4. 求证：为使定理 6.1.1 中的 Hölder 不等式成为等式，充分必要条件是 $\|g\|_q^q|f(x)|^p = \|f\|_p^p|g(x)|^q$. (提示：不等式 $x^{1/p} \le x/p + 1/q$ 当且仅当 $x = 1$ 取等号.)

证明. 当 $\|f\|_p = 0$ 或 $\|g\|_q = 0$ 时命题成立. 下设 $\|f\|_p > 0$ 且 $\|g\|_q > 0$.

设 $\|g\|_q^q|f(x)|^p = \|f\|_p^p|g(x)|^q$, a.e. 则 $u(x) := \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} = \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q} =: v(x)$, a.e.

从而

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} = u(x)^{1/p} \cdot v(x)^{1/q} = \frac{1}{p}u(x) + 1/qv(x) = \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + 1/q\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}.$$

所以 $\|fg\|_1 = \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

反之设 $\|fg\|_1 = \|f\|_p \cdot \|g\|_q$. 由于 $\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \le \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + 1/q\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$. 两边积分得到 $\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} = \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + 1/q\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$. a.e., 即 $u(x)^{1/p} \cdot v(x)^{1/q} = \frac{1}{p}u(x) + 1/qv(x)$ 这等价于 $(\frac{u(x)}{v(x)})^{1/p} = \frac{1}{p}\frac{u(x)}{v(x)} + 1/q$. 但 $y^{1/p} \le \frac{1}{p}y + 1/q$ 仅在 $y = 1$ 时为等式, 故 $\frac{u(x)}{v(x)} = 1$, a.e. 即 $\|g\|_q^q|f(x)|^p = \|f\|_p^p|g(x)|^q$, a.e.

提示: 无

5. 设 $f_k \in L^{p_k}(E), k = 1, 2, \cdots, n$, 其中 $1 < p_k < \infty, \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1$.

求证 $\int_E \prod_{k=1}^n |f_k(x)|dx \le \prod_{k=1}^n \|f_k\|_{p_k}$.

证明. 设以上不等式对某个 n 成立 ($n = 2$ 时即 Hölder 不等式).

设 $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_{n+1}} = 1$. 令 $\frac{1}{q} = \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_{n+1}}$. 则 $|f_n|^q \in L^{p_n/q}(E)$, $|f_{n+1}|^q \in L^{p_{n+1}/q}(E)$. 现在 $\frac{q}{p_n} + \frac{q}{p_{n+1}} = 1$, 由 Hölder 不等式知

$$\int |f_nf_{n+1}|^q dx \le \||f_n|^q\|_{\frac{p_n}{q}} \cdot \||f_{n+1}|^q\|_{\frac{p_{n+1}}{q}} = (\|f_n\|_{p_n} \cdot \|f_{n+1}\|_{p_{n+1}})^q.$$

即 $f_nf_{n+1} \in L^q(E)$, 由归纳假设,

$$\int_E |f_1 \cdots f_{n-1}| \cdot |f_nf_{n+1}|dx \le \prod_{k=1}^{n-1} \|f_k\|_{p_k} \cdot \|f_nf_{n+1}\|_q \le \prod_{k=1}^{n+1} \|f_k\|_{p_k}.$$

即不等式对 $n+1$ 也成立. 由归纳法, 结论成立.

提示: 同证明.

6. 设 f 和 g 在 $[a, b]$ 上非负可测, $g \in L[a, b]$. 求证对 $1 \le p < \infty$,

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^p \le \|g\|_1^{p-1}\int_a^b f^p(x)g(x)dx.$$

证明. 由 Hölder 不等式, $\| g^{\frac{1}{q}} \|_q = (\int |g|)^{\frac{1}{q}}$

$$\|fg\| \le \|fg^{1/p}\|_p \cdot \|g^{1/q}\|_q = \|fg^{1/p}\|_p \cdot \|g\|_1^{1/q}.$$

所以, 结论成立.

提示: 无

7. 设 $1 \le p < \infty$.$\{E_n\}_{n\ge1}$ 是 $\mathbb{R}$ 中一列两两不相交可测集列. $f_n \in L^p(\mathbb{R})$, 并且当 $x \notin E_n$ 时 $f_n(x) = 0$. 求证要使 $f = \sum f_n \in L^p(\mathbb{R})$, 充要条件是 $\sum \|f_n\|_p^p < \infty$, 并且在此条件下 $\|\sum_{k=1}^n f_k - f\|_p \to 0 (n \to \infty)$.

证明. 设 $f = \sum_{n=1}^\infty f_n \in L^p(\mathbb{R})$, 则 $|f| = \sum_{n=1}^\infty |f_n| \in L^p(\mathbb{R})$, $|f|^p = \sum_{n=1}^\infty |f_n|^p \in L^1(\mathbb{R})$. 由单调收敛定理,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\sum_{k=1}^n |f_k(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx < \infty.$$

又 $\int_{\mathbb{R}}\sum_{k=1}^n |f_k(x)|^p dx = \sum_{k=1}^n \|f_k\|_p^p$, 所以, $\sum_{k=1}^\infty \|f_k\|_p^p < \infty$.

另一方面, 因为

$$\left|f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x)\right|^p = \left|\sum_{k=n+1}^\infty f_k(x)\right|^p = \sum_{k=n+1}^\infty |f_(x)|^p \le |f(x)|^p.$$

由控制收敛定理知, $\lim_{n\to\infty} \|\sum_{k=1}^n f_k - f\|_p^p \to\not= 0$.

反之, 若 $\sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_p^p < \infty$, 则 $|f(x)|^p = \sum_{n=1}^\infty |f_n(x)|^p \in L^1(\mathbb{R})$.

提示: 无

8. 设 $1 < p < \infty$.

(i) 证明 $\frac{\sin x}{x} \in L^p(0, \infty)$.

(ii) 若 $f \in L^p(0, \infty)$. 求证 $g(x) = \int_0^\infty f(t)\frac{\sin xt}{t}dt$ 存在有限且 $h^{-\frac{1}{p}}[g(x+h) - g(x)]$ 有界, $x > 0, h > 0$.

证明. (i) $|\frac{\sin x}{x}|^p$ 在 $x = 0$ 附近有界. 而当 $x \ge 1$ 时 $|\frac{\sin x}{x}|^p \le \frac{1}{x^p} \in L[1, \infty)$. 故 $\frac{\sin x}{x} \in L^p(0, \infty)$.

(ii) 对每一固定 $x > 0$, $f(t) \in L^p(0, \infty)$, $\frac{\sin xt}{t} \in L^q(0, \infty)$, $\frac{1}{p} + 1/q = 1$. 从而 $f(t)\frac{\sin xt}{t} \in L(0, \infty)$.

当 $x > 0, h > 0$ 时, $|\frac{\sin(x+h)t - \sin xt}{t}| = |\frac{\sin\frac{ht}{2}}{\frac{ht}{2}}\cos(xt + \frac{ht}{2}) \cdot h| \le |\frac{\sin\frac{ht}{2}}{\frac{ht}{2}}| \cdot h$. 这样

$$|g(x+h) - g(x)| \le \int_0^\infty h|f(t)| \cdot \left|\frac{\sin\frac{ht}{2}}{\frac{ht}{2}}\right| dt$$

$$\le \left(\int_0^\infty |hf(t)|^p dt\right)^{1/p}\cdot\left(\int_0^\infty \left|\frac{\sin\frac{ht}{2}}{\frac{ht}{2}}\right|^q dt\right)^{1/q}$$
$$= h\|f\|_p\cdot\left(\frac{2}{h}\right)^{1/q}\cdot\left(\int_0^\infty\left|\frac{\sin x}{x}\right|^q dx\right)^{1/q}.$$

所以

$$h^{-\frac{1}{p}}[g(x+h)-g(x)] \le 2^{1/q}\|f\|_p\cdot\|\frac{\sin x}{x}\|_q.$$

提示: 无

9. 设 $f\in L^p[0,1], 1\le p\le\infty, g(x)=\int_0^1\frac{f(t)}{\sqrt{|x-t|}}dt, 0\le x\le 1$. 求证 $\|g\|_p\le 2\sqrt{2}\|f\|_p$.

证明. 注意 $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\le\sqrt{2}$, $\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{|x-t|}}=2(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})\le 2\sqrt{2}$.

若 $p=\infty$, 则 $|g(x)|\le\|f\|_\infty\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{|x-t|}}\le 2\sqrt{2}\|f\|_\infty$.

