



浙江大学
ZheJiang University

数学建模

浙江大学数学科学学院 谈之奕

tanzy@zju.edu.cn

招聘问题

- n 位求职者应聘某一职位，招聘方通过逐个面试予以考察
 - 应聘者的综合能力各不相同，通过面试可给出已面试的应聘者的综合能力大小顺序
- 应聘者以某一顺序接受面试，某个应聘者是否被录用必须在他面试结束后立即决定
 - 若录用，招聘即告结束，不再面试其他应聘者
 - 若不录用，招聘方继续面试下一位应聘者
 - 招聘方不得录用曾作出过不录用决定的应聘者
- 招聘方采用何种策略可使招聘到综合能力最强（第一名）的应聘者的概率最大

可行策略

- 备选者
 - 若目标为招聘到第一名的概率尽可能大，招聘方只会录用比之前所有应聘者均优的那位应聘者
- 策略 s
 - 从第 s 位应聘者开始，录用首次出现的一名备选者
 - 若至最后一名应聘者面试时仍未有备选者出现，是否录用最后一名应聘者对结果没有影响

招聘方如何根据当前应聘者在所有已面试应聘者中的相对名次推测他是否为所有应聘者中的第一名

录用——后来者更好怎么办？不录用——后来者更差怎么办？

数学描述

- 应聘者、绝对名次、相对名次
 - 应聘者中综合能力居于第 i 名, $i = 1, \dots, n$ 的应聘者记为 i , i 称为其绝对名次
 - 第 i 位, $i = 1, \dots, n$ 接受面试的应聘者记为 A_i
 - $1 \leq A_i \leq n$, $A_i = j$ 表示第 i 位接受面试的应聘者绝对名次为 j
 - A_i 在前 i 位接受面试的应聘者在 A_1, \dots, A_i 中综合能力名次排名记为 y_i , 称为 A_i 的相对名次
 - $1 \leq y_i \leq \min\{i, A_i\}$, 若 $y_i = 1$, 则 A_i 为一名备选者
 - 招聘方只能根据每位应聘者的相对名次进行决策
- 假设对 $1, 2, \dots, n$ 的任一排列, 应聘者以该顺序面试的概率均为 $\frac{1}{n!}$

实例演示

	1	2	3	4		1	2	3	4		1	2	3	4		1	2	3	4
1234	1				2134	2	1			3214	3	2	1		4231	4	2	1	1
1243	1				2143	2	1			3241	3	2	1	1	4213	4	2	1	
1324	1				2314	2	1	1		3124	3	1			4321	4	3	2	1
1342	1				2341	2	1	1	1	3142	3	1			4312	4	3	1	
1423	1				2413	2	1	1		3421	3	2	2	1	4123	4	1		
1432	1				2431	2	1	1	1	3412	3	1	1		4132	4	1		

策略 2 在24种可能顺序中有11次可录用到第一名，为最优策略

古典概型

- $p_n(s)$: 采用策略 s 录用到第一名的概率
 - 采用策略 1, 必录用 A_1 , $p_n(1) = P(A_1 = 1) = \frac{1}{n}$
- $p_n^k(s)$: 采用策略 s 录用 $A_k (k \geq s)$, 且为第一名 ($A_k = 1$) 的概率
 - A_s, \dots, A_{k-1} 均不是备选者
 - 前 $k-1$ 位应聘者中的最佳者出现在前 $s-1$ 位应聘者中, 否则他将先于 A_k 被录用

古典概型

$$p_n^k(s) = \frac{1}{n} \cdot \frac{s-1}{k-1}$$

第一名
出现在
第 k 位

前 $k-1$ 位中的
最佳者只能选
择在前 $s-1$ 位



前 $k-1$ 位中的最佳者

第一名

选 $k-1$ 位
应聘者

前 $k-1$ 位中最佳
者的可能位置数

其余 $k-2$ 位
的可能排列数

其余 $n-k$ 位
的可能排列数

$$p_n^k(s) = \frac{\binom{n-1}{k-1} (s-1) (k-2)! (n-k)!}{n!} = \frac{(n-1)! (s-1) (k-2)! (n-k)!}{n! (k-1)! (n-k)!} = \frac{s-1}{n(k-1)}$$



