(i) 有有界可测函数 g 使 $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx<\varepsilon$,

(ii) 有连续函数 h 使 $\int_a^b |f(x)-h(x)|dx<\varepsilon$,

(iii) 有多项式 P 使 $\int_a^b |f(x)-P(x)|dx<\varepsilon$,

(iv) 有阶梯函数 S 使 $\int_a^b |f(x)-S(x)|dx<\varepsilon$.

证明. (i). 令 $f_k = f\cdot\chi_{\{|f|\le k\}}$. 则 $|f_k(x)-f(x)|\le|f(x)|$ 并且 $|f_k(x)-f(x)|\to 0$, a.e. 由控制收敛定理, $\int_a^b|f(x)-f_k(x)|dx\to 0(k\to\infty)$. 所以, 当 k_0 充分大时, $\int_a^b|f(x)-f_{k_0}(x)|dx<\varepsilon$. 取 $g(x)=f_{k_0}(x)$ 即可.

(ii). 由 (i), 存在有界可测函数 g 使 $\int_a^b|f(x)-g(x)|dx<\varepsilon/2$. 设 $|g(x)|\le M$. 由 Lusin 定理, 存在连续函数 h, 使 $m(\{h\neq g\})<\frac{\varepsilon}{4M}$ 并且 $\max|h(x)|\le M$. 这样

$$\begin{aligned}\int_a^b|f-h|dx &\le \int_a^b|f-g|dx+\int_a^b|g-h|dx\\ &\le \frac{\varepsilon}{2}+2M\cdot m(\{g\neq h\})\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+2M\cdot\frac{\varepsilon}{4M}=\varepsilon.\end{aligned}$$

注意到连续函数可由多项式或者阶梯函数一致逼近, (iii) 和 (iv) 类似可证.

提示: 同证明.

5. 设 $f\in L(\mathbb{R})$, 求证: 当 $k\to\infty$ 时

(i) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\cos kx dx\to 0$, $\int_{\mathbb{R}} f(x)\sin kx dx\to 0$,

(ii) $\int_{\mathbb{R}} f(x)|\cos kx|dx\to\frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$.

证明. (i) 因为 $|f(x)\cos kx|\le|f(x)|\in L(\mathbb{R})$, 所以存在 $a>0$ 使得 $\int_{|x|>a}|f(x)\cos kx|dx<\varepsilon/2$. 现讨论 $\int_{-a}^a f(x)\cos kx dx = I_k$, 若 $f(x)$ 是一个多项式, 则利用分别积分知 $I_k\to 0$. 对一般的 f, 利用题 (iii) 知 $I_k\to 0$, 由此得 $\int_{\mathbb{R}} f(x)\cos kx dx\to 0$, 对 $\int_{\mathbb{R}} f(x)\sin kx dx\to 0$ 可类似证.

(ii). 同理, 只需证明对任何 $-\infty<a<b<\infty$ 有

$$\int_a^b f(x)|\cos kx|dx\to\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)dx. \tag{4.3}$$

先设 $f(x)\equiv 1$, 此时由于 $|\cos kx|$ 以 π 为周期. 故

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\int_a^b|\cos kx|dx &= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\int_{ka}^{kb}|\cos x|dx\\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\left[\frac{k(b-a)}{\pi}\right]\int_0^\pi|\cos x|dx\\ &= \frac{2(b-a)}{\pi}=\frac{2}{\pi}\int_a^b dx.\end{aligned}$$

这样当 f 在 $[a,b]$ 中为常数时 (4.3) 成立. 从而 (*) 对 $[a,b]$ 上任何阶梯函数 f 成立. 再利用题 (iv), (4.3) 对一切 $f\in L(\mathbb{R})$ 成立.

提示: 无

6. 设 $0<\alpha<1$, 求证: $x^{-\alpha}\in L([0,1])$, 并求其积分值.

证明. 令 $f_n(x)=\begin{cases}x^{-\alpha}, & 1/n\le x\le 1\\ 0, & 0\le x<1/n\end{cases}$, 则

$$(L)\int_0^1 f_n(x)dx=(L)\int_{1/n}^1 x^{-\alpha}dx=(R)\int_{1/n}^1 x^{-\alpha}dx=\frac{1}{1-\alpha}\left[1-\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}\right]$$

又 $0\le f_n(x)\uparrow x^{-\alpha}$, 故由单调收敛定理知 $(L)\int_0^1 f_n(x)dx\to(L)\int_0^1 x^{-\alpha}dx$. 从而 $(L)\int_0^1 x^{-\alpha}dx=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left[1-\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}\right]=\frac{1}{1-\alpha}$.

提示: 无

7. 设 $f\in L(\mathbb{R}), f(0)=0, f'(0)$ 存在有限, 求证: $f(x)/x\in L(\mathbb{R})$.

证明. 由于 $f(x)/x\to f'(0)(x\to 0)$. 故 $f(x)/x$ 在 $(-\delta,\delta)$ 中有界. 故 $f(x)/x\in L((-\delta,\delta))$. 而当 $|x|\ge\delta$ 时, $|f(x)/x|\le|f(x)|/\delta$. 故 $f(x)/x\in L((-\infty,-\delta]\cup[\delta,\infty))$. 从而得证.

提示: 无

8. 设 f 在 $[0,1]$ 上非负可测. 若有 $p>0$ 使 $f^p\in L([0,1])$, 求证: 对任何 $q\in(0,p)$, 有 $f^q\in L([0,1])$.

证明.

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^q &= \int_{\{f\le 1\}}+\int_{\{f>1\}}\le m(\{f\le 1\})\int_{\{f>1\}}f^q\\ &\le m(\{f\le 1\})\int_{\{f>1\}}f^p<\infty.\end{aligned}$$

提示: 无

9. 对任何 $\lambda\in(a,b)$ 有 $f\in L((a,\lambda))$, 求证: 为使 $f\in L((a,b))$ 充要条件是极限 $\lim\limits_{\lambda\to b^-}\int_a^\lambda|f(x)|dx$ 存在有限, 而且当条件满足时, $\int_a^b|f(x)|dx=\lim\limits_{\lambda\to b^-}\int_a^\lambda|f(x)|dx$.

证明. 注意到 $\int_a^\lambda|f(x)|dx=\int_a^b|f(x)|\cdot\chi_{(a,\lambda)}(x)dx$, 由单调收敛定理可知结论成立.

提示: 同证明.

10. 设 f 和 $f_k(k \geq 1)$ 都属于 $L(\mathbb{R})$ 且 $|f_k(x)| \leq f(x)$. 求证:

$$\int_{\mathbb{R}} \varliminf_{k\to\infty} f_k(x)dx \leq \varliminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)dx \leq \varlimsup_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}} \varlimsup_{k\to\infty} f_k(x)dx$$

证明. 此时 $f(x) \pm f_k(x) \geq 0$. 故由 Fatou 定理,

$$\int_{\mathbb{R}} \varliminf_{k\to\infty} [f(x) \pm f_k(x)]dx \leq \varliminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} [f(x) \pm f_k(x)]dx$$

这样

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x)]dx + \int_{\mathbb{R}} \varliminf_{k\to\infty} f_k(x)dx &\leq \int_{\mathbb{R}} f(x)]dx + \varliminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)dx \\
\int_{\mathbb{R}} f(x)]dx + \int_{\mathbb{R}} \varliminf_{k\to\infty} [-f_k(x)]dx &\leq \int_{\mathbb{R}} f(x)]dx + \varliminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} [-f_k(x)]dx.
\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \varliminf_{k\to\infty} [-f_k(x)]dx &= -\int_{\mathbb{R}} \varlimsup_{k\to\infty} f_k(x)dx \\
\varliminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} [-f_k(x)]dx &= -\varlimsup_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} [-f_k(x)]dx
\end{aligned}$$

由此得证本题.

提示: 无

11. 设 $f \in L(E), E \subset \mathbb{R}$. 求证:

(i) $F(x) = \int_{(-\infty,x)\cap E} f(t)dt$ 是 x 的一致连续函数,

(ii) $I = \{\int_e f(x)dx : e$是 E 的可测子集$\}$ 是一个闭区间, 并描述该闭区间的两个端点.

证明. (i). 若 $x_1 < x_2$, 则 $F(x_2) - F(x_1) = \int_{[x_1,x_2)\cap E} f(t)dt$. 任给 $\varepsilon > 0$, 由积分绝对连续性, 存在 $\delta > 0$, 只要 $m(e) < \delta$, 就有 $\int_e |f(t)|dt < \varepsilon$. 因此, 当 $|x_2 - x_1| < \delta$ 时, $|F(x_1) - F(x_2)| < \varepsilon$. 所以 $F(x)$ 一致连续.

(ii). 令 $E_+ = \{f > 0\}$, $E_- = \{f < 0\}$. 由控制收敛定理,

$$F_+(x) := \int_{(-\infty,x)\cap E_+} f(t)dt \to \begin{cases} \int_{E_+} f(t)dt, & x \to \infty, \\ 0, & x \to -\infty, \end{cases}$$

再由 (i) 知 $F_+(x)$ 连续, 故 $F_+(x)$ 的值域包含 $(0, \int_{E_+} f(t)dt)$. 同理, $F_-(x) := \int_{(-\infty,x)\cap E_-} f(t)dt$ 的值域包含 $(\int_{E_-} f(t)dt, 0)$. 但对任何 $e \subset E$, $\int_{E_-} f \leq \int_e f \leq \int_{E_+} f$, 所以 (ii) 中的区间 $I = [\int_{E_-} f(t)dt, \int_{E_+} f(t)dt]$.

提示: 同证明.

12. 设在可测集 E 上非负可测函数列 $f_k \Rightarrow f$, 求证: $\int_E f(x)dx \leq \varliminf_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx$

证明. 取子列 $\{f_{k_s}\}$ 使 $\int_E f_{k_s}(x)dx = \lim_{s\to\infty} \int_E f_{k_s}(x)dx$, 由于 $f_k \Rightarrow f, (s \to \infty)$, 故有子列 $f_{k_{s_n}}(x) \to f(x)$, a.e. , 从而由 Fatou 定理

$$\begin{aligned}
\int_E f(x)dx &= \int_E \lim_{n\to\infty} f_{k_{s_n}}(x)dx \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_{k_{s_n}}(x)dx \\
&= \lim_{s\to\infty} \int_E f_{k_s}(x)dx = \varliminf_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx
\end{aligned}$$

提示: 无

13. 设 $\{n_k\}_{k\geq1}$ 是一列严格单增正整数. 求证: 使 $\{\sin n_k x\}_{k\geq1}$ 收敛的点集 E 是一个零测集.

