数学建模

浙江大学数学系　谈之奕

tanzy@zju.edu.cn

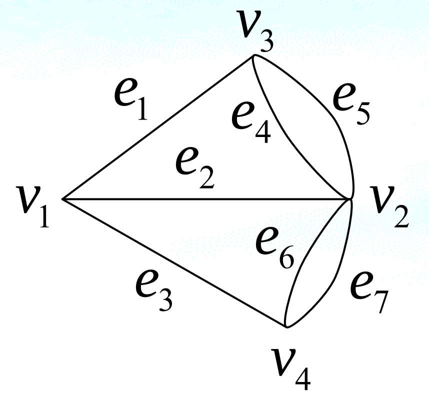
浙江大学
ZheJiang University

运筹与统计

图论

图

- 图（graph）：有序二元组 $G=(V,E)$
  - V 为顶点集，V 中元素称为顶点（vertex）
  - E 为边集，E 中元素称为边（edge），E 中每条边 e 与 V 中两个顶点 u,v 关联（incident）
    - 若 u,v 有序，则称 G 为有向图（digraph），有向图中的边也称作弧（arc），u 为 e 的起点，v 为 e 的终点
    - 若 u,v 无序，则称 G 为无向图，u,v 称为 e 的端点
- 图可以用以点表示顶点，以曲线段表示边的图形来表示，但图与上述表示中点和曲线段在图形中的相对位置无关



$$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$$

$$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}$$

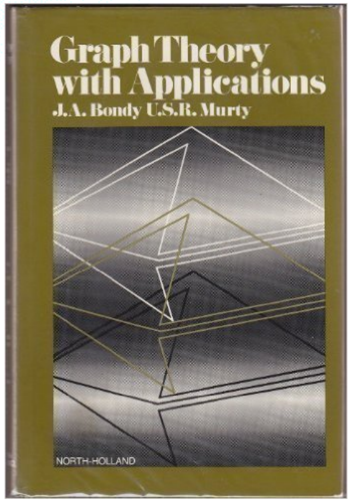
$$e_1=v_1v_3,\ e_2=v_1v_2,\ e_3=v_1v_4,$$

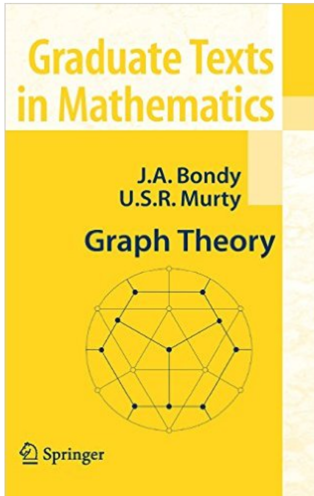
$$e_4=v_2v_3,\ e_5=v_2v_3,$$

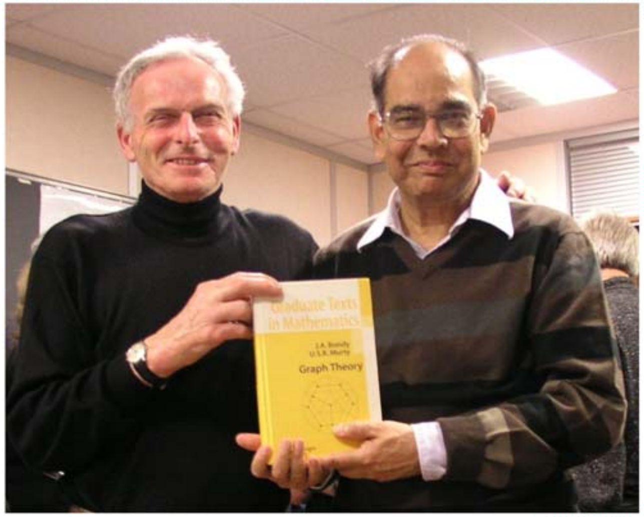
$$e_6=v_2v_4,\ e_6=v_2v_4$$

参考资料

浙江大学
ZheJiang University
数学建模







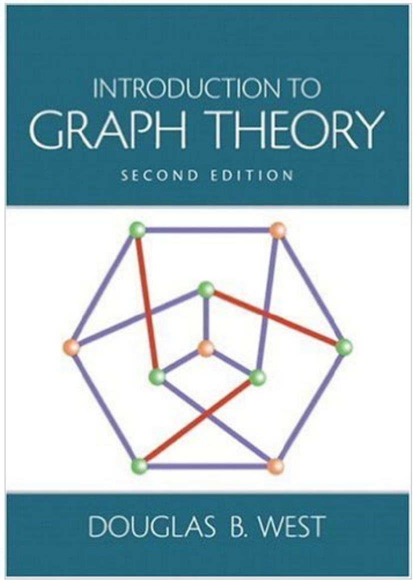
Bondy JA, Murty USR, *Graph Theory with Applications*, North Holland, 1976. (中译本，图论及其应用，吴望名、李念祖、吴兰芳、谢伟如、梁文沛译，科学出版社，1984.)
Bondy JA, Murty USR. *Graph Theory*, Springer, 2008.

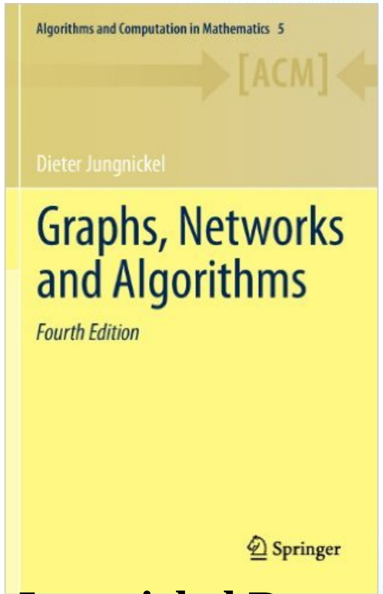
John Adrian Bondy
英裔数学家
Uppaluri Siva Ramachandra Murty
印裔数学家
原滑铁卢大学组合与优化系教授

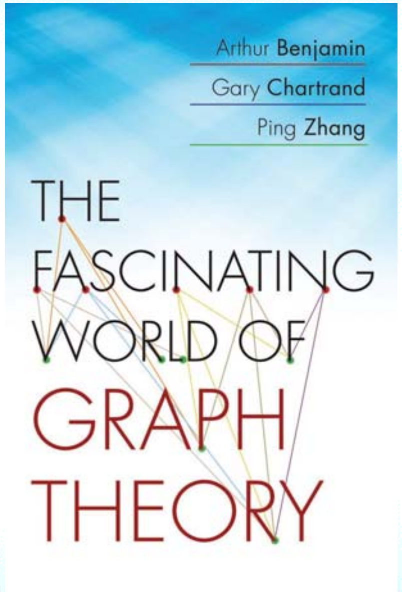
参考资料

浙江大学 ZheJiang University

数学建模







West DB, *Introduction to Graph Theory*. Pearson, 2001.

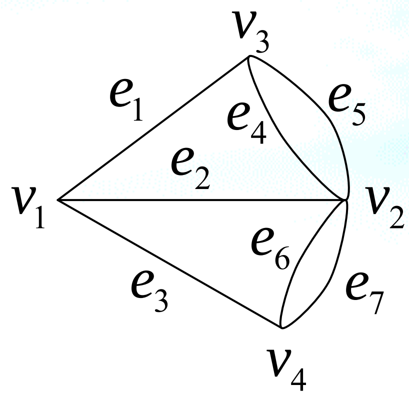
徐俊明, 图论及其应用, 中国科学技术大学出版社, **2010.**

Jungnickel D, *Graphs, Networks and Algorithms*, Springer, 2012.

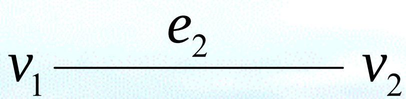
Benjamin A, Chartrand G, Zhang P. *The Fascinating World of Graph Theory*. Princeton University Press, 2015.

子图

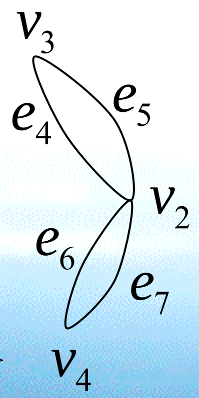
数学建模



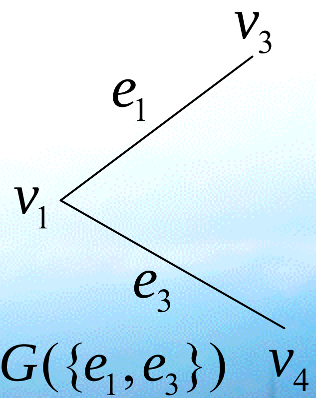
- 图 $G'=(V',E')$ 称为图 $G=(V,E)$ 的子图（**subgraph**），若 $V'\subseteq V$，$E'\subseteq E$ 且 G 中边的关联关系在 G' 中保持不变
  - 生成子图：$V'=V$
  - 导出子图：$G(V')$，$G\backslash V'$，$G(E')$，$G\backslash E'$



