第十二章-稳恒磁场3（9）

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{l}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{\text{L内}} I_i$$

毕奥–萨伐尔定律，
磁高斯定律
安培环路定律

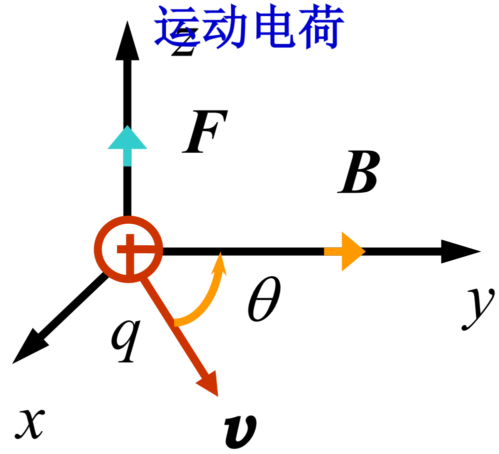
√ 安培力 $d\vec{F}_{\text{安}} = I\,d\vec{l}\times\vec{B}$

√ 霍耳效应

鲁定辉2022年10月13日

一、洛仑兹力（1895） & 安培力（1825）

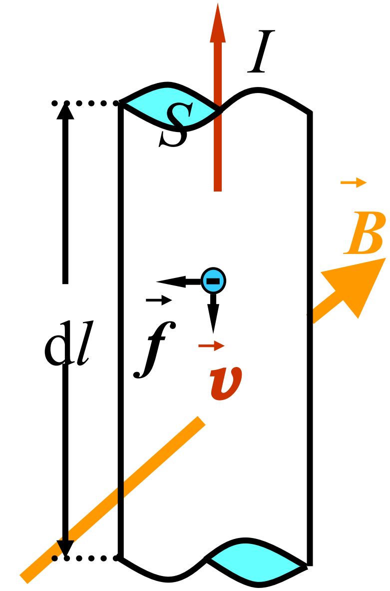
运动电荷 & 电流元磁场中受力



一个自由电子受力

$$\vec{f} = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{F}_{洛} = q\vec{v} \times \vec{B}$$



电流元$I\vec{dl}$，截面S，电子密度n，漂移速度$\vec{v}$

总电子数 $\mathrm{d}N = nS\mathrm{d}l$

→电流元受力 $\mathrm{d}\vec{F} = \vec{f}\,dN$

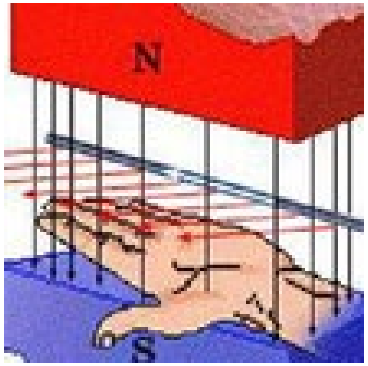
$$= -(e\vec{v} \times \vec{B})nS\,\mathrm{d}\,l = -enSdl\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\because \quad I = \frac{-enSv\,\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t} = -enSv$$

$$I\mathrm{d}\vec{l} = -enS\mathrm{d}l\vec{v}$$

$$\rightarrow \mathrm{d}\,\vec{F}_{安} = I\,\mathrm{d}\,\vec{l} \times \vec{B}$$

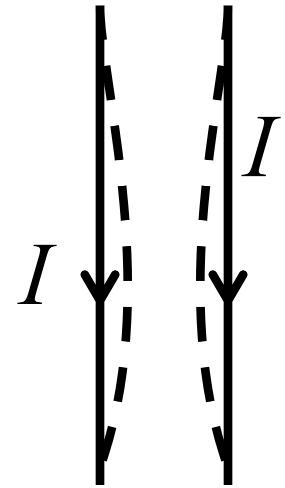
安培力是洛伦兹力的宏观体现



1) 匀强磁场中直导线受力（中学左手定则）

$$F=I\,LB\sin\theta$$

θ为导线L和B的夹角



2) 一般需考虑线元与磁场的相对位置，以及磁场的空间分布，由矢量积判定方向

总安培力 $\vec{F}=\int \mathrm{d}\vec{F}=\int_0^l I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$

若磁场由另一电流元激发

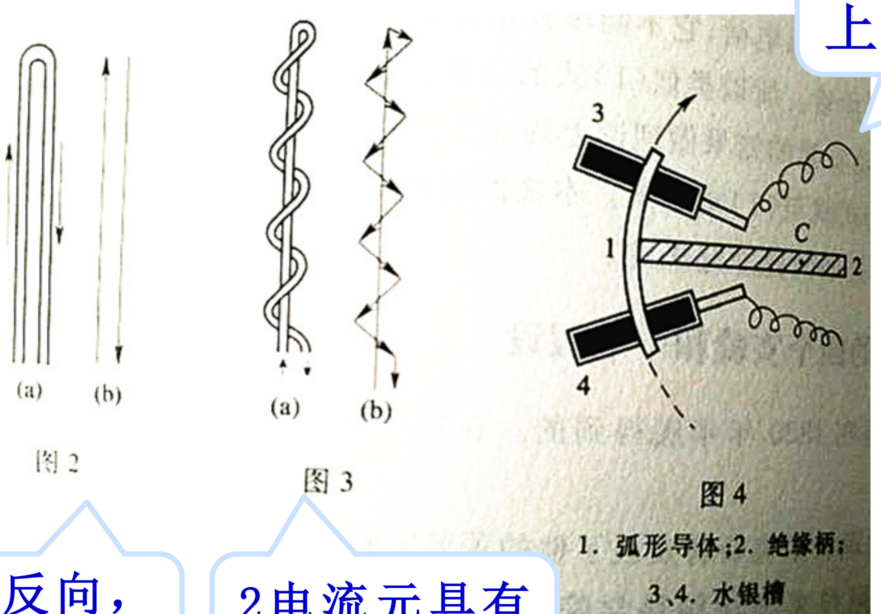
$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\hat{\vec{\mathbf{r}}}}{r^2}$$

安培定律

$$\mathrm{d}\vec{\mathrm{F}}_{21}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1I_2\,\mathrm{d}\vec{l}_2\times(\mathrm{d}\vec{l}_1\times\hat{\vec{\mathbf{r}}})}{r^2}$$

但由宏观导线所受力反推电流元受力，难！

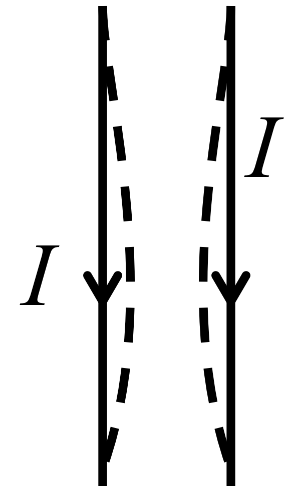
安培4个示零实验（1820-1825）



1电流反向，作用力反向

2电流元具有矢量的性质

3、作用在电流元上的力与电流垂直



安培最初假设两个电流元之间作用力沿其连线？

◆ 由图 2、3、4

$$d\vec{F}_{12} = I_1 I_2 \vec{r}[(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)\phi(r) + (d\vec{l}_1 \cdot \vec{r})(dl_2 \cdot \vec{r})\psi(r)]$$

背景:赵凯华，1980.1（略）

4、所有几何线度增加一倍，平衡维持（作用力不变）

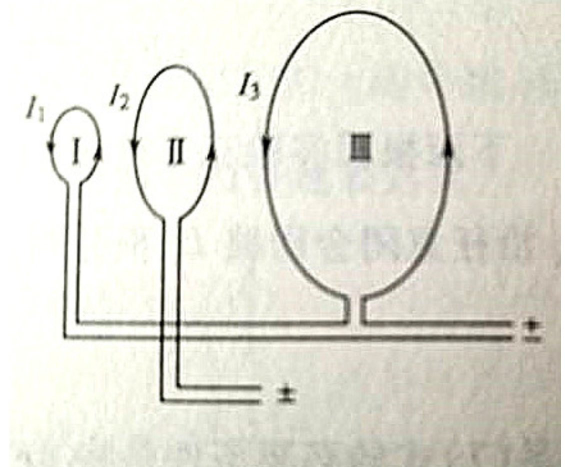


图 5

半径 $\frac{1}{n}:1:n,$

间距 $1:n:n^2$

由图5推断

$$\phi(r)=\frac{A}{r^3},\psi(r)=\frac{B}{r^5}$$

$$d\vec{F}_{12}=I_1I_2\vec{r}[(d\vec{l}_1\cdot d\vec{l}_2)\frac{2}{r^3}-(d\vec{l}_1\cdot\vec{r})(dl_2\cdot\vec{r})\frac{3}{r^5}]$$

与拉普拉斯解不同

$$\mathrm{d}\vec{F}_{21}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1I_2\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}_2\times(\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}_1\times\hat{\vec{\mathbf{r}}})}{r^2}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}}_2=I_2\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}_2\times d\vec{\boldsymbol{B}}$$

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{B}}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\times\hat{\vec{\mathbf{r}}}}{r^2}$$