证明. 只需证 $E = \{x \in [0, 2\pi] : \sin n_k x$收敛$\}$ 是零测集, 令

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{k\to\infty} \sin n_k x, & x \in E, \\ 0, & x \notin E, \end{cases}$$

则 $f(x)$ 是有界可测函数. 由习题 4.5, $\int_0^{2\pi} f(x)\sin n_k x dx \to 0$. 另一方面, 由控制收敛定理, $\int_0^{2\pi} f(x)\sin n_k x dx \to \int_E f(x)^2 dx$. 这样 $\int_E f(x)^2 dx = 0$. 故有零测集 $E_0 \subset E$, 使在 $F = E - E_0$ 上 $\sin n_k x \to 0$. 从而当 $x \in F$ 时, $\cos 2n_k x = 1 - 2\sin^2 n_k x \to 1$. 令 $g = \chi_F$. 由控制收敛定理, $\int_0^{2\pi} g(x)\cos 2n_k x dx = \int_F \cos 2n_k x dx \to \int_F dx = m(F)$. 而由习题 4.5, $\int_0^{2\pi} g(x)\cos 2n_k x dx \to 0$. 所以 $m(F) = 0$. 这样 $E = E_0 \bigcup F$ 是零测集.

提示: 同证明.

14. 设 $m(E) > 0$.

(i) 若对每一 $x \in E, a_n \cos nx + b_n \sin nx \to 0 (n \to \infty)$, 求证: $a_n \to 0, b_n \to 0$.

(ii) 若 $a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ 在 E 上绝对收敛, 求证: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| < \infty$.

证明. (i) 令 $f_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$. 任取 $x_1, x_2 \in E$, 则由 $f_n(x_1) \to 0$ 及 $f_n(x_2) \to 0$ 得知 $f_n(x_1)\sin nx_2 - f_n(x_2)\sin nx_1 = a_n \sin n(x_2 - x_1) \to 0$, 但 $m(E) > 0$, 故 $\{x_2 - x_1 : x_1, x_2\}$ 包含 0 的一个领域 $(-\delta, \delta)$. 从而对任何 $x \in (-\delta, \delta), a_n \sin nx \to 0$, 但使 $\sin nx \to 0$ 的 x 至多是一个零测集, 从而易知 $a_n \to 0$. 这样又有 $b_n \sin nx \to 0, x \in E$, 同理得知 $b_n \to 0$.

(ii) 首先 $a_n\cos nx+b_n\sin nx=r_n\cos(nx+\theta_n)$, 其中 $r_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$. 若 (ii) 中的级数在 E 上绝对收敛, 则存在 $F\subset E$ 使 $0<m(F)<\infty$, 并且 $\sum r_n|\cos(nx+\theta_n)|$ 在 F 上收敛于一个有界可测函数. 于是

$$\sum r_n\int_F|\cos(nx+\theta_n)|dx<\infty. \tag{4.4}$$

但 $\int_F|\cos(nx+\theta_n)|dx\ge\int_F\cos^2(nx+\theta_n)dx=\frac{1}{2}\int_F[1+\cos(2nx+2\theta_n)]dx$, 并且 $\int_F\cos(2nx+2\theta_n)dx=\cos(2\theta_n)\int_F\cos 2nxdx-\sin 2\theta_n\int_F\sin 2nx\to 0$, 所以当 n 充分大时, $\int_F|\cos(nx+\theta_n)|dx>m(F)/3>0$. 故由 (4.4) 知 $\sum r_n$ 收敛. 再从 $|a_n|+|b_n|\le\sqrt{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ 知 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|+|b_n|<\infty$.

提示: 无

15. 设 $f\in L([a,b])$, 而且对任何非负整数 k 有 $\int_a^b x^k f(x)dx=0$, 求证: $f(x)=0$, a.e.

证明. 由已知, 对任何多项式函数 $P(x)$, 有 $\int_a^b f(x)P(x)dx=0$.

设 g 为 $[a,b]$ 上的有界可测函数, $|g(x)|\le M$. 由 Lusin 定理, 对任何 $n\ge 1$, 存在 $[a,b]$ 上的连续函数 h_n, 使得 $|h_n(x)|\le M$ 并且 $m(\{g\ne h_n\})<1/n$. 取多项式 $P_n(x)$, 使得 $|h_n(x)-P_n(x)|\le 1/n$, $\forall x\in[a,b]$. 于是,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| &= \left|\int_a^b f(x)(g(x)-P_n(x))dx\right|\\ &\le \int_a^b|f(x)(g(x)-h_n(x))|dx+\int_a^b|f(x)(h_n(x)-P_n(x))|dx\\ &\le 2M\int_{\{g\ne h_n\}}|f(x)|dx+\frac{1}{n}\int_a^b|f(x)|dx.\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$, 由积分的绝对连续性, 得 $\int_a^b f(x)g(x)=0$.

令 $f_k=f\cdot\chi_{\{|f|\le k\}}$, $k\ge 1$, 则 f_k 是有界可测函数, 故 $\int_a^b f_k(x)f(x)dx=0$. 因为 $f_k(x)f(x)\ge 0$ 并且 $f_k(x)f(x)\uparrow f(x)^2$, a.e., 由单调收敛定理, $\int_a^b f(x)^2dx=0$. 所以, $f(x)=0$, a.e.

对于第二问, 以 $x^{k_0}f(x)$ 代替 $f(x)$ 即可.

提示: 同证明.

16. 设 $f\in L([-1,1])$, 则对任何 $[-1,1]$ 上偶连续函数 g 有 $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx=0$. 求证: 几乎处处有 $f(-x)=-f(x)$.

证明. $0=\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx\doteq\int_0^1[f(x)+f(-x)]g(x)dx$, 此式对任何 $[0,1]$ 上连续函数 g 成立. 从而几乎处处 $f(x)+f(-x)=0$, 即 $f(-x)=-f(x)$.

提示: 无

17. 设 $f\in L(\mathbb{R})$, 并且对任何有紧支集的连续函数 g 有 $\int_{\mathbb{R}}fgdx=0$. 求证: $f(x)=0$, a.e.

证明. 任取 $a<b$, 设 g 为 $[a,b]$ 上的连续函数. 对任何 $\varepsilon>0$, 令

$$h(x)=\begin{cases}0, & x\notin[a-\varepsilon,b+\varepsilon],\\ g(x), & x\in[a,b],\\ \text{线性}, & \text{其它}.\end{cases}$$

则 h 为紧支集连续函数. 于是,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| &= \left|\int_a^b f(x)g(x)dx-\int_{a-\varepsilon}^{b+\varepsilon}f(x)h(x)dx\right|\\ &\le \max_{x\in[a,b]}|g(x)|\cdot\int_{[a-\varepsilon,a]\cup[b,b+\varepsilon]}|f(x)|dx\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to 0$, 由积分的绝对连续性, $\int_a^b f(x)g(x)dx=0$. 由习题 15, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处为 0. 因为 a, b 是任意的, 所以结论成立.

另一证明: 设 $h(x)$ 是任一有界可积函数, $|h(x)|\le M$. 由定理 4.5.1, 对每一 $k\ge 1$, 存在紧支集连续函数 g_k 使 $|g_k(x)|\le M$ 并且 $\int_{\mathbb{R}}|h(x)-g_k(x)|dx<1/k$, $k\ge 1$. 从而 g_k 测度收敛于 h, 于是存在子列几乎处处收敛. 不妨设 $g_k(x)\to h(x)$, a.e. 则 $g_k(x)f(x)\to h(x)f(x)$, a.e. 并且 $|g_k(x)f(x)|\le M|f(x)|$. 由控制收敛定理, $\int_{\mathbb{R}}h(x)f(x)dx=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}}g_k(x)f(x)dx=0$. 以下与习题 15 类似.

提示: 同证明.

18. 设 $f\in L(\mathbb{R})$. 求证: $\int_{x_1}^{x_2}f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int_{ax_1+b}^{ax_2+b}f(x)dx$, 其中 $x_1<x_2, a\ne 0$.

证明. 若 f 是可测集 E 上的特征函数, 其中 $m(E)<\infty$, 则 $f(ax+b)$ 是可测集 $\frac{1}{a}E-b/a=\{\frac{x}{a}-b/a: x\in E\}$ 上的特征函数, 先设 $a>0$. 由习题 2.28,

$$\begin{aligned}a\int_{x_1}^{x_2}f(ax+b)dx &= a\cdot m\left([x_1,x_2]\cap\frac{1}{a}E-\frac{b}{a}\right)=a\cdot m([ax_1,ax_2]\cap E-b)\\ &= m([ax_1+b,ax_2+b]\cap E)=\int_{ax_1+b}^{ax_2+b}f(x)dx\end{aligned}$$

同样对 $a<0$, 上式也成立. 故本题对特征函数成立. 从而对简单函数成立. 由此知对一切 $f\in L(\mathbb{R})$ 成立.

提示: 无

19. 设 $f\in L(\mathbb{R})$. 求证: $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|f(x+n)|$ 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处收敛.

证明.

提示: 无

$<\infty$

$\int_0^1\sum|f(x+n)| \stackrel{?}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)| = \sum_n\int_n^{n+1}|f(x)|$

20. 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上周期可测函数, T 是一个正周期, $f\in([0,T])$. 求证: $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \to \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt (x\to\infty)$

证明. 对任何正整数 $k\geq 1$, $\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)dt = \int_0^T f(t+kT)dt = \int_0^T f(t)dt$. 故若 $kT\leq x\leq (k+1)T$, 则 $1/T \geq k/x > \frac{k}{k+1}T, k/x \to 1/T(x\to\infty)$.

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^{kT} f(t)dt + \int_{kT}^x f(t)dt = k\int_0^T f(t)dt + \int_{kT}^x f(t)dt.$$

从而

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \frac{k}{x}\int_0^T f(t)dt + \frac{1}{x}\int_{kT}^x f(t)dt. \qquad (*)$$

由于 $|\int_{kT}^x f(t)dt| \leq \int_{kT}^x |f(t)|dt \leq \int_{kT}^{(k+1)T}|f(t)|dt = \int_0^T |f(t)|dt$. 从而由 $(*)$ 式知 $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \to \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$.

提示: 无

21. 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续, $\triangle_n(x) = n[f(x+1/n)-f(x)]$. 若对任何 $x\in\mathbb{R}, \triangle_n(x)\to 0$, 并且有常数 M, 使 $|\triangle_n(x)|\leq M$. 求证: f 是常数.

证明. 对任何有界区间 $[a,b]$, 由控制收敛定理,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b n\Big(f(x+\frac{1}{n})-f(x)\Big)dx = 0.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\int_a^b n\Big(f(x+\frac{1}{n})-f(x)\Big)dx &= n\int_a^b f(x+\frac{1}{n})dx - n\int_a^b f(x)dx\\ &= n\int_{a+1/n}^{b+1/n} f(x)dx - n\int_a^b f(x)dx\\ &= n\Big(\int_b^{b+1/n} f(x)dx - \int_a^{a+1/n} f(x)dx\Big) \to f(b)-f(a).\end{aligned}$$

所以, $f(a)=f(b)$. 既然 a,b 是任意的, 所以 f 是常数.

