集合与实数集

luojunxun

2023 年 3 月 12 日

映射

(映射):X,Y 是两个集合, 在其中定义了一个关系 f, 使得 $\forall x \in X, \exists! y \in Y, s.t. x \to y$

y 是 x 在 f 下的像,x 是 y 在 f 下的原像

满射:$\forall y \in Y, \exists x \in X, s.t. y = f(x)$ 称 f 是一个满射, 或者完全映射

单射:$\forall x_1 \neq x_2, f(x_1) \neq f(x_2)$ 称 f 是一个单射 (或者一一映射, 这里和数分的说法有矛盾, 数分的一一映射指的是这里的双射)

双射: 既是单射又是满射;

$A \subset X.B \subset Y$ 有:

1.$f(A) = \{f(x)|x \in A\} \subset Y$ 称为 A 在 f 下的像

2.$f^{-1}(B) = \{x \in X|f(x) \in B\} \subset X$ 称为 B 在 f 下的原像

映射性质: 复合映射, 复合映射满足交换律

Theorem 定理: $f: X \to Y, \Gamma$ 是指标集

1.$f(\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$ $\quad f(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) \subset \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$

2.$B_1 \subset B_2 \subset Y \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$

3.$f^{-1}(\bigcup\limits_{\beta\in\Gamma} B_\gamma) = \bigcup\limits_{\beta\in\Gamma} f(B_\gamma)$

$4.f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$

Proof:[1 的证明] $y \in f(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) \iff \exists x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma, s.t. y = f(x) \iff \exists \gamma_0 \in \Gamma, s.t. x \in A_{\gamma_0} \iff y = f(x) \in f(A_{\gamma_0}) \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$ 得证

$y \in f(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) \iff \exists x \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma, s.t. y = f(x) \Rightarrow \quad \forall \gamma \in \Gamma, \exists x_\gamma \in A_\gamma s.t. y = f(x_\gamma) \Rightarrow \forall \gamma \in \Gamma, y \in f(A_\gamma) \Rightarrow y \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$

(这里的不等号主要是因为 f 不一定是单射, 第一个推出符号拉回来的时候 A_γ 可以没有公共的 x_γ)

其他的证明是平凡的

特征函数

($\mathcal{X}_A(x)$): $A \subset X : \mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in X - A \end{cases}$

Theorem 性质:

$$\textit{1. 集合相等当且仅当他们的特征函数相等}$$

$$2. A \subset B \to \mathcal{X}_A(x) \le \mathcal{X}_B(x)$$

$$3. \mathcal{X}_{A\cap B}(x) = \mathcal{X}_A(x)\mathcal{X}_B(x)$$

$$4. \mathcal{X}_{A\cup B}(x) = \mathcal{X}_A(x) + \mathcal{X}_B(x) - \mathcal{X}_{A\cap B}(x)$$

$$5. \mathcal{X}_{A-B}(x) = \mathcal{X}_A(x)(1 - \mathcal{X}_B(x))$$

$$6. \mathcal{X}_{A\Delta B}(x) = |\mathcal{X}_A(x) - \mathcal{X}_B(x)|$$

$$7. \mathcal{X}_{\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n}(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathcal{X}_{A_n}(x)$$

$$8. \mathcal{X}_{\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n}(x) = \underline{\lim}_{n\to\infty} \mathcal{X}_{A_n}(x)$$