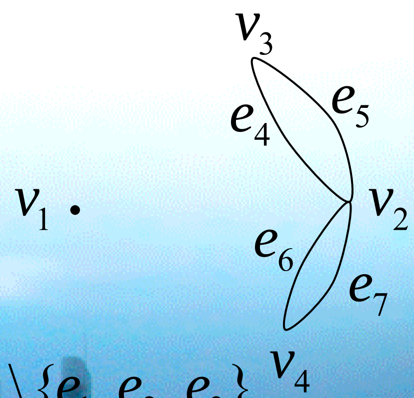
$G(\{v_1,v_2\})$



$G\backslash\{v_1\}$



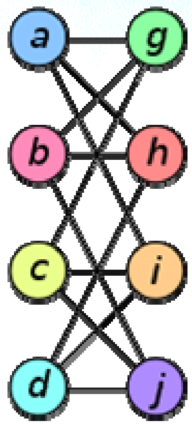
$G(\{e_1,e_3\})$

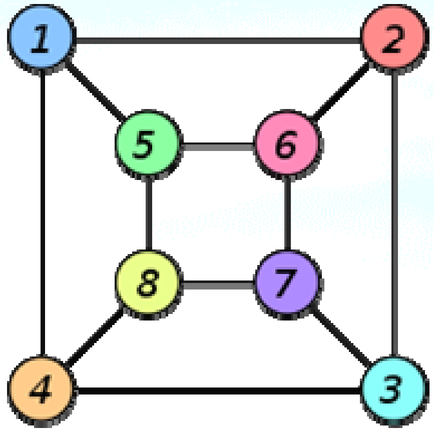


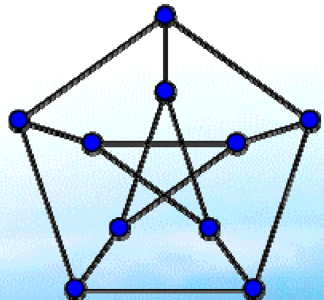
$G\backslash\{e_1,e_2,e_3\}$

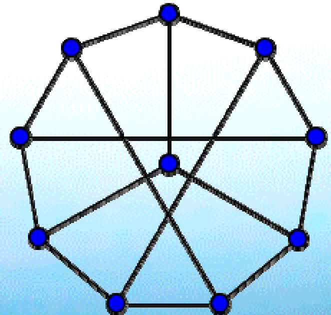
图同构

- 称图 $G=(V,E)$ 与图 $G'=(V',E')$ **同构**（**isomorphic**），若存在双射 $\sigma: V \to V'$，使得 G 中两顶点 u,v 相邻（**adjacent**）当且仅当 G' 中两顶点 $\sigma(u),\sigma(v)$ 相邻
- **图同构问题**（**Graph Isomorphism, GI**）：给定图 G 与图 G'，判断 G 与 G'是否同构
  - 图同构问题是复杂性迄今未决的重要 $\mathcal{NP}$ 问题之一





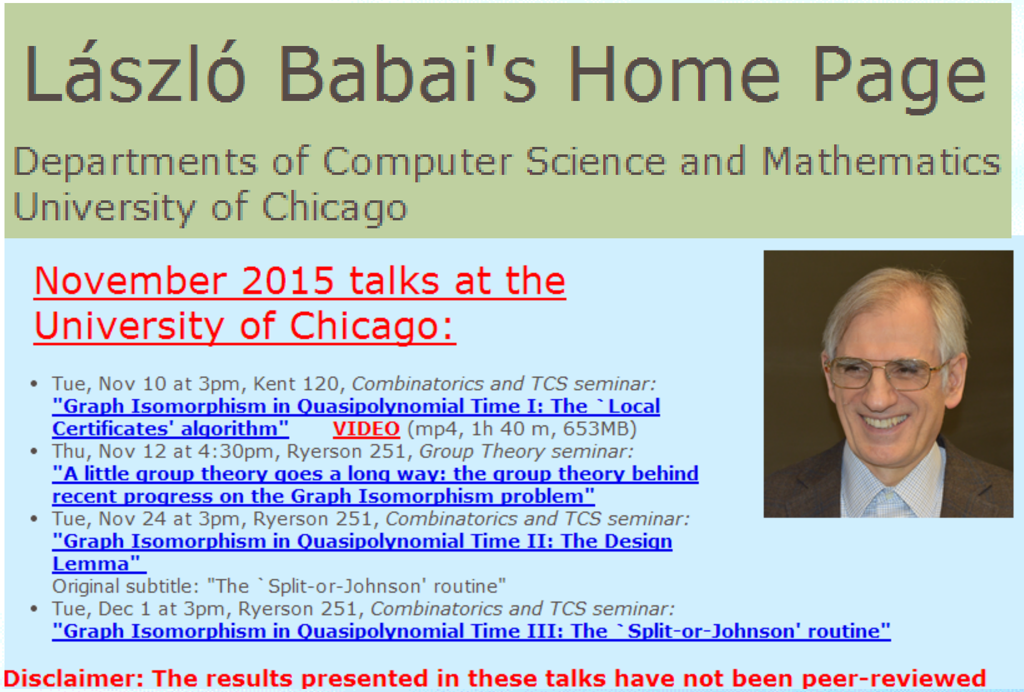




图同构

浙江大学 ZheJiang University
数学建模

- **1983年， Babai和Luks给出了图同构问题时间复杂性为 $O\left(2^{\sqrt{n\log n}}\right)$ 的算法，其中 n 为图的顶点数**
- **2015年，Babai宣称给出了图同构问题时间复杂性为 $O\left(2^{(\log n)^c}\right)$的拟多项式时间（quasi-polynomial）算法**

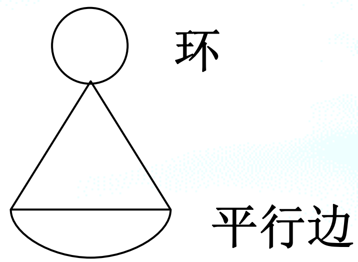


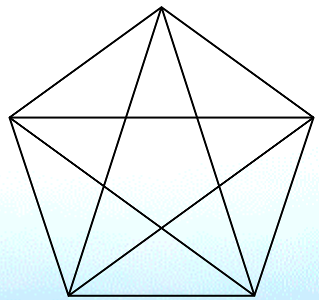
http://people.cs.uchicago.edu/~laci/

Babai L, Luks E M, Canonical labeling of graphs, *Proceedings of the 15th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 171-183, 1983.

简单图

- 两端点相同的边称为环（**loop**），两端点分别相同的两条边称为平行边（**parallel edges**）
- 既没有环，也没有平行边的图称为简单图（**simple graph**）
  - 若 $|V|=n$，则 $|E|\le\frac{n(n-1)}{2}$
- 任何两个不同顶点之间都有边相连的简单图称为完全图（**complete graph**）
  - G 的顶点子集 $V'\subseteq V$ 称为团（**clique**），若其导出子图 $G(V')$ 是完全图





完全图 K_5

路

数学建模

- 顶点和边交替出现的序列 $W = v_{i_0} e_{i_1} v_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} v_{i_k}$ 称为连接顶点 v_{i_0} 和 v_{i_k} 的长度为 k 的途径（**walk**）
  - 若图为简单图，则可省略途径中边的符号
  - 若图为有向图，所有边的方向均为自 v_{i_j} 指向 $v_{i_{j+1}}$，W 为从 v_{i_0} 到 v_{i_k} 的有向途径
- 经过边互不相同的途径称为迹（**trail**），经过顶点互不相同的迹称为路（**path**），起点和终点相同的路称为圈（**cycle**）
- 若无向图中两顶点之间有途径相连，则必有迹相连；若无向图中两顶点之间有迹相连，则必有路相连
- 设 $u, v \in V$，G 中所有从 u 到 v 的路的最短长度称为从 u 到 v 的距离（**distance**），记为 $d_G(u,v)$。长度等于距离的路称为最短路（**shortest path**）

连通

数学建模

- 若无向图中顶点 u,v 之间有路相连，则称 u,v 连通（**connected**）
  - 连通是图中顶点之间的一种等价关系，连通关系将 V 划分为 ω 个等价类 $V_1,\cdots,V_\omega$
  - $G(V_i), i=1,\cdots,\omega$ 称为 G 的连通分枝（**connect component**）
  - 连通分枝数为 1 的图称为连通图（**connect graph**）
- 有向图 G 称为强连通（**strongly connected**）的，若对任意顶点对 u,v，图中既存在从 u 到 v 的有向路，又存在从 v 到 u 的有向路

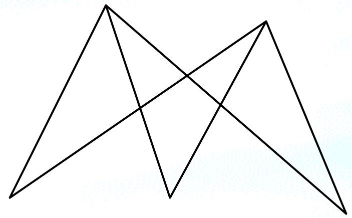
二部图

数学建模

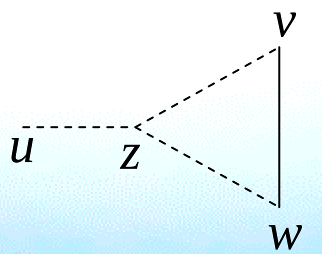
- 若图的顶点集可以划分为两个非空集合 X 和 Y，使得 X,Y 中任何两顶点之间无边相连，则称该图为二部图（**bipartite graph**），记为 $G=(X\cup Y,E)$
  - X 中所有顶点与 Y 中所有顶点都有边相连的二部图称为完全二部图
- G 是二部图当且仅当 G 中不存在奇圈
  - 若 G 是二部图 $(X\cup Y,E)$，则长度为奇数的路的起点与终点分别在 X 与 Y 中，G 中不存在奇圈
  - 若 G 中不存在奇圈，任取 $u\in V$，令

    $$X=\{v\in V\mid d_G(u,v)为奇数\},\ Y=\{v\in V\mid d_G(u,v)为偶数\}$$

    若存在 $v,w\in X$，$e=vw\in E$，记 P_v 是从 u 到 v 的最短路，P_w 是从 u 到 w 的最短路。z 是 P_v 与 P_w 的最后一个公共端点，P_v,P_w 上自 z 到 v,w 的部分分别记为 P'_v,P'_w，则 $P'_veP'_w$ 为一个奇圈



完全二部图 $K_{2,3}$



奇数+奇数 $-2k+1$

度

- 无向图中与顶点 v 关联的边的数目称为 v 的度（**degree**），记为 $\deg_G(v)$
  - $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 分别表示图的最大度和最小度
  - 度为0 的点称为孤立点（**isolated vertex**）
  - 所有顶点度相等的图称为正则图（**regular graph**）
  - （**Handshaking**引理）$\sum_{v\in V}\deg_G(v)=2|E|$
  - 度为奇数的顶点总有偶数个
- 有向图中以 v 为起点的弧的数目称为 v 的出度（**out-degree**），以 v 为终点的弧的数目称为 v 的入度（**in-degree**），分别记为 $\deg_G^+(v)$ 和 $\deg_G^-(v)$
  - $\sum_{v\in V}\deg_G^+(v)=\sum_{v\in V}\deg_G^-(v)=|E|$