提示: 同证明.

22. 设 f 定义于可测集 E 上, 若对任何 $\varepsilon>0$, 有 $g_\varepsilon, h_\varepsilon \in L(E)$ 使 $g_\varepsilon(x)\leq f(x)\leq h_\varepsilon(x)$ 及 $\int_E |h_\varepsilon(x)-g_\varepsilon(x)|dx<\varepsilon$. 求证: $f\in L(E)$.

证明. 此时对任何 $k\geq 1$, 有 $g_k, h_k\in L(E)$ 使

$$g_k(x)\leq f(x)\leq h_k(x),\quad \int_E [h_k(x)-g_k(x)]dx < 1/k,\ k=1,2,\cdots.$$

令 $g(x)=\sup g_k(x)$, $h(x)=\inf h_k(x)$, 则 g 和 h 都可测, 并且 $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$. 此外 $\int_E h-g \leq \int_E h_k - g_k < 1/k \to 0$, 从而 $\int_E h-g=0$. 又 $h-g\geq 0$.

故 $h(x)=g(x)=f(x)$, a.e. 这样 f 可测. 又 $0\leq h_1-f\leq h_1-g_1$, 故 h_1-f 可积, 因此 $f=h_1-(h_1-f)$ 可积.

提示: 无

23. (控制收敛定理的推广) 设 $\{f_k\}$ 和 $\{g_k\}$ 是可测集 E 上的两列可测函数, 且 $|f_k(x)|\leq g_k(x)$. 今若 $f_k(x)\to f(x), g_k(x)\to g(x)$, a.e. , 并且 $\int_E g_k(x)dx \to \int_E g(x)dx<\infty$. 求证: $\int_E f_k(x)dx \to \int_E f(x)dx$

证明. $g_k(x)\pm f_k(x)\geq 0$. 由 Fatou 定理, $\int_E (g\pm f)dx \leq \varliminf_{k\to\infty}\int_E (g_k\pm f_k)dx = \int_E g dx + \varliminf_{k\to\infty}(\pm\int_E f_k dx)$. 由此得 $\int_E f(x)dx \leq \varliminf_{k\to\infty}\int_E f_k dx \leq \varlimsup_{k\to\infty}\int_E f_k dx \leq \int_E f(x)dx$

提示: 无

24. 设 $\{r_n\}_{n\geq 1}$ 是 $[0,1]$ 中有理数全体. 求证: $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2\sqrt{|x-r_n|}}<\infty$, a.e.

证明. 因为

$$\int_0^1\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2\sqrt{|x-r_n|}}dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{|x-r_n|}} = \sum_{n=1}^\infty \frac{2(\sqrt{r_n}+\sqrt{1-r_n})}{n^2}<\infty,$$

所以 $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2\sqrt{|x-r_n|}}<\infty$, a.e.

提示: 同证明.

25. 设 $f\in L(\mathbb{R}), a>0$, 求证: $n^{-a}f(nx)\to 0$, a.e.

证明.

$$\int_{\mathbb{R}}\sum_{n=1}^\infty \frac{|f(nx)|}{n^a}dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^a}\int_{\mathbb{R}}|f(nx)|dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{1+a}}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|dx<\infty.$$

故在 $\mathbb{R}$ 上, $\sum_{n=1}^\infty |f(nx)|/n^a$ 几乎处处收敛, 从而作为通项, $n^{-a}f(nx)\to 0$, a.e.

提示: 与 24 题类似.

26. 设 $f\in L([0,1]), \int_0^1 f(x)dx = a$. 求证: 对任何正整数 n, 有 $E\subset[0,1]$ 使 $m(E)=1/n$ 并且 $\int_E |f(x)|dx = a/n$.

证明. $\int_x^{x+1/n} f(t)dt$ 是 x 的连续函数. 容易证明既有 x 使 $F(x)\geq a/n$ 也有 x 使 $F(x)\leq a/n$. 从而有连续函数取中间值定理知有 x_0 使 $F(x_0)=a/n$. 这样只需取 $E=[x_0,x_0+1/n]$ 即可

提示: 无

27. 设 $\{E_k\}_{1\leq k\leq n}$ 是 $[0,1]$ 中的 n 个可测子集, 若 $[0,1]$ 中每一点至少属于这 n 个集中的 q 个集, 求证: 这些集中至少有一个的测度不小于 q/n.

time lapse

证明. 由已知, $\sum_{k=1}^n \chi_{E_k}(x) \ge q. \forall x \in [0,1]$. 所以 $\int_0^1 \sum_{k=1}^n \chi_{E_k}(x)dx \ge \int_0^1 q dx$. 因此 $\sum_{k=1}^n m(E_k) \ge q$, 从而至少有一个 k 使 $m(E_k) \ge q/n$.

提示: 同证明.

28. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负可测. 若有非负整数 k 使 $\int_0^1 f^k(x)dx = \int_0^1 f^{k+1}(x)dx = \int_0^1 f^{k+2}(x)dx < \infty$. 求证: 有可测集 $E \subset [0,1]$, 使 $f(x) = \chi_E(x)$, a.e.

证明. 由已知, $\int_0^1 f^k(x)(1-f(x))^2dx = 0$. 因为 f 非负, 所以 $f^k(x)(1-f(x))^2 = 0$, a.e. 若 $k=0$, 则 $f(x)=1$, a.e., 取 $E=[0,1]$ 即可. 若 $k \ge 1$, 令 $E = \{f=1\}$, 则当 $x \notin E$ 时 $f(x) = 0$, a.e. 故 $f(x) = \chi_E(x)$, a.e.

提示: 同证明.

29. 设 $f \in L([0,1])$ 并且只取正值, $0 < \lambda < 1$. 求证:

$$\inf\left\{\int_E f dx : E \subset [0,1], m(E) \ge \lambda\right\} > 0.$$

证明. 因为 $m(\{f < 1/n\}) \to 0 (n \to \infty)$, 所以存在某个 n_0 使 $m(\{f < 1/n_0\}) < \lambda/2$. 于是对任何 $E \subset [0,1]$. 当 $m(E) \ge \lambda$ 时, $E - \{f < 1/n_0\}$ 的测度不小于 $\lambda/2$. 所以 $\int_E f dx \ge \int_{E-\{f<1/n_0\}} f dx \ge \frac{1}{n_0} \cdot m(E - \{f < 1/n_0\}) \ge \frac{1}{n_0} \cdot \frac{\lambda}{2}$.

提示: 同证明.

30. 设 f 是 $[a,b]$ 上非负可积函数, $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是 $[a,b]$ 中一族闭子集, 使得对任何 $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, 或者 $F_{\lambda_1} \subset F_{\lambda_2}$, 或者 $F_{\lambda_1} \supset F_{\lambda_2}$. 今若对任何 $\lambda \in \Lambda$ 有 $\int_{F_\lambda} f(x)dx \ge 1$, 求证: $\int_{\bigcap F_\lambda} f(x)dx \ge 1$.

证明. 假设 $\int_{\bigcap F_\lambda} f(x)dx < 1$. 由积分绝对连续性, 存在开集 $G \supset \bigcap F_\lambda$ 使 $\int_G f(x)dx < 1$. 因为 F_λ 是有界闭集并且 $\bigcap F_\lambda \subset G$, 所以 $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 中存在有限个元使得它们的交是 G 的子集. 由条件知这有限个元中必有最小的, 即存在 $\lambda_0 \in \Lambda$ 使 $F_{\lambda_0} \subset G$. 这样 $\int_{F_{\lambda_0}} f(x)dx \le \int_G f(x)dx < 1$, 与题设矛盾.

提示: 同证明.

31. 设 $f \in L([0,1]), 0 < \lambda < 1$. 若对 $[0,1]$ 中任何测度为 λ 的集 E 有 $\int_E f dx = 0$. 求证: $f(x) = 0$, a.e.

证明. 设 $m(\{f > 0\}) > 0$, 则 $m(\{f < 0\}) > 0$. 取 $A_1 \subset \{f > 0\}$, $A_2 \subset \{f < 0\}$ 使 $0 < m(A_1) = m(A_2) < \min\{\lambda, 1-\lambda\}$. 再取 $B \subset [0,1] - (A_1 \cup A_2)$ 使 $m(B) + m(A_1) = \lambda$. 令 $E_1 = B \bigcup A_1$, $E_2 = B \bigcup A_2$, 则 $m(E_1) = m(E_2) = \lambda$. 从而 $0 = \int_{E_1} f dx - \int_{E_2} f dx = \int_{A_1} f dx - \int_{A_2} f dx > \int_{A_1} f dx > 0$, 矛盾.

提示: 同证明.

32. 上题中的条件"任何测度为 λ 的集"改成"任何测度为 λ 的开集", 结论如何?

证明. 由习题 2.12, 对任何测度为 λ 的集 E, 存在测度皆为 λ 的开集列 $\{G_n\}$ 使 $m(E \triangle G_n) \to 0$. 于是,

$$\left|\int_E f\right| = \left|\int_E f - \int_{G_n} f\right| = \left|\int_{E-G_n} f - \int_{G_n - E} f\right| \le \int_{E \triangle G_n} |f| \to 0.$$

所以 $\int_E f = 0$. 再由习题 4.31 知 $f(x) = 0$, a.e.

提示: 同证明.

33. 设 $m(E) < \infty$, f 在 E 上非负可测, 证明下列三件事等价 (i) $f \in L(E)$; (ii) $\sum_{k=1}^\infty 2^k m(\{f \ge 2^k\}) < \infty$; (iii) $\sum_{k=1}^\infty m(\{f \ge k\}) < \infty$.

证明. (i)⇒(ii). 设 $f \in L(E)$. 则 $m(\{f = \infty\}) = 0$. 令 $E_s = \{2^s \le f < 2^{s+1}\}$, 我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^\infty 2^k \cdot m(\{f \ge 2^k\}) &= \sum_{k=1}^\infty 2^k \sum_{s=k}^\infty m(E_s) \\
&= \sum_{s=1}^\infty \sum_{k=1}^s 2^k m(E_s) \le \sum_{s=1}^\infty 2^{s+1} m(E_s) \\
&\le \sum_{s=1}^\infty 2 \int_{E_s} f dx \le 2 \int_E f dx.
\end{aligned}$$

(ii)⇒(iii).

