数学建模

浙江大学数学系　谈之奕

tanzy@zju.edu.cn

生物数学模型

种群数量变化模型

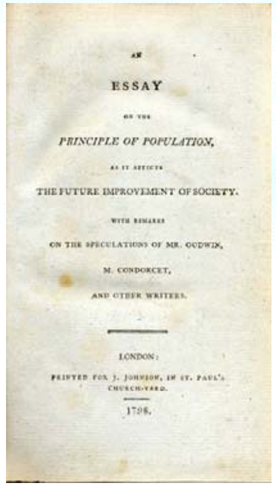
指数增长模型

- 指数增长模型
  - 假设
    - 环境承载容量无限，所有个体独立生活，彼此间不存在竞争
    - 种群处于封闭（**closed**）状态，不存在迁入（**immigration**）和迁出（**emigration**）
    - 存在常数 b 和 μ，对任意 t，在自 t 至 $t+\Delta t$ 时间内，出生的个体数量和死亡的个体数量分别为 $bx(t)\Delta t$ 和 $\mu x(t)\Delta t$
      - 人均出生/ 死亡/ 增长率（**per capita birth / death / growth rate**）**:**

        $b, \mu, r = b - \mu$
- $x(t+\Delta t) - x(t) = (b-\mu)x(t)\Delta t \Rightarrow \dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = rx(t) \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = rx$

指数增长模型

- 指数增长模型
  - $\dfrac{dx}{dt} = rx \Rightarrow x(t) = x_0 e^{rt}$
    - 当 $r > 0$ 时，$x(t) \to \infty (t \to \infty)$，
      当 $r < 0$ 时，$x(t) \to 0 (t \to \infty)$
  - 指数增长模型不适于描述较长时期的人口演变过程，但某地一个较短时间内的人口统计数据可能符合指数增长模型



Thomas Robert Malthus
（1766－1834）
英国人口学家、经济学家
Malthus TR，*An Essay on the Principle of Population，1798*

Malthus认为：在社会发展中，人口是以几何比率增加，而生活资料却以算术比例增加，自然规律要求这两个增加保持平衡，于是就出现了饥馑、战争、疫病、贫困。而社会改革和济贫法将助长人口增长，制造失业与贫困

Logistic模型

- **Logistic模型**
  - 种群人均增长率仅与种群数量有关，且是种群数量的递减函数

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=r \Rightarrow \frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=r-ax \Rightarrow \frac{dx}{dt}=rx\left(1-\frac{x}{K}\right)$$

$$\Rightarrow x(t)=\frac{Kx_0}{x_0+\left(K-x_0\right)e^{-rt}}$$

  - 内禀增长率（**innate rate of increase** ）： r
  - 环境承载量（**carrying capacity**）： K

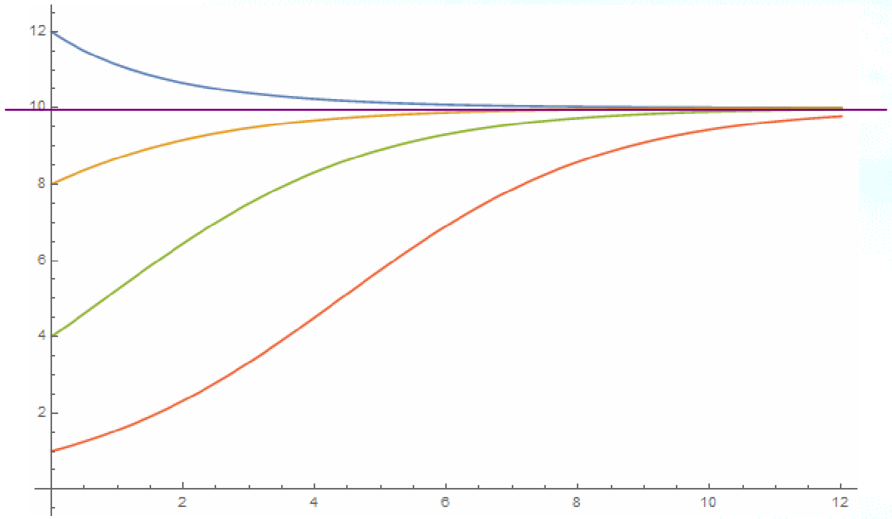
Verhulst PF，Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Correspondance Mathématique et Physique*. 10: 113–121, 1838.

Pierre François Verhulst
（1804－1849）
比利时数学家

Logistic模型

数学建模

- **Logistic模型的性质**
  - 当 $0 < x(0) < K$ 时，$x(t)$ 单调递增；当 $x(0) > K$ 时，$x(t)$ 单调递减
  - $x(t)$ 在 $t = \frac{K}{2}$ 处有一拐点
- 模型应用
  - 多数情况下，指数模型与**Logistic**模型并不是基于生物学机理，而是一种经验模型
  - 模型及其参数应根据实际数据进行估计和检验



$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = r\left(1 - \frac{2x}{K}\right)\frac{dx}{dt} = r^2x\left(1 - \frac{2x}{K}\right)\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

自治系统

- 自治系统
  - 对一阶常微分方程 $x'(t)=f(x)$，若 $f(x)$ 不显含变量 t，则称为**自治**系统（**autonomous**）
  - 满足 $f(x_\infty)=0$ 的点 x_∞ 称为微分方程的**平衡点**（**equilibrium**）
    - 对一阶常微分方程 $x'(t)=f(x)$，或者 $x(t)$ 无界，或者 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=x_\infty$。但不是所有平衡点均为某个非零解的极限
  - 可用线性化（**linearization**）方法研究平衡点附近解的性态

$$\frac{dx}{dt}=rx\ln\frac{K}{x}$$

$$\frac{dx}{dt}=rx\frac{K-x}{K+ax}$$

$$\frac{dx}{dt}=rx\left(1-\left(\frac{x}{K}\right)^{\theta}\right)$$

$$\frac{dx}{dt}=\left(re^{1-\left(\frac{x}{K}\right)}-d\right)x$$

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

随机模型

- 随机模型
  - 记 $x(t)$ 为 t 时刻一种群个体数量
    - $x(t)$ 是一个取非负整数值的随机变量，$\{x(t), t \ge 0\}$ 为一随机过程
    - $x(t)$ 为连续时间齐次**Markov**链
      - $P\{x(t+s)=j \mid x(s)=i, x(u)=x_u, 0 \le u < s\} = P\{x(t+s)=j \mid x(s)=i\}$
      - $P\{x(t+s)=j \mid x(s)=i\}$ 值与 s 无关，记其为 $p_{ij}(t)$
    - 设 $x(t)=n$ ，种群在 $(t, t+\Delta t)$ 时段内
      - 出生 1 人的概率为 $\lambda_n \Delta t + o(\Delta t)$
      - 死亡 1 人的概率为 $\mu_n \Delta t + o(\Delta t)$
      - 出生和死亡事件发生两次或以上的概率很小，忽略不计

