差分方程模型

浙江大学　谈之奕

差分方程

数学
建模
MATH T

- 差分
  - 设 $y(n)=y_n$ 是依赖于整数变量 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 的函数，$\Delta y,\Delta^2 y,\Delta^3 y,\cdots$ 称为 y 的差分（difference）
- 差分方程（difference equation）
  - 含有未知函数的有限差分的方程
    - $F(n,y_n,\Delta y_n,\cdots,\Delta^m y_n)=0$
    - $F(n,y_n,y_{n+1},\cdots,y_{n+m})=0$
- m 阶线性差分方程
  - $a_m(n)y_{n+m}+\cdots+a_0(n)y_n = f_n$
    - 齐次：$f_n=0$
    - 常系数：$a_i(n)\equiv a_i, i=0,1,\cdots,m$

$$\Delta y_n = y_{n+1}-y_n$$

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_n &= \Delta(\Delta y_n) = \Delta(y_{n+1}-y_n)\\ &= (y_{n+2}-y_{n+1})-(y_{n+1}-y_n)\\ &= y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^3 y_n &= \Delta(\Delta^2 y_n) = \Delta(y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n)\\ &= y_{n+3}-3y_{n+2}+3y_{n+1}-y_n\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}\Delta^m y_n &= \Delta(\Delta^{m-1} y_n)\\ &= \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}y_{n+k}\end{aligned}$$

差分方程

- 二阶线性常系数齐次差分方程 $x_{n+2}+a_1x_{n+1}+a_2x_n=0$
  - 若 $x_n=f(n)$ 是差分方程的解，则 $x_n=cf(n)$ 也是差分方程的解；若 $x_n=f_1(n)$ 和 $x_n=f_2(n)$ 都是差分方程的解，则 $x_n=f_1(n)+f_2(n)$ 也是差分方程的解
  - 若 $x_n=\lambda^n$ 是差分方程的解，则 λ 满足 $\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$
  - 特征方程（characteristic equation）$\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$
    - 特征方程有两个不同的根 λ_1,λ_2
      - 差分方程的通解为 $x_n=C_1\lambda_1^n+C_2\lambda_2^n$，其中 C_1,C_2 为常数
      - 若 $C_1,C_2\neq 0$，$\lim_{n\to\infty}x_n=0$ 当且仅当 $|\lambda_1|<1,|\lambda_2|<1$
    - 特征方程只有一根，则 $a_2=\frac{a_1^2}{4}$，根 $\lambda=-\frac{a_1}{2}$
      - 差分方程的通解为 $x_n=C_1\lambda^n+C_2n\lambda^n$，其中 C_1,C_2 为常数
      - $\lim_{n\to\infty}x_n=0$ 当且仅当 $|\lambda|<1$

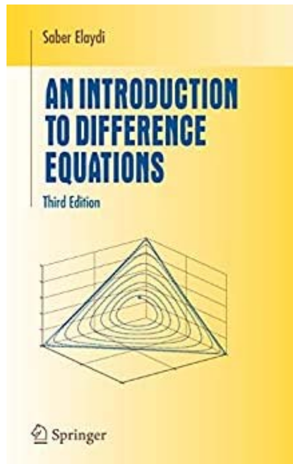
$x_n=\lambda^n$　　$\lambda^{n+2}+a_1\lambda^{n+1}+a_2\lambda^n=0$

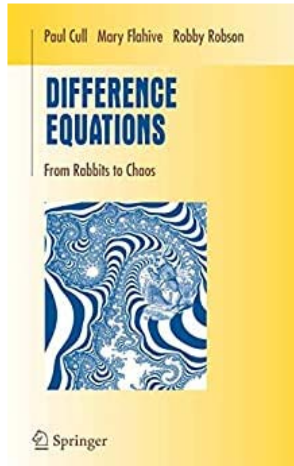
$x_n=n\lambda^n$　　$n\lambda^{n+2}+a_1n\lambda^{n+1}+a_2n\lambda^n=0$

$2\lambda^{n+2}+a_1\lambda^{n+1}=0$

$(n+2)\lambda^{n+2}+a_1(n+1)\lambda^{n+1}+a_2n\lambda^n=0$

Elaydi S, *An Introduction to Difference Equations*(3rd), Springer, 2006
Cull P, Flahive M, Robson R, *Difference Equations: From Rabbits to Chaos*, Springer, 2005





蛛网模型

“猪”周期

数学
建模
MATH T

- 透视“猪周期”
  - 本轮猪周期自2018年5月开启，上行周期持续27个月，猪价从每公斤10元左右上涨至每公斤近40元，下行周期从2021年1月持续至今，猪价从每公斤40元下行到最低每公斤跌破10元

（CCTV-2《正点财经》栏目2022年1月28日）

经济学与经济模型

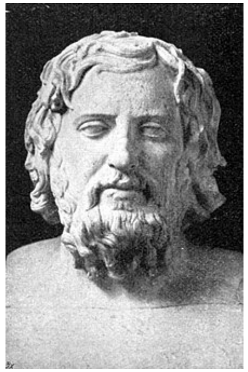
数学
建模
MATH T

- 经济学（economics）
  - 研究人类社会各个发展阶段之各种经济活动、经济关系、经济运行规律的科学
- 经济数学模型（economic mathematical model）
  - 广泛用于经济研究、经济分析的数学模型。是用数学形式，对经济理论假说进行数量化，以探讨客观经济过程的本质联系及其规律的一种经济研究与管理的工具
    - 经济数学模型是研究分析经济数学关系的重要工具，是经济理论和经济现实的中间环节。它能起到明确思路、加工信息、验证理论、计算求解、分析和解决问题的作用
    - 经济数学模型不能过于简化，否则会难以把握经济现实；又不能过于复杂，否则会难以加工处理和管理操作
    - 模型好坏的标准不是方程的多少，而是吻合度（符合所反映经济过程的数量关系的程度）和实用度（用于理论分析、经济预测、政策评价所取得的效果）的统一
    - 模型的建立要受到人们对客观经济现实认识能力和仿真手段的限制，还表现在它的应用是有条件的，不能脱离研究对象的复杂性，数据的准确性和应用者的学识、经验与判断能力

摘自《中国大百科全书》（第二版）

［希腊］**oikonomia**（家庭经济管理）　经国济民 经邦济世

[英]economy　[日]経済

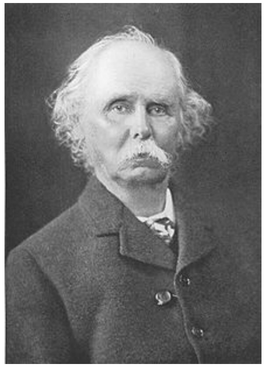


Xenophon of Athens
（约前**430**－前**354**）
古希腊哲学家、历史学家
Xenophon, Oeconomicus
（经济论，张伯健、陆大年译，商务印书馆，1961）

