科学计算项目作业 2

罗俊勋

学号:3210101613

2023 年 4 月 23 日

问题

用 $Romberg$ 方法计算积分:$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-x^2}dx$

公式和算法

基于事实: $R(f,T_n)=I-T_n=\alpha_2h^2+\alpha_4h^4+\alpha_6h^6+\cdots$ 把 $[a,b]$ 分成 $n\left(h=\frac{b-a}{n}\right)$ 等份, 用复化梯形公式求得近似值 T_n, 记 $T_0(h)$. 将 $[a,b]$ 分成 $2n$ 等份, 得 T_{2n}, 记 $T_0\left(\frac{h}{2}\right)$. 如此等等, 得到序列 $\left\{T_0\left(\frac{h}{2^k}\right)\right\}$, 应用 Richardson 外推法, 得到 $T_1\left(\frac{h}{2^k}\right), T_2\left(\frac{h}{2^k}\right), \cdots$. 具体实现: 梯形公式用逐次分半法计算，即取 $n=1,2,4,\cdots,2^k,\cdots$, 相应的 $T_0\left(\frac{b-a}{2^k}\right)$ 简记为 $T_0^{(k)}$, 外推 m 次的序列简记为 $T_m^{(k)}$ ，则 $\left(q=\frac{1}{2}\right)$ ，

$$T_1^{(0)}=\frac{4T_0^{(1)}-T_0^{(0)}}{4-1};\quad T_1^{(1)}=\frac{4T_0^{(2)}-T_0^{(1)}}{4-1};$$

一般的计算公式

$$T_m^{(k)}=\frac{4^mT_{m-1}^{(k+1)}-T_{m-1}^{(k)}}{4^m-1}, k=0,1,2,\cdots$$

程序

```
import math

def f(x):
    return math.e**(-x**2)

def T(f,a,b,N):#N=2^N
    global T_lst
    T_lst = {0:(b-a)*(f(a)+f(b))/2}
    n = int(math.log(N,2))
    h = (b-a)/N
    if n==0:
        return T_lst[0]
    else:
        R = 0
        for i in range(1,2**(n-1)+1):
            R += f(a+(2*i-1)*h)
        return 1/2*T(f,a,b,int(N/2))+h*R

def Romberg(f,a,b,N,m):#外推M次
    n = int(math.log(N,2))
    mat_lst = [[T(f,a,b,2**k) for k in range(n+1)]]
    for i in range(m):
        mat_lst.append([0 for k in range(n+1)])
    for row in range(1,m+1):
        for line in range(0,n-row+1):
            mat_lst[row][line] = (4**row*mat_lst[row-1][line+1]-mat_lst[row-1][line])
                /(4**row-1)
    return mat_lst[m][n-m]
print(2/math.sqrt(math.pi)*Romberg(f,0,1,256,8))
```

数据结果

准确值 0.8427007929497149

分别取 N 和外推次数为 (N,m) 时得到的积分值为: $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-x^2}dx|_{(N,m)} = \begin{cases} 0.7717433322580536 & (1,0) \\ 0.8431028300429809 & (2,1) \\ 0.8427115994791153 & (4,2) \\ \vdots & \\ 0.8427007929497152 & (256,8) \end{cases}$

结论

使用 Romberg 方法可以让我们轻松计算一些看起来很”困难”的定积分, 它使得梯形积分收敛速度大大加快, 在本次计算中, 可以发现外推两次的时候数值计算结果就精确到了小数点后 4 位, 外推八次的时候已经精确到了小数点后 14 位, 由此说明 Romberg 方法是一种高效准确的数值积分方法