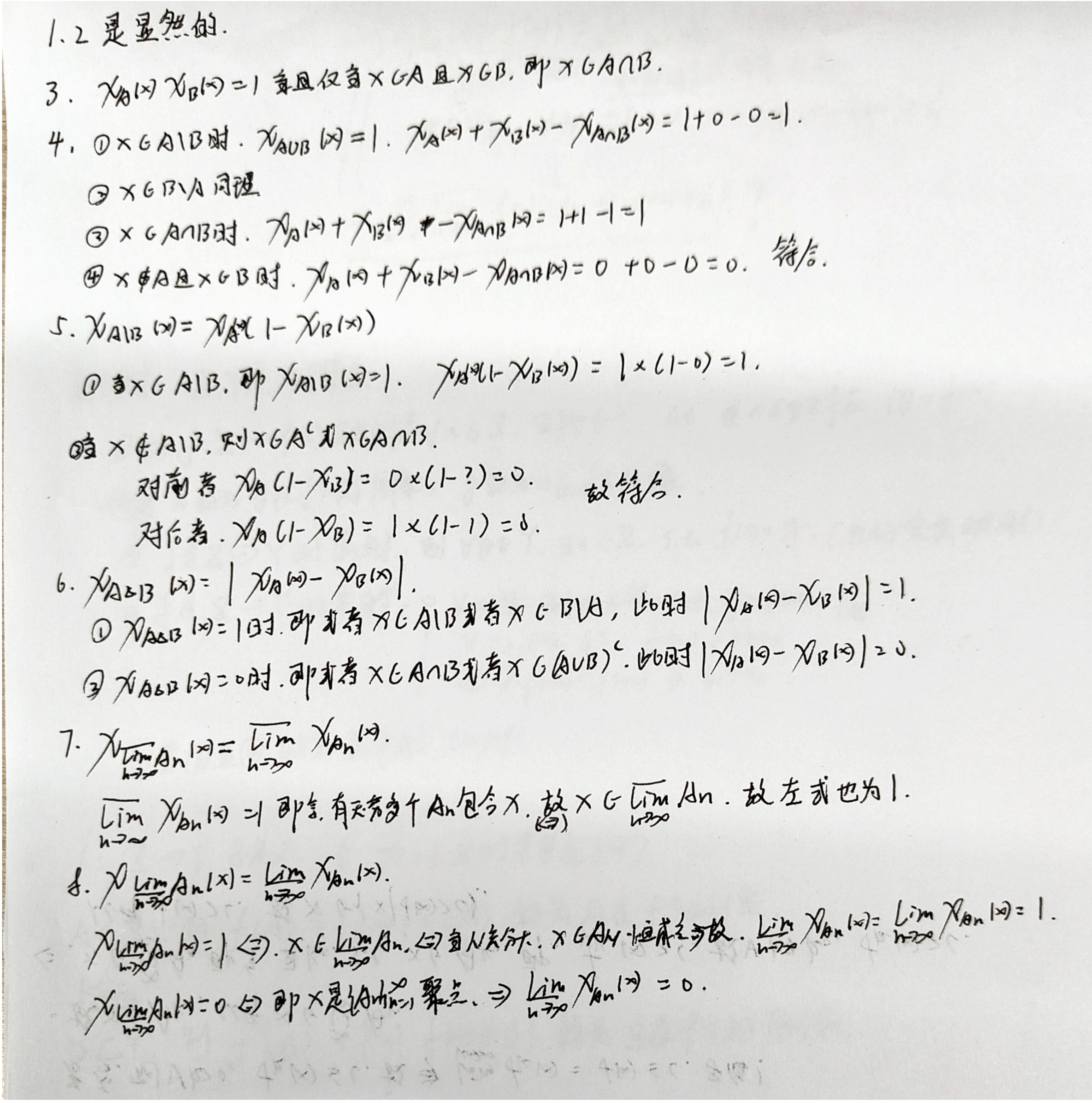
证明在最后手写

集合的等价, 基数 (势)

(集合等价):A 和 B 等价即 A,B 之间存在一个双射; 称 A,B 有相同的基数, 用 $A \sim B$ 表示

Theorem 集族的并的等价: $\{A_\lambda|\lambda \in \Lambda\}, \{B_\lambda|\lambda \in \Lambda\}$ *分别是两个元素两两不交的集族, 如果* $\forall\lambda \in \Lambda, A_\lambda \sim B_\lambda \Rightarrow \bigcup\{A_\lambda|\lambda \in \Lambda\} \sim \bigcup\{B_\lambda|\lambda \in \Lambda\}$

Proof:[集族并的等价] 因为 $\forall\lambda \in \Lambda, A_\lambda \sim B_\lambda$ 故 $\exists f_\lambda$ 是 A_λ 到 B_λ 的双射, 定义 $f; s.t. f_{|A_\lambda} = f_\lambda$ 即可 (这里用到了集族的元两两不交)



1.2 是显然的.

3. $\chi_A(x)\chi_B(x)=1$ 当且仅当 $x\in A$ 且 $x\in B$, 即 $x\in A\cap B$.

4. ① $x\in A\setminus B$ 时. $\chi_{A\cup B}(x)=1$. $\chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_{A\cap B}(x)=1+0-0=1$.

② $x\in B\setminus A$ 同理

③ $x\in A\cap B$ 时. $\chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_{A\cap B}(x)=1+1-1=1$

④ $x\notin A$ 且 $x\notin B$ 时. $\chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_{A\cap B}(x)=0+0-0=0$. 符合.

5. $\chi_{A\setminus B}(x)=\chi_A(x)(1-\chi_B(x))$

① 若 $x\in A\setminus B$, 即 $\chi_{A\setminus B}(x)=1$. $\chi_A(x)(1-\chi_B(x))=1\times(1-0)=1$.

② 若 $x\notin A\setminus B$, 则 $x\in A^c$ 或 $x\in A\cap B$.

对前者 $\chi_A(1-\chi_B)=0\times(1-?)=0$.

对后者. $\chi_A(1-\chi_B)=1\times(1-1)=0$.

故符合.

6. $\chi_{A\Delta B}(x)=|\chi_A(x)-\chi_B(x)|$.

① $\chi_{A\Delta B}(x)=1$ 时. 即或者 $x\in A\setminus B$ 或者 $x\in B\setminus A$, 此时 $|\chi_A(x)-\chi_B(x)|=1$.

② $\chi_{A\Delta B}(x)=0$ 时. 即或者 $x\in A\cap B$ 或者 $x\in(A\cup B)^c$. 此时 $|\chi_A(x)-\chi_B(x)|=0$.

7. $\chi_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n}(x)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\chi_{A_n}(x)$.

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\chi_{A_n}(x)=1$ 即有无穷多个 A_n 包含 x. $\Leftrightarrow$ $x\in\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$. 故左式也为1.

8. $\chi_{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n}(x)=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\chi_{A_n}(x)$.

$\chi_{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n}(x)=1\Leftrightarrow x\in\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n \Leftrightarrow$ 当 N 充分大. $x\in A_N$ 恒成立. 故. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\chi_{A_n}(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)=1$.

$\chi_{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n}(x)=0\Leftrightarrow$ 即 x 是 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 聚点. $\Rightarrow\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\chi_{A_n}(x)=0$.

图 1: 证明