图与矩阵

- 设 $|V|=n,|E|=m$
  - 矩阵 $\mathbf{M}=(m_{ij})_{n\times m}$ 称为图的关联矩阵（**incidence matrix**），其中

$$(\text{有向图})\quad m_{ij}=\begin{cases}1 & e_j\text{以}v_i\text{为起点}\\ -1 & e_j\text{以}v_i\text{为终点}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\qquad (\text{无向图})\quad m_{ij}=\begin{cases}1 & e_j\text{以}v_i\text{为端点}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

  - 矩阵 $\mathbf{A}=(\mu_{ij})_{n\times n}$ 称为图的邻接矩阵（**adjacency matrix**），其中 μ_{ij} 为（有向图）以 v_i 为起点，v_j 为终点的边的数目或（无向图）连接 v_i,v_j 的边的数目

Hamiltion圈

数学建模

- **Hamiltion圈**
  - 经过图的所有顶点恰好一次的圈称为 **Hamilton圈**（**Hamiltion cycle**）。存在**Hamilton**圈的图称为**Hamilton图**
- **Hamilton图问题（HC）**：判断图 G 是否为一**Hamilton**图
  - **Hamilton**图问题是$\mathcal{NP}$-完全的

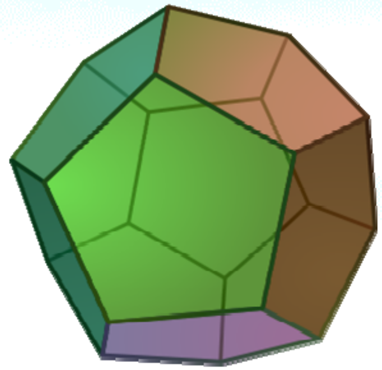
William Rowan Hamilton
爱尔兰数学家
(1805-1865)

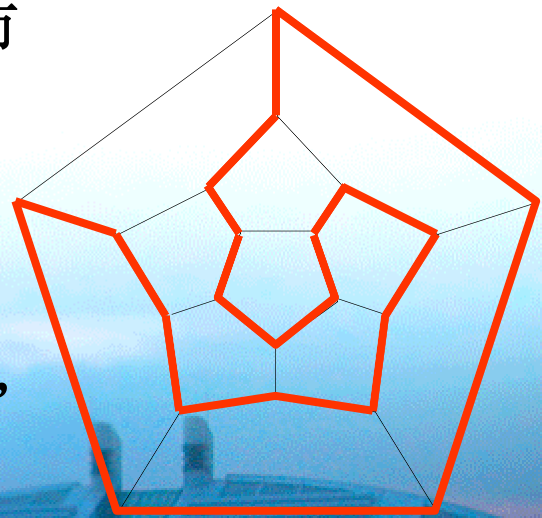
14

周游世界

数学建模

- **1859年Hamilton发明了**周游世界**的游戏icosian game**
  - 一个正十二面体的二十个顶点各代表一个城市，是否有一条从某个城市出发，沿正十二面体的棱行走，经过每个城市恰好一次，最后回到出发城市的路线



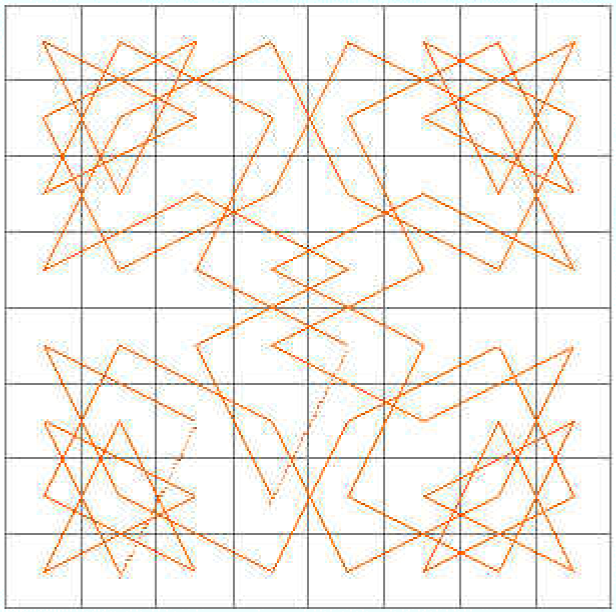


Amsterdam, Ann Arbor, Berlin, Budapest, Dublin, Edinburgh, Jerusalem, London, Melbourne, Moscow, Novosibirsk, New York, Paris, Peking, Prague, Rio di Janeiro, Rome, San Francisco, Tokyo, Warsaw

15

Knight's tour

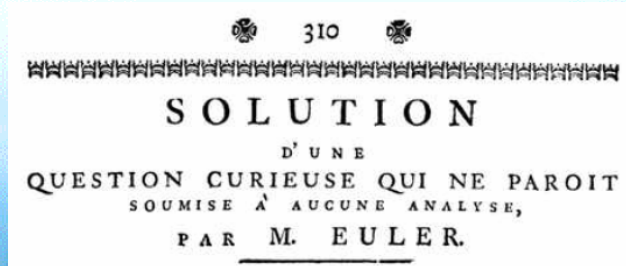
数学建模



- 在 8×8 国际象棋棋盘上，马能否按其走子规则，从一个格子出发，经过其它格子恰好一次，最后回到起点
  - 构造“跳马图”，每一格子为图的一个顶点，两个格子之间有边相连当且仅当马可按走子规则从一个格子跳到另一个格子
- $m\times n\ (m\le n)$ 方格棋盘对应的“跳马图”为**Hamiltonian**图，除非
  - m,n 均为奇数
  - 或 $m=1,2,4$
  - 或 $m=3, n=4,6,8$

Euler, L., Solution of a curious question which does not seem to have been subjected to any analysis, *Mémoires de l'Academie Royale des Sciences et Belles Lettres*, 15, 310–337, 1759

Schwenk AJ. Which rectangular chessboards have a knight's tour? *Mathematics Magazine*, 64, 325-332, 1991.



310

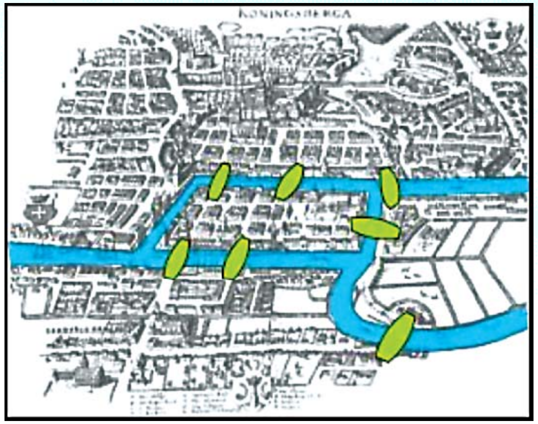
SOLUTION
D'UNE
QUESTION CURIEUSE QUI NE PAROIT
SOUMISE A AUCUNE ANALYSE,
PAR M. EULER.

16

七桥问题

数学建模

- 七桥问题
  - 在**Konigsberg**城，有七座桥梁建在**Pregel**河上，是否有一条从城中某处出发，经过每座桥梁恰好一次，最后回到出发点的路线
  - **Danzig**（今波兰格但斯克）市长**Karl Leonhard Gottlieb Ehler**致信**Euler**，转述了**Danzig**当地数学教授**Heinrich Kuhn**的问题



条顿骑士团-普鲁士-德国-苏联/俄罗斯

图论的起源可追溯到大数学家欧拉（Leonhard Euler）。1736 年欧拉来到德国的哥尼斯堡（Konigsberg，大哲学家康德的家乡，现在是俄罗斯的加里宁格勒），发现当地市民们有一项消遣活动，就是试图将下图中的每座桥正好走过一遍并回到原起

目前尚没有发现**Euler**曾到过**Konigsberg**的记载

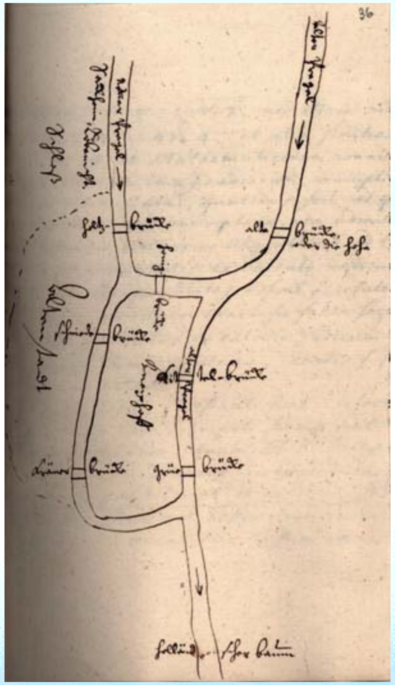
七桥问题

数学建模

- 七桥问题
  - 以河流分割而成的城市区域为顶点，桥梁为边，边的端点为该桥梁连接的两片区域
  - 七桥问题等价于在图中寻找一条经过所有边恰好一次的回路
- **Euler**图
  - 经过图的所有边恰好一次的闭迹为**Euler**回路，存在**Euler**回路的图为**Euler**图
  - 一连通图是**Euler**图的充要条件是图中没有奇度顶点

Euler L, Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. ***Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*****, 8, 128–140, 1741**

1736年Euler对七桥问题的研究被认为是现代图论的起源



Ehler致**Euler**信中所绘**Konigsberg**图

Euler回路

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- **求Euler图** G **的一条Euler回路的算法**

Carl Hierholzer (1840 –1871)
德国数学家

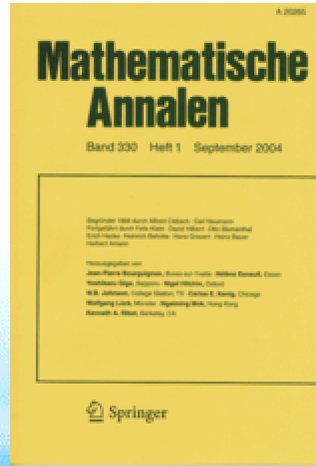
  - 从任一顶点出发，找一条闭迹 C

    所有顶点的度为偶数

  - 考虑图 $G\setminus C$，若其边集非空，从某一个 C 经过的顶点出发找 $G\setminus C$ 的一条闭迹 C'；将 C 和 C' 合为一条闭迹，仍记为 C

