点集拓扑

王枫

摘要

讲义的绝大多数内容来自Munkres的《拓扑学》，顺序略有调整。

目录

1 介绍

粗略来说，拓扑学研究的是“空间”在“连续映射”下不变的性质。本节讨论几个直观拓扑的例子和实数上的拓扑。

1.1 直观拓扑

在平面上画如下两个图，虽然它们有线段有曲线，长度各一，但是我们很容易看出它们有很多共同之处。如果把它们画在橡皮膜上，我们可以拉扯橡皮膜让这两张图完全一样。

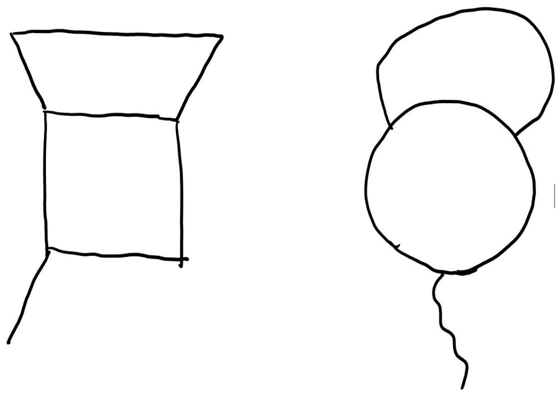

图 1: 两个平面图

再看两个平面上的区域（图2），即便是在橡皮膜上我们也无法把其中一个变成另一个。一个看似有理的说法这两个区域的洞不一样多，但是如果我们把第一个区域扭曲地放在3维空间中（图3），我们就看不到洞了，而这个3维空间中的子集和第一个区域是一样（“同胚”）的。

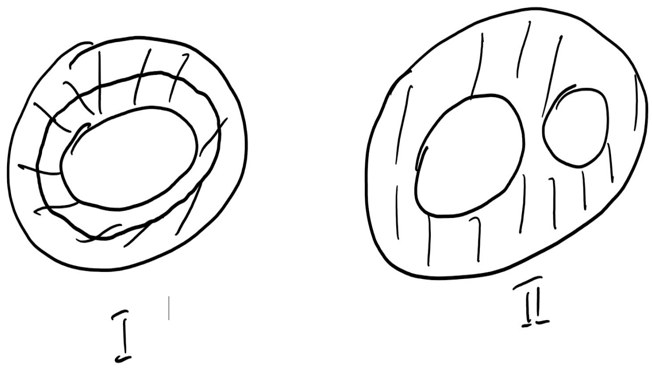

图 2: 两个平面区域

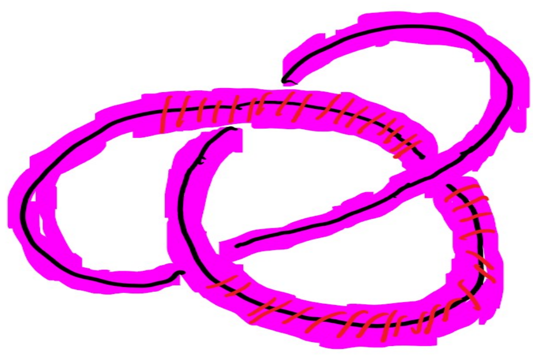

图 3: 扭曲的嵌入

下面我们考虑代数基本定理的"拓扑"证明。对多项式$P(z)=a_nz^n+...(a_n\neq 0,n\geq 1)$，我们用反证法证明$P(z)=0$有根。考虑曲线$C_r=\{P(re^{i\theta})|\theta\in[0,2\pi)\}$, $r\geq 0$. 当r连续变化时，C_r是一族连续变化的曲线且C_r不经过原点（反证法假设）。不经过原点的曲线可以定义"对原点的环绕数"。当r很小时，易知C_r对原点的环绕数为0, 从而这族曲线对原点的环绕数都为0. 当r很大时，$p(z)$和a_nz^n"差不多"，所以C_r和$B_r=\{(re^{i\theta})^n|\theta\in[0,2\pi)\}$"差不多"，从而可以不经过原点而将$C_r$连续地变成$B_r$，所以$B_r$对原点的的环绕数和$C_r$对原点的的环绕数相同. 而$B_r$的对原点的环绕数为$n$，$C_r$的对原点的环绕数为0，矛盾。如果要得到一个真正的证明，需要给出"曲线的连续变化"和"对原点的环绕数"的定义。

1.2 实数的构造

我们暂时将集合理解为一些对象的全体，具有确定性、无序性和无重复性。首先有自然数$\mathbb{N}$（严格定义后面给出），然后可以定义有理数$\mathbb{Q}=\{\frac{a}{b}|a,b\in\mathbb{Z},b\neq 0\}$, 最后实数$\mathbb{R}$定义为有理数构成的柯西序列的等价类。

定义 1.2.1. 设X是一个集合，$\sim$是X上的二元关系，若其满足：

- $\forall a\in X,a\sim a$;
- $a\sim b\to b\sim a$;
- $(a\sim b\wedge b\sim c)\to a\sim c$,

则称$\sim$为等价关系。

设$\sim$为X上的等价关系，定义$[a]=\{x\in X|x\sim a\}$，称为a所在的等价类。

引理 1.2.2. 以下结论成立：

- $a\in[a]$
- $[a]$与$[b]$的交非空当且仅当$[a]=[b]$.

定义 1.2.3. $\{[a]|a\in X\}$称为X在等价关系$\sim$下的等价类集合，记为$X/\sim$. 定义映射$\pi:X\to X/\sim$为$\pi(a)=[a]$, 称π为关于等价关系$\sim$的自然投射。

$X/\sim$中的元素是一个等价类，也就是X的一个子集。 $\forall U\in X/\sim$, U中的任何元素称为该等价类的代表元: $\forall a\in U,[a]=U$.

例 1.2.4. $X=\{1,2,3\}$，等价关系为$1\sim 1,2\sim 2,3\sim 3,2\sim 3,3\sim 2$. 则$[1]=\{1\},[2]=[3]=\{2,3\}$.

当X上有某种运算时，我们希望该运算能诱导出$X/\sim$上的运算。

引理 1.2.5. 给定映射$m:X\times X\to X$, 则存在映射$\bar{m}:(X/\sim)\times(X/\sim)\to X/\sim$满足$\bar{m}(\pi(a),\pi(b)=\pi(m(a,b)),\forall a,b\in X$当且仅当若$a\sim a',b\sim b'$, 则$m(a,b)\sim m(a',b')$.

通常我们用"交换图表"：

$$\begin{tikzcd} X\times X \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\pi\times\pi"] & X \arrow[d, "\pi"] \\ (X/\sim)\times(X/\sim) \arrow[r, "\bar{m}"] & X/\sim \end{tikzcd}$$

表示$\bar{m}(\pi(a),\pi(b)=\pi(m(a,b)),\forall a,b\in X$.

命题 1.2.6. 在$\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})=\{(a,b)|a,b\in\mathbb{Z},b\neq 0\}$上定义关系$\sim$为$(a,b)\sim(c,d)$当且仅当$ad=bc$, 则$\sim$为等价关系。

$\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$在如上等价关系下的等价类就是有理数集合$\mathbb{Q}$, 将$[(a,b)]$记为$\frac{a}{b}$. 在集合$\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$上定义运算$m((a,b),(c,d))=(ac,bd)$, 则$m$满足引理1.2.5的条件，从而诱导$\mathbb{Q}$上的运算，即通常的乘法。加法可类似定义。

定义 1.2.7. 若序列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}(a_n \in \mathbb{Q})$满足，对任意正有理数$q$，存在正整数$N$使得当$n, m \geq N$时，$|a_n - a_m| < q$, 则称序列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}(a_n \in \mathbb{Q})$为$Cauchy$列。
若序列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}(a_n \in \mathbb{Q})$满足，对任意正有理数$q$，存在正整数$N$使得当$n \geq N$时，$|a_n| < q$, 则称序列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛到0。

在K上定义运算$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \pm \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n \pm b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \cdot \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$, 则这些运算也满足引理1.2.5的条件，它们诱导了实数$\mathbb{R}$上的加减法和乘法。

1.3 连续函数

实数到实数的连续函数是重要的研究对象，下面我们用另一种方式叙述连续函数的定义。

定义 1.3.1. 若实数的子集A满足：$\forall x \in A$，存在$\delta > 0$, 使得$(x - \delta, x + \delta) \subseteq A$, 则称$A$为（实数的）开子集。

命题 1.3.2 (作业)**.** 记$\mathcal{F} = \{U | U\text{是开子集}\}$, 则

- $\emptyset, \mathbb{R}$均在$\mathcal{F}$中,
- 若$U, V \in \mathcal{F}$，则$U \bigcap V \in \mathcal{F}$,
- 若$U_\alpha(\alpha \in J)$均在$\mathcal{F}$中，则$\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \in \mathcal{F}$.

对一般的映射$f : X \to Y$，以及X的子集A，Y的子集B，定义$f(A) = \{f(a) | a \in A\}$, $f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$，分别称为$A$的像集和$B$的原像集。

定义 1.3.3. 若$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$满足：给定$x \in \mathbb{R}$, 若对包含$f(x)$的任意开子集$V$，存在包含$x$的开子集$U$使得$f(U) \subseteq V$, 则称$f$在$x$处连续。若$f$在每点处均连续，则称$f$连续或$f$为连续函数。

引理 1.3.4. f在x处连续当且仅当$\forall \epsilon > 0$，存在$\delta > 0$使得当$|x' - x| < \delta$时，$|f(x') - f(x)| < \epsilon$.

引理 1.3.5. f连续当且仅当对任意开子集V，$f^{-1}(V)$是开子集。

证明. $\Leftarrow$: 对任意$x \in \mathbb{R}$, 以及包含$f(x)$的开子集V, 则$f^{-1}(V)$是开子集，而显然$x \in f^{-1}(V)$, 从而取$U = f^{-1}(V)$即可。
$\Rightarrow$: 任取开集V, 往证$f^{-1}(V)$是开子集。对任意$x \in f^{-1}(V)$, 由f在x点处连续知存在开子集U_x使得$f(U_x) \subset V$, 即$U_x \subset f^{-1}(V)$. 从而$f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x$, 因此$f^{-1}(V)$是开子集。 □

命题 1.3.6. 设f, g为两个连续函数，则$f \circ g$是连续函数。

连续映射不局限于实数到实数的映射，本课程的任务之一就是将连续映射的映射推广到更一般的集合（拓扑空间）上，并研究连续映射的性质。以上我们回顾了有理数和实数的构造，在给出这些逻辑构造之前，我们对有理数和实数的理解是经验的，比如均分5份取2份为$\frac{2}{5}$，物体的长度为一个实数等。这些经验的理解处在“看山是山，看水是水”的阶段，是不够完善的，比如$\frac{2}{5}$个蛋糕加上$\frac{1}{3}$个蛋糕等于$\frac{11}{15}$个蛋糕不是蛋糕的性质，3个苹果加2个苹果等于5个苹果不是苹果的性质，而是“数”的性质，那么究竟什么是数的性质呢？通过逻辑构造，可以得到关于有理数和实数（自然数还没有得到）的严格定义，并证明它们的基本性质。但逻辑构造的有理数和实数并不像经验那么简单，这是“看山不是山，看水不是水”的阶段。不过最终你会发现，如此构造的有理数和实数具有我们经验到的全部性质，逻辑构造可以看成是辅助性的和基础性的，从而我们能够“看山还是山，看水还是水”。为了定义自然数这个更基本的概念，我们还要分析得深入一些。

2 逻辑基础

数学是可以看成建立在公理和定义之上的演绎体系。公理虽然是人为选择的，但是要满足两个条件：1. 逻辑上要无矛盾的，而且要足够简单 2. 能导出有意思的数学，也就是说由这些公理可以描述丰富的对象（数学研究的对象是形式化的，所以公理和定义告诉我们的是“操作”

的方法）。现代数学中最基本的概念是集合（自然数可以用集合论定义），关于集合的公理就是现代数学需要的全部公理。

2.1 ZF公理系统

如果对集合的使用不加限制，会产生罗素悖论。公理集合论能够避免该问题并能为现代数学提供必要的逻辑基础，其中的原始概念是集合，原始关系是$\in$（给定两个集合a,b，若$a \in b$，则称a是b的元素或成员），原始概念和原始关系通过以下公理约束：

公理 0. *存在集合X满足$\forall x, x \notin X$，即存在不包含任何元素的集合。*

公理 1 (外延公理)**.** $\big(\forall x(x \in A \to x \in B) \wedge \forall x(x \in B \to x \in A)\big) \to (A = B)$.

由外延公理，公理0中的集合是唯一的，称为空集，记为$\emptyset$. 若$x \in A \to x \in B$，则称A是B的子集（或B包含A），记为$A \subseteq B$或$A \subset B$.

公理 2 (内涵公理)**.** *任给公式ϕ和集合A, 存在集合$B = \{x \in A|\phi(x)\}$:* $\forall A\big(\exists B(x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \phi(x))\big)$.

任给集合A,B, 由内涵公理存在集合$C = \{x \in A|x \in B\}$, 记为$A \bigcap B$. 由外延公理$A \bigcap B = B \bigcap A$. 给定非空集合$A$，任取$a_0 \in A$, 定义$\bigcap A = \{x \in a_0|\forall a \in A(x \in A)\}$, 即$x \in \bigcap A \longleftrightarrow \forall a \in A(x \in a)$. (约定$\bigcap \emptyset = \emptyset$.)

公理 3 (无序对公理)**.** *任给集合A,B，存在集合C满足：$x \in C \leftrightarrow x = A$或$x = B$. 记$C = \{A, B\}$（若$A = B$, 则$C = \{A\}$).*

对集合a,b，由无序对公理，存在集合$\{\{a\},\{a,b\}\}$, 称为有序对，记为(a,b). 由无序对公理知存在集合$\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\},\{\{\emptyset\},\emptyset\}$.

公理 4 (并集公理)**.** *任给集合A, 存在集合$B = \{x|$存在$y \in A$使得$x \in y\}$，记$B = \bigcup A$.*

任给集合A,B, 由无序对公理和并集公理，存在集合$\bigcup\{A,B\}$, 记为$A \bigcup B$. 由定义$x \in A \bigcup B$当且仅当$x \in A$或$x \in B$. 由此知存在集合$\{\emptyset,\{\emptyset\}\} \bigcup \{\{\{\emptyset\},\emptyset\}\} = \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\},\emptyset\}\}$... 记$0 = \emptyset, 1 = \{\emptyset\}, 2 = \{\phi,\{\phi\}\}, 3 = \{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\}, 4 = ...$

公理 5 (幂集公理)**.** *任给集合A，存在集合$B = \{x|x \subseteq A\}$, 记$B = P(A)$.*

给定集合A,B，由幂集公理，存在集合$P(P(A \bigcup B))$. 由内涵公理，存在集合

$$C = \{x \in P(P(A \bigcup B))|\exists a \in A \exists b \in B(x = (a,b))\},$$

记$C = A \times B$, 称为A和B的笛卡尔积。$A \times A$的任意子集R称为A上的二元关系，将$(a,b) \in R$记为aRb.

对任意两个集合A,B，定义$\tilde{A} = A \times \{1\}, \tilde{B} = B \times \{2\}$, 则$\tilde{A} \bigcap \tilde{B} = \emptyset$, 且存在$\tilde{A} \bigcup \tilde{B}$到$A \bigcup B$的满射。称$\tilde{A} \bigcup \tilde{B}$为$A,B$的无交并，记为$A \sqcup B$.

定义 2.1.1. *若$F \subseteq A \times B$满足$\forall a \in A, \exists! b \in B\, s.t.\, (a,b) \in F$, 则称$F$为$A$到$B$的映射，这个唯一的$b$记为$F(a)$. 称$A$为$F$的定义域，$B$称为余定义域，记为$dom(F) = A, codom(F) = B$.*

映射的像集和原像集如第一章定义。对映射$F: A \to B$以及A的子集C, 令$F|_C = \{(a,b) \in F|a \in C\}$, 则$F$为$C$到$B$的映射，称为$F$在$C$上的限制。
若$F(a) = F(b)$推出$a = b$则称F为单射；若对B中任意元素b，存在$a \in A$使得$F(a) = b$，则称F为满射。既单又满的映射称为1-1映射。设A是X的子集，定义映射$f : A \to X$为$f(a) = a, \forall a \in A$, 则$f$为单射，称为含入映射。设$X,Y$是两个集合，则存在集合$\{f \subseteq X \times Y|f$是映射$\}$, 记为$Y^X$, 称为函数空间。

引理 2.1.2. *存在$P(X)$到2^X的1-1对应。*

证明. 定义映射$\phi : P(X) \to 2^X$为

$$\phi(A)(x) = \begin{cases} 0 \quad , \quad x \notin A \\ 1 \quad , \quad x \in A \end{cases} \tag{2.1}$$

□

$\phi(A)$称为A的示性函数，通常记为χ_A. 若$X = \emptyset$, 则$Y^X = \{\emptyset\}$. X^n也记为$\{(a_1, a_2, ..., a_n)|a_i \in X\}$.

定义映射$\pi_1 : A \times B \to A$为$\pi_1(a,b) = a$: $\pi_1 = \{((a,b),c) \in (A\times B)\times A | a = c\}$, 称$\pi_1$为$A\times B$向第一个分量的投影，类似可定义向第二个分量的投影。类似可定义有限个集合$A_i(1 \le i \le n)$的笛卡尔积以及朝每个分量的投射。给定映射$f : A \to B, g : C \to D$, 则可定义 $f \times g : A\times C \to B\times D$为$f\times g(a,c) = (f(a), g(c))$. 设$f : J \to P(X)$为映射，则$\{f(\alpha)|\alpha \in J\}$是$P(X)$的子集。称$f$为$X$中一族集合，记$f(\alpha)$为$A_\alpha$, 在没有歧义的情况下，我们也将$f$记为$\{A_\alpha|\alpha \in J\}$. 定义 $\Pi(f) = \{g$为J到X的映射$|g(\alpha) \in f(\alpha)\}$. 通常将$\Pi(f)$记成 $\Pi_{\alpha\in J} A_\alpha$, 将$g$记成 $(g(\alpha))_{\alpha\in J}$或者$(g_\alpha)_{\alpha\in J}$. 定义$\pi_\alpha : \Pi_{\alpha\in J} A_\alpha \to A_\alpha$为$\pi_\alpha(g) = g(\alpha)$. 这是一般情况的笛卡尔积，若$f(\alpha) \equiv X$, 则$\Pi(f) = X^J$.

引理 2.1.3. *如上设A_α为X中一族集合，且$\bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha = X$. $f_\alpha : A_\alpha \to Y$为映射（$f_\alpha$究竟是什么？），若$f_\alpha|_{A_\alpha \bigcap A_\beta} = f_\beta|_{A_\alpha \bigcap A_\beta}$, $\forall \alpha, \beta \in J$, 则存在$f : X \to Y$使得$f|_{A_\alpha} = f_\alpha$.*

公理 6 (无限公理)**.** *存在集合X满足$\emptyset \in X$且$x \in X \to x \bigcup \{x\} \in X$.*

满足如上性质的集合称为归纳集。

引理 2.1.4. *存在归纳集$\mathbb{N}$，使得任意归纳集均包含$\mathbb{N}$.*

$\mathbb{N}$中的元素称为自然数。对$n \in \mathbb{N}$, 记$n \bigcup \{n\}$为$n+1$.