若 $1\le p<\infty$, 则由于 $\frac{1}{\sqrt{|x-t|}}$ 关于 t 属于 $L[0,1]$. 故由题 得

$$|g(x)|^p\le\left(\int_0^1\frac{|f(t)|}{\sqrt{|x-t|}}dt\right)^p\le\left(\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{|x-t|}}\right)^{p-1}\cdot\int_0^1\frac{|f(t)|^p}{\sqrt{|x-t|}}dt.$$

两边对 x 积分得

$$\begin{aligned}\int_0^1|g(x)|^p dx &\le \int_0^1|f(t)|^p dt\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{|x-t|}}\cdot\left(\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{|x-t|}}\right)^{p-1}\\ &\le \int_0^1|f(t)|^p dt\cdot(2\sqrt{2})^p.\end{aligned}$$

由此得 $\|g\|_p\le 2\sqrt{2}\|f\|_p$.

提示: 无

10. 设 $f\in L^2[0,1], F(x)=\int_0^x f(t)dt$. 求证 $\|F\|_2\le\frac{1}{\sqrt{2}}\|f\|_2$.

证明.

$$\begin{aligned}|F(x)|\le\int_0^x|f(t)|dt &\le \left(\int_0^x|f(t)|^2dt\right)^{1/2}\cdot\left(\int_0^1 dt\right)^{1/2}\\ &= \left(\int_0^x|f(t)|^2dt\right)^{1/2}\cdot x^{1/2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|F(x)|^2 &\le \int_0^x x|f(t)|^2dt,\\ \int_0^1|F(x)|^2dx &\le \int_0^1 dx\int_0^x x|f(t)|^2dt\\ &= \int_0^1 dt\int_t^1 x|f(t)|^2dx=\int_0^1|f(t)|^2dt\int_t^1 xdx\\ &= \int_0^1|f(t)|^2\frac{1-t^2}{2}dt\le\frac12\int_0^1|f(t)|^2dt.\end{aligned}$$

提示: 无

11. 设 $f\in L^p(\mathbb{R})$, $1\le p<\infty$, $\frac1p+\frac1q=1$, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$. 求证对任何 $x\in\mathbb{R}$, $F(x+h)-F(x)=o(|h|^{1/q})$.

证明. 由 Hölder 不等式,

$$\begin{aligned}|F(x+h)-F(x)| &= \left|\int_x^{x+h}f(t)dt\right|\\ &\le \left(\int_x^{x+h}|f(t)|^pdt\right)^{1/p}\cdot\left|\int_x^{x+h}dt\right|^{1/q}\\ &= \left(\int_x^{x+h}|f(t)|^pdt\right)^{1/p}\cdot|h|^{1/q}.\end{aligned}$$

再从积分的绝对连续性可知结论成立.

提示: 同证明.

12. 设 $1\le p\le\infty$, f, f_k 都属于 $L^p[a,b], k\ge 1$.

(i) 若 $f_k\to f(L^p)$, 求证对任何 $x\in[a,b]$, $\int_a^x f_k(t)dt\to\int_a^x f(t)dt$. 并且对任何 $g\in L^q[a,b]$, $\int_a^b f_k(t)g(t)dt\to\int_a^b f(t)g(t)dt$, 其中 $\frac1p+\frac1q=1$.

(ii) 若 $1\le p<\infty$, $f_k(x)\to f(x), a.e.$, $\|f_k\|_p\to\|f\|_p$, 求证 $f_k\to f(L^p)$.

证明. (i) $|\int_a^x(f_k(t)-f(t))dt|\le\int_a^b|f_k(t)-f(t)|dt\le\|f_k-f\|_p\|\chi_{[a,b]}\|_q\to 0$. 第二个结论类似可证.

(ii). 因为 $|f_k(x)-f(x)|^p\le(2\max\{|f_k(x)|,|f(x)|\})^p\le 2^p(|f_k(x)|^p+|f(x)|^p)$, 所以, $2^p(|f_k(x)|^p+|f(x)|^p)\pm|f_k(x)-f(x)|^p\ge 0$. 由 Fatou 定理

$$\begin{aligned}&\int_a^b 2^p(|f(x)|^p+|f(x)|^p)dx\\ \le\ &\varliminf_{k\to\infty}\int_a^b\{2^p(|f_k(x)|^p+|f(x)|^p)\pm|f_k(x)-f(x)|^p\}dx\\ =\ &\int_a^b 2^p(|f(x)|^p+|f(x)|^p)dx+\varliminf_{k\to\infty}\pm\int_a^b|f_k(x)-f(x)|^pdx.\end{aligned}$$

因此, $\varliminf_{k\to\infty}\left(-\int_a^b|f_k(x)-f(x)|^p dx\right)\geq 0$, 从而 $-\varlimsup_{k\to\infty}\int_a^b|f_k(x)-f(x)|^p dx\geq 0$.
于是 $0\leq\varlimsup_{k\to\infty}\|f_k-f\|_p\leq 0$, 即 $\|f_k-f\|_p\to 0$.

提示: 同证明.

13. 设 $1<p<\infty, f, f_k\in L^p(E)(k\geq 1)$. 求证当 $f_k(x)\to f(x)$, a.e. 及 $\sup_k\|f_k\|_p<\infty$ 时, 对任何 $g\in L^q(E)$, $\int_E f_k g dx\to\int_E fgdx$.

证明. 令 $M=\sup_k\|f_k\|_p$.

先设 $m(E)<\infty$. 由于 $f_k(x)\to f(x)$, a.e. 故 $f_k\Rightarrow f$(测度收敛). 因为 $m(E)<\infty$, 所以当 $g\in L^q(E)$ 时 $g\in L(E)$. 对任何 $\delta>0$,

$$
\begin{aligned}
\left|\int_E f_k g dx-\int_E fgdx\right| &\leq \int_E|f_k-f|\cdot|g|dx\\
&= \int_{\{|f_k-f|\geq\delta\}}|f_k-f|\cdot|g|dx+\int_{\{|f_k-f|<\delta\}}|f_k-f|\cdot|g|dx\\
&\leq \left(\int_{\{|f_k-f|\geq\delta\}}|f_k-f|^p dx\right)^{1/p}\cdot\left(\int_{\{|f_k-f|\geq\delta\}}|g|^q dx\right)^{1/q}\\
&\quad +\delta\int_{\{|f_k-f|<\delta\}}|g|dx\\
&\leq (\|f_k\|_p+\|f\|_p)\cdot\left(\int_{\{|f_k-f|\geq\delta\}}|g|^q dx\right)^{1/q}+\delta\int_E|g|dx.
\end{aligned}
$$

注意到 $f_k\Rightarrow f$, 我们有

$$
\varlimsup_{k\to\infty}\left|\int_E f_k g dx-\int_E fgdx\right|\leq\delta\int_E|g|dx.
$$

令 $\delta\to 0$ 可知结论成立.

若 $m(E)=\infty$, 令 $E_1=E\bigcap\{|x|\leq A\}$, $E_2=E\bigcap\{|x|>A\}$. 则 $|\int_{E_2}f_k g dx|\leq\left(\int_{E_2}|f_k|^p dx\right)^{1/p}\cdot\left(\int_{E_2}|g|^q dx\right)^{1/q}\leq M\left(\int_{\{|x|>A\}}|g|^q dx\right)^{1/q}$ 可充分小 (只要 A 充分大). 同理 $|\int_{E_2}fgdx|$ 也可充分小. 而在 E_1 上 $\int_{E_1}f_k g dx\to\int_{E_1}fgdx$. 所以 $\int_E f_k g dx\to\int_E fgdx$.

提示: 同证明.

14. 设 $f\in L^p[a,b], 1\leq p<\infty$, 在 $[a,b]$ 外 $f(x)=0, \varphi_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)dt$. 求证 $\|\varphi_h\|_p\leq\|f\|_p$ 且 $\|\varphi_h-f\|_p\to 0(h\to 0)$.

证明. 设 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 由 Hölder 不等式,

$$
\begin{aligned}
|\varphi_h(x)| &\leq \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}|f(t)|dt\leq\frac{1}{2h}\left(\int_{x-h}^{x+h}|f(t)|^p dt\right)^{1/p}\cdot(2h)^{1/q}\\
&= \left(\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}|f(t)|^p dt\right)^{1/p}.
\end{aligned}
$$

故

$$
|\varphi_h(x)|^p\leq\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}|f(t)|^p dt=\frac{1}{2h}\int_a^b|f(t)|^p\chi_{[x-h,x+h]}(t)dt.
$$

于是

$$
\int_a^b|\varphi_h(x)|^p dx\leq\frac{1}{2h}\int_a^b|f(t)|^p dt\int_a^b\chi_{[t-h,t+h]}(x)dx\leq\int_a^b|f(t)|^p dt,
$$

即 $\|\varphi_h\|_p\leq\|f\|_p$.