概率计算

- $p_n(s) = \sum_{k=s}^n p_n^k(s) = \sum_{k=s}^n \frac{s-1}{n(k-1)} = \frac{s-1}{n} \sum_{k=s}^n \frac{1}{k-1} = \frac{s-1}{n} \sum_{k=s-1}^{n-1} \frac{1}{k}$
 - $p_n(s) - p_n(s-1) = \frac{s-1}{n} \sum_{k=s-1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{s-2}{n} \sum_{k=s-2}^{n-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=s-1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n}$
 - $p_n(s) - p_n(s+1) = \frac{s-1}{n} \sum_{k=s-1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{s}{n} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{1}{k}$
- 令 $s^* = \min \left\{ s \mid \sum_{k=s}^{n-1} \frac{1}{k} < 1 \right\}$
 - $s \geq s^*$ 时, $\sum_{k=s}^{n-1} \frac{1}{k} < 1, p_n(s) > p_n(s+1)$, $s \leq s^*$ 时 $\sum_{k=s-1}^{n-1} \frac{1}{k} \geq 1, p_n(s) \geq p_n(s-1)$
- 当 $s = s^*$ 时, $p_n(s)$ 达到最大值 $p_n(s^*)$

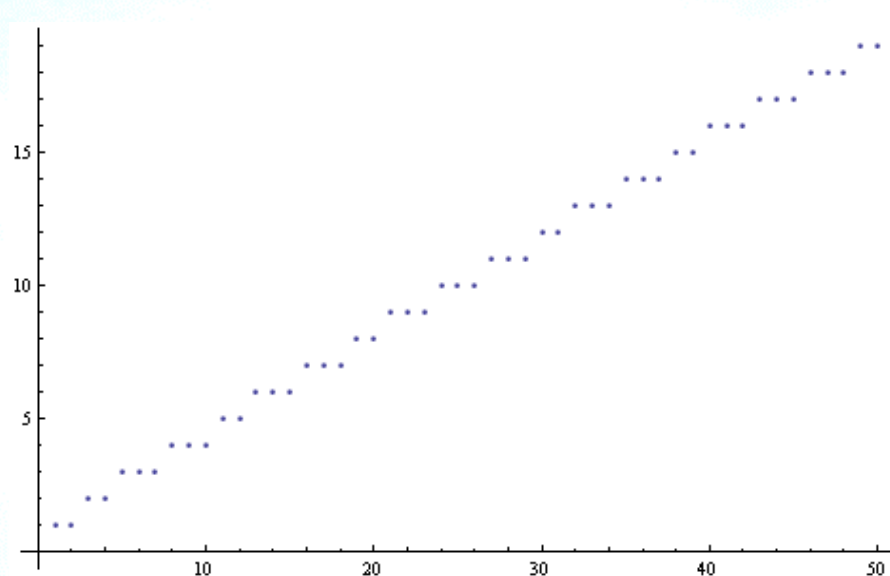
$$p_n^k(s) = \frac{s-1}{n(k-1)}$$

数值计算

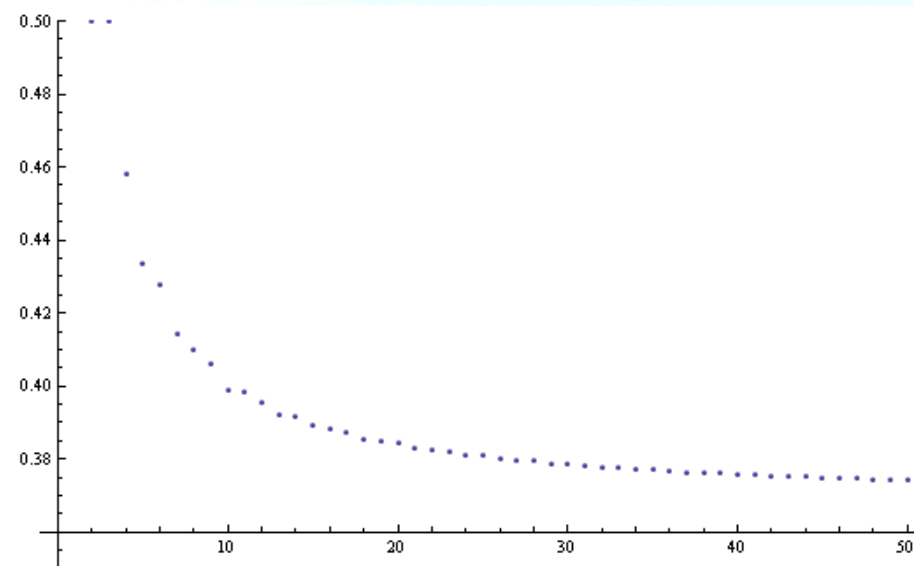


浙江大学
Zhejiang University

数学建模



s^* 图像



$p_n(s^*)$ 图像



s^* 的估计

- $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) < \frac{1}{k} < \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{1}{x} dx$

