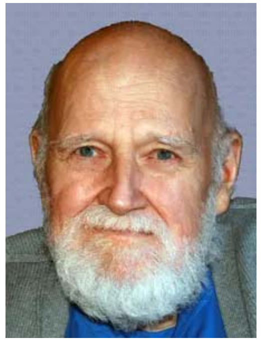
October 24, 1955

Copy No.

DISTRIBUTION RESTRICTIONS

No restrictions on further distribution, other than those imposed by security regulations.





Lester “Les” Randolph Ford, Jr.
（1927－2017）
美国数学家

Delbert Ray Fulkerson
（1924－1976）
美国数学家

Harris TE, Ross FS, *Fundamentals of a Method for Evaluating Rail Net Capacities*, Research Memorandum-1573, The RAND Corporation, 1955

Schrijver A. On the history of the transportation and maximum flow problems. *Mathematical Programming*, 91(3): 437–445, 2002.

The Harris-Ross report solves a relatively large-scale maximum flow problem coming from the railway network in the Western Soviet Union and Eastern Europe (‘satellite countries’). The interest of Harris and Ross was not to find a maximum flow, but rather a minimum cut (‘interdiction’) of the Soviet railway system.

For the data it refers to several secret reports of the CIA on sections of the Soviet and Eastern European railway networks. After the aggregation of railway divisions to vertices, the network has 44 vertices and 105 (undirected) edges. It yields a flow of value 163,000 tons from sources in the Soviet Union to destinations in Eastern European ‘satellite’ countries, together with a cut with a capacity of, again, 163,000 tons.

算法与复杂性

数学
建模
MATH T

多项式可解问题	算法	
最小生成树	Kruskal算法、 Prim算法	$O(\|E\|\log\|V\|)$
指派问题（二部图最大权匹配）	匈牙利算法	$O(\|V\|^3)$
（任意图）最大基数（权）匹配	Edmond’s Blossom 算法	$O(\|V\|^3) \to O(\|E\|\|V\|+\|V\|^2\log\|V\|)$
最大流	Edmonds–Karp 算法	$O(\|E\|^2\|V\|) \to O(\|E\|\|V\|)$
最小费用流	Orlin 算法	$O(\|E\|^2\log\|E\|+\|E\|\log\|E\|\|V\|\log\|V\|)$

多项式可解问题	$\mathcal{NP}$-难问题
最短路	最长路
Euler圈	Hamiltion圈
最小顶点覆盖	最小边覆盖
最小割	最大割
中国邮递员问题	旅行售货商问题

$\mathcal{NP}$-难问题
最大独立集
最大团
最小支配集
最小顶点着色
最小边着色

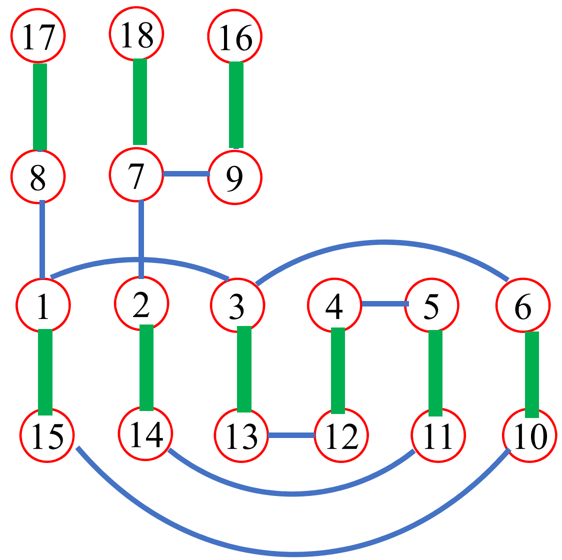
Edmonds J, Karp RM. Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems. *Journal of the ACM*, 19, 248-264, 1972.

King V, Rao S, Tarjan R. A faster deterministic maximum flow algorithm. *Journal of Algorithms*, 17, 447-474, 1994.

Orlin JB. Max flows in $O(nm)$ time, or better. *Proceedings of the 45th annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 765-774, 2013.