为证 $\|\varphi_h-f\|_p\to 0$, 先设 f 在 $[a,b]$ 上连续. 此时 $\varphi_h(x)\to f(x), x\in[a,b]$. 而 $\{\varphi_h(x)\}_{h>0}$ 是一致有界的, 从而由控制收敛定理得 $\|\varphi_h-f\|_p\to 0$.

对一般情形, 设 $f\in L^p[a,b], \varepsilon>0$, 则存在连续函数 g 使 $\|f-g\|_p<\varepsilon/3$. 记 $\psi_h=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)dt$. 则 $\|\varphi_h-\psi_h\|_p\leq\|f-g\|_p$ 并且当 h 足够小时, $\|\psi_h-g\|_p<\varepsilon/3$. 于是

$$
\begin{aligned}
\|\varphi_h-f\|_p &\leq \|\varphi_h-\psi_h\|_p+\|\psi_h-g\|_p+\|g-f\|_p\\
&\leq 2\|f-g\|_p+\|g_h-g\|_p<\varepsilon.
\end{aligned}
$$

故结论成立.

提示: 同证明.

15. 设 $f, f_k(k\geq 1)$ 都是 $L^p(\mathbb{R})$ 中的非负函数, $1\leq p<\infty$. 若 $\varliminf_{k\to\infty}f_k(x)\geq f(x)$ 且 $\|f_k\|_p\to\|f\|_p$, 求证 $f_k\to f(L^p)$.

证明. 因为

$$
\int_{\mathbb{R}}f^p(x)dx\leq\int_{\mathbb{R}}\varliminf_{k\to\infty}f_k^p(x)dx\leq\varliminf_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f_k^p(x)dx=\int_{\mathbb{R}}f^p(x)dx,
$$

所以, $\int_{\mathbb{R}}(\varliminf_{k\to\infty}f_k^p(x)-f^p(x))dx=0$. 因此 $f(x)=\varliminf_{k\to\infty}f_k(x)$, a.e. 即 $\{\inf_{n\geq k}f_n(x)\}_{k\geq 1}$ 单调收敛于 $f(x)$, a.e.

令

$$
f^p(x)-f_k^p(x)=g_k(x)=(g_k(x))_+-(g_k(x))_-.
$$

因为 $0\leq(g_k(x))_+\leq f^p(x)-(\inf_{n\geq k}f_n(x))^p\leq f^p(x)$, 由控制收敛定理, $\int_{\mathbb{R}}(g_k(x))_+dx\to 0$. 但当 $p\geq 1, 0\leq y\leq x$ 时有 $(x-y)^p\leq x^p-y^p$, 故

$$
\int_{\{f\geq f_k\}}|f-f_k|^p dx\leq\int_{\{f\geq f_k\}}(f^p-f_k^p)dx=\int_{\mathbb{R}}(g_k(x))_+dx\to 0.
$$

由已知, $\|f_k\|_p \to \|f\|_p$, 故 $\int_{\{f<f_k\}}(f_k^p - f^p)dx = \int (g_k(x))_- dx \to 0$. 从而 $\int_{\{f<f_k\}} |f - f_k|^p dx \to 0$.

合并上述结果, 得到 $\|f - f_k\|_p \to 0$.

提示: 同证明.

16. 设 $f \in L^p(\mathbb{R}), 1 \le p < \infty$, 求证 $\lim_{y\to 0} \|f_y - f\|_p = 0$, 其中 $f_y(x) = f(x+y)$.

证明. 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\mathbb{R}$ 上的紧支集连续函数 g 使 $\|f - g\|_p < \varepsilon/3$. 设当 $|x| \ge A$ 时, $g(x) = 0$. 此时 g 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续, 故存在 $0 < \delta < 1$, 当 $|y| < \delta$ 时, $|g(x+y) - g(x)| < \frac{1}{2A+2}(\frac{\varepsilon}{3})^p$. 这样当 $|y| < \delta$ 时,

$$\begin{aligned} \|f_y - f\|_p &\le \|f_y - g_y\|_p + \|g_y - g\|_p + \|g - f\|_p \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \left(\int_{-A-1}^{A+1} |g(x+y) - g(x)|^p dx\right)^{1/p} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

提示: 同证明.

17. 设 $f \in L^p(\mathbb{R}), 1 \le p < \infty$, 求证有 $a_n > 0, a_n \to 0$, 使对任何实数列 $\{b_n\}$, 只要对一切 n 有 $|b_n| \le a_n$, 就有 $f(x+b_n) \to f(x)$, a.e.

证明. 由习题 6.16, 存在 $a_n > 0$, 使得当 $|y| \le a_n$ 时, $\int_{\mathbb{R}} |f(x+y) - f(x)|^p dx < \frac{1}{n^2}$.

对任何实数列 $\{b_n\}$, 当 $|b_n| < a_n$ 时,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} |f(x+b_n) - f(x)|^p dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x+b_n) - f(x)|^p dx \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty. \end{aligned}$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x+b_n) - f(x)|^p$ 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处收敛, 从而其通项几乎处处收敛于 0, 即 $f(x+b_n) \to f(x)$, a.e.

提示: 同证明.

18. 设 $m(E) < \infty$, $f \in L^\infty(E)$.

求证 (i) $\|f\|_p \to \|f\|_\infty (p \to \infty)$. (ii) $\frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n} \to \|f\|_\infty (\|f\|_\infty > 0)$.

证明. (i) 设 $\|f\|_\infty > 0$. 对任何 $\varepsilon > 0$, 有 $E_0 \subset E, m(E_0) > 0$ 且 $|f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon, x \in E_0$. 从而 $(\|f\|_\infty - \varepsilon)^p m(E_0) \le \int_{E_0} |f|^p \le \int_E |f|^p \le \|f\|_\infty^p m(E)$, $(\|f\|_\infty - \varepsilon)[m(E_0)]^{1/p} \le \|f\|_p \le \|f\|_\infty [m(E)]^{1/p}$.

令 $p \to \infty$ 即得 $(\|f\|_\infty - \varepsilon) \le \underline{\lim}_{p\to\infty} \|f\|_p \le \overline{\lim}_{p\to\infty} \|f\|_p \le \|f\|_\infty$. 由 ε 的任意性得 (i).

(ii) 由 $\int |f|^{n+1} \le \|f\|_\infty \int |f|^n$ 得 $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n} \le \|f\|_\infty$.

又

$$\begin{aligned} \int |f|^{n+1} &= \int |f|^n \cdot |f| \le \left(\int (|f|^n)^{\frac{n+2}{n}}\right)^{\frac{n}{n+2}} \cdot \left(\int (|f|)^{\frac{n+2}{2}}\right)^{\frac{2}{n+2}} \\ &= \left(\int |f|^{n+2}\right)^{\frac{n}{n+2}} \cdot \|f\|_{\frac{n+2}{2}}. \end{aligned}$$

故 $\frac{\|f\|_{n+2}^{n+2}}{\|f\|_{n+1}^{n+1}} \ge \frac{\|f\|_{n+2}^2}{\|f\|_{\frac{n+2}{2}}}$, 从而 $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\|f\|_{n+2}^{n+2}}{\|f\|_{n+1}^{n+1}} \ge \frac{\|f\|_\infty^2}{\|f\|_\infty} = \|f\|_\infty$.

提示: 无

19. 设 g 是可测集 E 上的可测函数. 若有 $M > 0$, 使对任何 $f \in L^2(E)$ 有 $\|gf\|_2 \le M\|f\|_2$, 求证 $\|g\|_\infty \le M$.

证明. 令 $F = \{x \in E : |g(x)| > M\}$. 若 $m(F) > 0$, 不妨设 $0 < m(F) < \infty$. 令 $f(x) = \chi_F(x)$, 则 $\|f\|_2 < \infty$. 且 $\|gf\|_2 = (\int_F g^2(x)dx)^{1/2} > Mm(F)^{1/2} = M\|f\|_2$. 矛盾.

提示: 同证明.

20. 设 $g(x)$ 在 E 上可测, 若对任何 $f \in L^2(E)$ 有 $gf \in L(E)$, 求证 $g \in L^2(E)$.

