1. 解：由$(X_n, n\ge 1)$的独立性，可得：

$$P(X_{n+1}=j|X_n=i, X_{n-1}=i_{n-1},\cdots,X_0=i_0)=P(X_{n+1}=j)=P(X_{n+1}=j|X_n=i).$$

从而，$(X_n, n\ge 1)$满足 Markov 链的定义.

显然，当转移概率$P(X_{n+1}=j|X_n=i)=P(X_{n+1}=j)$与 n 无关时，该 Markov 链为其次的，此时$(X_n, n\ge 1)$是独立同分布的随机变量.

2. 解：(1) $S=(S_n, n\ge 0)$是 Markov 链，所以$X_n=|S_n|$只与$X_{n-1}=|S_{n-1}|$有关，故$(X_n, n\ge 0)$为 Markov 链. 其转移概率为：

$$P\left(X_{n+1}=j|X_n=i\right)=p_{n;ij}$$
$$=\begin{cases} pP(S_n>0|X_n=i)+(1-p)P(S_n<0|X_n=i),(i>0, j=i+1) \\ (1-p)P(S_n>0|X_n=i)+pP(S_n<0|X_n=i),(j=i-1\ge 0) \\ 1,(i=0，j=1) \\ 0,(\text{其它}) \end{cases}$$

其中，$P(S_n>0|X_n=i)=\dfrac{C_n^{\frac{n+i}{2}}p^{\frac{n+i}{2}}(1-p)^{\frac{n-i}{2}}}{C_n^{\frac{n+i}{2}}p^{\frac{n+i}{2}}(1-p)^{\frac{n-i}{2}}+C_n^{\frac{n-i}{2}}p^{\frac{n-i}{2}}(1-p)^{\frac{n+i}{2}}}=\dfrac{p^i}{p^i+(1-p)^i}$,

$$P(S_n<0|X_n=i)=\frac{(1-p)^i}{p^i+(1-p)^i}.$$

注意到，在$X_n=i$的条件下，i与n是同奇偶的.

(2) 取任意$n\ge 0$，任意状态i,j以及$i_0,i_1,\cdots,i_{n-1}$，由$(Y_n, n\ge 0)$的定义，不难得到：

$$P(Y_{n+1}=j|Y_n=i, Y_{n-1}=i_{n-1},\cdots,Y_0=i_0)=\begin{cases} 1-p,(j=i+1\ge 1) \\ p,(j=i-1\ge 0) \\ p,(i=0, j=0) \\ 0,(\text{其它}) \end{cases},$$

显然仅与状态i有关，而与$i_0,i_1,\cdots,i_{n-1}$无关，故$(Y_n, n\ge 0)$为 Markov 链，且其转移概率已由上式给出.

3. 解：因为h是一一对应，存在$h^{-1}: h(\varepsilon)\mapsto \varepsilon$使得$X_n=h^{-1}(Y_n)$.

由于 X_n 为 Markov 链, 对任意 $n \ge 0$，任意状态 i, j 以及 $i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}$，有：

$$P(Y_{n+1}=j \mid Y_n=i, Y_{n-1}=i_{n-1}, \cdots, Y_0=i_0)$$

$$=P(X_{n+1}=h^{-1}(j) \mid X_n=h^{-1}(i), X_{n-1}=h^{-1}(i_{n-1}), \cdots, X_0=h^{-1}(i_0))$$

$$=P(X_{n+1}=h^{-1}(j) \mid X_n=h^{-1}(i))$$

$$=P(Y_{n+1}=j \mid Y_n=i).$$

故 $(Y_n, n \ge 0)$ 为 Markov 链.

5. 解：$P(X_0=1, X_1=2, X_2=3)=P(X_0=1)P(X_1=2 \mid X_0=1)P(X_2=3 \mid X_1=2)$

$$=0.3 \times 0.2 \times 0=0.$$

6. 解：$P(X_2=2, X_3=2 \mid X_1=1)=P(X_2=2 \mid X_1=1)P(X_3=2 \mid X_2=2)=p_{12}p_{22}=0.12$,

$P(X_1=2, X_2=2 \mid X_0=1)=p_{12}p_{22}=0.12$.

