作业一: 洛必达法则的叙述与证明

罗俊勋
数学与应用数学 3210101613

2022 年 6 月 27 日

这是我们用来求待定型分式的极限的方法

1 问题描述

问题叙述如下: 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $(a, a+d]$ 上可导,(d 是某个正常数), 且 $g'(x) \neq 0$, 若此时有

$$\lim_{x \to a^+} g(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = 0$$

或者有

$$\lim_{x \to a^+} g(x) = \infty$$

且 $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（可以是有限数或者 ∞），则成立

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2 证明

这里仅对 $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ 为有限数时来证明，当 A 为无穷大时, 证明过程是类似的, 先证明 $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = 0$ 的情况:
由于函数在 $x = a$ 处的值与 $x \to a^+$ 时的极限无关，因此可以补充定义

$$f(a) = g(a) = 0$$

使得 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,a+d]$ 上连续，这样，经补充定义后的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,a+d]$ 上满足 $Cauchy$ 中值定理的条件，因此对于任意 $x\in(a,a+d)$，存在 $\xi\in(a,a+d)$，满足

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

当 $x\to a^+$ 时显然有 $\xi\to a^+$，由于 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，两端令 $x\to a^+$，即有

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f\xi)}{g(\xi)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

下面证明 $\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=\infty$ 的情况记 x_0 是 $(a,a+d]$ 中任意一个固定点，则当 $x\neq x_0$，$\frac{f(x)}{g(x)}$ 可以改写为

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)}+\frac{f(x)}{g(x_0}=\frac{g(x)-g(x_0)}{g(x)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}+\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

$$=[1-\frac{g(x_0)}{g(x)}]\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}+\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

于是，

$$|\frac{f(x)}{g(x)}-A|=|[1-\frac{g(x_0)}{g(x)}]\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}+\frac{f(x_0)}{g(x_0)}-A|$$

$$\leq|[1-\frac{g(x_0)}{g(x)}]|\cdot|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-A|+|\frac{f(x_0)-Ag(x_0)}{g(x)}|$$

因为 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$, 所以对于任意 $\epsilon>0$，存在 $\rho>0$，当 $0<x-a<\rho$ 时

$$|\frac{f'(x)}{g'(x)}-A|<\epsilon$$

取 $x_0=a+\rho$, 由 $Cauchy$ 中值定理, 对于任意 $x\in(a,x_0)$, 存在 $\xi\in(x,x_0)\subset(a,a+\rho)$ 满足

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

于是得到

$$|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-A|=|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-A|<\epsilon$$

又因为 $\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=\infty$, 所以可以找到正数 $\delta<\rho$，当 $0<x-a<\delta$ 时，成立

$$|[1-\frac{g(x_0)}{g(x)}]|<2,+\frac{f(x_0)-Ag(x_0)}{g(x)}|<\epsilon$$

综上所述，即知对于任意的 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $0 < x - a < \delta$ 时

$$|\frac{f(x)}{g(x)} - A| < |1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}| \cdot |\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - A| + |\frac{f(x_0) - Ag(x_0)}{g(x)}| < 2\epsilon + \epsilon = 3\epsilon$$

由定义即得

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x} = A = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

证毕！