- $f(x) = \frac{1}{x}$ 为下凸函数

- 令 $F(k) = \frac{1}{k} - \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{k} - \ln \frac{2k+1}{2k-1}$

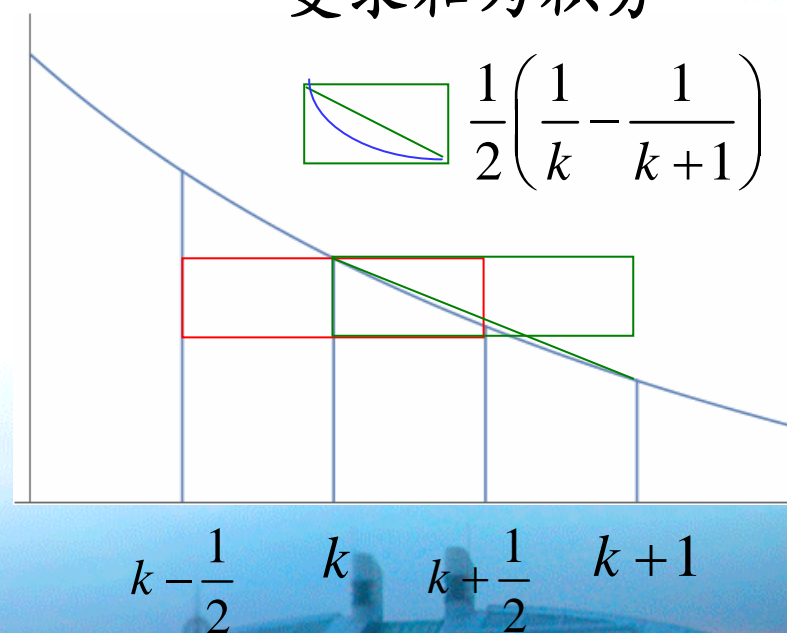
- $F'(k) = -\frac{1}{k^2} - \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k-1}$
 $= \frac{1}{k^2(4k^2-1)} > 0$

- $\lim_{k \rightarrow \infty} F(k) = 0$

- $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{2k+1}{2k-1}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{2k+1} - \frac{2}{2k-1}}{-\frac{1}{k^2}} = 1$

$$s^* = \min \left\{ s \mid \sum_{k=s}^{n-1} \frac{1}{k} < 1 \right\}$$

变求和为积分





s^* 的估计

- $1 \leq \sum_{k=s^*-1}^{n-1} \frac{1}{k} < \int_{s^*-\frac{3}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \frac{1}{x} dx = \ln \frac{2n-1}{2s^*-3} \Leftrightarrow e \leq \frac{2n-1}{2s^*-3} \Leftrightarrow s^* \leq \frac{1}{e} \left(n - \frac{1}{2} \right) + \frac{3}{2}$
- $1 > \sum_{k=s^*}^{n-1} \frac{1}{k} > \int_{s^*}^n \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s^*} - \frac{1}{n} \right) = \ln \frac{n}{s^*} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s^*} - \frac{1}{n} \right)$
 $\Leftrightarrow e > \frac{n}{s^*} e^{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{s^*} - \frac{1}{n} \right)} > \frac{n}{s^*} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s^*} - \frac{1}{n} \right) \right) \geq \frac{n}{s^*} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{1}{e} \left(n - \frac{1}{2} \right) + \frac{3}{2}} - \frac{1}{n} \right) \right)$
 $\Leftrightarrow s^* \geq \frac{n}{e} \left(1 - \frac{1}{2n} \right) + \frac{n}{2n+3e-1} = \frac{1}{e} \left(n - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} - \frac{3e-1}{2(2n+3e-1)}$

$$s^* = \min \left\{ s \mid \sum_{k=s}^{n-1} \frac{1}{k} < 1 \right\}$$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) < \frac{1}{k} < \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{1}{x} dx$$



