Mandelbrot-set 和 Julia-set

罗俊勋
数学与应用数学
3210101613

2022 年 7 月 4 日

摘要

探讨 Mandelbrot-Set 和 Julia-Set 之间的关系, 并使用 Python 实现 set 可视化

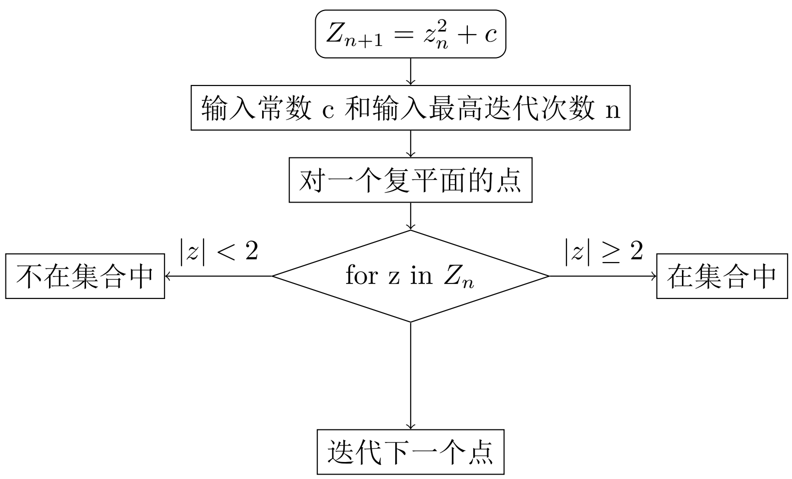
1.Julia 和 Mandelbrot 简介 ：

Julia 集是一个在复平面上形成分形的点的集合, 它由法国数学家 Gaston Julia 最早发现。[?] Julia 集合可以由下式进行反复迭代得到:$f(x) = z^2 + c$, 其中 z 是复平面某一点,c 是一个复常数。把这个公式反复迭代, 最终会得到一个复数 C, 然后根据 C 的模长的大小, 把这个点映射成不同的颜色.(这里用到的是 python 中 imshow 函数) 漂亮的 Julia 集分形就出来了. 每取一个不同的 c ，我们都能得到一个不同的 Julia 集，这些 Julia 集长相各异, 稍微更改 c 的数值, 就会对 Julia 集产生很大的影响, 这些集合各有各的美丽. 在 Julia 集相关领域中，有一个非常漂亮而且非常重要的定理叫做 $fundamentaldichotomytheorem$, 这个定理告诉我们，一个 Julia 集要么是完全连通的，任意两点间都有一条通路；要么是完全不连通的，整个图形全是一个个孤立的点随着常数 c 的变化，对应的 Julia 集也会连续地发生变化。想要探究的是，哪些 c 值会让对应的 Julia 集形成一个连通的区域？在研究 Julia 集时，通常假设 c 的模总是小于 2 的, 因此，对任意一个满足 |z| > 2 的复数 z ，都有 $|z^2| = |z|^2 > 2 \cdot |z|$, 也就是说，对这样的 z 进行平方后，它的模至少都会变成原来的两倍。即使常数 c 的方向和 z2 的方向完全相反，也不足以把 z2 的模抵消到原来的水平。因此，在迭代运算过程中，一旦某一步结果的模大于 2 了，可以断定它必将发散到无穷。因此，我们有

了 Julia 集合的另一个定义。z 到 z^2+c 对应的 Julia 集，就是无限迭代下去后模仍然不超过 2 的点。于是，我们给出 Julia 集的另外一个定义我们可以从复平面上模不超过 2 的所有点，也就是以原点为中心半径为 2 的圆盘出发，看看哪些点的平方加 c 后会落在这个圆盘内，进而考察哪些点平方加 c 再平方加 c 后将会落在这个圆盘内，如此反向迭代，不断找出原象，反推出符合要求的点集 (Mandelbrot)。[**?**]

