# 种群模型

浙江大学 谈之奕

数学建模

MATH T

# 生态学

- 生态学（ecology）
  - 研究生物与环境及生物与生物之间相互关系的生物学分支学科
- 生态学的主要研究对象
  - 种群（population）：同种生物在一定空间范围内同时生活着所有个体的集群
  - 生物群落（biological community）：生活在一定生境中全部物种及其相互作用、彼此影响所构成的整体
  - 生态系统（ecosystem）：一定空间中的生物群落与其环境组成的系统，其中各成员借助能流和物质循环，形成一个有组织的功能复合体
- 种群动态（population dynamics）
  - 种群的消长以及种群消长与种群参数（如出生、死亡、迁入、迁出等）间的数量关系

个体（**individual**）

↓

种群（ **population**）

↓

群落（**community**）

↓

生态系统（**ecosystem**）

数学建模

MATH T

# 离散单种种群模型

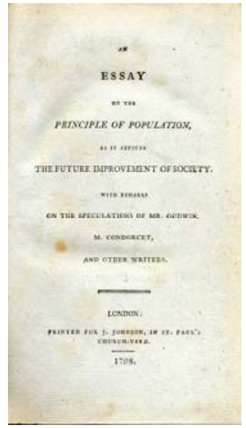
- 离散单种种群模型
  - 现实种群只由一个世代构成，相继世代之间没有重叠
  - 记 $x_n$ 为第 $n$ 代个体数量。数列 $\{x_n\}$ 满足差分方程

    $$x_{n+1} = f(x_n)$$

- 指数增长模型
  - 每一代个体繁殖的个体数量与该代个体数量之比是一个常数
  - $x_{n+1} = rx_n$
  - $x_n = r^n x_0$
    - 若 $0 \le r < 1$，$x_n$ 单调递减趋于 $0$ ，若 $r > 1$，$x_n$ 单调递增趋于 $+\infty$

指数增长模型不适于描述较长时期的人口演变过程，但某地一个较短时间内的人口统计数据可能符合指数增长模型

栖息于草原季节性小水坑中的水生昆虫，每年雌虫产一次卵，卵孵化长成幼虫，蛹在泥中渡过旱季，到第二年才变为成虫



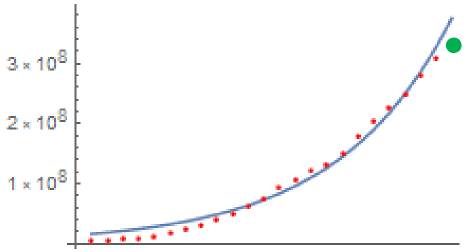

**Thomas Robert Malthus**
**（1766－1834）**
英国人口学家、经济学家

Malthus TR，*An Essay on the Principle of Population*，1798

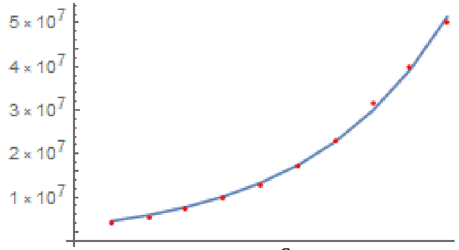
数学建模

# 人口普查

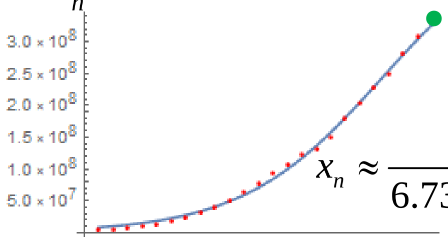
- 人口普查（population census）
  - 在统一确定的时点，按照统一的调查表式、项目和填写方法，由政府组织对全国或一个地区的全部人口的社会、经济特征资料，逐人进行搜集、整理、汇总、评价、分析和公布的全过程
  - 美国是世界上最早定期进行人口普查、公布普查结果并把人口普查作为一项条款写进宪法的




$$x_n \approx 1.426\times10^7 \times 0.1363^n$$




$$x_n \approx 3.420\times10^6 \times 0.2708^n$$




$$x_n \approx \frac{4.868\times10^8 \times 6.734\times10^6}{6.734\times10^6 + (4.868\times10^8 - 6.734\times10^6)\,\mathrm{e}^{-0.207n}}$$