7. 解：$P(X_0=2, X_1=2, X_2=1)=p_0(2)p_{22}p_{21}=0.5 \times 0.1 \times 0.5=0.025$.

8. 解：由于 $X_{n+1}=\max\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n+1}\}=\max\{X_n, \xi_{n+1}\}$，显然 X_{n+1} 的值只依赖于 X_n 与 ξ_{n+1}，从而 $X=(X_n, n \ge 0)$ 是 Markov 链. 其转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. 解：由于转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

经计算可得：

$$P^2=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{bmatrix},\ P^3=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{3}{8}&\frac{3}{8}\\\frac{3}{8}&\frac{1}{4}&\frac{3}{8}\\\frac{3}{8}&\frac{3}{8}&\frac{1}{4}\end{bmatrix},\ P^4=\begin{bmatrix}\frac{3}{8}&\frac{5}{16}&\frac{5}{16}\\\frac{5}{16}&\frac{3}{8}&\frac{5}{16}\\\frac{5}{16}&\frac{5}{16}&\frac{3}{8}\end{bmatrix}.$$

从而，$P(X_0=1|X_0=1)=1$，$P(X_1=1|X_0=1)=p_{11}^{(1)}=0$，$P(X_2=1|X_0=1)=p_{11}^{(2)}=\frac{1}{2}$，

$P(X_3=1|X_0=1)=p_{11}^{(3)}=\frac{1}{4}$，$P(X_4=1|X_0=1)=p_{11}^{(4)}=\frac{3}{8}$.

12. 解：记 $q_i=P(X_{T-1}=2|X_0=i),i=1,2$. 其中，$T=\min\{n\ge 0:X_n=3\}$.

对 X_0 运用一步分析法，即分析 X_1 的所有可能取值，可列方程组

$$\begin{cases}q_1=0.2q_2+0.3q_1\\q_2=0.5q_1+0.1q_2+0.4\end{cases},$$

求解可得 $\begin{cases}q_1=\frac{8}{53}\\q_2=\frac{28}{53}\end{cases}$.

15. 解：(1) 状态 $\{1,2,3,4\}$ 可分为两个互达等价类 $\{1,2,3\}$ 与 $\{4\}$. 状态 $\{1,2,3\}$ 有相同的周期 $d_1=d_2=d_3=1$，是非周期的；而状态 $\{4\}$ 的周期不存在.

(2) 状态 $\{1,2,3,4\}$ 是互达的，故有相同的周期，通过简单观察可知 $d_1=d_2=d_3=d_4=3$.

16. 解：首先，我们考虑线性方程组

$$(P-I)x=0,$$

即

$$\begin{bmatrix}p_{11}-1&p_{12}&\cdots&p_{1n}\\p_{21}&p_{22}&\cdots&p_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\p_{n1}&p_{n2}&\cdots&p_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},$$

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=1,$$

$$x_i>0.$$

我们用反证法证明上述方程组的解 x 一定满足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$. 不妨设

$x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge 0$. 如果 $x_1 > x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge 0$，那么

$$(p_{11}-1)x_1 + p_{12}x_2 + \cdots + p_{1n}x_n < ((p_{11}-1) + p_{12} + \cdots + p_{1n})x_1 = 0,$$

与条件矛盾，从而 $x_1 = x_2$，同理可证 $x_2 = \cdots = x_n$. 这也就证明了，对任意的 i，j，满足 $p_{ij} = p_{jj}$，这是因为向量 $[p_{1j}, p_{2j}, \cdots, p_{nj}]^T$ 满足上述方程. 事实上，矩阵 $P-I$ 是对角占优的.

另一方面，由于该 Markov 链是不可约的，必有 $p_{jj} > 0$，否则 $p_{1j} = p_{2j} = \cdots = p_{nj} = 0$，从而状态 j 是瞬时的，与不可约矛盾.