Secretary Problem

- s^* 的值

- $\frac{1}{e}\left(n - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} - \frac{3e-1}{2(2n+3e-1)} \leq s^* \leq \frac{1}{e}\left(n - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}$

- s^* 的上下界差距不超过 $1 + \frac{3e-1}{2(2n+3e-1)} \approx 1 + \frac{1.79}{n+1.79}$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s^*}{n} = \frac{1}{e}$

- $p_n(s^*)$ 的值

- $p_n(s^*) = \frac{s^* - 1}{n} \sum_{k=s^*-1}^{n-1} \frac{1}{k}$

$$p_n(s) = \frac{s-1}{n} \sum_{k=s-1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(s^*) = \frac{1}{e}$

$$\ln \frac{n}{s^* - 1} = \int_{s^*-1}^n \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=s^*-1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \int_{s^*-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \frac{1}{x} dx = \ln \frac{2n-1}{2s^*-1}$$

两次选择

- 招聘方可录用两名应聘者，但对每位应聘者聘用与否的决定仍需在该应聘者面试结束时给出
- 招聘方采用何种策略可使录用的两位应聘者中其中一位为第一名的概率尽可能大
- 策略 $(r, s) (s > r)$:
 - 录用自 A_r 起首次出现的一名备选者，称为第一次录用
 - 若已录用一人，录用不早于 A_s 的一名备选者，称为第二次录用

实例演示

	(1,3)	(2,3)
1234	1	
1243	1	
1324	1	
1342	1	
1423	1	
1432	1	

	(1,3)	(2,3)
2134	2	1
2143	2	1
2314	2	1
2341	2	1
2413	2	1
2431	2	1

	(1,3)	(2,3)
3124	3	1
3142	3	1
3214	3	1
3241	3	1
3412	3	1
3421	3	1

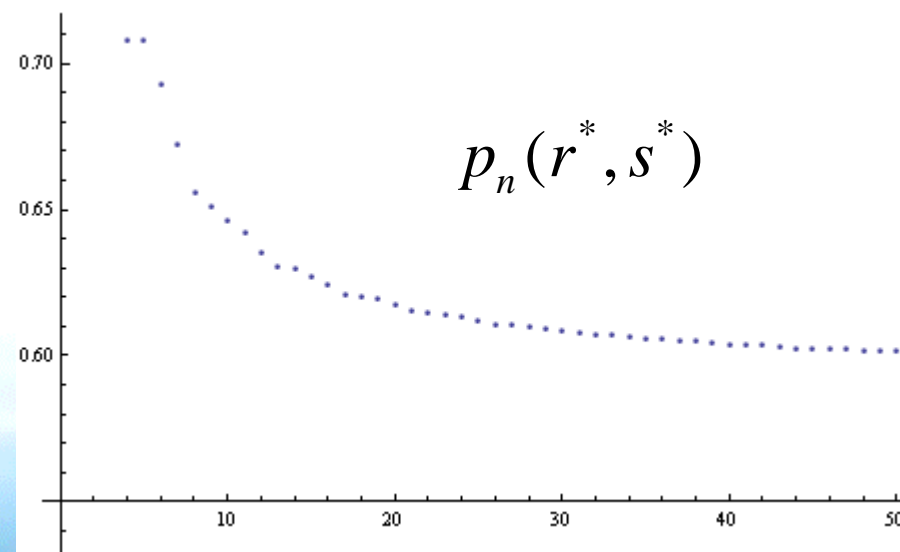
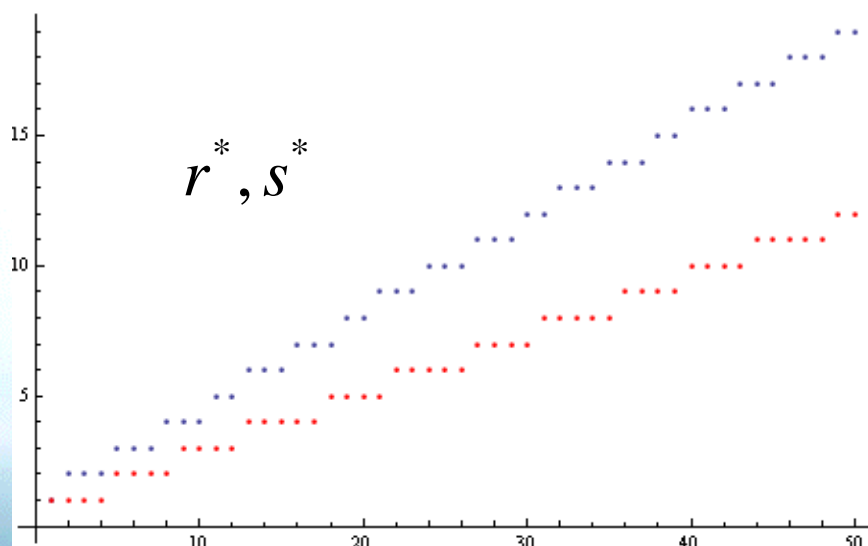
	(1,3)	(2,3)
4123	4	1
4132	4	1
4213	4	1
4231	4	1
4312	4	1
4321	4	1

