一、背景

1. Robert Brown

Robert Brown (1773-1858) 英国植物学家

Robert Brown was one of the greatest botanists of all time. In 1801 he joined an exciting expedition to sail around Australia on HMS Investigator. During the expedition he collected thousands of plant specimens many of which were new to European naturalists. He also made a major contribution to science through his use of the microscope. He noticed that when looking at magnified pollen grains in liquid, they would appear to move randomly in a zigzag fashion. Known as Brownian motion this observation was an important development in the history of physics.

Robert rown (1773-1858), [c.1845]

1823年他注意到：

如果通过显微镜观察悬浮在水中的花粉颗粒，那么会发现花粉颗粒来回移动；

并称这种来回移动为Brown 运动。

他很快就意识到，该运动既不是源于液体流到，也不是液体蒸发而引起的，而是由于粒子本身运动形成。

Microscope

观察有机体细胞，他能看得无休止运动。

并且大多数看见这种现象的人，都认为他们看到的是生命本身在运动。

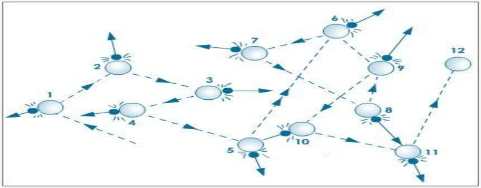
在许多活的植物标本中看到这种现象后，他不禁问：在死的植物中是否还能看见这种现象

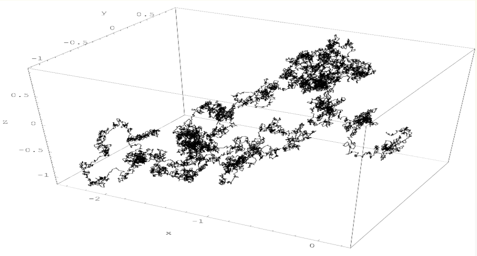
接着，他把花粉颗粒放入乙醇中浸泡大约11个月左右，但仍能看到该现象

他继续考察大量明显不是有机体的标本，如矿石。他得出结论：对任何矿物质，只要矿石磨得像花粉颗粒那样足够的细，就能看到同样的现象

总之，他遇到了一个以前显微镜学家都熟知的一种现象，但对其物理本质提出了一种“革命性”的解释

Brownian Motion





A single sample path of a three-dimensional

Brownian motion (Wiener process)

2. Albert Einstein

Albert Einstein (1879-1955)

爱因斯坦1905年获得苏黎世大学博士学位，论文题目为

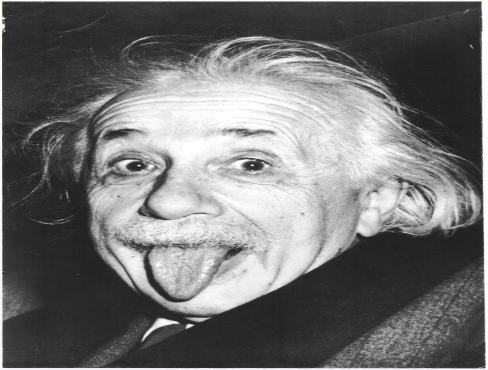
On a new determination of molecular dimensions

1905年，爱因斯坦发表了三篇论文，具有划时代意义。其中包括

Investigation on the theory of Brown movement,

The Annalen of Physik, 1905

Significance: Explained empirical evidence for the atomic theory, supporting the application of statistical physics.



Albert Einstein

自古希腊时代，人们就有了原子的概念。

早在爱因斯坦之前一个世纪，伟大化学家John Dalton就提出：所有化合物都是由分子组成；分子又由更细小的原子组成。

问题：并没有一个合理的存在性证明。

爱因斯坦意识到，Brown运动中所能看到的花粉颗粒无规则运动正是由于水分子撞击细小的花粉颗粒而成，正如足球比赛中运动员踢球那样。

能看到的是花粉颗粒，水分子是看不见的。所以，感觉好像是颗粒在不停地蹦跳着。

爱因斯坦注意到：通过观察花粉颗粒，可以计算出多少水分子在撞击单个花粉颗粒，甚至能计算出水分子运动速度。

更重要的是，爱因斯坦也推断出原子的一些性质。

后来，法国物理学家Jean Perrin使用爱因斯坦的推断计算出原子的大小，从而打消了对原子存在性的怀疑。

3. Louis Bachelier

Louis Bachelier (1870-1964)

法国数学家，现代金融数学之父。但该荣誉来之太迟！

Bachelier 1900年获得博士学位，论文题目

Theory of Speculation

Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier (March 11, 1870 – April 28, 1946)
was a French mathematician at the turn of the 20th century. He is credited with being the first person to model the stochastic process now called Brownian motion, which was part of his PhD thesis The Theory of Speculation, (published 1900).
His thesis, which discussed the use of Brownian motion to evaluate stock options, is historically the first paper to use advanced mathematics in the study of finance. Thus, Bachelier is considered a pioneer in the study of financial mathematics and stochastic processes.
www.en.wikipedia.org/wiki/LouisBachelier

Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier

March 11, 1870 ï April 28, 1946

该博士论文给出了Brown 运动作为随机过程的分布函数。
似乎爱因斯坦1905年并没有注意到Bachelier的工作。
Bachelier论文中还推导出期权价格,
其中股票价格由Brown运动来描述;
另外,他也给出了Barrier Option 的价格。
所谓Barrier Option,就是该期权依赖于股票价格是否超过某上限。

Bachelier 关于Brown运动的理解和研究比爱因斯坦1905年的文章更优雅(Elegant)，更数学化(Mathematical)。

按照爱因斯坦承认的话来说，他对物理具有无可比拟的直觉，但数学直觉并不那么发达。

Bachelier的工作启发了后来Wiener (1923)、Kolmogorov (1931)、Black-Scholes (1973) 等人关于Brown 运动和期权定价的研究。

Bachelier的工作超越于他的时代，在其有生之年并没有得到欣赏。

由于国际衍生品交易(其定价要运用金融数学)的巨大影响，Bachelier的工作才得以承认，世界才给予Bachelier应有的地位。

4. Nobert Wiener

Nobert Wiener (1894-1964)

美国数学家。

维纳1906年进入Tufts 学院，1909年毕业。

18岁获得Harvard大学博士学位。

1923年维纳构造性地证明了Brown运动的存在性。

文献中也称Brown运动为Wiener过程。

1935-1936年应邀访问北京清华大学，并有机会学习一些汉语。

http://math.tsinghua.edu.cn/info/

Norbert Wiener
(November 26, 1894 ï March 18, 1964) t

美国数学家维纳和法国数学家阿达马访问清华大学数学系(1936)。前排左起：郑之蕃、杨武之、阿达马、维纳、熊庆来、曾远荣；中排有：徐贤修(左五)、赵访熊(右三)、吴新谋(右一)；后排有：庄圻泰(左一)、段学复(右四)。