教训1：直觉不一定对

2：实验必须全面

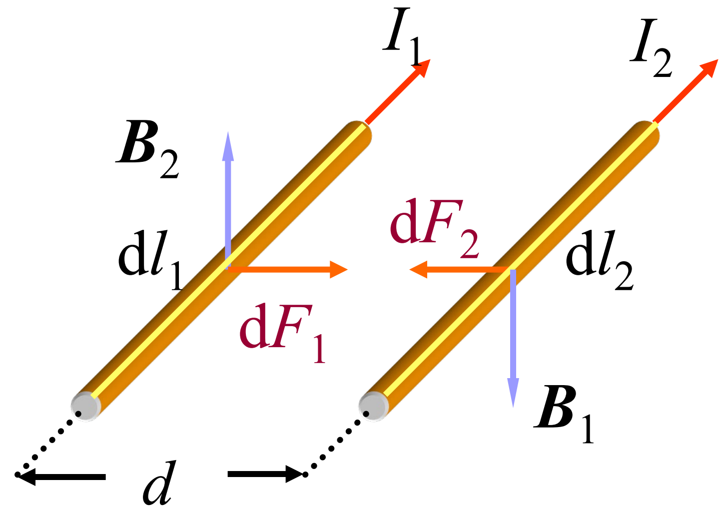
3：数学与逻辑很重要

安培公式的建立（略）

导 线 间 距 b， 电 流 元 $I_2\mathrm{d}l_2$ 受 力

$\mathrm{d}F_2=I_2\mathrm{d}l_2\times B_1$,

方向相向 $\mathrm{d}F_2=\dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\mathrm{d}l_2$



平行长直载流导线间的作用力

导线2单位长度所受力

$$\frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}l_2}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

I_1激发的场 $B_1=\dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$

电流强度(SI制)

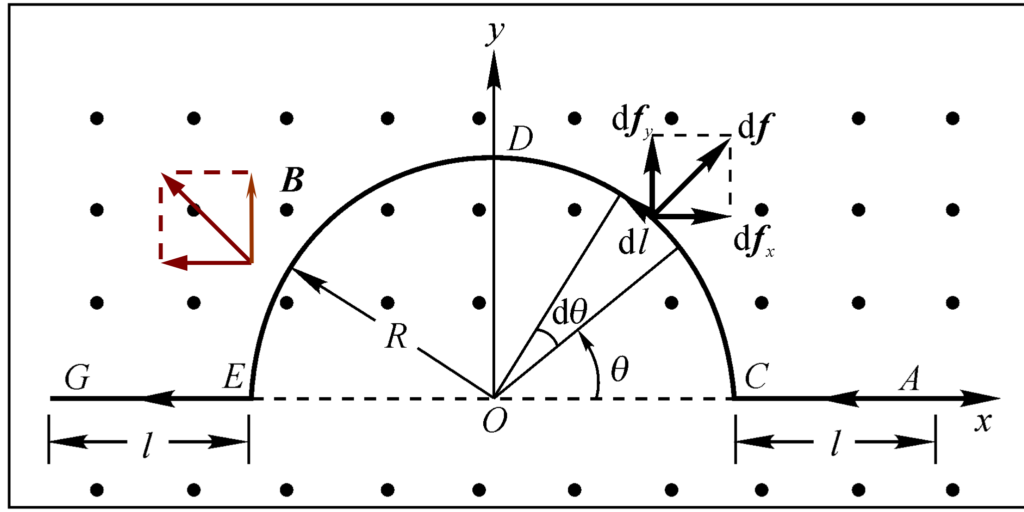
真空中两无限长细导线相距1m、电流I相等，若单位长度导线受力2×10^{-7} N/m，则导线电流强度I 为1A （即每秒流过1C电荷）

真空磁导率$\mu_0=4\pi\times10^{-7}(\mathrm{N/A^2})$

电流强度基本单位-安培

例1 与匀强磁场垂直平面内的弯曲载流导线的受力。

解 $\vec{F}_{AC}=\vec{F}_{EG}=IlB\vec{j}$



由对称性，半圆CDE段受力的x分量抵消。

$$F_{CDE}=\int df_y=\int df\ \sin\theta$$

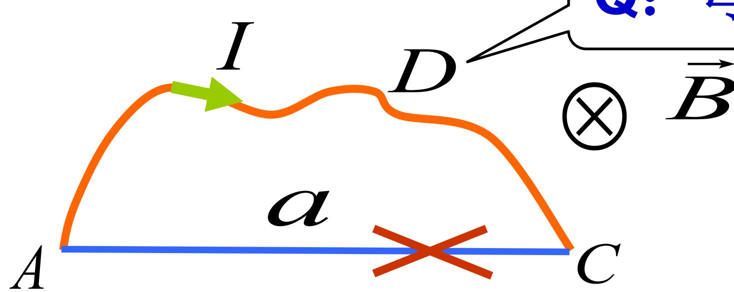
其中$df=IBRd\theta$

$$=\int_0^{\pi}(IBRd\theta)\sin\theta=2IBR$$

$$\vec{\mathbf{F}}_{总}=2IBl\vec{\mathbf{j}}+2IBR\vec{\mathbf{j}}$$

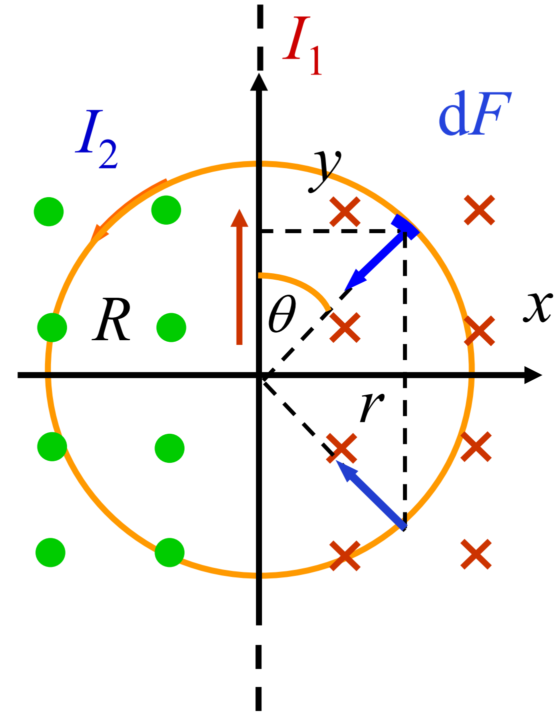
$$=2(l+R)IB\vec{\mathbf{j}}$$

Q：弯曲导线受力?



$$F_{ADC}=F_{\square\square AC}=IBa$$

例2 半径R的载流圆线圈有电流I_2，沿直径的y轴上有一根载流I_1的无限长直导线。求圆线圈所受的力。



解 电流I_1产生的磁场如图（不均匀）。

在$x>0$，$I_2\mathrm{d}l$ 受力为$\mathrm{d}F=I_2B\mathrm{d}l$，其中

$$B=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi R\sin\theta}$$

由安培定律，dF方向指向圆心。

因上下对称，y分量抵消。

$\leftarrow \mathrm{d}l=R\mathrm{d}\theta$

$$F_x=-\int \mathrm{d}F\sin\theta=-\int I_2 B\sin\theta \mathrm{d}l$$

$$=-\int_0^{\pi} I_2\cdot\frac{\mu_0 I_1}{2\pi R\sin\theta}\cdot\sin\theta R\mathrm{d}\theta$$

$$=-\frac{1}{2}\mu_0 I_1 I_2$$ 方向沿x负向。

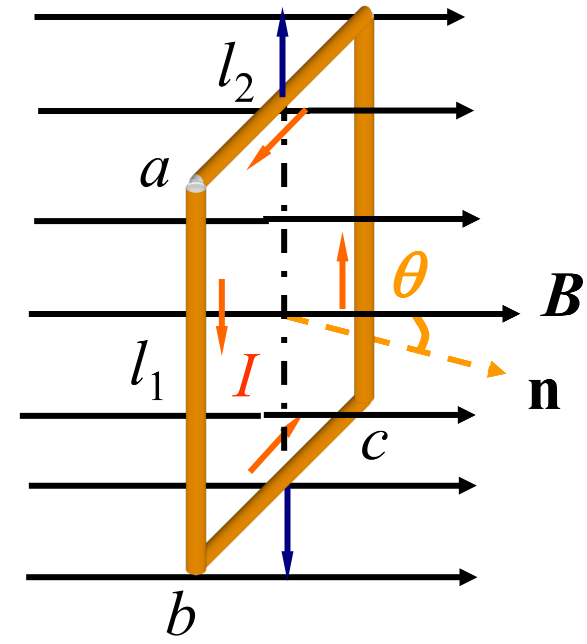
$x<0$部分的受力类似，总受力

$$F=2F_x=-\mu_0 I_1 I_2$$

→圆线圈所受磁力与其半径无关！

二、均匀磁场对平面载流线圈的作用

载流线圈在均匀磁场中受合力为零



证：任意形状线圈的安培力

$$\vec{F}=\oint_L I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$$

∵I和B不变

$$\vec{F}=I(\oint_L \mathrm{d}\vec{l})\times\vec{B}$$

$$\oint_L \mathrm{d}\vec{l}=0$$

闭合回路L

$$\vec{F}=I(\oint_L \mathrm{d}\vec{l})\times\vec{B}=0$$

此结论与线圈形状无关

◆矩形线圈在均匀磁场的磁力矩

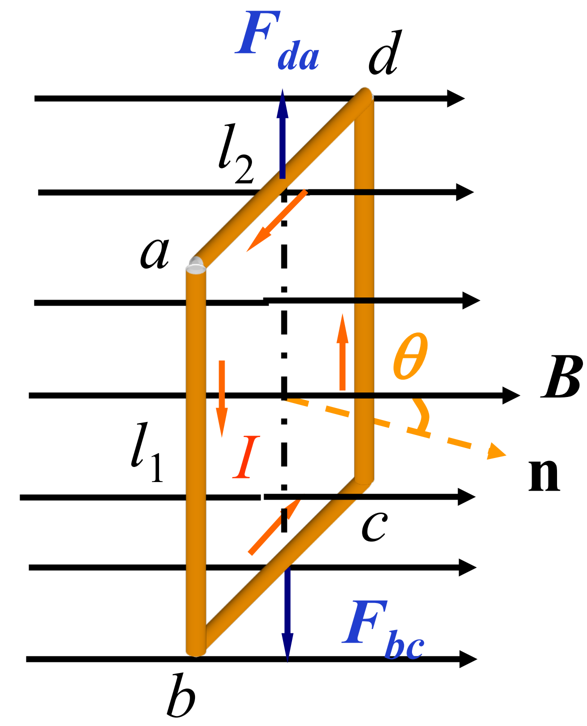
下部导线bc受力： （向下）

$$F_{bc}=Il_2B\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=Il_2B\cos\theta$$

