高等代数 II 测验题

学号____________________ 姓名____________________ 得分____________

1. 试求出多项式 $f(x)=x^4+px^2+q, g(x)=x^2+mx+1$ 的最大公因式. 试问系数满足什么条件时有 $g(x)\mid f(x)$？

2. 设 $P[x]$ 是数域 P 上的关于文字 x 的全体多项式所成的环，α,β 为两个互异复数. 令

$$W_1=\{f(x)\in P[x]\mid f(\alpha)=0\}, W_2=\{f(x)\in P[x]\mid f(\beta)=0\},$$

则 W_1,W_2 均为 $P[x]$ 的子空间.试写出 W_1+W_2 中的元素的表达式.

3. 设 V 是某数域上的有限维线性空间，σ 是 V 上的线性变换，试问 $V=K\mathrm{er}\,\sigma\oplus\mathrm{Im}\,\sigma$ 是否成立，若是，则请给出详尽的解答.若不是，则请给出使得它成立的条件(能给出充要条件吗？).

4. 设 V 是某数域上的有限维线性空间，σ 是 V 上的线性变换且

$$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s,$$

这里 $\sigma(V_i)\subset V_i, i=1,2,\cdots,s$. 若 $\sigma|_{V_i}$ 的特征多项式是 $f_i(x), i=1,2,\cdots,s$，试证明 σ 的特征多项式是 $f(x)=f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)$.

5. 试证明复数域上的方阵必可分解为两个对称矩阵的乘积.

6. 设 V 是某数域上的 n 维线性空间，f 是定义在 V 上的双线性非退化函数.取 V 上的 n 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,若已知矩阵 $\left(f(\alpha_i,\alpha_j)\right)_n$ 可逆,试问 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是否能构成 V 的基？无论您觉得结论如何，请给出尽可能详尽的理由。

7. 假设数域 P 上的反对称矩阵已知,试问您可以依据什么方法求出 P 上的矩阵 C 使得

$$C^TAC=\begin{pmatrix} B_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & B_m & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

这里 $B_1=\cdots=B_m=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，并依此方法求 C 使得

$$C^T\begin{pmatrix}0 & 2 & -1 & 3\\ -2 & 0 & 4 & -2\\ 1 & -4 & 0 & 1\\ -3 & 2 & -1 & 0\end{pmatrix}C=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & 1\\ & & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

8. $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ 可看成为 R^2 上的正交变换,试将它写成为镜面反射变换的乘积.