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^\infty m(\{f \ge k\}) &= \sum_{s=1}^\infty \sum_{k=2^s}^{2^{s+1}-1} m(\{f \ge k\}) \le \sum_{s=1}^\infty \sum_{k=2^s}^{2^{s+1}-1} m(\{f \ge 2^s\}) \\
&\le 4 \sum_{s=1}^\infty 2^s \cdot m(\{f \ge 2^s\}) < \infty.
\end{aligned}$$

(iii)⇒(i). 由 (iii) 知 $m(\{f = \infty\}) = 0$. 令 $F_s = \{s \le f < s+1\}$, 则

$$\begin{aligned}
\int_{\{f \ge 1\}} f &= \sum_{s=1}^\infty \int_{F_s} f \le \sum_{s=1}^\infty (s+1) \cdot m(F_s) \le m(E) + \sum_{s=1}^\infty s \cdot m(F_s) \\
&= m(E) + \sum_{s=1}^\infty m(\{f \ge s\}) < \infty.
\end{aligned}$$

再从 $m(E) < \infty$ 可知 $\int_{\{f<1\}} f < \infty$, 所以 $f \in L(E)$.

提示: 同证明.

34. 设 $m(E)<\infty$, f 在 E 上非负可测, 求证下面两条件是 $f\in L(E)$ 的必要条件: (i) $\sum_{k=1}^{\infty} m(\{f\ge k\})<\infty$; (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} m(\{f\ge 1/2^k\})/2^k<\infty$. 试问 (i) 或 (ii) 是否充分条件?

解. 设 $f\in L(E)$, 此时 $k\cdot m(\{f\ge k\})\le\int_{\{f\ge k\}} f\le\int_E f<\infty$. 故 $m(\{f\ge k\})<\infty$. 同样令 $F_s=\{s\le f<s+1\}$, 则 (此时 $m(\{f=\infty\})=0$)

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(\{f\ge k\})=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=k}^{\infty} m(F_s)=\sum_{s=1}^{\infty} s\cdot m(F_s)\le\sum_{s=1}^{\infty}\int_{F_s} f\le\int_E f<\infty.$$

此为 (i).

至于 (ii), 令 $E_s=\{1/2^{s-1}>f\ge 1/2^s\}$, 由于 $m(\{f\ge 1\})<\infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k$, 故只须征 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}m(\{1>f\ge 1/2^k\})<\infty$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot m(\{1>f\ge\frac{1}{2^k}\}) &= \sum_{k=1}^{\infty}[\frac{1}{2^k}\sum_{s=1}^{k} m(E_s)]\\ &= \frac{1}{2}\cdot m(E_1)+\frac{1}{2^2}[m(E_1)+m(E_2)]+\cdots+\frac{1}{2^k}\sum_{s=1}^{k} m(E_s)+\cdots\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{s=k}^{\infty}\frac{1}{2^s}\right)m(E_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2_{k-1}}\cdot m(E_k)=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2_k}\cdot m(E_k)\\ &\le 2\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f\le 2\int_E f<\infty\end{aligned}$$

最后 (i) 和 (ii) 都不是 $f\in L(E)$ 的充分条件.

对 (i) 取 $f(x)\equiv 1/2$, 则 f 满足 (i), 但 $f\notin L(\mathbb{R})$.

对 (ii) 取

$$f(x)=\begin{cases}\infty, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他 } x\end{cases}$$

则 f 满足 (ii), 但 $f\notin L(\mathbb{R})$.

提示: 无

35. 设 f 和 $f_k(k\ge 1)$ 都是 $L(E)$ 中的非负函数, 此外 $f_k(x)\to f(x)$, a.e., $\int_E f_k\to\int_E f$. 求证: 对 E 的任一可测子集 e 有 $\int_e f_k\to\int_e f$.

证明. 由 Fatou 定理,

$$\int_e f=\int_e\varliminf_{k\to\infty} f_k\le\varliminf_{k\to\infty}\int_e f_k$$ ①

所以

$$\begin{aligned}\int_E f-\int_e f &= \int_{E-e} f=\int_{E-e}\lim_{k\to\infty} f_k\le\varliminf_{k\to\infty}\int_{E-e} f_k\\ &= \varliminf_{k\to\infty}\left(\int_E f_k-\int_e f_k\right)=\int_E f-\varlimsup_{k\to\infty}\int_e f_k\end{aligned}$$ ②

从而 $\int_e f\ge\varlimsup_{k\to\infty}\int_e f_k\ge\varliminf_{k\to\infty}\int_e f_k\ge\int_e f$. 故结论成立.

提示: 用 Fatou 定理.

36. 设 f 和 $f_k(k\ge 1)$ 都是 $L(\mathbb{R})$ 中的函数, 而且对任何可测集 E, $\{\int_E f_k\}_{k\ge 1}$ 单增收敛于 $\int_E f$. 求证: $f_k(x)\to f(x)$, a.e.

证明. 若对某 k, $E=\{f_k>f_{k+1}\}$ 有正测度, 则 $\int_E f_k>\int_E f_{k+1}$, 与题设矛盾. 因此对任何 k, $f_k(x)<f_{k+1}(x)$, a.e. 同理对任何 k, $f_k(x)<f(x)$, a.e. 这样极限 $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$ 几乎处处存在有限且 $\le f(x)$. 又若 $E=\{\lim_{k\to\infty} f_k<f\}$ 有正测度, 则对任何 k, $\int_E f_k\le\int_E\lim_{k\to\infty} f_k<\int_E f$. 此与 $\int_E f_k\to\int_E f$ 矛盾. 这样 $f_k(x)\to f(x)$, a.e.

提示: 无

37. 设 $f\in L([0,1])$. 试构造 g, 使 $fg\in L([0,1])$ 且 $g(x)\to\infty(x\to 0^+)$.

解. 由积分性质, $\lim_{\lambda\to 0^+}\int_0^{\lambda}|f(x)|dx=0$. 因此, 存在 $\lambda_n\downarrow 0$, 使 $\int_0^{\lambda_n}|f(x)|dx<1/n^2$, $n\ge 1$. 令 $\lambda_0=1$, $g(x)=\sqrt{n}$, $\lambda_{n+1}<x\le\lambda_n$, $n\ge 0$. 则 $\lim_{x\to 0^+} g(x)=\infty$ 并且

$$\begin{aligned}\int_0^1|g(x)f(x)|dx &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\lambda_{n+1}}^{\lambda_n}|g(x)f(x)|dx=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\int_{\lambda_{n+1}}^{\lambda_n}|f(x)|dx\\ &< \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2}<\infty.\end{aligned}$$

提示: 同证明.

38. 给定收敛于 0 的实数列 $\{\alpha_k\}$, 构造在任一点皆不收敛的可积函数列 $\{\mu_k(x)\}$, 使 $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\int_{\mathbb{R}}\mu_k(x)dx$ 收敛.

证明. 把 $\{\alpha_k\}$ 分成两个无穷数列 $\{\alpha_{m_k}\}$ 和 $\{\alpha_{n_k}\}$, 使 $\sum_{k=1}^{\infty} 2k\alpha_{m_k}$ 收敛. 定义 $\mu_{n_k}(x)\equiv 0$, $\mu_{m_k}(x)=\chi_{[-k,k]}$. 则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\int_{\mathbb{R}}\mu_k(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{m_k}\int_{\mathbb{R}}\mu_{m_k}(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}2k\alpha_{m_k}<\infty,$$

但 $\{\mu_k(x)\}_{k\ge 1}$ 在 $\mathbb{R}$ 上任一点不收敛.

提示: 同证明.

39. 设 $E_k \subset [a,b]$, $m(E_k) \geq \delta > 0$, $k \geq 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| \chi_{E_k}(x) < \infty$, a.e. 求证: $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| < \infty$.

证明. 由已知, 存在 $E \subset [a,b]$, 使 $0 < m(E) < \delta/2$ 并且 $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| \chi_{E_k}(x)$ 在 E^c 上有界. 因为 $m(E^c) > (b-a) - \delta/2$, 所以 $m(E^c \bigcap E_k) \geq \delta/2$. 从而

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k| &\leq \sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k| m\left(E^c \bigcap E_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k| \int_{E^c} \chi_{E_k}(x)dx \\
&= \int_{E^c} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| \chi_{E_k}(x)dx < \infty.
\end{aligned}$$

提示: 同证明.

40. 设 $f \in L(a-1, b+1)$. 求证 $\int_a^b |f(x+h) - f(x)|dx \to 0 (h \to 0)$.

证明. 先设 $[a,b]$ 是有界区间. 此时存在连续函数 g 使 $\int_{a-1}^{b+1} |f - g|dx < \varepsilon/3$. 因为 g 在 $[a,b]$ 上一致连续, 所以存在 $\delta > 0$ 使 $|g(x+h) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$, $|h| < \delta$, $x \in [a,b]$. 于是当 $|h| < \delta$ 时,

$$\begin{aligned}
&\int_a^b |f(x+h) - f(x)|dx \\
\leq &\int_a^b \Big(|f(x+h) - g(x+h)| + |g(x+h) - g(x)| + |g(x) - f(x)|\Big)dx \\
= &\int_{a+h}^{b+h} |f(x) - g(x)|dx + \int_a^b |g(x+h) - g(x)|dx + \int_a^b |g(x) - f(x)|dx \\
< &\ \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.
\end{aligned}$$

当 $a = -\infty$, $b = \infty$ 时, $f \in L(\mathbb{R})$. 取 n 充分大, 使得 $\int_{|x|>n} |f(x+h) - f(x)|dx < \varepsilon/2$, $\forall |h| < 1$. 再由 $\lim_{h \to 0} \int_{-n}^{n} |f(x+h) - f(x)|dx = 0$ 可知当 h 充分小时, $\int_{-n}^{n} |f(x+h) - f(x)|dx < \varepsilon/2$. 所以结论成立.

提示: 同证明.

41. 设 f 和 g 在 $[a,b]$ 上都 R 可积, 而且在 $[a,b]$ 的一个稠子集上相等. 求证: 它们在 $[a,b]$ 上的积分相等.

证明. 此时 f 和 g 都在 $[a,b]$ 上几乎处处连续, 再有本题条件知 f 和 g 在 $[a,b]$ 上几乎处处相等. 从而 $(L)\int_a^b f = (L)\int_a^b g$, 于是 $(R)\int_a^b f = (R)\int_a^b g$.

提示: 无

42. 试给出 $E \subset [a,b]$ 的充要条件, 以使 χ_E 在 $[a,b]$ 上 R 可积.

证明. 易知 $(E^c \bigcap E') \bigcup (E \bigcap (E^c)')$ 是 χ_E 的不连续全体. 因此为使 χ_E 在 $[a,b]$ 上 R 可积, 充要条件是 $E^c \bigcap E'$ 和 $E \bigcap (E^c)'$ 都是零测集.

提示: 同证明.

43. 求 $[a,b]$ 中的零测集 Z, 使对 $[a,b]$ 上任何 R 可积函数 f, Z 中必有 f 的连续点.

