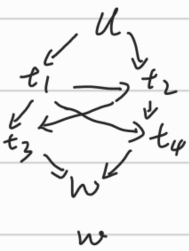
一. (1): $C^{A}/C^{OPT} \le \lim_{n\to\infty}\frac{np}{C+n\beta p}=\frac{1}{\beta}$ 当n充分大时.可以认为 $\frac{C^{A}}{C^{OPT}}=\frac{1}{\beta}$

当票价小于 $\frac{C}{1-\beta}$ 时.两人花费相同.当 $p>\frac{C}{1-\beta}$ 时.2同学花费更少.且若后续n日有购票需求.2同学也将少花费 $p(1-\beta)$.故乙的算法竞争比小.

(2): $\frac{1}{\beta}$

$p_1=\frac{C}{1-\beta}+\varepsilon$ 时.未买卡的算法被淘汰.因为 $\frac{C^{A}}{C^{OPT}}>\frac{1}{\beta}$.买卡的算法 $\frac{C^{A}}{C^{OPT}}\to\frac{1}{\beta}$

故 $\frac{1}{\beta}$ 为下界.



(3). G中有四类边

① u 到 $v_1,v_2,\cdots,v_s$.其中 $t_s\le T$. $uv_1=0$. $uv_i=\sum_{j=1}^{i-1}p_j$. $i=2,3,\cdots,s$.

② v_i 到 v_j $(j=i+s)$ $v_iv_j=\left(\sum_{k=i}^{j}p_k\right)\beta+C$, $\forall i$. 其中 $t_j-t_i=t_{i+s}-t_i\le T$.

③ $v_iv_{i+1}=p_i$, $\forall i$

④ v_i 到 w.其中 $i\in\{s,s+1,\cdots,n-1\}$.其中 $t_n-t_s\le T$.

$v_iw=\left(\sum_{j=i}^{n}p_j\right)\beta+C$ 但 $v_nw=p_n$.

则任一 $u\to v_{l_1}\to v_{l_2}\cdots\to v_{l_s}\to w$ 的路有如下含义.

①. $u\to v_{l_1}$.表示从买第 l_1 张票开始才购买中铁卡.故令 $uv_{l_1}=\sum_{j=1}^{l_1-1}p_j$.因为前 l_1-1 张为原价购买.

② $v_{l_i}\to v_{l_{i+1}}$.即 l_i 时未买中铁卡.则到下一次买卡前一直付原价.

③ $v_{l_i}\to v_{l_j}$.即在 l_i 时购买中铁卡.故后T天的票均以 βp_j 的价买入

④ $v_{l_i}\to w$.即中铁卡时长超过了最后一张车票的购票时间.故后n次均以 βp_j 的价买入.

⑤ $v_n\to w$.即最后n次票以原价买入.

二.

(1) 转化成一个赋权图的最大权匹配问题.

令 $G=(V,E)$ 其中 v_i 代表 (P_i,D_i). $v_iv_j\in E$ 代表夫偶 $(P_i,D_i)(P_j,D_j)$ 间效用.

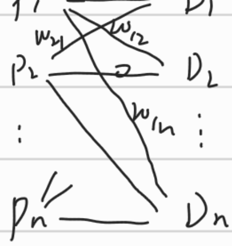
任一匹配S中的边 v_iv_j 表示夫偶 $(P_i,D_i)(P_j,D_j)$ 配对.没有邻边在S中的顶点.表示该夫偶无需再匹配

(2).即求G的一些无交子图 $G_1,G_2,\cdots,G_s$. $G_i=(V_i,E_i)$. s.t. 每个子图都是Hamiltonian图.

且所有子图的总权极大.

(3). 转化为G……的最大权匹配问题

(3). 转化为二分图最大权匹配问题.



在匹配 S 中. 故 $s=P_iD_i \in S$. 则表示 (P_i, D_i) 配对失效.

$s=P_iD_j$ 表示 D_j 肾脏移植给 P_i.