(1,3) 共16次

(2,3) 共17次

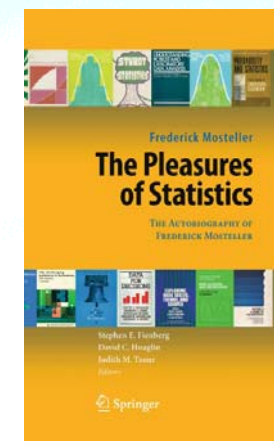
渐近估计

- 两次选择
 - 当 n 充分大时，最优策略为 $(e^{-\frac{3}{2}}n, e^{-1}n)$ ，录用到第一名的概率约为 0.5910



问题推广

- 问题推广
 - 招聘方录用 k 位应聘者，采用何种策略可使其中包含第一名的概率尽可能大
 - 招聘方录用一位应聘者，采用何种策略可使他为前 k 名的概率尽可能大
- 第二个 **Secretary Problem**
 - 若 A_i 的分布已知，招聘方录用一位应聘者，采用何种策略可使他为第一名的概率尽可能大



Frederick Mosteller
(1916-2006)
美国统计学家

Gilbert J P, Mosteller F. Recognizing the maximum of a sequence, *Journal of the American Statistical Association*, 61, 35-73, 1966.

Mosteller F. *The pleasures of statistics: The autobiography of Frederick Mosteller*. Springer, 2010.

期望名次

- 第三个Secretary Problem
 - 招聘方录用一位应聘者，采用何种策略可使录用者绝对名次期望值尽可能小
 - 招聘方依据 y_1, y_2, \dots, y_i 值决定是否录用应聘者 A_i
 - 招聘方可以录用 $y_i > 1$ 的非备选者
- 在录用相对名次为 j 的应聘者 A_i 情况下，被录用者绝对名次的期望值

$$E(A_i | y_i = j) = \sum_{k=1}^n kP(A_i = k | y_i = j) = \sum_{k=1}^n \frac{kP(A_i = k, y_i = j)}{P(y_i = j)} = i \sum_{k=1}^n kP(A_i = k, y_i = j)$$

- $P(y_i = 1) = P(y_i = 2) = \dots = P(y_i = i) = \frac{1}{i}$

条件概率

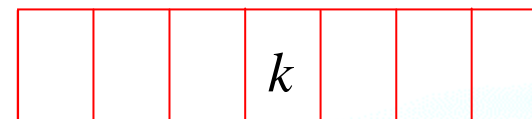
$$P(A_i = k, y_i = j) = \frac{\binom{k-1}{j-1} \binom{n-k}{i-j} (i-1)!(n-i)!}{n!}$$

$$= \frac{\binom{k-1}{j-1} \binom{n-k}{i-j}}{i \cdot \binom{n}{i}}$$

$$E(A_i | y_i = j) = i \sum_{k=1}^n k P(A_i = k, y_i = j)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{k \binom{k-1}{j-1} \binom{n-k}{i-j}}{\binom{n}{i}} = \sum_{k=1}^n \frac{j \binom{k}{j} \binom{n-k}{i-j}}{\binom{n}{i}} = \frac{j}{\binom{n}{i}} \sum_{k=1}^n \binom{k}{j} \binom{n-k}{i-j}$$

