

一、学校希望从  $n$  名学生中录取一名，学生以随机顺序逐个前来面试。通过面试可给出已面试者的综合素质高低顺序，某位学生是否被录取须在该学生面试后立即决定，在作出录取决定后方能面试下一名学生。考虑到最优秀的学生可能在录取后选择其他学校，学校希望录取到所有考生中综合素质第二名的学生的概率尽可能大。

(1) 分别记  $f_k$  和  $g_k$  为综合素质在前  $k$  名面试的学生中居于第一名和第二名的学生在所有学生中居于第二名的概率。求  $f_k$  和  $g_k$ ；

(2) 记  $v_k$  为不录取前  $k$  名学生后，采用最优策略可能录取到综合素质第二名的学生的概率的最大值。试写出  $v_k$  满足的递推关系；

(3) 求  $v_k$ ，并给出相应的最优策略。

二、 $n$  名求职者应聘某一职位。他们能力各不相同，以某一顺序接受面试，该顺序以完全随机的方式确定。招聘方能准确比较已面试求职者的能力大小。在面试完一位求职者后，招聘方需立即决定是否有意录用。若有意，求职者以  $p$  的概率接受而被录用，每位求职者是否接受意向相互独立。若招聘方没有意向，或招聘方虽有意但求职者拒绝接受，招聘方均面试下一位求职者。此后招聘方不得录用该求职者，该求职者也不得再接受此前拒绝的意向。招聘方希望录用到能力最强的求职者，因此只会对能力大于已面试过的其他求职者的求职者提出意向。

(1) 试求出招聘方对第  $r$  名接受面试的求职者提出意向并被接受，而该求职者恰为能力最强的求职者的概率；

(2) 记  $v_r$  为从招聘方面面试第  $r$  名求职者起，采用最优策略以录用到能力最强的求职者的概率的最大值。试写出  $v_r$  满足的递推关系；

(3) 求  $v_r$  的表达式与  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_1$ ，并给出招聘方最优策略的具体描述。