**United States Census**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1790 | 3,929,326 | | 1910 | 92,228,496 | 21% |
| 1800 | 5,308,483 | 35% | 1920 | 106,021,537 | 15% |
| 1810 | 7,239,881 | 36% | 1930 | 122,775,046 | 13% |
| 1820 | 9,638,453 | 33% | 1940 | 132,164,569 | 7% |
| 1830 | 12,866,020 | 33% | 1950 | 150,697,361 | 14% |
| 1840 | 17,069,453 | 33% | 1960 | 179,323,175 | 19% |
| 1850 | 23,191,876 | 36% | 1970 | 203,302,031 | 13% |
| 1860 | 31,443,321 | 35% | 1980 | 226,545,805 | 11% |
| 1870 | 39,818,449 | 23% | 1990 | 248,709,873 | 10% |
| 1880 | 50,189,209 | 30% | 2000 | 281,421,906 | 13% |
| 1890 | 62,947,714 | 25% | 2010 | 308,745,538 | 10% |
| 1900 | 76,212,168 | 21% | 2020 | 331,449,281 | 7% |

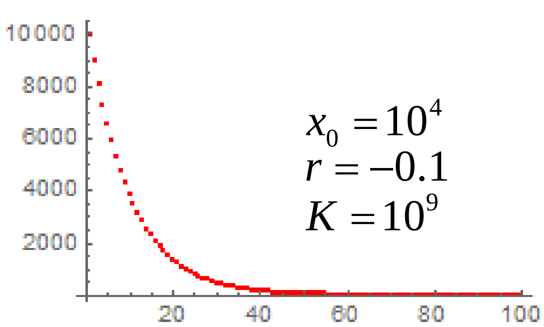
# Logistic模型

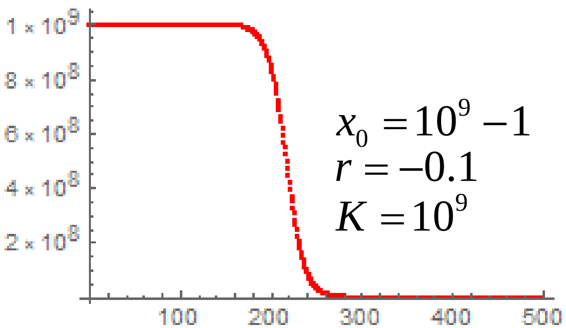
数学建模

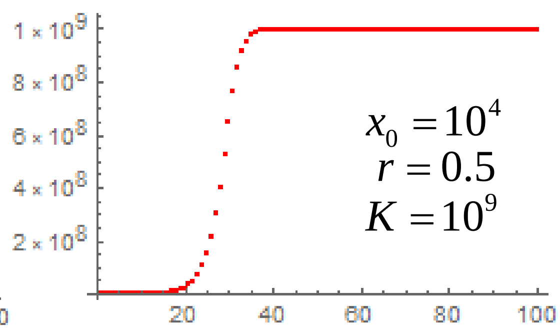
MATH T

- Logistic模型
  - 种群增长率仅与种群数量有关，且是种群数量的递减函数
  - $$x_{n+1} = x_n + r x_n \left(1 - \frac{x_n}{K}\right)$$

    增长量 增长率 $$\frac{\Delta x_n}{x_n} = r\left(1 - \frac{x_n}{K}\right)$$
    - 内禀增长率（innate rate of increase）：$r\,(\geq -1)$
    - 环境承载量（carrying capacity）：$K$





**Pierre François Verhulst**
**（1804－1849）**
比利时数学家

**Verhulst PF, Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Correspondance Mathématique et Physique*. 10: 113–121, 1838.**

