集合与实数集

luojunxun

2023 年 4 月 4 日

要证明 $m(E)=1$，可以采用反证法。假设 $m(E)<1$，那么存在一个开区间 $(a,b)\subset[0,1]$，使得 $m(E\cap(a,b))<b-a$。

由于 $E\subset[0,1]$，所以 $E\cap(a,b)\subset(a,b)$。因此，对于任意的 $I=(c,d)\subset(a,b)$，有：

( ) ((,)) < − m(E I) m(E (a,b))<b−a

又因为 E 是可测集，所以 $E\cap(a,b)$ 也是可测集。根据可测集的定义，对于任意的 $\epsilon>0$，都存在开集 $O\supset E\cap(a,b)$，使得 $m(O\setminus(E\cap(a,b)))<\epsilon$。因为开集是可数个开区间的并集，所以存在一个开区间 $I\subset(a,b)$，使得 $I\cap(O\setminus(E\cap(a,b)))\neq\emptyset$。

因此，$I\cap O\subset(a,b)$，且 $I\cap O\subset E^c$。于是，$m(E\cap I)\leq m(O\setminus(E\cap(a,b)))<\epsilon$。取 $\epsilon=\frac{b-a}{2}$，得到 $m(E\cap I)<\frac{b-a}{2}$。这与 $m(E\cap I)\leq\delta(b-a)$ 矛盾，因为 $\delta<\frac{1}{2}$。因此，假设 $m(E)<1$ 不成立，即 $m(E)=1$。