二、Brown 运动

1. 定义

假设$\mathbf{B} = (B_t, t \geq 0)$是实值随机过程，具有下列性质：

(i) $B_0 = 0$

(ii) 增量独立

对任意时间$t_1 < t_2 < \cdots < t_k$，

$$B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}} \quad \text{相互独立}$$

(iii) 增量平稳

对任意$0 \leq s < t < \infty$

$$B_t - B_s \quad \text{分布仅依赖于} t - s$$

(iv) 正态分布

对任意$0 \le s < t < \infty$

$$B_t - B_s \sim N(0, t-s)$$

即具有密度函数

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}}$$

那么称$\mathbf{B} = (B_t, t \ge 0)$为(1-维实值)标准Brown运动。

2. 概率性质

Brown运动的数字特征：

(i) 均值函数

$$EB_t = 0$$

(ii) 方差函数

$$Var(B_t) = t$$

(iii) 协方差函数

$$Cov(B_s, B_t) = t \wedge s$$

假设$s < t$

$$
\begin{aligned}
Cov(B_s, B_t) &= EB_sB_t \\
&= EB_s(B_s + B_t - B_s) \\
&= EB_s^2 + EB_s(B_t - B_s) = s
\end{aligned}
$$

Brown运动的分布规律:

(i) 1-维分布

$$B_t \sim N(0, t)$$

(ii) 2-维分布

假设$s < t$

$$(B_s, B_t) \sim N(0, s; 0, t; \left(\frac{s}{t}\right)^{1/2})$$

$$\begin{cases} B_s = B_s \\ B_t = B_s + (B_t - B_s) \end{cases}$$

注意，$B_s, B_t - B_s$相互独立，服从正态分布。

所以通过线性变换，(B_s, B_t)服从联合正态分布。

相关系数为

$$\rho = \frac{Cov(B_s, B_t)}{\sqrt{Var(B_s)Var(B_t)}} = \left(\frac{s}{t}\right)^{1/2}$$

矩阵形式

$$(B_s, B_t) \sim N((0,0), \begin{pmatrix} s & s \wedge t \\ s \wedge t & t \end{pmatrix})$$

条件分布

给定$B_s = x$的条件下，B_t的分布密度为

$$\begin{aligned} p_{t|s}(y|x) &= P(B_t = y | B_s = x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}} \end{aligned}$$

(iii) n-维分布

$$(B_{t_1}, B_{t_2}, \cdots, B_{t_n}) \sim$$
$$N((0,0,\cdots,0), \begin{pmatrix} t_1 & t_1 \wedge t_2 & \cdots & t_1 \wedge t_n \\ t_2 \wedge t_1 & t_2 & \cdots & t_2 \wedge t_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_n \wedge t_1 & t_n \wedge t_2 & \cdots & t_n \end{pmatrix})$$

综合上述，Brown 运动是正态过程，均值为0，任意两个时刻的协方差为$s \wedge t$。

3. Brown运动的样本轨道性质

(i) 样本轨道几乎处处连续

$$P(\omega \in \Omega : B(\omega, \cdot) \quad \text{连续函数}) = 1$$

注意到：

$$E(B_t - B_s)^2 = t - s, \quad E(B_t - B_s)^4 = 3(t - s)^2$$

固定t_0，对任意$\varepsilon > 0$

$$P(|B_t - B_{t_0}| > \varepsilon) \to 0, \qquad \text{as } t \to t_0$$

$$B_t \xrightarrow{P} B_{t_0}$$

不过，几乎处处连续需要更多的知识。

(ii) 样本轨道几乎无处可导

注意到，假设$s < t$

$$E|B_t - B_s| = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}(t-s)^{1/2}$$

所以

$$B_t - B_s \asymp (t-s)^{1/2}$$

这样，Brown 运动样本轨道极其不正则。

(iii) 如何画Brown 运动样本曲线

仅考虑$T = [0, 1]$

$\mathbf{B} = (B_t, 0 \le t \le 1)$是连续时间取实值的随机过程。

通常采用下列折线去近似样本曲线:

令$n \ge 1$，$S_0, S_1, S_2, \cdots, S_n$为简单随机游动过程。

构造$[0, 1]$区间上连续函数$X_n(t)$如下:

$$X_n(t) = \begin{cases} \frac{S_k}{\sqrt{n}}, & t = \frac{k}{n} \\ \text{线性插值}, & \frac{k}{n} < t < \frac{k+1}{n} \end{cases}$$

即在通常所画的简单随机游动折线基础上，

时间轴压缩n倍，即每一步时间间隔为$\frac{1}{n}$单位；

纵轴上压缩$\sqrt{n}$倍，即每一步位移长度为$\frac{1}{\sqrt{n}}$单位。

当n足够大时，$X_n(t)$可近似B_t。

4. Brown 运动的变化形式

(1) Brown 运动是正态过程，均值为0，协方差为$s \wedge t$;
反过来，假设$\mathbf{B} = (B_t, t \geq 0)$ 为正态过程，均值为0，协方差为$s \wedge t$，那么$\mathbf{B} = (B_t, t \geq 0)$一定是Brown 运动。

验证：

(i) $B_0 = 0$

(ii) 增量独立

假设$t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，

$$B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \quad \text{相互独立}$$

(iii) 增量平稳

假设$s < t$，$B_t - B_s$和B_{t-s} 同分布

(iv) 正态分布

$$B_t - B_s \sim N(0, t-s)$$

假设$\mathbf{B} = (B_t, t \geq 0)$是Brown 运动，令

(a) $X_t = B_{t+t_0} - B_{t_0}$

(b) $X_t = \frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct}$，其中$c > 0$

(c) $X_0 = 0$；$X_t = tB_{\frac{1}{t}}$

应用上述结论，可以验证(a), (b), (c)仍是Brown 运动

(2) 反射Brown 运动

假设$\mathbf{B} = (B_t, t \geq 0)$是Brown 运动，令$X_t = |B_t|$。

称$\mathbf{X} = (X_t, t \geq 0)$为反射Brown 运动。

反射Brown 运动不是一个正态过程；它的数字特征：

$$
\begin{aligned}
EX_t &= E|B_t| = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \\
&= 2\int_0^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = \left(\frac{2t}{\pi}\right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

$$
Var(X_t) = EX_t^2 - (EX_t)^2 = \frac{\pi - 2}{\pi} t
$$

分布：

$x < 0$，$P(X_t \le x) = 0$

$x > 0$，

$$
\begin{aligned}
P(X_t \le x) &= P(|B_t| \le x) \\
&= P(-x \le B_t \le x) \\
&= 2P(B_t \le x) - 1 \\
&= 2P(\frac{B_t}{\sqrt{t}} \le \frac{x}{\sqrt{t}}) - 1 \\
&= 2\Phi(\frac{x}{\sqrt{t}}) - 1
\end{aligned}
$$

(3) 几何Brown 运动

假设$\mathbf{B} = (B_t, t \geq 0)$是Brown 运动，$\alpha$是一个常数。

令$X_t = e^{\alpha B_t}$。

称$\mathbf{X} = (X_t, t \geq 0)$为几何Brown 运动。

几何Brown 运动不是一个正态过程；它的数字特征：

$$\begin{aligned} EX_t &= Ee^{\alpha B_t} = Ee^{\alpha\sqrt{t}\frac{B_t}{\sqrt{t}}} \\ &= e^{\frac{\alpha^2 t}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(X_t) &= Ee^{2\alpha B_t} - (Ee^{\alpha B_t})^2 \\ &= e^{2\alpha^2 t} - e^{\alpha^2 t} \end{aligned}$$

分布$(\alpha \neq 0)$:

$x > 0$

$$
\begin{aligned}
P(X_t \le y) &= P(e^{\alpha B_t} \le x) \\
&= P(\alpha B_t \le \log x) \\
&= \begin{cases} P(B_t \le \frac{\log x}{\alpha}), & \alpha > 0 \\ P(B_t \ge \frac{\log x}{\alpha}), & \alpha < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

考虑$\alpha > 0$

$$
\begin{aligned}
P(X_t \le y) &= P(B_t \le \frac{\log x}{\alpha}) \\
&= \Phi\left(\frac{\log x}{\alpha\sqrt{t}}\right)
\end{aligned}
$$

所以X_t为对数正态分布，

$$X_t \sim \frac{1}{\alpha x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(\log x)^2}{2\alpha^2 t}}$$

$\alpha < 0$，类似可得。

(4) Brown桥

假设$\mathbf{B} = (B_t, t \geq 0)$是Brown 运动，定义

$$B_t^0 = B_t - tB_1, \quad 0 \leq t \leq 1$$

称$B_t^0, 0 \leq t \leq 1$为Brown桥。

$$B_0^0 = 0, \quad B_1^0 = 0$$

Brown桥是正态过程。

Brown桥的数字特征

数学期望：$EB_t^0 = 0$

协方差：假设$0 \leq s < t \leq 1$

$$\begin{aligned} EB_s^0 B_t^0 &= E(B_s - sB_1)(B_t - tB_1) \\ &= EB_sB_t - sEB_tB_1 - tEB_sB_1 + stEB_1^2 \end{aligned}$$

Brown桥的分布

- 1-维分布

$$B_t^0 \sim N(0, t(1-t))$$

- n-维分布: 假设$0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n \le 1$

$$(B_{t_1}^0, B_{t_2}^0, \cdots, B_{t_n}^0) \sim$$

$$N((0, \cdots, 0), \begin{pmatrix} t_1(1-t_1) & \cdots & t_1 \wedge (1-t_n) \\ t_1 \wedge (1-t_2) & \cdots & t_2 \wedge (1-t_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ t_1 \wedge (1-t_n) & \cdots & t_n(1-t_n) \end{pmatrix})$$

- 条件分布

在$B_1=0$的条件下，B_t的分布密度函数

$$
\begin{aligned}
p_{t|1}(x|0) &= \frac{P(B_t=x, B_1=0)}{P(B_1=0)} \\
&= \frac{P(B_t=x, B_1-B_t=-x)}{P(B_1=0)} \\
&= \frac{P(B_t=x)P(B_1-B_t=-x)}{P(B_1=0)} \\
&= \frac{\frac{e^{-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2(1-t)}}}{\sqrt{2\pi(1-t)}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t(1-t)}} e^{-\frac{x^2}{2t(1-t)}}
\end{aligned}
$$

从上述密度函数可知，

$$B_t^0 \stackrel{d}{=} (B_t | B_1 = 0)$$

(5) 积分过程

假设$\mathbf{B}=(B_t, t\geq 0)$是Brown 运动，定义

$$X_t=\int_0^t B_s ds, \quad t\geq 0$$

称$X_t, t\geq 0$为Brown 运动的积分过程。

由于$\mathbf{B}=(B_t, t\geq 0)$的样本曲线几乎处处连续，

所以积分存在有限。即

$$\int_0^t B_s ds=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(s_i-s_{i-1})B_{s_i}<\infty$$

- $\mathbf{B} = (B_t, t \geq 0)$是正态过程，
所以$\sum_{k=1}^{n}(s_i - s_{i-1})B_{s_i}$为正态随机变量；
另外，正态随机变量序列的极限仍为正态随机变量，
所以$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(s_i - s_{i-1})B_{s_i}$为正态随机变量

- X_t的数学期望

$$\begin{aligned} EX_t &= E\int_0^t B_s ds \\ &= \int_0^t EB_s ds = 0 \end{aligned}$$

- X_t的协方差：假设$s < t$

$$
\begin{aligned}
Cov(X_s, X_t) &= EX_sX_t = E\int_0^s B_u du \int_0^t B_v dv \\
&= E\int_0^s \int_0^t B_u B_v du dv \\
&= \int_0^s \int_0^t E B_u B_v du dv \\
&= \int_0^s \int_0^t u \wedge v du dv \\
&= \int_0^s du \int_0^u v dv + \int_0^s u du \int_u^t dv \\
&= \frac{ts^2}{2} - \frac{s^3}{6}
\end{aligned}
$$

5. Brown 运动的最大值和首中时

- 最大值

假设$\mathbf{B} = (B_t, t \geq 0)$是Brown 运动，定义

$$M_t = \sup_{0 \leq s \leq t} B_t, \quad t \geq 0$$

那么

$$M_t \stackrel{d}{=} |B_t|$$

为什么？ 直接计算M_t的分布：

$x < 0$,

$$P(M_t \leq x) = 0$$

$x \geq 0$,

$$P(M_t \leq x) =?$$

我们首先计算

$$P(M_t > x) =?$$

注意到

$$\begin{aligned} P(M_t > x) &= P(M_t > x, B_t > x) + P(M_t > x, B_t < x) \\ &\quad + P(M_t > x, B_t = x) \end{aligned}$$

明显，

$$P(M_t > x, B_t > x) = P(B_t > x)$$

另外，由于B_t是连续型随机变量，

$$P(M_t > x, B_t = x) = 0$$

下面证明

$$P(M_t > x, B_t < x) = P(M_t > x, B_t > x)$$

事实上，令

$$T_x = \inf\{s \geq 0 : B_s = x\}$$

$$\begin{aligned}
P(M_t > x, B_t < x) &= P(T_x < t, B_t < x) \\
&\overset{\text{反射原理}}{=} P(T_x < t, B_t > x) \\
&= P(M_t > x, B_t > x)
\end{aligned}$$

因此,

$$P(M_t > x) = 2P(B_t > x) = P(|B_t| > x)$$

即

$$M_t \stackrel{d}{=} |B_t|$$

- 首中时

假设$\mathbf{B} = (B_t, t \geq 0)$是Brown 运动，$a > 0$ 是常数。定义

$$T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t \geq a\}$$

求T_a的分布？

由于$B_t, t \geq 0$ 具有连续样本曲线，所以

$$T_a \quad = \quad \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$$

注意

$$T_a \leq t \Leftrightarrow M_t \geq a$$

$$\begin{aligned} P(T_a \leq t) &= P(M_t \geq a) \\ &= P(|B_t| \geq a) \\ &= 2P(B_t \geq a) \\ &= 2(1 - \Phi(\frac{a}{\sqrt{t}})) \end{aligned}$$

关于t求导数得，T_a的密度函数为

$$T_a \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}t^{3/2}} e^{-\frac{a^2}{2t}}$$

- T_a的大小估计：

$$P(T_a < \infty) = 1$$

事实上，

$$\begin{aligned} P(T_a < \infty) &= \lim_{t\to\infty} P(T_a < t) \\ &= \lim_{t\to\infty} 2(1 - \Phi(\frac{a}{\sqrt{t}})) = 1 \end{aligned}$$

另一方面，

$$ET_a = \infty$$

事实上，

$$\begin{aligned} ET_a &= \int_0^\infty t\frac{1}{\sqrt{2\pi}t^{3/2}}e^{-\frac{a^2}{2t}}dt \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}t^{1/2}}e^{-\frac{a^2}{2t}}dt = \infty \end{aligned}$$

三、随机积分

1. Riemann-Stieltjes 积分

首先，回忆如何定义

$$\int_a^b f(x)dx$$

(1) 分割

在$[a,b]$上插入$n-1$个分点：$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

(2) 取点

在每个$[x_{i-1}, x_i]$任取一点ξ_i

(3) 作和(Riemann 和)

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

(4) 求极限

如果存在一个S，使得对任意划分，任意取点，

$$\lim_{\max_i(x_i - x_{i-1}) \to 0} S_n = S$$

那么称S为函数f在$[a,b]$上的Riemann积分，记作

$$\int_a^b f(x)dx = S$$

- 什么时候f在$[a,b]$上Riemann 可积呢？

当f是连续或者逐段连续时，f在$[a,b]$上Riemann 可积。

- Riemann 积分的性质

(a) 线性性质

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))dx = c_1 \int_a^b f_1(x)dx + c_2 \int_a^b f_2(x)dx$$

(b) 可加性

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx, \quad a \le b \le c$$

- Newton-Lebinitz 积分公式

假设F是f的原函数，那么

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

例.