命题 2.1.5. *设依赖于自然数k的命题$P(k)$满足:*

- *$P(0)$成立*
- *$P(k) \to P(k+1)$*

则对任意自然数k, $P(k)$成立。

Peano公理. *自然数$\mathbb{N}$具有如下性质:*

- *$0 \in \mathbb{N}$*
- *存在单射$S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$满足不存在$x$使得$S(x) = 0$. S称为后继(successor)。 ($S(x) = x + 1$)*
- *给定命题$P(k)$，设$P(0)$成立，且$P(k)$成立推出$P((k+1)$成立，则$P(k)$对所有自然数成立。*

命题 2.1.6. *给定自然数n, 则对任意$x \in n$, x是自然数。*

证明. 归纳证明$P(k) : \forall x \in k(x \in \mathbb{N})$. $P(0)$为虚真命题，设$P(k)$成立，对$x \in k+1$, 则$x \in k$或者$x = k+1$，对前者用归纳即可。 □

由此可知任意自然数n, 都有$n \subseteq \mathbb{N}$.

定义 2.1.7. *对自然数n, m，若$n \in m$，则称$n < m$.*

命题 2.1.8. *以下结论成立*

- *若$n \ne 0$，则$0 < n$*
- *若$n < m, m < l$, 则$n < l$*
- *任给自然数n, m, $n < m, m < n, m = n$三者恰有一个成立。*

证明. 1)考虑命题$P(k): k=0\vee 0<k$. 则$P(0)$成立. 设$P(k)$成立，往证$P(k+1)$成立。若$k=0$，显然。若$0<k$, 即$\emptyset\in k$，从而$\emptyset\in k\bigcup\{k\}$, 即$P(k+1)$成立。
2)考虑命题$P(k): n<m, m<k\to n<k$. $P(0)$为虚真命题。设$P(k)$成立，若$m<k+1$, 则$m<k$或$m=k$. $m<k$即归纳假设，$m=k$则$n\in k\subseteq k+1$.

□

因为$n=\{x\in\mathbb{N}|x<n\}$, 我们可记$n=\{0,1,...,n-1\}$($n-1$即为当$n\neq 0$时满足$m+1=n$的唯一自然数)。

命题 2.1.9. *设A为$\mathbb{N}$的非空子集，求证：A有最小元。*

证明. 任取$a\in A$, 则$B=\{x\in A|x\leq a\}$为$\{0,1,...,a\}$的非空子集。考虑命题$P(k):\{0,1,...,k\}$的非空子集有最小元。 □

一类重要的构造定义在$\mathbb{N}$上的映射的方法称为归纳定义。

命题 2.1.10. *给定集合A和映射$G:\{f\subseteq\mathbb{N}\times A|\exists n, f$为$n\to A$的映射$\}\to A$, 则存在唯一的映射$g:\mathbb{N}\to A$满足$g(n)=G(g|_n)$.*

证明. 首先证明$P(k)$: 存在唯一映射$g_k: k+1=\{0,1,...,k\}\to A$满足$g_k(n)=G(g_k|_n)(\forall n\leq k)$. 对$P(0)$等价于令$g(0)=G(\emptyset)$. 设$P(k)$成立，先考虑$g_{k+1}$唯一性：由$P(k)$中的唯一性，$g_{k+1}|_{\{0,1,...,k\}}=g_k$, 从而由$g_{k+1}(k+1)=G(g_{k+1}|_{k+1})$知$g_{k+1}(k+1)$也唯一确定。以上讨论给出如下定义

$$g_{k+1}(n)=\begin{cases} g_k(n) & , \quad n\leq k \\ G(g_k|_{k+1}) & , \quad n=k+1 \end{cases} \tag{2.2}$$

从而得到存在性，$P(k)$得证。根据以上证明，我们知道$g_k(n)=g_l(n),\forall n\leq k,l$. 再证明$g$的存在性，作为$\mathbb{N}\times A$的子集，令$g=\bigcup\{g_k|k\in\mathbb{N}\}$, 则由以上的唯一性知$g$是映射且$g(n)=g_k(n)(\forall n\leq k)$. 任给$n\in\mathbb{N}$, 则由$g_n(n)=G(g_n|_n)$知$g(n)=G(g|_n)$. (严格来说，$g=\{(n,a)\in\mathbb{N}\times A|\exists k\in\mathbb{N}(n\leq k\wedge g_k(n)=a)\}$.) □

公理 7 (替换公理). *设集合A和公式$\phi(x,y)$满足$\forall x\in A$, 存在唯一的y使得$\phi(x,y)$成立，则存在集合$B=\{y|\exists x\in A,\phi(x,y)\}$.*

公理 8 (正则公理). $\forall X\big(X\neq\emptyset\to\exists Y(Y\in X\wedge Y\bigcap X=\emptyset)\big)$.

2.2 有限集和可数集

定义 2.2.1. *若存在X到n的单射，则称X为有限集。非有限集称为无限集。*

定理 2.2.2. *若X是有限集，则存在唯一的自然数n,使得X到n有1-1映射。*

引理 2.2.3. *设$a\in A$, 则A到$\{0,1,...,n\}$有1-1映射$\iff A\setminus\{a\}$到$\{0,1,...,n-1\}$有$1-1$对应。*

证明. $\Longrightarrow$: 设$f:A\to\{0,1,...,n\}$为1-1对应，若$f(a)=n$，则$f|_{A\setminus\{a\}}:A\setminus\{a\}\to\{0,1,...,n-1\}$为1-1对应。否则我们构造新的1-1对应$g$满足$g(a)=n$即可. 设$f(a)=m\neq n$, $b\neq a, f(b)=n$, 定义

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & , \quad x\notin\{a,b\} \\ n & , \quad x=a \\ m & , \quad x=b \end{cases} \tag{2.3}$$

则$g:A\to\{0,1,...,n\}$为1-1对应且$g(a)=n$. □

定理证明. 设$f : X \to n$为单射，则$f(X)$为$\{0,1,...,n-1\}$的子集，且X到$f(X)$有1-1对应，从而可假设X是$\{0,1,...,n-1\}$的子集。归纳证明$P(k)$: 若X为$k=\{0,1,...,k-1\}$的子集，则存在唯一的n使得X到n有$1-1$对应。 $P(0)$成立：此时$X=\emptyset$, 空集到空集有1-1映射。设$P(k)$成立，若$k \notin X$, 则$X \subseteq \{0,1,...,k-1\}$，由归纳假设即可。下面证明$k \in X$时的存在性和唯一性。此时$X \setminus \{k\} \subseteq \{0,1,...,k-1\}$, 由归纳假设，存在$n$使得$X \setminus \{k\}$到$n=\{0,1,...,n-1\}$有1-1映射。从而$X$到$n+1$有1-1映射。再证唯一性。假设$X$到$\{0,1,...,m\}$有1-1映射，由引理知$X \setminus \{k\}$到$\{0,1,...,m-1\}$有1-1映射。由归纳假设$m-1=n$, 从而$m=n+1$, 唯一性得证。 □

这个唯一的n称为X的基数，记为$|X|$.

命题 2.2.4. *设X,Y为有限集，则以下成立：*

- *$|X|=|Y|$当且仅当X到Y有1-1映射*
- *若$X \subseteq Y$，则$|X| \le |Y|$且等号当且仅当$X=Y$.*

证明. 1)显然。2）对$|Y|$归纳，不妨设$Y=\{0,1,...,n-1\}$. 若$n-1 \notin X$, 直接归纳即可。若$n-1 \in X$, 考虑$X \setminus \{n-1\} \subseteq Y \setminus \{n-1\}$, 再用归纳假设。 □

命题 2.2.5. *设A,B是有限集，则$|A \bigcup B| = |A|+|B|-|A \bigcap B|, |A \times B| = |A| \cdot |B|$.*

证明. 记A,B的示性函数为χ_A, χ_B, 定义$t : 2^X \to \mathbb{N}$为$t(f)=\sum_{x \in X} f(x)$. 则$t(\chi_A)=|A|$. 往证： $\chi_A+\chi_B=\chi_{A \bigcup B}+\chi_{A \bigcap B}$.

对$|B|$归纳证明：$|A \times B| = |A| \cdot |B|$. 若$|B|=0$, 则$B=\emptyset$, 所以$A \times B=\emptyset$. 设$|B|=k-1$已证，当$|B|=k$时，设$B=B_1 \bigcup \{b\}, |B_1|=k-1$, 则$A \times B=(A \times B_1) \bigcup (A \times \{b\})$, 从而$|A \times B|=|A \times B_1|+|A|=|A| \times (k-1)+|A|=|A| \cdot k$. □

推论 2.2.6. *有限集的真子集到自身没有一一对应，因此$\mathbb{N}$是无限集。*

定义 2.2.7. *和$\mathbb{N}$有1-1对应的集合称为可数无限集。有限集和可数无限集统称为可数集。非可数集称为不可数集。*

命题 2.2.8. *设A是非空集合，则以下等价：*

- *A是可数集*
- *存在满射$f : \mathbb{N} \to A$*
- *存在单射$g : A \to \mathbb{N}$*

证明. $i) \implies ii)$: A是有限集或者$\mathbb{N}$到A有1-1对应。
$ii) \implies iii)$: 定义$g(a)=f^{-1}(a)$的最小元。
$iii) \implies i)$: 可设A是$\mathbb{N}$的无限子集，往证$\mathbb{N}$到A有1-1对应。令

$$G : \{f \subseteq \mathbb{N} \times A | \exists n, f为n \to A的映射\} \to A$$

为$G(f)=A \setminus f(\{0,1,...,n-1\})$的最小值。由归纳定义，存在映射$f : \mathbb{N} \to A$满足$f(n)=G(f|_n)$, 即

$$f(n)=A \setminus f(\{0,1,...,n-1\})的最小值, \forall n \in \mathbb{N}.$$

下证f为1-1映射。对$n<m$, $f(m) \notin A \setminus f(\{0,1,...,m-1\})$, 而$n \in \{0,1,...,m-1\}$, 所以$f(m) \ne f(n)$. 再证$f$为满射。 $\forall a \in A$, $\{n \in \mathbb{N} | f(n) \ge a\}$非空($f(a) \ge a$), 设其最小元为$n_0$, 则$f(n_0) \ge a$. 又$f(i)<a, \forall i \in \{0,1,...,n_0-1\}$, 所以$a \in A \setminus f(\{0,1,...,n_0-1\})$, 从而$f(n_0) \le a$, 所以$f(n_0)=a$. □

2.3 无限集和选择公理

我们想证明每个无限集都有一个子集和$\mathbb{N}$ 1-1对应。为了证明这个结论，我们需要一个新的公理。

公理 9 (选择公理)**.** *设A是非空集合，则存在映射$c:\{B\in P(A)|B\neq\emptyset\}\to A$满足$c(B)\in B$. c称为选择函数。*

命题 2.3.1. *设A是无限集，求证：存在单射$f:\mathbb{N}\to A$.*

证明. 由归纳定义，存在映射$f:\mathbb{N}\to A$满足$f(n)=c\big(A\setminus f(\{0,1,...,n-1\})\big)$. 由定义$f$为单射。 □

定理 2.3.2. *设A是一个集合，则以下等价：*

- *存在单射$f:\mathbb{N}\to A$*
- *A与某个真子集存在$1-1$对应*
- *A是无限集*

证明. $i)\implies ii)$： $A=f(\mathbb{N})\bigcup A\setminus f(\mathbb{N})$, 而$\mathbb{N}$与偶数1-1对应
$ii)\implies iii)$：命题2.2.6
$iii)\implies i)$：命题2.3.1. □

命题 2.3.3. *以下等价*

- *选择公理*
- *设$\mathcal{F}$是非空集合X上的子集族，且$\emptyset\notin\mathcal{F}$，则存在映射$c:\mathcal{F}\to X$使得$\forall A\in\mathcal{F},c(A)\in A$*
- *设$\mathcal{F}$是非空集合X上的子集族，$\emptyset\notin\mathcal{F}$，且$\forall A,B\in\mathcal{F},A\bigcap B=\emptyset$，则存在映射$c:\mathcal{F}\to X$使得$\forall A\in\mathcal{F},c(A)\in A$*

证明. $iii)\implies i)$: 设X是非空集合，定义映射$f:\{B\in P(X)|B\neq\emptyset\}\to P(X\times P(X))$为$f(B)=\{(x,B)|x\in B\}$. 考虑$\mathcal{F}=f(\{B\in P(X)|B\neq\emptyset\})$, 则存在映射$c:\mathcal{F}\to X\times P(X)$使得$c(f(B))\in f(B)$. 则$\tilde{c}=\pi_1\circ c\circ f:\mathcal{F}\to X$为选择函数。 □

选择公理有一些常用的等价形式，适用于不同的问题。

定义 2.3.4. *设A上的二元关系$<$满足：*

- *$a<a$不成立*
- *若$a<b,b<c$, 则$a<c$*

则称$<$是A上的偏序关系，$(A,<)$为偏序集。若$c\in A$满足：不存在$a\in A$使得$c<a$，则称c是极大元。若A中任何两个不同元素均可比较，则称$<$为全序关系，$(A,<)$为全序集。

设$(A,<)$是偏序集，$B\subseteq A$, 则$<$在B上的限制也是偏序集，若此时$(B,<)$是全序集，则称$(B,<)$是$(A,<)$的全序子集。

Zorn引理. *设偏序集$(A,<)$的任意全序子集都有上界：若$(B,<)$是全序子集，则存在$c\in A,s.t.\forall a\in B,a<c$或$a=c$, 那么$(A,<)$有极大元。*

将$a<c$或者$a=c$记为$a\leq c$.

定义 2.3.5. *设$(A,<)$为全序集，若A的任意非空子集有最小元：$\forall B\subset A$, 若$B\neq\emptyset$, 则存在$b\in B$使得$\forall x\in B,b\leq x$, 则称$(A,<)$良序集。*

良序公理. *任给非空集合A, 存在A上的偏序关系$<$使得$(A,<)$是良序集。*

设$(A,<)$为全序集, 对$a\in A$, 记$S_a=\{x\in A|x<a\}$, 称为A在a处的截。根据良序公理可证明：

命题 2.3.6. 存在有最大元（记为Ω）的良序集，使得其在Ω处的截为不可数集，而在其它点处的都截是可数集。

证明. 任取一个不可数的集合（下节命题2.4.2）X，将其良序。若X的任意截都是可数的，任取不在X中的元素Ω，考虑集合$X\bigcup\{\Omega\}$, 并规定Ω是最大元即可。若X在某些点处的截是不可数的，令$A=\{x\in X|S_x$是不可数集$\}$, 则A是良序集X的非空子集，设Ω是其最小元。则$S_\Omega\bigcup\{\Omega\}$为满足要求的良序集。 □

今后记$S_\Omega\bigcup\{\Omega\}$为$\bar{S}_\Omega$. 选择公理、Zorn引理和良序公理是相互等价的。其中Zorn引理在代数证明中最为常见。

2.4 无限集的常用性质

命题 2.4.1. 以下结论成立:

- 可数集的子集是可数集。
- 设A,B是可数集，则$A\times B$是可数集。有限个可数集的笛卡尔积是可数集。
- 设$A_i(i=1,2,...)$是一列可数集，则$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$是可数集（给定可数集合$\mathcal{F}$, 若$\forall A\in\mathcal{F},A$是可数集，则$\bigcup\mathcal{F}$是可数集）。

可数个可数集的笛卡尔积一般不是可数集，除非除有限个外是单元素集。

命题 2.4.2. A为任意集合，不存在A到$P(A)$的满射。从而$P(\mathbb{N})=2^{\mathbb{N}}$是不可数集。

证明. 任给映射$\phi:A\to P(A)$, 令$B=\{a\in A|a\notin\phi(a)$, 则$B\in P(A)$. 下面证明$B$不在$\phi$的像中。假设$B=\phi(a_0)$, 若$a_0\in B$, 则由$B$的定义$a_0\notin\phi(a_0)$, 矛盾！若$a_0\notin B=\phi(a_0)$, 同样由$B$的定义，$a_0\in B$, 也矛盾！ □

3 拓扑空间和连续映射

映射$f:X\to Y$是连续的大概说的是当一点x'在另一点x附近时，$f(x')$在$f(x)$附近。“附近”的严格定义就是邻域，本章给出拓扑空间的定义并推广连续映射的概念。

3.1 拓扑空间

定义 3.1.1. X是集合，$\mathcal{T}$是X上的子集族，若$\mathcal{T}$满足:

- $\emptyset\in\mathcal{T}$, $X\in\mathcal{T}$
- 若$U_\alpha\in\mathcal{T}(\alpha\in J)$, 则$\bigcup U_\alpha\in\mathcal{T}$
- 若$U,V\in\mathcal{T}$， $U\bigcap V\in\mathcal{T}$

则称$\mathcal{T}$是X上的拓扑，$(X,\mathcal{T})$是拓扑空间（简称X是拓扑空间或X是空间）。$\mathcal{T}$中的元素称为拓扑空间$(X,\mathcal{T})$或者拓扑$\mathcal{T}$中的开集。开集的补集称为闭集。

给定拓扑就是给出全部的开集，每提到开集都必须是某个确定拓扑中的开集。我们都假设拓扑空间是非空的。包含点x的开集也称为x的开邻域。

例 3.1.2. 任给集合X. $P(X)$是X上的拓扑，称为离散拓扑。$\{\emptyset,X\}$是X上的拓扑，称为平凡拓扑。$\mathcal{T}=\{U|U$的补集是有限集$\}\bigcup\{\emptyset\}$是拓扑，称为余有限拓扑。

一般而言，集合X上的拓扑是不唯一的，若$\mathcal{T}$是X上一个拓扑，我们会说“拓扑空间$(X,\mathcal{T})$...”或者“在拓扑$\mathcal{T}$下，X...”或者“赋予X拓扑$\mathcal{T},X$...”.

定义 3.1.3. 设$\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2$均为$X$上的拓扑，若$\mathcal{T}_1\subseteq\mathcal{T}_2$则称$\mathcal{T}_1$比$\mathcal{T}_2$粗糙，$\mathcal{T}_2$比$\mathcal{T}_1$精细。

引理 3.1.4. 给定集合X，设$\mathcal{T}_\alpha(\alpha\in J)$是$X$上的一族拓扑，则$\bigcap\mathcal{T}_\alpha$是$X$上的拓扑。

3.2 拓扑基和拓扑子基

引理 3.2.1. *给定集合X，对X上的任意子集族$\mathcal{C}$，存在包含$\mathcal{C}$的最小拓扑。*

证明. 考虑集合$\mathcal{F} = \{\mathcal{T}|\mathcal{T}$是拓扑且$\mathcal{T} \supseteq \mathcal{C}\}$. 则$\mathcal{F}$是非空集合，$\bigcap \mathcal{F}$即为所求。 □

将该拓扑记为$\mathcal{T}(\mathcal{C})$, 称为由$\mathcal{C}$生成的拓扑。对一般的$\mathcal{C}$, $\mathcal{T}(\mathcal{C})$并没有简单的描述，虽然容易看出: 若$\mathcal{C} = \{U_\alpha|\alpha \in J\}$, 先对有限个$U_\alpha$取交，再对任意多个形如这样的集合取并，则所有如此得到的集合再加上全集X就是$\mathcal{T}(\mathcal{C})$.

定义 3.2.2. *若子集族$\mathcal{C}$满足：*

- $\forall x \in X, \exists C \in \mathcal{C}$, *s.t.*, $x \in C$
- *任给*$C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, *若*$x \in C_1 \bigcap C_2$, *则存在*$C_3 \in \mathcal{C}$*使得*$x \in C_3 \subset C_1 \bigcap C_2$.

