第2章　随机过程基本概念

1. 随机过程基本概念
2. 随机过程的数字特征
3. 随机过程的分布刻画
4. 几类常见的随机过程

1. 随机过程基本概念

- 过程，通常用来描述与时间有关的事件或活动，如

人类社会发展过程

化学反应过程

操作过程

求学过程等等。

为了描述一个“过程”，通常需要明确指出<u>什么时刻</u>处于<u>何种状态</u>。

- 以”求学过程”为例，通常情况下是：

三岁开始上幼儿园，小班、中班、大班；

六岁上小学，共六年；

12岁上初中，共三年，结束9年制义务教育，随后部分同学继续读书；

15岁上高中，共三年，中学毕业十八岁；

经过全国统一考试，一部分同学获得上大学学习的机会。

普通高等学校全日制大学学制四年，正常情况下，22岁大学毕业。

但也会出现一些特殊情况，如

因成绩优异，小学跳级一年；

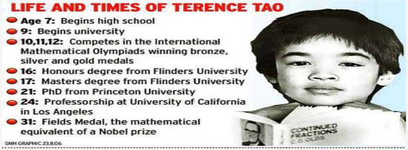
由于身体原因，休学一年；

第一次参加中考或高考没有被录取；

因中学成绩优异，提前被录取获大学入学资格等等。

这些同学“求学过程”不完全相同。

A boy genius who played his numbers justright



Deborah Smith Science Editor
August 23, 2006

- 随机过程是一族随机变量，用于描述与时间相关的随机现象。

严格地说，假设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$是概率空间，$X_t, t \in T$是一族取值于集合E的随机变量，称$\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$为随机过程。

T称为时间，通常为

$(-\infty, \infty)$，$[0, \infty)$，$[0, 1]$，$\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$，

$\{0, 1, 2, \cdots\}$，或者$\{1, 2, \cdots\}$。

E称为状态空间。通常E为实数集，如$\mathbb{R}$，$\mathbb{Z}$，$\mathbb{N}$；

有些情况下E为抽象点集，如

{成功、失败}，{开启、关闭}。

“$X_t = a$”解读为“随机过程X在t时刻处于a状态”。

- 随机过程$\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$的随机性通过$\omega$体现出来。

ω是随机现象的基本结果，以一定的概率大小发生。

当ω发生时，称$\mathbf{X}(\omega) = (X_t(\omega), t \in T)$为样本曲线或样本轨迹。
如，从一群大学毕业生中任选一名，他(她)的“求学过程”就构成一条样本轨迹。

当考虑某指定的时刻$t \in T$，$X_t(\cdot)$是随机变量。

“随机过程”有时写作$X(\omega, t)$, $X_t(\omega)$。

例1. 余弦波过程

假设$\Theta \sim U(0, 2\pi)$，a, w是给定的常数。定义

$$X(\Theta, t) = a\cos(wt + \Theta), \quad t \in (-\infty, \infty)$$

其中a振幅，w频率，θ相位。

该过程时间参数为$T = (-\infty, \infty)$，

状态空间为$E = [-a, a]$。

给定$\theta \in (0, 2\pi)$，$X(\theta, t)$表示一条余弦波曲线。不同的余弦波曲线可以通过平移得到。

固定一个时刻$t \in (-\infty, \infty)$，$X(\Theta, t)$表示一个随机变量，它是均匀随机变量Θ的函数。

例2. 简单随机游动

一粒子在直线上整数格点之间进行随机游动。从原点0处出发，等可能地向左和右移动一格。每到一个格点处，独立重复移动，等可能地向左和右移动一格。考虑该粒子运动轨迹。

令ξ_n是一列独立同分布随机变量，分布如下

$$P(\xi_n = \pm 1) = \frac{1}{2}$$

令

$$S_0 = 0, \quad S_1 = \xi_1, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$$

那么$\mathbf{S} = \{S_0, S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots\}$是一个随机过程.