    图是连通的　　$G\setminus C$ 所有顶点的度为偶数

  - 重复上步直至 G 的边均包含在 C 中



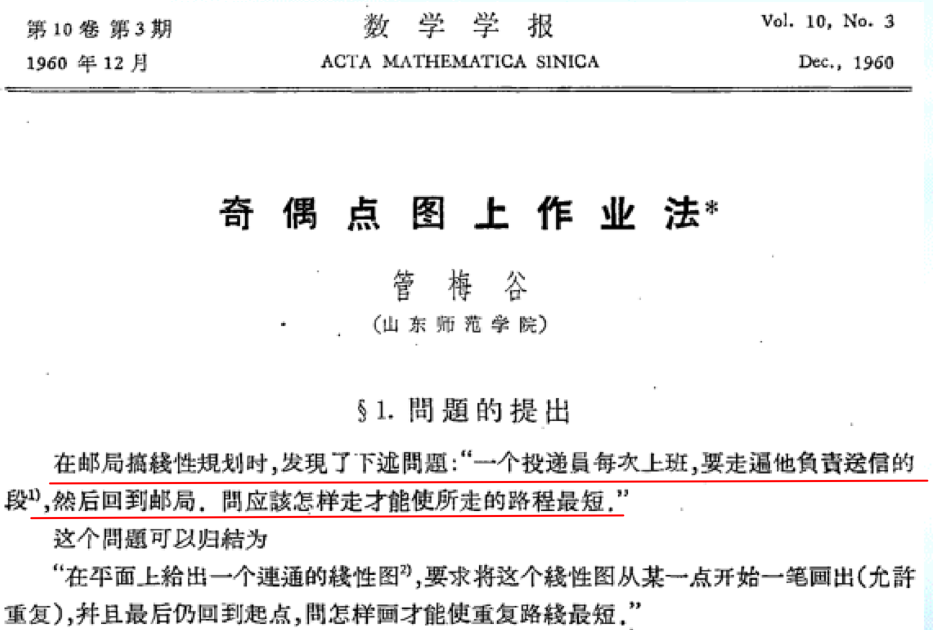
Hierholzer, C., Wiener, C., Ueber die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren, *Mathematische Annalen*, 6, 30-32, 1873

中国邮递员问题

数学建模

- **Chinese Postman Problem（CPP）**
  - 一个投递员每次上班，要走遍他负责送信的段，然后回到邮局。问应该怎样走才能使所走的路程最短
- 建模为**TSP**问题
  - 顶点数过多
  - 部分可行解不需考虑

把服务对象由“点”变为“线”



第10卷 第3期 1960年12月 | 数学学报 ACTA MATHEMATICA SINICA | Vol. 10, No. 3 Dec., 1960

奇偶点图上作业法*

管梅谷

(山东师范学院)

§1. 問題的提出

在邮局搞綫性规划时,发现了下述問題:"一个投递員每次上班,要走遍他負責送信的段[1],然后回到邮局. 問应該怎样走才能使所走的路程最短."

这个問題可以归結为

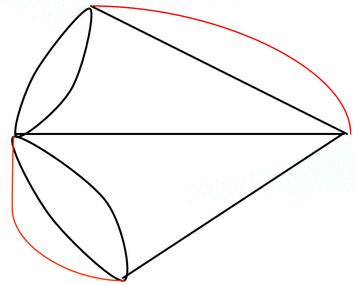
"在平面上给出一个連通的綫性图[2],要求将这个綫性图从某一点开始一笔画出(允許重复),并且最后仍回到起点,問怎样画才能使重复路綫最短."

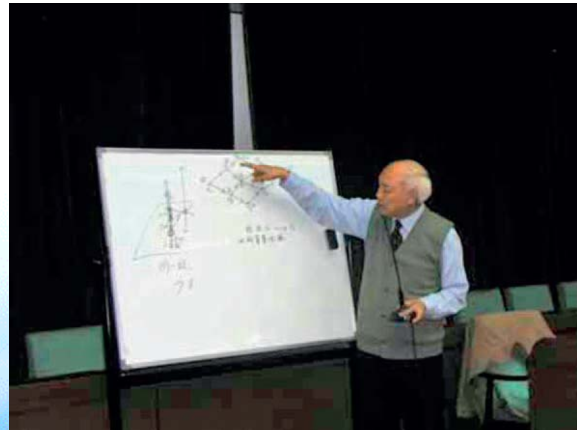
管梅谷，奇偶点图上作业法，数学学报, 10, 263-266, 1960

Kwan Mei-Ko, Graphic programming using odd or even points. *Chinese Mathematics*, 1, 273-277, 1962.

中国邮递员问题

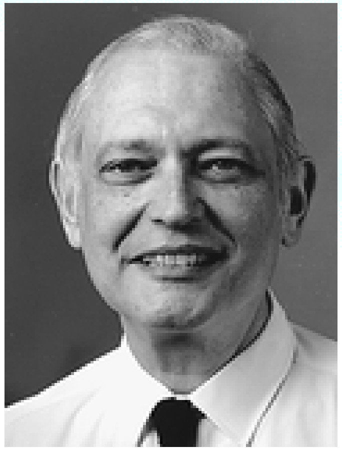
- **Euler**图的优化形式
  - 若图不是**Euler**图，可通过复制某些边成为**Euler**图
  - 对任意图，如何复制最少的边使之成为**Euler**图
- 中国邮递员问题与**Euler**图
  - 邮递员走过的区域形成一赋权图，街道为边，街道交汇处为顶点，街道的权为其长度
  - 若赋权图是**Euler** 图，任何一条**Euler** 回路都是中国邮递员问题的最优解
  - 若赋权图不是**Euler**图，寻找一条回路，经过某些边两次以上，且使回路总长度最短





中国邮递员问题

- 算法
  - 管梅谷、Edmonds和Johnson先后给出了中国邮递员问题的算法，后者是多项式时间算法
- 命名（**http://www.nist.gov/dads/HTML/chinesePostman.html**）
  - **Kwan's article referred to optimizing a postman's route, was written by a Chinese author, and appeared in a Chinese math journal. Based on this Alan J. Goldman suggested the name "Chinese Postman problem" to Jack Edmonds when Edmonds was in Goldman's Operations Research group at the U.S. National Bureau of . Edmonds appreciated its "catchiness" and adopted it**



Alan J. Goldman
（1932-2010）
美国运筹学家

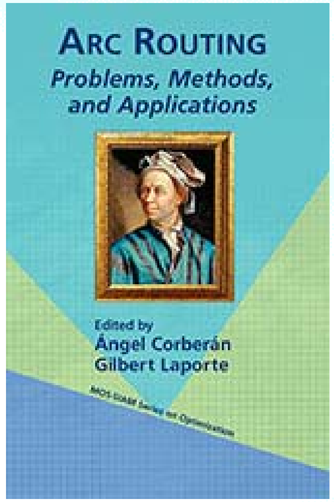
Edmonds J, Johnson EL, Matching, Euler tours and the Chinese postman. ***Mathematical Programming*****, 5, 88-124, 1973.**

管梅谷：关于中国邮递员问题研究和发展的历史回顾. 运筹学学报, **19(3), 1-7, 2015.**

Grötschel M, Yuan Y. Euler, Mei-ko Kwan, Königsberg, and a Chinese Postman. ***Documenta Mathematica, Extra volume ISMP Optimization Stories*****, 43-50, 2012.**

边路由问题

- **Arc Routing**
  - **A Historical Perspective on Arc Routing**
  - **Arc Routing Problems with a Single Vehicle**
    - **The Complexity of Arc Routing Problems**
    - **The Chinese Postman Problem / Rural Postman Problem on Undirected / Directed / Mixed / Windy Graphs**
  - **Arc Routing Problems with Several Vehicles**
    - **The Capacitated Arc Routing Problem: Heuristics, Combinatorial Lower Bounds, Exact Algorithms**
    - **Variants of the Capacitated Arc Routing Problem**
  - **Applications**
    - **Route Optimization for Meter Reading and Salt Spreading**
    - **Advances in Vehicle Routing for Snow Plowing**
    - **Routing in Waste Collection Applications**
    - **Arc Routing Applications in Newspaper Delivery**



Leonhard Euler

(1707-1783)

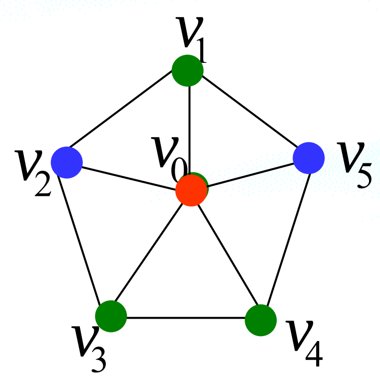
瑞士数学家

Corberán Á., Laporte, G., (Eds.) ***Arc Routing: Problems, Methods, and Applications*****, SIAM, 2015**

特殊顶点集

数学建模

- 顶点覆盖、独立集与支配集
  - V的子集S称为G的顶点覆盖（**vertex cover**），若E中每条边至少有一个端点在S中
  - V的子集S称为G的独立集（**independent set**），若S中任何两个顶点在G中均不相邻
  - V的子集S称为G的支配集（**dominated set**），若任意$V \setminus S$中顶点均与某个S中顶点关联
- 最小顶点覆盖、最大独立集与最小支配集问题都是$\mathcal{NP}$-难的



