1. 不妨设这些点为 x_i $(k=1,2\cdots,k)$. $\forall\varepsilon>0$ $\exists\rho$ s.t. $x_i\in I_i$ $\left\{\begin{array}{l} I_i=U(x_i,\delta_i) \\ I_i\cap I_j=\emptyset\ (i\neq j) \end{array}\right.$ 且 I_i 为不包含 x_i 的区间. 记 $M=\max\{|f(x_i)-g(x_i)|\}$. 令 $\delta=\max\{\delta_i\}=\frac{\varepsilon}{2kM+1}$.

那么 $\left|\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx\right|=\left|\sum_{i=1}^{k}[f(x_i)-g(x_i)]\cdot 2\delta_i\right|<2Mk\frac{\varepsilon}{2kM+1}<\varepsilon$ 考虑 ε 的任意性.

故 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$

2. $\int_0^1 x\,dx\cdot\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{4}\neq\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$

3. 区间可加性. 讨论 a. b. c.大小.

4. ✓ 5. n行.

6. ✓

7. $\frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)dx=f(b)=\frac{2}{b-a}\cdot\int_a^{\frac{a+b}{2}}1\cdot f(x)dx=\frac{2}{b-a}\cdot f(\xi)\cdot\int_a^{\frac{a+b}{2}}dx$ $[\xi\in(a,\frac{a+b}{2})]$

有 $f(\xi)=f(b)$. 对连续. 由 Rolle 定值知 $\exists\xi$ s.t. $f'(\xi)=0$.

8. $f(x)$ 下凸.

$\int_0^a\varphi(t)dt=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)\cdot\Delta x_i$.

有 $f\left(\frac{1}{a}\int_0^a\varphi(t)dt\right)=f\left(\frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)\cdot\Delta x_i\right)<\frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\varphi(x_i))\Delta x_i=\frac{1}{a}\int_0^a f(\varphi(t))dt$.

#.

9. $F(x)=\int_0^x f(t)dt-x\int_0^1 f(t)dt$ $(x\in(0,1))$

$F'(x)=f(x)-1$