

第十四周作业

一. 设 $\{X_n; n \geq 0\}$ 是一个时齐的遍历Markov链, 状态空间 I 有限, f 是 I 上的函数. 设 X_0 的分布是平稳分布 π . 令 $Y_n = f(X_n)$.

1. 计算 $\{Y_n; n \geq 0\}$ 的均值函数和自相关函数;
2. 证明 $\{Y_n; n \geq 0\}$ 是宽平稳过程;
3. 当 $N \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N Y_i$ 依概率收敛吗? 如果收敛, 收敛到什么? 需说明理由.

二. 设 X_1, X_2, \dots 相互独立. 对 $i \geq 1$, $E(X_i) = \mu$, $Var(X_i) = \sigma^2$. 令 $Y_n = X_n X_{n+1} X_{n+2}$.

1. 计算 $\{Y_n; n \geq 1\}$ 的均值函数和自相关函数;
2. 证明 $\{Y_n; n \geq 1\}$ 是宽平稳过程;
3. 当 $N \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i$ 依概率收敛吗? 如果收敛, 收敛到什么? 需说明理由.

三. 设 $\{N(t); t \geq 0\}$ 是参数为1的泊松过程, A 与 $\{N(t); t \geq 0\}$ 独立, 且 $A \sim U(0, 1)$. 令 $X(t) = A[N(t+1) - N(t)]$.

1. 计算 $\{X(t); t \geq 0\}$ 的均值函数和自相关函数;
2. 证明 $\{X(t); t \geq 0\}$ 是宽平稳过程;
3. 判断 $\{X(t); t \geq 0\}$ 是否具有均值遍历性. 需说明理由.

四. 设 $X(t) = A \sin(t + \Theta)$, $-\infty < t < \infty$, 其中 A 与 Θ 独立, $P(\Theta = \frac{\pi}{4}) = P(\Theta = -\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$, $A \sim U(-1, 1)$.

1. 计算 $\{X(t); -\infty < t < \infty\}$ 的均值函数和自相关函数;
2. 证明 $\{X(t); -\infty < t < \infty\}$ 是宽平稳过程;
3. 判断 $\{X(t); -\infty < t < \infty\}$ 是否具有均值遍历性. 需说明理由.

五. 设 $X(t) = \sqrt{2}A \cos t + B \sin t$, $-\infty < t < \infty$, 其中 A 与 B 独立, $B \sim U(-1, 1)$, A 具有密度函数

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & -1 < x < 1; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

1. 计算 $\{X(t); -\infty < t < \infty\}$ 的均值函数和自相关函数;
2. 证明 $\{X(t); -\infty < t < \infty\}$ 是宽平稳过程;
3. 判断 $\{X(t); -\infty < t < \infty\}$ 是否具有均值遍历性. 需说明理由.