$$A_i = k, y_i = j$$



恰有 $j-1$
位优于 k

前 i 位中的
第 j 名

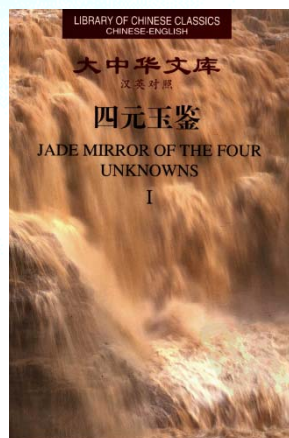
$$(k \geq j, n-k \geq i-j)$$

Chu–Vandermonde Identity

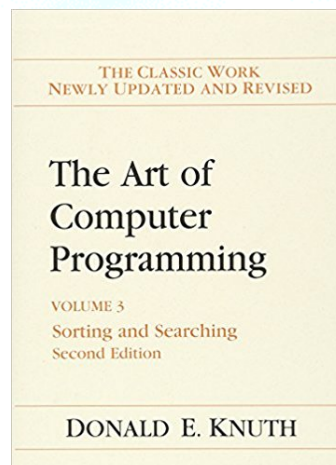


浙江大学
Zhejiang University

数学建模



《四元玉鉴》
成书于1303
年。全书分为
28门，288题，
是中国宋元数
学高潮中水平
最高的著作。



朱世杰(约1249-1314)，元代数学家，燕（今北京或其附近）人。主要著作有《算学启蒙》和《四元玉鉴》。朱世杰在“天元术”、“二元术”、“三元术”基础上，创造了“四元术”，即四元高次方程组解法。

Knuth DE. *The Art of Computer Programming*. Vol. 1. Addison-Wesley, 1997.

I. Sums of products. To complete our set of binomial-coefficient manipulations, we present the following very general identities, which are proved in the exercises at the end of this section. These formulas show how to sum over a product of two binomial coefficients, considering various places where the running variable k might appear:

$$\sum_k \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}, \quad \text{integer } n. \quad (21)$$

$$\sum_k \binom{r}{m+k} \binom{s}{n+k} = \binom{r+s}{r-m+n}, \quad \text{integer } m, \text{ integer } n, \text{ integer } r \geq 0. \quad (22)$$

$$\sum_k \binom{r}{k} \binom{s+k}{n} (-1)^{r-k} = \binom{s}{n-r}, \quad \text{integer } n, \text{ integer } r \geq 0. \quad (23)$$

$$\sum_{k=0}^r \binom{r-k}{m} \binom{s}{k-t} (-1)^{k-t} = \binom{r-t-s}{r-t-m}, \quad \text{integer } t \geq 0, \text{ integer } r \geq 0, \text{ integer } m \geq 0. \quad (24)$$

$$\sum_{k=0}^r \binom{r-k}{m} \binom{s+k}{n} = \binom{r+s+1}{m+n+1}, \quad \text{integer } n \geq \text{integer } s \geq 0, \text{ integer } m \geq 0, \text{ integer } r \geq 0. \quad (25)$$

$$\sum_{k \geq 0} \binom{r-tk}{k} \binom{s-t(n-k)}{n-k} \frac{r}{r-tk} = \binom{r+s-tn}{n}, \quad \text{integer } n. \quad (26)$$

Of these identities, Eq. (21) is by far the most important, and it should be memorized. One way to remember it is to interpret the right-hand side as the number of ways to select n people from among r men and s women; each term on the left is the number of ways to choose k of the men and $n-k$ of the women. Equation (21) is commonly called Vandermonde's convolution, since A. Vandermonde published it in *Mém. Acad. Roy. Sciences Paris* (1772), 489–498. However, it had appeared already in Shih-Chieh Chu's 1303 treatise mentioned earlier [see J. Needham, *Science and Civilization in China* 3 (Cambridge University Press, 1959), 138–139].



