# 浙江大学 2018 – 2019 学年春夏学期

求是数学班《高等代数 II》测验 I

2019.03.22

1. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}$, $\det(\boldsymbol{A})=-1$, 且 $\boldsymbol{A}$ 的转置 $\boldsymbol{A}^T$ 有一个特征值 $\lambda_0$, 属于 $\lambda_0$ 的一个特征向量为 $(-1,-1,1)^T$. 求 $a,b,c,\lambda_0$ 的值.

2. 设 $\boldsymbol{A}\in M_n(\mathbb{F})$ 有两个不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2$, 且 $\dim(E_{\lambda_1})=n-1$. 证明: $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

3. 设 $V$ 是次数 $\leq 2$ 的实多项式全体构成的线性空间, $T\in L(V)$ 定义如下:

$$T\left(f(x)\right)=f(x)+\lambda f'(x).$$

求 $T$ 的特征值, 并且对每个特征值, 求属于它的特征子空间.

4. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}\in M_n(\mathbb{F})$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 各有 $n$ 个不同的特征值. $f(t)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式, 且 $f(\boldsymbol{B})$ 是可逆阵, 求证: 矩阵$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$ 可对角化.

5. 设 $\sigma: V\longrightarrow V$ 是有限维线性空间 $V$ 上的一个同构映射. 记 $E(\sigma,\lambda)$ 为 $\sigma$ 的属于特征值 $\lambda$ 的特征子空间.

(1)若 $\lambda$ 是 $\sigma$ 的特征值, 证明: $\lambda\neq 0$;

(2)若 $\lambda$ 是 $\sigma$ 的特征值, 证明: $E(\sigma,\lambda)=E(\sigma^{-1},\lambda^{-1})$.

6. 设 $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ 分别是 $n\times m$ 矩阵和 $m\times n$ 矩阵, 且满足 $\boldsymbol{YX}=\boldsymbol{I}_m$. 令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{XY}$, 证明: $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

7. 设 $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{R}), \boldsymbol{A} = (A_{ij})$ . 若对于任意的 $i = 1, 2, \cdots, n$ 有 $A_{ii} > \sum\limits_{j \neq i} |A_{ij}|$ , 则称 $\boldsymbol{A}$ 是“严格对角占优阵”. 证明: 严格对角占优阵的特征值不为零.

8. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_n(\mathbb{C})$, 当他们可交换时, 他们可以被同时相似化(即: 存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{PAP}^{-1}$ 和 $\boldsymbol{PBP}^{-1}$ 同时为上三角阵) 若将“可交换”这一条件改为: 存在非零常数 $c$, 使得 $\boldsymbol{AB} = c\boldsymbol{BA}$, 类似的结论是否成立? 说明你的理由.