# 平衡点





- 平衡点
  - 差分方程 $x_{n+1}=f(x_n)$ 满足 $f(x^*)=x^*$ 的点 $x^*$ 称为平衡点（equilibrium point）
    - 若 $x_i=x^*$，则 $x_j=x^*, j\geq i$
  - 若只要初始点 $x_0$ 与平衡点 $x^*$ 充分接近，即有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x^*$，则称平衡点 $x^*$ 渐近稳定（asymptotic stable）

| | 渐近稳定 | 不稳定 |
|---|---|---|
| | $\lvert f'(x^*)\rvert<1$ | $\lvert f'(x^*)\rvert>1$ |
| $f'(x^*)=1$ | $f''(x^*)=0$ 且 $f'''(x^*)<0$ | $f''(x^*)\neq 0$ 或 $f'''(x^*)>0$ |
| $f'(x^*)=-1$ | $-2f'''(x^*)<3\left(f''(x^*)\right)^2$ | $-2f'''(x^*)>3\left(f''(x^*)\right)^2$ |
| …… | | |

$$x_{n+1}=x_n+rx_n\left(1-\frac{x_n}{K}\right)$$

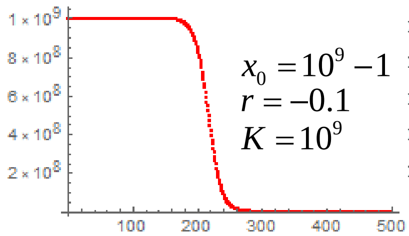
$$f(x)=(1+r)x-\frac{r}{K}x^2 \qquad x_1^*=0, x_2^*=K$$

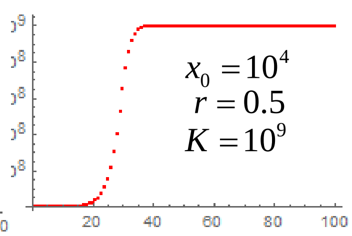
$$f'(x)=(1+r)-\frac{2r}{K}x \qquad \begin{aligned} f'(0)&=1+r\\ f'(K)&=1-r\end{aligned}$$

$-1\leq r<0$　　0 渐近稳定，$K$ 不稳定

$0<r<2$　　$K$ 渐近稳定，0 不稳定

$r>2$　　$0, K$ 不稳定



数学建模

MATH T

# 周期点

- 周期点
  - 差分方程 $x_{n+1} = f(x_n)$ 满足 $f_k(x^*) = x^*$ 的点 $x^*$ 称为 $k$ 周期点（ $k$ periodic point ），这里 $f_k(x)$ 可通过以下方式定义，$f_1(x) = f(x)$ ，$f_k(x) = f(f_{k-1}(x))$
    - 差分方程 $x_{n+1} = f(x_n)$ 的 $k$ 周期点即差分方程 $x_{n+1} = f_k(x_n)$ 的平衡点
    - 差分方程 $x_{n+1} = f(x_n)$ 的 $k$ 周期点的渐近稳定性由差分方程 $x_{n+1} = f_k(x_n)$ 的平衡点的渐近稳定性所决定

$$f_k'(x^*) = f'\left(f_{k-1}(x^*)\right) f'\left(f_{k-2}(x^*)\right) \cdots f'\left(f_1(x^*)\right) f'\left(x^*\right)$$

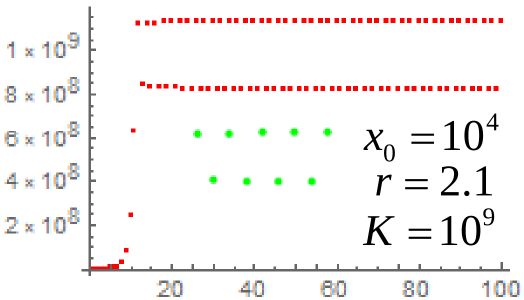
$$x_{n+1} = x_n + r x_n \left(1 - \frac{x_n}{K}\right)$$

