柯西收敛准则证明单调有界定理.

proof: 设$\{x_n\}$是单增有界的数列. 下面证明$\{x_n\}$收敛.

由$\{x_n\}$有界知$\{x_n\}$有上界, 有上确界, 记为$M=\sup\{x_n\}$

反设$\{x_n\}$不收敛. 由Cauchy收敛准则知 $\exists \varepsilon_0>0$, s.t. $\forall N_0\in N^+$

$\exists n>m>N_0$. 有 $x_n-x_m>\varepsilon_0$

则 $x_n = x_1+x_2-x_1+\cdots+x_n-x_{n-1} = x_1+(n-1)\varepsilon$ 又$\{x_n\}$有上界.

则 $x_1+(n-1)\varepsilon_0\le M$ 恒成立 $(\forall n\in N^+)$. 这与n的无穷性矛盾.

故假设不成立. 即$\{x_n\}$收敛.

8. 设 $S=\{x\mid x\in \mathbf{Q}$ 并且 $x^2<3\}$, 证明:

(1) S没有最大数与最小数;

(2) S在$\mathbf{Q}$内没有上确界与下确界.

proof:

(1). 只需证S没有最大数. (最小与最大数互为相反数(若存在)).

反设$M\in S$是S的最大数. 则$M^2<3$且$M\in Q$. 易知$3\in Q$. 若$\frac{3+M}{2}\in Q$.

且$\left(\frac{3+M}{2}\right)^2<3$. 故$\frac{3+M}{2}\in S$且$\frac{3+M}{2}>M$. 这与$M$是$S$的最大数矛盾!

(2). 反设S在Q内有上确界$a=\sup S$. 则$\left(\frac{a+3}{2}\right)^2<3$且$\frac{a+3}{2}\in Q$. 即$\frac{a+3}{2}\in S$.

但$\frac{a+3}{2}>a$. 即a不是S的上确界. 矛盾!

7. 证明非空有下界的数集必有下确界.

设S是一非空数集: 设A是S的下界构成的集合. 即$A=\{x\mid x\le t, t\in S\}$.

取$B=R\setminus A$. 故A/B构成R的一个切割. 下证B无最小值.

由于$B=R\setminus A$. 故$\forall x\in B$. x不是S的下界. 故$\exists t\in S$. s.t. $t<x$

令 $t_0=\frac{t+x}{2}$. 则 $t<t_0<x$. 故 t_0 也不是 S 的下界. 故 $t_0\in B$.

而 $t_0<x$ 即 B 中任一元有比其更小的元, 且在 B 中. 故 B 无最小值.

从而 A 有最大值. 即 S 有下确界