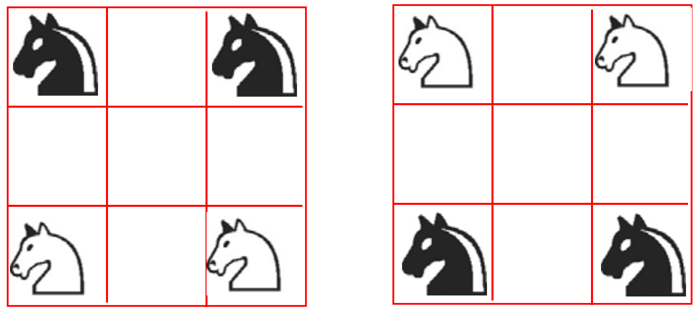
图的应用

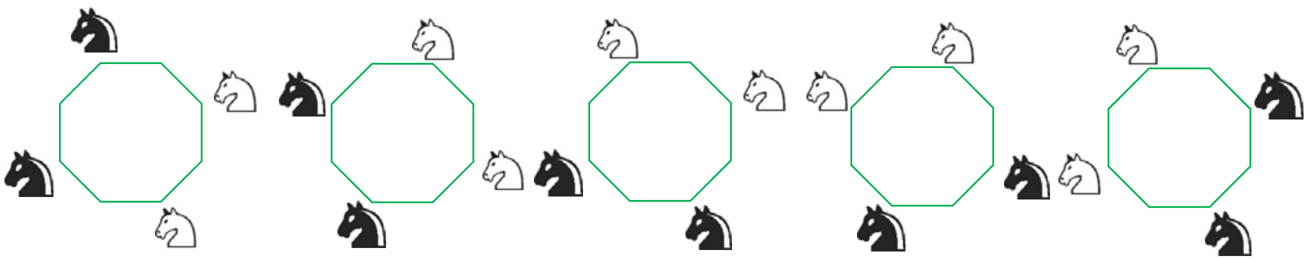
- 搭档问题
  - 编号为1~18的18名同学组成9对，每对两名同学的编号之和为一平方数。求每对同学的编号
- 图论方法
  - 将每位同学作为一个顶点，两个顶点之间有边相连当且仅当两名同学的编号之和为一平方数
  - 求图的完美匹配

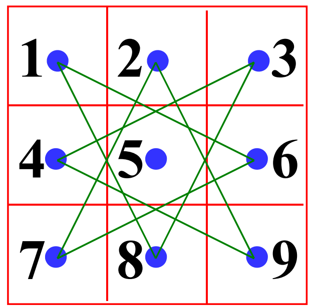


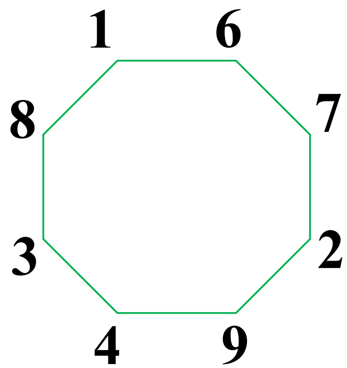
黑白异位

- 黑白异位游戏
  - 一 3×3 方格棋盘，第一行左、右两个方格各置一匹黑马，第三行左、右两个方格各置一匹白马，按国际象棋中马的走子规则，如何用最少的步数将黑马白马的位置互换
  - 将每个格子作为图的一个顶点，对应两个格子的顶点之间有边相连当且仅当马能从一个跳到另一个