则称$\mathcal{C}$是X上的一个拓扑基。$\mathcal{C}$中的元素称为基元素（是X的一个子集）。

命题 3.2.3. *设$\mathcal{C}$是X上的一个拓扑基，则$U \in \mathcal{T}(\mathcal{C})$当且仅当$\forall x \in U$, 存在$C \in \mathcal{C}$使得$x \in C \subseteq U$.*

证明. 定义$\mathcal{T} = \{U \subseteq X|\forall x \in U, \exists C \in \mathcal{C}, s.t. x \in C \subseteq U\}$. 由定义可以验证$\mathcal{T}$是拓扑。再证明$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{C})$. 任给$U \in \mathcal{T}$, 对任意$x \in U$, 存在$C_x \in \mathcal{C}$使得$x \in C \subseteq U$. 从而$U = \bigcup_{x\in U} C_x$. 由定义$C_x \in \mathcal{T}(\mathcal{C})$, 从而$\bigcup_{x\in U} C_x \in \mathcal{T}(\mathcal{C})$. □

由证明可以看出任意开集都是拓扑基中集合的并集，反之亦然。

例 3.2.4. *1. 对实数$\mathbb{R}$, $\mathcal{C} = \{(a, b)|a, b \in \mathbb{R}\}$是一个拓扑基。其生成的拓扑称为$\mathbb{R}$上的标准拓扑，该拓扑就是1.3节中的拓扑。*
2. 对实数$\mathbb{R}$, $\mathcal{C} = \{[a, b)|a, b \in \mathbb{R}\}$是一个拓扑基。其生成的拓扑称为$\mathbb{R}$上的下限拓扑，用$\mathbb{R}_l$表示相应的拓扑空间。
3. 对实数$\mathbb{R}$, 记$K = \{\frac{1}{n}|n \in \mathbb{N}^*\}$, $\mathcal{C} = \{(a, b)|a, b \in \mathbb{R}\} \bigcup \{(a, b) \setminus K\}$是一个拓扑基，其生成的拓扑称为$\mathbb{R}$上的$K$拓扑，用$\mathbb{R}_K$表示相应的拓扑空间。

定义 3.2.5. *设$\mathcal{T}$是X上的拓扑, 若拓扑基$\mathcal{C}$满足$\mathcal{T}(\mathcal{C}) = T$. 则称$\mathcal{C}$是拓扑$\mathcal{T}$的基。*

给定拓扑，基一般不唯一，但总存在，例如$\mathcal{C} = \mathcal{T}$. 下面的引理可以用来判断子集簇$\mathcal{C}$是否是$\mathcal{T}$的基。

引理 3.2.6. *设$(X, \mathcal{T})$是拓扑空间，$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$, 则$\mathcal{C}$是$\mathcal{T}$的基当且仅当对任意开集$U$，以及$x \in U$, 存在$C \in \mathcal{C}$使得$x \in C \subseteq U$.*

证明. $\Longrightarrow$: 命题3.2.3.
$\Longleftarrow$: 对任意$x \in X$, 由假设存在$C \in \mathcal{C}$使得$x \in C \subseteq X$，拓扑基的第一条得证. 设$x \in C_1 \bigcap C_2$, 因为C_1, C_2均为开集，所以$C_1 \bigcap C_2$为开集，由假设存在$C \in \mathcal{C}$使得$x \in C \subseteq C_1 \bigcap C_2$，拓扑基的第二条得证。再由由命题3.2.3, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{C})$. 又$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$, 所以$\mathcal{T}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{T}$.

□

引理 3.2.7. *设$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$分别是拓扑$\mathcal{T}, \mathcal{T}'$的基，则$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$当且仅当对任意$x \in X$以及任意包含$x$的$B \in \mathcal{B}$, 存在$B' \in \mathcal{B}$使得$x \in B' \subseteq B$.*

定义 3.2.8. *若子集族$\mathcal{S}$满足$\bigcup \mathcal{S} = X$, 则称$\mathcal{S}$是一个拓扑子基。若$\mathcal{T}(\mathcal{S}) = \mathcal{T}$, 则称$\mathcal{S}$是拓扑$\mathcal{T}$的子基。*

任取子集族$\mathcal{C}$, 则$\mathcal{S} = \mathcal{C} \bigcup \{X\}$是拓扑子基，且$\mathcal{T}(\mathcal{C}) = \mathcal{T}(\mathcal{S})$.

引理 3.2.9. *设$\mathcal{S}$是一个拓扑子基，则$\tilde{\mathcal{S}} = \{U_1 \bigcap U_2 \bigcap ... \bigcap U_k|U_i \in \mathcal{S}, k \in \mathbb{N}^*\}$是一个拓扑基，且$\mathcal{T}(\mathcal{S}) = \mathcal{T}(\tilde{\mathcal{S}})$.*

称$\tilde{\mathcal{S}}$为$\mathcal{S}$生成的拓扑基。

3.3 度量空间的拓扑

定义 3.3.1. 设X为非空集合，若$d: X\times X\to\mathbb{R}$满足

- $d(x,y)\geq 0,\forall x,y\in X$且$d(x,y)=0$当且仅当$x=y$.
- $d(x,y)=d(y,x),\forall x,y\in X$
- $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y),\forall x,y,z\in X$

则称d为X上的度量，(X,d)为度量空间。

设(X,d)为度量空间，对$a\in X,r>0$, 记$B_d(x,r)=\{y\in X|d(x,y)<r\}$, 称为球心在$x$, 半径为$r$的（度量）球. 定义

$$\mathcal{C}=\{B_d(x,r)|x\in X,r>0\},\mathcal{C}_\epsilon=\{B_d(x,r)|x\in X,\epsilon\geq r>0\}.$$

引理 3.3.2. $\mathcal{C}$是拓扑基。进一步，对任意$\epsilon>0$, $\mathcal{C}_\epsilon$是拓扑基，且和$\mathcal{C}$生成相同的拓扑。

我们将其生成的的拓扑称为度量（诱导的）拓扑，相应的拓扑空间仍称为度量空间。不同的度量可以对应相同的拓扑。

例 3.3.3. *1.* 在$\mathbb{R}$上定义$d(x,y)=|x-y|$, 则d为度量，对应的拓扑即标准拓扑。
2. 对$x=(x_1,x_2,...,x_n),y=(y_1,y_2,...,y_n)\in\mathbb{R}^n$上定义$d_2(x,y)=(\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$, 则$d_2$称为$\mathbb{R}^n$上的欧氏度量，诱导的拓扑称为标准拓扑或欧氏拓扑，相应的拓扑空间称为欧氏空间。
3. 任给(X,d)的非空子集A, $d|_{A\times A}$是A上的度量。

引理 3.3.4. 设(X,d)是度量空间，定义$\bar{d}(x,y)=\min\{d(x,y),1\}$. 则$\bar{d}$也是度量，并且和$d$诱导相同的拓扑。

$\bar{d}$称为标准有界度量，在该度量下任意两点距离不超过给定值。

定义 3.3.5. 设(X,d)是度量空间，若$D=\sup\{d(x,y)|x,y\in X\}<\infty$, 则称$d$是有界度量，$D$称为$X$在度量$d$下的直径（简称为直径），记为$diam\,(X,d)$或$diam\,X$.

若A是(X,d)的子集，则d在A上的限制也是度量，称为A上的诱导度量，记为d_A. $diam\,(A,d_A)$称为子集A的直径，也记为$diam\,A$

3.4 拓扑空间的构造：子拓扑和积拓扑

设$(X,\mathcal{T})$是拓扑空间，A是X的子集，定义$\mathcal{T}_A=\{U\bigcap A|U\in\mathcal{T}\}$, 则$\mathcal{T}_A$是$A$上的拓扑，称为$A$上相对于$(X,\mathcal{T})$的子（空间）拓扑。$(A,\mathcal{T}_A)$称为子空间，$\mathcal{T}_A$中的元素称为相对于$A$的开集或$A$中（相对）开集。

引理 3.4.1. 设$\mathcal{C}$是X上的子集族，令$\mathcal{C}_A=\{C\bigcap A|U\in\mathcal{C}\}$. 则$\mathcal{T}(\mathcal{C})_A=\mathcal{T}(\mathcal{C}_A)$. 若$\mathcal{C}$是$X$上的拓扑（子）基，则$\mathcal{C}_A$是$A$上的拓扑（子）基。

例 3.4.2. $(-\infty,\sqrt{2})\bigcap\mathbb{Q}$是$\mathbb{Q}$作为$\mathbb{R}$的子空间中的相对开集。

命题 3.4.3. 关于子拓扑有如下性质：

- 设A是空间X的子空间，则C是A中相对闭集当且仅当存在X中闭集B，使得$B\bigcap A=C$.
- 设A是空间X中开（闭）集，则A中的相对开（闭）集是X中的开（闭）集。

设$(X_i,\mathcal{T}_i)(i=1,2)$是两个拓扑空间，令$\mathcal{T}_1\times\mathcal{T}_2=\{U_1\times U_2|U_i\in\mathcal{T}_i\}$, 则$\mathcal{T}_1\times\mathcal{T}_2$是$X_1\times X_2$上的拓扑基（一般并不是拓扑），其生成的拓扑称为$\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2$的乘积拓扑，对应的空间称为乘积空间。任取$x_2\in X_2$, 将子集$X_1\times\{x_2\}$与$X_1$等同，则$X_1\times\{x_2\}$作为乘积空间的子拓扑$=X_1$上的拓扑。

引理 3.4.4. 设$\mathcal{C}_i$是$X_i(i=1,2)$上的子集族，令$\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2=\{U_1\times U_2|U_i\in\mathcal{C}_i,i=1,2\}$, $\mathcal{T}_i=\mathcal{T}_{\mathcal{C}_i}(i=1,2)$. 若$\mathcal{C}_i$是$X_i(i=1,2)$上的拓扑（子）基，则$\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2$是$X_1\times X_2$上的拓扑（子）基，并且此时

$$\mathcal{T}(\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2)=\mathcal{T}(\mathcal{T}_1\times\mathcal{T}_2).$$

仍然假设$\mathcal{T}_i = \mathcal{T}_{\mathcal{C}_i}(i = 1, 2)$, 记$\pi_i : X_1 \times X_2 \to X_i$为投影，记$\mathcal{S} = \{\pi_1^{-1}(U)|U \in \mathcal{C}_1\} \bigcup \{\pi_2^{-1}(U)|U \in \mathcal{C}_2\}$, 则$\mathcal{T}(\mathcal{S}) = \mathcal{T}(\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2)$. 若$\mathcal{C}_i$是$X_i$的拓扑子基，则$\mathcal{S}$是$X_1 \times X_2$上的拓扑子基。

例 3.4.5. $\mathbb{R}^2$上的乘积拓扑=度量拓扑。

引理 3.4.6. 设A_i为X_i的子空间，$i = 1, 2$. 则$A_1 \times A_2$作为乘积空间的子空间拓扑等于A_1, A_2上子拓扑的乘积拓扑。

引理 3.4.7. 关于度量空间如下结论成立:

- 设(X, d)为度量空间，A为X的子集，则A上诱导度量d_A的度量拓扑等于A作为X的子空间拓扑。
- 设$(X_i, d_i)(i = 1, 2)$为度量空间, 则$\rho_1(x, y) = d_1(x, y)+d_2(x, y), \rho_2(x, y) = \sqrt{d_1^2(x, y) + d_2^2(x, y)}$, $\rho_\infty(x, y) = \max\{d_1(x, y), d_2(x, y)\}$均为$X_1 \times X_2$上的度量，且均诱导乘积拓扑。

3.5 序拓扑

设X是一个含有不止一个元素的全序集，定义$(-\infty, a) = \{x \in X|x < a\}, (a, +\infty) = \{x \in X|x < a\}$. 则$\mathcal{S} = \{(-\infty, a), (a, +\infty)|a \in X\}$是$X$上的一个拓扑子基，其生成的拓扑称为序拓扑。

引理 3.5.1. 任给$a, b \in X$, 定义$(a, b) = \{x \in X|a < x < b\}$. 则$(a, b)$是序拓扑中的开集。若$m$是$X$的最小元，则$[m, b)$是序拓扑中的开集。若$M$是$X$的最大元，则$(a, M]$是序拓扑中的开集。这*3*类开集（后两类的存在需要X有最大元或者最小元）的全体就是序拓扑的基。

例 3.5.2. *1.* $\mathbb{R}$上的序拓扑等于标准拓扑。
2. 在$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$上赋予字典序：$(a, b) < (c, d)$当且仅当$a < c$或者$a = c, b < d$. 令$\mathcal{C} = \{(p, q)\}|p, q$两点的横坐标相同$\}$, 则$\mathcal{C}$是序拓扑的拓扑基。

设Y为全序集$(X, <)$的子集，则$(Y, <)$也为全序集。此时Y上既有序拓扑也有子拓扑。

定义 3.5.3. 考虑$I^2 = [0, 1] \times [0, 1] \subseteq (\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, 字典序$)$，则图中蓝色线段和$I^2$的交集是子拓扑中开集，但不是序拓扑中开集。

称如上的I^2上的序拓扑对应的空间为有序矩形，记为I_o^2. 一般而言，Y上子拓扑总是比Y上

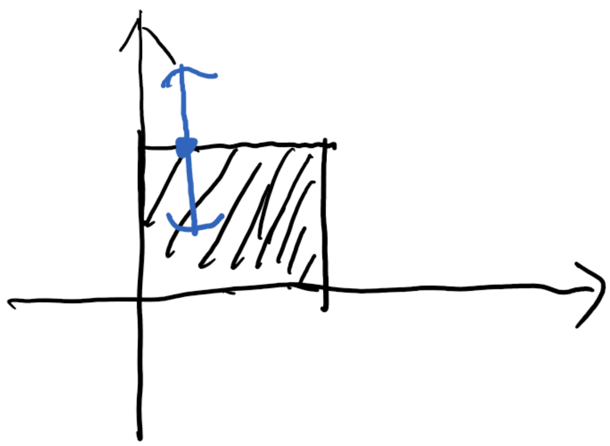

图 4: 子拓扑与序拓扑比较

的序拓扑细：任给序拓扑的拓扑子基中元素$(-\infty, a)_Y = \{x \in Y|x < a\}$, 则$(-\infty, a)_Y = (-\infty, a) \bigcap X$.

定义 3.5.4. *设Y为全序集X的子集，若对Y中任意两点y_1, y_2,都有$(y_1, y_2) \subseteq Y$，则称Y为凸子集。*

命题 3.5.5. *设Y为X的凸子集，则Y的序拓扑等于Y的子拓扑。*

证明. 给定子拓扑的子基中元素$(-\infty, a)\bigcap Y$, 若$a \in Y$, 则$(-\infty, a)\bigcap Y = (-\infty, a)_Y$. 若$a \notin Y$, 我们证明$(-\infty, a)\bigcap Y = \emptyset$或者$Y$. 设$(-\infty, a)\bigcap Y \neq \emptyset, \neq Y$, 取$x \in (-\infty, a)\bigcap Y, y \in Y \setminus (-\infty, a)$, 则$y < a < x$. 由凸的定义，$a \in Y$, 矛盾。 □

3.6 闭集和闭包

完全等价的，我们可以用闭集来描述拓扑，并且在某些问题中用闭集更方便。

定义 3.6.1. *给定拓扑空间X, 包含子集A的所有闭集的交称为A（在X中）的闭包，记为$\bar{A}_X$, 简记为$\bar{A}$. 即*

$$\bar{A} = \bigcap\{B | B\text{为包含}A\text{的闭集}\}.$$

因为闭集的交是闭集，所以闭包是包含该子集的最小闭集。由定义可知A为闭集当且仅当$A = \bar{A}$.

引理 3.6.2. *设$(X, \mathcal{T})$是拓扑空间，$\mathcal{C}$是拓扑$\mathcal{T}$的基，A是X的子集。则$x \in \bar{A}$当且仅当对$\mathcal{C}$中任意元素U, 若$x \in U$, 则$U \bigcap A \neq \emptyset$.*

证明. 首先证明$x \in \bar{A} \Longleftrightarrow$对任意包含$x$的开集$U$, $U \bigcap A \neq \emptyset$. 我们证明等价的逆否命题：存在包含$x$的开集$U$, $U \bigcap A \neq \emptyset \Longleftrightarrow x \notin \bar{A}$.
$\Longrightarrow$: 若$x \in U$, 但是$U \bigcap A = \emptyset$, 则$A \subseteq X \setminus U$, 从而$\bar{A} \subseteq X \setminus U$. 所以$x \notin \bar{A}$.
$\Longleftarrow$: 若$x \notin \bar{A}$, 取$U = X \setminus \bar{A}$, 则$x \in U$且$U \bigcap A = A \setminus \bar{A} = \emptyset$.
下面证明

- 对任意$\mathcal{C}$中元素U, 若$x \in U$, 则$U \bigcap A \neq \emptyset$
- 对任意开集U, 若$x \in U$, 则$U \bigcap A \neq \emptyset$

等价。显然只需$i) \implies ii)$. 因为任何开集U必可写成$\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$的形式，若$x \in U$, 则$x \in U_\alpha$对某个$\alpha \in J$成立，从而由$U_\alpha \bigcap A \neq \emptyset$推出$U \bigcap A \neq \emptyset$. □

思考题 3.6.3. *引理中的基可以换成子基吗？*

例 3.6.4. *1. 对$\mathbb{R}$（标准拓扑）的子空间$A = (0, 1)$, $\bar{A} = [0, 1]$.*
2. $\mathbb{R}$的子集$\mathbb{Q}$的闭包为$\mathbb{R}$. 一般若$\bar{A} = X$, 则称A是稠密的。

定义 3.6.5. *设A是拓扑空间X的子基，若对包含x的任意开子集U, $U \bigcap A \backslash \{x\} \neq \emptyset$, 则称$x$是$A$的聚点，$A$的全部聚点构成的集合记为$A'$, 称为$A$的导集。*

命题 3.6.6. *对任意子集都有$\bar{A} = A \bigcup A'$.*

例 3.6.7. *$X = \{a, b, c\}, \mathbb{T} = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c\}, X\}$, 则对$A = \{a\}$, $A' = \{b\}, \bar{A} = \{a, b\}$.*

命题 3.6.8. *设Y是X的子空间，$A \subseteq Y$, 则A在Y中的闭包等于A在X中的闭包与Y的交集。*

证明. 即证$\bar{A}_Y = \bar{A} \bigcap Y$. 首先$\bar{A} \bigcap Y$是$Y$中包含$A$的相对闭集，所以$\bar{A}_Y \subseteq \bar{A} \bigcap Y$. 反之，设$\bar{A}_Y = B \bigcap Y$, 其中$B$为$X$中闭集，则$B \supseteq A$, 从而$B \supseteq \bar{A}$. 因此$B \bigcap Y \supseteq \bar{A} \bigcap Y$. □

和子集的闭包对偶的概念是子集的内部。

定义 3.6.9. *任给子集A, 包含在A中的所有开集的并称为A的内部，记为A°. 若$x \in A^\circ$, 我们也称A是x的邻域。*

3.7 极限与分离公理

对于实数序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 则$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛到x当且仅当任意包含x的开集U, 存在$N \in \mathbb{N}^*$使得当$n \geq N$时，$x_n \in U$. 从而我们可以在一般的拓扑空间中如下定义：

定义 3.7.1. *设X为拓扑空间，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$为X中序列，称$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛到$x \in X$如果对任意包含x的开集U, 存在$N \in \mathbb{N}^*$使得当$n \geq N$时，$x_n \in U$.*

如此定义的收敛有如下问题：1. 极限可能不唯一 2. 极限存在的条件比较苛刻。关于第一个问题，我们给出极限唯一的充分条件。

定义 3.7.2. *1. 若拓扑空间X中任一单点集为闭集，则称X为T_1空间。*
2. 若对拓扑空间中任意不同两点x, y, 都存在不交开集U, V使得$x \in U, y \in V$, 则称X为T_2空间或者Hausdorff空间。

T_2空间一定是T_1空间。

引理 3.7.3. *Hausdorff空间中若极限存在，则极限唯一。*

引理 3.7.4. *设X为T_1空间，A为X的子集，则$x \in A$当且仅当对任意包含x的开集U, $U \bigcap A$是无限集。*

引理 3.7.5. *以下结论成立*

- *序拓扑是T_2空间。*
- *$T_i(i = 1, 2)$空间的乘积是T_i空间。*
- *$T_i(i = 1, 2)$空间的子空间是T_i空间。*

以上极限定义的第二个问题关于定义的适用性，在度量空间中，该定义是适用的。

命题 3.7.6. *设(X, d)为度量空间，则*

- *X是T_2空间*
- *$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛到x当且仅当对任意$\epsilon > 0$存在$N \in \mathbb{N}^*$使得当$n \geq N$时，$d(x_n, x) < \epsilon$.*
- *设$A \subseteq X$, 则$x \in \bar{A}$当且仅当存在序列$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$满足$x_i \in A$且$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$收敛到x. $x \in A'$当且仅当存在序列$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$满足$x_i \in A, x_i \neq x$且$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$收敛到x.*

可以将上述命题第三点稍微推广到如下满足所谓A_1公理（第一可数公理）的空间：

定义 3.7.7. *给定拓扑空间中一点x, 若存在一列包含x的开集$U_n(n = 1, 2, ...)$使得任何包含x的开集必然包含U_n中的某一个，则称X在x点处满足第一可数公理。如果X在每点处均满足第一可数公理，则称X满足第一可数公理或者A_1公理。*

在该定义中，令$V_n = U_1 \bigcap U_2 \bigcap ... \bigcap U_n$, 则可设$U_n$为单调递减的序列：$U_1 \supseteq U_2 \supseteq U_3 ....$

命题 3.7.8. *设X在x处满足第一可数公理，则*

- *$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛到x当且仅当对任意$m > 0$存在$N \in \mathbb{N}^*$使得当$n \geq N$时，$x_n \in U_m$.*
- *设$A \subseteq X$, 则$x \in \bar{A}$当且仅当存在序列$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$满足$x_i \in A$且$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$收敛到x. $x \in A'$当且仅当存在序列$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$满足$x_i \in A, x_i \neq x$且$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$收敛到x.*

对于一般的拓扑空间，如何定义极限才能够描述闭包呢？首先我们要推广序列的概念。

定义 3.7.9. *设$\geq$是集合D上的二元关系，若其满足：*

- *若$m \geq n, n \geq p$, 则$m \geq p$*
- *$m \geq m$对所有D中元素m成立*
- *对D中任意两个元素m, n, 存在D中元素p使得$p \geq m, \geq n$.*

则称$(D, \geq)$为有向集(directed set)。设X为集合，$S : D \to X$为映射，则称S为X中（定义在D上）的网(net).

