Mandelbrot Set 的生成与探索

罗俊勋

2022 年 6 月 30 日

摘要

简要回顾 Mandelbrot Set 的历史. 展示可视化数学的美, 并使用 Python 实现 set 可视化

1. 引言: 曼德勃罗特集是一个几何图形，曾被称为"上帝的指纹"。这个点集均出自公式 : $Zn+1 = (Zn)^2+C$, 对于非线性迭代公式 $Zn+1 = (Zn)^2+C$, 所有使得无限迭代后的结果能保持有限数值的复数 z 的集合 Julia 连通的 c, 构成曼德勃罗集, 它是曼德勃罗教授在二十世纪七十年代发现的. [2]

2. 背景介绍: Mandelbrot 图形是由美国数学家曼德勃罗教授于 1975 年夏天一个夜晚, 在冥思苦想之余翻看儿子的拉丁文字典时想到的, 起拉丁文的原意是"产生无规则的碎片"。曼德勃罗教授称此为" 魔鬼的聚合物"。为此, 曼德勃罗在 1988 年获得了" 科学行为艺术大奖".

3. 数学理论: 显示曼德勃罗特集是处理位映射图像的一个例子. 首先要对图像进行计算, 且计算量很大. 曼德勃罗特集是复数平面中的点集, 当对一个函数迭代计算时, 这些点将处于准稳定状态 (quasi-stable), 即将会增加或减少, 但不会超过某一限度. 通常该函数为: $z_{k+1} = z_k^2 + c$ 式中 z_{k+1} 是复数 $z = a + bi$ 的第 $k + 1$ 次迭代,c 是确定该点在复平面中位置的复数值.z 的初始值为 0. 迭代将一直进行下去, 直到 z 的幅值大于 2 或者迭代次数已经达到某种任意的规定的限度.

4. 算法: `#生成网格矩阵`

`X = arange(-2, .9, .002)` & `Y = arange(-1, 1, .002)`

`Z = zeros((len(Y), len(X)))` Z 便是一个元都是 0 的矩阵

#构造迭代函数

$f(x): \quad z=0 \quad for \quad n \quad in \quad range(100): \quad z=z^2+c \quad if \quad |z|>2:$ 返回 n 并退出循环, 否则返回 NaN

#对网格中每个点进行f运算, 将最后得到的矩阵 Z 用 Imshow 热图呈现

最终使用的 Python 代码为:

Listing 1: Python example

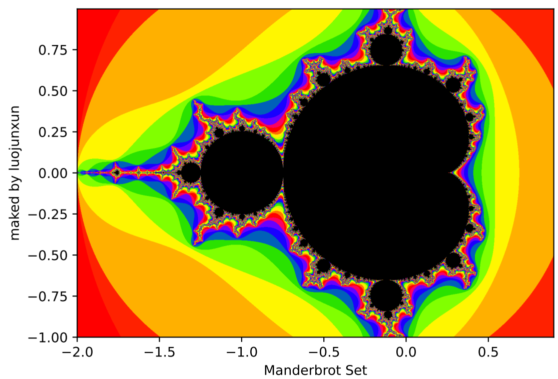
```
# 导入库
from pylab import *
from numpy import NaN
# 传入迭代上限次数
N = int(input())
# 定义迭代函数
def m(a):
    z = 0
    global N #全局变量申明
    for n in range(1, N+1):
        z = z**2 + a
        if abs(z) > 2:
            return n
    return NaN
# 构造空矩阵
X = arange(-2, .9, .002)
Y = arange(-1,  1, .002)
Z = zeros((len(Y), len(X)))
# 填充矩阵
for iy, y in enumerate(Y):

    for ix, x in enumerate(X):
        Z[iy,ix] = m(x + 1j * y)
# 可视化
imshow(Z, cmap = plt.cm.prism, interpolation = 'none',
 extent = (X.min(), X.max(), Y.min(), Y.max()))
xlabel("Mandelbrot Set")
```

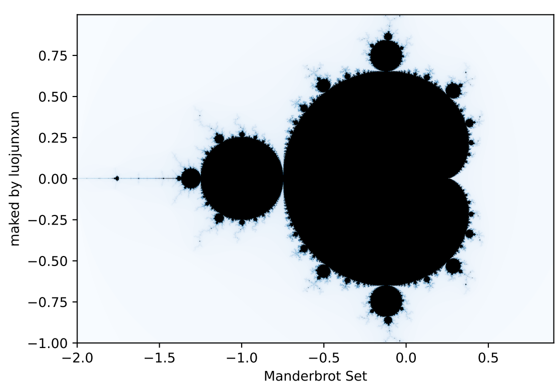
```
ylabel("maked␣by␣luojunxun")
savefig("wfrgure_1.esp")
show()
#imshow的常用参数camp改变格式,extent改变绘图区域
```

5. 数值算例: 调整 N 和 imshow 的参数

1.N=100,cmap=plt.cm.prism,extent=(X.min(), X.max(), Y.min(), Y.max())



2.N=150,cmap=plt.cm.Blues,extent=(X.min(), X.max(), Y.min(), Y.max())



6. 结论： 古今中外有许多学者、数学家从不同的侧面作过生动的描述。古希腊数学家普洛克拉斯曾说："哪里有数学，哪里就有美。"英国大学者伯特兰·罗素更是用下面的文字形容他对数学之美的感受："数学，如果正确地看它，则具有至高无上的美——正像雕刻的美，是一种冷而严肃的美，这种美不是投合我们天性的微弱的方面，这种美没有绘画或音乐的那些华丽的装饰，它可以纯净到崇高的地步，能够达到严格的只有最伟大的艺术才能显示的那种完美的境地。一种真实的喜悦的精神，一种精神上的亢奋，一种觉得高于人的意识——这些是至善至美的标准，能够在诗里得到，也能够在数学里得到。" 这都是数学作为抽象的美, 而 Manderbrot-Set 向我们展示的是数学的具象美, 在强烈的视觉冲击下, 无人不会不赞叹数学是多么奇妙的一门学科! [1]

参考文献

[1] Jin, Yaqin, Li, and Zhongxin. Inversion of roughness profile of heterogeneous fractal surface using gaussian beam incidence at low grazing angle. *电子科学学刊: 英文版*, 2001.

[2] G. Tiozzo. Topological entropy of quadratic polynomials and dimension of sections of the mandelbrot set. 2013.