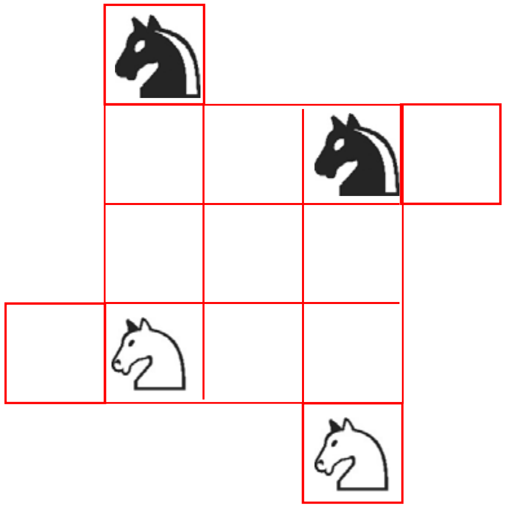


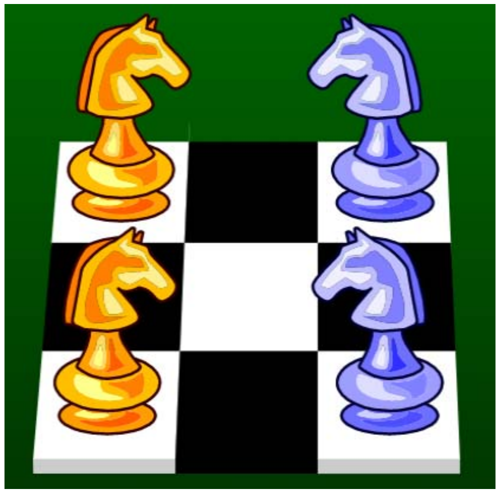


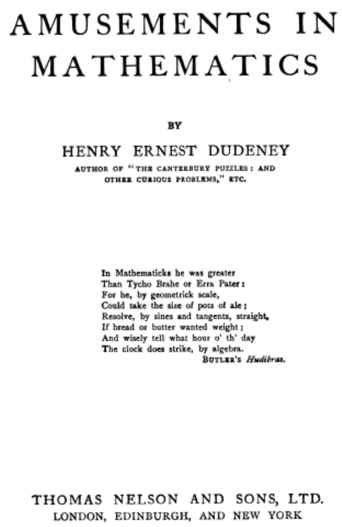
黑白异位

数学
建模
MATH T

- Guarini's Problem





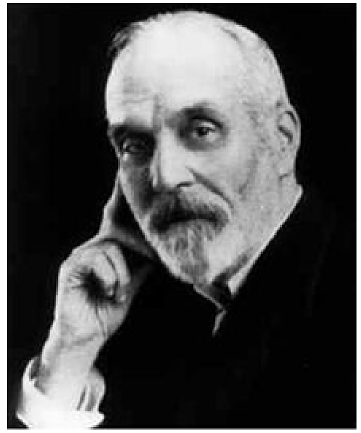

AMUSEMENTS IN
MATHEMATICS

BY

HENRY ERNEST DUDENEY
AUTHOR OF "THE CANTERBURY PUZZLES: AND
OTHER CURIOUS PROBLEMS," ETC.

In Mathematicks he was greater
Than Tycho Brahe or Erra Pater:
For he, by geometrick scale,
Could take the size of pots of ale;
Resolve, by sines and tangents, straight,
If bread or butter wanted weight;
And wisely tell what hour o' th' day
The clock does strike, by algebra.
BUTLER'S *Hudibras.*

THOMAS NELSON AND SONS, LTD.
LONDON, EDINBURGH, AND NEW YORK



https://www.proprofsgames.com/knight-switch/

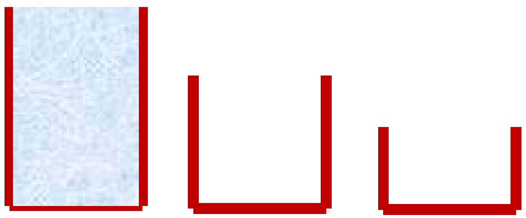
Dudeney HE. *Amusements in Mathematics*, Thomas Nelson & Sons, 1917

Henry Ernest Dudeney (1857-1930)
英国数学家

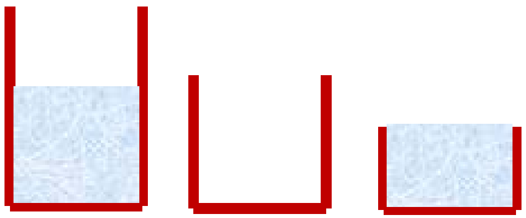
Paolo Guarini di Forli，15-16世纪意大利人，Dudeney认为游戏由Guarini于1512年提出，但在9世纪左右阿拉伯棋手Al-Ádlí ar-Rúmí的著作中已记载了该游戏

分水问题

- 分水问题
  - 现有A,B,C三个水瓶，其容积分别为12,8,5升。A瓶装满水，B,C为空瓶。现欲利用B,C两瓶，将A瓶中的水均分，并使倾倒次数最少
- 图论方法
  - 用 (a,b,c) 表示某一时刻的状态，其中 a,b,c 分别为该时刻A,B,C三个水瓶中所装水量