定义 3.7.10. 设$S : D \to X$为网，$A \subset X$，如果存在$m \in D$使得当$n \geq m$时$S(n) \in A$, 则称网S最终在A中。

定义（Moore-Smith收敛）. 设X为拓扑空间，$S : D \to X$为网，若对包含x的任意开邻域U，S最终在U中，则称网S收敛到x.

命题 3.7.11. 设X为拓扑空间，$A \subset X$, 则$x \in \bar{A}$当且仅当存在A中的网S收敛到x. $x \in A'$当且仅当存在$A \setminus \{x\}$中的网S收敛到x.

证明. 令$D = \{U | U$为包含x的开集$\}$, 在其上定义$U \geq V$当且仅当$U \subseteq V$, 则D为有向集。若$x \in \bar{A}$, 则对任意$U \in D$, 存在$x_U \in U \bigcap A$, 记x_U为$S(U)$, 则S为A中的网。对任意包含x的开集U，在收敛的定义中取$V \geq U$即可。反过来，设存在A中的网收敛到x, 则对任意包含x的开集U, 因为S最终在U中，必有某个$V \in D$使得$S(V) \in U$, 从而$U \bigcap A \neq \emptyset$. □

3.8 连续映射

定义 3.8.1. 设f为拓扑空间X到拓扑空间Y的映射，给定$x \in X$, 若对包含$f(x)$的任意开集V, 存在包含x的开集U, 使得$f(U) \subseteq V$, 则称f在x处连续。若f在每点处都连续，则称f连续或者f为连续映射（函数）。

引理 3.8.2. 设f为拓扑空间X到拓扑空间Y的映射，以下等价

- f连续
- 对Y中任意开集V, $f^{-1}(V)$是开集。
- 对Y中任意闭集B, $f^{-1}(B)$是闭集。
- 对X的任意子集A, $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

证明. $i) \iff ii)$: 任给开集V, 任取$x \in f^{-1}(V)$, 因为f在x处连续，所以存在包含x的开集U_x使得$f(U_x) \subseteq V$, 即$U_x \in f^{-1}(V)$, 从而$f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x$, 所以$f^{-1}(V)$是开集。
$ii) \iff iii)$: 由$X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$即可。
$iii) \iff iv)$: $\overline{f(A)}$是闭集，从而$f^{-1}(\overline{f(A)})$是闭集。而$f^{-1}(\overline{f(A)}) \supseteq A$, 所以$f^{-1}(\overline{f(A)}) \supseteq \bar{A}$. 反过来，取$A = f^{-1}(B)$, 则$f(A) \subseteq B, \overline{f(A) \subseteq B}$. 因此$\bar{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}) \subseteq f^{-1}(B)$. 所以$\bar{A} = A$. □

由等价的第二条可知连续映射的复合是连续映射。

引理 3.8.3. 设f为拓扑空间X到拓扑空间Y的映射，$\mathcal{S}$是Y的拓扑的子基，则f连续当且仅当对任意$V \in \mathcal{S}$, $f^{-1}(V)$是开集。

引理 3.8.4. 设$(X, d), (Y, \rho)$为度量空间，$f : X \to Y$为映射，则f在x处连续当且仅当对任意$\epsilon > 0$, 存在$\delta > 0$使得当$d(x', x) < \delta$时，$\rho(f(x), f(x')) < \epsilon$.

设(X, d)为度量空间，A为X的非空子集，定义$d(x, A) = \inf\{d(x, a) | a \in A\}$, 称为$x$到$A$的距离。函数$d(\cdot, A)$满足$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$, 由此可知$d(\cdot, A)$为连续函数。

定义 3.8.5. 设f为拓扑空间X到拓扑空间Y的*1-1*映射，若f和f^{-1}均连续，则称f为X到Y的同胚（映射），X和Y是同胚的。拓扑空间到自身的同胚称为自同胚。

例 3.8.6. *1.* 任意非空开区间(a, b)与$(0, 1)$同胚，$(0, 1)$与$\mathbb{R}$同胚。
2. 在单位圆盘D内任取$2n$个不同的点$A_1, ..., A_n; B_1, B_2, ..., B_n$, 则存在$D$的自同胚将$A_i$映成$B_i$.
*3. 1.1*节中图*1*的两个空间同胚，图*2*的*I*和图*3*同胚。
4. $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$与环面同胚。
5. 考虑乘积空间$X_1 \times X_2$，任取$x_2 \in X_2$, 则X_1与$X_1 \times X_2$的子空间$X_1 \times \{x_2\}$同胚。

f^{-1}连续等价于f为开映射：若U为X中开集，则$f(U)$是Y中开集。连续的1-1映射并不一定是同胚。在同胚下不变的性质称为拓扑性质，可度量化是拓扑性质的一个（并不直观的）例子：

定义 3.8.7. 拓扑空间$(X,\mathcal{T})$是拓扑空间，若存在X上的度量d使得其诱导的拓扑等于$\mathcal{T}$，则称$(X,\mathcal{T})$是可度量化的。

X是可度量化的当且仅当X与某个度量空间同胚。若X与Y同胚，则X可度量化当且仅当Y可度量化。

定义 3.8.8. 设f为拓扑空间X到拓扑空间Y的单射，若f是连续单射且X与$(f(X),$子拓扑$)$同胚，则称f为嵌入（映射）。

例 3.8.9. $f:[0,1)\to\mathbb{R}^2, f(x)=(\cos 2\pi x,\sin 2\pi x)$不是嵌入。

3.9 连续映射的性质

命题 3.9.1. 连续函数有如下简单性质：

- 常值映射为连续映射：若存在$y_0\in Y$使得$f(x)\equiv y_0$，则$f(x)$连续
- 设A是X的子空间，则含入映射连续
- 设$f:X\to Y$连续，则$f|_A:A\to Y$连续，这里A赋予子拓扑（即X的子空间）
- 给定映射$f:X\to Y$则f连续当且仅当$f:X\to f(X)$连续，这里$f(X)$赋予子拓扑（即Y的子空间）
- 设$f:X\to Y$为映射，$U_\alpha(\alpha\in J)$是X上一族开集且$X=\bigcup_{\alpha\in J}U_\alpha$，则$f$连续当且仅当$f|_{U_\alpha}:U_\alpha\to Y$对所有的$\alpha$都连续

命题 3.9.2 (黏结引理)**.** 设$f:X\to Y$为映射，$A_i(1\le i\le n)$是有限个闭集且$X=\bigcup_{i=1}^n A_i$，则f连续当且仅当$f|_{A_i}:A_i\to Y$对所有的i都连续。

证明. ”$\Longrightarrow$”已证。反过来，只需证明对每个闭集B，$f^{-1}(B)$是闭集。而$f^{-1}(B)$是闭集当且仅当$f^{-1}(B)\bigcap A_i$均为闭集：$f^{-1}(B)=\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(B)\bigcap A_i$. 因为$f|_{A_i}$连续，所以$f^{-1}(B)\bigcap A_i$为$A_i$中的相对闭集，而$A_i$为闭集，所以$f^{-1}(B)\bigcap A_i$为$X$中闭集。证毕。

□

思考题 3.9.3. 设$(Y,\mathcal{T}_Y)$是拓扑空间，$f:X\to Y$为映射，那么X上是否存在拓扑$\mathcal{T}_X$使得$f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$连续？

引理 3.9.4. 设X_1,X_2,Y为拓扑空间，在$X_1\times X_2$上赋予乘积拓扑，映射$f:Y\to X_1\times X_2$连续当且仅当$\pi_i\circ f(i=1,2)$连续。

利用该引理和实数上加法，乘法的连续性：作为$\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$的映射，可以得到如下结论：设$f,g$为$X$到$\mathbb{R}$的连续映射，定义$(f+g)(x)=f(x)+g(x),(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$, 则$f+g,f\cdot g$也是连续函数。

3.10 笛卡尔积上的拓扑：积拓扑与箱拓扑

设$X_\alpha,\alpha\in J$是一列拓扑空间，在$\Pi_{\alpha\in J}X_\alpha$上我们可以定义乘积拓扑（推广了两个拓扑空间的乘积概念）：

定义 3.10.1. $\mathcal{S}=\bigcup_{\alpha\in J}\{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)|U_\alpha$是$X_\alpha$中开集$\}$是$\Pi_{\alpha\in J}X_\alpha$上的拓扑子基，生成的拓扑称为乘积拓扑，相应的空间称为乘积空间。

引理 3.10.2. 给定映射$f:X\to\Pi_{\alpha\in J}X_\alpha$，则$f$连续当且仅当$\forall\alpha\in J,\pi_\alpha\circ f$均连续。

证明. 用引理3.8.3. □

定义 3.10.3. $\mathcal{C}=\{\Pi_{\alpha\in J}U_\alpha|U_\alpha$是$X_\alpha$中开集$\}$是$\Pi_{\alpha\in J}X_\alpha$上的拓扑基，生成的拓扑称为箱拓扑。

箱拓扑总是比积拓扑细，一般而言，两者不同：

引理 3.10.4. 设J为无限集，则$\mathbb{R}^J$上的箱拓扑严格比积拓扑细。

将$\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$记为$\mathbb{R}^\omega$, 即$\mathbb{R}^\omega = \{(x_i)_{i=1}^\infty | x_i \in \mathbb{R}\}$.

例 3.10.5. 考虑映射$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$, $f(t) = (t, t, t, ...)$. 若赋予$\mathbb{R}^\omega$箱拓扑，则f不是连续映射。

可以证明($\mathbb{R}^\omega$, 积拓扑)和($\mathbb{R}^\omega$, 箱拓扑)不同胚。首先我们证明：

引理 3.10.6. ($\mathbb{R}^\omega$, 箱拓扑)不可度量化。

证明. 根据命题3.7.6, 只需证明存在A,以及$x \in \bar{A}$但是A中没有序列收敛到x. 令$A = \{(x_i)_{i=1}^\infty | x_i > 0\}$, 则$\mathbf{0} = (0, 0, ..., 0, ...) \in \bar{A}$: 任意包含$\mathbf{0}$的形如$U = U_1 \times U_2 \times ...$的基元素必然满足$0 \in U_i$, 从而$U \bigcap A \neq \emptyset$. 任取$A$中序列$x_i$, 设$x_i = (x_i^1, x_i^2, ...)$, 令$U = (-x_1^1, x_1^1) \times ... \times (-x_i^i, x_i^i) \times ...$, 则$U$为包含$\mathbf{0}$的开集，但$x_i \notin U$. □

根据下节的命题3.11.1, ($\mathbb{R}^\omega$, 积拓扑)是可度量化的，从而($\mathbb{R}^\omega$, 积拓扑)和($\mathbb{R}^\omega$, 箱拓扑)不同胚。

以下性质对积拓扑和箱拓扑均成立：

命题 3.10.7. 在$\Pi_{\alpha\in J} X_\alpha$上赋予积拓扑或箱拓扑，以下成立：
1. 设A_α是X_α的子空间，则$\Pi_{\alpha\in J} A_\alpha$是$\Pi_{\alpha\in J} X_\alpha$的子空间
2. 设X_α为$T_i(i = 1, 2)$空间，则$\Pi_{\alpha\in J} X_\alpha$为$T_i(i = 1, 2)$空间
3. 设A_α是X_α的子集，则$\overline{\Pi_{\alpha\in J} A_\alpha} = \Pi_{\alpha\in J} \bar{A}_\alpha$

3.11 度量空间的乘积

命题 3.11.1. 设$(X_i, d_i)(i = 1, 2, ...)$是一列度量空间，则乘积空间$\Pi_{i=1}^\infty X_i$可度量化。

证明. 对$x = (x_i)_{i=1}^\infty, y = (y_i)_{i=1}^\infty$ 令$D(x, y) = \sup\{\frac{\bar{d}_i(x_i, y_i)}{i} | i = 1, 2, ...\}$. 对每个度量球$B_D(x, r)$，当$N \geq \frac{1}{r}$时，该球包含$\Pi_{i=1}^N B_{\bar{d}_i}(r, x_i)\Pi_{i=N+1}^\infty X_i$这个开集。反过来，设$x \in \Pi_{i=1}^N U_i \Pi_{i=N+1}^\infty X_i$，可取$r$充分小使得其包含$B_D(x, r)$. □

引理 3.11.2. 设J为不可数集，则($\mathbb{R}^J$, 积拓扑)不可度量化。

证明. 同样根据命题3.7.6, 只需证明存在A,以及$x \in \bar{A}$但是A中没有序列收敛到x. 令 $A = \{f \in \mathbb{R}^J |$存在有限集$I \subseteq J$使得对$j \notin J, f(j) = 1\}$. 则$\mathbf{0} \in \bar{A}$, 但是任取$A$中序列$f_i$, 设$I_i = \{j | f_i(j) \neq 1\}$, 则$I_i$为有限集，从而$\bigcup_{i=1}^\infty I_i$为可数集，取$\alpha \notin J$, 则$f_i(\alpha = 1)$. 此时$U = \pi_\alpha^{-1}(-0.5, 0.5)$为包含$\mathbf{0}$的开集，而$f_i \notin U$. □

定义 3.11.3. 设$(X_\alpha, d_\alpha)(\alpha \in J)$是一族度量空间，令$\bar{d}_\alpha = \min\{d_\alpha, 1\}$, 在$\Pi_{\alpha\in J} X_\alpha$上定义如下度量：

$$\bar{\rho}((x_\alpha), (y_\alpha)) = \sup\{\bar{d}_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) | \alpha \in J\},$$

称为一致度量，相应的拓扑称为一致拓扑。

命题 3.11.4. 设$(X_\alpha, d_\alpha)(\alpha \in J)$是一族度量空间，则积拓扑粗于一致拓扑，一致拓扑粗于箱拓扑。

一致拓扑的特殊情况为$(X_\alpha, d_\alpha) \equiv (X, d)$, 此时$\Pi_{\alpha\in J} X_\alpha = X^J$, 从而函数空间$X^J$上有一致拓扑。因为一致拓扑是度量拓扑，所以序列$(f_i)_{i=1}^\infty$在一致拓扑中收敛到$f$当且仅当$\forall \epsilon \in (0, \frac{1}{2})$, 存在$N \in \mathbb{N}^*$使得当$i \geq N$时，$\bar{\rho}(f_i, f) \leq \epsilon$, 即对任意$p \in J$, $d(f_i(p), f(p)) \leq \epsilon$. 此时我们也称$(f_i)_{i=1}^\infty$一致收敛到$f$.

命题 3.11.5. 进一步假设J是拓扑空间，则$\mathcal{C} = \{f \in X^J | f \text{ 连续}\}$是$X^J$在一致拓扑下的闭子集。

证明. 只需证明当一列连续函数$(f_i)_{i=1}^{\infty}$一致收敛到f时，f是连续的。任给X中开集V以及$p\in f^{-1}(V)$，往证存在p的开邻域U使得$U\subseteq f^{-1}(V)$. 设$f(p)=x$且对某个$\epsilon>0$, $B_d(x,\epsilon)\subseteq V$. 由一致收敛性，存在$N\in\mathbb{N}^*$, $d(f_N(q),f(q))<\frac{\epsilon}{2}$对所有$q\in J$成立. 由$f_N$的连续性，$f_N^{-1}(B_d(x,\frac{\epsilon}{2}))$为开集。下面验证：$p\in f_N^{-1}(B_d(x,\frac{\epsilon}{2}))\subseteq f^{-1}(B_d(x,\epsilon))$.首先 $d(f_N(p),f(p))<\frac{\epsilon}{2}$, 从而 $p\in f_N^{-1}(B_d(x,\frac{\epsilon}{2}))$. 再任取$f_N^{-1}(B_d(x,\frac{\epsilon}{2}))$中一点$q$, $d(f(q),x)\leq d(f(q),f_N(q))+d(f_N(q),x)<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$. □

4 分离性

为了使拓扑空间X上有足够多的函数，就必须有充分多开集，其精确定义就是分离性。

4.1 正则空间和正规空间

定义 4.1.1. *X是T_1空间。若X满足：对一点x和闭集A，$x\notin A$，则存在开集U,V满足$x\in U,A\subseteq V$且$U\bigcap V=\emptyset$, 则称X为正则（T_3）空间。若X满足：对两个不相交的闭集A,B, 存在开集U,V满足$A\subseteq U,B\subseteq V$且$U\bigcap V=\emptyset$, 则称$X$为正规（$T_4$）空间。*

引理 4.1.2. *X是T_1空间，则X正则$\Longleftrightarrow$任给X中点x以及x的开邻域U，存在x的开邻域V满足$\bar{V}\subseteq U$. 类似地，X正则$\Longleftrightarrow$任给X的任意闭集A以及包含A的开邻域U，存在包含A的开邻域V满足$\bar{V}\subseteq U$.*

命题 4.1.3. *正则（正规）空间的子空间是正则（正规）空间。正则空间的乘积是正则空间。*

命题 4.1.4. *度量空间是正规空间。*

证明. 设A,B是度量空间中(X,d)不交闭集，考虑函数$f(x)=\frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$, 则$f$为连续函数。因为$f|_A$恒为0, $f|_B$恒为1, 所以$U=f^{-1}(-\infty,\frac{1}{3}),V=f^{-1}(\frac{2}{3},+\infty)$分别为包含$A,B$的开集。 □

4.2 Urysohn引理

定理 4.2.1. *设X为正规空间，A,B是X中两个不交的闭集，则存在连续映射$f:X\to[0,1]$使得$f|_A$恒为0, $f|_B$恒为1.*

证明. 证明的办法是对每个$[0,1]$中的有理数q, 构造开集U_q, 使得当$p<q$时，$\bar{U}_p\subseteq U_q$. 然后定义函数$f(x)=\inf\{p|x\in U_p\}$.记$\boldsymbol{Q}_I=\mathbb{Q}\bigcap[0,1]$.

