2015中科院高等代数试题与解答

morrismodel

January 6, 2015

1. 设$x_1, x_2, \cdots, x_n$两两相异, $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$.

$$s_k = x_1^k + x_1^k + \cdots + x_n^k.$$

求证: (1) $f'(x)^2 - f(x)f''(x)$无实根;

(2) 如果:

$$x^{k+1}f'(x) = (s_0x^k + s_1x^{k-1} + \cdots + s_k)f(x) + g(x),$$

则$g(x)$次数小于n.

证. (1) 容易知道当$x \neq x_1, x_2, \cdots, x_n$时,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x - x_j}.$$

两边关于x求导,

$$\frac{f''(x)f(x) - f'(x)^2}{f(x)^2} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(x-x_j)^2}.$$

因而

$$f'(x)^2 - f(x)f''(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(\prod_{i \neq j} (x - x_i)^2 \right) > 0.$$

显然上式当$x = x_1, x_2, \cdots, x_n$时也成立, 从而$f'(x)^2 - f(x)f''(x)$无实根.

(2) 当$x \neq 0, x_1, x_2, \cdots, x_n$时,

$$\begin{aligned} g(x) &= x^{k+1} f'(x) - (s_0 x^k + s_1 x^{k-1} + \cdots + s_k) f(x) \\ &= x^{k+1} f(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x - x_j} - \sum_{l=0}^{k} \sum_{j=1}^{n} x_j^l x^{k-l} f(x) \\ &= x^{k+1} f(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x - x_j} - x^k f(x) \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=0}^{k} (\frac{x_j}{x})^l \\ &= f(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{x^{k+1}}{x - x_j} - x^k f(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{1 - (\frac{x_j}{x})^{k+1}}{1 - \frac{x_j}{x}} \\ &= f(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{x^{k+1}}{x - x_j} - f(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{x^{k+1} - x_j^{k+1}}{x - x_j} \\ &= f(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^{k+1}}{x - x_j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(x_j^{k+1} \prod_{i \neq j} (x - x_i) \right). \end{aligned}$$

显然上式当$x = 0, x_1, x_2, \cdots, x_n$时也成立, 从而

$$\deg\ g < n.$$

□

2. $A_n = (a^{|i-j|})_{n \times n}$, 求$|A_n|$和$|A_n^*|$

解. 如果$n = 1$, 则$|A_n| = |A_n^*| = 1$.

如果$n \geq 2$, 第二行乘以$-a$加到第一行, 第三行乘以$-a$加到第二行, 依此下去, 以3阶为例,

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 - a^2 & 0 & 0 \\ a - a^3 & 1 - a^2 & 0 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix}.$$

所以$|A_n| = (1 - a^2)^{n-1}$. 当$a \neq \pm 1$时,

$$A_n^* = |A_n| A_n^{-1} \Rightarrow |A_n^*| = (1 - a^2)^{(n-1)^2}.$$

当$a=\pm1$时,
$$A_n^*A_n=0.$$
因为A_n有非零列向量, 所以A_n^*奇异, 所以总有:
$$|A_n^*|=(1-a^2)^{(n-1)^2}.$$

□

3.
$$A=\begin{pmatrix}a&0&1\\-2&0&1\\2&b&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&0&c\\2&b&1\end{pmatrix}.$$
(1) a,b,c为何值时, $AB=BA$.
(2) $AB=BA$时, 求A,B的公共单位特征向量.

解. (1) 简单计算可知:
$$AB=\begin{pmatrix}2a+2&b-a&1\\-2&2+b&1\\2&-2-b&bc-1\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}2a+2&0&1\\2c&bc&-c\\2a-2b+2&b&1+b\end{pmatrix}.$$
由$AB=BA$可知:
$$a=b=c=-1.$$

(2) 设公共的单位特征向量为$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, 且
$$\begin{pmatrix}-1&0&1\\-2&0&1\\2&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2&-1&0\\0&0&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$
则:
$$C\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}-1-\lambda&0&1\\-2&-\lambda&1\\2&-1&-1-\lambda\\2-\mu&-1&0\\0&-\mu&-1\\2&-1&1-\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0.$$

因为:

$$\det\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -\mu & -1\end{pmatrix}=1.$$