该过程时间参数$T = \{0, 1, 2, \cdots, \}$,

状态空间$E = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$

2. 随机过程的数字特征

假设$\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$ 是随机过程，$E = \mathbb{R}$ 或$\mathbb{N}$。
如果对每个$t \in T$, $E|X_t| < \infty$，记$\mu_t = EX_t$，
称$\mu_t, t \in T$为均值函数。

如果对每个$t \in T$, $EX_t^2 < \infty$，记$\sigma_t^2 = Var(X_t)$，称σ_t^2为方差函数；

称二元函数$r(s,t) = Cov(X_s, X_t)$为协方差函数；
类似地，称二元函数$\rho(s,t) = EX_sX_t$为相关函数。

例1. 余弦波过程(续)

$$X(\theta,t)=a\cos(wt+\Theta),\quad t\in(-\infty,\infty)$$

$$\begin{aligned}
EX(\Theta,t) &= aE\cos(wt+\Theta)\\
&= a\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos(wt+\theta)d\theta\\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
EX(\Theta,s)X(\Theta,t) &= a^2E\cos(ws+\Theta)\cos(wt+\Theta)\\
&= a^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos(ws+\theta)\cos(wt+\theta)d\theta\\
&= \frac{a^2}{2}\cos(w(t-s))
\end{aligned}$$

例2. 简单随机游动(续)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$$

$$ES_n = \sum_{k=1}^{n} E\xi_k = 0$$

$$\begin{aligned} ES_nS_m &= E\sum_{k=1}^{n}\xi_k\sum_{k=1}^{m}\xi_k \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} E\xi_j\xi_k \\ &= \sum_{k=1}^{n\wedge m} E\xi_k^2 = n\wedge m \end{aligned}$$

3. 随机过程的分布刻画

1. 1-维分布

给定$t \in T$，X_t是定义在概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$的随机变量。

对每个E的子集A，定义

$$\nu_t(A) = P(\omega \in \Omega : X_t(\omega) \in A)$$

称ν_t为随机过程$\mathbf{X}$在t时刻的1-维分布。

2. k-维分布

给定$t_1, \cdots, t_k \in T$，$(X_{t_1}, \cdots, X_{t_k})$是$k$-维随机向量。

对E的子集$A_1, \cdots, A_k$，定义

$$\nu_{t_1,\cdots,t_k}(A_1, \cdots, A_k) = P(\omega \in \Omega : X_{t_1}(\omega) \in A_1, \cdots, X_{t_k}(\omega) \in A_k)$$

称$\nu_{t_1,\cdots,t_k}$为随机过程$\mathbf{X}$在$t_1, \cdots, t_k$时刻的k-维分布。

- 随机过程的分布

给定任何有限个时刻$t_1, \cdots, t_k$，其k-维分布都不足以描述整个过程$\mathbf{X}$的分布规律。

为了描述整个过程$\mathbf{X}$的分布规律，人们需要知道所有有限维分布，即

$$\{\nu_{t_1,\cdots,t_k}, t_i \in T, 1 \le i \le k, k \ge 1\}$$

然而，一般情况下很难写出所有有限维分布。

下面介绍两种特殊情况：

1. 假设$T \subseteq (-\infty, \infty)$，$E = \mathbb{R}$。

给定$t_1, \cdots, t_k \in T$，不妨假设$t_1 < t_2 < \cdots < t_k$，并考虑增量

$$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \cdots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$$

如果知道上述增量的分布，那么$X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_k}$的分布可以通过下列线性变换得到:

$$\begin{cases} X_{t_1} = X_{t_1} \\ X_{t_2} = X_{t_1} + X_{t_2} - X_{t_1} \\ X_{t_3} = X_{t_1} + X_{t_2} - X_{t_1} + X_{t_3} - X_{t_2} \\ \cdots\cdots \\ X_{t_k} = X_{t_1} + X_{t_2} - X_{t_1} + \cdots + X_{t_k} - X_{t_{k-1}} \end{cases}$$

特别，当所有增量相互独立时，只要知道任意两个时刻增量的分布，就可以完全确定整个过程的分布。

例2. 简单随机游动(续)

$\mathbf{S}=\{S_0,S_1,S_2,\cdots,S_n,\cdots\}$是增量独立过程。

假设$m<n$，增量S_n-S_m的分布如下：

$$\begin{aligned} P(S_n-S_m=k) &= P(S_{n-m}=k) \\ &= \begin{cases} \binom{n-m+|k|}{\frac{n-m+|k|}{2}}\frac{1}{2^{n-m}} & n-m+|k| \quad \text{even} \\ 0 & n-m+|k| \quad \text{odd} \end{cases} \end{aligned}$$

2. 利用条件概率的链式法则计算k-维分布

给定$t_1, \cdots, t_k \in T$

$$\begin{aligned}
&\nu_{t_1,\cdots,t_k}(A_1, \cdots, A_k) \\
&= P(X_{t_1}(\omega) \in A_1, X_{t_2}(\omega) \in A_2, \cdots, X_{t_k}(\omega) \in A_k) \\
&= P(X_{t_1} \in A_1) P(X_{t_2} \in A_2 | X_{t_1} \in A_1) \cdots \\
&\qquad \times P(X_{t_k} \in A_k | X_{t_1} \in A_1, \cdots, X_{t_{k-1}} \in A_{k-1})
\end{aligned}$$