第一步 归纳构造开集族 $\{U_r:r\in\boldsymbol{Q}_I\}$, 使得

- (i) 当 $r<r'$ 时, $\bar{U}_r\subset U_{r'}$;
- (ii) $\forall r\in\boldsymbol{Q}_I,A\subset U_r\subset B^c$.

将 $\boldsymbol{Q}_I$ 排列为 $\{r_1,r_2,\cdots\}$, 使得 $r_1=1,r_2=0$. 然后对 n 归纳地构造 U_{r_n}. 取 $U_{r_1}=B^c$, 它是 A 的开邻域. 由引理4.1.2, 可构造 U_{r_2} 是 A 的开邻域, $\bar{U}_{r_2}\subset U_{r_1}$. 设 $U_{r_1},U_{r_2},\cdots,U_{r_n}$ 已构造, 它们满足 (i) 和 (ii). 记 $r_{i(n)}=\max\{r_l\mid l\leqslant n,r_l<r_{n+1}\},r_{j(n)}=\min\{r_l\mid l\leqslant n,r_l>r_{n+1}\}$, 则 $r_{i(n)}<r_{j(n)}$. 因此 $\bar{U}_{r_{i(n)}}\subset U_{r_{(n)}}$. 作 $U_{r_{n+1}}$ 是 $\bar{U}_{r_{i(n)}}$ 的开邻域, 并且 $\bar{U}_{r_{n+1}}\subset U_{r_{j(n)}}$. 容易验证 $U_{r_1},U_{r_2},\cdots,U_{r_n},U_{r_{n+1}}$ 仍满足(i)和(ii).

第二步 规定函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 为:

$$f(x)=\sup\{r\in\boldsymbol{Q}_I\mid x\notin U_r\}=\inf\{r\in\boldsymbol{Q}_I\mid x\in U_r\},\forall x\in X.$$

这里给出 $f(x)$ 的两个定义式, 如果 $\forall r,x\notin\bar{U}_r$, 则用第一式; 如果 $\forall r,x\in U_r$, 则用第二式; 余下的情形, 两式的值是相等的。因为 $A\subseteq U_r,\forall r\in\boldsymbol{Q}_I$, 所以 f 在 A 上各点的值都为 0 ; 类似地, f 在 B 上各点取值 1.

下面证明f的连续性。根据f的定义, $\forall r\in\boldsymbol{Q}_I$, (a) 若 $x\in U_r$, 则 $f(x)\leqslant r$; (b) 若 $x\notin U_r$, 则 $f(x)\geqslant r$. 从 f 的定义还可看出, $0\leqslant f(x)\leqslant 1,\forall x\in X$. 设 $x\in f^{-1}(a,b)$, 即

$a < f(x) < b$. 要证 x 有开邻域包含在 $f^{-1}(a,b)$ 中。如果 $f(x) \neq 0,1$, 则可取 $r,r',r'' \in \boldsymbol{Q}_I$, 使得 $a < r' < r'' < f(x) < r < b$. 由 (a) 知, $x \notin U_{r''}$, 从而 $x \notin \bar{U}_{r'}$; 由 (b) 知, $x \in U_r$, 因此 $U_r \setminus \bar{U}_r$, 是 x 的开邻域. $\forall y \in U_r \setminus \bar{U}_r^c$, (a) 与 (b) 说明 $a < r' \leqslant f(y) \leqslant r < b$, 因此 $U_r \setminus \bar{U}_{r'}^c \subseteq f^{-1}(a,b)$. 如果 $f(x)=0$, 则 $a<0$, 取 $r<b$, 则 $x \in U_r \subseteq f^{-1}(a,b)$. 如果 $f(x)=1$, 则 $b>1$, 取 $a<r'<r''$, 则 $x \in X \setminus \bar{U}_{r'} \subseteq f^{-1}(a,b)$. □

4.3 Tietze扩张定理

定理 4.3.1. *设X为正规空间，F是X中闭集，$f: F \to \mathbb{R}$为连续映射，则存在连续映射$\tilde{f}: X \to \mathbb{R}$使得$\tilde{f}|_F = f$.*

证明. 证明的办法是构造一致收敛的连续函数序列s_n，使得ϕ_n在F上的限制越来越接近f. 我们分两步证明: 先对有界连续函数证明, 然后推广到一般连续函数。

第一步 设 $f: F \to \mathbb{R}$ 连续, 且 $f(F) \subset [-1,1]$. 记 $A = f^{-1}([-1,-1/3]), B = f^{-1}([1/3,1])$, 则 A,B 是 F 的不相交闭子集. 因为 F 是 X 的闭集,所以 A,B 也是 X 的闭集. 用 Urysohn引理有映射$\varphi_1: X \to [-1/3,1/3]$, 并且 φ_1 在 A 和 B 上分别取值 $-1/3$ 和 $1/3$. 令 $f_1 = f - \varphi_1: F \to \mathbb{R}$, 则 $f_1(F) \subset [-2/3,2/3]$. 用 f_1 替代 f, 重复以上过程, 构造出 X 上连续函数 φ_2, 使得 $\varphi_2(X) \subset [-2/9,2/9]$, F 上的连续函数 $f_2 = f_1 - \varphi_2 = f - \varphi_1 - \varphi_2$ 满足 $f_2(F) \subset [-4/9,4/9]$. 不断重复以上做法, 归纳地作出 X 上的连续函数序列 $\{\varphi_n\}$, 使得

(i) $\varphi_n(X) \subseteq \left[-\frac{2^{n-1}}{3^n}, \frac{2^{n-1}}{3^n}\right]$; (ii) $|f(x) - \sum_{i=1}^n \varphi_i(x)| \leqslant \frac{2^n}{3^n}, \forall x \in F$.

根据 (i), 函数 $\widetilde{f} := \sum_{n=1}^\infty \varphi_n$ 有定义, 连续, 并且 $|\widetilde{f}(x)| \leqslant 1, \forall x \in X$. 根据 (ii), $\widetilde{f}(x) = f(x), \forall x \in F$, 即 $\widetilde{f}$ 是 f 的扩张.

第二步 设 f 是 F 上的连续函数, 不一定有界. 规定 $f': F \to \mathbb{R}$ 为 $f'(x) = \frac{2}{\pi}\arctan(f(x))$, $\forall x \in F$, 则 $f'(F) \subset (-1,1)$. 由 (1), 有 f' 的扩张 $\widetilde{f}': X \to \mathbb{R}, \widetilde{f}'$ 连续, 且 $\widetilde{f}'(X) \subseteq [-1,1]$. 记 $E = \left(\tilde{f}'\right)^{-1}(\{-1,1\})$, 则 E 是 X 的闭集, 并且 $F \cap E = \varnothing$. 根据Urysohn引理存在连续函数h在 E 和 F 上分别取值 0 和 1. 于是对 $\forall x \in X, h(x)\widetilde{f}'(x) \in (-1,1)$, 因此可规定 $\widetilde{f}: X \to \mathbb{R}$ 为

$$\widetilde{f}(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}h(x)\widetilde{f}'(x)\right), \quad \forall x \in X,$$

则 $\widetilde{f}$ 连续, 并且当 $x \in F$ 时, 因为 $h(x)=1$, 所以

$$\widetilde{f}(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}\widetilde{f}'(x)\right) = \tan(\arctan(f(x))) = f(x),$$

即 $\widetilde{f}$ 是 f 的扩张。

□

5 连通性和紧致性

在数学分析中，关于连续函数有两个基本结论：介值定理和极值定理。本章我们将引入连通性和紧致性两个重要的概念，由此将上述定理推广到拓扑空间中。无论是连通性还是紧致性，我们都需要回答两方面的问题，1. 为什么这个性质是重要的？ 2. 如何得到这些性质？回答第一个问题就是要从这些性质推出其它我们关心的性质，回答第二个问题就是证明或者构造一些空间满足这些性质。

5.1 连通性定义和基本性质

定义 5.1.1. *设X为拓扑空间，U,V上X上不交的非空开集，若$X = U\bigcup V$，则称U,V是X的分割。如果X上没有分割，则称X是连通的（空间）。若X的子集Y在子拓扑下（不）连通，则称Y（不）连通。*

设Y是X的子空间，则A,B是Y的分割当且仅当$A\bigcap B=\emptyset, A\bigcup B=Y$且$A'\bigcap B=B'\bigcap A=\emptyset$. 连通性是拓扑性质：若$X,Y$同胚，$X$连通当且仅当$Y$连通。

定义 5.1.2. $\mathbb{Q}$是不连通的。

引理 5.1.3. 若C,D是X的分割，Y是X的连通子集，则$Y\subseteq C$或$Y\subseteq D$.

命题 5.1.4. $A_\alpha(\alpha\in J)$是X的一族连通子集，设存在$x\in X$满足$x\in A_\alpha,\forall\alpha\in J$, 则$\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha$连通。

命题 5.1.5. 设A是连通子集，$A\subseteq B\subseteq\bar{A}$, 则$B$是连通的。

证明. 设C,D是B的分割，由引理$A\subseteq C$或者$A\subseteq D$. 不妨设$A\subseteq C$, 则$\bar{A}\subseteq\bar{C}$. 由分割的定义，C是B中相对闭集，从而$C=\bar{C}\bigcap B$. 因此$C\supseteq\bar{A}\bigcap B=B$. 与分割的定义矛盾！ □

命题 5.1.6. 设$f:X\to Y$为连续映射，X连通，则$f(X)$连通。

证明. 设$f(X)$有分割$U\bigcap f(X), V\bigcap f(X)$, 其中$U,V$是$X$中开集。则$f^{-1}(U\bigcap f(X))=f^{-1}(U), f^{-1}(V\bigcap f(X))=f^{-1}(V)$是$X$上的分割，与$X$连通矛盾！ □

命题 5.1.7. 设X,Y均连通，则乘积空间$X\times Y$连通。更一般地，设$X_\alpha(\alpha\in J)$是一族连通空间，则乘积空间$\Pi_{\alpha\in J}X_\alpha$连通。

证明. $X\times Y$中的"十字形"：$X\times\{y\}\bigcup\{x\}\times Y$连通，而$X\times Y=\bigcup_{x\in X}(X\times\{y\}\bigcup\{x\}\times Y)$, 所以也连通。

任取$(x_\alpha)_{\alpha\in J}\in\Pi_{\alpha\in J}X_\alpha$, 令$A=\{y\in\Pi_{\alpha\in J}X_\alpha|$除了有限个$\alpha$以外$x_\alpha=y_\alpha\}$. 则$A$连通，且$A$是稠密子集：$\Pi_{\alpha\in J}X_\alpha$中任意开集$\bigcap_{i=1}^k\pi_{\alpha_i}^{-1}(U_i)$与$A$的交集非空。 □

例 5.1.8. $\mathbb{R}^\omega$在箱拓扑下是不连通的。

命题 5.1.9. 设Y为序拓扑，X连通，$f:X\to Y$为连续映射。若$a,b\in f(X)$, $c\in(a,b)$, 则$c\in f(X)$

5.2 序拓扑的连通性

定义 5.2.1. 设$(L,<)$为不止一个元素的全序集，且L满足：

- L有上确界性质：对L的任意非空子集A，若存在$b\in L$使得$\forall a\in A, a\leq b$(称b为A的一个上界，A有上界)，则存在$c\in L$使得c是L的上界且任何比c小的元素都不是A的上界（c称为A的上确界，记为$\sup A$.）
- 若$x<y$, 则存在$z\in L$使得$x<z<y$.

则称L为线性连续统。

定理 5.2.2. L为线性连续统，则L的任意凸子集在序拓扑（和子拓扑相同）下是连通的。

证明. 首先对任意全序集L中两点$a<b$, 若U为包含a的相对开集，则存在$c\in(a,b]$使得$[a,c)\subseteq U$. 设Y是任意凸子集，假设其不连通，则存在分割U,V, 取$a\in U, b\in V$, 不妨设$a<b$, 则$[a,b]$有分割$U\bigcap[a,b], V\bigcap[a,b]$, 仍记为$U,V$. 令$c=\sup U$, 则要么$c\in U$，要么$c\in V$. 首先因为$U$是$[a,b]$中的相对开集，所以$a<c$. 下面分情况讨论

- 如果$c\in U$, 则$c\in(a,b)$, 由U是开集知存在$d>c$使得$(c,d)\subseteq U$. 由线性连续统的假设，存在$z\in(c,d)$. 从而$\sup U\geq z>c$, 矛盾！
- 如果$c\in V$, 则由V是开集，存在$d<c$使得$(d,c)\subseteq V$. 从而$U\subseteq[a,d]$, $\sup U\leq d<c$, 矛盾！

□

例 5.2.3. *1.* 实数是线性连续统，从而$[0,1]$是连通的。
*2.*有序矩形是线性连续统。

5.3 道路连通性

定义 5.3.1. 设x, y是拓扑空间X两点，若连续映射$\gamma : [0,1] \to X$满足$\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$，则称$\gamma$为连接$x, y$的道路。若$X$中任意两点都有道路连接，则称$X$是道路连通的。若子集$Y$在子拓扑下道路连通，则称$Y$道路连通。

道路连通也是拓扑性质，且道路连通的空间一定是连通的。

命题 5.3.2. $A_\alpha(\alpha \in J)$是X的一族道路连通子集，设存在$x \in X$满足$x \in A_\alpha, \forall \alpha \in J$, 则$\bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha$道路连通。

命题 5.3.3. 设$f : X \to Y$为连续映射，XS连通，则$f(X)$道路连通。

命题 5.3.4. 设X, Y均道路连通，则乘积空间$X \times Y$道路连通。

例 5.3.5. *1.* $\mathbb{S}^n$道路连通
2. $\mathbb{R}^1$与$\mathbb{R}^n(n \geq 2)$不同胚 *3.* 有序矩形连通但不是道路连通
4. 拓扑学家正弦曲线$\{(x, \sin\frac{1}{x})|x \in (0,1]\} \bigcup \{(0,y)|y \in [-1,1]\}$连通但不是道路连通

证明. 设γ是连接$(0,0)$和$(1, \sin 1)$的道路，记$\gamma(t) = (x(t), y(t))$. 不妨设$t > 0$时$x(t) > 0$. 下面构造单调递减的序列t_n使得$y(t_n) = (-1)^n$. 令$x_n = \frac{1}{2n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}}$, 则$x_n$为$[0,1]$中单调递减序列。由介值定理，存在$t_1 \in [0,1]$使得$x(t_1) = x_1$, $t_1 \in [0, t_1]$使得$x(t_2) = x_2$,...,$x(t_n) = x_n$. 因此$\gamma(t_n)$没有极限（$n \to \infty$). □

5.4 连通分支和局部连通性

定义 5.4.1. 设x是拓扑空间X中一点，包含x的所有（道路）连通子集的并称为（X中）包含x的（道路）连通分支。

引理 5.4.2. 设P是包含x的（道路）连通分支，$y \in P$, 则P也是包含y的连通分支。若在X上定义$x \sim y$: 若存在连通子集A使得$x \in A, y \in A$, 则连通分支即为该等价关系下的等价类。类似地，若在X上定义$x \approx y$为存在连接x, y的道路, 则道路连通分支即为该等价关系下的等价类。

引理 5.4.3. 连通分支都是闭集。每个连通分支是若干个道路连通分支的并。

例 5.4.4. 拓扑学家正弦曲线有两个道路连通分支。

定义 5.4.5. 设x是拓扑空间X中一点，若对包含x的任意开集都存在（道路）连通开集满足$x \in V \subseteq U$, 则称X在x点处局部（道路）连通。

引理 5.4.6. X局部（道路）连通$\Longleftrightarrow$任意开集的所有（道路）连通分支都是X中开集。

证明. 先考虑连通。$\Longrightarrow$: 设U为开集，P为U的连通分支，任取$x \in P$, 由假设存在包含x的连通开集$W \subseteq U$, 从而$W \subseteq P$, 所以P是开集。
$\Longleftarrow$: 任给x的开邻域U，取U中包含x的连通分支即可。道路连通类似证明。 □

命题 5.4.7. 设X局部道路连通，则连通分支是道路连通分支。

证明. 设C是连通分支，则C是开集，从而C的道路连通分支均为开集：$C = \bigcup_{\alpha\in J} P_\alpha$，$P_\alpha$是道路连通分支。若$J$不是单元素集，则$P_{\alpha_0} \bigcup_{\alpha\in J\setminus\{\alpha_0\}} P_\alpha$为$C$的分割，与$C$的连通性矛盾！ □

5.5 紧致性定义和基本性质

给定集合X上的子集族$\mathcal{A}$, 若$\bigcup \mathcal{A} = X$则称$\mathcal{A}$为X的覆盖；若$\mathcal{A}$是有限集，则称为有限覆盖；若$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$也为覆盖，则称$\mathcal{B}$是$\mathcal{A}$的子覆盖。若$X$是拓扑空间，由$X$中若干开集构成的覆盖称为$X$的开覆盖。类似地，对子集$A$, 若$\bigcup \mathscr{A} \supseteq A$则称$\mathscr{A}$为$A$的覆盖。

定义 5.5.1. 如果对X的任意开覆盖$\mathcal{A}$, 都存在有限（个子集构成的）子覆盖，则称X是紧致的（空间）或紧的。对于X的子集A, 若A在子拓扑下是紧致的，则称A是紧致的或者A是紧子集。

引理 5.5.2. *设A是紧子集 $\Longleftrightarrow$任何由基元素构成的开覆盖都有有限子覆盖。*

证明. $\Longleftarrow$: 设$\mathcal{C}$是拓扑的基，任给A的开覆盖$\mathcal{F}$, 将每个$U \in \mathcal{F}$写成基元素的并，则可得由基元素构成的开覆盖，从而有子覆盖，因此原来的开覆盖$\mathcal{F}$也有子覆盖。
$\Longrightarrow$: 任给A的开覆盖$\mathcal{F} = \{U_\alpha\}$, 则$\{U_\alpha \bigcap A\}$是$A$的开覆盖。 □

命题 5.5.3. *紧空间的闭子集是紧的。*

命题 5.5.4. *紧空间在连续映射下的像是紧的。*

定理 5.5.5. *设X为紧空间，Y为序拓扑，$f : X \to Y$连续，则存在$c \in X, d \in X$使得$\forall x \in X$有$f(c) \leq f(x) \leq f(d)$.*

证明. $f(X)$是Y的紧子集，若$f(X)$没有最大元，则$f(X) \subseteq \bigcup_{c \in f(X)}(-\infty, c)$, 而该覆盖没有有限子覆盖，矛盾！同理可证有最小元。 □