生灭过程

数学建模

- 生灭过程
  - 离散状态空间连续时间齐次**Markov**链称为生灭过程（**birth–death process**），若对充分小的Δt，

$$\begin{cases} p_{i,i+1}(\Delta t)=\lambda_i\Delta t+o(\Delta t),\ \ \lambda_i\ge 0, i\ge 0 \\ p_{i,i-1}(\Delta t)=\mu_i\Delta t+o(\Delta t),\ \ \mu_i\ge 0, i\ge 1 \\ p_{i,i}(\Delta t)=1-(\lambda_i+\mu_i)\Delta t+o(\Delta t), i\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \sum_{|j-i|\ge 2} p_{ij}(\Delta t)=o(\Delta t)$$

    - 纯生过程（**pure birth process**）：$\mu_i=0, i\ge 0$
    - 纯灭过程（**pure death process**）：$\lambda_i=0, i\ge 0$
    - **Poisson**过程：$\mu_i=0, i\ge 0$，$\lambda_i=\lambda, i\ge 0$

Siméon Denis Poisson

（1781–1840）

法国数学家、物理学家

生灭过程

数学建模

$x(t)=n-1$ 出生一人

$x(t)=n$ 无出生无死亡

$x(t)=n+1$ 死亡一人

- 生灭过程
  - 记 $p_n(t)=P\{x(t)=n\}$
    - $p_n(t+\Delta t)=\lambda_{n-1}\Delta t\, p_{n-1}(t)+(1-\lambda_n\Delta t-\mu_n\Delta t)\,p_n(t)+\mu_{n+1}\Delta t\, p_{n+1}(t)+o(\Delta t)$
    - $\dfrac{dp_n(t)}{dt}=\lambda_{n-1}p_{n-1}(t)-(\lambda_n+\mu_n)\,p_n(t)+\mu_{n+1}p_{n+1}(t)$
- 线性增长
  - $\lambda_n=bn,\mu_n=dn$
  - $\dfrac{dp_n(t)}{dt}=(n-1)bp_{n-1}(t)-(b+d)np_n(t)+(n+1)dp_{n+1}(t)$
  - 初始情况 $p_{N_0}(0)=1, p_i(0)=0, i\neq N_0$

母函数
偏微分方程

线性增长

- 线性增长
  - 记 $\mathrm{E}(x(t))=\sum_{n=1}^{\infty} np_n(t)$，$\mathrm{E}(x(0))=N_0$

$$\frac{d\mathrm{E}(x(t))}{dt}=\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{d\,p_n(t)}{dt}=b\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)p_{n-1}(t)-(b+d)\sum_{n=1}^{\infty} n^2 p_n(t)+d\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)p_{n+1}(t)$$
$$=b\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)np_n(t)-(b+d)\sum_{n=1}^{\infty} n^2 p_n(t)+d\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)np_n(t)$$
$$=(b-d)\sum_{n=1}^{\infty} np_n(t)=(b-d)\mathrm{E}(x(t))$$

  - $\mathrm{E}(x(t))=N_0 e^{(b-d)t}=N_0 e^{rt}$

$$\boxed{\frac{dp_n(t)}{dt}=(n-1)bp_{n-1}(t)-(b+d)np_n(t)+(n+1)dp_{n+1}(t),\quad p_{N_0}(0)=1}$$

Yule纯生过程

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- **Yule纯生过程**
  - $\lambda_n = bn, \mu_n = 0$
    - 种群中每一个个体在 Δt 时间内产生新的个体的概率为 $b\Delta t + o(\Delta t)$，且个体相互独立
    - $$\begin{aligned} p_{n,n+1}(\Delta t) &= P\{x(t+\Delta t) = n+1 \mid x(t) = n\} \\ &= \binom{n}{1}\left(b\Delta t + o(\Delta t)\right)\left(1 - b\Delta t + o(\Delta t)\right)^{n-1} \\ &= bn\Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$
  - $$\frac{dp_n(t)}{dt} = (n-1)bp_{n-1}(t) - bnp_n(t)$$

$$\boxed{\frac{dp_n(t)}{dt} = (n-1)bp_{n-1}(t) - (b+d)np_n(t) + (n+1)dp_{n+1}(t)}$$

George Udny Yule
（1871–1951）
英国统计学家

Yule纯生过程

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 初始时刻仅有一个个体的**Yule**过程
  - $\dfrac{dp_1(t)}{dt} = -bp_1(t), p_1(0)=1 \Rightarrow p_1(t)=e^{-bt}$
  - $\dfrac{dp_2(t)}{dt} = bp_1(t) - 2bp_2(t) = -2bp_2(t) + be^{-bt}, p_2(0)=0 \Rightarrow p_2(t)=e^{-bt}(1-e^{-bt})$
  - $p_n(t) = e^{-bt}(1-e^{-bt})^{n-1}$
    - $$\begin{aligned}\frac{dp_n(t)}{dt} &= -be^{-bt}(1-e^{-bt})^{n-1} + b(n-1)e^{-2bt}(1-e^{-bt})^{n-2} \\ &= be^{-bt}(1-e^{-bt})^{n-2}\left(e^{-bt} - 1 + (n-1)e^{-bt}\right) \\ &= be^{-bt}(1-e^{-bt})^{n-2}\left(n-1-n(1-e^{-bt})\right) \\ &= be^{-bt}(n-1)(1-e^{-bt})^{n-2} - n(1-e^{-bt})be^{-bt} \\ &= b(n-1)p_{n-1}(t) - bnp_n(t)\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{dp_n(t)}{dt} = (n-1)bp_{n-1}(t) - bnp_n(t)}$$

t 时刻种群个体数量服从参数为 e^{-bt} 的几何分布

抛掷一枚正面向上概率为 e^{-bt} 的硬币，首次出现正面所需的抛掷次数

Yule纯生过程

- 初始时刻有 N_0 个个体的**Yule**过程
  - t 时刻种群个体数量为 N_0 个服从参数为 e^{-bt} 的几何分布的独立同分布随机变量之和
  - 抛掷一枚正面向上概率为 e^{-bt} 的硬币，出现 N_0 次正面所需的抛掷次数

$$p_n(t)=\underbrace{\binom{n-1}{N_0-1}}_{\text{前 } n-1 \text{ 次中有 } N_0-1 \text{ 次成功}}\underbrace{e^{-N_0bt}}_{\text{全部 } N_0 \text{ 次成功}}\underbrace{(1-e^{-bt})^{n-N_0}}_{\text{全部 } n-N_0 \text{ 次失败}},n\ge N_0\ge 1$$

参数为 N_0 和 e^{-bt} 的负二项分布

浙江大学

ZheJiang University

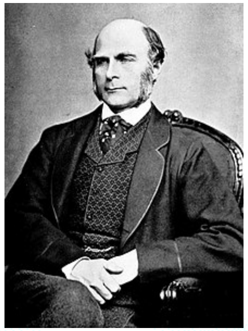
数学建模

家族消亡问题

- 家族消亡问题（**extinction of family names**）
  - **19**世纪中叶至**20**世纪初，先后有多位数学家注意到这样的社会现象：一个国家或地区的人口不断增加，但很多家族却消亡了，一些曾经显赫的姓氏不再出现。他们独立或相继地尝试用数学方法研究这一问题