由此可以看出，如果知道随机过程$\mathbf{X}$在各个不同时刻的条件概率，那么可以写出整个过程的分布。

综上所述，为了揭示随机过程的分布规律，人们需要知道随机现象如何随时间推移而变化的内在机制。

4. 几类特殊过程

- 弱平稳过程

假设$\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$是实值随机过程，$T$为实数集，
并且对任意$t \in T$，二阶矩$EX_t^2 < \infty$。如果
(1) 均值函数是常数，即$\mu_t = \mu$;
(2) 相关函数$\rho(s,t)$仅依赖于时间间隔长度$t-s$，而与时刻s和t无关。
则称$\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$是弱平稳随机过程。

例1. 余弦波过程(续)

$$X(\theta, t) = a\cos(wt + \Theta), \quad t \in (-\infty, \infty)$$

该过程是弱平稳过程。

- 强平稳随机过程

假设$\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$是状态空间为$E$的随机过程.

如果对任意$t, t_1, \cdots, t_k \in T$，随机向量$(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_k})$和$(X_{t_1+t}, X_{t_2+t}, \cdots, X_{t_k+t})$具有相同分布，即

$$\nu_{t_1,\cdots,t_k} = \nu_{t_1+t,\cdots,t_k+t}$$

则称$\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$为强平稳过程。

例2. 假设ξ是概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上的实值随机变量，
定义$\xi_n = \xi, n \geq 0$，
那么$\mathbf{X} = (\xi_n, n \geq 0)$是强平稳随机过程。
如果$E\xi^2 < \infty$，那么它是弱平稳随机过程。

例3. 假设$\xi_n = \xi, n \geq 0$是一列独立同分布的实值随机变量，
那么$\mathbf{X} = (\xi_n, n \geq 0)$是强平稳随机过程。
如果对每个$n \geq 0$，$E\xi_n^2 < \infty$，那么它是弱平稳随机过程。

- 一般情况下，强平稳过程并不一定是弱平稳过程。

- 增量平稳过程

假设$\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$是实值随机过程，$T$为实数集。
如果对任意$s < t$，$X_t - X_s$的分布仅与时间间隔长度$t - s$有关，
而与s和t无关，那么称$\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$是增量平稳过程。

- 增量独立过程

假设$\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$是实值随机过程，$T$为实数集。
如果对任意$t_1 < t_2 < \cdots < t_k$，随机变量

$$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \cdots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$$

相互独立，那么称$\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$是增量独立过程。

- 后面所学的Poisson过程、Brown 运动既是增量平稳过程，又是增量独立过程。

- 正态过程

假设$\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$是实值随机过程，$T$为实数集。如果任意$k$-维分布都是联合正态分布，则称$\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$为正态过程。

注意，k-维正态分布由其k维均值向量和k阶协方差矩阵所确定。

给定$t_1, t_2, \cdots, t_k \in T$，$k$维均值向量为$(\mu_{t_1}, \cdots, \mu_{t_k})$，$k$阶协方差矩阵为

$$\begin{pmatrix} r(t_1,t_1) & r(t_1,t_2) & r(t_1,t_3) & \cdots & r(t_1,t_k) \\ r(t_1,t_2) & r(t_2,t_2) & r(t_2,t_3) & \cdots & r(t_2,t_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r(t_1,t_k) & r(t_2,t_k) & r(t_3,t_k) & \cdots & r(t_k,t_k) \end{pmatrix}$$

其中$r(t_i, t_j) = Cov(X_{t_i}, X_{t_j})$.

如果$\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$是弱平稳正态过程，那么它一定是强平稳正态过程。

由定义，$\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$是正态过程，当且仅当它的任意有限线性组合是正态随机变量。

为了验证$\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$是正态过程，只要证明：
对任意$t_1, t_2, \cdots, t_k \in T$和$a_1, a_2, \cdots, a_k \in \mathbb{R}$，

$$\sum_{i=1}^{k} a_i X_{t_i}$$

服从正态分布。

- 白噪声

假设$\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$是状态空间为$\mathbb{R}$的随机过程，如果$X_s$和$X_t$ 互不相关，则称$\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$白噪声(White Noise)。