定理 5.5.6. *设X_1, X_2为紧空间，则乘积空间$X_1 \times X_2$是紧空间。*

证明. 假设$\mathcal{A}$是由一些基元素$U \times V$构成的开覆盖：$\mathcal{A} = \{U_\alpha \times V_\alpha | \alpha \in J\}$. 任给$y \in X_2$, 由于$\mathcal{A}$覆盖了$X_1 \times \{y\}$, 从而存在有限集$I_y \subseteq J$, 使得$\{U_\alpha \times V_\alpha | \alpha \in I_y\}$覆盖了$X_1 \times \{y\}$, 从而$\bigcup_{\alpha \in I_y} U_\alpha = X_1$. 不妨设$\forall \alpha \in I_y, y \in V_\alpha$, 令$V_y = \bigcap_{\alpha \in I_y} V_\alpha$, 则$\bigcup_{\alpha \in I_y} U_\alpha \times V_\alpha \supseteq X_1 \times V_y$. 再对$X_2$的开覆盖$V_y$取有限子覆盖即可。 □

由定理的证明可得到如下结论

引理 5.5.7 (管状邻域)**.** *设X_1为紧空间，y为X_2中一点，W为$X_1 \times \{y\}$的开邻域，则存在y的开邻域V，使得$X_1 \times V \subseteq W$.*

紧致性同样可以用闭集来描述。设$\mathcal{F}$是由X中闭集构成的非空子集族，若对$\mathcal{F}$任意有限子集$\mathcal{B}$, $\bigcap \mathcal{B}$都非空，则称$\mathcal{F}$具有有限交性质。

引理 5.5.8. *X紧致当且仅当任意具有有限交性质的闭集族$\mathcal{F}$满足$\bigcap \mathcal{F}$非空。*

5.6 序拓扑的紧致性

定理 5.6.1. *设X为具有上确界性质的全序集，则X的闭区间$[a, b]$在序拓扑（和子拓扑相同）下是紧致的。*

证明. 任给$[a, b]$的开覆盖$\mathcal{A}$, 证明其有有限子覆盖。定义集合$I = \{c \in [a, b] | \text{存在}\mathcal{A}\text{的有限子集覆盖}[a, c]\}$, 下面证明$I = [a, b]$或者等价地$b \in I$. 首先存在开集$U \in \mathcal{A}$使得$a \in U$, 从而存在$d > a, (a, d) \subseteq U$, 再取开集$V$包含$c$, 则$\{U, V\}$覆盖了$[a, d]$, 因此$d \in I$. 令$c = \sup I$, 则$c > a$. 我们先证明$c \in I$. 取包含$c$的开集$U \in \mathcal{A}$, 以及$e < c$满足$(e, c] \subseteq U$. 则$e \in I$, 取$[a, e]$的有限覆盖，再加上$U$, 即为$[a, c]$的有限覆盖，从而$c \in I$. 再证明$c = b$, 否则$c < b$, 取包含$c$的开集$U \in \mathcal{A}$, 以及$b \geq f > c$使得$[c, f) \subseteq U$, 再取一个包含$f$的开集$V$, 则$[a, c]$的有限覆盖加上$U, V$覆盖了$[a, f]$, 因此$c < f \in I$与$c = \sup I$矛盾！ □

例 5.6.2. *1. $[0, 1]$是紧致的。*
2. 良序集具有上确界性质，从而其闭区间紧致。

推论 5.6.3. *记欧氏空间$\mathbb{R}^n$上的欧氏度量为d_2, 则子集A是紧致的当且仅当它是闭集且$diam(A, d_2)$有限。*

5.7 紧性与分离性

引理 5.7.1. *Hausdorff空间的紧集是闭集。设C_1, C_2为Hausorff空间中不相交的紧致子集，则存在不交开集U_1, U_2满足$C_i \subseteq U_i, i = 1, 2.$*

即紧致的Hausdorff空间是正规空间。

命题 5.7.2. *设$f : X \to Y$是1-1的连续映射，X为紧致空间，Y为Hausdorff空间，则f是同胚。*

定义 5.7.3. *若$\{x\}$是开集，则称x是孤立点。*

命题 5.7.4. *设X为紧致的Hausdorff空间，若X没有孤立点，则X不可数。*

证明. 用反证法，假设$X = \{x_i | i = 1, 2, ...\}$, 我们设法构造一列单调递减的非空闭集$C_1 \supseteq C_2 \supseteq C_3...$使得$x_i \notin C_i = \bar{U}_i$, 从而$\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i = \emptyset$, 矛盾!

C_1构造： x_1, x_2可用开集U_1, U_2, $U_2 \subseteq X \setminus U_1$, 令$C_1 = \bar{U}_2$.

C_{n+1}构造：设$C_1, C_2, ..., C_n = \bar{U}_n$已经取好，因为$X$中无孤立点，所以$U_n \neq \{x_{n+1}\}$, 在$U_n$中取不同于$x_{n+1}$的点$y$. 取不相交的开集$W_1, W_2$分别包含$x_{n+1}, y$, 令$\Psi y \in U_{n+1} = U_n \bigcap W_2 \subseteq X \setminus W_1$, 则$\bar{U}_{n+1} \subseteq \bar{U}_n \bigcap X \setminus W_1$, 从而$x_{n+1} \notin \bar{U}_{n+1}$, 令$C_{n+1} = \bar{U}_{n+1}$即可。 □

以上证明实际上可以得到如下的Baire纲定理：

命题 5.7.5. *设X为紧致的Hausdorff空间，若$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, 其中$B_i$是闭集，则必有一个$B_i$有内点。*

证明. 只需在如上证明中将$U_n \neq \{x_{n+1}\}$改成$U_n \not\subseteq B_{n+1}$. □

5.8 紧致度量空间

定理 5.8.1. *设(X, d_X)为紧致度量空间，(Y, d_Y)为度量空间，$f : X \to Y$连续，则f一致连续: $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$使得当$d_X(x_1, x_2) < \delta$时，$d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$.*

引理 5.8.2 (Lebesgue数引理). *设(X, d)为紧致度量空间，$\mathcal{A}$为X的开覆盖，则存在$\delta > 0$, 使得X的每个半径δ的球包含在$\mathcal{A}$的某个成员中。*

因为半径r的球直径不超过$2r$, 直径不超过r的子集包含在某个半径为r的球中，所以可将球换成直径不超过δ的子集。

证明. 取$\mathcal{A}$的有限子覆盖$\{U_i | i = 1, 2, ..., n\}$, 记$C_i = X \setminus U_i$, 考虑函数

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x, C_i),$$

设其最小值为$\delta > 0$. 对每个半径为δ的球$B_d(x, \delta)$, 由$f(x) \geq \delta$可知存在某个i, 使得$d(x, C_i) \geq \delta$, 从而$B_d(x, \delta) \subseteq U_i$. □

定理证明. 给定$\epsilon > 0$, $\forall x \in X$, 存在x的开邻域U_x使得当$x' \in U_x$时，$d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$. 对开覆盖$\{U_x | x \in X\}$用Lebesgue数引理即可。 □

定义 5.8.3. *若对空间X的任意无限子集A，$A' \neq \emptyset$, 则称X是极限点紧致的。若对空间X的任意序列$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$都有收敛子列，则称X列紧。*

定理 5.8.4. *设(X, d)为度量空间，则X紧$\Longleftrightarrow$ X极限点紧致$\Longleftrightarrow$ X列紧。*

证明. 紧$\Longrightarrow$ 极限点紧：这对所有的拓扑空间成立。设$A' = \emptyset$, 则A为闭集，从而为紧集。任取$x \in A$, 因为$x \notin A'$, 存在包含x的开集U_x满足$U_x \bigcap A = \{x\}$. $\{U_x | x \in A\}$是A的开覆盖，从而有有限子覆盖，因此A是有限集。

列紧$\Longrightarrow$ 极限点紧：这也对所有的拓扑空间成立。设A为无限集，任取A中序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$且x_n两两不同。由列紧定义存在收敛子列$\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, 设其收敛到$a$, 则$a \in A'$.

极限点紧$\Longrightarrow$ 列紧: 设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$为X中序列，若$\{x_n|n\in\mathbb{N}^*\}$是有限集，则必有无限个x_n为同一点，从而为收敛子列。若为无限集，则有聚点a. 依次取$x_{n_1}\in B_d(a,1), x_{n_2}\in B_d(a,\frac{1}{2}),...$且$n_1<n_2<n_3<...$, 则$\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$为收敛子列。
列紧$\Longrightarrow$ 紧: 首先我们证明列紧时引理5.8.2成立：任给(X,d)的开覆盖$\mathcal{A}$, 则存在$\delta>0$, 使得X的每个直径不超过δ的子集包含在$\mathcal{A}$的某个成员中。用反证法，假设对任意$n\geq 1$, 存在直径小于$\frac{1}{n}$的子集C_n，不包含在$\mathcal{A}$的任何一个成员中。任取$x_n\in C_n$, 考虑序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$的极限a, 则存在$\mathcal{A}$中成员U, 使得$x\in U$, 当n充分大时，$C_n\subseteq U$, 矛盾！接下来证明对任意$\epsilon>0$, 存在由有限个半径为ϵ的球构成的覆盖。同样用反证法，假设对某个$\epsilon>0$, 不存在由有限个半径为ϵ的球构成的覆盖。任取X中点x_1, 因为$B_d(x_1,\epsilon)$不能覆盖X, 取$x_2\in X\backslash B_d(x_1,\epsilon)$, 类似地$B_d(x_1,\epsilon)\bigcup B_d(x_2,\epsilon)$不能覆盖$X$, 取$x_2\in X\setminus B_d(x_1,\epsilon)\bigcup B_d(x_2,\epsilon)$. 以此类推，我们得到序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$满足$x_n\in X\setminus B_d(x_1,\epsilon)\bigcup B_d(x_2,\epsilon)\bigcup...\bigcup B_d(x_{n-1},\epsilon)$, 即$d(x_i,x_j)\geq\epsilon,\forall i\neq j$. 因此$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$没有子序列收敛，矛盾！现在我们从列紧推出紧。任给$(X,d)$的开覆盖$\mathcal{A}$，首先存在$\delta>0$, 使得$X$的每个直径不超过$\delta$的子集包含在$\mathcal{A}$的某个成员中。再取$\epsilon=\frac{\delta}{4}$, 并用有限个半径$\epsilon$的球覆盖$X$. 因为半径$\epsilon$的球直径不超过$2\epsilon<\delta$, 从而每个这样的球包含在某个$\mathcal{A}$的成员中，这有限个成员为$\mathcal{A}$的有限子覆盖。 □

对于一般拓扑空间以上等价性不成立。

例 5.8.5. *$\mathbb{N}$赋予离散拓扑，$\{0,1\}$赋予平凡拓扑，则乘积空间 $\mathbb{N}\times\{0,1\}$是极限点紧的，但不是列紧的，也不是紧的。*
S_Ω是极限点紧致的（实际上列紧），但不是紧的。

证明. 任给S_Ω的无限子集A, 取其可数无限子集$A_1=\{a_1,a_2,...\}$, 则A_1在S_Ω中有上界，即存在$b\in S_\Omega$使得$a_i\leq b, i=1,2,...$: 否则$\bigcup_{i=1}^{\infty}S_{a_i}=S_\Omega$为可数集，其中$S_{a_i}$为$a_i$处的截。从而$A_1\subseteq[m,b]$, 其中$m$为最小元，而$[m,b]$是紧致的，所以$A_1'$非空，进而$A'$也非空。 □

下面考虑度量空间紧致的条件。

定义 5.8.6. *设(X,d)为度量空间，称$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$为X中序列，如果对任意$\epsilon>0$, 存在$N\in\mathbb{N}^*$使得当$n,m\geq N$时，$d(x_n,x_m)<\epsilon$, 则称$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$为Cauchy序列。如果任意Cauchy序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$都收敛，则称(X,d)是完备的。*

定义 5.8.7. *设(X,d)为度量空间，如果对任意$\epsilon>0$, 存在有限个半径为ϵ的球覆盖X, 则称(X,d)是完全有界的。*

定理 5.8.8. *(X,d)是紧致的当且仅当(X,d)是完备和完全有界的。*

证明. 设(X,d)紧致，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$为Cauchy序列，由列紧性知有子列收敛到a, 则$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛到a. 完全有界已证。

下面假设(X,d)完备且完全有界，往证列紧，这只需对任意序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$找出Cauchy子列。根据完全有界性，依次用半径, $\frac{1}{2},...,\frac{1}{n}...$的球覆盖$X$. 则有半径为1的球$B_1$包含$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$中的无限项，又有半径$\frac{1}{2}$的球$B_2$包含这无限项中的无限项，依此类推，由对角线即可取出Cauchy子列。 □

引理 5.8.9. *设(X,d)为度量空间，则子集A在诱导度量下一致有界$\Longleftrightarrow\forall\epsilon>0$, 存在有限个半径$\epsilon$的球覆盖$A$.*

证明. 只需证明若$\forall\epsilon>0$, 存在有限个半径ϵ的球覆盖A, 则A在诱导度量下一致有界。设n个开球$B_d(x_i,\epsilon)$覆盖了A，不妨$B_d(x_i,\epsilon)\bigcap A\neq\emptyset$, 任取$a_i\in B_d(x_i,\epsilon)\bigcap A$, 则$B_d(a_i,2\epsilon), 1\leq i\leq n$覆盖了$A$. □

命题 5.8.10. *设(X,d)是完备度量空间，则子集A的闭包紧致$\Longleftrightarrow\forall\epsilon>0$, 存在有限个半径$\epsilon$的球覆盖$A$.*

设X为拓扑空间，(Y,d)为度量空间，在函数空间Y^X上赋予一致度量，记$\mathcal{C}=\{f\in Y^X|f$ 连续$\}$，$\mathcal{F}$是一族X到Y的连续函数，即$\mathcal{F}\subseteq\mathcal{C}$. $\mathcal{F}$在Y^X中的闭包何时紧致是分析中一个基本的问题。

定义 5.8.11. 设X为拓扑空间，(Y,d)为度量空间，$\mathcal{F}$是一族X到Y的连续函数，$x_0\in X$，若对任意$\epsilon>0$，存在x_0的开邻域U，使得对任意$x\in U$以及任意$f\in\mathcal{F}$，$d(f(x),f(x_0))<\epsilon$，则称$\mathcal{F}$在x_0处等度连续。如果$\mathcal{F}$每点都等度连续，则称$\mathcal{F}$等度连续。

定理 5.8.12 (Ascoli定理的特殊情形). 设X紧致，Y为欧氏空间$\mathbb{R}^n$. 则 $\mathcal{F}$的闭包紧致$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$等度连续，并且$\forall x\in X,\mathcal{F}_x=\{f(x)|f\in\mathcal{F}\}$是$\mathbb{R}^n$中有界集。

推论 5.8.13. 设$\{f_n\}_{n=1}^\infty$为$[0,1]$到$\mathbb{R}$的一列连续函数，等度连续且一致有界(存在正数M使得$\forall x\in[0,1]$, $|f_n(x)|\leq M$)，则$\{f_n\}_{n=1}^\infty$有子列一致收敛。

5.9 单点紧致化

定义 5.9.1. 给定空间X中一点x，若存在紧子集C和包含x的开集U满足$U\subseteq C$，则称X在x点处局部紧。

引理 5.9.2. 设X为*Hausdorff*空间，则X在x处局部紧当且仅当对包含x的任意开集U存在开集V满足$x\in V\subseteq\bar{V}\subseteq U$且$\bar{V}$紧致。

证明. 由假设存在紧子集C和包含x的开集W满足$W\subseteq C$. X是Hausdorff的，所以$\bar{W}\subseteq C$. 对x的开邻域U，取分离x和$C\setminus U$的开集V_1,V_2，则$\overline{V_1\bigcap W}\subseteq\bar{V}_1\bigcap\bar{W}\subseteq X\setminus V_2\bigcap C\subseteq U$. □

定理 5.9.3. 设X为*Hausdorff*空间，若X是局部紧致的，则存在紧致*Hausorff*空间Y满足

- 存在X到Y的嵌入，记为$i:X\to Y$，
- $Y\setminus i(X)$是单元素集.

更进一步这样的Y在同胚意义下唯一，即若Y'是另一个满足条件的拓扑空间，则Y'与Y同胚。

证明. 先证唯一性。假设Y存在，将X等同成Y的子空间，则$Y\setminus X$为单点集，记为P. 此时X为Y中开子集，Y中的开集U要么为X中开集，要么为包含P的开集。对后者，$Y\setminus U$为X的紧子集。令$\mathcal{T}=\{U|U$是X中开集$\}\bigcup\{X\setminus K\bigcup\{P\}|K$是$X$中紧集$\}$. 则$\mathcal{T}$是$Y$上的拓扑，所以$Y$上的拓扑唯一。

再证存在性。因为X是Hausdorff的，所以紧集是闭集。在集合$Y=X\bigcup\{P\}$上如上定义$\mathcal{T}$，直接验证$\mathcal{T}$是拓扑：$\bigcup(X\setminus K_\alpha)=X\setminus(\bigcap K_\alpha),U\bigcup X\setminus K=X\setminus(K\setminus U),X\setminus K_1\bigcap X\setminus K_2=X\setminus(K_1\bigcup K_2),U\bigcap X\setminus K=U\setminus K$. 由定义，容易知道$Y$是紧致的，并且$X$是$Y$的子空间。下面用局部紧性证明$Y$是Hausdorff的。只需对$P$和$X$中一点$x$证明存在分离它们的开集。取$x$的开邻域$V$使得$\bar{V}$是紧致的。则$Y\setminus\bar{V}=X\setminus\bar{V}\bigcup\{P\}$是$P$的开邻域，且$Y\setminus\bar{V}\bigcap V=\emptyset$. □

记$Y\setminus i(X)$为$\{\infty\}$. 若X紧致，则∞为孤立点.

定义 5.9.4. X为拓扑空间，若拓扑空间Y满足Y是紧致的*Hausdorff*空间，Y有子空间A和X同胚且$\bar{A}=Y$，则称Y为X的紧化。若$Y\setminus A$为单点集，则称Y为X的单点紧化。

当X为非紧的局部紧致Hausdorff空间时，单点紧化存在，并且在同胚意义下唯一。

例 5.9.5. $\mathbb{R}^n$的单点紧致化为$\mathbb{S}^n$.