证明. 取 G_δ 集 Z, 使 Z 包含 $[a,b]$ 中所有有理数且 $m(Z) = 0$. 由习题 1.56(iii), Z 是第二纲集. 任取 $[a,b]$ 上 R 可积函数 f, 设连续点全体为 E, 则
Why $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ 是一个 G_δ 集, 且 $m(E) = b - a$, $m(E^c) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n^c) = 0$, 从而每个 $\boxed{G_n^c = [a,b] - G_n}$ 都是闭零测集, 故是疏集, 于是 E^c 是第一纲集. 若 $Z \bigcap E = \emptyset$, 则 $Z \subset E^c$, Z 是第一纲集, 矛盾. 所以 $Z \bigcap E \neq \emptyset$.

提示: 同证明.

44. 设对每一 $x \in \mathbb{R}$, $f(x,y)$ 作为 y 的函数在 $[a,b]$ 上可积, 而对每一 $y \in [a,b]$, $f(x,y)$ 作为 x 的函数在 $\mathbb{R}$ 上可微. 此外有 $g \in L([a,b])$, 使对任何 $x \in \mathbb{R}$ 及 $y \in [a,b]$ 有 $|\frac{d}{dx} f(x,y)| \leq g(y)$. 求证: 对任何 $x \in \mathbb{R}$ 有 $\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,y)dy = \int_a^b \frac{d}{dx} f(x,y)dy$.

证明. 任取 $\Delta_n \neq 0$, $\Delta_n \to 0$, 此时对任何 $x \in \mathbb{R}$ 及 $y \in [a,b]$, 由微分中值定理, 有介于 x 和 $x + \Delta_n$ 之间的某个 ξ 使

$$\left|\frac{f(x+\Delta_n, y) - f(x,y)}{\Delta_n}\right| = \left|\frac{df(x,y)}{dx}\right|_{x=\xi} \leq g(y).$$

又 $\frac{f(x+\Delta_n,y) - f(x,y)}{\Delta_n} \to \frac{d}{dx} f(x,y)$. 故由控制收敛定理

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,y)dy &= \lim_{\Delta_n \to 0} \frac{1}{\Delta_n}\left[\int_a^b f(x+\Delta_n, y)dy - \int_a^b f(x,y)dy\right] \\
&= \lim_{\Delta_n \to 0} \int_a^b \frac{f(x+\Delta_n, y) - f(x,y)}{\Delta_n}dy \\
&= \int_a^b \frac{d}{dx} f(x,y)dy.
\end{aligned}$$

提示: 无

45. 设 f 和 g 都是可测集 E 上几乎处处有限的非负可测函数. 令 $E_y = \{x : g(x) \geq y\}$, $F(y) = \int_{E_y} f(x)dx$. 求证: $\int_0^{\infty} F(y)dy = \int_E f(x)g(x)dx$.

证明.

$$\int_0^{\infty} F(y)dy = \int_0^{\infty} dy \int_{E_y} f(x)dx = \int_E \int_0^{\infty} f(x)\chi_{E_y}(x)dxdy$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_E f(x)dx \int_0^\infty \chi_{E_y}(x)dy \\
&= \int_E f(x)dx \int_0^{g(x)} dy = \int_E f(x)g(x)dx.
\end{aligned}
$$

提示: 无

46. 设 $f(x,y)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上可积. 求证:

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x,y)dx.$$

证明. 令 $E=\{(x,y): 0\le y\le x\le 1\}$, 则 E 的特征函数 $\chi_E(x,y)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上可积, 这样

$$
\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\chi_E(x,y)dxdy &= \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\chi_E(x,y)dy \\
&= \int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy \\
\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\chi_E(x,y)dxdy &= \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\chi_E(x,y)dx \\
&= \int_0^1 dy \int_y^1 f(x,y)dx.
\end{aligned}
$$

提示: 无

47. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续且 $f(x)\le g(x)$. 令 $E=\{(x,y): x\in[a,b], f(x)\le y\le g(x)\}$. 今若 $h(x,y)\in L(E)$. 求证: $\int_E h(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} h(x,y)dy$.

证明. 事实上

$$
\begin{aligned}
\int_E h(x,y)dxdy &= \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\chi_E(x,y)dxdy \\
&= \int_a^b dx \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\chi_E(x,y)dy \\
&= \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} h(x,y)dy.
\end{aligned}
$$

提示: 无

48. 求所有实数 p, 使 $(1-xy)^p\in L([0,1]\times[0,1])$.

解. 因为 $1-xy\ge 0$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上非负可测, 所以 $\int_0^1\int_0^1(1-xy)^p dxdy = \int_0^1 dx\int_0^1(1-xy)^p dy$.

当 $p\ge 0$ 时, $(1-xy)^p$ 是 $[0,1]\times[0,1]$ 上的有界连续函数, 故可积.

当 $-1<p<0$ 时, $(1-xy)^p\le(1-x)^p$, 所以 $(1-xy)^p$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上可积.

当 $p=-1$ 时, $\int_0^1 dx\int_0^1\frac{dy}{1-xy} = \int_0^1\frac{\ln(1-x)}{-x}dx = \sum_{n=1}^\infty\int_0^1\frac{x^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^\infty 1/n^2 = \pi^2/6$, 可积.

当 $p<-1$ 时, 设 $p=-1-\alpha$, 则

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 dx\int_0^1(1-xy)^p dy &= \int_0^1 \left.\frac{(1-xy)^{p+1}}{-(p+1)x}\right|_{y=0}^1 dx \\
&= \int_0^1 \frac{1-(1-x)^{p+1}}{(p+1)x}dx \\
&= \int_0^1 \frac{1-(1-x)^\alpha}{\alpha x(1-x)^\alpha}dx \ge \frac{1-(1/2)\alpha}{\alpha}\int_{1/2}^1\frac{dx}{(1-x)^\alpha}.
\end{aligned}
$$

所以, 当 $\alpha\ge 1$, 即 $p\le -2$ 时, $(1-xy)^p$ 不可积. 当 $0<\alpha<1$, 即 $-2<p<-1$ 时, $(1-xy)^p$ 可积.

综上所述, 当且仅当 $p>-2$ 时 $(1-xy)^p\in L([0,1]\times[0,1])$.

提示: 当且仅当 $p>-2$ 时 $(1-xy)^p\in L([0,1]\times[0,1])$.

49. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可测且有周期 1. 此外有 $M>0$, 使对任何 $x\in\mathbb{R}$ 有 $\int_0^1|f(x+t)-f(t)|dt\le M$, 求证: $f\in L([0,1])$.

证明. 由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上几乎处处有限, 从而有 $[0,1]$ 中的正测度集 E 使 $\int_E|f(x)|dx<\infty$. 现由题设可知, 对任何 $x\in\mathbb{R}$, $\int_0^1|f(x+t)-f(t)|dt\le M$. 固而对任何 $x\in\mathbb{R}$ 有

$$\int_E|f(x+t)|dt\le M+\int_E|f(x)|dt.$$

由 Tonell 定理, $\int_E dt\int_0^1|f(x+t)|dx = \int_0^1 dx\int_E|f(x+t)|dt<\infty$. 由于 $m(E)>0$, 故至少有一个 t_0 使 $\int_0^1|f(x+t_0)|dx<\infty$. 再由 f 有周期 1 知 $\int_0^1|f(x)|dx<\infty$, 即 $f\in L([0,1])$.

提示: 无

50. 设 $f\in L([0,1])$, $\int_0^1 f(x)dx\ne 0$. 求 g, 使 $fg\in L([0,1])$, $fg^2\notin L([0,1])$.

解. 由已知, $\int_0^1|f(x)|dx>0$. 取 $E_1\subset[0,1]$ 使 $0<\int_{E_1}|f(x)|dx\le\frac{1}{2}\int_0^1|f(x)|dx$, 取 $E_2\subset[0,1]-E_1$, 使 $0<\int_{E_2}|f(x)|dx\le\frac{1}{4}\int_0^1|f(x)|dx$, ..., 取 $E_n\subset[0,1]-\bigcup_{k=1}^{n-1}E_k$, 使 $0<\int_{E_n}|f(x)|dx\le\frac{1}{2^n}\int_0^1|f(x)|dx$. 一直这样下去, 得到 $[0,1]$ 中一列两两不交的可测集列 $\{E_n\}_{n\ge1}$ 使 $I_n=\int_{E_n}|f(x)|dx>0$. 由于 $\sum I_n\le\int_0^1|f(x)|dx<\infty$, 所以 $I_n\to0$. 从而存在子列 $\{I_{n_k}\}_{k\ge1}$ 使 $\sum_{k=1}^\infty I_{n_k}^{1/2}<\infty$. 此时, $\sum_{k=1}^\infty I_{n_k}<\infty$. 令 $g=\sum_{k=1}^\infty I_{n_k}^{-1/2}\chi_{E_{n_k}}$. 则

$$\int_0^1|f(x)g(x)|dx = \sum_{k=1}^\infty\int_{E_{n_k}}|f(x)g(x)|dx=\sum_{k=1}^\infty I_{n_k}^{1/2}<\infty,$$

$$\int_0^1|f(x)g(x)^2|dx = \sum_{k=1}^\infty\int_{E_{n_k}}|f(x)g(x)^2|dx=\sum_{k=1}^\infty 1=\infty.$$

提示: 同证明.

51. 设 $f\in L(\mathbb{R})$. 求证: 当下两条件之一满足时, $f(x)=0$, a.e.

(i) 对任何测度为 1 的开集 G, $\int_G f=0$.

(ii) 对任何开集 G, $\int_G f=\int_{\bar{G}}f$.

证明. 设 (i) 满足, 则对任何 $x\in\mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^x f(t)dt=\sum_{k=0}^\infty\int_{x-k-1}^{x-k}f(t)dt=0$. 于是当 $x<y$ 时, $\int_x^y f(t)dt=\int_{-\infty}^y f(t)dt-\int_{-\infty}^x f(t)dt=0$. 从而对任何开集 G 有 $\int_G f=0$. 再由积分的绝对连续性可得对任何可测集 E, 有 $\int_E f(t)dt=0$. 所以 $f(x)=0$, a.e.

设 (ii) 满足, $I=[a,b]$ 是一个区间, $\{r_n\}_{n\ge1}$ 为 (a,b) 中有理数全体. 对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $m(E)<\delta$ 时, $|\int_E fdx|<\varepsilon$. 取 (a,b) 中开集 G 使 $\{r_n\}_{n\ge1}\subset G$ 且 $m(G)<\delta$. 则

$$\left|\int_a^b fdx\right|=\left|\int_{\bar{G}}fdx\right|=\left|\int_G fdx\right|<\varepsilon.$$

因此 $\int_a^b fdx=0$. 于是对任何开集 G 有 $\int_G fdx=0$. 从而对任何可测集 E 有 $\int_E fdx=0$. 故 $f(x)=0$, a.e.