证明. 不然设 $\int_E g^2(x)dx = \infty = \lim_{n\to\infty} \int_{E\bigcap[-n,n]} g^2(x)dx$.

情形 1: 对任何正整数 n, $I_n = \int_{E\bigcap[-n,n]} g^2(x)dx < \infty$.

此时有正整数 $\{n_k\}_{k\ge 1}, n_1 < n_2 < \cdots$, 使 $1 \le I_{n_{k+1}} - I_{n_k} < \infty, k = 1, 2, \cdots$

定义

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{k(I_{n_{k+1}} - I_{n_k})}, & x \in A_k := E\bigcap\{x : n_k < |x| \le n_{k+1}\}, k \ge 1 \\ 0, & others \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} \int_E f^2(x)dx &= \sum_k \frac{\int_{A_k} g^2(x)dx}{k^2(I_{n_{k+1}} - I_{n_k})^2} \\ &= \sum_k \frac{I_{n_{k+1}} - I_{n_k}}{k^2(I_{n_{k+1}} - I_{n_k})^2} \\ &\le \sum \frac{1}{k^2} < \infty. \end{aligned}$$

$$\int_E f(x)g(x)dx = \sum_k \frac{\int_{A_k} g^2(x)dx}{k(I_{n_{k+1}} - I_{n_k})} = \sum \frac{1}{k} = \infty.$$

矛盾.

情形 2: 有某 n_0 使 $\int_{E\bigcap[-n_0,n_0]} g^2(x)dx = \infty$. 令 $E_0 = E\bigcap[-n_0, n_0]$.

此时对任何正整数 m, 若令 $I_m = \{x \in E_0 : g^2(x) \geq m\}$, 则 $\int_{I_m} g^2(x)dx = \infty$. 从而有正整数列 $\{m_k\}_{k\geq 1}, m_1 < m_2 < \cdots$, 使

$$1 \leq \int_{I_{m_k} - I_{m_{k+1}}} g^2(x)dx := b_k, k = 1, 2, \cdots,$$

令

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{kb_k}, & x \in I_{m_k} - I_{m_{k+1}}, k = 1, 2\cdots \\ 0, & else \end{cases}$$

则同样有 $\int_E f^2(x)dx < \infty, \int_E f(x)g(x)dx = \infty$. 矛盾.

提示: 无

21. 设 $f \in L[a, b]$, 并且有 $M > 0$ 及 $1 \leq p < \infty$, 使对 $[a, b]$ 上一切简单函数 g 有 $|\int_a^b f(x)g(x)dx| \leq M\|g\|_p$. 求证 $f \in L^q[a, b]$, 其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 而且 $\|f\|_q \leq M$.

证明. 设 g 为简单函数, 则 $|g(x)|\text{sgn}(f(x))$ 也是简单函数, 于是

$$\|fg\|_1 = \int_a^b f(x)|g(x)|\text{sgn}(f(x))dx \leq M\|g\|_p.$$

先设 $p > 1$. 取 $[a, b]$ 上的简单函数列 $\{f_n : n \geq 1\}$, 使其单增收敛于 $|f|$. 则

$$\begin{aligned} \int_a^b |f_n|^q dx &= \int_a^b |f_n| \cdot |f_n|^{q/p} dx \leq \int_a^b |f| \cdot |f_n|^{q/p} dx \\ &\leq M\||f_n|^{q/p}\|_p = M\|f_n\|_q^{q/p}. \end{aligned}$$

因此, $\|f_n\|_q \leq M$. 令 $n \to \infty$ 可知结论成立.

当 $p = 1$ 时, 若 $\|f\|_\infty > M$, 则存在某个 $n \geq 1$ 使得 $E = \{x \in [a, b] : |f(x)| > M + 1/n\}$ 是正测集. 于是

$$(M + \frac{1}{n})m(E) \leq \int_a^b f(x)\chi_E(x)dx \leq M \cdot m(E),$$

矛盾.

提示: 同证明.

22. 设 $1 < p < \infty, f$ 在 $\mathbb{R}$ 的任一有限测度集上可积. 求证要使 $f \in L^p(\mathbb{R})$ 充要条件是存在 $M > 0$, 使对 $\mathbb{R}$ 中任何有限个互不相交正测度集 $E_1, E_2, \cdots, E_k$ 有

$$\sum_{i=1}^k \left[\frac{1}{m(E_i)}\right]^{p-1} \left|\int_{E_i} f(x)dx\right|^p \leq M.$$

证明. (i). 必要性. 设 $f \in L^p(\mathbb{R})$. 此时

$$\left|\int_{E_i} f(x)dx\right|^p \leq \left(\int_{E_i} |f(x)|^p dx\right) \cdot [m(E_i)]^{p/q}.$$

注意到 $p - 1 = p/q$, 我们有

$$\sum_{i=1}^k \left[\frac{1}{m(E_i)}\right]^{p-1} \left|\int_{E_i} f(x)dx\right|^p \leq \sum_{i=1}^k \int_{E_i} |f(x)|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx.$$

(ii). 充分性. 此时, $m(\{|f| = \infty\}) = 0$. 令 $E_n = \{2^n \leq f(x) < 2^{n+1}\}, n \in \mathbb{Z}$. 当 $m(E) = 0$ 时, 定义 $\left[\frac{1}{m(E)}\right]^{p-1} |\int_E f(x)dx|^p = 0$.

对 $k \geq 1$, 令 $E_n^{(k)} = E_n \bigcap\{|x| \leq k\}$. 则 $0 \leq m(E_n^{(k)}) < \infty$ 并且

$$\left[\frac{1}{m(E_n^{(k)})}\right]^{p-1} \left|\int_{E_n^{(k)}} f(x)dx\right|^p \geq 2^{np} \cdot m(E_n^{(k)}).$$

因为 $\{E_n^{(k)}\}_{n\geq 0}$ 两两不相交, 由题设, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{np} \cdot m(E_n^{(k)}) \leq M$. 令 $E_+ = \{f \geq 0\}$, 则

$$\begin{aligned} \int_{E_+\bigcap\{|x|\leq k\}} f^p(x)dx &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{E_n^{(k)}} f^p(x)dx \leq \sum_{n=0}^\infty 2^{(n+1)p} \cdot m(E_n^{(k)}) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^p 2^{np} \cdot m(E_n^{(k)}) \leq 2^p \cdot M. \end{aligned}$$

令 $k \to \infty$, 得 $\int_{E_+} f^p(x)dx \leq 2^p M$.

类似可证 $\int_{\{f<0\}} |f(x)|^p dx \leq 2^p M$. 所以 $f \in L^p(\mathbb{R})$.

提示: 同证明.

23. (Hardy 不等式). 设 $1 < p < \infty, f \in L^p(0, \infty), F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$, 求证 $\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

证明. 不失一般性设 $f(x) \geq 0. F'(x) = \frac{-1}{x^2}\int_0^x f(t)dt + \frac{1}{x}f(x) = \frac{1}{x}[f(x) - F(x)]$, a.e.

$$F(x) \leq \frac{1}{x}\left(\int_0^x f^p(t)dt\right)^{1/p} \cdot \left(\int_0^x dt\right)^{1/q} = \left(\frac{1}{x}\int_0^x f^p(t)dt\right)^{1/p},$$

故 $xF^p(x) \le \int_0^x f^p(t)dt \to 0(x \to 0^+)$.

另一方面由

$$\begin{aligned} x^{1/p}F(x) &= \frac{x^{1/p}}{x}\int_0^x f(t)dt \\ &= \frac{x^{1/p}}{x}\left[\int_0^M f(t)dt + \int_M^x f(t)dt\right] \\ &\le \frac{x^{1/p}}{x}\int_0^M f(t)dt + \left(\int_M^x f^p(t)dt\right)^{1/p}\cdot(1-\frac{M}{x})^{1-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

得知 $xF^p(x) \to 0(x \to \infty)$. 于是由分部积分

$$\begin{aligned} \int_0^\infty F^p(x)dx &= xF^p(x)|_0^\infty - \int_0^\infty xpF^{p-1}(x)\cdot F'(x)dx \\ &= -p\int_0^\infty F^{p-1}(x)[f(x)-F(x)]dx \\ &= -p\int_0^\infty F^{p-1}(x)f(x)dx + p\int_0^\infty F^p(x)dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty F^p(x)dx &= \frac{p}{p-1}\int_0^\infty F^{p-1}(x)f(x)dx \\ &\le \frac{p}{p-1}\cdot\|F^{p-1}\|_q\cdot\|f\|_p \\ &= \frac{p}{p-1}\left[\int_0^\infty F^p(x)dx\right]^{1/q}\cdot\|f\|_p. \end{aligned}$$

从而 $\|F\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

(注: 若 ** $\int_A^B F^p(x)dx$, 再令 $A \to 0^+, B \to \infty$, 即可得 $F \in L^p(0,\infty)$ 并解所要不等式.)