命题 5.9.6. 设X是局部紧致的*Hausorff*空间，A是X的开集或闭集，则A也是局部紧致的。

6 紧致曲面的分类

本章我们给出曲面的定义，并在在假定一些基本事实之后证明曲面的分类定理。

6.1 商拓扑

直观来说，我们可以通过“粘贴”来构造复杂的空间。例如，我们可以将正方形的对边相粘得到环面。“粘贴”的严格描述就是商空间。设$(X,\mathcal{T})$为拓扑空间，$\sim$是X上的等价关系，记$\pi: X\to X/\sim$为自然投射：$\pi(a)=[a]$. 我们在$X/\sim$定义如下拓扑：

引理 6.1.1. *$\mathcal{F}=\{U\subseteq X/\sim || \pi^{-1}(U)$ 是X中开集$\}$是$X/\sim$上拓扑。*

证明. 首先$\pi^{-1}(\emptyset)=\emptyset, \pi^{-1}(X/\sim)=X$, 从而$\emptyset, X/\sim$都在$\mathcal{F}$中。再由$\pi^{-1}(\bigcup U_\alpha)=\bigcup \pi^{-1}(U_\alpha)$, $\pi^{-1}(U\bigcap V)=\pi^{-1}(U)\bigcap \pi^{-1}(V)$, 可知拓扑的另外两条有成立。 □

$\mathcal{F}$称为$X/\sim$上的商拓扑。此时$\pi: X\to X/\sim$为满射，且U为$X/\sim$中开集当且仅当$\pi^{-1}(U)$为X中开集。我们也可以用映射的这种性质表述商拓扑：

定义 6.1.2. *设X,Y为拓扑空间，若映射$p: X\to Y$为满射，且U为Y中开集当且仅当$p^{-1}(U)$为X中开集，则称p为商映射。*

引理 6.1.3. *若$p: X\to Y$为商映射，则存在X上等价关系$\sim$, 以及同胚映射$f:(X/\sim, \text{商拓扑})\longrightarrow Y$使得$f\circ\pi=p$, 即有如下交换图表：*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

证明. 定义$\sim$为$x\sim y$当且仅当$p(x)=p(y)$, 定义$f([a])=p(a)$. 则f为1-1映射，下面验证f为同胚。

f连续：任取Y中开集V, 则$p^{-1}(V)$是开集，而$\pi^{-1}(f^{-1}(V))=p^{-1}(V)$, 从而由商拓扑定义知$f^{-1}(V)$为开集。

f为开映射：任取$X/\sim$中开集U, 则$f(U)=p(\pi^{-1}(U))$. 由假设$p(\pi^{-1}(U))$为开集当且仅当$p^{-1}(p(\pi^{-1}(U)))$为开集。而$p^{-1}(p(\pi^{-1}(U)))=\pi^{-1}(U)$, 由商拓扑定义$\pi^{-1}(U)$为开集，因此$p(\pi^{-1}(U))$为开集，即$f$为开映射。 □

给定满射$p: X\to Y$, 如果X中子集A满足$A=p^{-1}(p(A))$, 则称A为(关于p的）饱和子集。易知A为饱和子集当且仅当存在Y中子集B, 使得$A=p^{-1}(B)$. 如果X,Y都是拓扑空间，则p是商映射等价于p是连续的满射，并且当W是饱和开集时，$p(W)$是开集（等价于饱和闭集的像是闭集）。因此连续的映满的开映射一定是商映射。

例 6.1.4. *1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1, f(x)=e^{2\pi ix}$是商映射。*
2. 在$X=[0,1]\times[0,1]$上定义等价关系为：$(0,y)\sim(1,y),(x,0)\sim(x,1)$（当然还有自身和自身等价），则$X/\sim$同胚于$\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$.
3. 任给拓扑空间X的子集A, 定义等价关系为：$a\sim b, \forall a,b\in A$. 将$X/\sim$记为$X/A$.

命题 6.1.5. *设映射$F: X\to Y, f: X/\sim\to Y$满足$\pi\circ f=F$. 则$F$连续当且仅当$f$连续，$F$为商映射当且仅当$f$为商映射。*

证明. 因为连续映射的复合连续，商映射的复合是商映射，所以只需证明若F连续则f连续，以及若F为商映射则f为商映射。

设F连续，任给Y中开集V，则$\pi^{-1}(f^{-1}(V))=F^{-1}(V)$为开集。由商拓扑定义，$f^{-1}(V)$为开集，从而$f$连续。

设F为商映射，则F为连续满射，从而f也为连续满射。下证f将饱和开集映为饱和开集。任取$X/\sim$中饱和开集W, 则$\pi^{-1}(W)$为X中饱和开集。因为$f(W)=F(\pi^{-1}(W))$，而F为商映射，所以$f(W)$为开集。 □

设A为拓扑空间X的子集，$f: A\to Y$为连续映射，在$X\sqcup Y$上定义等价关系$\sim$为：$a\sim f(a)$, 所得商空间称为将X沿着A用f粘贴到Y上所得空间，记为$X\sqcup_f Y$.

商映射的乘积不总是商映射。

例 6.1.6. 考虑商映射$\pi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{N}^*$以及恒同映射（也是商映射）$i: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$，则$\pi \times i: \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}/\mathbb{N}^* \times \mathbb{Q}$不是商映射。

命题 6.1.7. 设 $f: X \to Y$ 是商映射, Z 是局部紧致的 *Hausdorff* 空间， $id: Z \to Z$ 表示恒同映射，则

$$f \times \ id \ : X \times Z \to Y \times Z$$

也是商映射。

证明. 记 $F = f \times \mathrm{id}$. 它显然是连续满映射。还需证明当 $W \subseteq Y \times Z$ 使得 $F^{-1}(W)$ 是开集时，W 是开集。任给$(y_0, z_0) \in W$, 取$x_0 \in f^{-1}(y_0)$, 则$(x_0, z_0) \in F^{-1}(W)$. 取z_0的开邻域U_1使得$\{x_0\} \times U_1 \subseteq F^{-1}(W)$, 即$\{y_0\} \times U_1 \subseteq W$. 由于$Z$是局部紧的，取$z_0$的开邻域$U_2$使得$\bar{U}_2$是紧致的，且$\overline{U}_2 \subseteq U_1$. 令$V := \{y \in Y \mid \{y\} \times \overline{U}_2 \subseteq W\}$, 则 $y_0 \in V$, 并且 $V \times \overline{U}_2 \subseteq W$. 若$f(x) = y$, 则$y \in V \iff \{x\} \times B \subset F^{-1}(W)$. 从而$f^{-1}(V) = \{x \in X \mid \{x\} \times \ B \subseteq F^{-1}(W)\}$. 由于 $\overline{U}_2$ 紧致， $F^{-1}(W)$ 是开集，由管状邻域引理，$f^{-1}(V)$是开集. 由于f是商映射, V 也是开集。于是$(y_0, z_0) \in V \times U_2 \subseteq W$. □

$\mathbb{R}$ 和 I 都是局部紧致的 Hausdorff 空间，可以使用该命题。

6.2 曲面的定义和多边形表示

定义 6.2.1. n为给定正整数，假设对拓扑空间X中任一点x，都存在x的开邻域U同胚于$\mathbb{R}^n$中的开集, 则称X称为n维拓扑流形。2维拓扑流形称为曲面。

通常我们会要求流形是Hausdorff空间且满足第二可数公理（其拓扑存在由可数个开集构成的基）。若X是紧致的拓扑流形，则自然满足第二可数公理。

例 6.2.2. 球面，射影平面，环面，*Klein*瓶

定义 6.2.3 (曲面的连通和)**.** 设S_1, S_2是两个曲面，分别取S_1, S_2的与单位闭圆盘$\bar{D}$同胚的两个子集$\bar{D}_1, \bar{D}_2$. 设$h: \bar{D}_1 \to \bar{D}_2$为同胚，将$S_1 \setminus D_1$与$S_1 \setminus D_2$沿着$\bar{D}_1 \setminus D_1$用$h$粘起来得到的空间称为$S_1, S_2$的连通和，记为$S_1 \# S_2$.

定义 6.2.4. P是一个多边形区域，P的标记指的是从边的集合到某个集合S（称为标签集）的映射。设P的边给了定向和标记，则可定义如下等价关系：$IntP$中的点和自己等价，设e_1, e_2是两条定向边，h是正线性映射，则定义$x \sim h(x)$. 商空间$P/\sim$称为按照给定定向和标记粘合各边所得空间。类似地，可以定义有限个多边形区域的粘合。

设多边形的顶点为$p_0, p_1, ..., p_n = p_0$, 各边的标签依次为$a_1, a_2, ..., a_n$,若边$p_{k-1}p_k$的定向为p_{k-1}到p_k，则记$\epsilon_k = 1$，否则记$\epsilon_k = -1$. 那么一个给定定向和标记的多边形就可以用以下字符串$w = a_1^{\epsilon_1} a_2^{\epsilon_2} ... a_n^{\epsilon_n}$表示，称$w$为长度为$n$的标记表。

命题 6.2.5. 有限个多边形区域粘合所得商空间是紧致的*Hausdorff*空间。

引理 6.2.6. 设$\pi: E \to X$为闭的商映射，且E是正规空间，则X也是正规空间。

证明. 首先任取$x \in X$, 则对$y \in \pi^{-1}(x), \pi(y) = x$, 从而$x$为闭集。设$A, B$为$X$中不相交的闭集，则$\pi^{-1}(A), \pi^{-1}(B)$为$E$中不相交的闭集。由正规性，存在开集$U, V$满足$\pi^{-1}(A) \subseteq U, \pi^{-1}(B) \subseteq V, U \bigcap V = \emptyset$. 令$C = E \setminus U, D = E \setminus V$，则$C \bigcup D = E, \pi(C) \bigcap A = \emptyset, \pi(D) \bigcap B = \emptyset$. 从而$X \setminus \pi(C), X \setminus \pi(D)$为分离$A, B$的开集。 □

命题证明. 设$p: E = \sqcup P_i \to X$为多边形区域的商空间。首先多边形区域是紧致的，所以其商空间也是紧致的。下面证明p是闭映射，即若B是E中闭集，则$p(B)$是X中闭集。只需证明：若B是E中紧集，则$p^{-1}(p(B))$为E中紧集。而$p^{-1}(p(B))$为B和B与一些边的交的并，从而为紧集。 □

定理 6.2.7. 紧致连通曲面都可以用一个多边形区域按照适当的标记表粘合得到，这些标记表中每个标号都恰好出现两次（这种标记表称为恰当标记表）。

该定理是曲面可三角剖分的推论，见6.5节。

例 6.2.8. $aa^{-1}bb^{-1}, a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}...a_kb_ka_k^{-1}b_k^{-1}(k \geq 1)$以及$abab, a_1a_1a_2a_2...a_ka_k(k \geq 2)$称为标准标记表，按这些标记表粘合所得的空间分别为 $\mathbb{S}^2, \mathbb{T}^2\#...\#\mathbb{T}^2$以及$\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}P^2\#...\#\mathbb{R}P^2$.

6.3 多边形表示的操作

可以对给定定向和标记的多边形区域进行一些操作，使得粘合的商空间是不变的（同胚的），通过选择适当的操作，最终能将任意的正常标记表化成标准标记表。本节我们先讨论将要使用的操作。

定义 6.3.1. 将如下操作称为初等操作：

- 切割和黏合：$y_0y_1 \longleftrightarrow y_0c^{-1}, cy_1$
- 换标签：将某个标签a换成另一个尚未出现的新标签z
- 置换：$y_0y_1 \longleftrightarrow y_1y_0$
- 翻转：$a_1^{\epsilon_1}a_2^{\epsilon_2}...a_n^{\epsilon_n} \longleftrightarrow a_n^{-\epsilon_n}...a_2^{-\epsilon_2}a_1^{-\epsilon_1}$
- 删除：$y_0c^{-1}cy_1 \longrightarrow y_0y_1$

如果标记表w通过初等变换变成w', 则记$w \sim w'$.

命题 6.3.2. 标记表经过初等操作后对应的商空间和原来的空间同胚。

6.4 紧致连通曲面的分类

定理 6.4.1. 任何一个紧致连通曲面必与$\mathbb{S}^2, \mathbb{T}^2\#...\#\mathbb{T}^2$以及$\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}P^2\#...\#\mathbb{R}P^2$其中之一同胚。

我们需要证明任何恰当标记表都可以通过初等操作变成标准标记表。如果一个恰当标记表中每个标签的指数各有一个$+1, -1$, 则称其为环型的（对应可定向），否则称为射影型的（对应不可定向）。

引理 6.4.2. 设w是形如$y_0ay_1ay_2$的射影型标记表（其中某个y_i可能为空），则可通过初等变换变成$aay_0y_1^{-1}y_2$, 其中y_1^{-1}表示y_1的翻转。

证明. 先考虑y_0为空的情况, $ay_1ay_2 \rightarrow ay_1c^{-1}, cay_2 \rightarrow cy_1^{-1}a^{-1}, ay_2c \rightarrow cy_1^{-1}y_2c \rightarrow ccy_1^{-1}y_2$. (见图5)

一般情况可先将$y_0ay_1ay_2$变成$by_2by_1y_0$(图6), 再用如上操作，可得$bby_2^{-1}y_1y_0^{-1}$, 再翻转，置换即可。

□

引理 6.4.3. 设w是形如$w_0y_1ay_2by_3a^{-1}y_4b^{-1}y_5$的恰当标记表（其中某个$y_i$可能为空），则可通过初等变换变成$w_0aba^{-1}b^{-1}y_1y_4y_3y_2y_5$.

证明. 如图7操作即可。 □

引理 6.4.4. 设w是形如$w_0ccaba^{-1}b^{-1}w_1$的恰当标记表，则可通过初等变换变成$w_0aabbccw_1$.

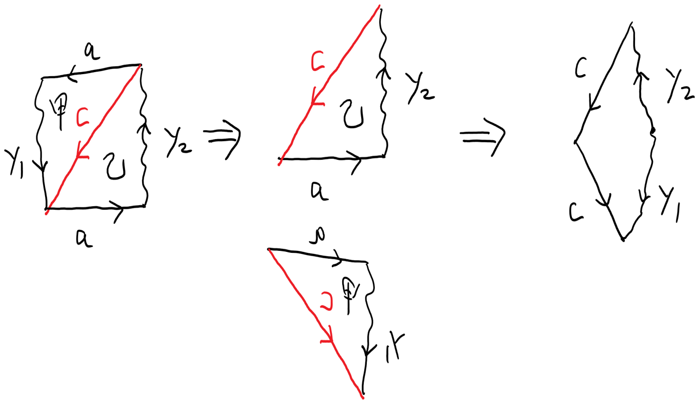

图 5: $ay_1ay_2 \to ccy_1^{-1}y_2$

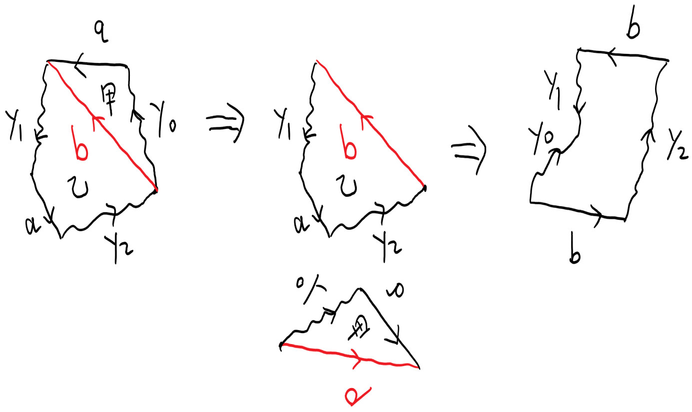

图 6: $y_0ay_1ay_2 \to by_2by_1y_0$

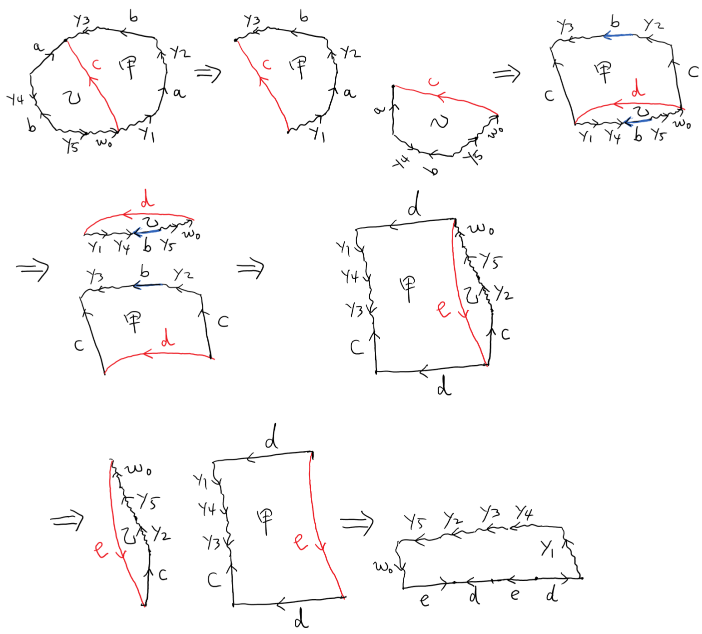

图 7: $w_0y_1ay_2by_3a^{-1}y_4b^{-1}y_5 \to w_0aba^{-1}b^{-1}y_1y_4y_3y_2y_5$

证明. 用引理6.4.2:

$$\begin{aligned}
w &\sim (cc)\left(aba^{-1}b^{-1}\right)w_1w_0 && \text{置换}\\
&= cc[ab][ba]^{-1}\left[w_1w_0\right]\\
&\sim [ab]c[ba]c\left[w_1w_0\right] && \text{引理6.4.2}\\
&= [a]b[c]b\left[acw_1w_0\right]\\
&\sim bb\left[ac^{-1}acw_1w_0\right] && \text{引理6.4.2}\\
&= [bb]a[c]^{-1}a\left[cw_1w_0\right]\\
&\sim aa[bbccw_1w_0] && \text{引理6.4.2}\\
&= w_0aabbccw_1 && \text{置换}
\end{aligned}$$

□

定理证明. 注意到若w中有相邻的相同标号（符号相反），如果长度> 4, 则可通过删除减少长度，从而不妨设w中没有相邻的相同标号。

设w为环形恰当标记表，对w的长度n（此时$n \geq 4$）归纳证明。若$n = 4$, 则$w = aa^{-1}bb^{-1}$或$w = aba^{-1}b^{-1}$. 考虑其中相隔最近（不相邻）的两个标号中最早出现的，记为a, 即$w = ...a...a^{-1}....$ 任取a, a^{-1}之间的标号b, 则b^{-1}在a之前或者在a^{-1}之后，即$w = y_0b^{-1}y_1ay_2by_3a^{-1}y_4$或$w = y_0ay_1by_2a^{-1}y_3b^{-1}y_4$. 由引理6.4.3知$w$可经过初等变换变成$aba^{-1}b^{-1}w_1$, 对$w_1$用归纳假设即可。

设w为射影型恰当标记表，对w的长度n（此时$n \geq 4$）归纳证明。当$n = 4$时，由引理6.4.2, w可变换成形如aaw_1的标记表，从而w可变成$aabb$或者$aabb^{-1}$, 而$aabb^{-1} \sim abab$. 对一般的$n > 4$, 由引理6.4.2, w可变换成aaw_1. w_1的长度为$n-2$, 如果w_1为射影型，可再用引理6.4.2, 最终w可变换成$x_1x_1y_2y_2...z_kz_kw_0$, 其中w_0为空或者为环形。从而由归纳法可知w_1为$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}...a_kb_ka_k^{-1}b_k^{-1}(k \geq 1)$（此时因为表的总长度大于4，$w_1 = aa^{-1}bb^{-1}$不发生）. 不断用引理6.4.4则可将$w$化成$a_1a_1...a_la_l(l \geq 1)$的形式。 □

6.5 欧拉示性数（组合定义）

定义 6.5.1. 如果欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的$k(\geq 1)$个点$v_0, v_1, ...v_{k-1}$满足$\overline{v_0 v_i}, i = 1, 2, ..., k-1$线性无关，则称这$k$个点$v_0, v_1, ...v_{k-1}$处于一般位置。对处于一般位置的$k$个点$v_0, v_1, ...v_{k-1}$，称$\{\sum_{i=0}^{k-1} s_i v_i | s_i \in [0,1], \sum_{i=0}^{k-1} s_i = 1\}$为由$v_0, v_1, ...v_{k-1}$生成的$k-1$维单形，记为$[v_0, v_1, ..., v_{k-1}]$. $v_0, v_1, ...v_{k-1}$的$l+1(\leq k)$元子集生成的单形称为$[v_0, v_1, ..., v_{k-1}]$的l维面。

定义 6.5.2. 设欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 内的一组有限多个单纯形满足：只要某个单纯形属于这个组, 它的每个面也属于这个组, 并且如果组内的两个单纯形相交, 则公共部分是一个公共面，则称这组单形为单纯复形。构成某一特定复形的单纯形的并集是欧氏空间的子集, 因此有子空间的拓扑。一个复形K 按这种方式看作一个拓扑空间时叫做多面体, 并记作 $|K|$.