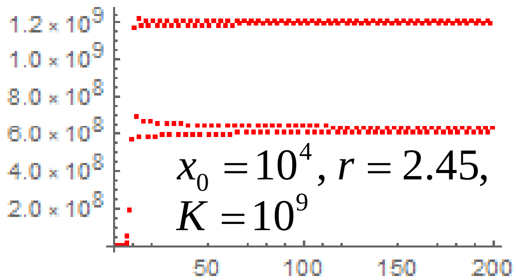
$$f(x) = (1+r)x - \frac{r}{K}x^2 \qquad x_1^* = 0, x_2^* = K$$

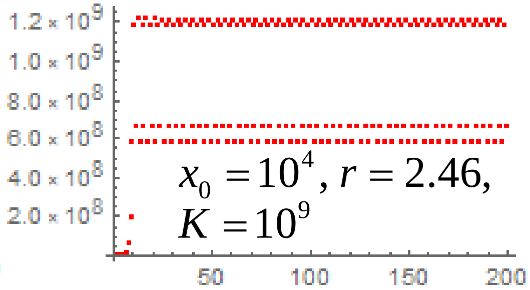
$$f'(x) = (1+r) - \frac{2r}{K}x \qquad f'(0) = 1+r \qquad f'(K) = 1-r$$

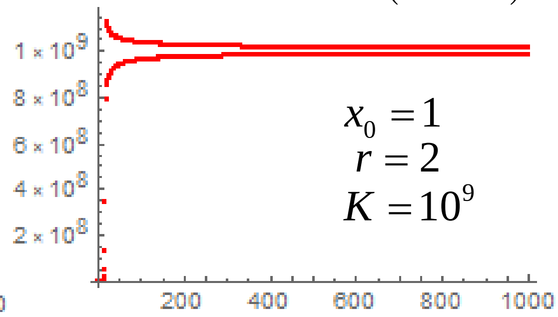
$$f''(x) = -\frac{2r}{K} \qquad f'''(x) = 0 \qquad K \text{ 渐近稳定}$$

$$r = 2 \qquad -2f'''(K) = 0 < 3\left(f''(K)\right)^2$$



# Logistic模型

数学建模

MATH T

- Logistic模型的2-周期点
  - $f(x)=(1+r)x-\frac{r}{K}x^2$
  - $f_2(x)=f(f(x))=(1+r)\left((1+r)x-\frac{r}{K}x^2\right)-\frac{r}{K}\left((1+r)x-\frac{r}{K}x^2\right)^2$

    $=(1+r)^2x-\frac{r(1+r)(2+r)}{K}x^2+\frac{2r^2}{K^2}(1+r)x^3-\frac{r^3}{K^3}x^4$
    - $x=(1+r)^2x-\frac{r(1+r)(2+r)}{K}x^2+\frac{2r^2}{K^2}(1+r)x^3-\frac{r^3}{K^3}x^4$

      $\Rightarrow x\left(\frac{x}{K}-1\right)\underline{\left(r^2\left(\frac{x}{K}\right)^2-r(r+2)\frac{x}{K}+(r+2)\right)}=0$

      $\Rightarrow x_+=\frac{(r+2)+\sqrt{r^2-4}}{2r}K,\ x_-=\frac{(r+2)-\sqrt{r^2-4}}{2r}K$
  - $f(x_+)=x_-,\ f(x_-)=x_+$
  - $f_2'(x_+)=f_2'(x_-)=5-r^2$
    - $2<r<\sqrt{6}$ 时2-周期点渐近稳定

$$f(f(x_+))=x_+,\ f(f(f(x_+)))=f(x_+)$$

$$f_2'(x)=(1+r)^2-\frac{2r(1+r)(2+r)}{K}x+\frac{6r^2}{K^2}(1+r)x^2-\frac{4r^3}{K^3}x^3$$

