

一、不妨设单个物品大小为  $m$ , 背包容量为  $S = nm$ .

任在线算法放入  $n$  个物品后, 假设此时已出现  $j$  个物品 (即  $j$  个被放入). 不妨设  $p_j$  为其中价值最大的,  $p_1$  为最小的. 则  $C^* \geq C^A - p_1 + p_{j+1}$ . 从而  $\frac{C^*}{C^A} \geq \frac{p_{j+1}}{n p_j}$  由于  $k$  任取, 故竞争比任意大.

二、下界为 1.  $C^A/C^* \geq 1$ .

三、设两汇率为  $d_1, d_2$ . 第一天兑换  $x$  元

任在线算法解可表示为  $C^A = d_1 x + d_2 (100 - x) = (d_1 - d_2)x + 100d_2$ .

最优解为  $C^* = 100 \max\{d_1, d_2\}$ .

则  $C^A/C^* = \frac{(d_1 - d_2)x + 100d_2}{100 \max\{d_1, d_2\}} \leq 1$ . 故下界为 1.

四: 显然竞争的上界  $\frac{5}{4}$ . 故下界在 1 到  $\frac{5}{4}$  间.

取统一定价 1. 其若在线条件下舱位未满, 则只出现 400 元的舱位. 一旦占满则出现 150 个高价位.

第一个客户  $p_1 = 400$ . 则  $C_1^A = 400$  或 0.  $C_1^* = 400$ . 若  $C_1^A = 0$  则  $C^A/C^* = \infty > \frac{5}{4}$ .

故  $C_1^A = 400$ . 同理  $C_2^A = 800$ . 否则  $\frac{C_2^A}{C_2^*} = \frac{800}{400} = 2 > \frac{5}{4}$ .

依次下去. 则  $C_{150}^A = 150 \times 400 \Rightarrow C_{300}^A = 150 \times 400$ .  $C_{300}^* = 150 \times 500$ .

故  $\frac{C_{300}^A}{C_{300}^*} = \frac{5}{4} \geq \frac{5}{4}$ . 故  $\frac{5}{4}$  是下界.