微观经济学

- 微观经济学（microeconomics）
  - 通过对个体经济单位的经济行为的分析，说明在现代经济社会中市场机制的运行及其对经济资源的配置
- 商品、货币与价格
  - 商品（commodities）：在社会分工的体系中，经济上相互独立的生产者所生产的、以自己的属性满足人的某种需要、为他人（即为社会）消费、通过交换进入把它当作使用价值的人的手里的劳动产品和服务
  - 货币（money）：在商品交换中逐渐分离出来的固定地充当一般等价物的特殊商品。是价值量发展到一般价值形式的产物
  - 价格（price）：市场经济和商品交换中最常用的范畴，是商品与货币交换的比例，直接表明单位商品交换价值的实际货币量
    - 市场经济是以市场机制作为配置资源的主要方式的经济，市场配置资源主要是通过价格的调节作用实现的

数学建模 MATH T



Alfred Marshall（1842－1924）英国经济学家

Principles of Economics（经济学原理）

1890年初版，1920年第八版。集19世纪70年代以后西方经济学发展之大成，为微观经济学理论体系的建立奠定了基础。核心是均衡价格论

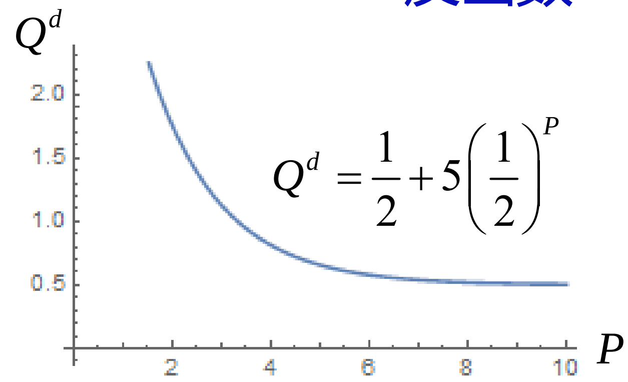
需求

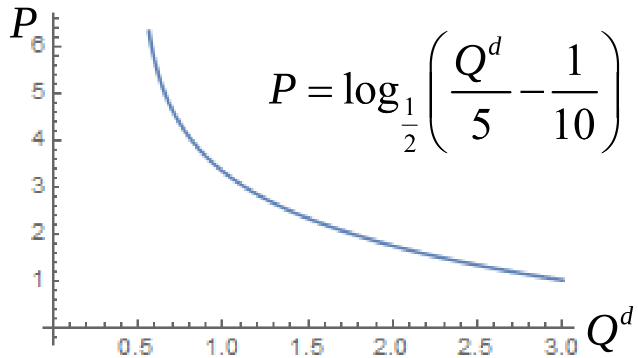
- 需求（demand）
  - 一种商品的需求是消费者在一定时期内在各种可能的价格水平下，愿意并且能够购买的该商品的数量
  - 决定需求数量的主要因素有商品的价格、消费者的收入水平、相关商品的价格、消费者的偏好、消费者对该商品的价格预期等
    - 商品的价格是最基本的因素
  - 需求函数表示一种商品的需求数量和影响该需求数量的各种因素之间的相互关系
    - 需求函数 $Q^d = f(P)$ $\left(P = f^{-1}(Q^d)\right)$ 表示一种商品的需求数量与该商品的价格之间的一一对应关系

函数（function）

减函数

反函数



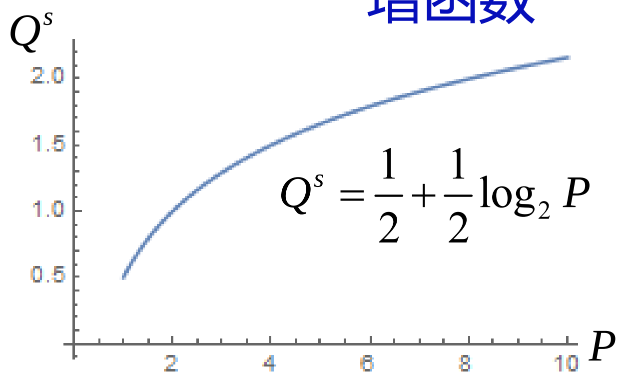


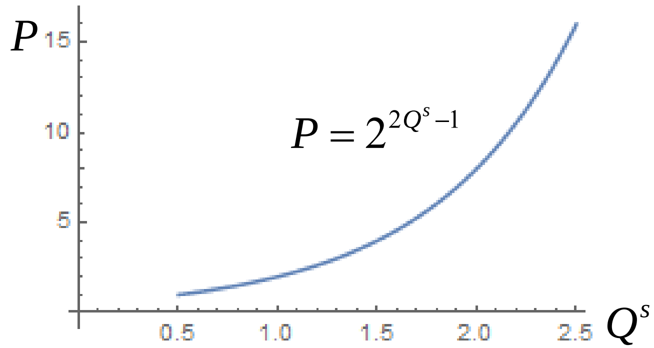
供给

数学
建模
MATH T

- 供给（supply）
  - 一种商品的供给是指生产者在一定时期内在各种可能的价格水平下，愿意并且能够提供出售的该商品的数量
  - 决定供给数量的主要因素有商品的价格、生产的成本、相关商品的价格、生产的技术水平、生产者对未来的价格预期
  - 供给函数表示一种商品的供给量与影响该商品供给量的各种因素之间的相互关系
    - 供给函数 $Q^s = g(P)$ $\left(P = g^{-1}(Q^s)\right)$ 表示一种商品的供给量与该商品的价格之间的一一对应关系

增函数

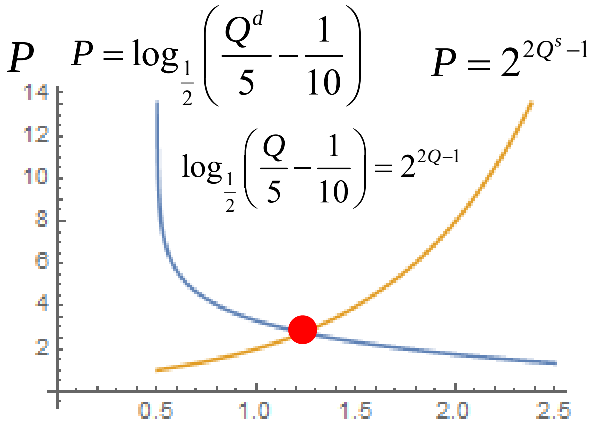


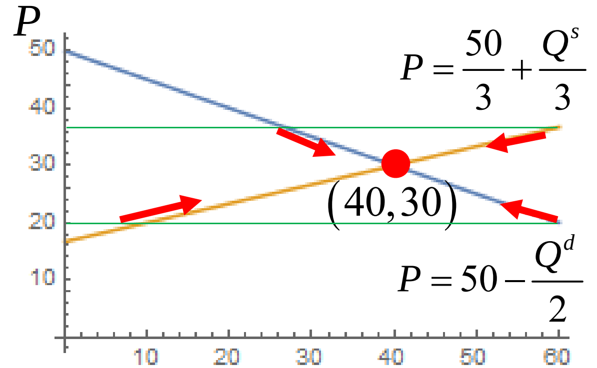


均衡

- 均衡（equilibrium）
  - 经济学中的均衡指经济系统中变动着的各种力量在相互作用之后所达到的“平衡”状态，即相对静止状态。如果没有外界扰动因素，这种状态会持续下去
- 均衡价格（equilibrium price）
  - 市场上某种商品的需求量和供给量相等时的价格。均衡价格水平下的相等的供求数量称为均衡数量
  - 均衡价格是市场上商品的需求和供给这两种相反力量共同作用的结果，是在市场供求力量自发作用下形成的。一旦市场价格偏离均衡价格，需求量和供给量就会出现不一致的非均衡状态，这种非均衡状态在市场机制的作用下会逐步消失，从而恢复到均衡价格水平