上部导线da受力： （向上）

$$F_{da}=Il_2B\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=Il_2B\cos\theta$$

两个力大小相等、方向相反，
作用在同一直线上，∴相互抵消。



线圈法向和B的夹角θ

$$\mathrm{d}\vec{F}=I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$$

二竖直导线*ab*、*cd*的受力：$F_{ab} = -F_{cd} = BIl_1$

不在同一直线上，形成力偶

力矩

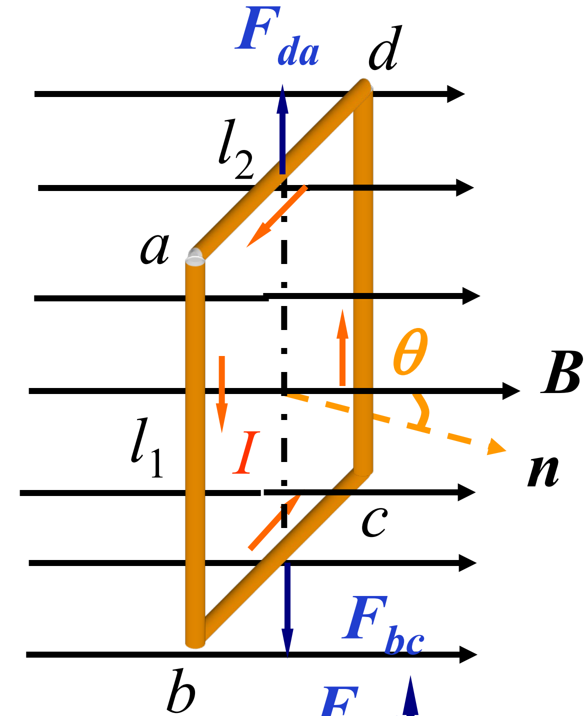
$$M = l_2 \sin\theta \cdot BIl_1$$

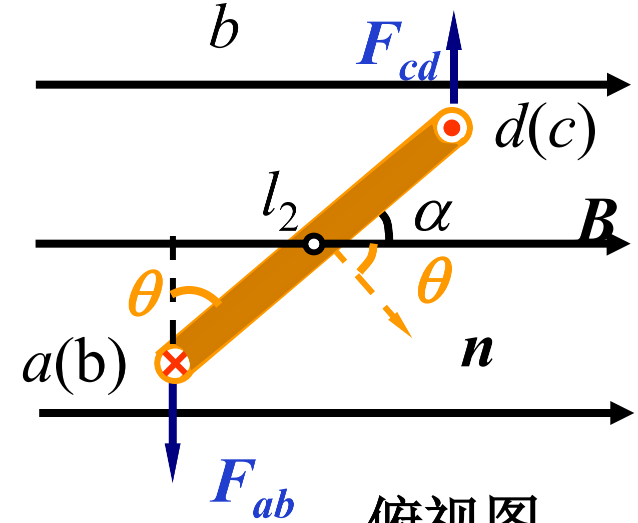
$$= BIS \sin\theta$$ 方向向上

定义磁矩 $\vec{\mathbf{p}}_m = IS\vec{\mathbf{n}}$

则磁力矩为 $\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$

与电偶极子类似 $\vec{M} = \vec{p}_e \times \vec{E}$





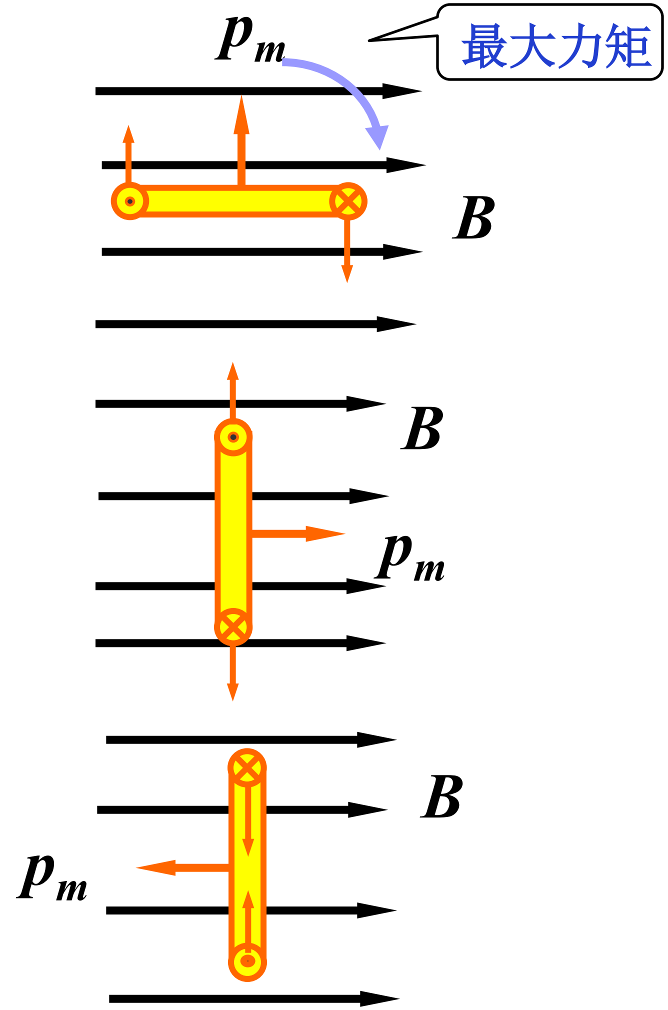
俯视图

几个特例：　　　　$\vec{M}=\vec{p}_m\times\vec{B}$

1）p_m 与 B 夹角 $\pi/2$，力矩 M 最大，$M_m=p_mB$，使 p_m 转向 B；

2）$\theta=0$，$M=0$，稳定平衡状态；

3）$\theta=\pi$，$M=0$，非稳定平衡状态，稍有扰动，线圈将偏转；



如何计算非匀强磁场中的磁力矩？

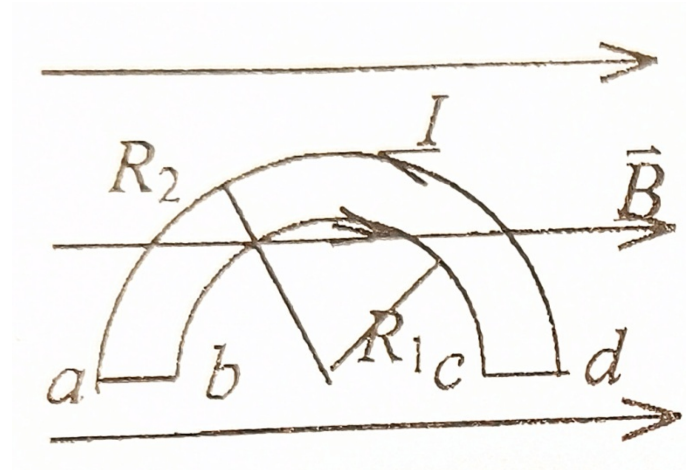
1.先求每个电流元的 $\mathrm{d}\vec{F}$

2.　$\mathrm{d}\vec{M}=\vec{r}\times\mathrm{d}\vec{F}$

3.　$\vec{M}=\int\mathrm{d}\vec{M}$

磁场对线圈的作用4

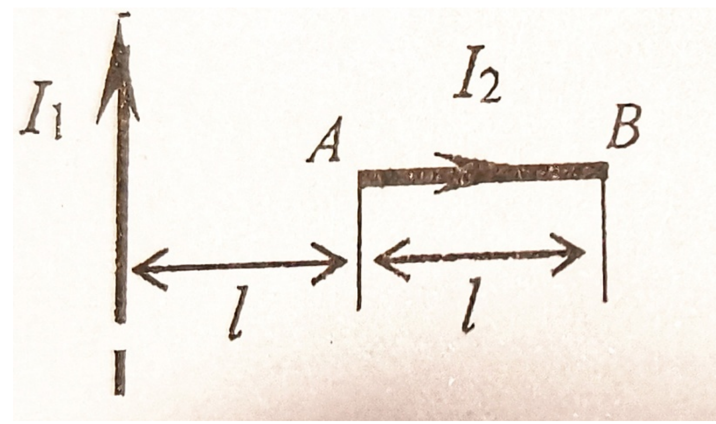
1、两个半圆弧和直径构成通电线圈，平行放在均匀磁场，求线圈的磁矩、磁力距。



$$m = I \Delta S$$

$$\vec{m} \times \vec{B}$$

2、载流长直导线旁有长L导线AB，近端距离L,求AB所受的磁力



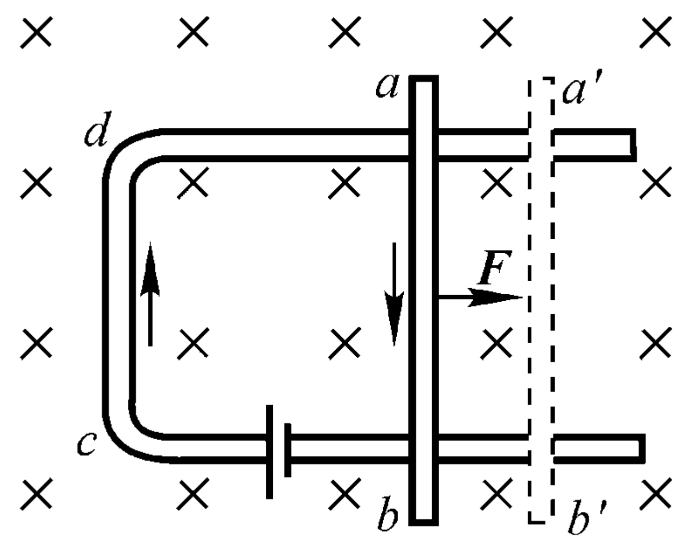
$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}$$