$(12,0,0)$



$(7,0,5)$

Siméon Denis Poisson

（1781–1840）

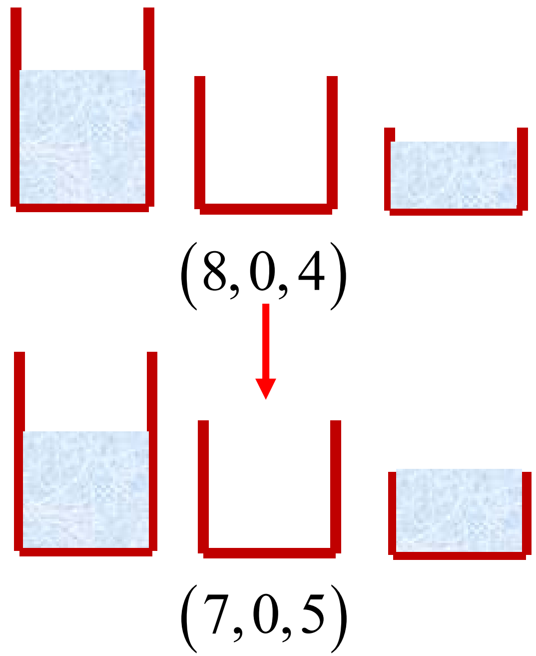
法国数学家、物理学家

分水问题

- 分水问题
  - 构造有向图 $G=(V,E)$，其中顶点集 V 为所有可能状态的集合，弧 $(\alpha,\beta)\in E$ 当且仅当可通过一次倾倒使状态由 α 变为 β
  - 弧的起点与终点应满足的条件
    - 三个瓶子中恰一个瓶子的水量不变
    - 或者水量增加的瓶子装满水，或者水量减少的瓶子没有水
  - 求从 $(12,0,0)$ 到 $(6,6,0)$ 的最短（有向）路