在微观经济分析中，为了简化分析过程，在不影响结论的前提下，大多使用线性需求函数与线性供给函数

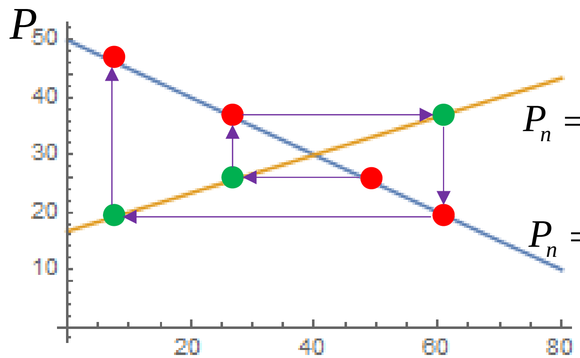




动态模型

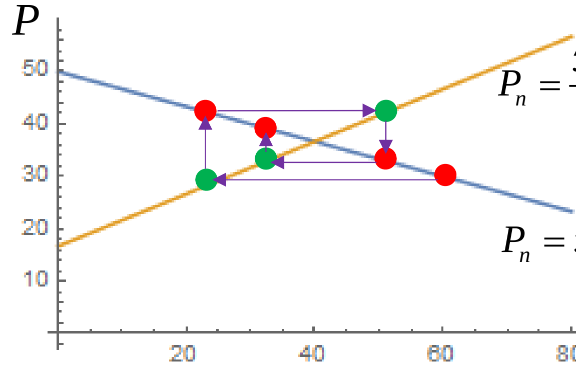
- 静态与动态
  - 静态模型与静态分析
    - 变量没有时间先后的差别
    - 变量的调整时间被假设为零
    - 考察既定条件下变量相互作用下所呈现的状态
  - 动态模型与动态分析
    - 区分变量在时间上的先后差别
    - 研究不同时点上变量之间的相互关系
    - 考察不同时点上变量的相互作用在状态形成和变化过程中所起的作用和在时间变化过程中状态的实际变化过程
- 动态均衡价格模型
  - 对生产周期较长的商品，商品的供给量通常由前一生产周期的价格决定

$$Q_n^s = g(P_{n-1}) \qquad Q_n^d = f(P_n) \qquad Q_n^d = Q_n^s$$



$$P_n = \frac{50}{3} + \frac{Q_{n+1}^s}{3}$$

$$P_n = 50 - \frac{Q_n^d}{2}$$



$$P_n = \frac{50}{3} + \frac{Q_{n+1}^s}{2}$$

$$P_n = 50 - \frac{Q_n^d}{3}$$

蛛网模型

数学
建模
MATH T

- 蛛网模型（**The Cobweb Model**）
  - 研究某些生产周期较长且不宜储存的商品均衡价格的动态稳定性的模型
    - 当商品的市场实际价格偏离均衡价格后，在市场机制的作用下，实际价格是否能回到原有的均衡价格水平，即均衡价格是否动态稳定，并考察它所需要具备的条件

Nicholas Kaldor
（1908－1986）
英国经济学家

Mordecai Joseph Brill Ezekiel
（1899－1974）
美国经济学家

Schultz H, *Der Sinn der Statistischen Nachfragen*, Heft 10, Veroffentlichungen der Frankfurter Gesellschaft fur Konjunkturfor-schung, 1930（Page 34）

Ricci U, Die "Synthetische Okonomie" von Henry Ludwell Moore, *Zeitschrift fuir Nationalokonomie*, 1, 649-668, 1930

Tinbergen J, Bestimmung und Deutung von Angebotskurven: Ein Beispeil, *Zeitschrift fur National Okonomie*, 1, 669-679, 1930

Kaldor N, A classificatory note on the determination of equilibrium, *Review of Economic Studies*， 1(2)， 122-136, 1934

Ezekiel M, The Cobweb Theorem, *The Quarterly Journal of Economics*, 52, 255-280, 1938

蛛网模型

数学
建模
MATH T

- 蛛网模型
  - 记在周期 n 某种商品的供求量为 x_n，价格为 y_n
  - 需求函数 $x_n = f(y_n)$，需求函数的反函数 $y_n = h(x_n)$，供给函数 $x_{n+1} = g(y_n)$，均衡点 (x_0, y_0) 满足 $y_0 = h(x_0)$ 和 $x_0 = g(y_0)$
  - 需求函数与供给函数为线性函数
    - $y_n - y_0 = -\alpha(x_n - x_0)$，$x_{n+1} - x_0 = \beta(y_n - y_0)$
      - α 为商品需求量减少一个单位时价格的上涨量，$\frac{1}{\alpha}$ 为商品价格上涨一个单位时需求量的减少量
      - β 为商品价格上涨一个单位时（下一周期）供给量的增加量
    - 递推关系 $x_{n+1} - x_0 = -\alpha\beta(x_n - x_0)$
      - $x_n - x_0 = (-\alpha\beta)^{n-1}(x_1 - x_0)$
      - 数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件为 $\alpha\beta < 1$

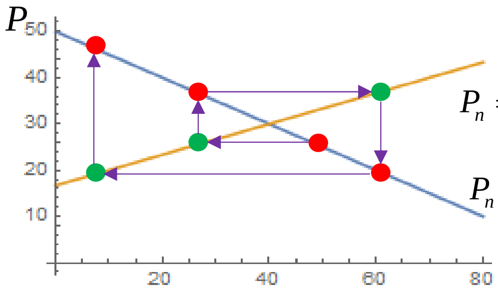
若需求函数 h 或供给函数 g 不为线性函数，可在均衡点附近用线性函数近似，即令 $\alpha = -h'(x_0)$ 与 $\beta = g'(y_0)$

蛛网模型

数学
建模
MATH T

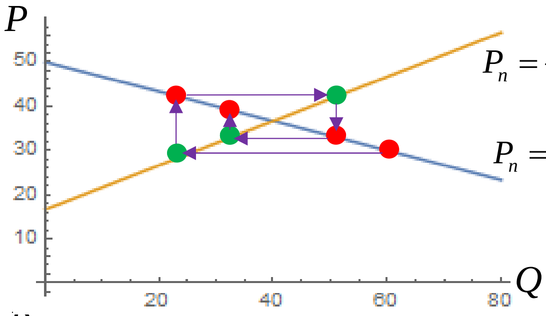
- 均衡的稳定性
  - 当一个均衡价格体系在受到干扰而偏离均衡点时，如果这个体系在市场机制的作用下能回到均衡点，则称这个均衡价格体系是稳定均衡，否则是不稳定均衡