浙江大学

Zhejiang University

数学建模

三角垛

- 三角垛

- 菱草垛

- 三角垛(落一形垛)

- 撒星形垛(三角落一形垛)

- 三角撒星形垛(撒星更落一形垛)

- 三角撒星更落一形垛

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2!}i(i+1) = \frac{1}{3!}n(n+1)(n+2)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{3!}i(i+1)(i+2) = \frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{4!}i(i+1)(i+2)(i+3) = \frac{1}{5!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{5!}i(i+1)(i+2)(i+3)(i+4) = \frac{1}{6!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$$

$$\frac{1}{5!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) = 8568 \quad n^5 + 10n^4 + 35n^3 + 50n^2 + 24n = 1028160$$

“菱草形段” 之四：

今有菱草八千五百六十八束，欲令撒星更落一形垛之，問底子幾何？

答曰：一十四束。

術曰：立天元一為撒星更落一底子，如積求之，得一百二萬八千一百六十為益實，二十四為從方，五十為從上廉，三十五為從二廉，一十為從三廉，一為正隅。四乘方開之，合問。



浙江大学

Zhejiang University

数学建模

朱世杰—范德蒙恒等式



钱宝琮
(1892-1974)

浙江嘉兴人
数学史家、天文史
家、数学教育家
浙江大学数学系首
任系主任

钱宝琮，朱世杰垛积术广义. 学艺. 第
4 卷第7 号, 1923

杜石然，朱世杰研究，《宋元数学史
论文集》（钱宝琮编），科学出版社，
1966，166-209页

罗见今，朱世杰—范德蒙公式的发展
简介，数学传播，32(4), 66-71, 2008

四元玉鑑細草
一升次日轉多一升三段以下皆如是今招一
十四日問招兵及給米各幾何答曰兵五
十人米八十五石六斗八升術曰求兵者置今
招以今招加一乘之又以今招加二乘之為實
六而一求米者置今招以今招加一乘之又以
今招加二乘之又以今招加三乘之又以今招
加四乘之為實一百二十而一
撒星更落一形圖
三角堦
一
一〇五
一〇五
乘得數
一〇五
五角積
一〇五

一十五乘之得二百一十又以底子加二
十六乘之得三千三百六十又以底子加三
十七乘之得五萬七千一百二十又以底子加
四十八乘之得一百二萬八千一百六十為
實一百二十而一得八千五百六十八東即撒
星更落一形五角積也合問
說曰以如像招數喻之所招之兵如三角堦所
給之米如五角積三角堦乘五角積并之即撒
星更落一形也今有官司司依三角堦招兵初段
給米一升次日轉多一升次段所招當日給米

[清]罗士琳撰《四元玉鉴细草》

$$\sum_{k=1}^n \binom{k+2}{3} \binom{n+2-k}{2} = \binom{n+4}{5}$$



组合恒等式

- 生成函数 (generating function) 法

- $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{l=0}^{\infty} x^l$$

- $$\frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+p)(l+p-1)\cdots(l+1)}{p \cdot (p-1) \cdots 1} x^l = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{l+p}{p} x^l$$

- $$\sum_{l=0}^{\infty} \binom{l+i+1}{i+1} x^l = \frac{1}{(1-x)^{i+2}} = \frac{1}{(1-x)^{j+1}} \frac{1}{(1-x)^{i-j+1}} = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{l+j}{j} x^l \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \binom{l+i-j}{i-j} x^l$$

- 比较两端 x^{n-i} 项系数

- $$\binom{n+1}{i+1} = \sum_{k=0}^{n-i} \binom{k+j}{j} \binom{n-k-j}{i-j} = \sum_{k=j}^n \binom{k}{j} \binom{n-k}{i-j}$$

从期望到决策

- 期望

- 在录用相对名次为 y_i 的应聘者 A_i 情况下，录用者绝对名次的期望值为

$$E(A_i | y_i = j) = \frac{j}{\binom{n}{i}} \sum_{k=1}^n \binom{k}{j} \binom{n-k}{i-j} = \frac{j}{\binom{n}{i}} \binom{n+1}{i+1} = \frac{n+1}{i+1} j$$