Irénée-Jules Bienaymé
（1796–1878）
法国统计学家

Antoine Augustin Cournot
（1801–1877）
法国哲学家、数学家、经济学家



Sir Francis Galton
（1822–1911）
英国科学家

Henry William Watson
（1827–1903）
英国数学家

Agner Krarup Erlang
（1878–1929）
丹麦数学家、统计学家、工程师

家族消亡问题

数学建模

- 函数 $f(x)$
  - 设每位家族成员至多有 k 个后代，有 i 个后代的概率为 p_i，$\sum_{i=0}^{k} p_i = 1$。每位家族成员后代数量相互独立
  - 定义函数 $f(x) = \sum_{i=0}^{k} p_i x^i$
    - $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0) = p_0$，$f(1) = 1$
    - $f'(x) > 0, x \in (0,1)$，$f(x)$ 严格单调递增
    - $f''(x) > 0, x \in (0,1)$，$f(x)$ 严格下凸
    - 某个家族成员没有后代的概率为 $p_0 = f(0) > 0$
    - 某个家族成员后代数量的期望为 $M = \sum_{i=0}^{k} i p_i = f'(1)$

家族消亡问题

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

- 函数 $f_n(x)$
  - 记 x_n 为家族在第 n 代的成员数。假设 $x_0=1$
    - $0\le x_n \le k^n$
  - 记 $p_{j,n}=P\{x_n=j\}$，定义 $f_n(x)=\sum_{j=0}^{k^n} p_{j,n}x^j$
    - $p_{j,1}=p_j$，$f_1(x)=f(x)$
    - 若 $x_{n-1}=s$，其中第 i 位成员的后代数为 j_i，$i=1,2,\ldots,s$
      - $0\le j_i\le k$，$x_n=\sum_{i=1}^{s} j_i$
    - $p_{j,n}=\sum_{s=0}^{k^{n-1}} p_{s,n-1}\sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_s)\in\Lambda_j} p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_s}$，其中 $\Lambda_j=\left\{(j_1,j_2,\cdots,j_s)\,|\,0\le j_i\le k,\sum_{i=0}^{s} j_i=j\right\}$

家族消亡问题

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 函数 $f_n(x)$
  - $$f_n(x)=\sum_{j=0}^{k^n} p_{j,n}x^j=\sum_{j=0}^{k^n} x^j \sum_{s=0}^{k^{n-1}} p_{s,n-1} \sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_s)\in\Lambda_j} p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_s}$$
    $$=\sum_{s=0}^{k^{n-1}} p_{s,n-1}\sum_{j=0}^{k^n} \sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_s)\in\Lambda_j} p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_s}x^{j_1}x^{j_2}\dots x^{j_s}$$
    $$=\sum_{s=0}^{k^{n-1}} p_{s,n-1}\left(\sum_{j_1=0}^{k} p_{j_1}x^{j_1}\right)\left(\sum_{j_2=0}^{k} p_{j_2}x^{j_2}\right)\cdots\left(\sum_{j_s=0}^{k} p_{j_s}x^{j_s}\right)$$
    $$=\sum_{s=0}^{k^{n-1}} p_{s,n-1}\left(\sum_{j=0}^{k} p_{j}x^{j}\right)^s=\sum_{s=0}^{k^{n-1}} p_{s,n-1}f(x)^s=f_{n-1}(f(x))$$

$$x^3+x^4+x^4+x^4+x^5+x^5+x^5+x^6$$

$$x^3+x^4+x^4+x^5+x^4+x^5+x^5+x^6$$

$$(x+x^2)(x+x^2)(x+x^2)$$

- $$f_n(x)=f_{n-1}(f(x))=f_{n-2}(f(f(x)))=\cdots=\underbrace{f(f(\cdots f(f}_{n}(x))))=\cdots=f(f_{n-1}(x))$$

$$\boxed{f(x)=\sum_{i=0}^{k} p_i x^i \qquad f_n(x)=\sum_{j=0}^{k^n} p_{j,n}x^j \qquad p_{j,n}=\sum_{s=0}^{k^{n-1}} p_{s,n-1}\sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_s)\in\Lambda_j} p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_s}}$$

家族消亡问题

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 第 n 代家族成员数量的期望值 $\mathrm{E}(x_n)$
  - $\mathrm{E}(x_n) = \sum_{j=0}^{k^n} j p_{j,n} = f_n'(1)$
  - $f_n'(x) = f'(f_{n-1}(x))\, f_{n-1}'(x)$
  - $f_n'(1) = f'(f_{n-1}(1))\, f_{n-1}'(1)$
    $= f'(1)\, f_{n-1}'(1) = M\ f_{n-1}'(1)$
  - $\mathrm{E}(x_n) = f_n'(1) = M^n$

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^{k^n} p_{j,n} x^j \qquad f(x) = f(f_{n-1}(x))$$

$$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2$$

$$f_2(x) = \frac{25}{64} + \frac{5}{16}x + \frac{7}{32}x^2 + \frac{3}{16}x^3 + \frac{1}{64}x^4$$

$$f_3(x) = \frac{7921}{16384} + \frac{445}{2048}x + \frac{723}{4096}x^2 + \frac{159}{2048}x^3 + \frac{267}{8192}x^4 + \frac{19}{2048}x^5 + \frac{11}{4096}x^6 + \frac{1}{2048}x^7 + \frac{1}{16384}x^8$$

$f_1(0) = 0.250,\ f_2(0) = 0.391,\ f_3(0) = 0.483$

$f_4(0) = 0.550,\ f_5(0) = 0.601,\ f_6(0) = 0.641$

$$f(x) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3$$

$f_1(0) = 0.125,\ f_2(0) = 0.192,\ f_3(0) = 0.231$

$f_4(0) = 0.255,\ f_5(0) = 0.271,\ f_6(0) = 0.281$

家族消亡问题

数学建模

- 消亡概率 π_n
  - 记 $\pi_n = P\{x_n = 0\}$，即家族在第 n 代消亡的概率
    - $\pi_n = f_n(0) = f(f_{n-1}(0)) = f(\pi_{n-1})$，$\pi_1 = f(0)$
    - $\{x_{n-1} = 0\} \subseteq \{x_n = 0\}$，$\pi_{n-1} \le \pi_n$
    - $\pi_n \le 1$，$\lim\limits_{n\to\infty} \pi_n$ 存在，记为 π_∞
  - π_∞ 是方程 $f(x) = x$ 的最小正根
    - 在 $\pi_n = f(\pi_{n-1})$ 两边取极限，$\pi_\infty = f(\pi_\infty)$
    - 设另有 $f(x_0) = x_0 > 0$，$\pi_1 = f(0) < f(x_0) = x_0$，$\pi_2 = f(\pi_1) < f(x_0) = x_0$，归纳可得 $\pi_n < x_0$

      $f(x)$ 单调性
    - 由极限保号性，$\pi_\infty \le x_0$

家族消亡问题

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 最终消亡概率 $\pi_\infty = 1$ 当且仅当 $M = f'(1) \le 1$
  - 方程 $f(x)=x$ 在 $(0,1)$ 内至多只有一个根
    - 若 $f(x)=x$ 在 $[0,1]$ 内有三个根 x_1,x_2,x_3，其中 $0<x_1<x_2<x_3\le 1$，
      $f(x_2) < \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1} f(x_1) + \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1} f(x_3) = \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1} x_1 + \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1} x_3 = x_2$