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln 2\,\vec{j}$$

三、安培力所作功

◆载流导线受安培力作用，在导轨上平动时，安培力做的功



$$A = Fl_{aa'}$$

$$\because F = IBl_{ab}$$

$$\Rightarrow A = IBl_{ab}l_{aa'} = IB\Delta S$$

$$= I\Delta\Phi$$

与磁通量变化成正比！

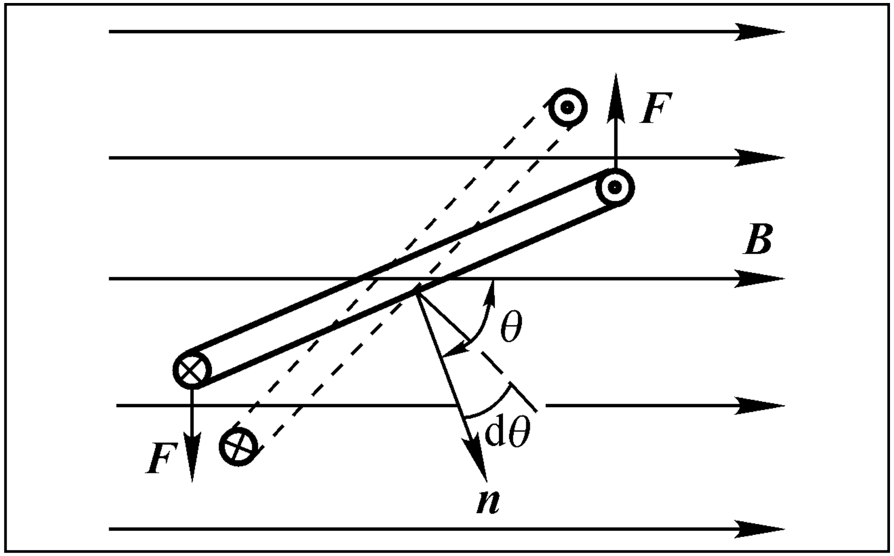
◆载流线圈在磁场中转动，

磁力做功（正功对应 θ 减小）

$$dA = -Md\theta$$
$$= -BIS\sin\theta d\theta$$
$$= Id(BS\cos\theta) = Id\Phi$$

$$A = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} Id\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1)$$
$$= I\Delta\Phi$$

也适用于磁场中载流回路变形！



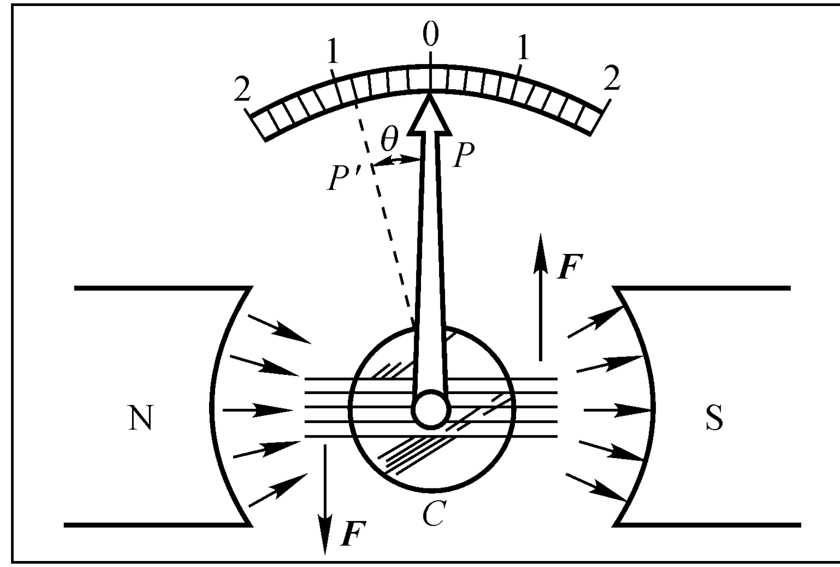
$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$$
$$M = BIS\sin\theta$$

若回路电流同时发生变化，则

$$A = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} Id\Phi$$

安培力矩做功

例12-6 磁电式电流计



1）线圈通电流I，转过一定角度后达到平衡

磁力矩 $M = NISB$

游丝弹性恢复力矩

$$M' = -k\theta$$

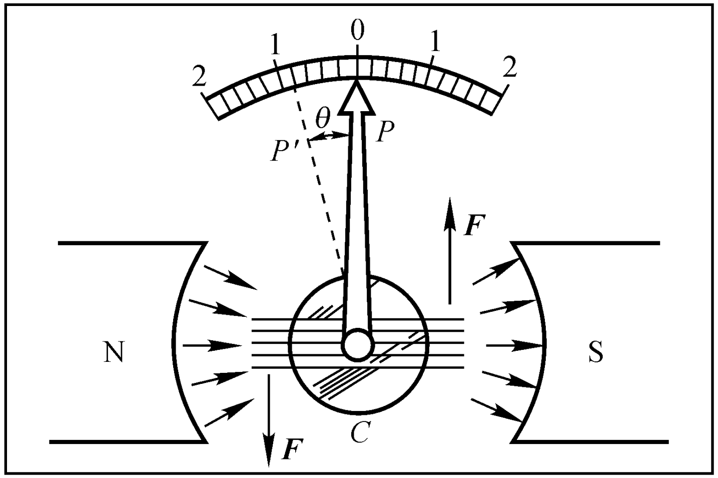
平衡状态

$$M + M' = 0$$

$$k\theta_m = NISB \longrightarrow \theta_m = \frac{NSB}{k} I$$

定标后可测量直流电流I

2）当一持续时间为 τ 的电流脉冲通过时，线圈转过的最大角度 $\theta_{\max}$；



线圈受到冲量矩

$$\int_0^\tau M dt = \int_0^\tau NISBdt$$

$$\xrightarrow{\text{电流I在变}} NBS\int_0^\tau I(t)dt = NBSq$$

能量、角动量守恒

$$\frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}k\theta_m^2$$

$$\int_0^\tau M dt = J\omega$$

$$\theta_m = \frac{NSBq}{\sqrt{kJ}}$$

用于测量脉冲电荷！

磁力矩与冲击电流计

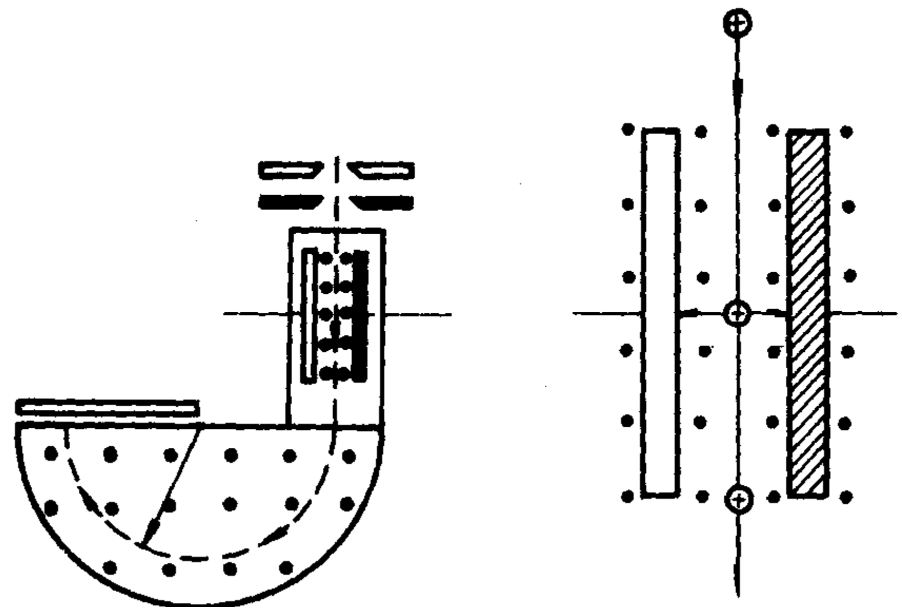
§ 12.5 带电粒子在电磁场中的运动
（质谱仪、粒子加速器）

带电粒子在电磁场运动的

动力学方程

$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}} + q\vec{v}\times\vec{\mathbf{B}}$$

$$= m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$



粒子质量m，电量q，速度v

高速粒子需考虑相对论效应，

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right]$$

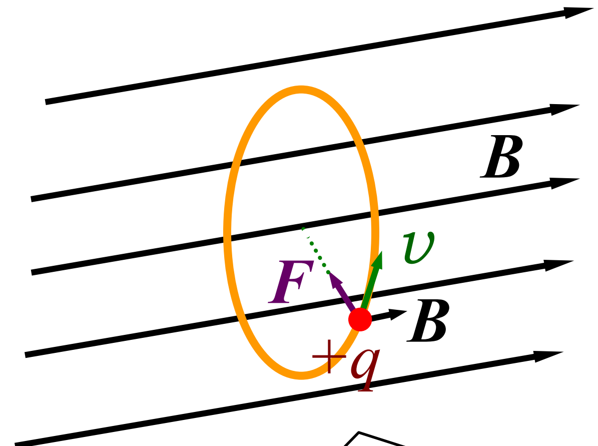
一、 带电粒子在均匀磁场中的运动

依赖于入射粒子的速度方向

1. 运动方向与磁场平行（B的定义）

$$\vec{v}\,//\,\vec{\mathrm{B}} \quad \therefore \quad \vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}=0$$