提示: 同证明.

52. 设 $\{A_n\}_{n\ge1}$ 是一列可测集, $\sum_{n=1}^\infty m(A_n)<\infty$. 令

$$G_k=\{x:\{A_n\}_{n\ge1}\text{中有且只有 } k \text{ 项包含 } x\},k=1,2,\cdots$$

求证: G_k 可测且 $\sum_{n=1}^\infty k\cdot m(G_n)=\sum_{n=1}^\infty m(A_n)$.

证明. 令

$$f(x)=\sum_{n=1}^\infty\chi_{A_n}(x),x\in A=\cup_{n=1}^\infty A_n$$

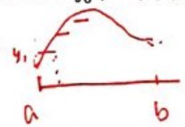
则 $f(x)$ 是 A 上的非负可测函数, $\int_A f(x)dx=\sum_{n=1}^\infty m(A_n)<\infty$, 故 $f(x)$ 在 A 上几乎处处有限. 现在 $G_k\{f=k\}$, 故 G_k 可测. 此外

$$\int_A f(x)dx=\sum_{k=1}^\infty\int_{\{f=k\}}f(x)dx=\sum_{k=1}^\infty k\cdot m(\{f=k\})=\sum_{k=1}^\infty k\cdot m(G_k)$$

由此得证本题.

提示: 无

53. 设 $f\in L([0,1])$, $E=\{x\in[0,1]:f(x)\text{是整数}\}$. 求证: $\int_0^1|\cos(\pi f(x))|^n dx\to m(E)$, $n\to\infty$.



证明. 控制收敛定理.

提示: 无

54. 设 $f\in L(\mathbb{R})$, $g(x)=f(x-1/x)$, 求证: $g\in L(\mathbb{R})$ 且 $\int_{\mathbb{R}}f=\int_{\mathbb{R}}g$.

$\frac{b-(b^2+4)^{\frac{1}{2}}}{2}$ × $\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$

证明. 设 I 是一个有界区间 $[a,b]$, 则

$$\left\{x:x-\frac{1}{x}\in[a,b]\right\}=I_1\bigcup I_2,$$

其中 $I_1=(\frac{a+(a^2+4)^{1/2}}{2},\frac{b+(b^2+4)^{1/2}}{2})$, $I_2=(\frac{a-(a^2+4)^{1/2}}{2},\frac{b-(b^2+4)^{1/2}}{2})$, 并且 $\ell(I)=b-a=\ell(I_1)+\ell(I_2)$. 这样若 f 是 I 上的特征函数, 则

$$\int_{\mathbb{R}}g(x)dx = \int_{\mathbb{R}}f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\int_{x-1/x\in I}dx=\int_{I_1\bigcup I_2}dx=\ell(I_1)+\ell(I_2)$$
$$= \ell(I)=\int_{\mathbb{R}}f(x)dx.$$

因此若 f 是有界区间上的阶梯函数, 结论成立.

若 f 是紧支集连续函数, 则存在阶梯函数列 $f_n(x)$ 使 $|f_n(x)|\le|f(x)|$, $f_n(x)\to f(x)$. 由控制收敛定理,

$$\int_{\mathbb{R}}g(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}g_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f_n(x)dx=\int_{\mathbb{R}}f(x)dx.$$

因为可积函数可以用紧支集连续函数来逼近, 所以结论成立.

提示: 同证明.

55. 设 $f \in L([0,1])$ 且非负, $\int_0^1 |f(x)|dx > 0. 0 < \alpha \le 1$. 试求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 n\ln[1+(f(x)/n)^\alpha]dx$

解. (i). 当 $\alpha = 1$ 时, 因为当 $x \ge 0$ 时 $\ln(1+x) \le x$, 所以 $n\ln(1+f(x)/n) \le f(x)$ 且 $n\ln(1+f(x)/n) \to f(x)$. 由控制收敛定理知极限为 $\int_0^1 f(x)dx$.

(ii). 当 $0 < \alpha < 1$ 时, $n^\alpha \ln(1+(f(x)/n)^\alpha) \le f(x)^\alpha \in L([0,1])$. 由控制收敛定理, $\int_0^1 n^\alpha \ln[1+(f(x)/n)^\alpha]dx \to \int_0^1 f(x)^\alpha dx > 0$. 所以 $\int_0^1 n\ln[1+(f(x)/n)^\alpha]dx = n^{1-\alpha}\int_0^1 n^\alpha \ln[1+(f(x)/n)^\alpha]dx \to \infty$.

注: 当 $\alpha > 1$ 时, 不能保证 $\ln[1+(f(x)/n)^\alpha] \in L([0,1])$. 例如, 取 $f(x) = x^{-1/2}$, 则 $\ln[1+(f(x)/n)^2] = \ln(1+\frac{1}{n^2x}) \ge \frac{1}{2n^2x} \notin L([0,1])$. 所以当 $\alpha > 1$ 时, 无法讨论题中的极限.

提示: 同证明.

56. 设 $f \in L([0,1])$. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+e^{nf(x)})dx$ 是否存在? 存在时求此极限.

解.

$$\frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+e^{nf(x)})dx = \frac{1}{n}[\int_{f\le 0} + \int_{f>0}] \le \frac{1}{n}\int_{f\le 0}\ln 2dx + \frac{1}{n}\int_{f>0}.$$

又当 $f(x) > 0$ 时,

$$\frac{1}{n}\ln(1+e^{nf(x)}) \le \frac{1}{n}\ln(e^{nf(x)}+e^{nf(x)}) = \frac{\ln 2}{n} + f(x) \le 1 + f(x).$$

则

$$\frac{1}{n}\ln(1+e^{nf(x)}) \to f(x).$$

从而 $\frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+e^{nf(x)})dx \to \int_{f>0} f(x)$.

提示: 无

57. 对 $[0,1]$ 中任何两个可测集 A 和 B 定义 $\rho(A,B) = \int_0^1 |\chi_A - \chi_B|dx$. 现若 $[0,1]$ 中的可测集列 $\{A_n\}_{n\ge1}$ 满足 $\rho(A_m, A_n) \to 0, (m, n \to)$, 求证: $[0,1]$ 中有可测集 A 使 $\rho(A_n, A) \to 0$.

证明. 对任何 $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}\delta \cdot m(\{|\chi_{A_m} - \chi_{A_n}| \ge \delta\}) &\le \int_{\{|\chi_{A_m}-\chi_{A_n}|\ge\delta\}} |\chi_{A_m} - \chi_{A_n}|dx \\ &\le \rho(A_m, A_n) \to 0, \quad m, n \to \infty.\end{aligned}$$

所以 $\{\chi_{A_n}\}_{n\ge1}$ 是测度基本列, 从而测度收敛于 $[0,1]$ 上的某个可测函数 f. 故有子列几乎处处收敛于 f. 从而存在可测集 $A \subset [0,1]$ 使 $f(x) = \chi_A(x)$, a.e.

由控制收敛定理知 $\rho(A_{n_k}, A) \to 0$. 再从 $\rho(A_n, A) \le \rho(A_n, A_{n_k}) + \rho(A_{n_k}, A)$ 知 $\rho(A_n, A) \to 0$.

提示: 同证明.

58. 设在 (a,b) 上 $f_k(x) \to f(x), f_k'(x) \to F(x)$, 其中 f_k, f_k', f, f', F 都连续 $(k \ge 1)$. 求证: $f'(x) = F(x), \forall x \in (a,b)$.

证明. 任取 $[c,d] \subset (a,b)$. 令 $A_n = \{x \in [c,d] : |f_k'(x) - F(x)| \le 1, k \ge n\}$. 由于 f_k' 和 F 都连续, 故 A_n 是闭集而且 $\bigcup A_n = [c,d]$. 又 $[c,d]$ 是第二纲集. 故必有谋 n_0 使 A_{n_0} 不是疏集, 因此有 $[c,d]$ 的某子区间 $[p,q]$, 使 A_{n_0} 在 $[p,q]$ 中稠. 从而 $\{f_k'(x)\}_{k\ge1}$ 在 $[p,q]$ 上一致有界. 从而由控制收敛定理知 $\int_p^x f_k'(t)dt \to \int_p^x F(t)dt, \forall x \in [p,q]$. 但

$$\int_p^x f_k'(t)dt = f_k(x) - f_k(p) \to f(x) - f(p) = \int_p^x f'(t)dt$$

因此 $\int_p^x f'(t)dt = \int_p^x F(t)dt, \forall x \in [p,q]$. 从而 $f'(x) = F(x), x \in [p,q]$. 又 $[c,d]$ 是 (a,b) 中任一区间. 所以在 (a,b) 的一个稠子集上有 $f'(x) = F(x)$. 再由 f' 和 F 的连续性, 处处有 $f'(x) = F(x)$.

提示: 无

59. 设 φ 在可测集 E 上可测. 若对任何 $f \in L(E), \varphi f \in L(E)$, 求证: 有零测集 $E_0 \subset E$, 使 φ 在 $E - E_0$ 上有界.

证明. 不妨设 $m(E) > 0$. 由条件易知 $m(\{|\varphi| = \infty\}) = 0$. 令 $A_k = \{k \le |\varphi| < k+1\}, k \ge 0$.

为证结论成立, 只需证明使 $m(A_k) > 0$ 的 k 只有有限多个.

反证. 设 $m(A_{k_n}) > 0, n \ge 1$, 则存在可测子集 $B_{k_n} \subset A_{k_n}$ 使 $0 < m(B_{k_n}) < \infty$. 令 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 m(B_{k_n})} \cdot \chi_{B_{k_n}}$, 则 $\int_E f(x)dx = \sum 1/n^2 < \infty$. 但

$$\begin{aligned}\int_E \varphi(x)f(x)dx &= \sum_n \int_{B_{k_n}} \varphi(x)f(x)dx = \sum_n \frac{1}{n^2 m(B_{k_n})}\int_{B_{k_n}} \varphi(x)dx \\ &\ge \sum_n \frac{k_n}{n^2} \ge \sum \frac{1}{n} = \infty.\end{aligned}$$

矛盾.

提示: 同证明.

60. $L([a,b])$ 中的一族函数 $\mathscr{F}$ 称为有一致绝对连续, 若对任何 $\varepsilon > 0$, 有 $\delta > 0$, 使对任何测度小于 δ 的集 E 及任何 $f \in \mathscr{F}$ 有 $\int_E |f(x)|dx < \varepsilon$.

(i) 设 $\mathscr{F}\subset L([a,b])$ 有一致绝对连续性, 求证: $\{\int_a^b|f(x)|dx : f\in\mathscr{F}\}$ 有界, 并且对任何 $\varepsilon>0$, 有 $k>0$, 使对一切 $f\in\mathscr{F}$ 有 $\int_{|f|\geq k}|f(x)|dx<\varepsilon$.