      $f(x)$ 凸性

      矛盾
  - 若 $M \le 1$，方程 $f(x)=x$ 在 $(0,1)$ 内无根
    - 由 $M = f'(1) \le 1$ 及 $f''(x) > 0, x\in(0,1)$，$f'(x) < 1, x \in (0,1)$
    - 由中值定理，对任意 $x\in(0,1)$，$\frac{1-f(x)}{1-x} = \frac{f(1)-f(x)}{1-x} = f'(\tau) < 1, x<\tau<1$
  - 若 $\pi_\infty = 1$，则 $M \le 1$
    - 令 $g(x) = f(x) - x$，$g(0)>0, g(1)=0, g'(x) = f'(x)-1$
    - 若 $M = f'(1) > 1$，则 $0 < g'(1) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{g(1)-g(1-\varepsilon)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{0-g(1-\varepsilon)}{\varepsilon}$
    - 存在 $\tau \in (0,1)$，$g(\tau) < 0$。由界值定理，$g(x)$ 在 $(0,\tau)$ 内有一根　　矛盾

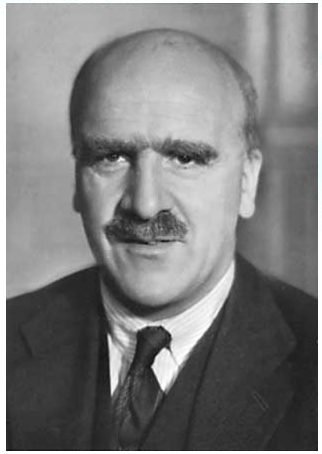
$\boxed{\pi_\infty \text{ 是方程 } f(x)=x \text{ 的最小正根}}$

分支过程

数学建模

- 分支过程
  - 分支过程（**branching process**）是用于描述与某一群体繁殖和转换相关的现象的随机过程，其基本假定是个体的繁殖是相互独立的
  - 分支过程可用于描述传染病从极少感染者经过逐级传播到爆发的过程
  - **Fisher**和**Haldane**曾用分支过程研究基因变异后的形成的不利基因通过自然选择在后代中的保留问题

Sir Ronald Aylmer Fisher
（1890–1962）
英国统计学家、遗传学家



John Burdon Sanderson Haldane
（1892–1964）
英国遗传学家、生物统计学家

Fisher RA. On the dominance ratio. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 42: 321-341, 1923.

Haldane JBS. A mathematical theory of natural and artificial selection, V: selection and mutation. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 838-844, 1927.

浙江大学
ZheJiang University

生物数学模型

传染病模型

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

传染病

- 传染病（infectious diseases）
  - 由各种病原体引起的，能在人与人、动物与动物、人与动物之间互相传播的一种疾病
  - 传染病得以在某一人群中发生和传播，必须具备传染源、传播途径和易感人群三个基本环节
- **Kermack- McKendrick模型**
  - 自**1927**年起， **Kermack**和**McKendrick**先后发表三篇论文，提出了揭示传染病传播规律的仓室（**compartment**）模型
    - **A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics, 115, 700-721, 1927**
    - **II. The Problem of Endemicity, 138, 55-83, 1932**
    - **III. Further Studies of the Problem of Endemicity, 141, 94-122, 1933**

William Ogilvy Kermack（1898–1970）
Anderson Gray McKendrick（1876–1943）
英国数学家、流行病学家

Proceedings of the Royal Society of London A 创刊于**1800**年，**1854**年改用现名。**Maxwell** 电磁场理论，**DNA**双螺旋结构等重要论文均发表在该刊上

SIR模型

- 模型假设
  - 疾病传播期内所考察地区总人数 N 保持不变，没有新增人口和因疾病以外的原因造成的死亡
  - 人群分类
    - 易感者（**Susceptible**）：易受疾病感染但尚未发病
    - 感染者（**Infective**）：已感染且可通过接触传染易感者
    - 移出者（**Removed**）：曾被感染，但不会再被感染或传染他人
      - 感染后与人群有效隔离
      - 感染后死亡
      - 感染后获得终身免疫
  - 记 t 时刻易感者、感染者和移出者人数分别为 $S(t)$, $I(t)$ 和 $R(t)$

SIR模型

- 接触与移出
  - 单位时间内每人与 βN 人接触，并使其中的易感者受到感染
    - 单位时间内新增感染者数量为 $I \cdot \beta N \cdot \frac{S}{N} = \beta SI$
  - 单位时间内 αI 个感染者移出系统
    - 每个感染者处于感染期的时间 X 服从参数为 α 的指数分布
      - $P(X \le t) = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}$，$E(X) = \frac{1}{\alpha}$
      - 感染者经过长度至多为 t 的感染期后已被移出的概率为 $1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}$
      - 若不计新增感染者，$\frac{I(t)}{I(0)} = e^{-\alpha t}$
      - 若不计新增感染者，$\frac{dI(t)}{dt} = -\alpha I(t)$

$$S \xrightarrow{\beta SI} I \xrightarrow{\alpha I} R$$

SIR模型

- **SIR模型**

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I \\ \dfrac{dR}{dt} = \alpha I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \dfrac{dI}{dt} = (\beta S - \alpha) I \end{cases} \Rightarrow \frac{dI}{dS} = \frac{1}{\sigma S} - 1 \qquad \sigma = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$I(t) = S_0 + I_0 - S(t) + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{S(t)}{S_0}$$

$S(0) = S_0 > 0$

$I(0) = I_0 > 0$

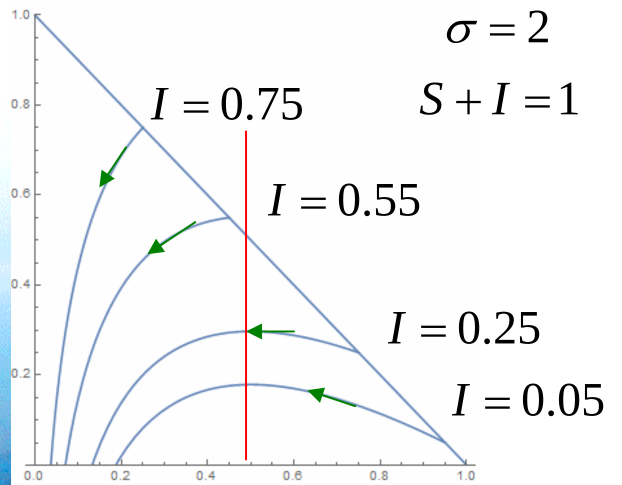
$R(0) = R_0 \geq 0$

$S(t) + I(t) + R(t) = N$

$S(t)$单调递减

$I(t)$ 趋于0

对部分S_0，$I(t)$先增后减，对部分S_0，$I(t)$单调递减



SIR模型

浙江大学 ZheJiang University

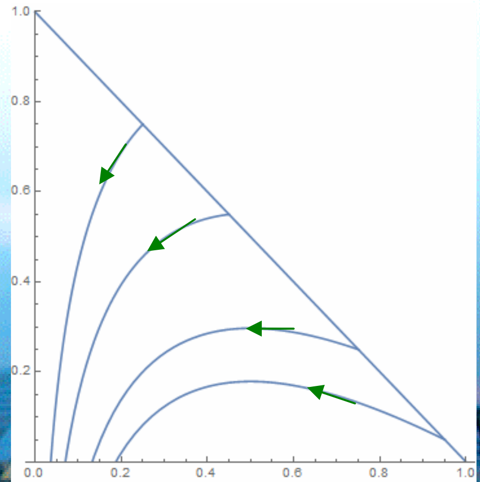
数学建模

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta\left(S - \dfrac{1}{\sigma}\right)I \\ \dfrac{dR}{dt} = \alpha I \end{cases}$$