17. 解：(1) $P^k = \begin{bmatrix} \frac{1+(-1)^k}{2^{k+1}} & \frac{1+(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} & 1-\frac{1}{2^k} \\ \frac{1+(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} & \frac{1+(-1)^k}{2^{k+1}} & 1-\frac{1}{2^k} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (可直接计算得到或由归纳法得到)

(2) 当 $i = 1,2$ 时，$p_{ii}^{(n)} = \begin{cases} 0, n\text{为奇数} \\ \frac{1}{2^n}, n\text{为偶数} \end{cases}$，从而 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} < \infty$，故 $\{1,2\}$ 为瞬时状态;

当 $i = 3$ 时，$p_{33}^{(n)} = 1, \forall n \ge 1$，从而 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{33}^{(n)} = \infty$，故 3 是常返状态.

18. 解：(1) 考虑从状态 j 到状态 k 的任意一条长度超过 $r-1$ 的路径. 由于该 Markov 链共有 r 个不同的状态，所以必定存在某状态 i，使得该路径经过状态 i 不少于两次，从而在路径对应的有向图中存在“环”，通过去除所有这样的“环”，我们可以将该路径的长度减小到不超过 $r-1$. 从而命题得证.

(2) 记 $I = \{1, \cdots, j-1, j+1, \cdots, r\}$ (将除 j 以外的 $r-1$ 个状态“合并”为一个状态 I). 由于 j 是常返态，所以 $p_{Ij} > 0$，从而 $p_{II} = 1 - p_{Ij} \in (0,1]$.

若 $p_{II} = 1$，则经过 n $(n > r-1)$ 步之后首次到达状态 j 的概率为 $f_{Ij}^{(n)} = 0$；若 $p_{II} \in (0,1)$，则经过 n $(n > r-1)$ 步之后首次到达状态 j 的概率为 $f_{Ij}^{(n)} = p_{II}^n$. 证毕.

19. 解：由转移概率矩阵易知，状态 $\{2,3\}$ 是常返的，状态 $\{1\}$ 是瞬时的.

20. 解：由例 4.8 中的结果可知甲最终赢的概率为

(1) $P(\text{甲最终赢})=\dfrac{\left(\frac{1-p}{\mathrm{p}}\right)^{a}-1}{\left(\frac{1-p}{\mathrm{p}}\right)^{a+b}-1}=\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{16}-1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{36}-1}$；

(2) $P(\text{甲最终赢})=\dfrac{\left(\frac{1-p}{\mathrm{p}}\right)^{a}-1}{\left(\frac{1-p}{\mathrm{p}}\right)^{a+b}-1}=\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{4}-1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{24}-1}$.

21. 解：(1) 状态空间包含三个互达等价类$\{1,2\}$，$\{3,4\}$，$\{5,6\}$. 其中$\{1,2\}$与$\{3,4\}$是常返的, 而$\{5,6\}$是瞬时的. 且状态$\{1,2,3,4\}$均是非周期的. 从而由推论 4.1 可知,

$$\lim_{n\to\infty}p_{6j}^{(n)}=\frac{f_{6j}}{\tau_j}.$$

其中, f_{ij}为从i出发可达到j的概率, τ_j为状态j的平均返回时间.

观察转移概率矩阵的最后两行, 不难发现$f_{61}=f_{62}=f_{63}=f_{64}=\frac{1}{2}$.

对于状态1而言, $\tau_1=E\left(T_1\middle|X_0=1\right)=1\times\frac{1}{3}+\sum_{k=2}^{\infty}k\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}\cdot\frac{2}{3}=2$, 从而