(ii) 求证: 为使 $\mathscr{F}\subset L([a,b])$ 有一致绝对连续性, 充要条件是存在 $M>0$ 及 $[0,\infty)$ 上正值单增函数 $\varphi(\mu)$, 使 $\varphi(\mu)\to\infty,(\mu\to\infty)$, 并且对任何 $f\in\mathscr{F},\int_a^b|f(x)|\varphi(|f(x)|)dx<M$.

证明. (i) 对 $\varepsilon=1$, 有 $\delta>0$, 使 $\int_E|f(x)|dx<1,(m(E)<\delta,f\in\mathscr{F})$. 现把 $[a,b]n_0$ 等分, 使相邻的两分点的距离小于 δ. 则易知对任何 $f\in\mathscr{F})$ 有 $\int_a^b|f(x)|dx<n_0$. 从而 $\{\int_a^b|f(x)|dx : f\in\mathscr{F}\}$ 有界. 设 M 是它的一个上界.

其次对任何 $k>0,M>\int_a^b|f(x)|dx\geq k\cdot m(\{|f|\geq k\})$, 从而对任何 $f\in\mathscr{F},m(\{|f|\geq k\})\leq M/k$. 当 k 充分大时, $m/k<\delta$. 从而有 $k>0$, 使对一切 $f\in\mathscr{F})$ 有 $m(\{|f|\geq k\})<\delta$, 从而 $\int_E|f(x)|dx<\varepsilon$.

(ii) 设 $\mathscr{F}\subset L([a,b])$ 有一致绝对连续性. 取单减正数列 $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$, 使 $\sum\lambda_n<\infty$. 由 (i) 存在严格单增正整数列 $\{k_n\}_{n\geq 1}$ 使 $\int_{|f|\geq k_n}|f(x)|dx<\lambda_n^2,\forall f\in\mathscr{F},n\geq 1$. 令 $\varphi(\mu)=1/\lambda_n,k_n\leq\mu<k_{n+1},(n=0,1,\cdots,k_0=0)$. 此时对任何 $f\in\mathscr{F}$,

$$\begin{aligned}\int_a^b|f(x)|\varphi(|f(x)|)dx &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{k_n\leq|f|<k_{n+1}}|f(x)|\varphi(|f(x)|)dx\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\int_{k_n\leq|f|<k_{n+1}}|f(x)|dx\\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\int_{k_n\leq|f|}|f(x)|dx\\ &< \frac{M}{\lambda_0}+\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n.\end{aligned}$$

其中 M 是 (i) 中 $\{\int_a^b|f(x)|dx : f\in\mathscr{F}\}$ 的一个上界. 此为必要性.

为证充分性, 设 $\varphi(\mu)$ 如 (ii) 中描述. 此时

$$\begin{aligned}\int_E|f(x)|dx &= \sum_{E\bigcap\{|f|<A\}}+\sum_{E\bigcap\{|f|\geq A\}}\\ &\leq A\cdot m(E)+\frac{1}{\varphi(A)}\int_{E\bigcap\{|f|\geq A\}}|f(x)|\varphi(|f(x)|)dx\\ &\leq A\cdot m(E)+\frac{M}{\varphi(A)}.\end{aligned}$$

即对任何 $E\subset[a,b],A>0$ 及 $f\in\mathscr{F}\}$ 有 $\int_E|f(x)|dx\leq A\cdot m(E)+\frac{M}{\varphi(A)}$. 现取 $A_0>0$, 使 $M/\varphi(A_0)$ (因此 $\varphi(\mu)\to\infty,(\mu\to\infty)$). 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2A_0}$, 则对任何

$m(E)<\delta$, 对一切 $f\in\mathscr{F}\}$ 有

$$\int_E|f(x)|dx\leq A_0\cdot m(E)+\frac{M}{\varphi(A_0)}<A_0\frac{\varepsilon}{2A_0}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

故 $\mathscr{F}$ 一致绝对连续.

提示: 无

第五章部分习题参考答案与提示

1. 证明定理 5.2.2.

证明.

提示: 无

2. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单增有界, 求证 $f'(x)\in L(\mathbb{R})$.

证明.

提示: 无

3. (Fubini) 设 $f_n(x)$ $(n\ge 1)$ 都是 $[a,b]$ 单增 (减) 实值函数, 而且对每一 $x\in[a,b]$, $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 收敛, 则 $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n'(x), a.e.$.

证明. 先证 $\sum f_n'(x)<\infty$, a.e. 事实上, 令

$$E=\{x\in[a,b]: s'(x)\text{和}f_n'(x)\text{存在有限}, n\ge 1\}.$$

则 $m(E)=b-a$, 并且当 $x\in E$ 时, $s'(x)\ge 0, f_n'(x)\ge 0 (n\ge 1)$. 这样当 $x\in E$ 时, 对一切 $n\ge 1$, 有 $\sum_{k=1}^{n}f_k'(x)\le\sum_{k=1}^{n}f_k'(x)+[\sum_{k=n+1}^{\infty}f_k(x)]'=s'(x)$. 由此对 $x\in E$, $\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)\le s'(x)<\infty$.

现在不妨设 $f_n(a)=0, s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}f_k(x)(n\ge 1)$. 则对每一 $n\ge 1, s(x)-s_n(x)$ 是 x 的非负单增函数. 这样 $0\le s(x)-s_n(x)\le s(b)-s_n(b)\to 0(n\to\infty)$. 因此有子列 $\{n_k\}$, 使 $0\le s(x)-s_{n_k}(x)\le s(b)-s_{n_k}(b)<\frac{1}{2^k}(k\ge 1, x\in[a,b])$. 令

$$g_k(x)=s(x)-s_{n_k}(x),\ k=1,2,\cdots$$

则 $g_k(k\ge 1)$ 都是 $[a,b]$ 上实值单增函数. 而且 $\sum g_k(x)$ 对每一 $x\in[a,b]$ 收敛. 于是由已证, $\sum g_k'(x)$ 几乎处处收敛, 从而 $g_k'(x)\to 0$, a.e. $(k\to\infty)$ 或 $s_{n_k}'(x)\to s'(x)$, a.e. 于是易知同样有 $s_n'(x)\to s'(x)$, a.e. $(n\to\infty)$, 即 $\sum f_n'(x)=s'(x)$, a.e.

提示: 无

4. 设 $\{r_n\}_{n\ge 1}$ 是 $(0,1)$ 中有理数全体, $f(x)=\sum\limits_{\{n:r_n<x\}}2^{-n}$, $x\in[0,1]$, $f(0)=0$. 求证

(i) f 严格单增; (ii) f 在每一点左连续; (iii) f 的不连续点全体即为 $\{r_n\}_{n\ge 1}$; (iv) $f'(x)=0$, a.e.

证明. $f(x_2)-f(x_1)=\sum\limits_{\{n:x_1\le r_n<x_2\}}2^{-n}>0$, $x_1<x_2$. 故 f 严格单增.

其次固定 $x\in[0,1]$. 则对任何 $y<x$, 令 $\eta_y=\min\{n: y\le r_n<x\}$, 则当 $y\to x^-$ 时, $\eta_y\to\infty$, 故 $f(x)-f(y)=\sum\limits_{\{n:y\le r_n<x\}}2^{-n}\to 0\ (y\to x^-)$. 因此 f 在点 x 左连续.

固定有理数 $r_{n_0}\in(0,1)$, 则对任何 $x>r_{n_0}$, $f(x)-f(r_{n_0})\ge 2^{-n_0}$, 从而 f 在 r_{n_0} 不右连续. 其次易证 f 在任何无理点处右连续. 故 f 的不连续点全体为 $(0,1)$ 中有理数全体 $\{r_n\}_{n\ge 1}$. (注 f 在 0 右连续, f 在 1 左连续.)

最后, $f(x)=\sum 2^{-n}\chi_{(r_n,1]}(x)$, 其中 $\chi_{(r_n,1]}$ 是 $(r_n,1]$ 上的特征函数, 它是 $[0,1]$ 上的单增函数, $\chi'_{(r_n,1]}(x)=0\ (x\ne r_n)$. 从而由 Fubini 定理 (题)

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\chi'_{(r_n,1]}(x)=0,\ a.e..$$

提示: 无

5. 设 f 在 $[0,a]$ 上有界变差, 求证 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$ $(F(0)=0)$ 在 $[0,a]$ 上也有界变差.

证明. 不妨设 f 单增. 此时若 $0<x_1<x_2<a$, 则

$$x_1\int_{x_1}^{x_2}f(t)\,dt\ge x_1(x_2-x_1)f(x_1)\ge(x_2-x_1)\int_0^{x_1}f(t)\,dt,$$

故 $x_1\int_0^{x_2}f(t)\,dt\ge x_2\int_0^{x_1}f(t)\,dt$, 即 $\frac{1}{x_2}\int_0^{x_2}f(t)\,dt\ge\frac{1}{x_1}\int_0^{x_1}f(t)\,dt$. 所以 $F(x)$ 单增, 从而有界变差.

提示: 同证明.

6. 设 $\{f_k\}_{k\ge 1}$ 是 $[a,b]$ 上有界变差函数列, 且 $T_a^b(f_k)\le M$, $(k\ge 1)$. 今若 $f_k(x)\to f(x)$, 求证 $T_a^b(f)\le M$.

证明. 此时对任何 $[a,b]$ 上的网 $\{x_s\}_{0\le s\le n}$ 有 $\sum\limits_{s=1}^{n}|f_k(x_s)-f_k(x_{s-1})|\le M$ $(k\ge 1)$. 在此式中令 $k\to\infty$, 得 $\sum\limits_{s=1}^{n}|f(x_s)-f(x_{s-1})|\le M$. 由网的任意性得 $T_a^b(f)\le M$.

提示: 无

7. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取实值, 而且有 $M>0$, 使对任何 $\varepsilon>0$ 有 $T_{a+\varepsilon}^b(f)\le M$. 求证 f 在 $[a,b]$ 上有界变差.

证明. 对任何 $a<x<b$, $|f(b)-f(x)|\le T_x^b(f)\le M$. 故 $|f(x)|\le M+|f(b)|$. 由此知 f 在 $[a,b]$ 上有界. 设 $|f(x)|<\lambda$. 此时对 $[a,b]$ 上任何网 $\{x_k\}_{0\le k\le n}$,

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\le|f(x_1)-f(a)|+T_{x_1}^b(f)\le 2\lambda+M.$$

故 f 在 $[a,b]$ 上有界变差.

提示: 同证明.

8. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续. 对 $[a,b]$ 上任一网 $X=\{x_k\}_{0\le k\le n}$, 令 $|X|=\max\limits_{1\le k\le n}\{|x_k-x_{k-1}|\}$. 求证 $\lim\limits_{|X|\to 0}V(X)=\lim\limits_{|X|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|=T_a^b(f)$.

