

一、60321 网站发售某地区的铁路车票，近期推出一款名为“中铁卡”的优惠产品。每张中铁卡售价为 C 元，有效期为 T 天，可随时购买，立即生效。购买了中铁卡的乘客在其有效期内购买面值为 P 元的车票只须实付 βP 元，其中 $0 < \beta < 1$ 。在未来乘车行程与时间未知情况下，如何使购买中铁卡和车票支付的总金额最小的问题称为在线中铁问题。

(1) 同学甲在任何情况下，均不购买中铁卡；同学乙仅在当前需购买的车票价格不小于 $\frac{C}{1-\beta}$ 时，购买一张中铁卡。试问这两种策略哪一种的竞争比更小？

(2) 试给出在线中铁问题的一个下界；

(3) 若已知未来购买的 n 张车票价格 p_j 和乘车时间 $t_j, j=1, \dots, n$ ，其中 $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ ，构造有向图 $G=(V, E)$ ，其中 $V=\{u, w, v_1, \dots, v_n\}$ ， v_j 对应于需购买的第 j 张车票。试确定 G 的边和每条边的权，使中铁问题的离线形式等价于寻找图 G 中自 u 到 w 的一条最短有向路。

二、肾移植是终末期肾病患者治疗的主要手段。患者亲属的捐赠可扩大移植肾脏来源，但由于医学原因患者本人未必能移植亲属的肾脏。通过在患者和其他患者的亲属间交换移植的肾脏，可使更多患者获益。每位患者至多接受一个肾脏移植，每位亲属至多捐赠一个肾脏。对每一项医学上可行的移植，可通过评估得到该项移植的效用。某种交换方案的总效用为该方案实际开展的移植的效用之和。肾脏交换 (kidney exchange) 问题旨在寻找总效用最大的方案。

(1) 用 $v_i=(P_i, D_i)$ 表示一患者 P_i 和其亲属 D_i 组成的序偶，且 P_i 不能接受 D_i 的肾脏。如果限定只能在两对序偶间交换肾脏，即在移植可行情况下，将 D_j 的肾脏移植给 P_i ，将 D_i 的肾脏移植给 P_j 。试问肾脏交换问题可转化为何问题求解；

(2) 构造赋权有向图 $G_1=(V, A)$ ，其中 V 为 n 个序偶组成的集合， $e=v_i v_j \in A$ 当且仅当 P_i 可移植 D_j 的肾脏。弧 e 的权为该项移植的效用。如果不限定参与交换的序偶对数，对任意 k ，在移植可行情况下，可在 k 对序偶 $(P_{i_1}, D_{i_1}), \dots, (P_{i_k}, D_{i_k})$ 之间进行 k 项移植，即将 D_{i_1} 的肾脏移植给 P_{i_k} ，将 $D_{i_{k-1}}$ 的肾脏移植给 P_{i_1} ， $l=1, \dots, k-1$ 。试说明肾脏交换问题等价于图 G_1 上何问题；

(3) 构造赋权二部图 $G_2=(U \cup W, E)$ ，其中 $U=\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ ， $W=\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ 。对任意 i ， $P_i D_i \in E$ 且其权为 0。对任意 $i \neq j$ ， $P_i D_j \in E$ 当且仅当 $v_i v_j \in A$ ，且边 $P_i D_j$ 的权为弧 $v_i v_j$ 在 G_1 中的权。说明肾脏交换问题可转化为图 G_2 上的何问题求解。