拓扑空间 X 的一个单纯(三角）剖分由一个单纯复形 K 与一个同胚 $h : |K| \to X$ 共同组成。

定理 6.5.3. 任何一个紧致曲面存在三角剖分。

由此可知，紧致曲面是有限个三角形通过边两两粘合所得的商空间（需要证明三角剖分的每条边恰好出现两次，并且边的粘合决定了顶点的粘合）。从一个三角形开始，不断将剩下的一个三角形与已有的多边形区域的一边重合，最终可得一个多边形区域的商空间，并且对应的标记表是恰当标记表。

设K为2维复形，有V个顶点，E条边，F个三角形，令$\chi(K) = V - E + F$, 称为K的欧拉示性数。

命题 6.5.4. 设$(K_i, h_i), i = 1, 2$为曲面S的两个三角剖分，则$\chi(K_1) = \chi(K_2)$. 即$\chi(K)$与三角剖分的选择无关, 称为S的欧拉示性数，记为$\chi(S)$.

7 基本群

我们需要借助于一些可计算的代数结构来研究拓扑空间，Poincaré最早对任意一个拓扑空间引入了这样一个结构：基本群。本章定义基本群并给出基本群的应用。

7.1 同伦

定义 7.1.1. 记$I = [0,1]$, 设$f, g : X \to Y$为两个连续映射，若存在连续映射$H : X \times I \to Y$满足$H(x,0) = f(x), H(x,1) = g(x)$, 则称$H$为$f$到$g$的同伦，$f$和$g$是同伦的，记为$f \overset{H}{\simeq} g$或$f \simeq g$. 给定$X$的子空间$A$, 若存在连续映射$H : X \times I \to Y$满足$H(x,0) = f(x), H(x,1) = g(x)$, 且$H(a,t) = f(a) = g(a), \forall t \in I, \forall a \in A$, 则称$H$为$f$到$g$的相对于$A$的同伦，$f$和$g$是相对于$A$同伦的，记为$f \simeq g\, rel.\, A$.

通常如果映射同伦于常值映射，则称为零伦的。映射之间的同伦是一种等价关系,且有如下简单性质：

引理 7.1.2. 设连续映射$f_i : X \to Y, g_i : Y \to Z, i = 1, 2$满足$f_1 \simeq f_2, g_1 \simeq g_2$,则$g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2$.

定义 7.1.3. 设$f : X \to Y, g : Y \to X$是两个连续映射，若$f \circ g \simeq id_Y, g \circ f \simeq id_X$, 则称$f$是$X$到$Y$的同伦等价，$g$称为$f$的同伦逆，$X$和$Y$是同伦等价的。

7.2 基本群的定义和基本性质

设x_0, x_1为拓扑空间X中两点，记$P_{x_0,x_1} = \{\gamma : I \to X | \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1\}, \Omega_{x_0} = P_{x_0,x_0}$, 分别称为$x_0$到$x_1$的道路空间和基点在$x_0$的环路空间。任给道路$\gamma$, 定义$\bar{\gamma}(t) = \gamma(1-t), \forall t \in [0,1]$, 称为$\gamma$的逆道路。

定义 7.2.1. 对$\gamma_1 \in P_{x_0,x_1}, \gamma_2 \in P_{x_1,x_2}$，定义$\gamma_1\#\gamma_2 \in P_{x_0,x_2}$为

$$\gamma_1\#\gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t)(x) & , \quad t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \gamma_2(1-2t)(x) & , \quad t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \tag{7.1}$$

称为道路γ_1, γ_2的毗连。

引理 7.2.2. 毗连有如下性质：

- 若$\gamma_1 \simeq \tilde{\gamma}_1 \, rel. \{0,1\}, \gamma_2 \simeq \tilde{\gamma}_2 \, rel. \{0,1\}$，则$\gamma_1\#\gamma_2 \simeq \tilde{\gamma}_1\#\tilde{\gamma}_2$.
- $(\gamma_1\#\gamma_2)\#\gamma_3 \simeq \gamma_1\#(\gamma_2\#\gamma_3)$.

两条道路γ_1, γ_2相对于$\{0,1\}$的同伦称为道路同伦，记为$\gamma_1 \simeq \gamma_2$或$\gamma_1 \simeq_p \gamma_2$. 对$\gamma \in \Omega_{x_0}$，记$\gamma$的道路同伦类为$[\gamma]$，即$[\gamma] = \{f \in \Omega_{x_0} | f \simeq \gamma \, rel \, \{0,1\}\}$，则上述引理给出了道路等价类上的乘法：记$\pi_1(X, x_0) = \{[\gamma] | \gamma \in \Omega_{x_0}\}$，定义$\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$为$[\gamma_1] \cdot [\gamma_2] = [\gamma_1\#\gamma_2]$.

命题 7.2.3. 记c_{x_0}为常值道路：$c_{x_0}(t) = x_0, \forall t \in [0,1]$，则$\pi_1(X, x_0)$在上述乘法下构成以$c_{x_0}$为单位元的群，称为空间$X$在基点$x_0$处的基本群。

和常值道路道路同伦的道路称为零伦的。若x_1, x_2在同一个道路连通分支中，则$\pi_1(X, x_1)$与$\pi_1(X, x_2)$同构，精确的结论如下：

引理 7.2.4. 设$f : [0,1] \to X$为连接x_1, x_2的道路，则$\Phi([\gamma]) = [\bar{f}\#\gamma\#f]$为$\pi_1(X, x_1)$到$\pi_1(X, x_2)$的同构。

对于道路连通的空间，有时我们省略基点将基本群记为$\pi_1(X)$.

引理 7.2.5. 假设X是道路连通的空间且$\pi_1(X)$是*abel*群，对X中任意两点x_1, x_2，引理*7.2.4*中的同构不依赖连接x_1, x_2的道路f的选择，并且对$\gamma_1 \in \Omega_{x_1}, \gamma_2 \in \Omega_{x_2}$，它们是同伦的（不必是道路同伦）当且仅当它们在基本群的如上同构中相互对应。

拓扑空间的连续映射诱导了基本群之间的同态，这是用基本群研究拓扑问题的基本出发点。

命题 7.2.6. 设$f : X \to Y$是连续映射，$f(x_0) = y_0$，定义$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$为$f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma]$. 则$f_*$为群同态。

命题 7.2.7. 设$f : X \to Y$为同伦等价，则f_*为同构。

7.3 $\mathbb{S}^1$的基本群

本节计算$\mathbb{S}^1$的基本群，虽然$\mathbb{S}^1$很简单，但是基本群包含了到$\mathbb{S}^1$的所有映射的同伦信息，计算它是一件相当不容易的事。我们用覆盖空间来计算$\mathbb{S}^1$的基本群，覆盖空间和基本群之间联系的更多讨论见第5节。

定义 7.3.1. 设$p : E \to B$为连续满射，若对任意B中一点x，若存在x的开邻域U使得$p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in J} V_\alpha$，其中$V_\alpha$是$E$中开集，且$p|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U$为同胚，则称$p$为覆盖映射，$E$为$B$的覆盖空间，定义中的$U$称为基本开邻域。

对$x \in B, \pi^{-1}(x)$称为x处的纤维。若每点处的纤维都是有n个元素的有限集，则称E是B的n叶覆盖。

定理 7.3.2. 设$p : E \to B$为覆盖映射，$F : Y \to E, h : Y \times I \to B$为连续映射且$p \circ F = h_{Y \times \{0\}}$，则存在唯一的连续映射$H : Y \times I \to E$使得$p \circ H = h$:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Y \times [0,1] \arrow[ur, "F \subseteq H"] \arrow[r, "h"] & B \end{tikzcd}$$

对于Y到E和B的两个映射f,g, 若$p\circ f=g$, 则称f是g的提升。定理的条件给出了$h_{Y\times\{0\}}$的提升F，结论是由此可以得到h的提升：也就是说当"h的头"提升了之后，整个h就可以唯一的提升。我们用一点点扩张的办法证明：如果h的像落在一个基本开邻域内，那么显然是可以提升的。所以我们用基本开邻域来覆盖h的像集，逐步在每个基本开邻域内提升。

证明. 我们按照如下步骤证明：

- 对Y是一个点时证明唯一性，由此推出任意空间Y时提升唯一
- 任给$y_0\in Y$, 证明存在y_0的开邻域N以及h在$N\times I$上的提升
- 证明提升存在

第一步 设Y为单点集, 设H_1,H_2是h的两个满足条件的提升，我们证明$J=\{t\in I|H_1(t)=H_2(t)\}$是既开又闭的集合。根据连续性可知$J$是闭的。若$t\in I$, 任取包含$h(t)$的基本开邻域$U$, 设$p^{-1}(U)=\bigcup V_\alpha$, 且对某个$\alpha_0$, $H_1(t)=H_2(t)\in V_{\alpha_0}$. 取$\delta>0$使得$H_i((t-\delta,t+\delta))\subseteq V_{\alpha_0}, i=1,2$（当$t=0$时，取成$[0,\delta]$），则由$p\circ H_1=p\circ H_2$以及$p:V_\alpha\to U$为同胚，可得$H_1|_{(t-\delta,t+\delta)}=H_2|_{(t-\delta,t+\delta)}$. 从而$J$是开集。限制在$\{y\}\times I$上即得一般情形的唯一性。
第二步 任给$t\in[0,1]$, 取包含$h((y_0),t)$的基本开邻域U, 由h的连续性，知存在包含t的开邻域J_t以及包含y_0的开邻域W_t使得$J_t\times W\subseteq h^{-1}(V_{\alpha_0})$. $\{J_t|t\in I\}$是I的开覆盖，由Lebesgue数引理，可将I分成$t_0=0<t_1<t_2<...<t_n=1$使得$h|_{\{y_0\}\times[t_{i-1},t_i]}(1\leq i\leq n)$均落在某个基本开邻域$U_i$中。再取$y_0$开邻域$N$使得$h|_{N\times[t_{i-1},t_i]}(1\leq i\leq n)$仍落在某个基本开邻域$U_i$中。下面对$i$归纳构造$h|_{N_i\times[0,t_i]}$的提升. 对$i=1$, 设$p^{-1}(U_i)=\bigcup V_\alpha$, 且对某个$\alpha_0$, $F(y_0)\in V_{\alpha_0}$, 定义$h|_{N\times[0,t_1]}$的提升为$p^{-1}\circ h$即可。设$H|_{N_i\times[0,t_i]}$已有定义，$p^{-1}(U_{i+1})=\bigcup V_\beta$, 且对某个$\beta_0$, $H(y_0,t_i)\in V_{\beta_0}$, 则$H(\{y_0\}\times[t_i,t_{i+1}])\subseteq V_{\beta_0}$, 取$y_0$的开邻域$N_{i+1}\subseteq N_i$使得$H(N_{i+1}\times[t_i,t_{i+1}])\subseteq V_{\beta_0}$, 定义$h|_{N_{i+1}\times[t_i,t_{i+1}]}$提升为$p^{-1}\circ h$.
第三步 由第二步，对每点$y\in Y$, 存在y的开邻域N_y使得存在h的提升$H_y:U_y\times I\to E$. 由第一步，当$N_y\bigcap N_{y'}\neq\emptyset$时，$H_y|_{N_y\bigcap N_{y'}}=H_{y'}|_{N_y\bigcap N_{y'}}$. 从而这些$H_y$给出了$h$的提升。 □

推论 7.3.3. *设x_0,x_1是B中两点，$e_0\in p^{-1}(x_0)$, 任给$\gamma\in P_{x_0,x_1}$, 存在唯一的提升Γ满足$\Gamma(0)=e_0$. 若γ'与γ道路同伦，则Γ'与Γ道路同伦，特别地，$\Gamma(1)=\Gamma'(1)$.*

定理 7.3.4. *$\pi_1(\mathbb{S}^1)\cong\mathbb{Z}$.*

证明. $\mathbb{S}^1=\{z\in\mathbb{C}||z|=1\}$, $p:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1, p(s)=e^{2\pi is}$是覆盖映射，$p^{-1}(0)=\mathbb{Z}$. 取$1\in\mathbb{C}$为基点，对任意$[\gamma]\in\pi_1(\mathbb{S}^1,1)$, 由推论7.3.3, γ存在唯一的提升Γ满足$\Gamma(0)=0$, 且$\Gamma(1)$由γ所在的道路同伦类决定，从而有映射$\Phi:\pi_1(\mathbb{S}^1,1)\to\mathbb{Z}, \Phi([\gamma])=\Gamma(1)$. 下面依次证明：$\Phi$为群同态，$\Phi$是单满同态。

设$[\gamma_1],[\gamma_2]\in\pi_1(\mathbb{S}^1,1)$, γ_1,γ_2对应的以0为起点的提升为Γ_1,Γ_2. 任给$m\in\mathbb{Z}$, 则γ_2对应的以m为起点的道路为$(\Gamma_2+m)(t)=\Gamma_2(t)+m,\forall t\in I$. 从而$\gamma_1\#\gamma_2$对应的以0为起点的提升为$\Gamma_1\#(\Gamma_2+\Gamma_1(1))$, 从而$\Phi([\gamma_1]\cdot[\gamma_2])=\Gamma_1(1)+\Gamma_2(1)$, 即$\Phi$为同态。

$\Phi([\gamma])=0$, 则Γ是环路，从而是零伦的，因此γ也是零伦的。任给$m\in\mathbb{Z}$, 定义$\gamma_m:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$为$\gamma(z)=z^m$, 则$\Phi([\gamma_m])=m$, 从而$\Phi$是满射。 □

推论 7.3.5. *$\pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0\})\cong\mathbb{Z}$.*

7.4 基本群的应用：Brouwer不动点定理，代数基本定理，Jordan曲线定理

本节我们给出基本群的一些应用。

定理 7.4.1 (Brouwer不动点定理). *记$D^2=\{z\in\mathbb{C}||z|\leq 1$, $f:D^2\to D^2$为连续映射，则f有不动点：存在$x\in D^2$, 使得$f(x)=x$.*

证明. 反证法，若f没有不动点，定义映射$\phi: D^2 \to \mathbb{S}^1$为$\phi(z)$为$z, f(z)$的反向延长线和$\mathbb{S}^1$的交点，当$z \in \mathbb{S}^1$时，$\phi(z) = z$. 容易验证$\phi$是连续的，下面证明这样的映射不存在。$id_{\mathbb{S}^1}$可以看成$\pi_1(\mathbb{S}^1)$的生成元，从而$id_{\mathbb{S}^1}$不是零伦的。另一方面，记$i: \mathbb{S}^1 \to D^2$为嵌入，则 $\phi \circ i = id_{\mathbb{S}^1}$，从而$\phi_*([i]) = [id_{\mathbb{S}^1}]$. 而$[i] \in \pi_1(D^2) = \{0\}$, 与$[id_{\mathbb{S}^1}]$非零矛盾！ □

下面我们将1.1节中关于代数基本定理的证明严格化，首先我们给出环绕数的定义。

定义 7.4.2. 设$\gamma: I \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$为连续映射，称$[\gamma] \in \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$为曲线$\gamma$对原点的环绕数。

引理 7.4.3. 设$p(z) = a_n z^n + ...a_1 z + a_0, n \geq 1, a_n \neq 0$是复系数多项式，则存在$R > 0$, 当$r \geq R$时，$\gamma_1(t) = p(re^{2\pi t})$与$\gamma_2(t) = a_n(re^{2\pi t})^n$作为$\mathbb{C} \setminus \{0\}$中的道路是同伦的。

证明. 令$H(t,s) = s\gamma_1(t) + (1-s)\gamma_2(t)$, 只需证明当$R$充分大时，$H$不等于0. 由定义 $H(t,s) = a_n(re^{2\pi t})^n + sa_{n-1}(re^{2\pi t})^{n-1} + ... + sa_1 re^{2\pi t} + sa_0$, 从而 $|H(t,s)| \geq |a_n|r^n - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|r^i$. 由此易知$R$充分大且$r \geq R$时，$H$不为零。 □

根据以上定义和引理，1.1中的证明就是严格的了。

直观上，平面上一条封闭但不自交的曲线将平面分成两个不连通的部分，该结论的严格证明是一件相当不容易的事，本节我们利用基本群给出部分结果。

定理 7.4.4 (Jordan曲线分离定理). 设$\gamma: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2$是嵌入，则$\mathbb{S}^2 \setminus \gamma(\mathbb{S}^1)$是不连通的。

引理 7.4.5 (零伦引理). 设$f: A \to \mathbb{S}^2 \setminus \{a,b\}$, 若$a, b$在$\mathbb{S}^2 \setminus f(A)$的同一分支中，则$f$是零伦的。

证明. 通过球极投影，将$\mathbb{S}^2 \setminus \{a,b\}$与$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$等同，取充分大的球$B(0,R)$包含$f(A)$以及球外一点$p$. 由假设存在曲线$\alpha \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus f(A)$连接0与$p$. 定义映射 $G: A \times I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$为$G(x,t) = f(x) - \alpha(t)$, 则$G$为$f$到$k(x) = g(x) - p$的同伦。再定义$H: A \times I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$为$H(x,t) = tf(x) - p$, 则$H$为$k$到常值映射的同伦。 □

定理证明. 记$\gamma(0) = a, \gamma(\frac{1}{2}) = b$, $U = \mathbb{S}^2 \setminus \gamma([0, \frac{1}{2}]), V = \mathbb{S}^2 \setminus \gamma([\frac{1}{2}, 1])$, i, j为相应的到$U \bigcup V = \mathbb{S}^2 \setminus \{a,b\}$的含入映射。任取$x_0 \in U \bigcap V$, 则由引理$i_*(\pi_1(U, x_0)) = 0, j_*(\pi_1(V, x_0)) = 0$. 从而$\pi_1(U \bigcup V) = 0$. 而$\pi_1(U \bigcup V) \cong \mathbb{Z}$, 矛盾！ □

7.5 覆盖空间

本节讨论覆盖空间和基本群的关系。对覆盖映射$p: E \to B$, 我们都假设E, B是道路连通且局部道路连通的空间。首先我们有如下结论：

引理 7.5.1. 设$p: E \to B$是覆盖空间，$p(e_0) = x_0$, 则$p_*: \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(B, b_0)$是单同态。

如果取另一个点$e_1 \in p^{-1}(x_0)$, 则$p_*(\pi_1(E, e_1))$是和$p_*(\pi_1(E, e_0))$共轭的子群: 取连接e_0, e_1的道路f, 则$f \# \gamma \# \bar{f}$给出共轭映射。反过来

引理 7.5.2. 若H与$p_*(\pi_1(E, e_0))$共轭，则存在$e_1 \in p^{-1}(x_0)$使得$p_*(\pi_1(E, e_1)) = H$.

证明. 设$H = [\gamma] \cdot p_*(\pi_1(E, e_0)) \cdot [\bar{\gamma}]$, 考虑$\gamma$的以$e_0$为起点的提升$f$, 取$e_1 = f(1)$即可。 □

由此我们可以看出覆盖空间与$\pi_1(B, x_0)$的子群的共轭类有对应关系。

定义 7.5.3. 设$p: E \to B, p': E' \to B$为两个覆盖空间，若同胚$f: E \to E'$满足$p' \circ f = p$:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

则称f是覆盖空间E, E'之间的等价（映射）。

引理 7.5.4. 设f是E, E'之间的等价，$f(e_0) = e_0', p(e_0) = x_0$. 则$p_*\pi_1(E, e_0) = p'_*\pi_1(E', e_0')$

定理 7.5.5. 设$p: E \to B, p': E' \to B$为两个覆盖空间, $p(e_0) = p'(e_0') = x_0$，则这两个覆盖空间等价当且仅当$p_*\pi_1(E, e_0)$与$p_*\pi_1(E', e_0')$是$\pi_1(B, x_0)$的共轭子群。

进一步的问题是：1. 给定$\pi_1(B, x_0)$的子群H, 如何构造相应的覆盖空间？ 2. 假设E, E'是等价的覆盖空间，如何确定它们之间的全部等价映射？