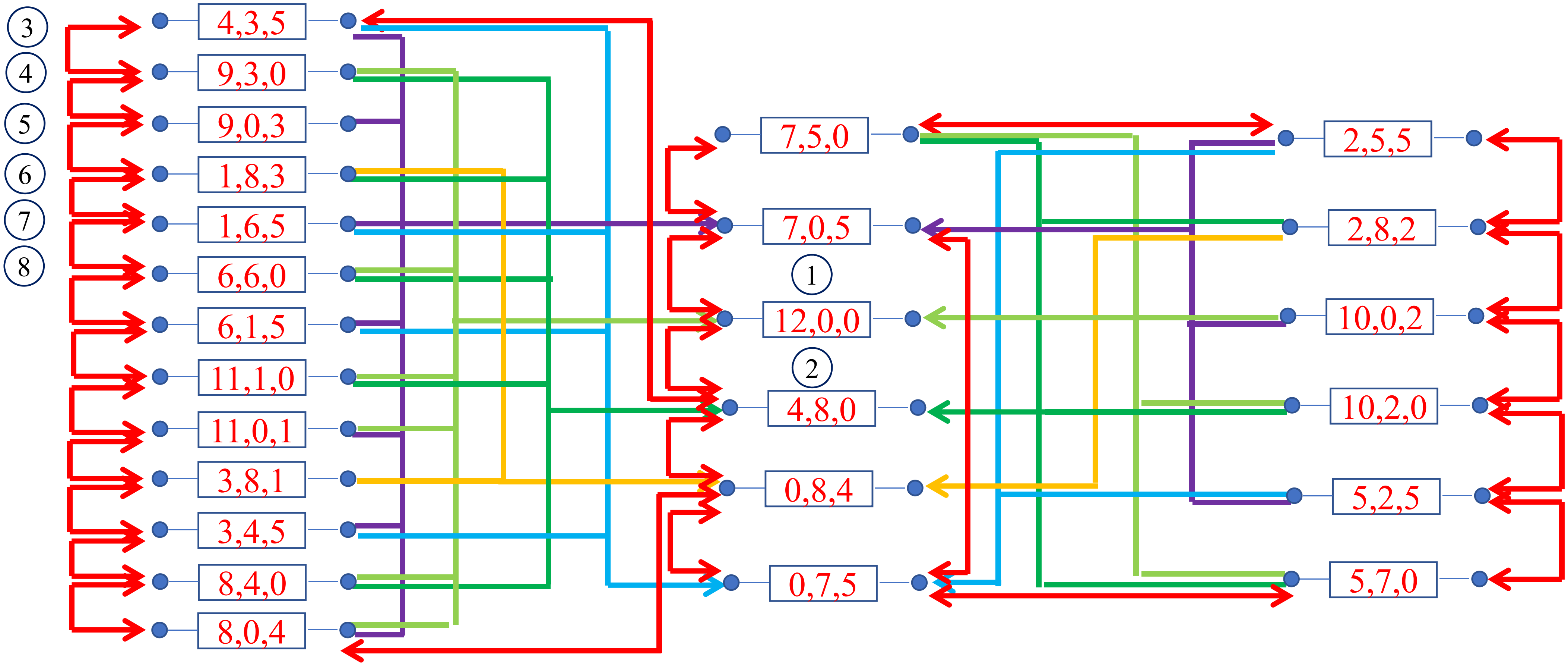
以某个顶点为起点的弧不超过4，图是稀疏图

$(8,0,4)\longrightarrow(0,8,4)\ \ (7,0,5)\ \ (12,0,0)\ \ (8,4,0)$



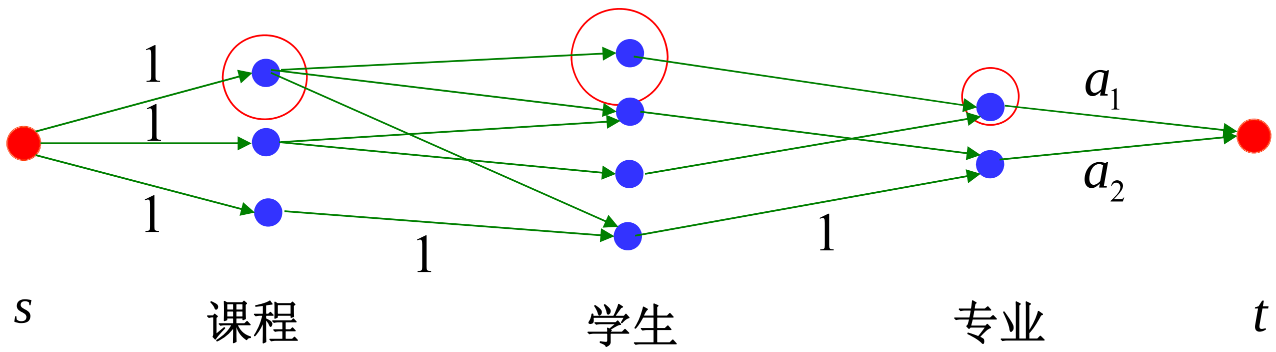
分水问题

数学
建模
MATH T



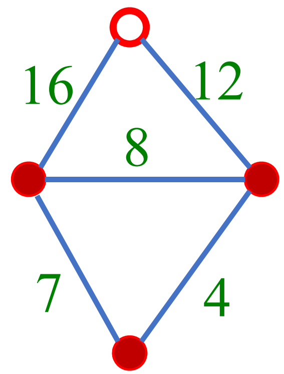
代表问题

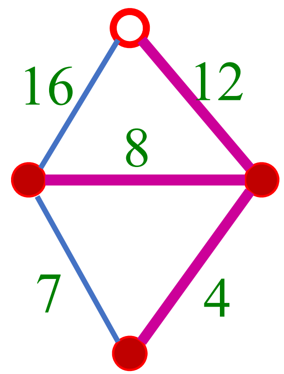
- 代表选择问题
  - 某校共有 m 个专业，为调研 n 门课程的教学情况，邀请部分同学参加座谈
    - 每门课程有一名同学参加
    - 各门课程邀请的学生各不相同
    - 来自专业 i 的学生数不超过 $a_i, i = 1, \cdots, m$
  - 存在一种可行方案当且仅当网络存在流量为 n 的最大流



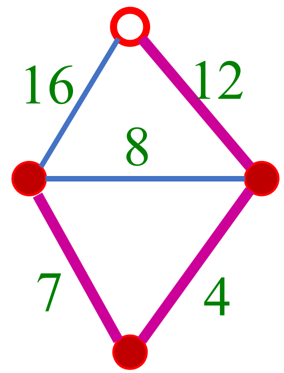
思考题

- 电缆与管道问题（cable-trench problem）
  - 中心配电房位于某幢建筑内，一些主干用户位于其他不同的建筑内。为避免相互干扰，中心配电房与每个主干用户需有一条专门的电缆相连
  - 电缆需铺设在地下管道内，多条电缆可以共用一条地下管道，有些建筑之间的道路可能不允许开挖管道
  - 铺设电缆的单位长度费用为 τ，开挖管道的单位长度费用为 γ
  - 寻找一种方案，使总费用尽可能少