提示: 无

24. 设 $\{f_n\}_{n\ge1} \subset L^2[0,1], f_n \Rightarrow 0, \|f_n\|_2 \le 1$. 求证 $\|f_n\|_1 \to 0$.

证明. 对任何 $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_n(x)|dx &= \int_{\{|f_n|\ge\delta\}}|f_n(x)|dx + \int_{\{|f_n|<\delta\}}|f_n(x)|dx \\ &\le \left(\int_{\{|f_n|\ge\delta\}}|f_n(x)|^2dx\right)^{1/2}\cdot(m(\{|f_n|\ge\delta\}))^{1/2}+\delta \\ &\le (m(\{|f_n|\ge\delta\}))^{1/2}+\delta. \end{aligned}$$

由此易知结论成立.

提示: 同证明.

25. 设 f 是 $[a,b]$ 是几乎处处有限的可测函数. $D=\{g\in L^2[a,b]: gf\in L[a,b]\}$. 求证 D 在 $L^2[a,b]$ 中稠密.

证明. 由题设 $m(\{|f|>n\}) \to 0(n\to\infty)$, 故 $m(\{|f|\le n\}) \to b-a(n\to\infty)$.

任取 $[a,b]$ 上有界可测函数 g, 令 $g_n = g\cdot\chi_{\{|f|\le n\}}$. 则 $g_n \in D$, 并且 $\|g_n-g\|_2^2 = \int_a^b |g_n(x)-g(x)|^2dx = \int_{|f|>n}|g(x)|^2dx \to 0$. 这说明 D 中函数可逼近任意有界可测函数, 故在 $L^2[a,b]$ 中稠密.

提示: 同证明.

26. $\mathbb{R}$ 上有紧支集且无穷次可微函数全体记为 C_c^∞. 设

$$g(x) = \begin{cases} ce^{\frac{-1}{1-|x|^2}}, & |x|<1 \\ 0, & |x|\ge 1, \end{cases}$$

其中 c 使 $\|g\|_1 = 1$.

(i) 求证 $g \in C_c^\infty$.

(ii) 若 $f\in L^p(\mathbb{R}), 1\le p<\infty$, f 有紧支集, 求证 $f_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-\lambda t)g(t)dt \in C_c^\infty, \lambda \ne 0$.

(iii) 求证 C_c^∞ 在 $L^p(\mathbb{R})$ 中稠密, $1\le p<\infty$.

证明. (i). 略.

(ii). 由定义,

$$\begin{aligned} f_\lambda(x) &= f(x-\lambda t)g(t)dt = \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} f(y)g(\frac{x-y}{\lambda})dy \\ &= \frac{1}{\lambda}\int_{x-\lambda}^{x+\lambda} f(y)g(\frac{x-y}{\lambda})dy. \end{aligned}$$

因为 f 有紧支集, 所以当 $|x|$ 充分大时上述积分为 0, 即 $f_\lambda(x)$ 有紧支集. 设当 $|y|\ge A$ 时 $f(y)=0$, 则 $f_\lambda(x) = \int_{-A}^A f(y)g(\frac{x-y}{\lambda})dy$. 由 $g\in C_c^\infty$ 易知 $f_\lambda \in C_c^\infty$.

(iii). 设 $f\in L^p(\mathbb{R})$. 对任何 $\varepsilon>0$, 取 $A>0$ 使 $\|f-f_A\|_p < \varepsilon/2$, 其中 $f_A = f\cdot\chi_{[-A,A]}$ 具有紧支集. 此时 $\int_{\mathbb{R}} f_A(x-\lambda t)g(t)dt \in C_c^\infty$, $\lambda\ne 0$. 因为 $\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = 1$, 所以 $f_A(x) = \int_{\mathbb{R}} f_A(x)g(t)dt$. 于是

$$\begin{aligned} &\left\|\int_{\mathbb{R}} f_A(\cdot-\lambda t)g(t)dt - f_A\right\|_p^p \\ =& \int_{\mathbb{R}}\left|\int_{\mathbb{R}}\Big(f_A(x-\lambda t)-f_A(x)\Big)g(t)dt\right|^p dx \\ \le& \int_{\mathbb{R}}\left|\int_{-1}^1 |f_A(x-\lambda t)-f_A(x)|g(t)dt\right|^p dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \int_{\mathbb{R}}\int_{-1}^{1}|f_A(x-\lambda t)-f_A(x)|^p dt\|g\|_q^p dx\\
&= \|g\|_q^p\cdot\int_{-1}^{1}dt\int_{\mathbb{R}}|f_A(x-\lambda t)-f_A(x)|^p dx\\
&\to 0,\qquad \lambda\to 0.
\end{aligned}
$$

所以, 当 λ 充分小时,

$$\left\|\int_{\mathbb{R}} f_A(\cdot-\lambda t)g(t)dt-f_A\right\|_p<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而

$$\left\|f-\int_{\mathbb{R}} f_A(\cdot-\lambda t)g(t)dt\right\|_p<\varepsilon.$$

这说明 C_c^∞ 在 $L^p(\mathbb{R})$ 中稠密.

提示: 同证明.

27. 设 A 是紧集, B 是闭集, $A\cap B=\emptyset$. 求证有 $h\in C_c^\infty$ 使

$$h(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\in B,\end{cases}$$

证明. 设 $2\lambda=\inf\{|x-y|:x\in A,y\in B\}$. 则 $\lambda>0$. 令 $G=\{x:d(x,A)<\lambda\}$, f 是 G 上的特征函数. 由于 G 有界, 故 f 有紧支集. 此时令 g 和 f_λ 如习题 6.26 所定义. 则 $f_\lambda(x)=\int_{\mathbb{R}}f(x-\lambda t)g(t)dt=\int_{-1}^{1}f(x-\lambda t)g(t)dt\in C_c^\infty$.

若 $x\in A$, 则当 $-1<t<1$ 时, $d(x-\lambda t,A)\le|x-\lambda t-x|<\lambda$, 即 $x-\lambda t\in G$, 故 $f(x-\lambda t)=1$, 从而 $f_\lambda(x)=\int_{-1}^{1}g(t)dt=1$.

若 $x\in B$, 则对任何 $y\in A$ 以及 $-1<t<1$,

$$|x-\lambda t-y|\ge|x-y|-\lambda|t|\ge 2\lambda-\lambda=\lambda.$$

所以 $x-\lambda t\notin G$, 从而 $f(x-\lambda t)$ 当 $-1<t<1$ 时恒为 0, 故 $f_\lambda(x)=0$. 因此 $f_\lambda(x)$ 满足条件.

提示: 同证明.

28. 设 $f\in L^p[a,b], 1\le p<\infty$. 求证有零测集 $Z\subset[a,b]$, 使

$$\frac{d}{dx}\int_a^x|f(t)-\alpha|^p dt=|f(x)-\alpha|^p,\alpha\in\mathbb{R},x\notin Z.$$

证明. 设 $\{r_n\}_{n\ge1}$ 是有理数全体. 对每一 $n\ge1$, 存在零测集 Z_n, 使当 $x\notin Z_n$ 时

$$\frac{d}{dx}\int_a^x|f(t)-r_n|^p dt=|f(x)-r_n|^p.$$

令 $Z=\bigcup_{n=1}^\infty Z_n$. 则对任何 $n\ge1$ 及 $x\notin Z$, 上式成立.

任取 $x\notin Z$, $\alpha\in\mathbb{R}$. 对任何 $n\ge1$ 及 $h>0$, 由 Minkowski 不等式,

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-r_n|^p dt\right)^{1/p}-|r_n-\alpha|\\
\le&\left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-\alpha|^p dt\right)^{1/p}\\
\le&\left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-r_n|^p dt\right)^{1/p}+|r_n-\alpha|.
\end{aligned}
$$

令 $h\to0$, 得

$$
\begin{aligned}
|f(x)-r_n|-|r_n-\alpha| &\le \varliminf_{h\to0}\left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-\alpha|^p dt\right)^{1/p}\\
&\le \varlimsup_{h\to0}\left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-\alpha|^p dt\right)^{1/p}\\
&\le |f(x)-r_n|+|r_n-\alpha|.
\end{aligned}
$$

上述不等式对任何 $n\ge1$ 成立. 特别地, 取一列有理数 r_{n_k} 使 $r_{n_k}\to\alpha$, 则有

$$\lim_{h\to0^+}\left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-\alpha|^p dt\right)^{1/p}=|f(x)-\alpha|.$$

类似可证,

$$\lim_{h\to0^+}\left(\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x}|f(t)-\alpha|^p dt\right)^{1/p}=|f(x)-\alpha|.$$

所以 $\frac{d}{dx}\int_a^x|f(t)-\alpha|^p dt=|f(x)-\alpha|^p$, $x\notin Z$.