所以C的第二列和第三列线性无关, 又$Cw=0$有非零解, 所以第一列可由第二列与第三列线性表出. 注意到第二列的第一个元素为0, 第三列的第四个元素为0, 所以第二列和第三列线性组合时, 系数分别为$\mu-2$和$-(1+\lambda)$. 因而:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\ 2-\mu\\ 1+\lambda\end{pmatrix}.$$

且

$$\begin{cases}-1-\lambda+1+\lambda=0,\\ -2-\lambda(2-\mu)+1+\lambda=0,\\ 2-(2-\mu)-(1+\lambda)^2=0,\\ 2-\mu-(2-\mu)=0,\\ 0-\mu(2-\mu)-(1+\lambda)=0,\\ 2-(2-\mu)+(1-\mu)(1+\lambda)=0.\end{cases}$$

解得:

$$\begin{cases}\lambda=-1,\\ \mu=0.\end{cases}\text{或者}\begin{cases}\lambda=\dfrac{-1+\sqrt5}{2},\\ \mu=\dfrac{3+\sqrt5}{2}.\end{cases}\text{或者}\begin{cases}\lambda=\dfrac{-1-\sqrt5}{2},\\ \mu=\dfrac{3-\sqrt5}{2}.\end{cases}$$

所以公共的单位特征向量为:

$$\pm\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix},\pm\frac14\begin{pmatrix}2\\ 1-\sqrt5\\ 1+\sqrt5\end{pmatrix},\pm\frac14\begin{pmatrix}2\\ 1+\sqrt5\\ 1-\sqrt5\end{pmatrix}.$$

□

4. $A^2=-E$, 则$\operatorname{rank}(A+iE)$与$\operatorname{rank}(A+iE)$满足什么关系, 并证明之.

证. 作分块初等变换:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} A-iE & \\ & A+iE \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} A-iE & A+iE \\ & A+iE \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} -2iE & A+iE \\ -A-iE & A+iE \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} E & \frac{i}{2}A-\frac{1}{2}E \\ -A-iE & A+iE \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} E & \frac{i}{2}A-\frac{1}{2}E \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

因而

$$\mathrm{rank}(A+iE)+\mathrm{rank}(A+iE)=n.$$

□

5.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

求A^{2015}.

解. 取

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

则

$$A=P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

$$A^{2015}=P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2015}P^{-1}=P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2015 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix} -4029 & -4030 & 12090 \\ -2015 & -2014 & 6045 \\ -2015 & -2015 & 6046 \end{pmatrix}.$$

□

6. A, B无公共特征根, $f(\lambda)$为A的特征多项式. 证明:
(1) $f(B)$可逆;
(2) $AX = XB$只有零解.

证. (1) 对任何B的特征值λ, $f(\lambda) \neq 0$, 从而$f(B)$的特征值皆不为0, 所以$f(B)$可逆.

(2)
$$A^n X = XB^n \Rightarrow 0 = f(A)X = Xf(B).$$
因为$f(B)$可逆, 所以$X = 0$. □

7. V上两个线性变换f, g满足: $\ker f \subset \ker g$. 求证:
(1) 存在线性变换h, 使得: $g = hf$;
(2) 若$\ker f = \ker g$, 则存在可逆线性变换h, 使得: $g = hf$.

证. (1) 设$\ker f = \{e_1, \cdots, e_k\}$, 取 $\mathrm{Im} f$的一组基:
$$\{f(e_{k+1}), \cdots, f(e_{k+m})\}.$$
因为$\dim V = k + m$. 如果:
$$c_1 e_1 + \cdots + c_k e_k + c_{k+1} e_{k+1} + \cdots + c_{k+m} e_{k+m} = 0.$$
两边作用f,
$$c_{k+1} f(e_{k+1}) + \cdots + c_{k+m} f(e_{k+m}) = 0 \Rightarrow c_{k+1} = \cdots = c_{k+m} = 0.$$
代回去可进一步得到:
$$c_1 = \cdots = c_k = 0.$$
所以
$$\{e_1, \cdots, e_k; e_{k+1}, \cdots, e_{k+m}\}$$
是V的一组基. 定义:
$$h(f(e_{k+l})) = g(e_{k+l}), \quad l = 1, 2, \cdots, m.$$
我们先说明这样定义是合理的, 因为若$f(u) = f(v)$, 则
$$u - v \in \ker f \subset \ker g \Rightarrow g(u) = g(v).$$