- $\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$
  - 由 $S(t) \ge 0, \dfrac{dS}{dt} \le 0, \lim_{t\to\infty} S(t)$ 存在，记为 S_∞
  - 由 $R(t) \le N, \dfrac{dR}{dt} \ge 0, \lim_{t\to\infty} R(t)$ 存在
  - 由 $S(t) + I(t) + R(t) \equiv N, \lim_{t\to\infty} I(t)$存在，记为 I_∞
  - 若 $I_\infty = \varepsilon > 0$ ，则对充分大的 t，$\dfrac{dR}{dt} > \alpha\dfrac{\varepsilon}{2}, \lim_{t\to\infty} R(t) = \infty$

矛盾

- 最终未被感染的人数 S_∞
  - S_∞ 为方程 $S_0 + I_0 - S_\infty + \dfrac{1}{\sigma}\ln\dfrac{S_\infty}{S_0} = 0$的根
  - 可用 $\sigma \approx \dfrac{\ln S_0 - \ln S_\infty}{S_0 - S_\infty}$估计 σ



$$\boxed{I(t) = S_0 + I_0 - S(t) + \frac{1}{\sigma}\ln\frac{S(t)}{S_0}}$$

SIR模型

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta\left(S - \dfrac{1}{\sigma}\right)I \\ \dfrac{dR}{dt} = \alpha I \end{cases}$$

- $I(t)$ 的增减性
  - 若 $S_0 > \dfrac{1}{\sigma}$
    - $\dfrac{1}{\sigma} < S(t) < S_0$ 时，$I(t)$ 单调增加，在 $S(t) = \dfrac{1}{\sigma}$ 时达到最大值 $S_0 + I_0 - \dfrac{1}{\sigma}(1 + \ln \sigma S_0)$
    - $S(t) < \dfrac{1}{\sigma}$ 时，$I(t)$ 单调减小至 0
  - 若 $S_0 \le \dfrac{1}{\sigma}$，$I(t)$ 单调减小至 0，传染病没有蔓延
- 基本再生数（**Basic reproduction number**）$\mathcal{R}_0$
  - $\mathcal{R}_0 = S_0\sigma = S_0\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}\cdot\beta N\cdot\dfrac{S_0}{N}$，可解释为初期每个感染者在感染期内感染的易感者平均数
  - 若 $\mathcal{R}_0 > 1$，传染病会流行；若 $\mathcal{R}_0 < 1$，传染病不会蔓延

$$I(t) = S_0 + I_0 - S(t) + \frac{1}{\sigma}\ln\frac{S(t)}{S_0}$$

传染病	$\mathcal{R}_0$
麻疹	**16**
水痘	**11**
腮腺炎	**12**
脊髓灰质炎	**5**
天花	**5**

SIS模型

- 模型假设
  - 疾病传播期内总人数保持不变，人群分为易感者和感染者
  - 单位时间内每人与 βN人接触，并使其中的易感者受到感染
  - 单位时间内 γI 个感染者治愈，重新成为易感者
- **SIS模型**

$$S \underset{\gamma I}{\overset{\beta SI}{\rightleftarrows}} I$$

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta SI + \gamma I \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \end{cases} \quad \begin{array}{l} S(0) = S_0 > 0 \\ I(0) = I_0 > 0 \\ S(t) + I(t) = N \end{array} \quad \Rightarrow \frac{dI}{dt} = (\beta N - \gamma - \beta I)I = (\beta N - \gamma)I\left(1 - \frac{\beta}{\beta N - \gamma} I\right)$$

Logistic模型

$$\mathcal{R}_0 = N\frac{\beta}{\gamma}$$

  - 若 $\beta N - \gamma > 0$，对任意 $0 < I_0 < N$，$I(t)$单调递增趋于 $N - \frac{\gamma}{\beta}$
  - 若 $\beta N - \gamma < 0$，对任意 $0 < I_0 < N$，$I(t)$单调递减趋于 0
    - $\dfrac{dI}{dt} \le (\beta N - \gamma)I$，$\dfrac{dI}{dt} = (\beta N - \gamma)I$ 的解 $I(t) = I(0)e^{(\beta N - \gamma)t} \to 0 (t \to \infty)$

SIS模型

数学建模

- **SIS模型**
  - 自治系统有两个可能平衡点 $P_1=(N,0)$，$P_2=\left(\frac{\gamma}{\beta},N-\frac{\gamma}{\beta}\right)$
    - 当 $\mathcal{R}_0<1$时，$(S(t),I(t))$趋向于P_1，人群中不再存在感染者
    - 当 $\mathcal{R}_0>1$时，$(S(t),I(t))$趋向于P_2，传染病成为一种地方病（**endemic**）

$$\begin{cases}\frac{dS}{dt}=-\beta SI+\gamma I\\ \frac{dI}{dt}=\beta SI-\gamma I\end{cases}$$

- 防控传染病对策
  - 减少人群接触，减小β值
  - 提高治疗水平，使感染者尽早治愈，即增大γ值
  - 在存在移出者情况下，通过预防免疫办法提高初始移出者 R_0 至 $N-\frac{\alpha}{\beta}$

$$\mathcal{R}_0=S_0\frac{\beta}{\alpha}\approx(N-R_0)\frac{\beta}{\alpha}$$

$$\mathcal{R}_0=N\frac{\beta}{\gamma}$$

Ross疟疾传播模型

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 模型假设
  - 某区域在一段时间内人的数量 H 与（雌性）蚊子的数量 V 保持不变
  - 记 t 时刻人群中易感者和感染者数量分别为 $S_h(t)$ 和 $I_h(t)$，蚊子中易感者和感染者数量分别为 $S_v(t)$ 和 $I_v(t)$
  - 单位时间内每只蚊子会叮咬 a 个（不同的）人，每个人被 $\tilde{a}$ 只（不同的）蚊子叮咬，$aV=\tilde{a}H$
  - 发生叮咬时，从已感染疟疾的人传染给未感染疟疾的蚊子的概率为 b_h ，从已感染疟疾的蚊子传染给未感染疟疾的人的概率为 b_v
  - 单位时间内，有数量为 $\gamma_h I_h(t)$ 的已感染疟疾的人康复，数量为 $\gamma_v I_v(t)$ 的已感染疟疾的蚊子康复

Ronald Ross
（1857–1932）
英国医学家
1902年**Nobel**生理与医学奖得主

Ross R. Some quantitative studies in epidemiology. *Nature*, 87, 466–467, 1911.