提示: 同证明.

29. 设 f 在任何有界区间上绝对连续, $f,f'\in L^2(\mathbb{R})$. 求证 $F(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|f(x+k)|^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

证明. 首先,

$$\int_0^1F(x)dx=\sum_k\int_0^1|f(x+k)|^2dx=\sum_k\int_k^{k+1}|f(x)|^2dx=\|f\|_2^2<\infty.$$

所以, $F(x)<\infty$, a.e.

设 $F(x) < \infty$, $y \in (x, x+1)$, 则

$$\begin{aligned}
|F(y) - F(x)| &\le \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f^2(y+k) - f^2(x+k)| \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \int_{x+k}^{y+k} 2f(t)f'(t)dt \right| \\
&\le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{x+k}^{y+k} (|f(t)|^2 + |f'(t)|^2)dt \\
&= \|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2 < \infty.
\end{aligned}$$

所以 $F(y) < \infty$. 这说明 $F(x) < \infty$ 对所有 $x \in \mathbb{R}$ 成立. 此外, 上述推导说明, 当 $0 < y - x < 1$ 时,

$$|F(y) - F(x)| \le \int_x^y \sum_{k\in\mathbb{Z}} (|f(t+k)|^2 + |f'(t+k)|^2)dt.$$

由积分的绝对连续性可知 F 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

提示: 同证明.

30. (Heisenberg 不等式). 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 中非常数, 而且在任何有界区间上绝对连续, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \le 2\left(\int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2\right)^{1/2}.$$

证明. 由已知, f' 不恒等于 0. 不妨设 $xf(x), f'(x) \in L^2(\mathbb{R})$. 则存在 $a_n \to -\infty$ 和 $b_n \to \infty$ 使

$$b_n^2(f(b_n))^2 \to 0, \quad a_n^2(f(a_n))^2 \to 0, \quad n \to \infty.$$

从而

$$b_n(f(b_n))^2 \to 0, \quad a_n(f(a_n))^2 \to 0, \quad n \to \infty.$$

由分部积分,

$$\begin{aligned}
\int_{a_n}^{b_n} f^2(x)dx &= xf^2(x)\Big|_{a_n}^{b_n} - 2\int_{a_n}^{b_n} xf(x)f'(x)dx \\
&\le xf^2(x)\Big|_{a_n}^{b_n} + 2\|xf(x)\|_2 \cdot \|f'(x)\|_2.
\end{aligned}$$

令 $n \to \infty$, 得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx \le 2\|xf(x)\|_2 \cdot \|f'(x)\|_2.$$

提示: 同证明.

31. 设 $T > 0$, 求证 $\frac{1}{\sqrt{2T}}, \frac{1}{\sqrt{T}}\cos\frac{\pi x}{T}, \frac{1}{\sqrt{T}}\sin\frac{\pi x}{T}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{T}}\cos\frac{n\pi x}{T}, \frac{1}{\sqrt{T}}\sin\frac{n\pi x}{T}, \cdots$ 是 $L^2[-T,T]$ 中的完备正交组.

证明. 设 $f \in L^2[-T,T]$ 与题中一切函数正交. 此时 $g(x) = f(\frac{Tx}{\pi}) \in L^2[-\pi,\pi]$. 容易验证,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx dx &= 0, \qquad n \ge 0, \\
\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx dx &= 0, \qquad n \ge 1.
\end{aligned}$$

所以 $g(x) = 0$, a.e. 从而 $f(x) = 0$, a.e.

提示: 无

32. 求证对任何 $f \in L^2([0,\pi])$ 有 $\int_0^\pi [f(x) - \sin x]^2 dx + \int_0^\pi [f(x) - \cos x]^2 dx \ge \frac{\pi}{2}$. 并列举 f 使上等式成立.

证明. 由三角不等式,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi (f(x) - \sin x)^2 dx + \int_0^\pi (f(x) - \cos x)^2 dx \\
\ge\ & \int_0^\pi \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)^2 dx \\
=\ & \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $f(x) - \sin x = \cos x - f(x)$, a.e., 即 $f(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$, a.e.

提示: 无

33. 设 $\{t_n\}_{n\ge1}$ 是方程 $\tan t = t$ 的正根. 求证 $\{\sin t_n x\}_{n\ge1}$ 是 $L^2[0,1]$ 中的正交组.

证明. 当 $n \ne m$ 时,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \sin t_m x \sin t_n x dx \\
=\ & -\frac{\cos t_m x}{t_m}\sin t_n x\Big|_0^1 + \frac{t_n}{t_m}\int_0^1 \cos t_m x \cos t_n x dx \\
=\ & -\frac{\cos t_m \sin t_n}{t_m} + \frac{t_n}{t_m}\left(\frac{\sin t_m x}{t_m}\cos t_n x\Big|_0^1 + \frac{t_n}{t_m}\int_0^1 \sin t_m x \sin t_n x dx\right) \\
=\ & -\frac{\cos t_m \sin t_n}{t_m} + \frac{t_n \sin t_m \cos t_n}{t_m^2} + \frac{t_n^2}{t_m^2}\int_0^1 \sin t_m x \sin t_n x dx.
\end{aligned}$$

但

$$-\frac{\cos t_m \sin t_n}{t_m} + \frac{t_n \sin t_m \cos t_n}{t_m^2} = \cos t_m \cos t_n\left(\frac{-\tan t_n}{t_m} + \frac{t_n}{t_m^2}\cdot \tan t_m\right) = 0.$$

所以当 $m \neq n$ 时,

$$\int_0^1 \sin t_m x \sin t_n x dx = \frac{t_n^2}{t_m^2}\int_0^1 \sin t_m x \sin t_n x dx.$$

因此 $\int_0^1 \sin t_m x \sin t_n x dx = 0$.

提示: 同证明.

34. 证明 $\{\sin kx\}_{k\geq 1}$ 是 $L^2[0,\pi]$ 中的完备正交组.

证明. 设 $f \in L^2[0,\pi]$ 与一切 $\sin kx$ 正交. 把 f 开拓成 $[-\pi,\pi]$ 上的奇函数, 此时的 f 在 $L^2[-\pi,\pi]$ 与一切 $\sin kx, \cos kx (k\geq 0)$ 正交, 从而 $f(x)=0$, a.e.

提示: 同证明.

35. 设 $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 中的标准正交组, $F=\{x: \lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)存在\}$. 求证在 F 上几乎处处有 $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=0$.

证明. 令

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x), & x\in F\\ 0, & x\notin F,\end{cases}$$

则 $\int_{\mathbb{R}} f^2(x)dx = \int_F f^2(x)dx \leq \varliminf\limits_{n\to\infty}\int_F \varphi_n^2(x)dx \leq 1$. 因此 $f\in L^2(\mathbb{R})$, 从而 $\sum_n |\langle f,\varphi_n\rangle|^2<\infty$, 所以

$$0=\lim_{n\to\infty}\langle f,\varphi_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\int_F f(x)\varphi_n(x)dx = \int_F f^2(x)dx,$$

上述最后一步用到习题 6.13. 故 $f(x)=0$, a.e.

提示: 同证明.

36. 设 $\{e_n\}_{n\geq 1}$ 是 $L^2[a,b]$ 中的完备正交组. 求证

(i) $\sum e_n^2(x)=\infty$, a.e.

(ii) 对 $[a,b]$ 中任何正测度集 E 有 $\sum\int_E e_n^2(x)dx=\infty$.

证明. 只需证 (i). 设 $E=\{x\in[a,b]:\sum e_n^2(x)<\infty\}$. 若 $m(E)>0$, 则必有 N 使 $m(E_N)>0$, 其中 $E_N=\{x\in[a,b]:\sum e_n^2(x)<N\}$.