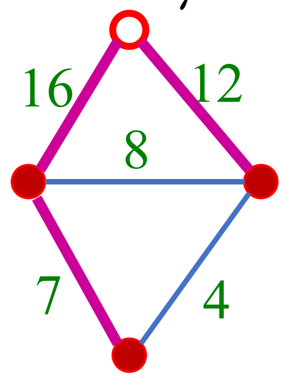




$24\tau+48\gamma$



$23\tau+51\gamma$



$32\tau+44\gamma$

未来网络·寻路

数学
建模
MATH T

- 未来网络·寻路
  - 给定一个带权重的有向图 $G=(V,E)$，V 为顶点集， E 为有向边集，每一条有向边均有一个权重。对于给定的顶点 s,t，以及 V 的子集 V'，寻找从 s 到 t 的无环有向路径 P，使得 P 经过 V'中所有的顶点（对经过 V' 中节点的顺序不做要求）
  - 路径的权重越小，则视为结果越优，在输出路径权重一样的前提下，程序运行时间越短，则视为结果越优。

最短路+TSP

2016年华为软件精英挑战赛初赛


HUAWEI Code Craft 2016 "未来网络·寻路"初赛题目介绍 文档密级：公开

HUAWEI Code Craft 2016

未来网络•寻路

初赛题目介绍

2016.03.04

前言

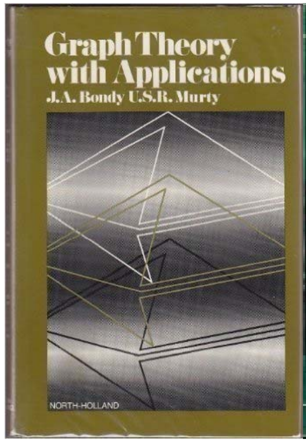
赛题源自"未来网络"业务发放中的路由计算问题。算路问题属于基础算法问题，在图论、网络、交通等各个方面均有着广泛的研究与运用，里面不乏一些经典的算法，例如最短路中的广度优先搜索，Dijkstra算法等。网络算路问题的更优算法实现对于网络资源高效配置具有重要价值。

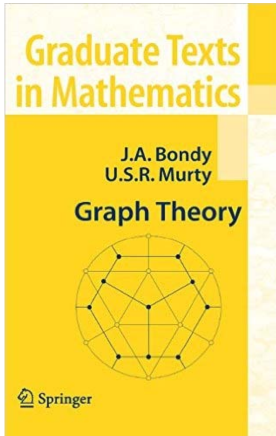
Dreyfus SE. An appraisal of some shortest-path algorithms. *Operations Research*, 17(3): 395-412, 1969.

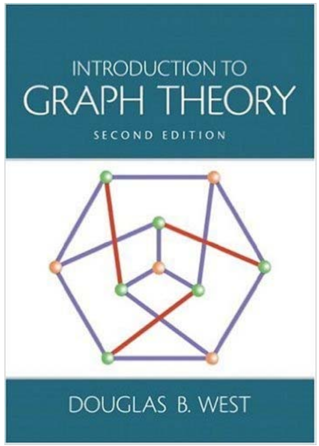
Ibaraki T. Algorithms for obtaining shortest paths visiting specified nodes. *SIAM Review*, 15(2): 309-317, 1973.

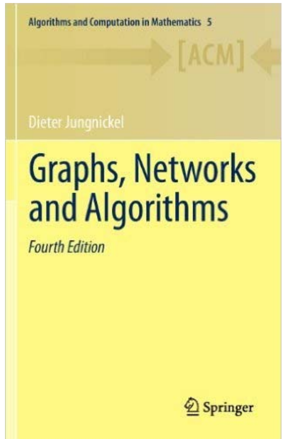
参考资料

数学
建模
MATH T









Bondy JA, Murty USR, *Graph Theory with Applications*, North Holland, 1976. (中译本，图论及其应用，吴望名、李念祖、吴兰芳、谢伟如、梁文沛译，科学出版社，1984.)

Bondy JA, Murty USR. *Graph Theory*, Springer, 2008.

West DB, *Introduction to Graph Theory*. Pearson, 2001.

Jungnickel D, *Graphs, Networks and Algorithms*(4th), Springer, 2014.

徐俊明, 图论及其应用, 中国科学技术大学出版社, **2010.**


谢 谢