1. 某种疾病从感染到发病有潜伏期. 以$N(t)$表示$(0,t]$感染人数. 假设$\{N(t);t\geq 0\}$是参数为λ的泊松过程. 每个感染者潜伏期独立(也独立于$\{N(t)\}$)同具有密度函数$f(x)=2x1_{(0,1)}(x)$. 计算:

(1) 第一个发病者发病时间的密度函数;

(2) $(0,t]$有1人发病, 有2人感染不发病的概率.

2. 独立重复掷骰子，令 X_n 表示第 n 次得到的点数，令 $Y_n = \max(X_{n+1}, X_{n+2})$,

(1) 计算 $P(Y_2 = 1|Y_0 = 1, Y_1 = 6)$, $P(Y_2 = 1|Y_1 = 6)$;

(2)判断 $\{Y_n\}$ 是否具有 Markov 性？说明理由.

3. 设 X_n 是一维随机游动，一步转移概率为 $p_{i,i+1} = p, p_{i,i-1} = q = 1 - p, 0 < p < 1, i = \cdots, -1, 0, 1, \cdots$. 设 $P(X_0 = 0) = P(X_0 = 2) = \frac{1}{2}$.

(1) 计算 $P(X_2 = 4)$ 和 $P(X_2 = 4|X_0 = 0)$, 将来 X_2 与过去 X_0 独立吗？

(2) 计算 $P(|X_2| = 2||X_0| = 2, |X_1| = 1)$ 和 $P(|X_2| = 2||X_0| = 0, |X_1| = 1)$.

(3) 若 $p \neq \frac{1}{2}$, 判断 $\{|X_n|\}$ 是否具有 Markov 性？ 说明理由.

4. (传染模型) 有 N 个人及某种传染病. 假设:

(1) 患病者不会康复, 健康者如果不与患病者接触, 则不会得病;

(2) 当健康者与患病者接触时, 被传染上病的概率为 p;

(3) 在每个单位时间内此 N 人中恰好有两人互相接触, 且一切成对的接触是等可能的.

以 X_n 表示在时刻 n 患病的人数. ~~说明~~则 $\{X_n\}$ 是一个时齐 Markov 链, 写出状态空间和一步转移概率.