取 $F\subset E_N$ 使 $0<m(F)<\frac{1}{N}$. 则

$$\begin{aligned} m(F) = \|\chi_F\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\langle\chi_F,e_n\rangle^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_F e_n(x)dx\right)^2\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} m(F)\int_F e_n^2(x)dx\\ &= m(F)\int_F\sum_{n=1}^{\infty}e_n^2(x)dx < m(F)\cdot N\cdot m(F)<m(F).\end{aligned}$$

矛盾.

提示: 同证明.

37. 设 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ 是 $L^2[a,b]$ 中的标准正交组. 求证 $\sup_n T_a^b(f_n)=\infty$.

证明. 假设 $\sup_n T_a^b(f_n)=M<\infty$. 先证 $\{f_n(a)\}_{n\geq 1}$ 有界.

若 $\{f_n(a)\}_{n\geq 1}$ 无界, 不妨设 $|f_{n_k}(a)|\to\infty$. 此时对任何 k 及 $x\in[a,b]$, $|f_{n_k}(x)-f_{n_k}(a)|\leq T_a^b(f_{n_k})\leq M$, 从而 $|f_{n_k}(x)|\geq|f_{n_k}(a)|-M$. 于是当 k 充分大时, $\|f_{n_k}\|_2^2=\int_a^b|f_{n_k}(x)|^2dx>1$, 与题设矛盾. 所以 $\{f_n(a)\}$ 有界.

由习题 5.14, 存在 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ 的子列 $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1}$, 使得 $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1}$ 在 $[a,b]$ 上收敛于某个函数 $f(x)$. 再从 $|f_{n_k}(x)|\leq M+|f_{n_k}(a)|$ 知 $\{f_{n_k}(x)\}_{k\geq 1}$ 一致有界. 由控制收敛定理, $1=\lim_{k\to\infty}\int_a^b|f_{n_k}(x)|^2dx=\int_a^b|f(x)|^2dx$. 另一方面, 由习题 6.35 知 $f(x)=0$, a.e. 矛盾.

提示: 同证明.

38. 设 $\{e_n\}_{n\geq 1}$ 是 $L^2[a,b]$ 中的完备正交组. 求证对任何 $f\in L^2[a,b]$ 及可测集 $E\subset[a,b]$ 有 $\int_E f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\langle f,e_n\rangle\int_E e_n(x)dx$.

证明. 由已知, $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\langle f,e_k\rangle e_k(x)$ 在 $L^2([a,b])$ 中收敛于 $f(x)$. 从而

$$\left|\int_E(f(x)-S_n(x))dx\right|^2\leq m(E)\cdot\|f-S_n\|_2^2\to 0.$$

提示: 同证明.

39. 设 $\{e_n\}_{n\geq 1}$ 是 $L^2(E)$ 中的完备正交组, $\{f_n\}_{n\geq 1}$ 是标准正交组. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}\|e_n-f_n\|_2^2<1$. 求证 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ 也是完备的.

证明. 设 $f\in L^2(E)$ 与一切 f_n 正交. 则

$$\begin{aligned}\|f\|_2^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\langle f,e_n\rangle^2=\sum_{n=1}^{\infty}\langle f,e_n-f_n\rangle^2\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\|f\|_2^2\|e_n-f_n\|_2^2.\end{aligned}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\|e_n-f_n\|_2^2<1$, 上述不等式说明 $\|f\|_2^2=0$, 即 $f(x)=0$, a.e.

提示: 同证明.

40. 设 φ_0 在 $\mathbb{R}$ 上以 1 为周期且

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= \begin{cases}1, & 0\leq x<1/2\\ -1, & 1/2\leq x<1,\end{cases}\\ \varphi_n(x) &= \varphi_0(2^n x), \quad n\geq 1.\end{aligned}$$

求证 $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ 是 $L^2[0,1]$ 中的标准正交组. 并且对任何满足 $\sum c_n^2<\infty$ 的实数列 $\{c_n\}$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上几乎处处收敛.

证明. 设 $m>n\geq 0$. 则

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varphi_0(2^m x)\varphi_0(2^n x)dx &= \sum_{k=0}^{2^n-1}\int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} \varphi_0(2^m x)\varphi_0(2^n x)dx \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\int_k^{k+1}\varphi_0(2^{m-n}y)\varphi_0(y)dy.\end{aligned}$$

由 φ_0 的定义,

$$\int_k^{k+1}\varphi_0(2^{m-n}y)\varphi_0(y)dy=\int_k^{k+1/2}\varphi_0(2^{m-n}y)dy-\int_{k+1/2}^{k+1}\varphi_0(2^{m-n}y)dy.$$

因为 φ_0 周期为 1, 所以

$$\int_{k+1/2}^{k+1}\varphi_0(2^{m-n}y)dy=\int_k^{k+1/2}\varphi_0\Big(2^{m-n}(t+\frac{1}{2})\Big)dt=\int_k^{k+1/2}\varphi_0(2^{m-n}t)dt.$$

合并上述结果, 得到

$$\int_0^1\varphi_0(2^m x)\varphi_0(2^n x)dx=0,\qquad m\neq n.$$

因为 $\|\varphi_n\|_2=1$, 所以 $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ 是 $L^2[0,1]$ 上的标准正交组.

任取实数列 $\{c_n : n\geq 1\}$, 使得 $\sum c_n^2<\infty$. 则 $f(x):=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x)\in L^2[0,1]$. 令

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}c_k\varphi_k(x),\quad E=\{j/2^n : j,n\geq 0,\ j,n\in\mathbb{Z}\}.$$

任取 $t\in(0,1)-E$, 存在非负整数列 $\{j_n\}_{n\geq 1}$ 使得 $j_n/2^n<t<(j_n+1)/2^n$. 由 φ_k 的定义可知 S_n 在 $(j_n/2^n,(j_n+1)/2^n)$ 内为常数并且当 $k>n$ 时, $\int_{j_n/2^n}^{(j_n+1)/2^n}\varphi_k(x)dx=0$. 所以

$$\begin{aligned}S_n(t) &= \frac{1}{(j_n+1)/2^n-j_n/2^n}\int_{j_n/2^n}^{(j_n+1)/2^n}S_n(x)dx \\ &= \frac{1}{(j_n+1)/2^n-j_n/2^n}\int_{j_n/2^n}^{(j_n+1)/2^n}S_k(x)dx,\qquad k>n.\end{aligned}$$

令 $k\to\infty$, 得

$$S_n(t)=\frac{1}{(j_n+1)/2^n-j_n/2^n}\int_{j_n/2^n}^{(j_n+1)/2^n}f(x)dx.$$

于是

$$\begin{aligned}|S_n(t)-f(t)| &= \left|2^n\int_{j_n/2^n}^{(j_n+1)/2^n}(f(x)-f(t))dx\right| \\ &\leq 2^n\int_{j_n/2^n}^{(j_n+1)/2^n}|f(x)-f(t)|dx.\end{aligned}$$

若 t 是 f 的 Lebesgue 点, 则当 $n\to\infty$ 时, 上式右端趋于 0. 所以 $S_n(t)\to f(t)$.

注: $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ 在 $L^2[0,1]$ 中不完备. 例如, 取 $f(x)=1,\ 0\leq x\leq 1$, 则对任意 $n\geq 0$, $\int_0^1\varphi_n(x)f(x)dx=\int_0^1\varphi_n(x)dx=0$.

提示: 同证明.

41. 设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对连续, $f(-\pi)=f(\pi)$ 且 $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0$. 若 $f'\in L^2[-\pi,\pi]$, 求证 $\|f\|_2\leq\|f'\|_2$, 此外当且仅当 $f(x)=a\cos x+b\sin x$ 时等式成立.

证明. 由条件知在 $L^2[-\pi,\pi]$ 中收敛的意义下有

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx, \\ f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}nb_n\cos nx-na_n\sin nx.\end{aligned}$$

于是

$$\|f\|_2^2=\pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leq\pi\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n^2+b_n^2)=\|f'\|_2^2.$$

为使上述不等式变为等式, 充要条件是当 $n\geq 2$ 时 $a_n=b_n=0$. 所以 $f(x)=a_1\cos x+b_1\sin x$.

提示: 同证明.

42. 设 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ 是 $L^2(E)$ 中的正交组, $|f_n(x)|\leq M$, $m(E)<\infty$. 求证 $\sum\frac{1}{n}f_n(x)$ 在 E 上几乎处处收敛.