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3|_0^1 = \frac{1}{3}$$

- 分部积分公式

假设u和v具有导函数，那么

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

2. Riemann-Stieltjes 积分

回忆f关于$G(x)$的积分

$$\int_a^b f(x)dG(x)$$

(1) 分割

在$[a,b]$上插入$n-1$个分点： $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

(2) 取点

在每个$[x_{i-1}, x_i]$任取一点ξ_i

(3) 作和(Riemann-Stieltjes 和)

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(G(x_i) - G(x_{i-1}))$$

(4) 求极限

如果存在一个S，使得对任意划分，任意取点，

$$\lim_{\max_i(x_i - x_{i-1}) \to 0} S_n = S$$

那么称S为函数f在$[a,b]$上的Riemann-Stieltjes 积分，记作

$$\int_a^b f(x)dG(x) = S$$

- 什么条件下$\int_a^b f(x)dG(x)$存在呢？

- 有界变差函数

假设G是$[a,b]$上的实值函数。对$[a,b]$进行分割

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

如果

$$\sup_{\Delta} \sum_{i=1}^{n} |G(x_i) - G(x_{i-1})| < \infty$$

那么称G在$[a,b]$上具有有界变差。

假设G是$[0,\infty)$上的实值函数。如果

$$\sup_{t>0} \sup_{\Delta} \sum_{i=1}^{n} |G(x_i) - G(x_{i-1})| < \infty$$

其中Δ是$[0,t]$上的分割，

那么称G在$[0,\infty)$上具有有界变差。

- 有界变差函数的性质

(1) 任何有界变差函数都可以写成两个单调增函数的差；

(2) 任何有界变差函数都几乎处处可微；

(3) $[a,b]$上具有有界导函数的函数是有界变差函数；

(4) $[a,b]$上的单调函数是有界变差函数

- 假设f是$[a,b]$上的连续函数，G是$[a,b]$上的有界变差函数，那么

$$\int_a^b f(x)dG(x) \quad \text{存在}$$

注:

(1) G具有有界变差性质并不是f关于G可积的必要条件;

(2) 如果对所有连续函数f，$\int_a^b f(x)dG(x)$都存在，那么G一定是$[a,b]$上的有界变差函数。

3. Brown 运动是无界变差函数

- 标准Brown运动$\mathbf{B}=(B_t,t\geq 0)$ 是无界变差函数。

仅考虑$t\in[0,1]$。将该区间进行2^n等分，作和

$$S_n=\sum_{i=1}^{2^n}|B(\frac{i}{2^n})-B(\frac{i-1}{2^n})|$$

我们将证明：

$$S_n\to\infty,\quad a.s.$$

注意到，$S_n,n\geq 1$是单调增序列，因此只需证明

$$S_n\xrightarrow{P}\infty$$

即对任意$M>0$，

$$P(S_n \le M) \to 0, \quad n \to \infty$$

为此，我们计算

(1)

$$\begin{aligned} ES_n &= \sum_{i=1}^{2^n} E|B(\frac{i}{2^n}) - B(\frac{i-1}{2^n})| \\ &= 2^n E|N(0, \frac{1}{2^n})| \\ &= 2^n \left(\frac{2}{\pi 2^n}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

(2)

$$
\begin{aligned}
Var(S_n) &= Var(\sum_{i=1}^{2^n} |B(\frac{i}{2^n}) - B(\frac{i-1}{2^n})|) \\
&= \sum_{i=1}^{2^n} Var(|B(\frac{i}{2^n}) - B(\frac{i-1}{2^n})|) \\
&\leq \sum_{i=1}^{2^n} E|B(\frac{i}{2^n}) - B(\frac{i-1}{2^n})|^2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

注意到$ES_n \to \infty$。

所以对任意$M > 0$，当n充分大时，$ES_n > 2M$。

下面应用Markov不等式得

$$
\begin{aligned}
P(S_n \leq M) &= P(S_n - ES_n \leq M - ES_n) \\
&\leq P(|S_n - ES_n| \geq \frac{1}{2}ES_n) \\
&\leq \frac{Var(S_n)}{(\frac{1}{2}ES_n)^2} \\
&\leq \frac{1}{\frac{1}{2\pi}2^n} \to 0
\end{aligned}
$$

4. 随机积分

如何定义一个随机过程关于Brown运动$B_t, t \geq 0$的积分？

- 假设$f(t), t \geq 0$是非随机、有界变差函数，我们将定义

$$\int_0^t f(s)dB_s =?$$

由于$B_t, t \geq 0$是无界变差函数，我们并不能直接采用Riemann-Stieltjes积分。但仍使用其思想：

(1) 分割

在$[0, t]$上插入$n-1$个分点：$0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = t$，使得

$$\Delta = \max_{1 \leq i \leq n} |s_i - s_{i-1}| \to 0$$

(2) 取点、作和(Riemann-Stieltjes 和)

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(B(s_i) - B(s_{i-1})), \quad \xi_i \in [s_{i-1}, s_i]$$

(3) 重新组合

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(B(s_i) - B(s_{i-1})) \\ &= f(\xi_n)B_t - \sum_{i=1}^{n-1} B(s_i)(f(\xi_{i+1}) - f(\xi_i)) \end{aligned}$$

注意到，$\xi_n \to t$，并且$\max_i |\xi_{i+1} - \xi_i| \to 0$。

(4) 取极限

$$\lim S_n = f(t)B_t - \int_0^t B_s df(s)$$

注意: $B_s, 0 \le s \le t$是连续函数，$f(s)$是有界变差函数，所以积分$\int_0^t B_s df(s)$存在。

- 这样，对于非随机、有界变差函数f，定义

$$\int_0^t f(s)dB_s = f(t)B_t - \int_0^t B_s df(s)$$

- 假设$f(t), t \geq 0$是随机过程，我们该如何定义

$$\int_0^t f(s)dB_s = ?$$

- 先考虑

$$\int_0^t B_s dB_s = ?$$

(1) 分割

在$[0, t]$上插入$n-1$个分点：$0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = t$，使得

$$\Delta = \max_{1 \leq i \leq n} |s_i - s_{i-1}| \to 0$$

(2) 取点

选择$\xi_i = s_{i-1}$

(3) 作和

$$S_n^1 = \sum_{i=1}^{n} B(s_{i-1})(B(s_i) - B(s_{i-1}))$$

(4) 取极限

我们将证明

$$E\left(S_n^1 - \frac{B_t^2 - t}{2}\right)^2 \to 0$$

注意，

$$
\begin{aligned}
B_t^2 &= \sum_{i=1}^{n}(B^2(s_i) - B^2(s_{i-1})) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(B(s_i) - B(s_{i-1}))(B(s_i) + B(s_{i-1}))
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
& E\left(S_n^1 - \frac{B_t^2 - t}{2}\right)^2 \\
= \;& \frac{1}{4}E\left(\sum_{i=1}^{n}((B(s_i) - B(s_{i-1}))^2 - (s_i - s_{i-1}))\right)^2 \\
= \;& \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}E\Big((B(s_i) - B(s_{i-1}))^2 - (s_i - s_{i-1})\Big)^2
\end{aligned}
$$

