

2022-2023 夏随机过程 (1.5 学分) 回忆卷

余烬

2023 年 6 月 29 日

一、填空题 (每空 3 分, 共 33 分)

1. 已知 $X(t) = At + B$, A, B 独立同分布, A 服从 $(0, 1)$ 上的均匀分布, 则 $P\{X(1) \leq 1\} =$ _____, $P\{X(1) \leq 1 | X(0) \leq 0.5\} =$ _____, 计算 $X(t)$ 的自相关函数_____

2. 已知谱密度函数 $S_X(\omega) = \frac{\omega^2 + 5}{\omega^4 + 10\omega^2 + 9}$, 则自相关函数 $R_X(\tau) =$ _____, 均值 μ_X _____

3. 已知一个 markov 链的一步转移矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$ 和初始分布 $P\{X_0 = 0\} = P\{X_0 = 1\}$, 问 $f_{22}^{(3)} =$ _____, $p_{22}^{(3)} =$ _____, $P\{X_2 = 2\} =$ _____, $P\{X_0 = 1, X_2 = 2, X_3 = 2\} =$ _____

4. 已知一个非齐次泊松过程 $\lambda(t) = \begin{cases} 2 & 0 < t \leq 2 \\ 1 & t > 2 \end{cases}$, 问 $P\{N(2) = 2 | N(1) = 1\} =$ _____, $P\{N(3) = 3 | N(1) = 1\} =$ _____

二、已知标准布朗分布 $\{B(t); t \geq 0\}$, 求

(1) 求 $\text{CoV}(B(1), B(2))$

(2) 求 $B(2)$ 的概率密度函数

(3) 求 $P\{\min_{1 \leq t \leq 2} B(t) < -1 | B(1) = 1\}$

(4) 求 $P(B(1) \geq 1 | B(2) = 2)$

(5) 求 $E(B(2)B(4)B(6))$

三、某人在钓鱼，他只可能钓到鲫鱼或鳊鱼. 钓到鲫鱼的规律服从强度为 3 条/h 的泊松过程, 钓到鳊鱼的规律服从强度为 2 条/h 的泊松过程, 且这两个过程相互独立.

- (1) 计算此人在第 1 小时内钓到鱼的平均数量
- (2) 计算此人在第 1 小时内 1 条鱼都没钓到, 且在第 2 小时内至少钓到 1 条鱼的概率
- (3) 忘了
- (4) 已知此人在 2 小时内共钓到至多两条鱼, 求此人在第 1 小时内恰好钓到 1 条鲫鱼的概率。

四、设 $X(t) = B \sin(t - A)$, $P(B = 1) = P(B = 0) = 0.5$, A 服从 $(0, 1)$ 上的均匀分布.

- (1) 计算 $X(t)$ 的均值函数与自相关函数, 证明它是一个宽平稳过程
- (2) 计算 $X(t)$ 的谱密度函数
- (3) 计算 $\langle X(t) \rangle$, $\langle X(t)X(t + \tau) \rangle$.
- (4) 说明 $X(t)$ 是否是一个各态遍历过程.
- (5) 已知 $\mu_Y = 0$, $R_Y(\tau) = e^{-|\tau|}$, $X(t)$ 和 $Y(t)$ 两个过程相互独立, 求自相关函数和均值函数。

五、设 $\{X_n; n \leq 0\}$ 一个时齐的 Markov 链, 状态空间 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, 一步转移概率为: $p_{11} = p_{12} = p_{14} = p_{16} = p_{65} = p_{67} = \frac{1}{4}$, $p_{41} = p_{43} = p_{45} = \frac{1}{3}$, $p_{66} = p_{76} = p_{77} = \frac{1}{2}$, $p_{23} = p_{32} = p_{56} = 1$, 初始状态 $P\{X_0 = 1\} = P\{X_0 = 6\} = \frac{1}{2}$

- (1) 求出所有的互达等价类, 并指出哪些是闭的;
- (2) 求出各状态的周期和常返性;
- (3) 计算所有正常返态的平均回转时;
- (4) 对于一个集合 A , 设 $T_A = \min\{n : n \geq 0; X_n \in A\}$, 求 $P\{T_{\{5,6,7\}} < T_{\{2,3\}}\}$
- (5) 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 1)$ 和 $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 6)$