这样h在V的线性子空间 $\mathrm{Im} f$上有定义, 将 $\mathrm{Im} f$的基$\{f(e_{k+1}),\cdots,f(e_{k+m})\}$扩充为$V$的一组基:

$$\{f(e_{k+1}),\cdots,f(e_{k+m});u_1,u_2,\cdots,u_k\}.$$

定义:

$$h(u_j)=0,\quad j=1,2,\cdots,k.$$

再按线性展开可将h定义为V上一个线性变换. 因为:

$$h(f(e_{k+l}))=g(e_{k+l}),\quad l=1,2,\cdots,m.$$

又

$$h(f(e_j))=0=g(e_j),\quad j=1,2,\cdots,k.$$

所以$g=hf$.

(2) 在(1)证明过程中, 我们仍定义

$$h(f(e_{k+l}))=g(e_{k+l}),\quad l=1,2,\cdots,m.$$

可知这样定义合理. 下证$\{g(e_{k+1}),\cdots,g(e_{k+m})\}$也是线性无关的. 若否, 则存在不全为0的数$c_{k+1},\cdots,c_{k+m}$使得:

$$c_{k+1}g(e_{k+1})+\cdots+c_{k+m}g(e_{k+m})=0.$$

$$c_{k+1}e_{k+1}+\cdots+c_{k+m}e_{k+m}\in\ker g=\ker f.$$

从而:

$$c_{k+1}f(e_{k+1})+\cdots+c_{k+m}f(e_{k+m})=0.$$

矛盾. 所以可将$\{g(e_{k+1}),\cdots,g(e_{k+m})\}$扩充为$V$的一组基:

$$\{f(e_{k+1}),\cdots,f(e_{k+m});v_1,v_2,\cdots,v_k\}.$$

定义:

$$h(u_j)=v_j,\quad j=1,2,\cdots,k.$$

这样就得到了一个可逆线性变换h, 且仍满足$g=hf$. □

8. V是n维复向量空间, $(\cdot,\cdot):V\times V\to\mathbb{C}$是反对称的非退化双线性型, $\varphi:V\to V$是一个线性变换, 满足:

$$(\varphi(u),\varphi(v))=(u,v),\quad\forall u,v\in V.$$

求证:

(1) $\dim V$是偶数;
(2) φ是可逆的;
(3) 若λ是φ的特征值, 则$\frac{1}{\lambda}$也是φ的特征值.

证. (1) 设$\{e_i\}_{1\le i\le n}$是V的一组基. 记

$$A = ((e_i, e_j))_{n\times n}.$$

则$A^T = -A$. 若$\dim V$是奇数, 则

$$\det A = \det A^T = \det(-A) = (-1)^n \det A \Rightarrow \det A = 0.$$

这与$(\cdot,\cdot)$非退化性矛盾, 所以$\dim V$是偶数.

(2) 反设φ不可逆, 则存在非零的v_0使得$\varphi(v_0) = 0$, 从而:

$$(u, v_0) = (\varphi(u), \varphi(v_0)) = 0, \quad \forall u \in V.$$

设

$$v_0 = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k.$$

其中c_k不全为0, 则

$$\sum_{k=1}^{n} (u, e_k) c_k = 0, \quad \forall u \in V.$$

从而

$$\sum_{k=1}^{n} (e_i, e_k) c_k = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

即

$$A \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0.$$

这又与$(\cdot,\cdot)$非退化性矛盾.

(3) 设φ在基$\{e_i\}_{1\le i\le n}$下的表示矩阵为B, 则

$$\varphi(e_k) = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} e_j \Rightarrow (\varphi(e_k), \varphi(e_m)) = \sum_{j,l=1}^{n} b_{jk} (e_j, e_l) b_{lm} = (e_k, e_m).$$

所以$B^T AB = A$. 设$B\alpha = \lambda\alpha$, 则由φ是可逆的知$\lambda \neq 0$. 又$\alpha \neq 0 \Rightarrow A\alpha \neq 0$.

$$B^T AB\alpha = A\alpha \Rightarrow B^T A\alpha = \frac{1}{\lambda} A\alpha.$$

所以$\frac{1}{\lambda}$是B^T的特征值, 从而也是B的特征值. $\square$