

一. (1):  $NW + |I|(V-W) = M_1$  其中  $V$  是伪币质量.

$$\sum_{i=1}^N p^i w + \sum_{i \in I} p^i (V-w) = M_2.$$

$$\text{有: } \sum_{i=1}^N p^i w + \sum_{i \in I} p^i \frac{M_1 - NW}{|I|} = M_2$$

$$(2): \text{令 } x_i = \begin{cases} 1 & i \in I \\ 0 & i \in I^c \end{cases} \quad u = V - w.$$

$$\text{则有: } \sum_{i=1}^N u x_i + NW = M_1. \quad \text{且 } \sum_{i=1}^N x_i u p^i + \sum_{i=1}^N p^i w = M_2$$

$$\Rightarrow x_1 p + x_2 p^2 + \dots + x_N p^N = \frac{M_2 - \sum_{i=1}^N p^i w}{M_1 - NW} (x_1 + x_2 + \dots + x_N)$$

若  $RHS \geq p^N$ . 则  $x_N = 1$ . 从而第  $N$  堆为假币堆. 不然则为真币堆.

$$i: \text{若 } x_N = 1. \text{ 则置 } LHS = x_1 p + \dots + x_{N-1} p^{N-1}. \quad RHS = \frac{M_2 - \sum_{i=1}^N p^i w}{M_1 - NW} (x_1 + \dots + x_{N-1}) - p^{N-1}.$$

再同法对  $x_{N-1}$  讨论.

$$ii: \text{若 } x_N = 0. \text{ 则 } LHS = x_1 p + \dots + x_{N-1} p^{N-1}. \quad RHS = \frac{M_2 - \sum_{i=1}^{N-1} p^i w}{M_1 - (N-1)w} (x_1 + \dots + x_{N-1}).$$

再同法对  $x_{N-1}$  讨论.

有限步终止.  $p$  要取加  $N$  大的数. s.t.  $(N-1)p^N - p^{N-1} + p > 0$ .  $p = N^2$

$p=2$  时. 若  $N > 2$ . 能与  $p^N$  作比较时无法判定加是否为 1.

2. (1): 若完全随机. 成功率  $p = (1/3)^n$

游戏开始时. 每人随机挑一个人组成队. 这样有  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  个队 (可能多一个). 然后依次去观察其它队. 若被观察的队号码是相同的. 再加入该队. 否则找其它队伍. 若所在队伍被加入. 则队伍中两人都保持不动 (说明至少此两人为同号). 待所有人决策一次.

一轮过后. 只会剩下: ① 队首部分号同但队尾最后一号不同的队列.

② 游离的单个同学.

此时. ① 中队尾同学顺队加入 ②. 现在大概只有少于 3 个的队在. 此时. 由于队中所有人都是同号. 因此只需观察其它队的号. 如果和队员的号一样则直接合并两队.

合并完成后. 游离的同学再次按上述方式选队. 选队时. 若上一同学加入队正确. 则依次选上一位同学加入的队.

最后只会剩下一人. 在三队中随机选取.

2) 按 (1) 中方式排后. 每个人都知晓队友的号码就可以.