匀速直线运动



2. 运动方向与磁场垂直

$$\vec{v}\perp\vec{B}$$

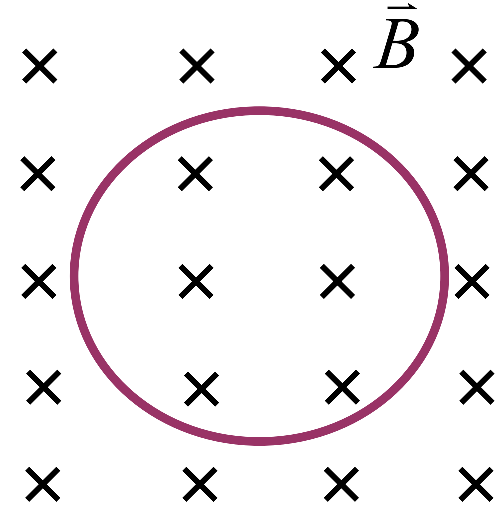
$$F=qvB$$

F和v都在垂直B平面内，
洛伦兹力维持圆周运动

若入射方向与磁场任意夹角，则为1和2的组合--螺旋线

2）洛伦兹力提供向心力

$$F = qvB = ma_n = m\frac{v^2}{R}$$



轨道半径

$$R = \frac{mv}{Bq}$$

R与v正比

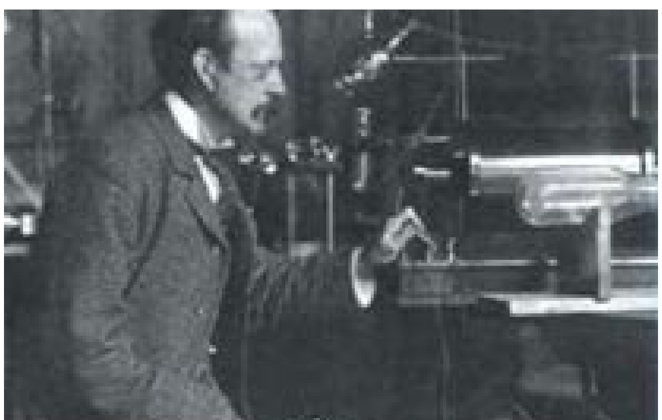
粒子荷质比

$$\frac{q}{m} = \frac{v}{BR}$$

圆周运动周期：

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{Bq}$$

周期与速度无关！



1897汤姆逊测电子q/m

3．粒子运动方向与磁场成θ角

把v分解成平行和垂直磁场的两个分量：

$$v_{//}=v\cos\theta \qquad v_{\perp}=v\sin\theta$$

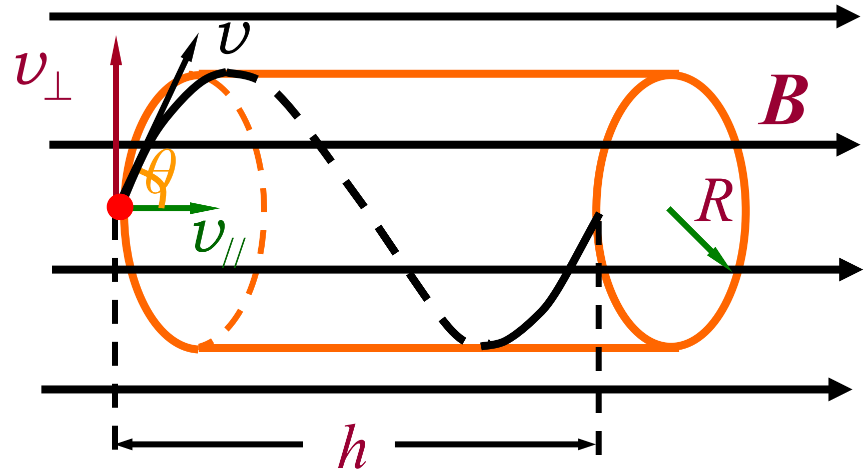
沿螺旋线运动

螺旋半径R：

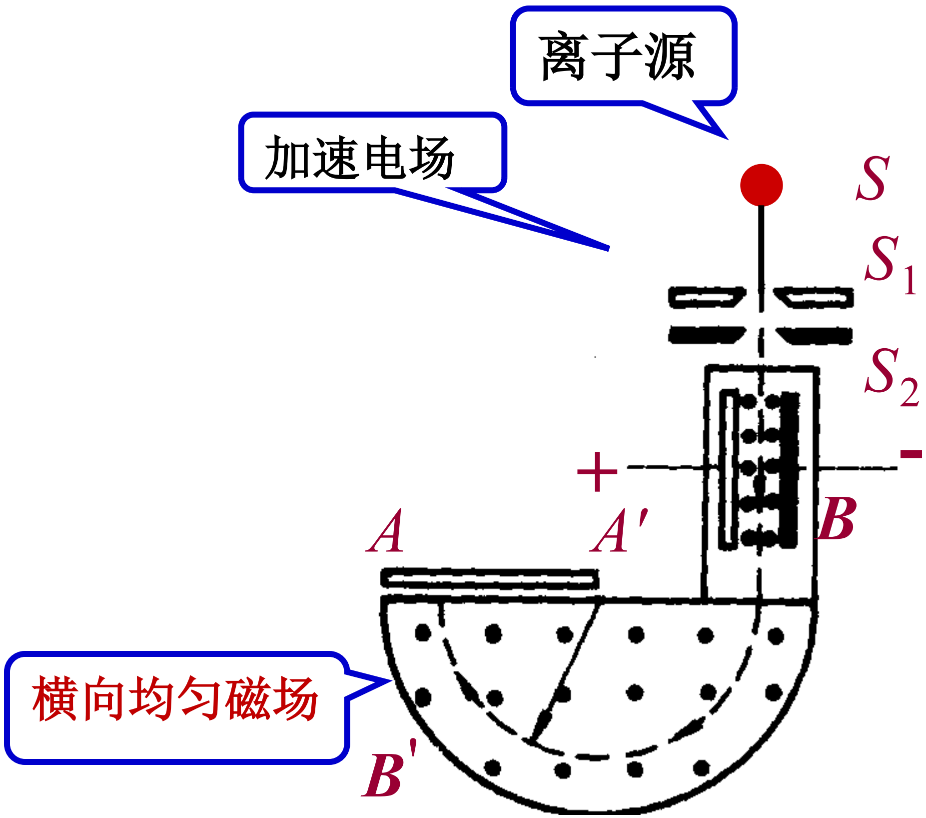
$$R=\frac{mv_{\perp}}{qB}=\frac{mv}{qB}\sin\theta$$