$$f_2'(x_+)=f'(f(x_+))f'(x_+)$$

$$f'(x)=(1+r)-\frac{2r}{K}x$$

$$=f'(x_-)f'(x_+)$$

$$=\left((1+r)-\frac{2r}{K}x_-\right)\left((1+r)-\frac{2r}{K}x_+\right)$$

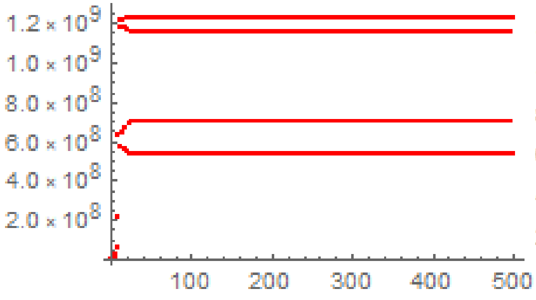
$$=(1+r)^2-\frac{2r(1+r)}{K}(x_++x_-)+\frac{4r^2}{K^2}x_+x_-$$

$$=(1+r)^2-\frac{2r(1+r)}{K}\frac{r(r+2)K}{r^2}+\frac{4r^2}{K^2}\frac{(r+2)K^2}{r^2}$$

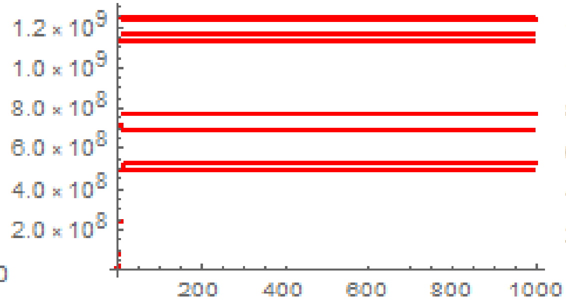
$$=(1+r)^2-2(1+r)(r+2)+4(r+2)\ =5-r^2$$

# Logistic模型

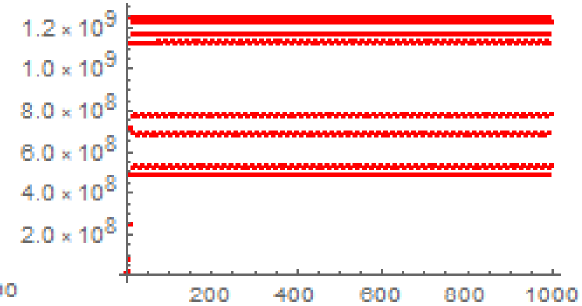
- Logistic模型



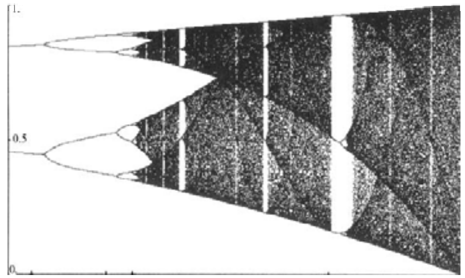

$x_0 = 10^4, r = 2.5, K = 10^9$

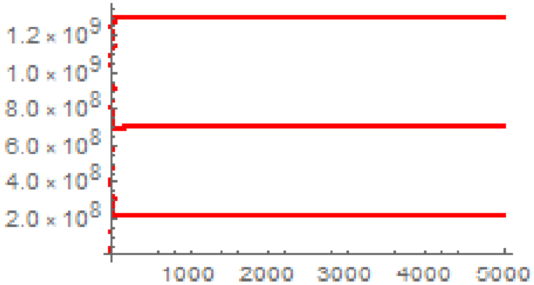



$x_0 = 10^4, r = 2.56, K = 10^9$

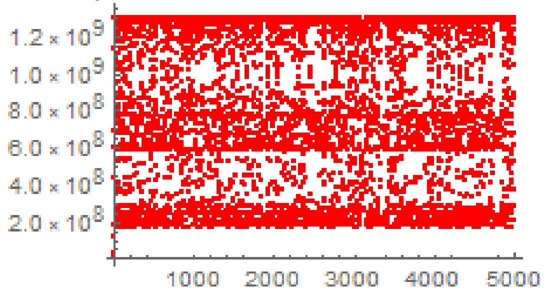



$x_0 = 10^4, r = 2.565, K = 10^9$

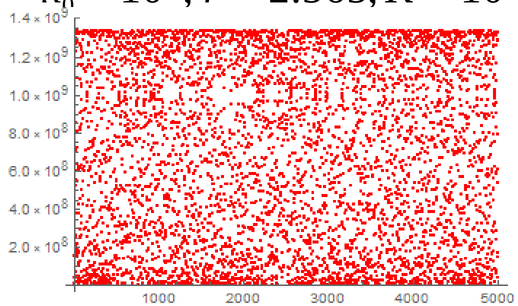




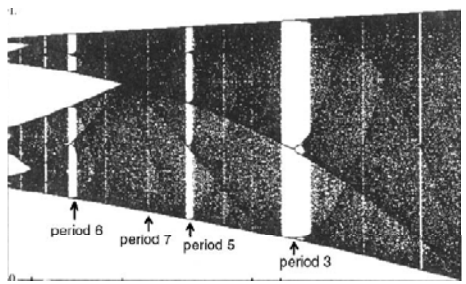

$x_0 = 10^4, r = \sqrt{8}, K = 10^9$




$x_0 = 10^4, r = 2.86, K = 10^9$




$x_0 = 10^4, r = 3, K = 10^9$