稳定均衡 $\Leftrightarrow \alpha\beta < 1$



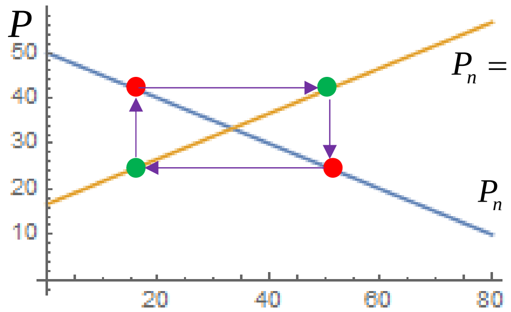
$$P_n = \frac{50}{3} + \frac{Q^s_{n+1}}{3}$$

$$P_n = 50 - \frac{Q^d_n}{2}$$



$$P_n = \frac{50}{3} + \frac{Q^s_{n+1}}{2}$$

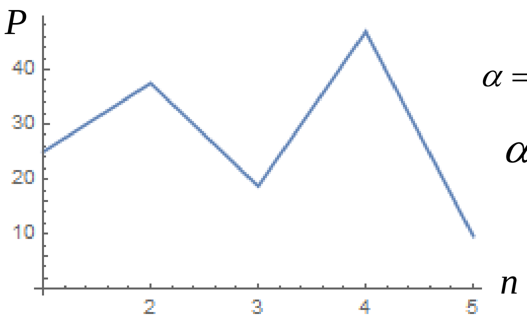
$$P_n = 50 - \frac{Q^d_n}{3}$$



Q

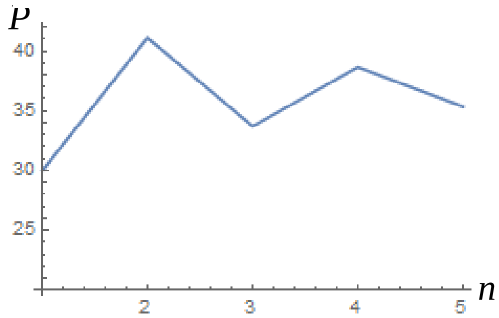
$$P_n = \frac{50}{3} + \frac{Q^s_{n+1}}{2}$$

$$P_n = 50 - \frac{Q^d_n}{2}$$



$$\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 3$$

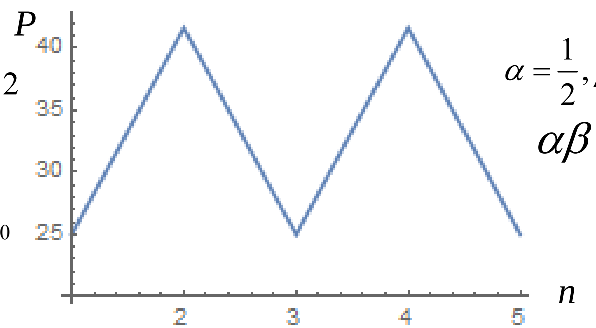
$$\alpha\beta > 1$$



$$\alpha = \frac{1}{3}, \beta = 2$$

$$\alpha\beta < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$



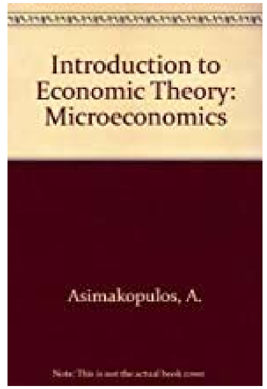
$$\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 2$$

$$\alpha\beta = 1$$

蛛网模型

数学
建模
MATH T

- 蛛网模型
  - 在美国，1972年由于暴风雨和恶劣的气候，土豆产量大幅度下降，从而土豆价格上涨
  - 随着土豆价格的上涨，农场主便扩大土豆的种植面积，使土豆产量在1974年达到历史最高水平
  - 结果，土豆供给量大幅度增加导致土豆价格又急剧下降
    - 以缅因州土豆为例，1磅土豆的价格由1974年5月的13美分降为1975年3月的2美分，该价格比平均生产成本还低
  - 在普林斯·爱德华岛，当农场主们都因土豆价格下降而缩减土豆的种植面积时，唯有一个农场主不这样做。因为这个农场主根据长期的经营经验，相信土豆价格将上升，而眼下正是自己增加土豆生产的时候



Athanasios Asimakopulos
（1930－1990）
加拿大经济学家

Asimakopulos *A*, *Introduction to Economic Theory: Microeconomics*，Oxford University Press, 1978

蛛网模型

数学
建模
MATH T

- 蛛网模型
  - 假设商品的供求量由前两个周期的价格决定
    - 需求函数 $x_n = f(y_n)$，需求函数的反函数 $y_n = h(x_n)$，供给函数 $x_{n+2} = g_2(y_{n+1}, y_n)$
      - 供给函数简化为 $x_{n+2} = g\left(\dfrac{y_{n+1}+y_n}{2}\right)$
    - 均衡点 (x_0, y_0) 满足 $y_0 = h(x_0)$ 和 $x_0 = g(y_0)$
    - 需求函数 h 与简化后的供给函数 g 为线性函数（或在均衡点附近用线性函数近似）
      - $y_n - y_0 = -\alpha(x_n - x_0)$，$x_{n+2} - x_0 = \beta\left(\dfrac{y_{n+1}+y_n}{2} - y_0\right)$
    - 递推关系
      - $2(x_{n+2} - x_0) = \beta(y_{n+1} + y_n - 2y_0) = \beta(y_{n+1} - y_0 + y_n - y_0) = \beta(-\alpha(x_{n+1} - x_0) - \alpha(x_n - x_0))$
      - 令 $z_n = x_n - x_0$，$2z_{n+2} + \alpha\beta z_{n+1} + \alpha\beta z_n = 0$ $\quad 2x_{n+2} + \alpha\beta x_{n+1} + \alpha\beta x_n = 2(1+\alpha\beta)x_0$
        - $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$

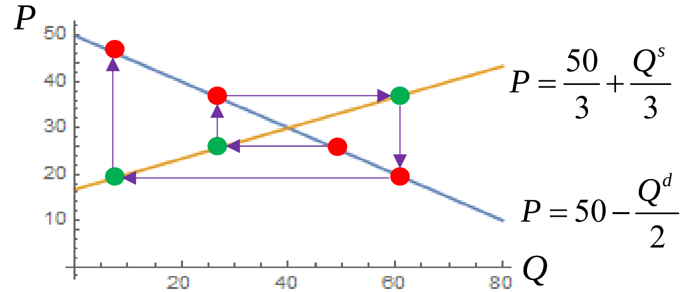
蛛网模型

- 蛛网模型
  - 差分方程 $2z_{n+2}+\alpha\beta z_{n+1}+\alpha\beta z_n=0$
  - 特征方程 $\lambda^2+\frac{\alpha\beta}{2}\lambda+\frac{\alpha\beta}{2}=0$
    - $\lambda_1=\frac{-\alpha\beta+\sqrt{(\alpha\beta)^2-8\alpha\beta}}{4},\lambda_2=\frac{-\alpha\beta-\sqrt{(\alpha\beta)^2-8\alpha\beta}}{4}$
      - $\alpha\beta\ge 8$ 时，$\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$，$\lambda_2=\frac{-\alpha\beta-\sqrt{(\alpha\beta)^2-8\alpha\beta}}{4}\le\frac{-\alpha\beta}{4}<-1$
      - $0<\alpha\beta<8$ 时，$\lambda_{1,2}=\frac{-\alpha\beta\pm\left(\sqrt{8\alpha\beta-(\alpha\beta)^2}\right)\mathbf{i}}{4}$

$$|\lambda_{1,2}|=\frac{\sqrt{(-\alpha\beta)^2+\left(\sqrt{8\alpha\beta-(\alpha\beta)^2}\right)^2}}{4}=\frac{\sqrt{8\alpha\beta}}{4}$$