$\{v_0, v_1, v_3, v_4\}$是最小顶点覆盖，也是支配集

$\{v_2, v_5\}$是最大独立集，也是支配集

$\{v_0\}$是最小支配集，也是独立集

皇后问题

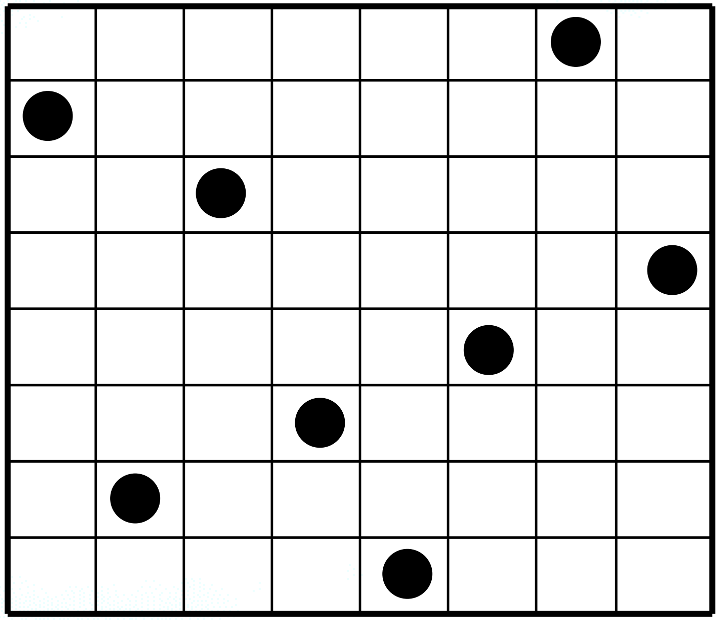
浙江大学 ZheJiang University

数学建模

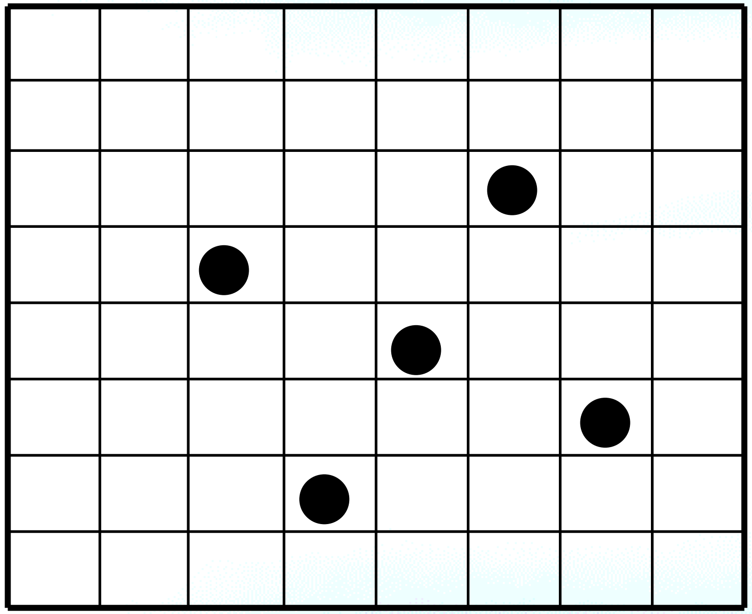
- 在 8×8 国际象棋棋盘上
  - 最多可放置几个皇后，使得任一皇后不会被其他皇后吃掉
  - 最少需放置几个皇后，使得任何一个格子上的棋子可被至少一个皇后吃掉
- 构造“皇后图”，每个格子为图的一个顶点，两个格子之间有边相连当且仅当位于一个格子中的皇后可吃掉另一个格子中的子

Karl Friedrich Gauss
(1777-1855)
德国数学家

皇后问题



八皇后问题　最大独立集



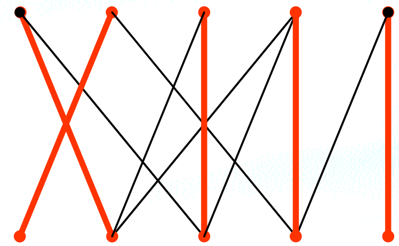
五皇后问题　最小支配集

匹配

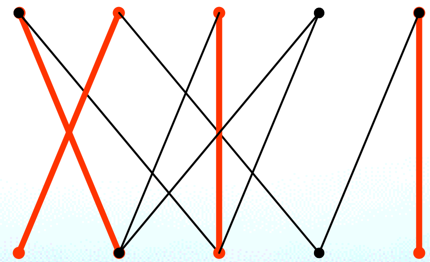
浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 图 $G=(V,E)$ 边集 E 的一个非空子集 M 称为 G 的一个匹配（**matching**），若 M 中任何两条边在 G 中均不相邻
  - G 中任一顶点至多与一条 M 中边关联
- 若 G 中所有顶点都与匹配 M 中某条边关联，则称 M 为完美匹配（**perfect matching**）
- 图的最优匹配
  - 边数最多的匹配称为最大基数匹配
  - 赋权图中总权重最大的匹配称为最大权匹配
  - 偶数阶赋权完美图中总权重最小的完美匹配称为最小权完美匹配
  - 赋权完美二部图的最小权完美匹配即指派问题



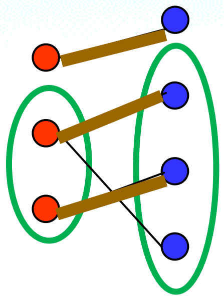
完美匹配

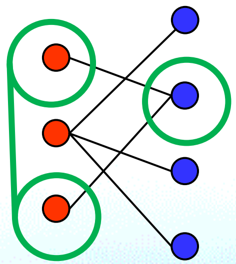


最大基数匹配

Hall定理

- **Hall定理**
  - 设 $G=(X\cup Y,E)$ 为二部图，则存在匹配 M，使得 X 中的任一个顶点均与 M 中某条边关联的充要条件是 $|S|\le|N_G(S)|,\forall S\subset X$，这里 $N_G(S)$ 为 G 中所有与 S 相邻的顶点集
- **Tutte定理**
  - 图 $G=(V,E)$ 有完美匹配的充要条件是对任意 $S\subset V$，导出子图 $V\setminus S$ 的奇数阶连通分支的数不超过 $|S|$





Philip Hall
（1904－1982）
英国数学家

Hall P, On Representatives of Subsets, *Journal of the London Mathematical Society*, 10 (1): 26–30, 1935.
Tutte WT, The factorization of linear graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, S1-22, 107-111, 1947

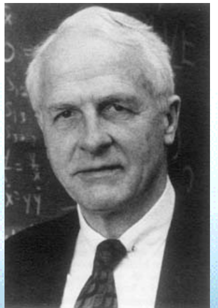
Hall定理的等价定理

数学建模

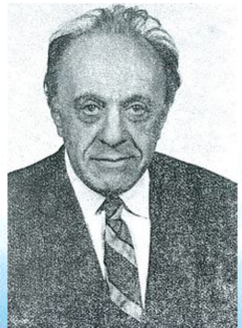
Hall定理	完美匹配存在性
König–Egerváry定理	0-1矩阵的项秩与覆盖
König定理	二部图的匹配与边覆盖
Menger定理	顶点互不相同的路
最大流最小割定理	网络流
Birkhoff–Von Neumann定理	双随机矩阵分解
Dilworth定理	偏序集中的链与反链

Denes König
匈牙利数学家
(1884-1944)

Jenő Egerváry
匈牙利数学家
(1891-1958)



Garrett Birkhoff
美国数学家
(1911-1996)



Karl Menger
奥地利数学家
(1902-1985)

Robert Palmer Dilworth
美国数学家
(1914-1993)

Hall定理

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

- **A round-robin tournament of $2n$ teams lasted for $2n-1$ days, as follows. On each day, every team played one game against another team, with one team winning and one team losing in each of the n games. Over the course of the tournament, each team played every other team exactly once. Can one necessarily choose one winning team from each day without choosing any team more than once?**
  - 任取m天，必有至少m支队在这m天中至少获胜**1**场
    - 任取m支队，若不合要求，其中必有一支在这m天的比赛中均失败，它的m个对手队即为所求
  - 构造二部图$G=(X\cup Y,E)$，其中X中顶点代表各天，Y中顶点代表各队，每队对应的顶点与该队获胜日期对应的顶点有边相连
  - G满足**Hall**定理条件，故存在关联X中所有顶点的匹配，该匹配所关联的Y中顶点即为所求的$2n-1$支队

William Lowell Putnam Mathematical Competition

2012B3

总分前**189**名该题得分

得分	人数	**2**分	**4**人
10分	**44**人	**1**分	**21**人
9分	**2**人	**0**分	**48**人
8分	**3**人	空白	**61**人

欧洲冠军联赛

- **Article 18：Match system – round of 16, quarter-finals and semi-finals**
  - **The round of 16 pairings are determined by means of a draw in accordance with the following principles:**
    - **Clubs from the same association cannot be drawn against each other**
    - **Group winners must be drawn against runners-up from a different group**
    - **The runners-up play the first leg at home**
  - **The eight winners of the round of 16 contest the quarter-finals. The quarter-final pairings are determined by means of a draw**

——Selected from "Regulations of the UEFA Champions League 2015-18 Cycle, 2017/18 Season"

UEFA CHAMPIONS LEAGUE

资格赛（按联赛水平分配名额）（**First/Second/Third qualifying round, play-off round**）

小组赛（**Group stage**）（**32**队，**8**小组）

淘汰赛（**Knockout phase**）（**Round of 16, quarter-final, semi-final, final**）

2012-2013赛季

- **UEFA Champions League 2012/13 Season**

	A	B	C	D	E	F	G	H
winner	**Paris Saint-Germain （FRA）**	**FC Schalke 04 （GER）**	**Málaga CF （ESP）**	**Borussia Dortmund （GER）**	**Juventus （ITA）**	**FC Bayern München （GER）**	**FC Barcelona （ESP）**	**Manchester United FC （ENG）**
runners -up	**FC Porto （POR）**	**Arsenal FC （ENG）**	**AC Milan （ITA）**	**Real Madrid CF （ESP）**	**FC Shakhtar Donetsk （UKR）**	**Valencia CF （ESP）**	**Celtic FC （SCO）**	**Galatasaray AŞ （TUR）**

2012-2013赛季

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

Paris Saint-Germain（FRA）	FC Schalke 04（GER）	Málaga CF（ESP）	Borussia Dortmund（GER）	Juventus（ITA）	FC Bayern München（GER）	FC Barcelona（ESP）	Manchester United FC（ENG）