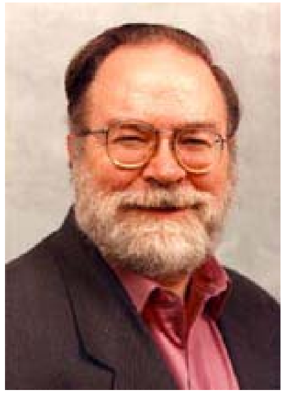
数学建模

# 混沌

- 混沌
  - 二十世纪六十年代，Lorenz教授用一台简陋计算机计算与天气预报有关的三个简单非线性微分方程初值问题。他十分吃惊地看到与旧初始值仅仅相差约万分之一的新计算结果和原先预期的计算结果大相径庭，面貌全非
  - 1972 年， 美国马里兰大学气象学教授Allen Feller将Lorenz关于气象预测模型的那些在气象学家眼里理论性太强、 数学味太浓的论文递给了Yorke教授， 认为数学家们也许会感兴趣

**Lorenz EN. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20(2): 130-141, 1963**.

**Edward Norton Lorenz**
**（1917－2008）**
美国数学家、气象学家



**James Alan Yorke**
**（1941－）**
美国数学家、物理学家

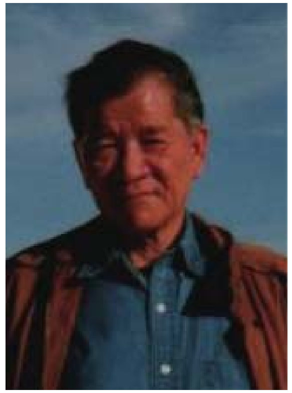

丁玖，智者的困惑——混沌分形漫谈，高等教育出版社，**2013**

数学建模

MATH T

# 混沌

- 混沌
  - 1973 年 3 月，当李天岩来到Yorke的办公室时， Yorke对他说，I have a good idea for you，李天岩听完后说， “这将是《美国数学月刊》一个完美的工作。” 因为它所牵涉的语言非常基本。 两周后，运用他得心应手的微积分技巧，李天岩完全证明了定理
  - 文章写好后， 按照Yorke的意图，寄给了《美国数学月刊》。但不久文章被退回， 理由是该文过于研究性， 但编辑同意若作者能改写文章到一般学生都能看懂的地步，可以投回《美国数学月刊》
- Li-Yorke定理
  - 若实数轴一区间到其自身的连续函数 $f$ 有一 3 周期点，则对任意正整数 $k$ ，$f$ 有一 $k$ 周期点
  - 存在不可数个初始点， 函数从这些点出发的迭代点序列之最终走向将是杂乱无章， 无规律可循