- 当且仅当 $0<\alpha\beta<2$ 时，价格体系是稳定均衡

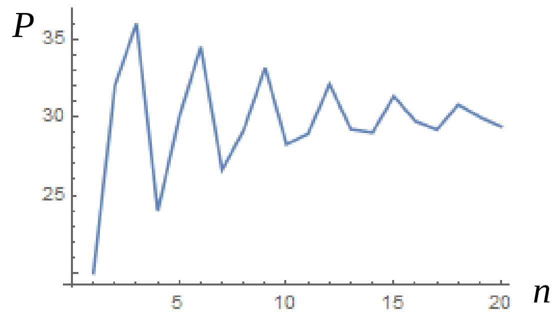
与供给量由前一个周期的价格决定相比，价格体系是稳定均衡的条件有所放宽



$y_n=50-\frac{x_n}{2}$ $\frac{y_{n+1}+y_n}{2}=\frac{50}{3}+\frac{x_{n+2}}{3}$

$4x_{n+2}+3x_{n+1}+3x_n=400$

$x_1=60, y_1=20, x_2=36, y_2=32$



种群增长模型

数学
建模
MATH T

生态学

- 生态学（ecology）
  - 研究生物与环境及生物与生物之间相互关系的生物学分支学科
- 生态学的主要研究对象
  - 种群（population）：同种生物在一定空间范围内同时生活着所有个体的集群
  - 生物群落（biological community）：生活在一定生境中全部物种及其相互作用、彼此影响所构成的整体
  - 生态系统（ecosystem）：一定空间中的生物群落与其环境组成的系统，其中各成员借助能流和物质循环，形成一个有组织的功能复合体
- 种群动态（population dynamics）
  - 种群的消长以及种群消长与种群参数（如出生、死亡、迁入、迁出等）间的数量关系

个体（**individual**）
↓
种群（ **population**）
↓
群落（**community**）
↓
生态系统（**ecosystem**）

离散单种种群模型

数学建模

MATH T

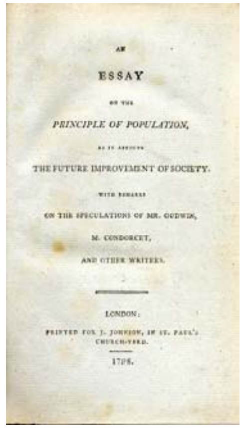
- 离散单种种群模型
  - 现实种群只由一个世代构成，相继世代之间没有重叠
  - 记 x_n 为第 n 代个体数量。数列 $\{x_n\}$ 满足差分方程

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

- 指数增长模型
  - 每一代个体繁殖的个体数量与该代个体数量之比是一个常数
  - $x_{n+1} = rx_n$
  - $x_n = r^n x_0$
    - 若 $0 \le r < 1$，x_n 单调递减趋于 0 ，若 $r > 1$, x_n 单调递增趋于 $+\infty$

指数增长模型不适于描述较长时期的人口演变过程，但某地一个较短时间内的人口统计数据可能符合指数增长模型

栖息于草原季节性小水坑中的水生昆虫，每年雌虫产一次卵，卵孵化长成幼虫，蛹在泥中渡过旱季，到第二年才变为成虫



ESSAY

PRINCIPLE OF POPULATION,

THE FUTURE IMPROVEMENT OF SOCIETY.

ON THE SPECULATIONS OF MR. GODWIN,

M. CONDORCET,

AND OTHER WRITERS.

LONDON:

PRINTED FOR J. JOHNSON, IN ST. PAUL'S CHURCH-YARD.

1798.

Thomas Robert Malthus

（1766－1834）

英国人口学家、经济学家

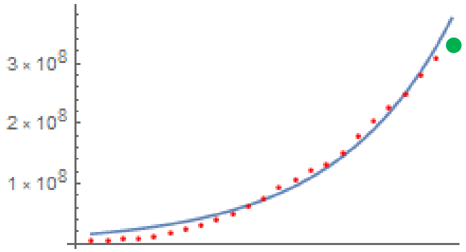
Malthus TR，*An Essay on the Principle of Population*，1798

人口普查

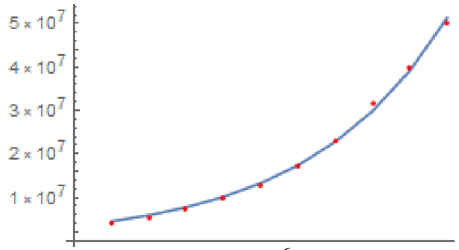
数学建模

MATH T

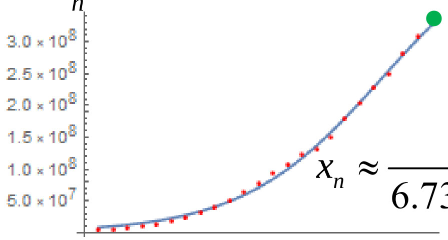
- 人口普查（population census）
  - 在统一确定的时点，按照统一的调查表式、项目和填写方法，由政府组织对全国或一个地区的全部人口的社会、经济特征资料，逐人进行搜集、整理、汇总、评价、分析和公布的全过程
  - 美国是世界上最早定期进行人口普查、公布普查结果并把人口普查作为一项条款写进宪法的



$$x_n \approx 1.426\times 10^7 \times 0.1363^n$$



$$x_n \approx 3.420\times 10^6 \times 0.2708^n$$



$$x_n \approx \frac{4.868\times 10^8 \times 6.734\times 10^6}{6.734\times 10^6 + (4.868\times 10^8 - 6.734\times 10^6)\,e^{-0.207n}}$$

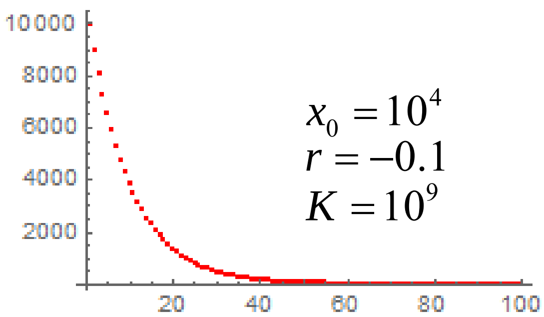
United States Census

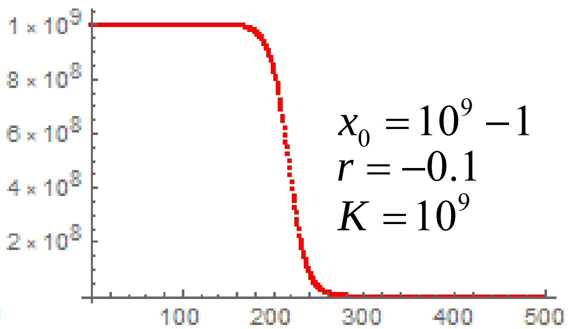
1790	3,929,326		1910	92,228,496	21%
1800	5,308,483	35%	1920	106,021,537	15%
1810	7,239,881	36%	1930	122,775,046	13%
1820	9,638,453	33%	1940	132,164,569	7%
1830	12,866,020	33%	1950	150,697,361	14%
1840	17,069,453	33%	1960	179,323,175	19%
1850	23,191,876	36%	1970	203,302,031	13%
1860	31,443,321	35%	1980	226,545,805	11%
1870	39,818,449	23%	1990	248,709,873	10%
1880	50,189,209	30%	2000	281,421,906	13%
1890	62,947,714	25%	2010	308,745,538	10%
1900	76,212,168	21%	2020	331,449,281	7%