注意，$B(s_i) - B(s_{i-1}) \sim N(0, s_i - s_{i-1})$

所以

$$E\Big((B(s_i) - B(s_{i-1}))^2 - (s_i - s_{i-1})\Big)^2 \le E(B(s_i) - B(s_{i-1}))^4 \le 3(s_i - s_{i-1})^2$$

这样

$$E\left(S_n^1 - \frac{B_t^2 - t}{2}\right)^2 \le \frac{3}{4}\sum_{i=1}^{n}(s_i - s_{i-1})^2 \to 0$$

即

$$S_n^1 \to \frac{B_t^2 - t}{2}$$

- 下面选择其他点：

(2) 取点$\xi_i = s_i$

(3) 作和

$$S_n^2 = \sum_{i=1}^{n} B(s_i)(B(s_i) - B(s_{i-1}))$$

(4) 取极限

我们将证明

$$E\left(S_n^2 - \frac{B_t^2 + t}{2}\right)^2 \to 0$$

事实上，

$$S_n^2 - S_n^1 = \sum_{i=1}^{n} (B(s_i) - B(s_{i-1}))^2$$

并且

$$\begin{aligned}
& E\Big(\sum_{i=1}^{n} (B(s_i) - B(s_{i-1}))^2 - t\Big)^2 \\
= & E\Big(\sum_{i=1}^{n} ((B(s_i) - B(s_{i-1}))^2 - (s_i - s_{i-1}))\Big)^2 \\
= & \sum_{i=1}^{n} E\Big((B(s_i) - B(s_{i-1}))^2 - (s_i - s_{i-1})\Big)^2 \\
\leq & \sum_{i=1}^{n} E((B(s_i) - B(s_{i-1}))^4
\end{aligned}$$

由于

$$E((B(s_i) - B(s_{i-1}))^4 = 3(s_i - s_{i-1})^2$$

那么

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i=1}^{n}(B(s_i) - B(s_{i-1}))^2 - t\right)^2 &\leq 3\sum_{i=1}^{n}(s_i - s_{i-1})^2 \\ &\to 0 \end{aligned}$$

即

$$S_n^2 - S_n^1 \to t$$

从而

$$S_n^2 \to \frac{1}{2}(B_t^2 + t)$$

- 通过上面的计算可以看出，
当按照“分割、取点、作和、取极限”计算时，不同的取点有着不同的极限。
这正是由于B_t 不是有界变差函数造成的。

问题: 如何定义随机过程关于Brown 运动的积分呢？

Kiyoshi Itō(伊藤清Itō Kiyoshi , September 7, 1915 – 10 November 2008)
was a Japanese mathematician. His major contribution to mathematics is now called Itō calculus facilitates mathematical understanding of random events. His theory is widely applied in various fields, and is perhaps best known for its use in financial calculus. Its basic concept is the Itō integral, and among the most important results is Itō's lemma. Itō calculus facilitates mathematical understanding of random events. His theory is widely applied in various fields, and is perhaps best known for its use in financial mathematics.

Kiyoshi Itō　伊藤　清

September 7, 1915 ï 10 November 2008

- Ito 积分

假设$\mathbf{B} = (B_t, t \geq 0)$是标准Brown运动，$f(t), t \geq 0$是一个关于$\mathbf{B}$适应的随机过程，即$f(t)$仅依赖于$\{B_s, 0 \leq s \leq t\}$。

进一步假设

$$\int_0^\infty Ef(s)^2 ds < \infty.$$

对任意$t > 0$，

(1) 分割

在$[0, t]$上插入$n-1$个分点：$0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = t$，使得

$$\Delta = \max_{1 \leq i \leq n} |s_i - s_{i-1}| \to 0$$

(2) 取点

选择$\xi_i = s_{i-1}$ (区间的左端点)

(3) 作和(Riemann-Stieltjes 和)

$$S_n(t) = \sum_{i=1}^{n} f(s_{i-1})(B(s_i) - B(s_{i-1}))$$

(4) 一定存在一个随机变量X_t使得

$$E(S_n(t) - X_t)^2 \to 0, \quad n \to \infty.$$

定义

$$\int_0^t f(s)dB_s = X_t$$

- 称X_t是f关于**B**的Ito 积分。

例1.

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$$

例2.

$$\int_0^t s dB_s = tB_t - \int_0^t B_s ds$$

例3. (留作习题)

$$\int_0^t B_s^2 dB_s = \frac{1}{3}B_t^3 - \int_0^t B_s ds$$

- Ito 积分运算性质

(1) 数学期望

$$E\int_0^t f(s)dB_s = 0$$

(2) 方差

$$E\Big(\int_0^t f(s)dB_s\Big)^2 = \int_0^t Ef^2(s)ds$$

(3) 线性性质

$$\int_0^t (af(s)+bg(s))dB_s = a\int_0^t f(s)dB_s + b\int_0^t g(s)dB_s$$

(3) 可加性

$$\int_0^T f(s)dB_s = \int_0^t f(s)dB_s + \int_t^T f(s)dB_s$$

5. Ito公式

上面给出了$f(t)$关于Brown运动的Ito积分定义。

除了少数过程之外，很难从定义直接计算出$\int_0^t f(s)dB_s$。

需要一个基本公式帮助计算$\int_0^t f(s)dB_s$。

- Ito 公式

Lemma

(I)

假设$f\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$*是一个二次可微分函数，那么*

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds$$

注意到，根据Newton-Lebinitz公式：对于非随机函数$f(s), g(s)$

$$\int_0^t f'(g(s))dg(s) = f(g(t)) - f(g(0))$$

等价于链式法则

$$df(g(t)) = f'(g(t))dg(t)$$

- 但对于Brown 运动$B_t, t \geq 0$，Ito 公式给出了格外一项

$$\frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds$$

如何理解格外的一项？

利用Taylor展开

$$\begin{aligned} f(B_{t+\Delta t}) &= f(B_t) + f'(B_t)(B_{t+\Delta t} - B_t) \\ &\quad + \frac{1}{2} f''(B_t)(B_{t+\Delta t} - B_t)^2 + \cdots \end{aligned}$$

由于

$$E(B_{t+\Delta t} - B_t)^2 = \Delta t$$

所以

$$df(B_t) = f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2} f''(B_t)dt$$

Ito 公式特别给出：

$$\int_0^t f'(B_s)dB_s = f(B_t) - f(B_0) - \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds$$

例1.

$$\begin{aligned}\int_0^t B_s dB_s &= \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}\int_0^t 1ds \\ &= \frac{1}{2}(B_t^2 - t)\end{aligned}$$

例2.

