证明确界定理：

设 $S\subset\mathbb{R}$ 且 S 非空. 证明 S 有上界时一定有上确界:

proof: $\forall x\in\mathbb{R}$. $x=[x]+(x)$

$S=\{a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots \mid a_0=[x],\ (x)=a_1\cdots a_n\cdots\ a_i\in\{0,1,2\cdots 9\}\}$.

step①: $S_0=\{x\mid x\in S$ 且 $[x]=\alpha_0$, α_0 为 S 中元的整数部分的最大者$\}$

由于 S 有上界. 则 α_0 存在. 即 $S_0\neq\emptyset$. 则 $\forall x\in S\wedge x\notin S_0$. 则 $x<\alpha_0$.

step②: $S_1=\{x\mid x\in S_0$ 且 x 的第一位小数为 α_1. 其中 α_1 为 S_0 中元的第一位小数的最大者$\}$.

α_1 存在. 故 $S_1\neq\emptyset$ 且 $\forall x\in S_0\wedge x\in S_1$. 则 $x<\alpha_0.\alpha_1$

依此类推. 构造出 S_n

得到一列 S 序列 $S\supset S_0\supset S_1\supset\cdots\supset S_n\supset\cdots$ 且得到一列 $\alpha_0.\alpha_1\cdots\alpha_n\cdots$

step③. 令 $\beta=\alpha_0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots$. 下证 β 是 S 的上确界.

1° $\forall x\in S$. 将 x 分为两种: case.1: $\exists n_0\geq 0$. s.t. $x_0\notin S_{n_0}$

(β是上界) case.2: $\forall n\in\mathbb{N}$, $x\in S_n$

case.1: $x\in S_{n_0}$. $\Rightarrow x<\alpha_0+0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n_0}\leq\beta$

case.2: $\forall n$. $x\in S_n \Rightarrow x=\alpha_0.\alpha_1\cdots\alpha_n\cdots=\beta$

2°. (β是最小上界). $\forall\varepsilon>0$. 取足够大 n_0, s.t. $\frac{1}{10^{n_0}}<\varepsilon$

取 $x_0\in S_{n_0}\subset S$, 则 β 与 x_0 前 n_0+1 位相同.

则 $\beta-x_0\leq\frac{1}{10^{n_0}}<\varepsilon$

下证上确界唯一:

设 $a.b.$ 都是 S 的上确界 (不妨设 $a<b$).

取 $\varepsilon=\frac{b-a}{2}$ 对于 $b-\varepsilon$. $\exists x_0\in S$, s.t. $x_0>b-\varepsilon=a+\varepsilon$.

与 a 是 S 上确界矛盾!

Dedekind 切割定理

Def 1. 设 $A, B \subset \mathbb{Q}$ 且 A, B 非空. 且 $\begin{cases} \mathbb{Q} = A \cup B \\ \forall a \in A, \forall b \in B \text{ 有 } a < b \end{cases}$

称 A, B 是 $\mathbb{Q}$ 的一个分割, 记为 $A|B$

分类: 从逻辑上只有四种情况

(1) A 有最大数 a_0, B 中无最小数 (1.0) 型

(2) ... 没有 ---- ---, ... 有 ... b_0 (0.1) 型

(3) ... 没有 ---- , ... 没有 --- (0.0) 型

(4) ... 有 --- a_0, --- 有 --- b_0 (1.1) 型 (不可能) 否则 $\frac{a_0+b_0}{2}$ 不在 A, 也不在 B 中.

for (1.0) 型, 确定了有理数 a_0.

for (0.1) 型. 确定有理数 b_0.

for (0.0) 型. 引入一个新的数称之为一个无理数.

Def. 2. 设 $A, B \subset \mathbb{Q}$. $A \cup B = \mathbb{Q}$. 且 A 中元均小于 B 中元.

则若 A 中无最大数. B 中无最小数. 称切割 $A|B$ 确定一个无理数 c.

s.t. $\forall a \in A, b \in B$. $a < c < b$.

Def.3 实数集R：由有理数和Def.2确定的无理数全体组成.

Def.4. A/B是R的一个切割. 若 $A\cup B=R \wedge \forall a\in A, b\in B$, $a<b$

Dedekind Th：则或A中有最大数，或B中有最小数. (1.0)或(0.1).

proof：设 $\bar{A}=\{x \mid x\in A\cap Q\}$. $\bar{B}=\{x \mid x\in B\cap Q\}$.

则可证明. $\bar{A}/\bar{B}$ 构成Q的一个切割. 只有 $\begin{cases}(1.0)\\(0.1)\\(0.0)\end{cases}$ 三种 type

for case.1：$\bar{A}$中有最大数 a_0. 则 a_0是A最大数，且B中无最小数

1° 反设 a_0不是A最大数. 则有 $a\in A$. $a_0<a$. 那么 $\frac{a_0+a}{2}\in Q$.

且 $\frac{a_0+a}{2}\in A$. 则 $\frac{a_0+a}{2}\in\bar{A}$. 但 $a_0<\frac{a_0+a}{2}$. 矛盾！

2°. 下证B中无最小数. $\forall b\in\bar{B}$. $a_0<b$ (严格小)

对于, $\exists b'\in Q$ 且 $b'\in(a_0,b)$. 则 $b'\in B$ 故B无最小数.

for case. 2：同上理

for case. 3. $\bar{A}/\bar{B}$确定了一个无理数 c. $\forall a\in\bar{A}$, $b\in\bar{B}$. $a<c<b$.

又 $c\in R$. 则对应切割 A/B. 则或 $c\in A$或 $c\in B$.

若 $c\in A$. 则 c是A最大元. 若否. 则 $\exists a'\in A$. s.t. $c<a'$.

则 $\exists\bar{a}\in Q$且 $\bar{a}\in(c,a')$. 则 $\bar{a}\in\bar{A}$. 与 case3 矛盾！

若 $c\in B$. 同理

Dedekind Th $\Rightarrow$ 确界存在定理.

proof: $S \neq \emptyset$. 且有上界. 设 $B = \{y \mid y > t, t \in S\}$. 设 $A = \mathbb{R} \setminus B$.

易知 A/B 是 $\mathbb{R}$ 的一个切割

下证 A 中无最大数 (从而 B 中有最小数).

即证 $\forall x \in A$. x 不是 A 的最大元.

$\exists t_0 \in S$. s.t. $t_0 > x$ 即 x 不是 S 上界. 取 $\frac{x+t_0}{2}$, 则 $\frac{x+t_0}{2} > x$. 证毕