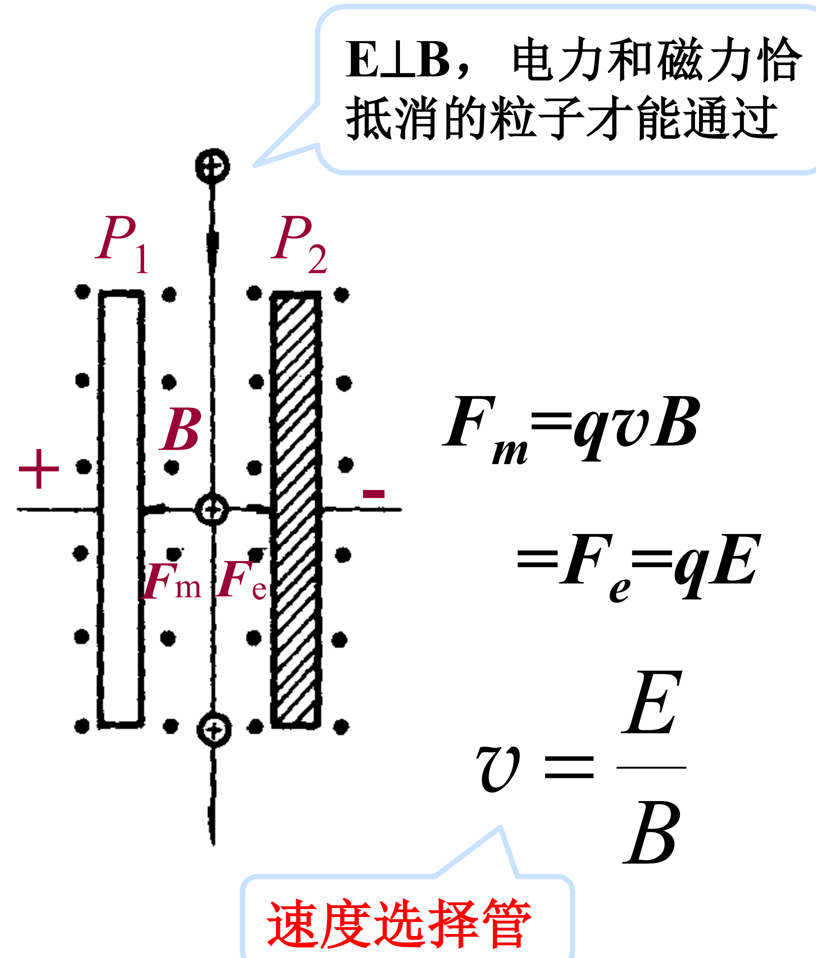
螺距h：

$$h=v_{//}T=\frac{2\pi m}{qB}v\cos\theta$$



4. 质谱仪（同位素分析，鉴别电荷相同质量不同的粒子）





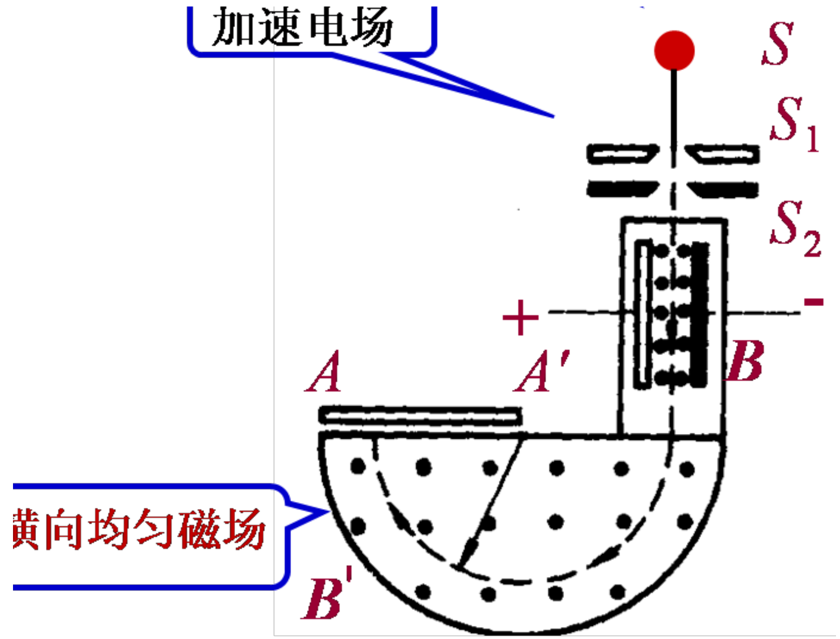
$$F_m=qvB$$

$$=F_e=qE$$

$$v=\frac{E}{B}$$

速度 $v=\dfrac{E}{B}$ 离子进入横向磁场B'，
圆周运动的半径：

$$R=\frac{mv}{qB'}=m\cdot\frac{E}{qBB'}$$

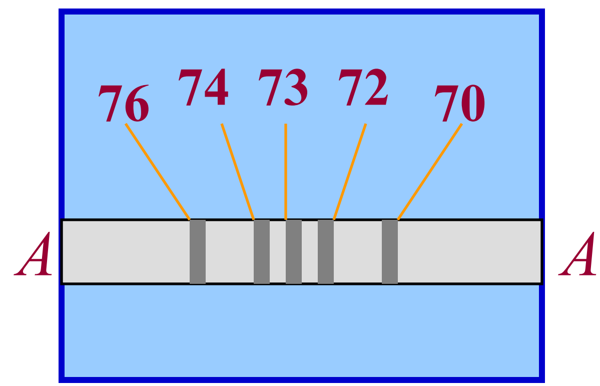


m大，R也大。不同**m**的离子在底片上位置不同 → **测定同位素原子量。**

离子荷质比 $$\frac{q}{m}=\frac{v}{RB'}=\frac{E}{RBB'}$$

H、^{2}H、^{3}H -氢氘氚

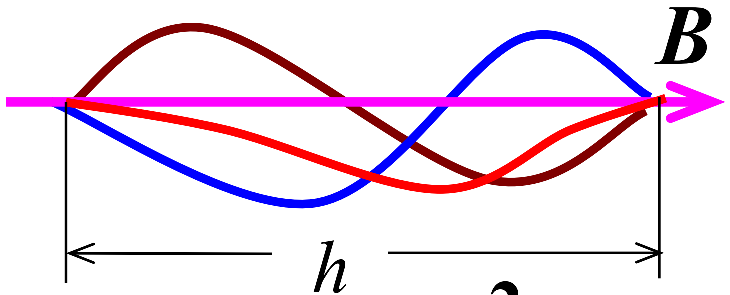
^{16}O、^{17}O 、^{18}O-氧



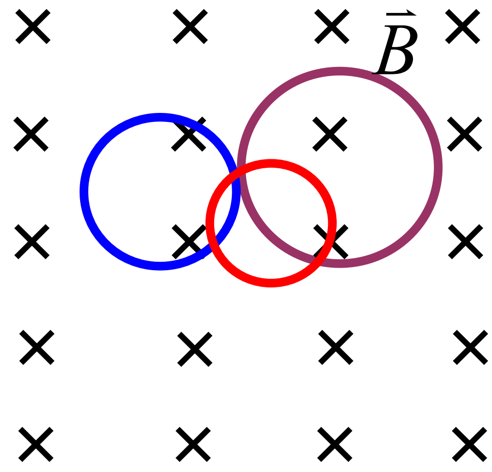
锗的质谱^{70}Ge、^{72}Ge等

质谱仪-用于核技术、地质、材料、食品分析！

5. 磁聚焦（发散粒子束会聚）



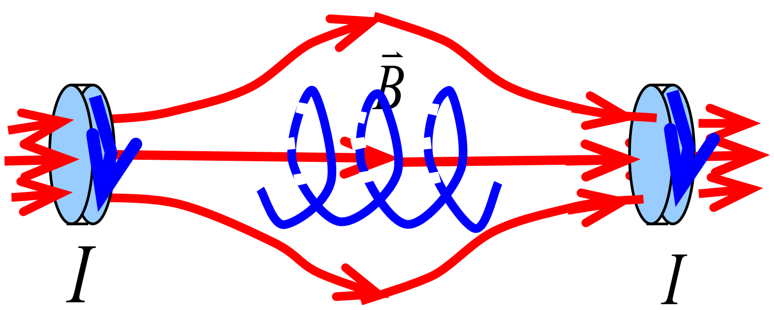
$$h = v_{//}T = \frac{2\pi m}{qB} v\cos\theta$$



$$v_{//} = v\cos\theta \approx v \quad v_{\perp} = v\sin\theta \approx v\theta$$

小发散角带电粒子束，沿B的分速度近似一样，螺距相同，一个周期后又重新会聚。

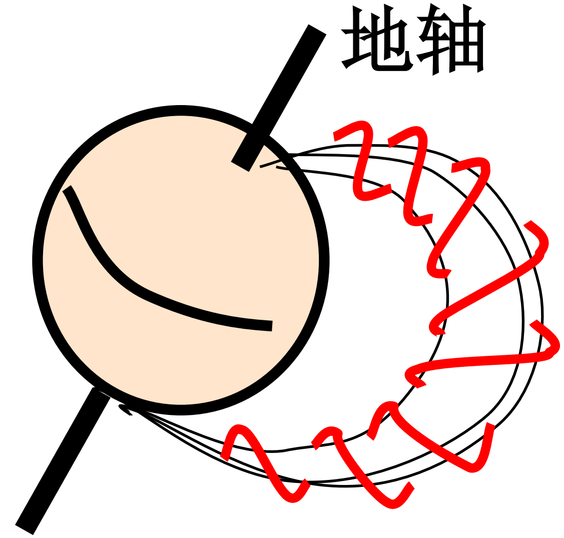
6. 磁约束



用于受控热核反应研究
磁镜T=10^7-10^9 K

离子被约束在一根磁力线附近，只有纵向运动，无横向跨越。在两端强场处离子被不均匀磁场反弹。

7. 范阿仑辐射带（1958）

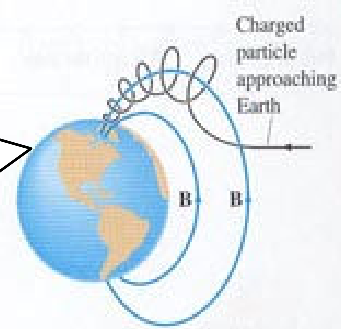


带电粒子被地磁场捕获，绕磁力线作螺旋运动，两极磁场比较强，粒子会沿磁力线来回振荡。

为什么高空有两条辐射带？
内带:几百-几千公里(p)
外带:2万公里（e）

太阳黑子活跃时，
带电粒子受磁力线引导，
在两极附近进入大气层，
引起极光（80-350km）

FIGURE 20-19 (a) Diagram showing a charged particle approaching the Earth which is "captured" by the magnetic field of the Earth. Such particles follow the field lines toward the poles as shown. (b) Photo of aurora borealis.