- 决策

- 面试 A_i 后招聘方可作录用和不录用两种决策
 - 若录用 A_i ，招聘结束
 - 若不录用 A_i ，继续面试 A_{i+1}

$$\binom{n+1}{i+1} = \sum_{k=1}^n \binom{k}{j} \binom{n-k}{i-j}$$

递推

- 令 $U(j, i)$ 为面试相对名次 $y_i = j$ 的 A_i 时可能取得的最优绝对名次期望值
 - 录用 A_i : $U(j, i) = \frac{n+1}{i+1} j$
 - 若不录用 A_i , $y_{i+1} = k$ 的概率为 $\frac{1}{i+1}$: $U(j, i) = \frac{1}{i+1} \sum_{k=1}^{i+1} U(k, i+1)$
 - $U(j, i) = \min \left\{ \frac{n+1}{i+1} j, \frac{1}{i+1} \sum_{k=1}^{i+1} U(k, i+1) \right\}$ 录用与否由两值大小比较决定
 - 面试 A_n 时, 相对名次即为绝对名次, 招聘方必定录用,
 $U(j, n) = j, j = 1, \dots, n$
 - 自首位应聘者面试起, 招聘方采用正确决策所能得到的最优绝对名次期望值为 $U(1, 1)$



递推

- 从 $U(j, i)$ 到 C_{i-1}
 - 令 $C_{i-1} = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^i U(k, i)$, 则 $U(j, i) = \min \left\{ \frac{n+1}{i+1} j, C_i \right\}$
 - 令 $s_i = \left\lfloor \frac{C_i(i+1)}{n+1} \right\rfloor, i = n-1, \dots, 1$, $\frac{n+1}{i+1} j \leq C_i$ 当且仅当 $j \leq s_i$
 - $C_{i-1} = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i U(j, i) = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \min \left\{ \frac{n+1}{i+1} j, C_i \right\}$
 $= \frac{1}{i} \left(\frac{n+1}{i+1} (1 + \dots + s_i) + (i - s_i) C_i \right) = \frac{1}{i} \left(\frac{n+1}{i+1} \cdot \frac{s_i(1+s_i)}{2} + (i - s_i) C_i \right)$
 - $C_{n-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n U(k, n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n j = \frac{n+1}{2}$, $U(1, 1) = C_0$

录用与否由两值
大小比较决定

$$U(j, i) = \min \left\{ \frac{n+1}{i+1} j, \frac{1}{i+1} \sum_{k=1}^{i+1} U(k, i+1) \right\} \quad U(j, n) = j, j = 1, \dots, n$$



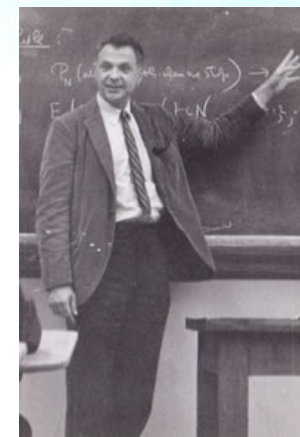
最优决策

- 最优策略 ($s_n = n$)
 - 面试 A_i 时, 若 $y_i \leq s_i$, 则录用 A_i , 否则继续面试 A_{i+1}
- 数值结果
 - $n = 4$ 时, $C_3 = \frac{5}{2}, C_2 = \frac{25}{12}, C_1 = \frac{15}{8}, C_0 = \frac{15}{8}$

- 记 τ_n 为应聘者数量为 n 时的最优名次期望

$$\tau_{10} = 2.56, \tau_{100} = 3.60, \tau_{1000} = 3.83$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j+2}{j} \right)^{\frac{1}{j+1}} \approx 3.8695$$



Herbert Ellis Robbins

(1915-2001)

美国数学家

Courant R, Robbins H, *What Is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*, 1941年初版(中译本: 左平、张饴慈译, 复旦大学出版社2005年)



Chow YS, Moriguti S, Robbins H, Samuels SM, Optimal selection based on relative rank (the “secretary problem”), *Israel Journal of Mathematics*, 2, 81-90, 1964

问题推广

- 第四个 **Secretary Problem** (**Robbins问题**)
 - 若 A_i 的分布已知，招聘方录用一位应聘者，采用何种策略可使录用者绝对名次期望值尽可能小
- 其他推广
 - 招聘方拟录用某应聘者时，应聘者以 $p(0 < p < 1)$ 的概率接受聘用
 - 招聘方可以录用在当前面试者之前第 r 个接受面试的应聘者，应聘者仍然接受聘用的概率为 $q(r)$ ， $q(r)$ 为 r 的非增函数
 - 应聘者数目为一随机变量

Freeman PR. The secretary problem and its extensions: A review.
International Statistical Review, 51: 189-206, 1983.



浙江大学
ZheJiang University

谢 谢