Ross疟疾传播模型

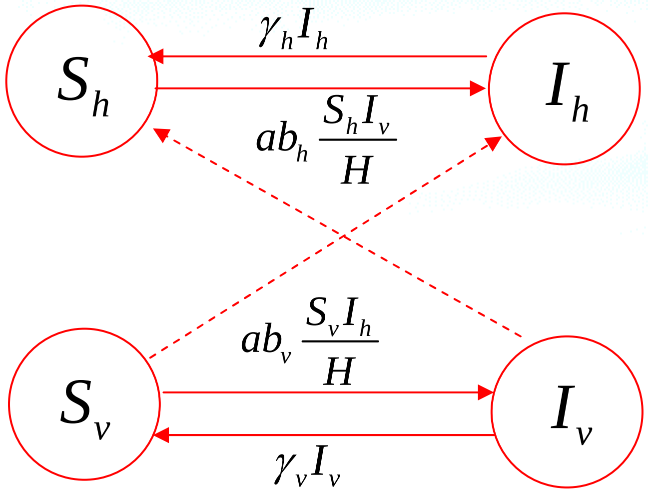
- **Ross模型**

$$
\begin{cases}
\dfrac{dS_h}{dt} = -ab_h\dfrac{S_hI_v}{H} + \gamma_hI_h \\
\dfrac{dI_h}{dt} = ab_h\dfrac{S_hI_v}{H} - \gamma_hI_h \\
\dfrac{dS_v}{dt} = -ab_v\dfrac{S_vI_h}{H} + \gamma_vI_v \\
\dfrac{dI_v}{dt} = ab_v\dfrac{S_vI_h}{H} - \gamma_vI_v
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = ab_h(1-x)my - \gamma_hx \\
\dfrac{dy}{dt} = ab_vx(1-y) - \gamma_vy
\end{cases}
$$

$$m = \frac{V}{H}$$

$$x(t) = \frac{I_h(t)}{H} = 1 - \frac{S_h(t)}{H}$$

$$y(t) = \frac{I_v(t)}{V} = 1 - \frac{S_v(t)}{V}$$



$$a\cdot I_v\cdot\frac{S_h}{H}\cdot b_h \qquad \tilde{a}\cdot I_h\cdot\frac{S_v}{V}\cdot b_v = ab_v\frac{S_vI_h}{H}$$

感染蚊子叮咬总数	被叮咬者是易感者且被感染	感染人被叮咬总数	叮咬感染人的是易感蚊子且被感染

Ross疟疾传播模型

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ab_h(1-x)my - \gamma_h x \\ \dfrac{dy}{dt} = ab_v x(1-y) - \gamma_v y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{\gamma_h x}{ab_h m(1-x)} \\ y = \dfrac{ab_v x}{ab_v x + \gamma_v} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\gamma_v y}{ab_v(1-y)} \\ x = \dfrac{amb_h y}{amb_h y + \gamma_h} \end{cases}$$

- 平衡点和稳定性
  - 系统有两个可能平衡点 $P_1=(0,0)$ 和

    $$P_2 = \left(\frac{a^2 m b_h b_v - \gamma_h \gamma_v}{ab_v(amb_h + \gamma_h)}, \frac{a^2 m b_h b_v - \gamma_h \gamma_v}{amb_h(ab_v + \gamma_v)} \right)$$

  - 定义 $$\mathcal{R}_0 = \frac{a^2 m b_h b_v}{\gamma_h \gamma_v} = \frac{ab_v}{\gamma_h} \cdot \frac{amb_h}{\gamma_v}$$
    - 当 $\mathcal{R}_0 \le 1$ 时，P_1 为唯一的平衡点
    - 当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时，P_2 为稳定的平衡点，P_1 为平衡点但不稳定

浙江大学
ZheJiang University

生物数学模型

种间关系

Lotka-Volterra模型

- 鱼市数据
  - 二十世纪二十年代，**D'Ancona**观察到**Trieste**鱼市上鲨鱼和食用鱼所占比例的波动情况，这一数据基本反映了**Adriatic**海中两类鱼的比例
  - 在第一次世界大战期间，捕鱼量大幅下降，数据显示对作为捕食者的鲨鱼更为有利

年份	1914	1915	1916	1917	1918
鲨鱼比例(%)	11.9	21.4	22.1	21.2	36.4
年份	1919	1920	1921	1922	1923
鲨鱼比例(%)	27.3	16.0	15.9	14.8	10.7

Umberto D'Ancona
（**1896–1964**）
意大利生物学家

Lotka-Volterra模型

数学建模

- **Lotka-Volterra模型**
  - **D’Ancona**将不同鱼种数量变化问题求教于**Volterra**，后者建立了数学模型，对这一现象作出了解释
  - 稍早时，**Lotka**也给出了相同的模型，并阐述了其在生物学中的应用

Lotka AJ. *Elements of Physical Biology*, Williams & Wilkins, 1925
Reissued as *Elements of Mathematical Biology*, Dover, 1956.

Alfred James Lotka
（**1880**－**1949**）
美国数学家

Vito Volterra
（**1860**－**1940**）
意大利数学家

Volterra V. Variazioni e fluttazioni del numero d’individui in specie animali conviventi (Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically), *Memorie della R. Accademii dei Lincei*, 2, 85, 1926.
Also in *Nature*, 118, 558-560, 1926
Lotka AJ. Letter, *Nature*, 119, 12, 1927

Lotka-Volterra模型

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

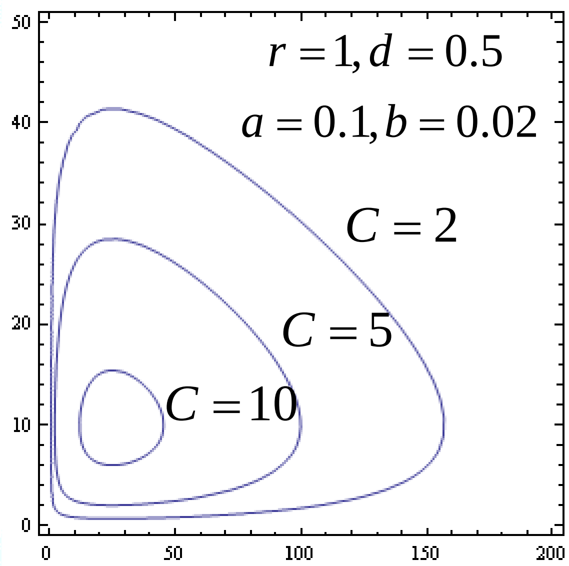
- **Lotka-Volterra模型**
  - 记 $x(t), y(t)$分别为 t 时刻食用鱼（食饵）和鲨鱼（捕食者）的种群数量
  - 由于海洋资源丰富，食用鱼独立生存时以常数增长率增长；鲨鱼的存在使食用鱼增长率减少，程度与鲨鱼数量呈正比
  - 鲨鱼缺乏食用鱼时死亡率为常数；食用鱼的存在使鲨鱼死亡率降低，程度与食饵数量呈正比
  - $\frac{dx}{dt} = rx - axy$，$\frac{dy}{dt} = -dy + bxy$