(a)

(b)

范阿仑带与极光（略）

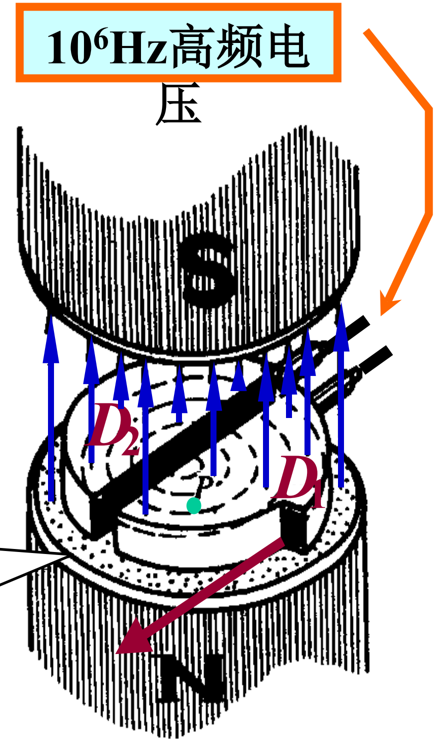
二、 粒子加速器

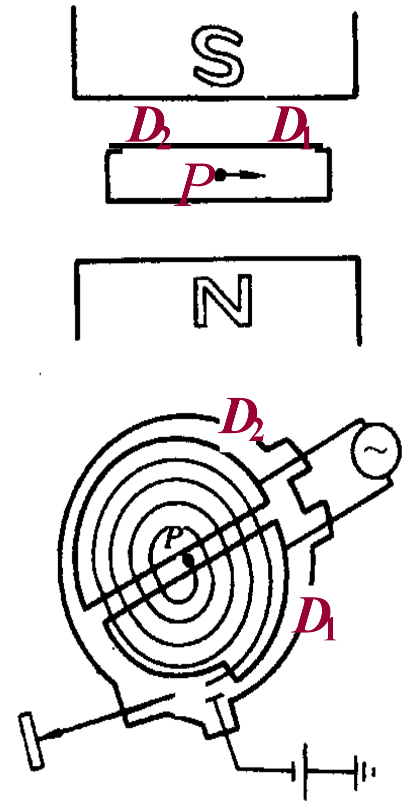
1. 回旋加速器

电场和磁场交替作用下，
可多次加速带电粒子

粒子在缝隙被加速，
在D形盒因匀强磁场
作圆周运动，回旋半径：

$$R = \frac{mv}{qB}$$



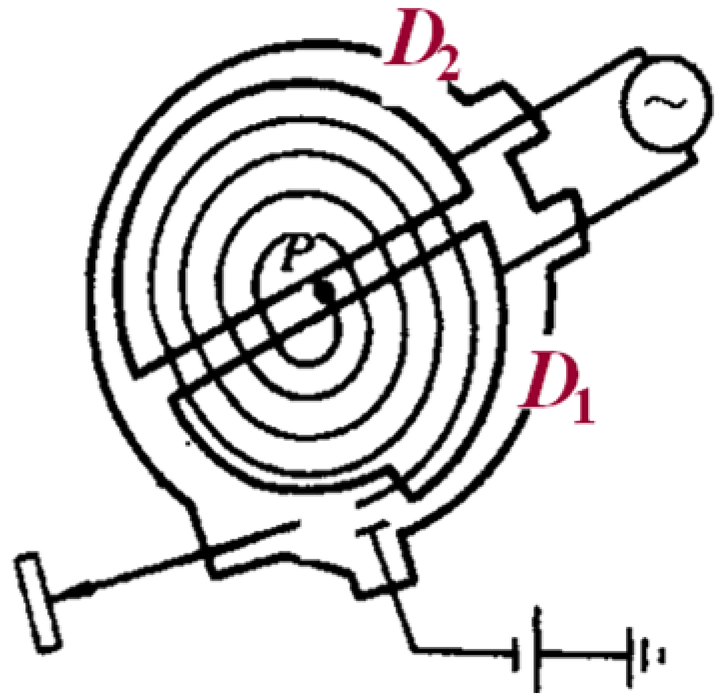


高频电压在两个D形盒
缝隙间产生交变电场

劳伦斯1932，诺奖1939

半盒内回旋时间： $t = \frac{T_0}{2} = \frac{\pi m}{qB}$

若高频电压频率 $\nu = \frac{1}{\mathrm{T}} = \frac{1}{2t} = \frac{1}{T_0}$



粒子每到缝隙，电场变向，正好被加速。反复加速后引出束流

粒子动能 $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2B^2}{2m}R^2$

Q：固定磁场B，R越大(磁铁也大)，获得能量越大?

2. 同步加速器

当接近光速，粒子质量：
$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

半盒内运动时间修正：
$$t=\frac{m\pi}{qB}=\frac{m_0\pi}{qB\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

为了使电子在间隙加速，必须满足

$$\nu=\frac{1}{T}=\frac{1}{2t}=\frac{qB}{2m\pi}=\frac{qB}{2m_0\pi}\sqrt{1-v^2/c^2}$$

加速电压的频率随加速过程必须同步减小，称**同步回旋加速器**。

明显缺点：磁铁太笨重

分析: $v = \frac{q}{m} BR$

随v增加，同时加大B，
→可使R 保持不变

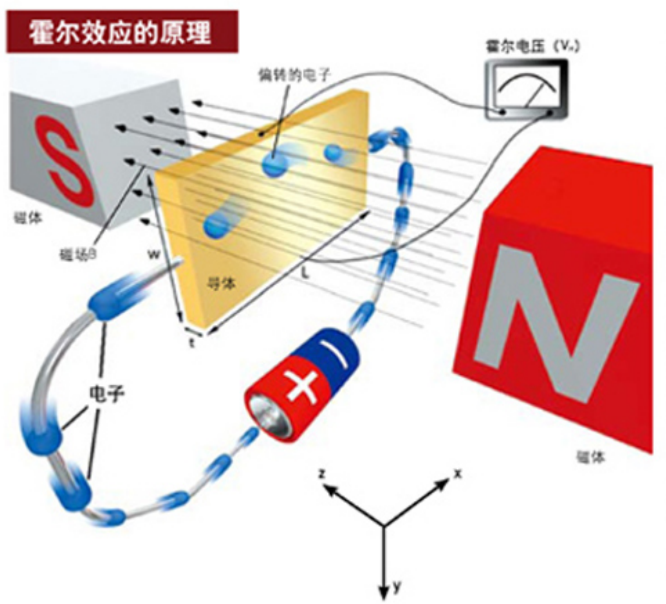
只需要一个环形轨道
-**同步加速器**

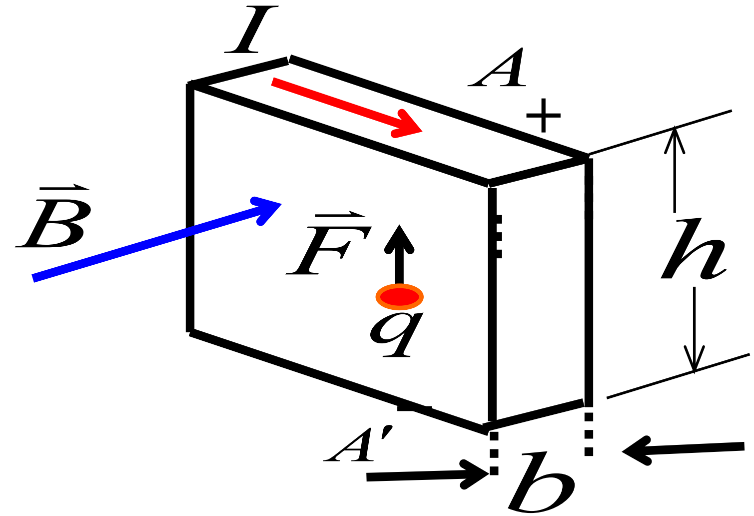
带电粒子作加速运动时
一定会辐射电磁波。

同步辐射的X-射线，可
研究物质微观结构

同步加速器与同步幅射

三、霍耳效应





若磁场与电流垂直，与磁场和电流都垂直的方向会出现横向电势差。

$V_{AA'}$ 与B, I 及宽度b 有关

$$V_{AA'} = k\frac{IB}{b}$$

*k*是霍耳系数,正负由载流子属性决定

$V_{AA'}>0$，正载流子(空穴型，p型)

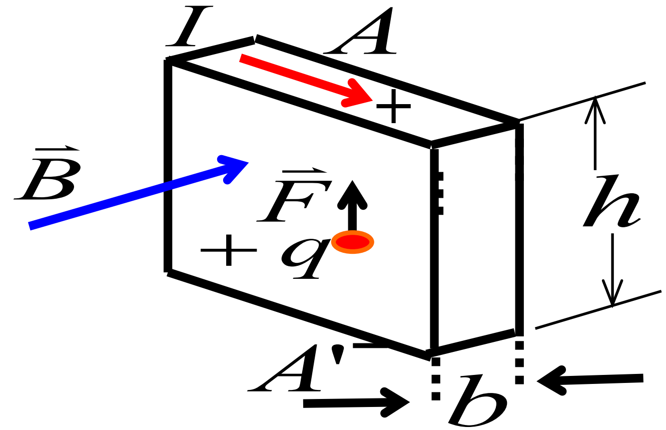
$V_{AA'}<0$，负载流子(电子型，n型)

霍耳效应(Hall，1879)

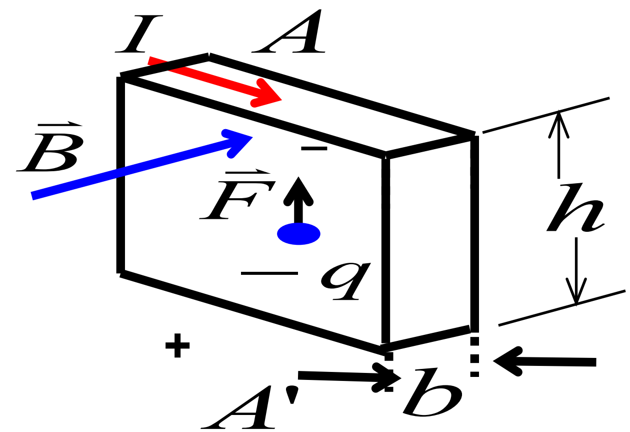
*定性解释

$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}} + q\vec{v} \times \vec{\mathbf{B}}$$