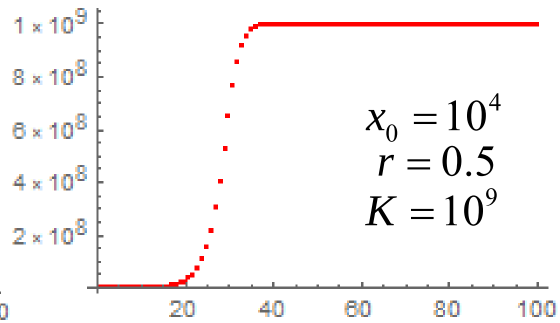
Logistic模型

数学
建模
MATH T

- Logistic模型
  - 种群增长率仅与种群数量有关，且是种群数量的递减函数
  - $$x_{n+1}=x_n+rx_n\left(1-\frac{x_n}{K}\right)$$ 增长量 增长率 $$\frac{\Delta x_n}{x_n}=r\left(1-\frac{x_n}{K}\right)$$
    - 内禀增长率（innate rate of increase）：$r(\geq -1)$
    - 环境承载量（carrying capacity）：K







Pierre François Verhulst
（1804－1849）
比利时数学家

Verhulst PF, Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Correspondance Mathématique et Physique*. 10: 113–121, 1838.

平衡点

数学建模 MATH T

- 平衡点
  - 差分方程 $x_{n+1}=f(x_n)$ 满足 $f(x^*)=x^*$ 的点 x^* 称为平衡点（equilibrium point）
    - 若 $x_i=x^*$，则 $x_j=x^*, j\ge i$
  - 若只要初始点 x_0 与平衡点 x^* 充分接近，即有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$，则称平衡点 x^* 渐近稳定（asymptotic stable）

	渐近稳定	不稳定
	$\lvert f'(x^*)\rvert<1$	$\lvert f'(x^*)\rvert>1$
$f'(x^*)=1$	$f''(x^*)=0$ 且 $f'''(x^*)<0$	$f''(x^*)\ne 0$ 或 $f'''(x^*)>0$
$f'(x^*)=-1$	$-2f'''(x^*)<3\left(f''(x^*)\right)^2$	$-2f'''(x^*)>3\left(f''(x^*)\right)^2$
……		

$$x_{n+1}=x_n+rx_n\left(1-\frac{x_n}{K}\right)$$

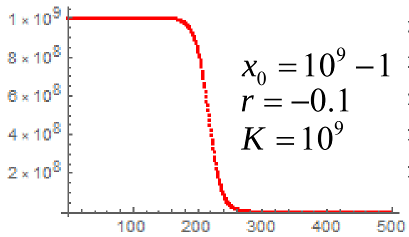
$$f(x)=(1+r)x-\frac{r}{K}x^2 \qquad x_1^*=0, x_2^*=K$$

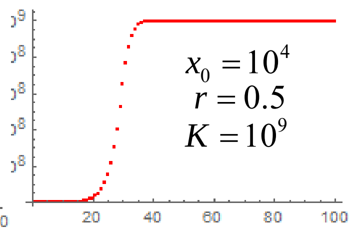
$$f'(x)=(1+r)-\frac{2r}{K}x \qquad \begin{aligned}f'(0)&=1+r\\ f'(K)&=1-r\end{aligned}$$

$-1\le r<0$　　0 渐近稳定，K 不稳定

$0<r<2$　　K 渐近稳定，0 不稳定

$r>2$　　$0, K$ 不稳定





周期点

- 周期点
  - 差分方程 $x_{n+1}=f(x_n)$ 满足 $f_k(x^*)=x^*$ 的点 x^* 称为 k 周期点（k periodic point），这里 $f_k(x)$ 可通过以下方式定义，$f_1(x)=f(x)$，$f_k(x)=f(f_{k-1}(x))$
    - 差分方程 $x_{n+1}=f(x_n)$ 的 k 周期点即差分方程 $x_{n+1}=f_k(x_n)$ 的平衡点
    - 差分方程 $x_{n+1}=f(x_n)$ 的 k 周期点的渐近稳定性由差分方程 $x_{n+1}=f_k(x_n)$ 的平衡点的渐近稳定性所决定

$$f_k'\left(x^*\right)=f'\left(f_{k-1}(x^*)\right)f'\left(f_{k-2}(x^*)\right)\cdots f'\left(f_1(x^*)\right)f'\left(x^*\right)$$

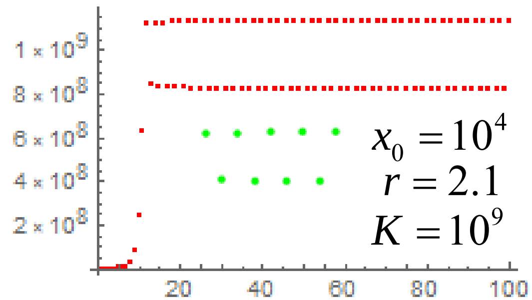
$$x_{n+1}=x_n+rx_n\left(1-\frac{x_n}{K}\right)$$

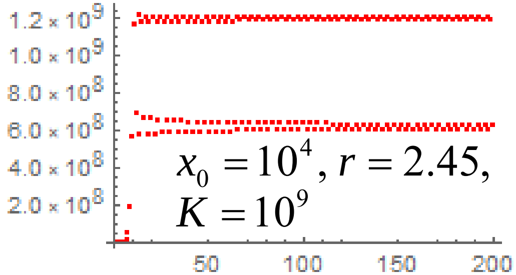
$$f(x)=(1+r)x-\frac{r}{K}x^2 \qquad x_1^*=0, x_2^*=K$$

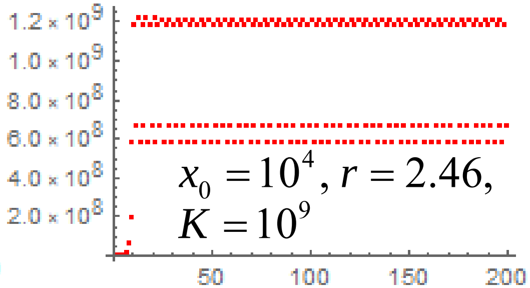
$$f'(x)=(1+r)-\frac{2r}{K}x \qquad f'(0)=1+r \quad f'(K)=1-r$$