李天岩

（1945－2020）

华裔数学家


**The American Mathematical Monthly**，创刊于**1894**年，有很大影响的数学普及类期刊

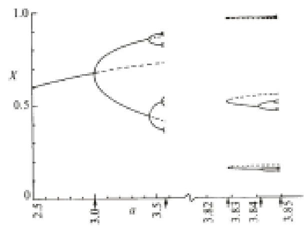
数学建模

# 混沌

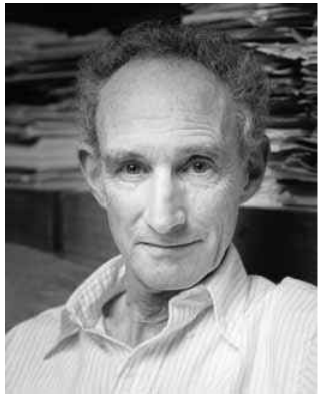
- 混沌
  - 在1974年普林斯顿大学的May教授最后一天在马里兰大学的演讲中，讲了Logistic模型的迭代：当参数从小到大变化时其迭代点序列之性态将变得愈来愈复杂。他十分困惑于对这一现象的解释，想像中也许是计算上的误差所造成的
  - Yorke听完May的演讲后， 在送他上飞机时， 把李天岩桌上躺了将近一年的文章给他看。 May看了文章的结果之后，极为吃惊，并认定此定理大大解释了他的疑问
  - Yorke从机场回来后立即找到李天岩说，应该马上改写这篇文章。文章在两个星期内改写完毕，三个月后被《美国数学月刊》接受，并刊登在 1975 年 12月份的那一期上

**May RM. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261: 459-467, 1976.**

**Li TY, Yorke JA. Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly*, 82(10): 985-992, 1975.**



MATH T



**Robert McCredie May**

**（1936－ ）**

澳大利亚生物学家

英国政府首席科学顾问

**（UK GCSA）（1995-2000）**

# 混沌

- 混沌
  - 几年后的一天，在东柏林一个国际会议上做完报告后， Yorke和同行去逛市容。在一条游艇上，一个从未谋面、不期而至的苏联人突然走近了他，急于想与他交谈一下。这位Sharkovsky教授早十来年就证明了较Li-Yorke定理第一部分似乎更为一般的结果
- Sharkovsky定理
  - 任意正整数 $n$ 可唯一表示成 $n=2^s(2p+1)$ ，其中 $s,p\in\mathbb{N}$。所有正整数可据此排成一列，称为S型排序
  - 若实数轴一区间到其自身的连续函数 $f$ 具有 $k$ 周期点，在正整数S型排序中，$k$ 先于 $m$，则 $f$ 必有 $m$ 周期点

**Sharkovskii AN. Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself. *Ukrainian Mathematics Journal*, 16: 61–71, 1964.**

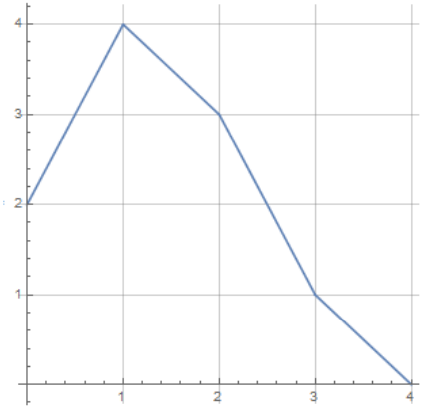
$$3,5,7,9,\cdots,$$

$$2\cdot3,2\cdot5,2\cdot7,2\cdot9,\cdots,$$

$$2^2\cdot3,2^2\cdot5,2^2\cdot7,2^2\cdot9,\cdots,$$

$$\cdots\cdots,$$

$$\cdots,2^5,2^4,2^3,2^2,2^1,1$$




有5周期点但无3周期点的函数

**Oleksandr Mykolayovych Sharkovsky**

**（1936－ ）**

乌克兰数学家


谢 谢