$$\int_0^t B_s^2 dB_s = \frac{1}{3}B_t^3 - \int_0^t B_s ds$$

例3.

$$\int_0^t \cos(B_s)dB_s = \sin(B_s) + \frac{1}{2}\int_0^t \sin(B_s)ds$$

例4.

$$\int_0^t e^{B_s}dB_s \quad = \quad e^{B_t} - 1 - \frac{1}{2}\int_0^t e^{B_s}ds$$

Lemma

II

假设$f(t,x)$是二元函数，关于t和x的二阶偏导数存在并且连续，那么

$$\begin{aligned} f(t,B_t) &= f(0,0)+\int_0^t f_2(s,B_s)dB_s \\ &\quad +\int_0^t f_1(s,B_s)ds+\frac{1}{2}\int_0^t f_{22}(s,B_s)ds \end{aligned}$$

其中，f_1,f_2分别表示f关于t和x的一阶偏导数；

f_{22}表示f关于x的二阶偏导数。

例5. 考虑下列形式的几何Brown运动

$$f(t, B_t) = e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}$$

那么

$$f(t, B_t) = 1 + \mu \int_0^t f(s, B_s) ds + \sigma \int_0^t f(s, B_s) dB_s$$

- Ito 过程

假设$\mathbf{B}=(B_t,t\geq 0)$是标准Brown 运动，$a(t,x)$和$b(t,x)$是两个二元函数。称满足下列方程:

$$X_t=X_0+\int_0^t a(s,X_s)ds+\int_0^t b(s,X_s)dB_s$$

的随机过程X_t为Ito 扩散过程，

称$a(t,x)$为漂移系数，$a(t,x)$为扩散系数。

通常，简记为

$$dX_t=a(t,X_t)dt+b(t,X_t)dB_t$$

Lemma

III

假设$X_t, t \geq 0$ 是Ito扩散过程，具有漂移系数$a(t,x)$，扩散系数$b(t,x)$；$f(t,x)$是二元函数，关于t和x的二阶偏导数存在并且连续，那么

$$
\begin{aligned}
f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t f_2(s, X_s) dX_s \\
&\quad + \int_0^t f_1(s, X_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t b^2(s, X_s) f_{22}(s, X_s) ds
\end{aligned}
$$

例6. 假设$S_t, t \geq 0$是Ito扩散过程，满足下列方程：

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

并且$S_0 = 1$。求$S_t =$?

解：上述扩散过程可写成

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t$$

另外，应用Ito公式

$$\begin{aligned} d\log S_t &= \frac{dS_t}{S_t} - \frac{\sigma^2}{2}dt \\ &= (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dB_t \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\log S_t &= \log S_0 + \int_0^t (\mu - \frac{\sigma^2}{2})ds + \int_0^t \sigma dB_s \\ &= (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t\end{aligned}$$

$$S_t = e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}$$

即S_t是几何Brown 运动。

- 分部积分公式

Lemma

假设$X_t, Y_t, t \geq 0$*是两个*Ito*扩散过程：*

$$dX_t = a_1(t, X_t)dt + b_1(t, X_t)dB_t$$

$$dY_t = a_2(t, Y_t)dt + b_2(t, Y_t)dB_t$$

那么$Z_t =: X_tY_t, t \geq 0$*也是*Ito*扩散过程，并且*

$$d(X_tY_t) = X_tdY_t + Y_tdX_t + b_1(t, X_t)b_2(t, X_t)dt$$

注意到：

$$d(X_t \pm Y_t) = (a_1(t, X_t) \pm a_2(t, X_t))dt + (b_1(t, X_t) \pm b_2(t, X_t))dB_t$$

因此

$$d(X_t \pm Y_t)^2 = 2(X_t \pm Y_t)d(X_t \pm Y_t) + (b_1(t, X_t) \pm b_2(t, X_t))^2 dt$$

另一方面，

$$X_t Y_t = \frac{1}{4}[(X_t + Y_t)^2 - (X_t - Y_t)^2]$$

综合上述，得到

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + b_1(t, X_t) b_2(t, X_t) dt$$

四、Black-Scholes 公式

1. 期权定价

- 金融市场工具(Financial Market Instruments)

国际会计准则委员会第32号准则对金融工具定义如下：

一项金融工具是使一个企业形成金融资产，同时是另一企业形成金融负债或权益工具(equity instrument)的任何合约。

简单地说，一项金融工具是一份合约

该定义包括

(1) 基本金融工具—基本证券(Underlying security):

商品、国债、外汇、股票

(2) 衍生工具(Derivatives)

期货、期权、合约

进行金融工具交易的目的在于化解风险

- 期权(Options)

期权是一份合约，规定持有者有权做某事，但不具有义务。

通常，期权分为

欧式期权、美式期权、亚洲期权

以下我们仅以欧式期权为例讨论定价问题。

欧式期权分为:

欧式买入期权(European Call Options)

欧式卖出期权(European Put Options)

- 欧式买入期权:

期权持有者有权在指定时刻以指定价格购买某资产，但不具有义务

- 欧式卖出期权:

期权持有者有权在指定时刻以指定价格卖出某资产，但不具有义务

期权可以在市场上进行交易，一个基本问题:

- 如何为期权进行合理定价?

特别，以下仅讨论如何为欧式买入期权进行合理定价。

例. 某公司经常性地消耗石油。他们知道，3个月后需要1000桶原油。原油价格剧烈波动；通过购买欧式买入期权(规定买入价为K)，公司可以知道3个月后购买1000桶原油需要多少资金。

购买期权可看作是规避石油价格日益增长的一种方式。

定价问题：

对于给定时刻T和K的期权，该公司愿意出价多少购买这种“保险”？

当然，这取决于购买这种期权会给该公司带来什么样的收益？

- 收益(Payoffs)

假设当前时刻为0。

某欧式买入期权规定: T时刻，期权持有者可以以价格K购买某基本证券。

假设该基本证券在T时刻市场实际价格为S_T，那么该份欧式买入期权的收益为：

$$(S_T - K)_+ = \begin{cases} S_T - K, & S_T \geq K \\ 0, & S_T < K \end{cases}$$

- 问题：在0时刻给期权定价时，T时刻实际价格S_T未知。

如何定价？

先考虑简单模型

- 一步两状态模型(A one-step binary model):

涉及时间为0时刻，T时刻；S_T只取两个值(状态)。

例. 某基本证券现价2500元，一份欧式买入期权6个月后到期，叫价3000元。某投资者认为，6个月后该证券价格为4000元的概率为$\frac{1}{2}$；价格为2000元的概率为$\frac{1}{2}$。

问，当前时刻该份欧式买入期权的合理价格是多少？

假设无风险贷款利率为0。

假设T为期权到期时刻，S_T为T时刻基本证券的价格。

那么收益为

$$(S_T - 3000)_+$$

定价的基本想法：

(1)如何通过其他投资组合方式(购买证券和国债)实现上述收益？

(2) 实现同样收益所作的投资可当作期权价格。

0时刻投资：

购买x_1元国债，x_2份证券(2500x_2元)

T时刻收益：

$$\begin{cases} x_1 + 4000x_2, & \text{如果} S_T = 4000 \\ x_1 + 2000x_2, & \text{如果} S_T = 2000 \end{cases}$$

