

22-23 随机过程

2023 年 6 月 27 日

1. $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 为独立服从参数为 λ, μ 的泊松过程, S_i 与 T_i 分别为过程发生第 i 个事件的时刻。

(1) 计算 $E(T_n - S_n)$

(2) 计算 $P(S_1 < T_n)$

2. 一道 Markov 链题目, 判断是否可逆, 求平稳分布, 平均回转时等

3. 生成函数 $\phi(s) = \frac{p}{1-s(1-p)}$

(1) 求 ξ 分布

(2) 求 $P(Z_2 = 2)$

(3) 求 $Z_2 = 2$ 的条件下灭绝概率

4. X_1, X_2, \dots 相互独立, $E(X_i) = \mu, \text{Var}(X_i) = \delta^2$. 令 $Y_n = X_n X_{n+1} X_{n+2}$

(1) 求 Y_n 的均值函数和自相关函数

(2) 验证 Y_n 是宽平稳过程

(3) $N \rightarrow \infty, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i$ 是否收敛, 收敛到什么, 并叙述原因

下面 B_t 代表标准 Brown 运动

5.

(1) $X = \frac{\sqrt{2}}{2} B_t + \frac{\sqrt{2}}{2} B_s$

$Y = \frac{\sqrt{2}}{2} B_t - \frac{\sqrt{2}}{2} B_s$

$0 < s < t$

求 $E(XY)$ 和 (X, Y) 的联合分布

(2) 给了一个布朗桥过程的函数证明是标准 Brown 运动

6. (1) Ito 积分计算

(2) $Y_t = \int_0^t (B_s + s)^2 ds$, 求 $\text{Var}(Y(t))$.