1 第九次作业

问题 1. 设$\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$为集合$X$及其上的两个拓扑，求证：$id : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$连续当且仅当$\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$.

问题 2. 举例说明存在集合X及其上的两个拓扑$\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$满足$\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T}_2$(即$\mathcal{T}_2$比$\mathcal{T}_1$严格细)，且 $(X, \mathcal{T}_1)$与$(X, \mathcal{T}_2)$同胚。(此时的同胚映射一定不是恒同)

问题 3. 称全序集X, Y之间的f是保序的，如果当$x_1 < x_2$时，$f(x_1) < f(x_2)$. 证明：全序集之间的保序双射是同胚。由此可知$\mathbb{R}$到$\mathbb{R}$的单调连续映射为同胚。

问题 4. 考虑乘积空间$X_1 \times X_2$，任取$x_2 \in X_2$, 则X_1与$X_1 \times X_2$的子空间$X_1 \times \{x_2\}$同胚。

问题 5. 设(X, d)为度量空间，A为X的非空子集，定义$d(x, A) = \inf\{d(x, a) | a \in A\}$. 求证：函数$d(\cdot, A)$满足$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$, 从而$d(\cdot, A)$为连续函数。

问题 6. 记$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$, 赋予平面的子拓扑。在$D$内任取$2n$个不同的点$A_1, ..., A_n; B_1, B_2, ..., B_n$, 求证：存在$D$的自同胚（即$D$到$D$的同胚）将$A_i$映成$B_i (1 \leq i \leq n)$.