$$\lim_{n\to\infty}p_{61}^{(n)}=\frac{f_{61}}{\tau_1}=\frac{1}{4}.$$

同理于状态$\{2,3,4\}$, 经计算可得

$$\lim_{n\to\infty}p_{62}^{(n)}=\frac{f_{62}}{\tau_2}=\frac{1}{4},$$

$$\lim_{n\to\infty}p_{63}^{(n)}=\frac{f_{63}}{\tau_3}=\frac{2}{19},$$

$$\lim_{n\to\infty}p_{64}^{(n)}=\frac{f_{64}}{\tau_4}=\frac{15}{38}.$$

另一方面, 由于状态$\{5,6\}$是瞬时的, 显然有

$$\lim_{n\to\infty}p_{65}^{(n)}=\lim_{n\to\infty}p_{66}^{(n)}=0.$$

(2) 由于状态 6 是个吸收态, 从而显然有

$$\lim_{n\to\infty}p_{61}^{(n)}=\lim_{n\to\infty}p_{62}^{(n)}=\lim_{n\to\infty}p_{63}^{(n)}=\lim_{n\to\infty}p_{64}^{(n)}=\lim_{n\to\infty}p_{65}^{(n)}=0,\ \lim_{n\to\infty}p_{66}^{(n)}=1.$$

22. 解：由题意可知，X 是非周期不可约 Markov 链，且所有的状态均是正常返的. 所以由定理 4.9 及引理 4.2 可知，该 Markov 链存在平稳分布 π 且满足

$$\pi_j = \frac{1}{\tau_j},\ \ j \in \varepsilon .$$

观察方程组

$$\begin{bmatrix} p_0 & p_m & \cdots & p_1 \\ p_1 & p_0 & \cdots & p_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_m & p_{m-1} & \cdots & p_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_m \end{bmatrix},$$

$$\sum\nolimits_{j=0}^{m} \pi_j = 1,$$

可知

$$\pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{m+1} & \frac{1}{m+1} & \cdots & \frac{1}{m+1} \end{bmatrix}$$

满足方程，从而为该 Markov 链的一个平稳分布.

进一步，由推论 4.1 可知，

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}}{\tau_j} = \frac{1}{m+1},\ \ \forall i, j \in \{0,1,2,\cdots,m\}.$$

23. 解：用有序对 $X_n = (*,*)$ 表示第 n 天与第 $n+1$ 天的天气状况，且其状态空间为 $\{1,2,3,4\}$，其中，$1 = (晴,晴)$，$2 = (晴,云)$，$3 = (云,晴)$，$4 = (云,云)$. 那么，显然 $X = \{X_n, n \ge 1\}$ 是一个 Markov 链，且其转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}.$$

设 π 是 X 的平稳分布，则满足下面方程组

$$\begin{cases} \pi_1 = 0.8\pi_1 + 0.6\pi_3 \\ \pi_2 = 0.2\pi_1 + 0.4\pi_3 \\ \pi_3 = 0.4\pi_2 + 0.1\pi_4 \\ \pi_4 = 0.6\pi_2 + 0.9\pi_4 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{cases},$$

求解可得，$\pi = \left(\frac{3}{11}, \frac{1}{11}, \frac{1}{11}, \frac{6}{11}\right)$. 此外，从长远来看，晴天的概率为$\frac{3}{11} + \frac{1}{11} = \frac{4}{11}$.

26. 解：(1) $P\left(X_2 = 2, X_1 = 2 \middle| X_0 = 1\right) = p_{12}p_{22} = 0.1$.

(2) $P\left(X_2 = 1 \middle| X_0 = 3\right) = p_{31}^{(2)} = 0.36$.

(3) 记$T = \min\left\{n \geq 1 : X_n \neq 3 \middle| X_0 = 3\right\}$，那么$T$服从参数为 0.8 的几何分布，从而$E(T) = \frac{5}{4}$.

27. 解：(1) 求解如下关于π的方程组

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{6}\pi_3 \\ \pi_2 = \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3 \\ \pi_3 = \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases},$$

可得$\pi = \left(\frac{6}{25}, \frac{2}{5}, \frac{9}{25}\right)$.

(2) 由题可知X是非周期不可约的 Markov 链，且所有状态都是正常返的. 从而由定理 4.9 可知，$\tau_1 = \frac{25}{6}$，$\tau_2 = \frac{5}{2}$，$\tau_3 = \frac{25}{9}$.