①　②

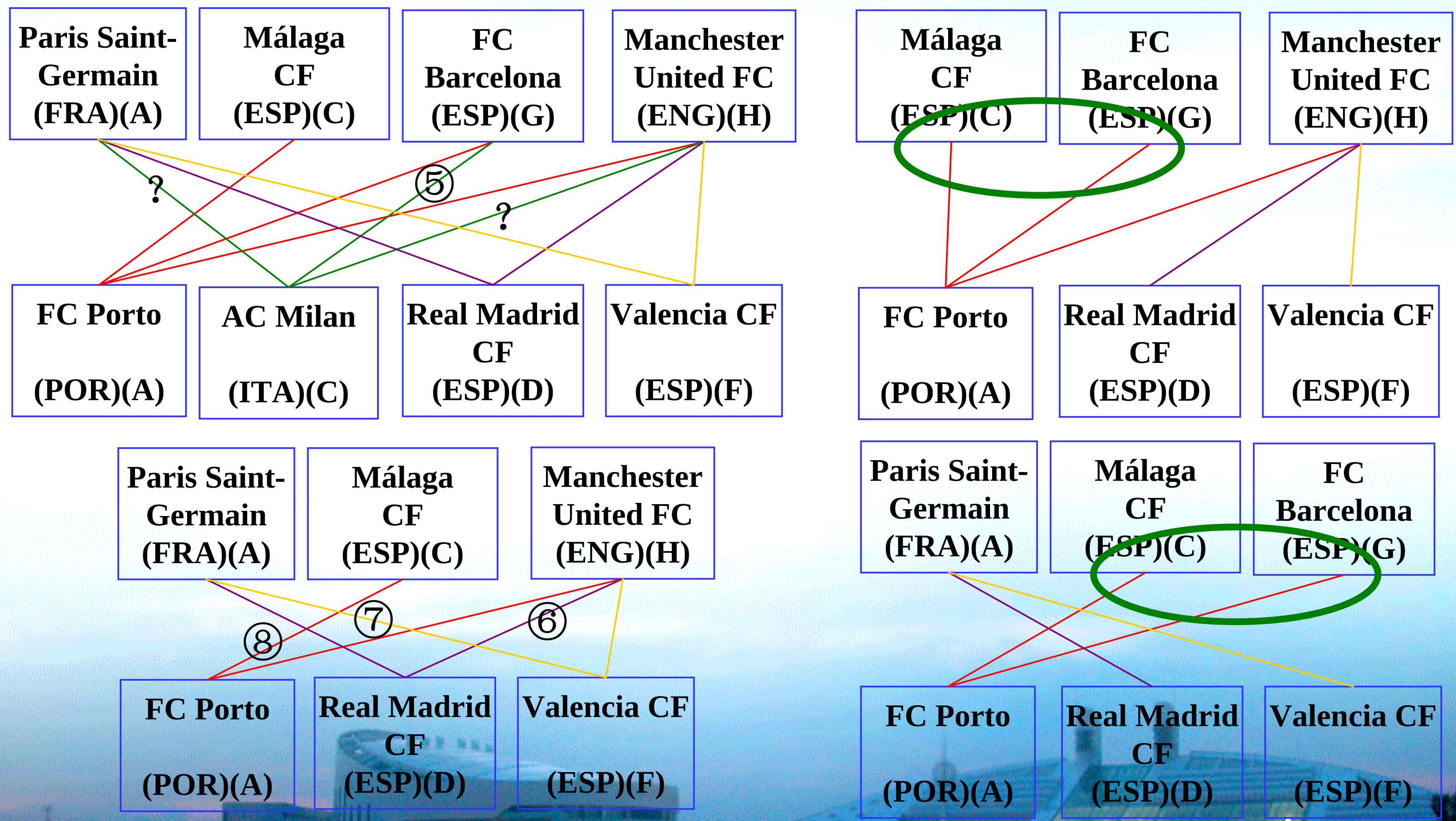
FC Porto（POR）	Arsenal FC（ENG）	AC Milan（ITA）	Real Madrid CF（ESP）	FC Shakhtar Donetsk（UKR）	Valencia CF（ESP）	Celtic FC（SCO）	Galatasaray AŞ（TUR）

Paris Saint-Germain（FRA）	Málaga CF（ESP）	Borussia Dortmund（GER）	FC Bayern München（GER）	FC Barcelona（ESP）	Manchester United FC（ENG）

③　④

FC Porto（POR）	Arsenal FC（ENG）	AC Milan（ITA）	Real Madrid CF（ESP）	FC Shakhtar Donetsk（UKR）	Valencia CF（ESP）

2012-2013赛季

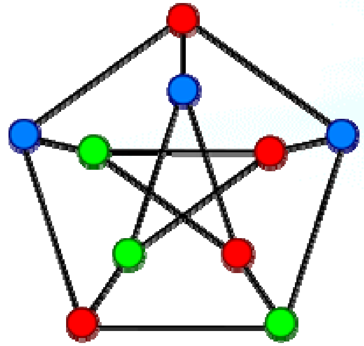

Paris Saint-Germain (FRA)(A)
Málaga CF (ESP)(C)
FC Barcelona (ESP)(G)
Manchester United FC (ENG)(H)
?
⑤
?
FC Porto (POR)(A)
AC Milan (ITA)(C)
Real Madrid CF (ESP)(D)
Valencia CF (ESP)(F)
Málaga CF (ESP)(C)
FC Barcelona (ESP)(G)
Manchester United FC (ENG)(H)
FC Porto (POR)(A)
Real Madrid CF (ESP)(D)
Valencia CF (ESP)(F)
Paris Saint-Germain (FRA)(A)
Málaga CF (ESP)(C)
Manchester United FC (ENG)(H)
⑧
⑦
⑥
FC Porto (POR)(A)
Real Madrid CF (ESP)(D)
Valencia CF (ESP)(F)
Paris Saint-Germain (FRA)(A)
Málaga CF (ESP)(C)
FC Barcelona (ESP)(G)
FC Porto (POR)(A)
Real Madrid CF (ESP)(D)
Valencia CF (ESP)(F)

顶点着色

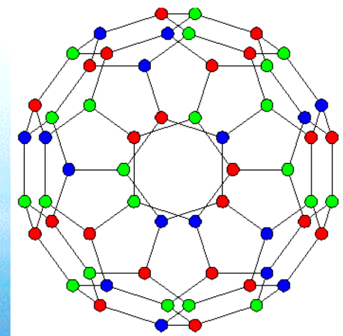
- 图 G 的顶点 k 着色是指将图 G 的每一个顶点用 k 种颜色之一着色，使得相邻的顶点不染同一种颜色
  - 图的顶点 k 着色等价于将图的顶点集划分为 k 个两两不相交的独立集之并
  - 图可顶点 k 着色的最小的 k 值称为图的色数（**chromatic number**），记为 $\chi(G)$
- 对任意简单图 $\chi(G) \le \Delta(G)+1$
  - 连通图 G 满足 $\chi(G)=\Delta(G)+1$ 当且仅当 G 为奇圈或完全图

Brooks RL, On colouring the nodes of a network. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 37, 194–197, 1941

$\chi(G)=3$



Petersen 图



Buckyball图

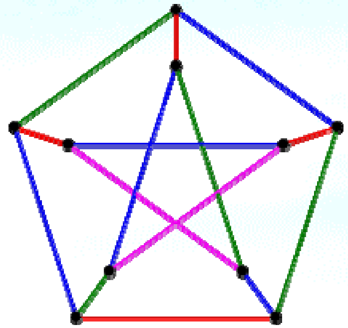
边着色

数学建模

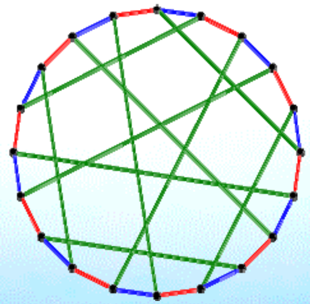
- 图 G 的边 k 着色是指将图 G 的每一条边用 k 种颜色之一着色，使得相邻的边不染同一种颜色
  - 图的边 k 着色等价于将图的边集划分为 k 个两两不相交的匹配之并
  - 图可边 k 着色的最小的 k 值称为图的边色数（**edge chromatic number**），记为 $\chi'(G)$
- 若 G 是非空简单图，则 $\Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G)+1$
  - 若 G 是二部图，则 $\chi'(G) = \Delta(G)$
- 图的边着色问题：给定图 G，求 $\chi'(G)$
  - 判断图 G 是否满足 $\chi'(G) = \Delta(G)$ 是 $\mathcal{NP}$-完全的

Vizing VG, On an estimate of chromatic class of a P-graph. *Diskretn Analiz*, 3, 25–30, 1964

Holyer I. The NP-completeness of edge-coloring. *SIAM Journal on Computing*, 10, 718-720, 1981



$\chi'(G) = 4$



Desargues图

$\chi'(G) = 3$

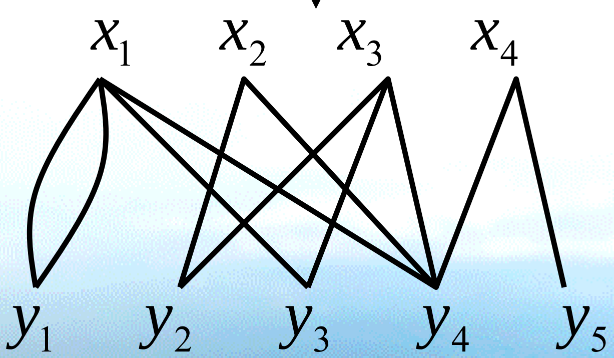
排课表问题

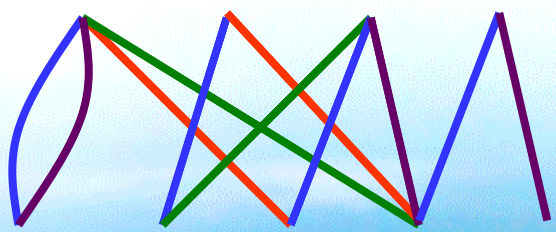
- 排课表问题（**timatabling problem**）
  - 有 m 位教师和 n 个班级，教师 i 每天为班级 j 授课 p_{ij} 个学时。如何安排一张课表，在同一时刻任一教师至多为一个班级授课，任一班级至多仅有一位教师授课，使用 k 间教室且每天课时数最少
- 构造有平行边的二部图 $G=(X\cup Y,E)$，其中 X 为教师集，Y 为班级集，X 中顶点 i 和 Y 中顶点 j 有 p_{ij} 条边相连
  - 排课表问题等价于 G 的边着色问题，每天最少课时数即为 $\chi'(G)$，着同一种颜色的边的数量的最大值即为所需的教室数
  - 设 G 是二部图，对任意的 $l\ge\Delta(G)$，G 中存在 l 个无公共边的匹配 $M_i, i=1,\cdots,l$，使得 $E=\bigcup_{i=1}^{p}M_i$，且 $\left\lfloor\frac{|E|}{l}\right\rfloor\le|M_i|\le\left\lceil\frac{|E|}{l}\right\rceil$, $i=1,\cdots,l$