如何保证上述投资收益不少于购买期权所获收益：

$$\begin{cases} x_1 + 4000x_2 \geq 1000, & \text{如果} S_T = 4000 \\ \\ x_1 + 2000x_2 \geq 0, & \text{如果} S_T = 2000 \end{cases}$$

上述等式成立的投资组合为

$$x_1 = -1000, \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

即卖出1000元国债，买入$\frac{1}{2}$份证券。此时，共投资

$$-1000 + \frac{1}{2} \times 2500 = 250$$

解释：

(1) 当期权价格高于250元时，卖家可以赚取无风险利润；

(2) 当期权价格低于250元时，买家可以赚取无风险利润

当期权定价为250元时，确保市场无套利。

- 套利机会(Arbitrage Opportunity)

套利机会: 可以赚取无风险利润的机会。

注意，在上述讨论中，并没有使用"概率"$\frac{1}{2}$。而仅仅使用了下列事实：

可以通过简单投资方式来复制(Replicate)收益。即

卖方可以投资x_1元国债，x_2份证券对冲(Hedge)未定收益(Contingent Claim) $(S_T - 3000)_+$元。

- 一步三状态模型(A one-step ternary model)

假设T时刻，证券可能出现三种价格。

类似地，希望通过如下投资组合：持有x_1元国债，x_2份证券复制在T时刻的收益。

考虑下列不等式组：

$$\begin{cases} x_1 + S_T^1 x_2 \geq (S_T^1 - 3000)_+ \\ x_1 + S_T^2 x_2 \geq (S_T^2 - 3000)_+ \\ x_1 + S_T^3 x_2 \geq (S_T^3 - 3000)_+ \end{cases}$$

其中，S_T^1, S_T^2, S_T^3是S_T的三种可能价格。

为了确保在T时刻的收益，x_1, x_2必须位于阴影部分。但是在该区域，可以赚取利润，没有任何风险；在阴影区域之外，任何投资组合都会招致损失。

没有一种投资方式，完全刚好复制收益$(S_T - 3000)_+$。

该期权没有公平合理价格。

原因：由于仅有两种投资方式，导致三状态市场是不完全市场。

如果扩大投资范围，问题将得到解决。

- N个资产n个状态的市场

假设市场拥有N个可交易的资产。它们在0时刻的价格向量为

$$S_0 = (S_0^1, S_0^2, \cdots, S_0^N)'$$

市场的不确定性由n个状态表示：
如果市场处于第j状态，那么第i资产在T时刻价格为D_{ij}。
令价格向量为

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \cdots & D_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{N1} & D_{N2} & \cdots & D_{Nn} \end{pmatrix}$$

假设投资组合为

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_N)'$$

0时刻，该投资的市场价值为

$$\langle S_0, \theta \rangle = S_0^1\theta_1 + S_0^2\theta_2 + \cdots + S_0^2\theta_N$$

T时刻，该投资的市场价值为

$$\mathbf{D}'\theta = \begin{pmatrix} D_{11}\theta_1 + D_{21}\theta_2 + \cdots + D_{N1}\theta_N \\ D_{12}\theta_1 + D_{22}\theta_2 + \cdots + D_{N2}\theta_N \\ \cdots \\ D_{1n}\theta_1 + D_{2n}\theta_2 + \cdots + D_{Nn}\theta_N \end{pmatrix}$$

如果某投资使得

$$\langle S_0, \theta \rangle \leq 0, \quad \mathbf{D}'\theta > 0$$

或者

$$\langle S_0, \theta \rangle < 0, \quad \mathbf{D}'\theta \geq 0$$

那么称该投资存在套利(Arbitrage)。

结论：上述市场不存在套利当且仅当存在一个状态向量$\psi = (\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n)' > 0$使得

$$S_0 = \mathbf{D}\psi$$

记

$$\psi_0 = \sum_{i=1}^{n} \psi_i > 0$$

定义

$$\underline{\psi} = \left(\frac{\psi_1}{\psi_0}, \frac{\psi_2}{\psi_0}, \cdots, \frac{\psi_n}{\psi_0}\right)'$$

- ψ_0的含义：

假设无风险利率为$r > 0$。

假设某投资组合$\bar{\theta}$在T时刻不管市场处于何种状态，其价值都为1，即

$$\mathbf{D}'\bar{\theta} = (1, 1, \cdots, 1)'$$

既然ψ是一个状态向量，该投资组合在0时刻价值为

$$\begin{aligned}\langle S_0, \bar{\theta}\rangle &= \langle \mathbf{D}\psi, \bar{\theta}\rangle \\ &= \langle \psi, \mathbf{D}'\bar{\theta}\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \psi_i = \psi_0\end{aligned}$$

这样，ψ_0可以看作无风险借贷的折现率

$$\psi_0 = e^{-rT}$$

把$\underline{\psi}$当作概率，考虑第i证券在T时刻的平均价格：

$$\begin{aligned} ES_T^i &= \sum_{j=1}^n D_{ij}\frac{\psi_j}{\psi_0} \\ &= \frac{1}{\psi_0}\sum_{j=1}^n D_{ij}\psi_j \\ &= \frac{S_0^i}{\psi_0} \end{aligned}$$

即

$$S_0^i = \psi_0 ES_T^i$$

任何证券价格都是它在概率$\underline{\psi}$下平均收益的折现。

例. 一步两状态模型(续)

考虑国债和证券两种资产，利率为r。

市场在T时刻存在两种状态，国债和证券的价格矩阵$\mathbf{D}$为

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} e^{rT} & e^{rT} \\ S_0 u & S_0 d \end{pmatrix}$$

其中S_0为证券在0时刻的价格。

寻找概率$\underline{\psi} = (p, 1-p)$满足

$$S_0 e^{rT} = S_0 u p + S_0 d (1-p)$$

解得：

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{S_0 e^{rT} - S_0 d}{S_0 u - S_0 d} \\
&= \frac{e^{rT} - d}{u - d}
\end{aligned}
$$

下面给出期权定价。令期权在0时刻价格为x，在T时刻的价格随市场状态而定。

假设分别为$C(S_0 u)$和$C(S_0 d)$，那么

$$
x = e^{-rT}(pC(S_0 u) + (1-p)C(S_0 d))
$$

- 完全市场

如果每个未定权益都可以实现，则称该市场是完全的。

结论：假设金融市场由N可交易的资产组成，在T时刻市场处于n个状态之一。那么市场是完全的当且仅当$N \geq n$，并且证券价格矩阵$\mathbf{D}$的秩是n。

2. 随机金融市场

考虑某金融市场包含基本资产：国债和证券(股票)，无风险利率为$r > 0$。

令$M_t, t \geq 0$表示t时刻1份(单位)国债的价格，

$M_0 = 1$，M_t满足

$$dM_t = rM_t dt, \quad M_t = e^{rt}$$

令$S_t, t \geq 0$表示t时刻1份(单位)证券的价格，$S_0 = 1$，S_t满足

$$S_t = e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}$$

即证券价格可用几何Brown 运动描述。

- 为什么可用几何Brown 运动描述呢？

(1) S_t的变化规律可用下列微分方程描述：

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

方程的解为几何Brown 运动。

(2) S_t的变化规律也可以通过概率极限定理描述：

将$[0, t]$区间进行n等分，分点为

$$0, \frac{t}{n}, \frac{2t}{n}, \cdots, \frac{nt}{n} = t$$

假设证券价格只在这些分点时刻发生变化，且只有两种可能：下跌d倍和上涨u倍，

$$\frac{S_{\frac{it}{n}}}{S_{\frac{(i-1)t}{n}}}=\begin{cases} e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}, & p=\frac{1}{2}(1+\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\frac{t}{n}}) \\ e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}, & 1-p=\frac{1}{2}(1-\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\frac{t}{n}}) \end{cases}$$