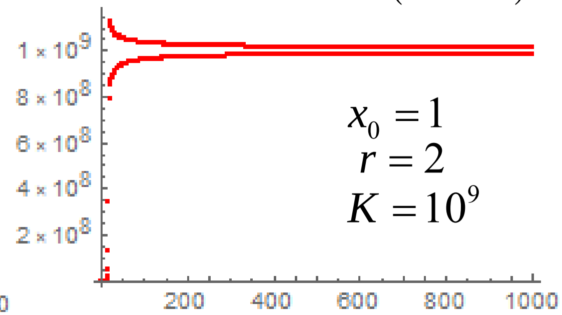
$$f''(x)=-\frac{2r}{K} \qquad f'''(x)=0 \qquad K \text{ 渐近稳定}$$

$$r=2 \qquad -2f'''(K)=0<3\left(f''(K)\right)^2$$









Logistic模型

- Logistic模型的2-周期点
  - $f(x)=(1+r)x-\frac{r}{K}x^2$
  - $f_2(x)=f(f(x))=(1+r)\left((1+r)x-\frac{r}{K}x^2\right)-\frac{r}{K}\left((1+r)x-\frac{r}{K}x^2\right)^2$

    $=(1+r)^2x-\frac{r(1+r)(2+r)}{K}x^2+\frac{2r^2}{K^2}(1+r)x^3-\frac{r^3}{K^3}x^4$
    - $x=(1+r)^2x-\frac{r(1+r)(2+r)}{K}x^2+\frac{2r^2}{K^2}(1+r)x^3-\frac{r^3}{K^3}x^4$

      $\Rightarrow x\left(\frac{x}{K}-1\right)\underline{\left(r^2\left(\frac{x}{K}\right)^2-r(r+2)\frac{x}{K}+(r+2)\right)}=0$

      $\Rightarrow x_+=\frac{(r+2)+\sqrt{r^2-4}}{2r}K,\ x_-=\frac{(r+2)-\sqrt{r^2-4}}{2r}K$
  - $f(x_+)=x_-,\ f(x_-)=x_+$
  - $f_2'(x_+)=f_2'(x_-)=5-r^2$
    - $2<r<\sqrt{6}$ 时2-周期点渐近稳定

$f(f(x_+))=x_+,\ f(f(f(x_+)))=f(x_+)$

$f_2'(x)=(1+r)^2-\frac{2r(1+r)(2+r)}{K}x+\frac{6r^2}{K^2}(1+r)x^2-\frac{4r^3}{K^3}x^3$

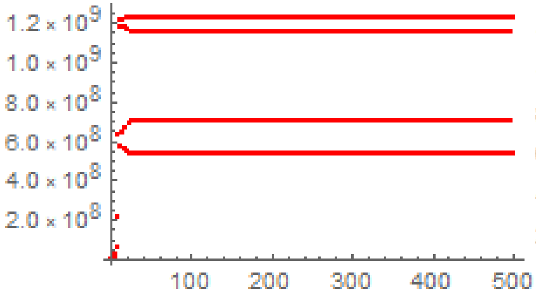
$f'(x)=(1+r)-\frac{2r}{K}x$

$$
\begin{aligned}
f_2'(x_+)&=f'(f(x_+))\,f'(x_+)\\
&=f'(x_-)\,f'(x_+)\\
&=\left((1+r)-\frac{2r}{K}x_-\right)\left((1+r)-\frac{2r}{K}x_+\right)\\
&=(1+r)^2-\frac{2r(1+r)}{K}(x_++x_-)+\frac{4r^2}{K^2}x_+x_-\\
&=(1+r)^2-\frac{2r(1+r)}{K}\frac{r(r+2)K}{r^2}+\frac{4r^2}{K^2}\frac{(r+2)K^2}{r^2}\\
&=(1+r)^2-2(1+r)(r+2)+4(r+2)=5-r^2
\end{aligned}
$$