Lotka-Volterra模型

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

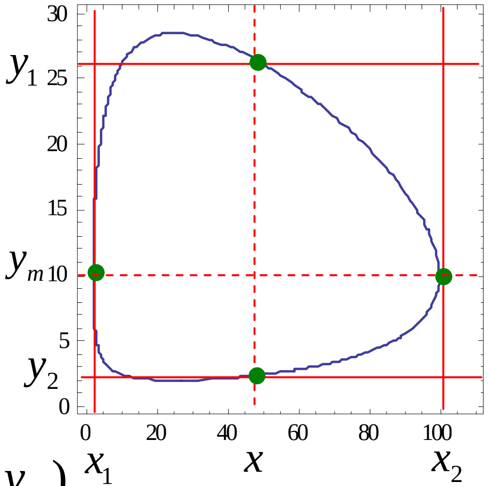
- 相轨线
  - $\frac{dx}{dy}=\frac{x(r-ay)}{y(-d+bx)} \Rightarrow \frac{-d+bx}{x}dx=\frac{r-ay}{y}dy$
    $\Rightarrow -d\ln x+bx=r\ln y-ay+c$
    $\Rightarrow (x^d e^{-bx})(y^r e^{-ay})=C$
  - 若 $x(0)=x_0, y(0)=y_0$，则 $C=(x_0^d e^{-bx_0})(y_0^r e^{-ay_0})$
  - 令 $f(x)=x^d e^{-bx}$，$f(x)$ 在 $x_m=\frac{d}{b}$ 处取得极大值 $f_{\max}$；令 $g(y)=y^r e^{-ay}$，$g(y)$ 在 $y_m=\frac{r}{a}$ 处取得极大值 $g_{\max}$
  - $0\le C=f(x)g(y)\le f_{\max}g_{\max}$，若 $C=f_{\max}g_{\max}$，则 $x=x_m, y=y_m$，相轨线退化为点 (x_m, y_m)

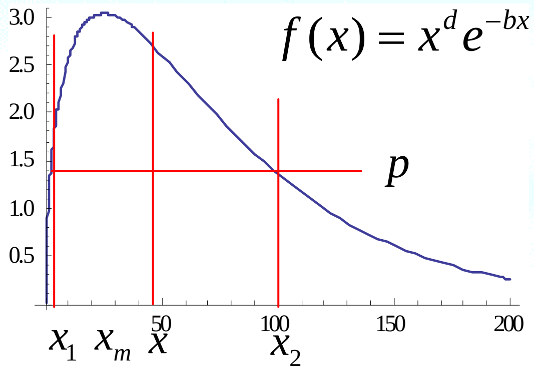


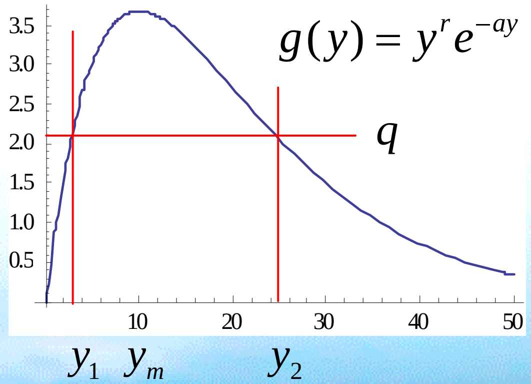
$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}= rx-axy\\ \frac{dy}{dt}=-dy+bxy\end{cases}$$

Lotka-Volterra模型

- 相轨线
  - 任取 $0<C<f_{\max}g_{\max}$，
    记 $p=\dfrac{C}{g_{\max}}<f_{\max}$，则存在 x_1,x_2，$x_1<x_m<x_2$
    且 $f(x_1)=f(x_2)=p$，相轨线通过点 $(x_1,y_m),(x_2,y_m)$
  - 对任一 $x\in(x_1,x_2)$，$f(x)>p$。记 $q=\dfrac{C}{f(x)}$，
    则 $q=\dfrac{pg_{\max}}{f(x)}<g_{\max}$，存在 $y_1,y_2,y_1<y_m<y_2$，
    且 $g(y_1)=g(y_2)=q$，相轨线通过点 $(x,y_1),(x,y_2)$



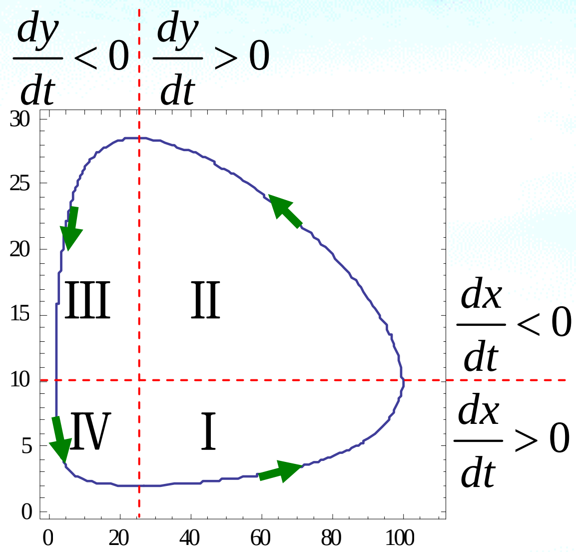


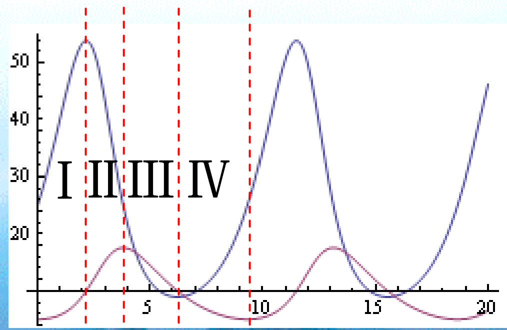


$$\boxed{(x^d e^{-bx})(y^r e^{-ay})=C}$$

Lotka-Volterra模型

- 相轨线
  - 对任意 C，相轨线是一条封闭曲线。当 C 自 $f_{\max} g_{\max}$ 开始逐渐变小时，相轨线从退化点 (x_m, y_m) 开始不断向外扩展
  - 函数 $x(t), y(t)$ 均为周期函数，记周期为 T
  - 直线 $x = x_m, y = y_m$ 将相轨线分为四段，各段内 $\frac{dx}{dt}$ 和 $\frac{dy}{dt}$ 符号不全相同，由此可确定轨线的方向和 $x(t), y(t)$ 的增减性
  - 在一个周期内食饵先于捕食者到达最大值或最小值





$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx - axy \\ \frac{dy}{dt} = -dy + bxy \end{cases} \qquad x_m = \frac{d}{b} \qquad y_m = \frac{r}{a}$$