正粒子受力向上，
上端积累正电荷



对负载流子，速度与电流反向，磁力也向上
→上端积累负电荷，在*AA'*方向形成电场。



可以判断载流子符号！

当霍耳电场力与洛仑兹力平衡时，
载流子的漂移即达到动态平衡。

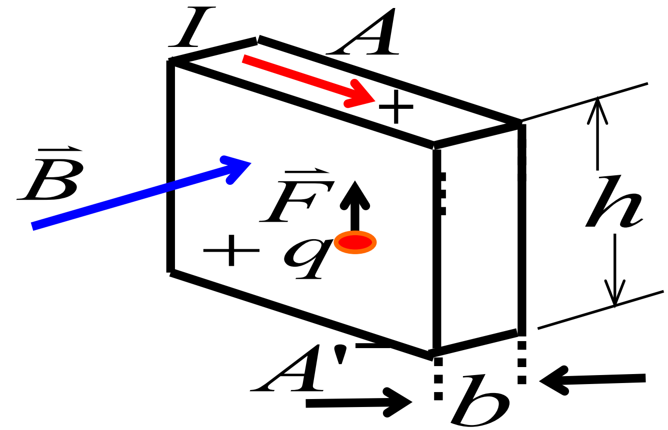
$$q\vec{\mathbf{E}}_{\mathrm{H}} = q\vec{\mathrm{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

动态平衡 $q\vec{\mathbf{E}}_{\mathrm{H}} = q\vec{\mathrm{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$

横向电势差,与电流强度

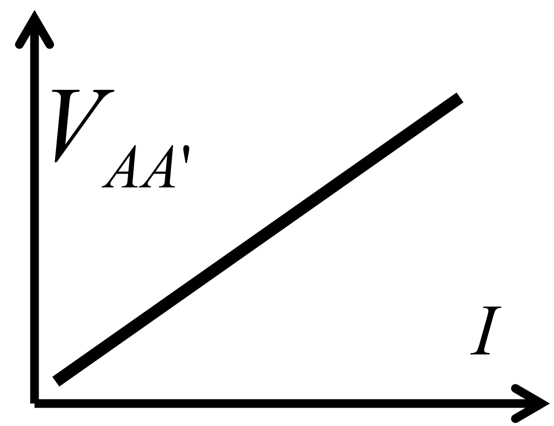
$$V_H = E_H h = \mathrm{v}B \cdot h$$

$$I = nq\mathrm{v}S = nq\mathrm{v} \cdot hb$$



$$\mathrm{R}_{\mathrm{H}} = \frac{V_H}{I} = \frac{B}{nqb} = k_{\mathrm{H}} \frac{B}{b}$$

$$系数 k_{\mathrm{H}} = \frac{1}{nq}$$



Q:为什么金属的霍耳效应远比半导体的小？

可测定掺杂半导体的载流子符号、浓度；反之，测定磁场（霍耳计）

霍耳效应3

1）整数量子霍耳效应-1985年诺奖

1979年Klitzing在极低温和强磁场半导体发现霍尔电阻出现量子化台阶。

朗道能级

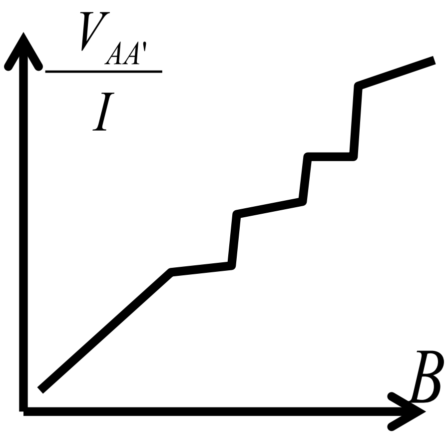
$$\frac{h}{ne^2}$$

2）分数量子霍尔效应-1998年诺奖

1986年崔琪、施特默、劳夫林（更强磁场）

涡旋和准粒子

$$n=\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7}\cdots$$



3）Thouless, Haldane, Kosterlitz 拓扑相变获2016诺奖

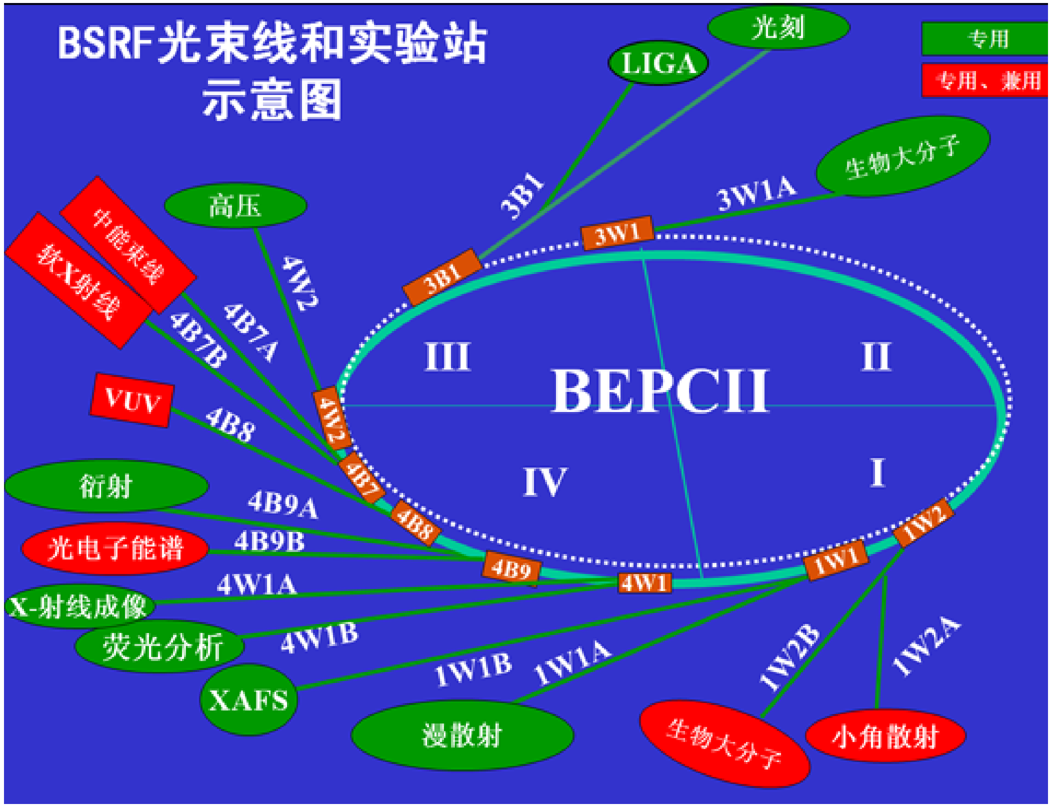
量子自旋霍尔效应，拓扑绝缘体

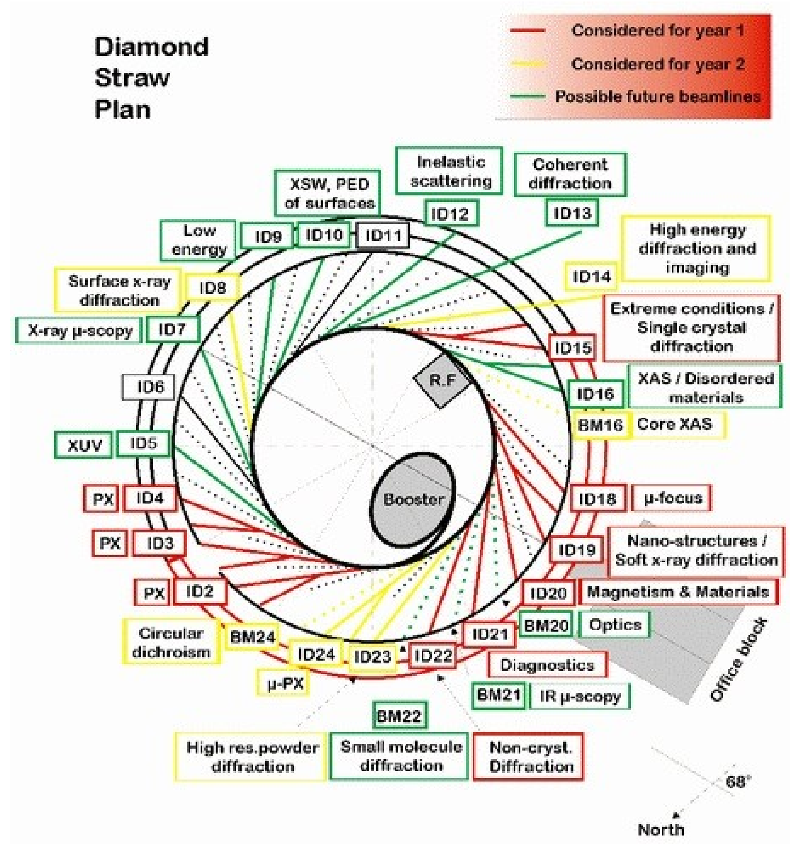
反常量子霍耳效应-2013年薛其坤，Haldane1988，不需外磁场的量子霍尔效应（自发磁化）

作业4A（安培环路）：12.16，12.17，12.20

作业4B（安培力）：12.26，12.28，12.30，12.31，12.38

截止日期：下周四





上海光源(SSRF)-三代

Synchrotron Radiation Facility

3.5GeV,远红外-硬X射线

高亮度、极化、相干性好

研究物质结构、相互作用…

国家大科学装置