浙江大学2018 − 2019学年春夏学期

求是数学班《高等代数(II)》测验III

2019.05.31

1. 求下面线性方程组的“解”：

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=2, \\ x_1-2x_3+x_4=-1, \\ x_1-x_2+x_3+x_4=2. \end{cases}$$

2. 设 A 是正定阵, $A=U\Sigma V^*$ 是 A 的奇异值分解, 证明: $U=V$.

3. 设 A 是 n 阶正定阵, 向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 满足 $\beta_i^TA\beta_j=0(1\le i<j\le s)$. 试问向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 的秩可能是多少? 证明你的结论.

4. 设 A,B 为同阶正定阵, 若 $A>B$ (即 $A-B$ 是正定阵), 试问是否一定有 $A^2>B^2$? 为什么?

5. 设实二次型 $f(X)=X^TAX$, λ 是 A 的特征值. 证明: 存在非零向量 $\alpha=(k_1,\cdots,k_n)^T$, 使得 $f(\alpha)=\lambda(k_1^2+\cdots+k_n^2)$.

6. 设 f 是双线性型, 且对任意的 x,y,z 有

$$f(x,y)f(z,x)=f(y,x)f(x,z).$$

证明: f 是对称的或者反对称的.

7. 设 $M_{2r+1}(\mathbb{F})$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的全体 $2r+1$ 阶方阵组成的集合, 记

$$M=\begin{pmatrix} 2 & O & O \\ O & O & I_r \\ O & I_r & O \end{pmatrix}$$

是分块矩阵, 其中 I_r 是 r 阶单位阵. 设

$$W=\{X\in M_{2r+1}(\mathbb{F})|X^TM+MX=O\}.$$

对 $X\in W$, 设 $e^X=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{X^k}{k!}$. 已知: $e^X\in M_{2r+1}(\mathbb{F})$.

(1)求 $\dim W$ 和 W 的一组基;

(2)证明: 对任意的 $X\in W$ 都有 $\det\,(e^X)=1$;

(3)设列向量空间 $\mathbb{F}^{2r+1}$ 上的一个双线性型 f 关于标准基 $\{e_1,\cdots,e_{2r+1}\}$ 的矩阵表示为上述 M, 证明: 对任意的 $X\in W$ 和列向量 $\alpha,\beta\in\mathbb{F}^{2r+1}$, 都有

$$f(e^X\alpha,e^X\beta)=f(\alpha,\beta).$$