

一、足球比赛在规定时间内打平，且加时赛中双方均无进球时需通过点球决胜。点球决胜阶段分为 K 轮，每轮中两支球队先后各罚点球一次。若 K 轮结束后双方进球数相同，则加赛一轮，若双方进球数仍相同，则继续加赛一轮，直至分出胜负为止。由于点球进球的概率极高，每轮罚球先后顺序对点球决胜的结果可能产生较大影响。现规则通过抽签决定先罚球队，在所有轮中均由该队先罚。拟议中的新规则为第一轮先罚球队由抽签决定，此后每轮罚球先后顺序与上一轮罚球先后顺序相反。假设进球概率只与罚球先后顺序有关，而与球队和轮次无关。每轮先罚球队与后罚球队进球的概率分别为 p 和 q ，其中 $p > q$ 。为简单起见，假定 $K = 2$ 。

(1) 试分别计算两轮结束后，采用现规则和新规则两种情况下，第一轮先罚球队获胜、第一轮后罚球队获胜与双方进球数相同的概率，并对 $p = \frac{3}{4}, q = \frac{2}{3}$ 给出具体结果。

(2) 假设在前两轮结束后，双方进球数相同。试分别计算在加赛阶段，采用现规则和新规则两种情况下，加赛第一轮先罚球队获胜与加赛第一轮后罚球队获胜的概率。

二、在橄榄球比赛中，每一回合进攻方有达阵 (touchdown) 得 6 分，射门 (field-goal) 得 3 分和不得分三种结果 (不考虑防守方得分)。设 A, B 两队作为进攻方时，出现三种结果的概率均分别为 $\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \beta + \gamma = 1$ 。现设比赛进入加时赛。在加时赛前，通过抛掷硬币竞猜，猜对一方可选择第一回合作为进攻方或防守方。不妨设 A 为第一回合进攻方。

(1) 若赛制采用突然死亡法，即首先得分一方获得比赛胜利，若当前回合进攻方未得分，则下一回合由另一队作为进攻方。试求 A 获得比赛胜利的概率；

(2) 若对赛制作如下修改：

(i) 若第一回合 A 达阵，A 获得比赛胜利；

(ii) 若第一回合 A 射门，第二回合由 B 作为进攻方。若在第二回合中 B 达阵，则 B 获得比赛胜利。若 B 不得分，A 获得比赛胜利。若 B 射门，第三回合由 A 作为进攻方，并开始实行突然死亡法。

(iii) 若第一回合 A 不得分，第二回合由 B 作为进攻方，并开始实行突然死亡法。

记第一回合 A 射门或不得分情况下，A 获得比赛胜利的概率分别为 a 和 b ，试写出 A 获得比赛胜利的概率的表达式；

(3) 试求新赛制下，A 获得比赛胜利的概率，并从公平性角度比较两种赛制哪种更合理。