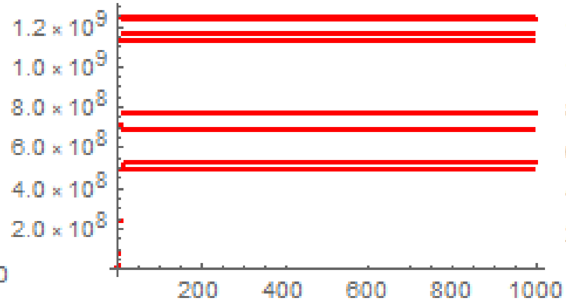
Logistic模型

数学
建模
MATH T

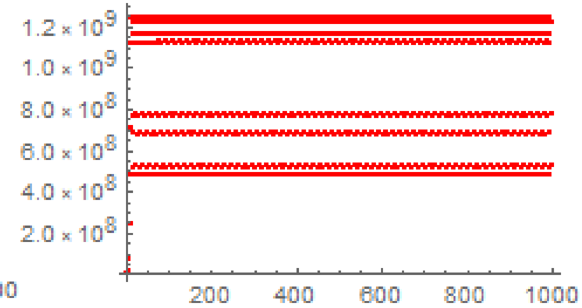
- Logistic模型



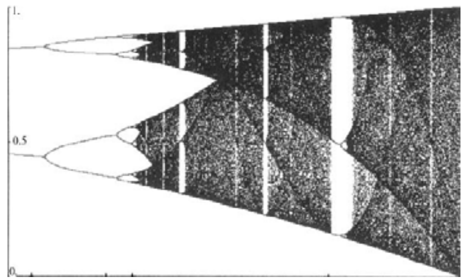
$x_0 = 10^4, r = 2.5, K = 10^9$

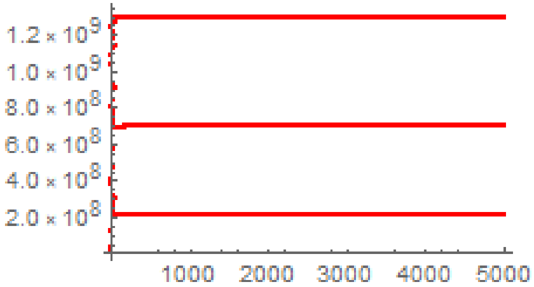


$x_0 = 10^4, r = 2.56, K = 10^9$

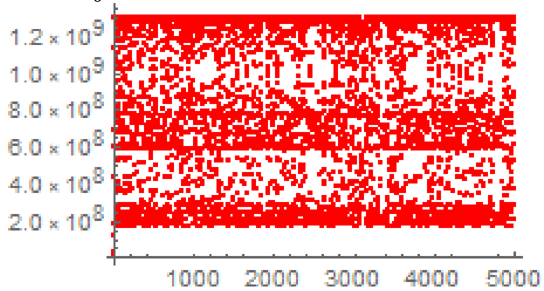


$x_0 = 10^4, r = 2.565, K = 10^9$

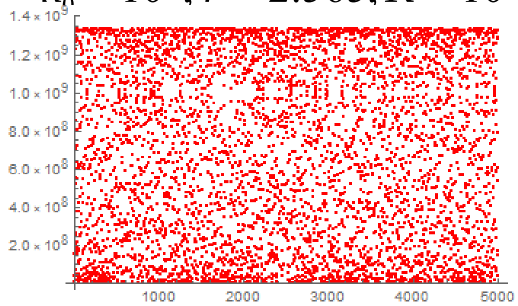




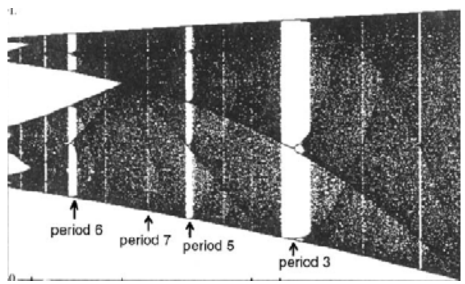
$x_0 = 10^4, r = \sqrt{8}, K = 10^9$



$x_0 = 10^4, r = 2.86, K = 10^9$



$x_0 = 10^4, r = 3, K = 10^9$



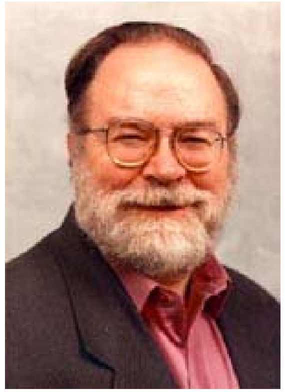
混沌

数学
建模
MATH T

- 混沌
  - 二十世纪六十年代，Lorenz教授用一台简陋计算机计算与天气预报有关的三个简单非线性微分方程初值问题。他十分吃惊地看到与旧初始值仅仅相差约万分之一的新计算结果和原先预期的计算结果大相径庭，面貌全非
  - 1972 年， 美国马里兰大学气象学教授Allen Feller将Lorenz关于气象预测模型的那些在气象学家眼里理论性太强、 数学味太浓的论文递给了Yorke教授， 认为数学家们也许会感兴趣

Lorenz EN. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20(2): 130-141, 1963.

Edward Norton Lorenz
（1917－2008）
美国数学家、气象学家



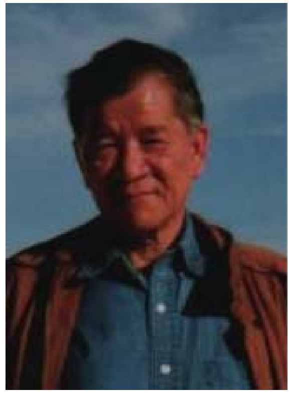
James Alan Yorke
（1941－）
美国数学家、物理学家

丁玖，智者的困惑——混沌分形漫谈，高等教育出版社，**2013**

混沌

数学
建模
MATH T

- 混沌
  - 1973 年 3 月，当李天岩来到Yorke的办公室时， Yorke对他说，I have a good idea for you，李天岩听完后说， “这将是《美国数学月刊》一个完美的工作。” 因为它所牵涉的语言非常基本。 两周后，运用他得心应手的微积分技巧，李天岩完全证明了定理
  - 文章写好后， 按照Yorke的意图，寄给了《美国数学月刊》。但不久文章被退回， 理由是该文过于研究性， 但编辑同意若作者能改写文章到一般学生都能看懂的地步，可以投回《美国数学月刊》
- Li-Yorke定理
  - 若实数轴一区间到其自身的连续函数 f 有一 3 周期点，则对任意正整数 k，f 有一 k 周期点
  - 存在不可数个初始点， 函数从这些点出发的迭代点序列之最终走向将是杂乱无章， 无规律可循



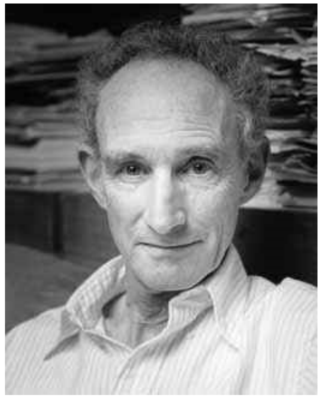
李天岩
（1945－2020）
华裔数学家

The American Mathematical Monthly，创刊于1894年，有很大影响的数学普及类期刊

混沌

数学
建模
MATH T

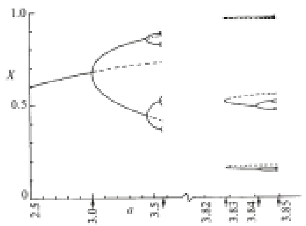
- 混沌
  - 在1974年普林斯顿大学的May教授最后一天在马里兰大学的演讲中，讲了Logistic模型的迭代：当参数从小到大变化时其迭代点序列之性态将变得愈来愈复杂。他十分困惑于对这一现象的解释，想像中也许是计算上的误差所造成的
  - Yorke听完May的演讲后， 在送他上飞机时， 把李天岩桌上躺了将近一年的文章给他看。 May看了文章的结果之后，极为吃惊，并认定此定理大大解释了他的疑问
  - Yorke从机场回来后立即找到李天岩说，应该马上改写这篇文章。文章在两个星期内改写完毕，三个月后被《美国数学月刊》接受，并刊登在 1975 年 12月份的那一期上



Robert McCredie May
（1936－ ）
澳大利亚生物学家
英国政府首席科学顾问
（UK GCSA）（1995-2000）

May RM. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261: 459-467, 1976.

Li TY, Yorke JA. Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly*, 82(10): 985-992, 1975.

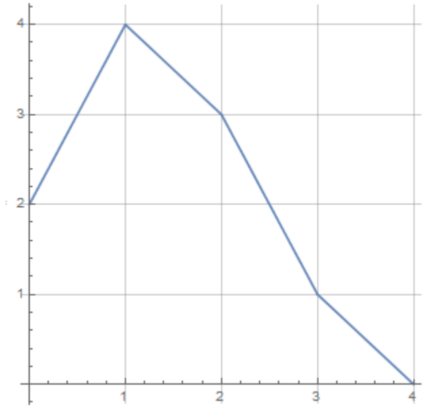


混沌

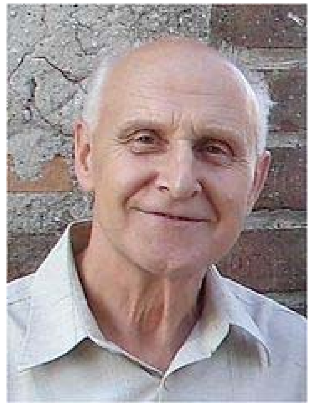
- 混沌
  - 几年后的一天，在东柏林一个国际会议上做完报告后， Yorke和同行去逛市容。在一条游艇上，一个从未谋面、不期而至的苏联人突然走近了他，急于想与他交谈一下。这位Sharkovsky教授早十来年就证明了较Li-Yorke定理第一部分似乎更为一般的结果
- Sharkovsky定理
  - 任意正整数 n 可唯一表示成 $n=2^s(2p+1)$，其中 $s,p\in\mathbb{N}$。所有正整数可据此排成一列，称为S型排序
  - 若实数轴一区间到其自身的连续函数 f 具有 k 周期点，在正整数S型排序中，k 先于 m，则 f 必有 m 周期点

Sharkovskii AN. Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself. *Ukrainian Mathematics Journal*, 16: 61–71, 1964.

$$3,5,7,9,\cdots,$$
$$2\cdot3,2\cdot5,2\cdot7,2\cdot9,\cdots,$$
$$2^2\cdot3,2^2\cdot5,2^2\cdot7,2^2\cdot9,\cdots,$$
$$\cdots\cdots,$$
$$\cdots,2^5,2^4,2^3,2^2,2^1,1$$



有5周期点但无3周期点的函数



Oleksandr Mykolayovych Sharkovsky
（1936－ ）
乌克兰数学家


谢 谢