算法流程

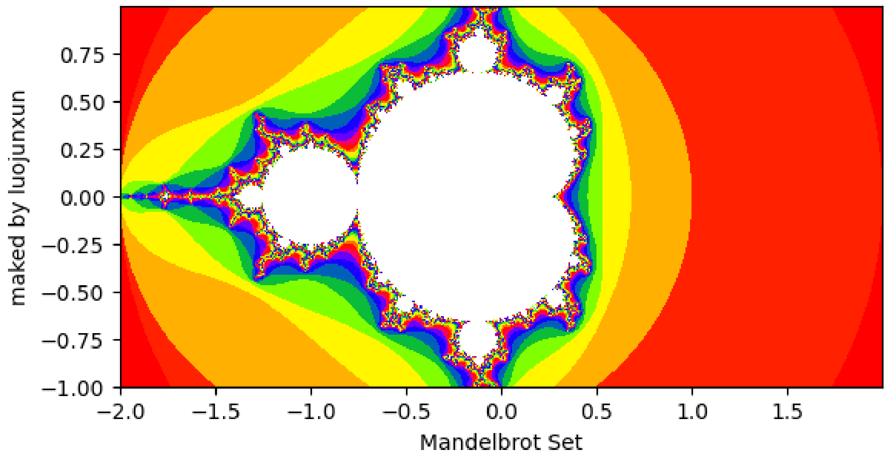
1 Julia 集合的绘制流程图



计算 Mandelbrot ：

为了判断 z → z2 + c 的 Julia 集是否连通，我们只需要测试一下，看对初始值 0 迭代无穷多次，所得的模是否会趋于无穷大。我们自然希望知道，能够使 Julia 集连通的常数值 c 在复平面上组成了一个什么样的图形。为此，我们只需要固定初始值为 0 . 把复平面上不同的点当作 c ，画出迭代过程中模的发散速度, 和最开始制作 Julia 集一样，我们用不同的颜色来表示不同的发散速度: 运行 Mandelbrot-set.py 文件, 得到其图片: 这本身竟然又是一个漂亮的分形图形！

计算不同 c 下的 Julia 集合 ：



在程序 Julia-Set.py 中分别取 $c = -0.8 + 0.156i, c = 0.11 + 0.66i$ 得到两张 Julia 的分形图: 图 1 和图 2 (见下页)

再取 $c = 0.188 + 0.78603i, n = 5$ 得到:Julia Set 图 (见下页)

小结 ：

让我们总结一下 Julia 集和 Mandelbrot 集的关系。在迭代过程 z → z2 + c 中，我们有四个参数：z 的初始值的实部、虚部，以及 c 的实部、虚部。Julia 集就是给定 c 的实部、虚部后所得的结果，而 Mandelbrot 集则是限定 z 的实部和虚部均为 0 后的结果事实上，如果把所有不同的 Julia 集重合起来，我们将会得到一个四维图形，它的其中两个维度是不同的初始值 z 构成的复平面，另外两个维度则是不同的常数 c 构成的复平面。这个四维空间就包含了所有不同的初始值在所有不同的常数 c 之下迭代的发散情况。而 Mandelbrot 集，则是这个四维图形在 c = 0 处的一个切片，并且是最具有概括力的一个切片。[**?**]

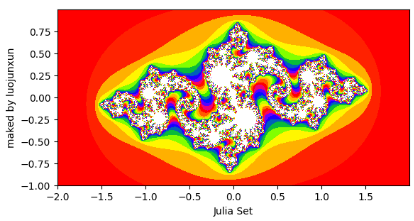


图 1: -0.8+0.156i

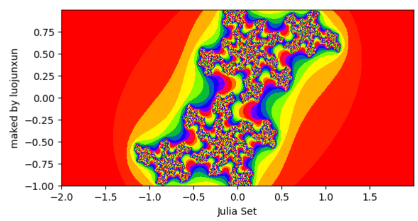


图 2: 0.11+0.66i