基数比较

luojunxun

2023 年 4 月 18 日

连续统势

一.n 元数列全体 (A) 具有连续统势:

$$B_{n,m} = \{n\text{元数列}\{a_k\}, k \geq m : a_k = 0\}.\text{ 则 }\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{n,m}\text{为 n 元数列全体}$$

Proof:[n 元数列全体具有连续统势] 证明无限 n 元数列具有连续统势

1. 有限 n 元数列全体可数: 有限集的可数并是可数集

2. 往证无限 n 元数列 $\sim (0,1]$

$$\forall x \in (0,1], \exists ! k_1. s.t. \tfrac{k_1-1}{n} < x \leqslant \tfrac{k_1}{n}$$

取 $a_1 = k_1 - 1$, 又有唯一的 $k_2, s.t. \frac{k_1-1}{n} + \frac{k_2-1}{n^2} < x \leqslant \frac{k_1-1}{n} + \frac{k_2}{n^2}$

取 $a_2 = k_2 - 1$, 以此类推, 有:$\sum_{i=1}^{m} \frac{k_i-1}{n^i} < x \leqslant \sum_{i=1}^{m-1} \frac{k_i-1}{n^i} + \frac{k_m}{n^m}$

令 m 趋近于无穷就有 $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{n^i}$

从而我们得到一个映射 $f : (0,1] \to A : f(x) = \{a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots\}$. 且 f 是双射

二. 可数集的子集全体有连续统势

(只需证 N 即可)

Proof:$[N\sim\mathcal{P}(N)]$ $f:\mathcal{P}(N);\to$ 二元数列全体;$f(A)=\{a_1,a_2,\cdots\}$, $f(\varnothing)=\{0,0,\cdots\}$:

$$and\ a_n=\begin{cases}1, & n\in A\\ 0, & n\in\mathbf{N}-A\end{cases}\quad 是一个双射$$

三. 至多可数个有连续统势的集的直积有连续统势

也是证明其与二元数列全体等价

(推论):1.平面R^2, 和空间R^3有连续统势, 一般的$R^n\sim R^\infty$有连续统势

2. 实数列全体有连续统势

基数比较

Theorem *Bernstein* **定理:** *1.* 对任何集 $A,\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{A}}$

2. 若 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}},\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{C}$则$\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{C}}$

3. 若 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}},\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{A}}$则$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$

Theorem 1.1:$A_0\supset A_1\supset A_2, and\ A_0\sim A_2$ 则 $A_0\sim A_1$

(基数大小关系):$\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}\iff$ 存在从 A 到 B 的单射 $\iff\exists B_1\subset B\ s.t.\ A\sim B_1$

. (严格小则集合之间没有双射)

Example:R 上的连续函数有连续统势

Theorem 1.4.12: 不存在基数最大的集:$\mu<2^\mu$

Proof:[1.4.12] 先证明 $\mu\leq 2^\mu$, 我们发现 $\phi:A\to\mathcal{P}(A);\phi(x)=\{x\}$ 是单射, 从而 A 的基数小于等于 $\mathcal{P}(A)$

再证明 $\mu\neq 2^\mu$, 反设存在相等, 则存在一个 A 到其幂集的双射 $f:A\to\mathcal{P}(A);x\to f(x)\in\mathcal{P}(A)$. 作集合 $A^*\{x\in A|x\notin f(x)\}\subset A$ 从而 $A^*\in\mathcal{P}(A)\ i.e.\exists x^*\in A,s.t.f(x^*)=A^*$

$1.x^*\in A^*:$ 但根据 A^* 定义, 矛盾,$2.x^*\notin A^*\Rightarrow x\in A^*$ 矛盾! 综上证毕!

$\chi=2^{\chi_0}$

(连续统假设;CH:): 在阿列夫零和阿列夫之间没有别的基数