排课表问题

数学建模

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
\hline
\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} & \multicolumn{5}{c}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}
\end{array}
$$





教师 \ 课时	1	2	3	4
x_1	y_1	y_1	y_3	y_4
x_2	y_2		y_4	
x_3	y_3	y_4		y_2
x_4	y_4	y_5		

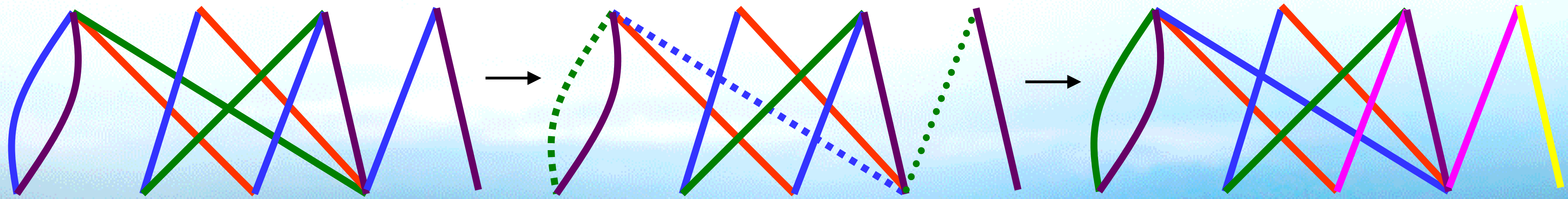
排课表问题

	1	2	3	4
x_1	y_4	y_1	y_3	y_1
x_2	y_2		y_4	
x_3	y_3	y_4		y_2
x_4		y_5		y_4

三间教室

	1	2	3	4	5	6
x_1	y_4	y_3	y_1		y_1	
x_2	y_2	y_4				
x_3			y_4	y_3	y_2	
x_4				y_4		y_5

两间教室

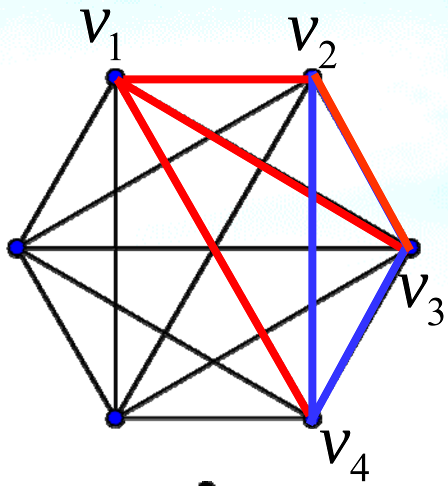


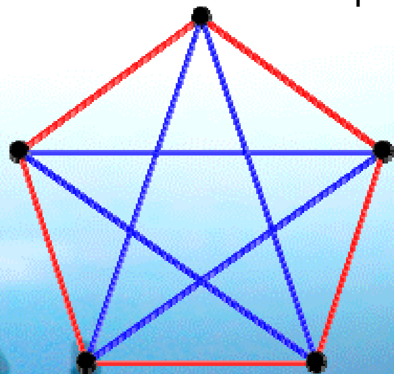
$H = G(V, M_1 \oplus M_2)$ 增广路

Ramsey数

数学建模

- 用红、蓝两种颜色对完全图 K_6 的边进行着色，每条边着两种颜色中的一种，着色后的图中要么存在一个边全是红色的团 K_3，要么存在一个边全为蓝色的团 K_3
  - 任取 K_6 的一个顶点 v_1，与它关联的 5 条边中至少有三条着同一种颜色，不妨设为红色，其中三条边的另一端点分别为 v_2, v_3, v_4
  - 若边 v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4 均着蓝色，则它们组成一蓝色的 K_3；若 v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4 中有一条边着红色，不妨设为 v_2v_3，则 v_1, v_2, v_3 组成一个红色的 K_3
- 对 K_5 进行类似着色，存在一种着色方案，其中既无红色的 K_3，也无蓝色的 K_3





浙江大学 ZheJiang University
数学建模

Ramsey数

- 用红、蓝两种颜色对K_n的边进行着色，每条边着两种颜色中的一种。给定正整数s,t，要求任一着色后的图中要么存在一个边全为红色的K_s，要么存在一个边全为蓝色的K_t。n的最小值称为**Ramsey数**，记为$r(s,t)$

$$r(3,3)=6 \qquad r(2,t)=t$$

$$r(s,t)\le r(s-1,t)+r(s,t-1)$$

Ramsey, F. P., On a problem of formal logic, *Proceedings London Mathematical Society*, *S2*-30, 264–286, 1930.

Ramsey FP. A contribution to the theory of taxation, *The Economic Journal*, 37: 47–61, 1927

Ramsey FP. A mathematical theory of saving, *The Economic Journal*, 38: 543-559, 1928

Frank Plumpton Ramsey (1903 –1930)

英国数学家、哲学家、经济学家

Ramsey数

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

- 目前已知的**Ramsey数**

$$r(3,4)=9, r(3,5)=14,$$
$$r(3,6)=18, r(3,7)=23,$$
$$r(3,8)=28, r(3,9)=36$$
$$r(4,4)=18, r(4,5)=25$$

$R(4,5) = 25$

Brendan D. McKay
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE
AUSTRALIAN NATIONAL UNIVERSITY
ACT 0200, AUSTRALIA
e-mail: bdm@cs.anu.edu.au

Stanisław P. Radziszowski
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE
ROCHESTER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
ROCHESTER, NEW YORK 14623, USA
e-mail: spr@cs.rit.edu

ABSTRACT

The Ramsey number $R(4,5)$ is defined to be the least positive integer n such that every n-vertex graph contains either a clique of order 4 or an independent set of order 5. With the help of a long computation using novel techniques, we prove that $R(4,5) = 25$. © 1995 John Wiley & Sons, Inc.

***Journal of Graph Theory*, 19, 309-322, 1995.**

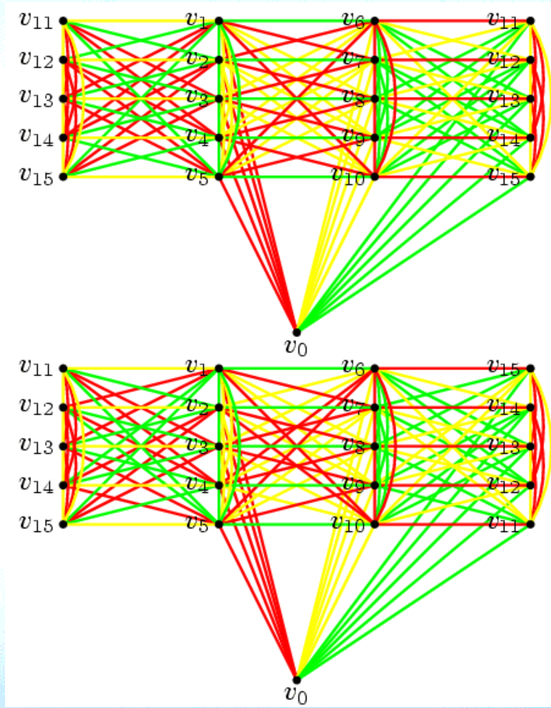
Erdös asks us to imagine an alien force, vastly more powerful than us, landing on Earth and demanding the value of $R(5, 5)$ or they will destroy our planet. In that case, he claims, we should marshall all our computers and all our mathematicians and attempt to find the value. But suppose, instead, that they ask for $R(6, 6)$. In that case, he believes, we should attempt to destroy the aliens.

——Spencer, J., *Ten Lectures on the Probabilistic Method*

Ramsey数

数学建模

- （**IMO 1964**）17位科学家中每一位和其余16位通信，在他们的通信中所讨论的仅有三个问题，而任两位科学家通信时所讨论的是同一问题，证明至少有三位科学家通信时所讨论的是同一问题
  - 选定科学家 v_1，他和其它16位科学家中至少6位讨论的是同一问题
  - 若这6位科学家中的其中两位讨论的也是该问题，则这两位与 v_1 三人讨论的是同一问题
  - 若这6位科学家中的任两位讨论都是另两个问题之一，则由 $r(3,3)=6$，其中至少有三位讨论的是一个问题

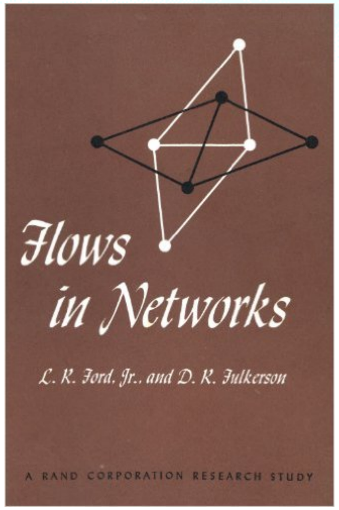


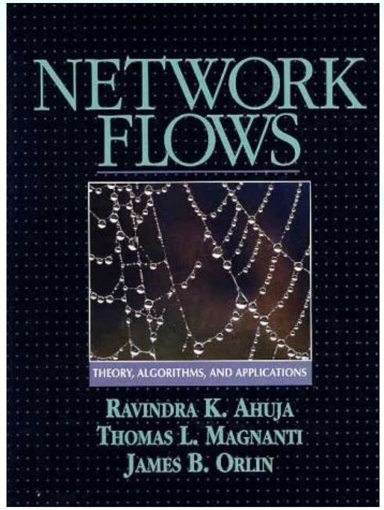
$r(3,3,3)=17$

Greenwood, R. E., Gleason, A. M., Combinatorial Relations and Chromatic Graphs, *Canadian Journal of Mathematics*, 7, 1-7, 1955.