证明. 令

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}f_k(x),\quad g_N(x)=\sum_{n=1}^{N}|S_{(n+1)^2}(x)-S_{n^2}(x)|.$$

则

$$\|S_{(n+1)^2}-S_{n^2}\|_2^2\leq\sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2}\frac{C_1}{k^2}\leq\frac{C_2}{n^3}.$$

由 Minkowski 不等式,

$$\begin{aligned}\|g_{N_2}-g_{N_1}\|_2 &= \left\|\sum_{n=N_1+1}^{N_2}|S_{(n+1)^2}(x)-S_{n^2}(x)|\right\|_2\\ &\le \sum_{n=N_1+1}^{N_2}\|S_{(n+1)^2}-S_{n^2}\|_2\\ &\le \sum_{n=N_1+1}^{N_2}\frac{C_2}{n^{3/2}}\to 0,\qquad N_1,N_2\to\infty.\end{aligned}$$

因此, $\{g_N\}_{N\ge1}$ 在 $L^2(E)$ 中收敛于 $g=\sum_{n=1}^{\infty}|S_{(n+1)^2}(x)-S_{n^2}(x)|$. 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}|S_{(n+1)^2}(x)-S_{n^2}(x)|<\infty,\qquad a.e.$$

于是

$$|S_{m^2}(x)-S_{n^2}(x)|\le\sum_{k=n^2}^{m^2-1}|S_{(k+1)^2}(x)-S_{k^2}(x)|\to 0,\qquad a.e.$$

从而 $\{S_{n^2}(x)\}_{n\ge1}$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$.

当 $n^2<p<(n+1)^2$ 时, 我们有

$$|S_p(x)-S_{n^2}(x)|\le\sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2}\frac{M}{k}\le\frac{M(2n+1)}{n^2}\to 0.$$

于是,

$$|f(x)-S_p(x)|\le|f(x)-S_{n^2}(x)|+|S_{n^2}(x)-S_p(x)|\to 0,\qquad a.e.$$

提示: 同证明.

43. 设 $1<p<\infty$, $[a,b]$ 是有界区间, 求证为使 $[a,b]$ 上的函数 F 是某个 $f\in L^p[a,b]$ 的不定积分, 充要条件是有 $M>0$, 使对 $[a,b]$ 上的任何网 $\{x_k\}_{0\le k\le n}$ 有

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{F(x_k)-F(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}\right|^p(x_k-x_{k-1})\le M.$$

证明. (i). 必要性. 设 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, 其中 $f\in L^p[a,b]$. 设 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 则

$$|F(x_k)-F(x_{k-1})|\le\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(t)|dt\le\left(\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(t)|^pdt\right)^{1/p}\cdot(x_k-x_{k-1})^{1/q}.$$

于是

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{F(x_k)-F(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}\right|^p(x_k-x_{k-1})\le\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(t)|^pdt\le\|f\|_p^p.$$

(ii). 充分性. 对任何 $[c,d]\subset[a,b]$, 令

$$Y_c^d(F)=\sup_{\{x_k\}是\ [c,d]\ 上的网}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{F(x_k)-F(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}\right|^p(x_k-x_{k-1})\right\}.$$

则 $Y_a^x(F)$ 是 $[a,b]$ 上的单调有界非负函数, M 是它的一个界.

因为 $|z|^p$ 是下凸函数, 所以对任何 $A_1,A_2>0$, $A_1+A_2=1$ 及 b_1 和 b_2,

$$\left|\frac{b_1}{A_1}\right|^p\cdot A_1+\left|\frac{b_2}{A_2}\right|^p\cdot A_2\ge\left|\frac{b_1}{A_1}\cdot A_1+\frac{b_2}{A_2}\cdot A_2\right|^p=|b_1+b_2|^p.$$

即

$$|b_1+b_2|^p\le|b_1|^pA_1^{1-p}+|b_2|^pA_2^{1-p},\ A_1>0,A_2>0,A_1+A_2=1.$$

特别地, 取 $A_1=\frac{a_1}{a_1+a_2}$, $A_2=\frac{a_2}{a_1+a_2}$, 得

$$\left|\frac{b_1+b_2}{a_1+a_2}\right|^p(a_1+a_2)\le\left|\frac{b_1}{a_1}\right|^pa_1+\left|\frac{b_2}{a_2}\right|^pa_2.$$

与定理 5.2.3 类似可证当 $x_1\le x_2\le x_3$ 时,

$$Y_{x_1}^{x_3}(F)=Y_{x_1}^{x_2}(F)+Y_{x_2}^{x_3}(F).$$

设 $\{(a_k,b_k)\}$ 是 $[a,b]$ 中有限个两两不相交的区间, 则

$$\begin{aligned}&\sum|F(b_k)-F(a_k)|\\ =&\sum\left(\left|\frac{F(b_k)-F(a_k)}{b_k-a_k}\right|(b_k-a_k)^{1/p}\right)\cdot(b_k-a_k)^{1/q}\\ \le&\left(\sum\left|\frac{F(b_k)-F(a_k)}{b_k-a_k}\right|^p(b_k-a_k)\right)^{1/p}\cdot\left(\sum(b_k-a_k)\right)^{1/q}\\ \le&\ M^{1/p}\cdot\left(\sum(b_k-a_k)\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

所以 F 绝对连续, 从而可以表示为不定积分 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, 其中 $f\in L[a,b]$. 对任何 $a\le x_1<x_2\le b$, 把上述 $\{(a_k,b_k)\}$ 看成 $[x_1,x_2]$ 上的一个网, 则上述不等式又说明 $T_{x_1}^{x_2}(F)\le[Y_{x_1}^{x_2}(F)]^{1/p}\cdot(x_2-x_1)^{1/q}$. 从而

$$\left[\frac{1}{x_2-x_1}T_{x_1}^{x_2}(F)\right]^p\le\frac{Y_{x_1}^{x_2}(F)}{x_2-x_1}=\frac{Y_a^{x_2}(F)-Y_a^{x_1}(F)}{x_2-x_1}.$$

又 $T_a^x(F)=\int_a^x|f(t)|dt$, 所以 $\frac{d}{dx}T_a^x(F)=|f(x)|$, a.e. 上述不等式说明 $|f(x)|^p\le\frac{d}{dx}Y_a^x(F)\in L([a,b])$. 故 $f\in L^p[a,b]$, 并且 $\int_a^b|f(x)|^p\le\int_a^b[Y_a^x(F)]'dx\le Y_a^b(F)$.

提示: 同证明.

44. 设 $\{f_k\}_{1\le k\le n}$ 是 $L^2(E)$ 中的线性无关组. 求证有 $f_{n+1}\in L^2(E)$, 使 $\{f_k\}_{1\le k\le n+1}$ 也是线性无关组.

证明. 若不然, 则对任何 $g\in L^2(E)$, g 是 $\{f_k\}_{1\le k\le n}$ 的线形组合, 从而 $L^2(E)$ 的维数为 n. 现在 $m(E)>0$, 从而存在 E 的 $n+1$ 个两两不相交的正测度子集 $\{E_k\}_{1\le k\le n+1}$. 令 g_k 是 E_k 的特征函数. 则显然 $\{g_k\}_{1\le k\le n+1}$ 线性无关, 矛盾.

提示: 同证明.

45. 设 $\{f_n\}_{n\ge1}$ 是 $L^2(E)$ 中的稠集, 则有严格单调正整数列 $\{n_k\}_{k\ge1}$, 使 $\{f_{n_k}\}_{k\ge1}$ 是线性无关组.

证明. 为证结论成立, 只需证明对任意有限线性无关组 $\{f_{n_k}\}_{1\le k\le p}$, 存在某个 $f_{n_{p+1}}$, 使 $\{f_{n_k}\}_{1\le k\le p+1}$ 也是线性无关组.

反证. 设对任何 $n>n_p$, f_n 是 $\{f_{n_k}\}_{1\le k\le p}$ 的线性组合, 从而也可表示为 $\{f_k\}_{1\le k\le n_p}$ 的线性组合. 令 $H=\{\sum_{k=1}^{n_p}\alpha_k f_k:\alpha_k\in\mathbb{R}\}$. 则 H 在 $L^2(E)$ 中稠密. 设 H 的维数为 N, 则 $N<\infty$. 设 H 的标准正交基为 $\{e_k\}_{1\le k\le N}$. 则对任何 $g_n\in H$, 存在 $\alpha_k^{(n)}$ 使得

$$g_n=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^{(n)}e_k.$$

不难验证, $\{g_n\}$ 收敛当且仅当 $\{\alpha_k^{(n)}\}_{n\ge1}$ 对每个 k 收敛, 从而极限仍在 H 中, 故 $H=L^2(E)$. 但由习题 6.44, $L^2(E)$ 是无限维空间, 矛盾.

提示: 同证明.