这样，

$$\begin{aligned}\frac{S_t}{S_0} &= \prod_{i=1}^{n}\frac{S_{\frac{it}{n}}}{S_{\frac{(i-1)t}{n}}} \\ &= e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i}e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}(n-\sum_{i=1}^{n}\xi_i)}\end{aligned}$$

其中$\xi_i, i=1,2,\cdots,n$独立同分布，只取0和1两个值，下跌取0，上涨取1 。

因此

$$\log \frac{S_t}{S_0} = 2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \sigma\sqrt{nt}$$

注意到

$$E\log \frac{S_t}{S_0} = \mu t$$

$$Var(\log \frac{S_t}{S_0}) = 4\sigma^2 tp(1-p) \asymp \sigma^2 t$$

应用中心极限定理，当$n \to \infty$

$$\log \frac{S_t}{S_0} \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$$

同理，

$$\log \frac{S_t}{S_s} \sim N(\mu(t-s), \sigma^2(t-s))$$

等价于S_t是几何Brown 运动。

3. Black-Scholes 公式

假设投资组合为

$$\alpha = (\alpha_t, t \geq 0), \quad \beta = (\beta_t, t \geq 0)$$

是随机过程，并且α_t和β_t仅依赖于$\{B_s, s \leq t\}$。

这意味着在t时刻，购买α_t份证券，β_t份国债。

允许α_t和β_t为负数。

β_t 为负数意味着从银行贷款；

α_t 为负数意味着卖空(short sell of stock)

以上投资在t的价值为

$$V_t(\alpha,\beta)=\alpha_t S_t+\beta_t M_t$$

- Self-financing portfolio:

Self-financing portfolio, an important concept in financial mathematics

A portfolio is self-financing if there is no exogenous infusion or withdrawal of money; the purchase of a new asset must be financed by the sale of an old one.

即

$$dV_t=\alpha_t dS_t+\beta_t dM_t$$

如果在T时刻，

$$V_T(\alpha,\beta)=(S_T-K)_+$$

那么称该投资组合可以复制欧式买入期权收益。
以下假设存在Self-financing投资组合(α,β)可以复制欧式买入期权收益，金融市场五套利机会。在任何时刻，人们可以购买期权或者购买国债和证券。
这样，在t时刻欧式买入期权的公平价格为$V_t(\alpha,\beta)$。
因此，为了正确定价，只有证明这样的投资组合存在，并计算出它的值。

- 现在定义一个新的概率测度$\hat{P}$如下：

令

$$Z = e^{-\frac{\nu^2}{2\sigma^2}T+\frac{\nu}{\sigma}B_T}$$

其中$\nu = r - \mu$。

定义

$$\hat{P}(A) = EZ\mathbf{1}_A$$

那么在$\hat{P}$下，

$$\hat{B}_t = -\frac{\nu}{\sigma}t + B_t$$

是一个新的标准Brown 运动。

验证:

(1) $\hat{B}_0$

(2) 正态分布

$$\begin{aligned}\hat{E}e^{u\hat{B}_t} &= \hat{E}e^{u(-\frac{\nu}{\sigma}t+B_t)} \\ &= e^{-\frac{\nu}{\sigma}ut}\hat{E}e^{uB_t} \\ &= e^{-\frac{\nu}{\sigma}ut}EZe^{uB_t} \\ &= e^{-\frac{\nu}{\sigma}ut}e^{-\frac{\nu^2}{2\sigma^2}T}Ee^{\frac{\nu}{\sigma}B_T+uB_t} \\ &= e^{\frac{u^2}{2}t}\end{aligned}$$

(3) 增量独立$\cdots$

(4) 增量平稳$\cdots$

即$\hat{B}_t$在$\hat{P}$下为标准Brown运动。

- 应用Ito公式，

$$
\begin{aligned}
d(e^{-rt}V_t) &= e^{-rt}dV_t - re^{-rt}V_t dt \\
&= e^{-rt}\alpha_t dS_t - re^{-rt}\alpha_t S_t dt \\
&\quad + e^{-rt}\beta_t(dM_t - rM_t) \\
&= \alpha_t e^{-rt}((\mu - r)dt + \sigma dB_t)
\end{aligned}
$$

根据$\hat{B}_t$的定义，

$$
\begin{aligned}
d(e^{-rt}V_t) &= \alpha_t e^{-rt}(-\nu dt + \sigma dB_t) \\
&= \alpha_t e^{-rt}\sigma d\hat{B}_t
\end{aligned}
$$

因此，

$$e^{-rt}V_t \quad = \quad V_0 + \int_0^t \alpha_s e^{-rs} \sigma d\hat{B}_s$$

这样，$e^{-rt}V_t, 0 \leq t \leq T$是鞅，并且

$$e^{-rt}V_t = \hat{E}(e^{-rT}V_T|\mathcal{F}_t)$$

即

$$V_t = \hat{E}(e^{-r(T-t)}V_T|\mathcal{F}_t)$$

特别，代入

$$V_T = (S_T - K)_+$$

得

$$\begin{aligned}
V_t &= e^{-r(T-t)}\hat{E}((S_T-K)_+|\mathcal{F}_t) \\
&= e^{-r(T-t)}\hat{E}((e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma B_T}-K)_+|\mathcal{F}_t) \\
&= e^{-r(T-t)}\hat{E}((e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma(B_T-\frac{r-\mu}{\sigma}T)}-K)_+|\mathcal{F}_t) \\
&= e^{-r(T-t)}\hat{E}((e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\hat{B}_t+\sigma(\hat{B}_T-\hat{B}_t)}-K)_+|\mathcal{F}_t) \\
&= e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\hat{B}_t+\sigma x}-K)_+\phi(\frac{x}{\sqrt{T-t}})dx \\
&= e^{-r(T-t)}\int_{e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\hat{B}_t+\sigma x}>K}e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\hat{B}_t+\sigma x}\phi(\frac{x}{\sqrt{T-t}})dx \\
&\quad -Ke^{-r(T-t)}\int_{e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\hat{B}_t+\sigma x}>K}\phi(\frac{x}{\sqrt{T-t}})dx
\end{aligned}$$

- Black-Scholes 公式

Theorem

令$t < T$。欧式买入期权在t时刻价格为

$$V_t = S_t \Phi(d_1(t, S_t)) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2(t, S_t))$$

其中

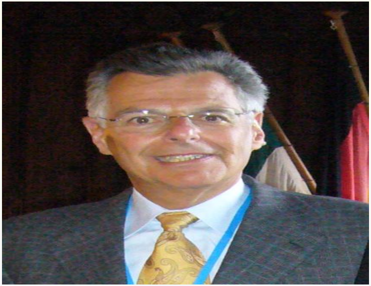
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$$d_1(t, x) = \frac{\log \frac{x}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma(T-t)^{1/2}}$$

$$d_2(t, x) = \frac{\log \frac{x}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma(T-t)^{1/2}}$$

Fischer Sheffey Black

(January 11, 1938 ï August 30, 1995)



Myron Samuel Scholes

July 1, 1941