网络流

- 网络
  - 有向图 $N=(V,A)$，弧 $a\in A$ 的容量（**capacity**）记为 $c(a)$
  - N 中存在一入度为 0 的顶点 s 和一出度为 0 的顶点 t，分别称为源（**source**）与汇（**sink**）
  - v^{+},v^{-} 分别表示 N 中以 v 为起点和终点的弧的集合
- 流（**flow**）：定义在 A 上的非负函数 f，$f(a)$ 称为流经弧 a 的流量





Ford LR, Fulkerson DR. *Flows in Networks*. Princeton University Press, 1962.

Ahuja RK, Magnanti TL, Orlin JB, *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*, Prentice Hall, 1993.

最大流

数学建模

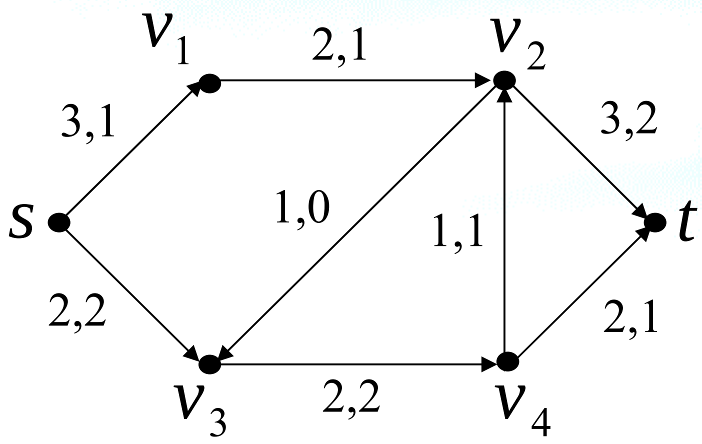
- 可行流
  - 经过每条弧的流量不超过每条弧的容量，即 $f(a) \le c(a)$
  - 除源和汇外，流入每个顶点 v 的流量等于流出 v 的流量，即

$$\sum_{a \in v^+} f(a) = \sum_{a \in v^-} f(a)$$

  - 可行流中流出源的流量与流入汇的流量必相同，称为该流的流量，记为 $\mathrm{val}(f)$

$$\sum_{a \in v^+} f(a) - \sum_{a \in v^-} f(a) = \begin{cases} \mathrm{val}(f), & 若 v = s \\ 0, & 若 v \ne s,t \end{cases}$$

- 最大流问题（**maximum flow**）：给定一网络，求网络中流量最大的可行流

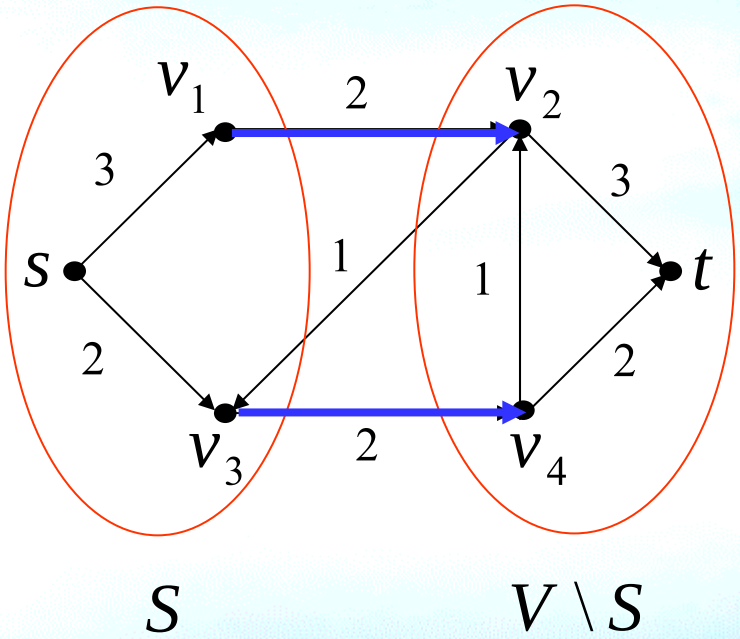


弧上第一个数字表示弧的容量，第二个数字表示当前每条弧的流量

该可行流的流量为**3**

割

- 割（cut）
  - 任取$S \subseteq V$，满足$s \in S, t \in V \setminus S$，所有起点在 S 中，终点在 $V \setminus S$ 中的弧的全体称为网络的割（cut），记为 $(S,\bar{S})$
  - 割 $(S,\bar{S})$ 中弧的容量之和称为割量，记为 $\mathrm{cap}(S,\bar{S})$。网络中割量最小（大）的割称为最小（大）割
- 最小割问题（minimum cut）：给定一网络，求网络中割量最小的割



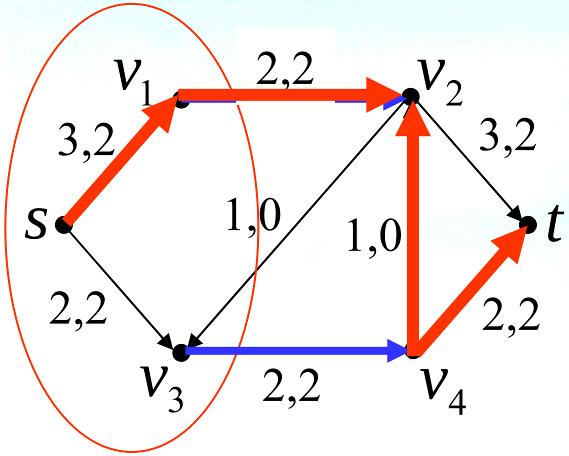
割，割量为 4

最大流与最小割

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 最大流最小割定理（**Max-flow min-cut theorem**）
  - 任一网络中，最大流量等于最小割量
- 最大流算法
  - **Ford–Fulkerson（1956）：** $O(|E|f)$
  - **Edmonds–Karp（1972）：** $O(|E|^2|V|)$
    Dinic（1970）： $O(|E||V|^2)$
  - **Goldberg-Tarjan（1988）：** $O\left(|E||V|\log\frac{|V|^2}{|E|}\right)$
  - **King, Rao, Tarjan（1994）+ Orlin（2013）：** $O(|E||V|)$

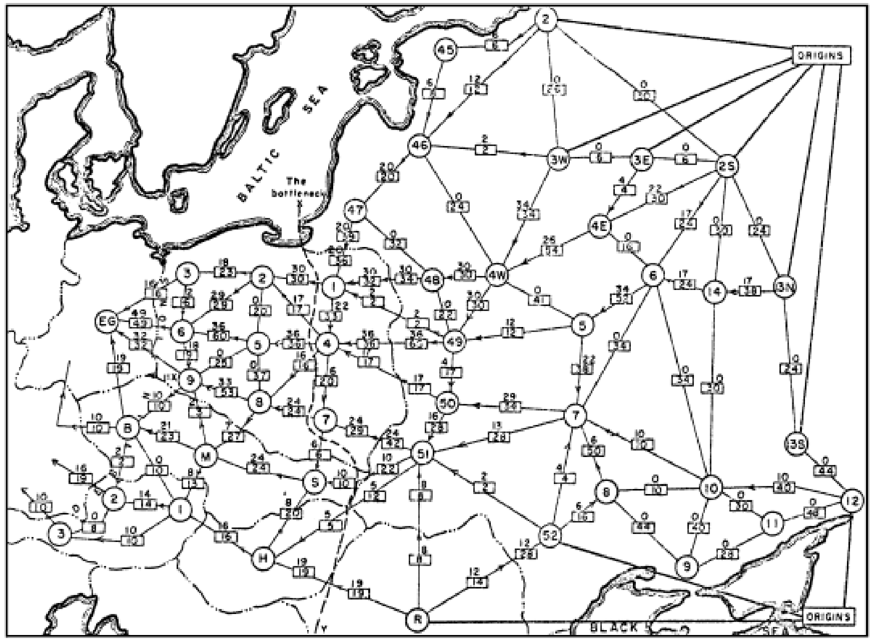


最大流，流量为 **4**

Goldberg AV, Tarjan RE. A new approach to the maximum-flow problem. *Journal of the ACM*, 35, 921-940, 1988.
King V, Rao S, Tarjan R. A faster deterministic maximum flow algorithm. *Journal of Algorithms*, 17, 447-474, 1994.
Orlin JB. Max flows in $O(nm)$ time, or better. *Proceedings of the 45th annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 765-774, 2013.

Ford LR, Fulkerson DR, Maximal flow through a network, *Canadian Journal of Mathematics*, 8, 399-404, 1956
Edmonds J, Karp RM. Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems. *Journal of the ACM*, 19, 248-264, 1972.

最大流与最小割



Harris TE, Ross FS,
Fundamentals of a Method for Evaluating Rail Net Capacities**,**
Research Memorandum-1573,
The RAND Corporation,1955

The Harris-Ross report solves a relatively large-scale maximum flow problem coming from the railway network in the Western Soviet Union and Eastern Europe ('satellite countries'). The interest of Harris and Ross was not to find a maximum flow, but rather a minimum cut ('interdiction') of the Soviet railway system.

For the data it refers to several secret reports of the CIA on sections of the Soviet and Eastern European railway networks. After the aggregation of railway divisions to vertices, the network has 44 vertices and 105 (undirected) edges.

It yields a flow of value 163,000 tons from sources in the Soviet Union to destinations in Eastern European 'satellite' countries, together with a cut with a capacity of, again, 163,000 tons.


浙江大学
ZheJiang University
谢　谢