Lotka-Volterra模型

浙江大学 ZheJiang University 数学建模

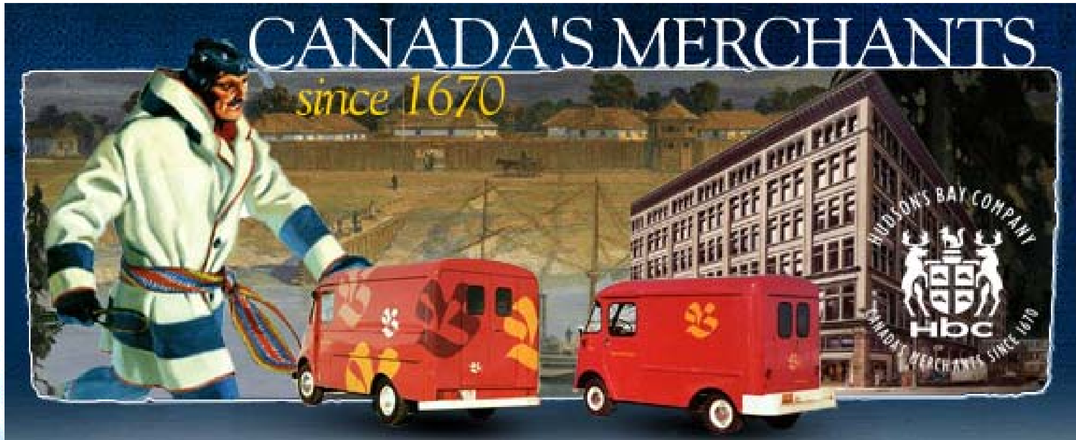
- 一周期平均值
  - $x(t)=\frac{1}{by(t)}\frac{dy}{dt}+\frac{d}{b}$，$\bar{x}=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt=\frac{1}{T}\left(\frac{1}{b}\ln y(t)+\frac{d}{b}t\right)\Big|_0^T=\frac{d}{b}$
  - $y(t)=-\frac{1}{ax(t)}\frac{dx}{dt}+\frac{r}{a}$，$\bar{y}=\frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt=\frac{1}{T}\left(-\frac{1}{a}\ln x(t)+\frac{r}{a}t\right)\Big|_0^T=\frac{r}{a}$

$$\boxed{\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=rx-axy\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-dy+bxy\end{cases}}$$

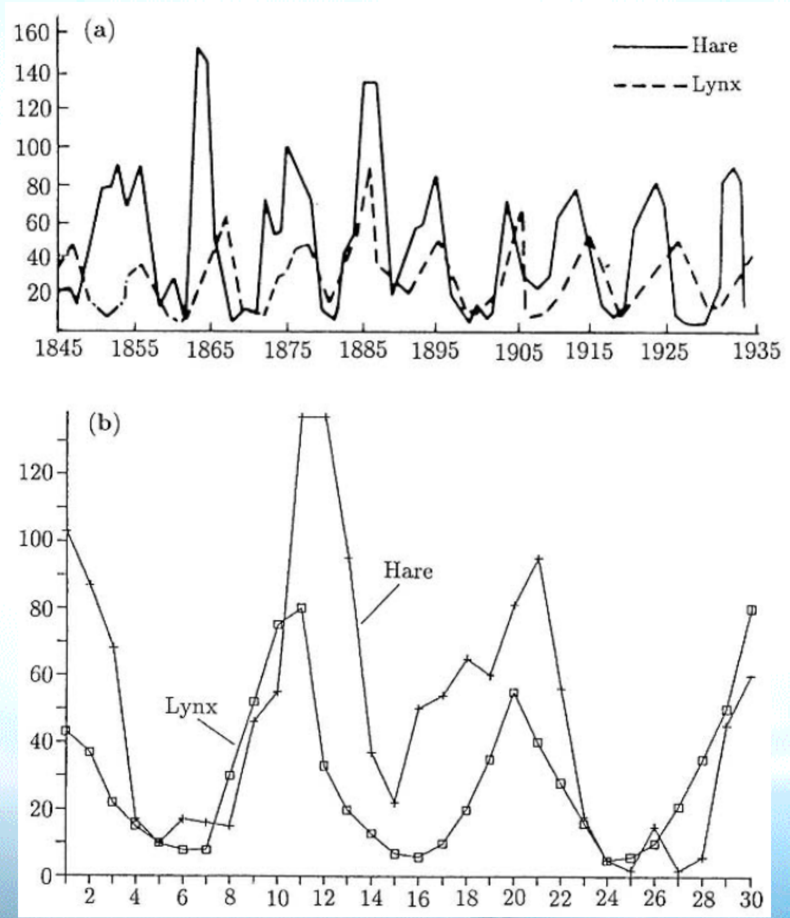
- 捕捞
  - 设捕捞系数为 e，即由于捕捞，食用鱼增长率由 r 下降为 $r-e$，鲨鱼死亡率由 d 上升为 $d+e$，则 $\bar{x}(e)=\frac{d+e}{b}>\bar{x}(0),\bar{y}(e)=\frac{r-e}{a}<\bar{y}(0)$
    - 当捕捞系数减小时，鲨鱼所占比例增加
  - 害虫和它的天敌益虫构成食饵—捕食者系统。如果一种杀虫剂杀死益虫和害虫的效力相当，长期使用将导致害虫增加

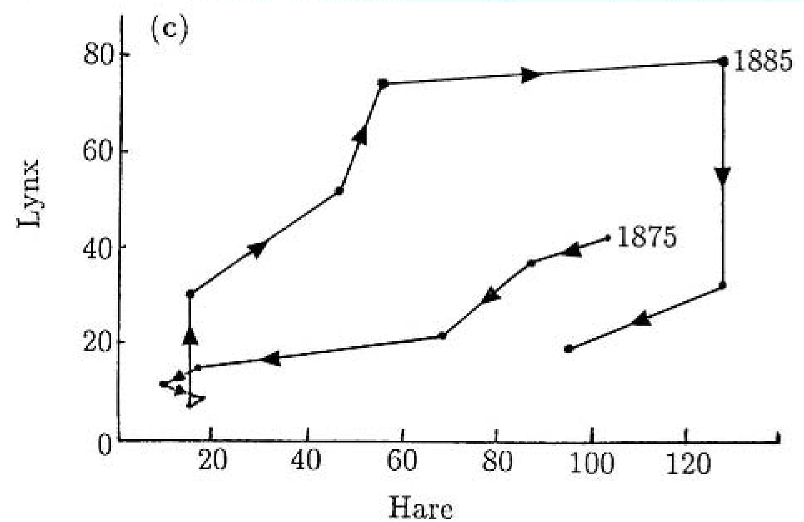
山猫与野兔

- **加拿大Hudson Bay Company**长期从事皮毛贸易，存有**1845－1930**年在北美捕获的**Lynx canadensis**和**Lepus americanus (snowshoe hare)**两种动物的数量数据。这组数据常被用来分析捕食者－食饵系统



山猫与野兔





顺时针！野兔吃山猫？

（a）1845－1935年山猫，野兔－时间图

（b）1875－1904年山猫，野兔－时间图

（c）1875－1904年山猫－野兔图

（单位均为千只）

一般双种群模型

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a_{10} + a_{11}x + a_{12}y) \\ \dfrac{dy}{dt} = y(a_{20} + a_{21}x + a_{22}y) \end{cases}$$

- 一般双种群模型
  - 种群 X,Y 的增长率 a_{10}, a_{20}
    - $a_{10} > 0$ 表示 X 可依靠系统外食物为生
    - $a_{20} < 0$ 表示 Y必须依赖X 为食才能生存
  - 种群 X,Y 的密度制约项 a_{11}, a_{22}
    - $a_{11} = 0$ 表示 X是非密度制约的
    - $a_{11} < 0$ 表示 X是密度制约的
  - 种间关系
    - 利用（**Exploitation**）：$a_{12} < 0, a_{21} > 0$
      - X 为食饵，Y为捕食者，X 为寄主，Y 为寄生物
    - 种间竞争（**Interspecific competition**）：$a_{12} < 0, a_{21} < 0$
    - 共生（**Mutualism**）：$a_{12} > 0, a_{21} > 0$


浙江大学
ZheJiang University
谢 谢