证明. 分两种情形.

情形 1. $T_a^b(f)=\infty$. 任取 $M>0$, 存在网 $Y=\{y_s\}_{0\le s\le N}$, 使 $V(Y)=\sum\limits_{s=1}^{N}|f(y_s)-f(y_{s-1})|>M+1$. 由于 f 在 $[a,b]$ 上一致连续, 所以存在 $\delta>0$, 使 $|f(z_1)-f(z_2)|<\frac{1}{2N}$, $|z_1-z_2|<\delta$. 现任取网 $X=\{x_k\}_{0\le k\le n}$ 使 $|X|<\min\{\delta,\min\limits_{1\le s\le N}|y_s-y_{s-1}|\}$. 令 $Z=X\bigcup Y$, 则对每个 $1\le s\le N-1$, 有且只有一个 k_s 使 $x_{k_s}\le y_s<x_{k_s+1}$, 而且当 s 不同时, k_s 也不同. 这时

$$\begin{aligned}1+M &< V(Y)\le V(Z)\\ &\le V(X)+\sum_{s=1}^{N-1}\Big(|f(x_{k_s+1})-f(y_s)|+|f(y_s)-f(x_{k_s})|\Big)\\ &\le V(X)+2N\cdot\frac{1}{2N}.\end{aligned}$$

因此 $V(X)>M$. 所以 $\lim\limits_{|X|\to 0}V(X)=\infty$.

情形 2. $T_a^b(f)<\infty$. 任给 $\varepsilon>0$, 存在网 Y 使 $V(Y)>T_a^b(f)-\frac{\varepsilon}{2}$. 取 $\delta>0$, 使 $|f(z_1)-f(z_2)|<\frac{\varepsilon}{4N}$, $|z_1-z_2|<\delta$. 任取网 X, 使 $|X|<\min\{\delta,\min\limits_{1\le s\le N}|y_s-y_{s-1}|\}$. 令 $Z=X\bigcup Y$, k_s 如前所述, 则

$$\begin{aligned}V(Z) &\le V(X)+\sum_{s=1}^{N-1}\Big(|f(x_{k_s+1})-f(y_s)|+|f(y_s)-f(x_{k_s})|\Big)\\ &\le V(X)+2N\cdot\frac{\varepsilon}{4N}=V(X)+\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

故 $T_a^b(f)\ge V(X)\ge V(Z)-\frac{\varepsilon}{2}\ge V(Y)-\frac{\varepsilon}{2}>T_a^b(f)-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2}=T_a^b(f)-\varepsilon$. 即 $T_a^b(f)-V(X)<\varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{|X|\to 0}V(X)=T_a^b(f)$.

提示: 同证明.

9. 设 f 在 $[a,b]$ 上有界变差, 求证 $\frac{d}{dx}T_a^x(f)=|f'(x)|$, a.e.

证明. 在 $[a,b]$ 上取一列网 $X_n=\{x_k^{(n)}\}_{0\le k\le p_n}$, 使 $T_a^b(f)-V(X_n)<\frac{1}{2^n}, n\ge 1$, 其中 $V(X_n)=\sum_{k=1}^{p_n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$. 现对每一 $n\ge 1$, 我们可以构造一个函数 $f_n(x)$, 满足下两条件:

(i) $f_n(a)=0$;

(ii) 在每一 $[x_{k-1}^{(n)},x_k^{(n)}](1\le k\le p_n)$ 上, $f_n(x)$ 与 $f(x)$ 或 $-f(x)$ 只相差一个常数, 并且 $f_n(x_{k-1}^{(n)})\le f_n(x_k^{(n)})$.

此时易知 $V(X_n)=\sum_{k=1}^{p_n}[f_n(x_k^{(n)})-f_n(x_{k-1}^{(n)})]=f_n(b)$. 这样, $T_a^b(f)-f_n(b)<\frac{1}{2^n}(n\ge 1)$. 另外, 若 $x_{k-1}^{(n)}\le y_1<y_2\le x_k^{(n)}$, 则

$$f_n(y_2)-f_n(y_1)\le|f(y_2)-f(y_1)|\le T_{y_1}^{y_2}(f).$$

从而易知 $T_a^x(f)-f_n(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单增函数. 这样

$$T_a^x(f)-f_n(x)\le T_a^b(f)-f_n(b)<\frac{1}{2^n}, x\in[a,b].$$

于是 $\sum_{n=1}^{\infty}[T_a^x(f)-f_n(x)]$ 对每一 $x\in[a,b]$ 收敛. 由题, 几乎处处有 $[T_a^x(f)-f_n(x)]'\to 0(n\to\infty)$, 或 $f_n'(x)\to\frac{d}{dx}T_a^x(f)$, a.e. 但由 f_n 的性质, 对每一 $n\ge 1, |f_n'(x)|=|f'(x)|$, a.e. 此外 $\frac{d}{dx}T_a^x(f)\ge 0$. 从而 $\frac{d}{dx}T_a^x(f)=|f'(x)|$, a.e.

提示: 无

10. 设 f 和 g 在 $[a,b]$ 上有界变差, $f(a)=0=g(a)$. 求证 $T_a^b(fg)\le T_a^b(f)T_a^b(g)$.

证明. (i). 容易验证, $T_a^x(f)\pm f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单增. 令

$$P_f(x)=\frac{1}{2}(T_a^x(f)+f(x)), Q_f(x)=\frac{1}{2}(T_a^x(f)-f(x)).$$

$$P_g(x)=\frac{1}{2}(T_a^x(g)+g(x)), Q_g(x)=\frac{1}{2}(T_a^x(g)-g(x)).$$

则

$$fg=(P_f(x)-Q_f(x))(P_g(x)-Q_g(x)).$$

于是

$$\begin{aligned}T_a^b(fg) &\le T_a^b(P_f\cdot Q_f)+T_a^b(P_g\cdot Q_g)+T_a^b(P_f\cdot Q_g)+T_a^b(P_g\cdot Q_f)\\ &= P_f(b)Q_f(b)+P_g(b)Q_g(b)+P_f(b)Q_g(b)+P_g(b)Q_f(b)\\ &= (P_f(b)+Q_f(b))(P_g(b)+Q_g(b))\\ &= T_a^b(f)\cdot T_a^b(g).\end{aligned}$$

证明二. 任取 $[a,b]$ 上的网 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$. 令

$$F_k=|f(x_k)-f(x_{k-1})|,\quad G=|g(x_k)-g(x_{k-1})|,\quad 1\le k\le n.$$

由于 $f(x_0)=f(a)=0=g(a)=g(x_0)$, 所以对任何 $1\le k\le n$,

$$|f(x_k)|\le\sum_{i=1}^{k}F_i,\quad |g(x_{k-1})|\le\sum_{i=1}^{k-1}G_i\quad(2\le k\le n).$$

从而,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)g(x_k)-f(x_{k-1})g(x_{k-1})|\\
\le&\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)|G_k+\sum_{k=2}^{n}|g(x_{k-1})|F_k\\
\le&\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{k}F_i\Big)G_k+\sum_{k=2}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{k-1}G_i\Big)F_k\\
=&\sum_{k=1}^{n}\Big(F_kG_k+\sum_{i<k}F_iG_k+\sum_{i<k}F_kG_i\Big)\\
=&\sum_{k=1}^{n}F_k\cdot\sum_{k=1}^{n}G_k\\
\le&\,T_a^b(f)\cdot T_a^b(g).
\end{aligned}$$

提示: 无

11. 设 f 在 $[a-1,b+1]$ 上有界变差, 求证当 $0<|h|<1$ 时, $F(h)=\frac{1}{|h|}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\,dx$ 是有界的.

证明. 不妨设 f 单增. 当 $h>0$ 时,

$$\begin{aligned}
F(h)&=\frac{1}{h}\int_a^b(f(x+h)-f(x))\,dx=\frac{1}{h}\Big(\int_a^b f(x+h)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\Big)\\
&=\frac{1}{h}\Big(\int_{a+h}^{b+h}f(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\Big)\\
&=\frac{1}{h}\Big(\int_b^{b+h}f(x)\,dx-\int_a^{a+h}f(x)\,dx\Big)\\
&\le\frac{1}{h}\Big(hf(b+h)-hf(a)\Big)\\
&\le f(b+1)-f(a)\le f(b+1)-f(a-1).
\end{aligned}$$

当 $h<0$ 时, 同样有 $F(h)\le f(b+1)-f(a-1)$. 所以结论成立.

提示: 同证明.

12. 设 f 在 $[a,b]$ 可微, f' 有界变差, 则 f' 连续.

证明. 任取 $x_0\in[a,b]$. 因为 f' 有界变差, 所以 $A:=\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)$ 和 $B:=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$ 存在有限. 若 f' 在 x_0 点不连续, 则 $A\ne f'(x_0)$ 或者 $B\ne f'(x_0)$. 不妨设 $A<f'(x_0)$. 则存在 $\delta>0$ 以及 $A<A_1<f'(x_0)$, 使得

$$f'(x)<A_1,\quad x\in(x_0-2\delta,x_0).$$

因此, f' 在 $[x_0-\delta,x_0]$ 上不能取到 A_1 与 $f'(x_0)$ 之间的任何数值, 这与导数的介值定理矛盾.

提示: 同证明.

13. (Helly 选择原理) 设 $\{f_n\}_{n\ge1}$ 是 $[a,b]$ 上的一列一致有界的单增函数, 求证有子列 $\{f_{n_k}\}_{k\ge1}$, 它们在 $[a,b]$ 上处处收敛.

证明. 由对角线方法, 首先有子列 $\{g_i\}_{i\ge1}$, 使它们在 $[a,b]$ 中的所有有理点上收敛. 令 $G^*(x)=\varlimsup\limits_{i\to\infty}g_i(x)$, $G_*(x)=\varliminf\limits_{i\to\infty}g_i(x)$. 则 G^* 和 G_* 都是单增函数, 用 E^* 和 E_* 表示它们的不连续点集. 由于 G^* 和 G_* 在有理点上相等, 故它们在 $[a,b]-(E^*\bigcup E_*)$ 上相等. 又 $E^*\bigcup E_*$ 至多可数, 再次用对角线方法, $\{g_i\}$ 中有子列 $\{h_k\}_{k\ge1}$, 使其在 $E^*\bigcup E_*$ 的每一点收敛, 于是 $\{h_k\}_{k\ge1}$ 即为 $\{f_n\}$ 中所求的子列.

提示: 无

14. 设 $\{f_n\}_{n\ge1}$ 是 $[a,b]$ 上一列有界变差函数, 使得 $\{f_n(a)\}_{n\ge1}$ 和 $\{T_a^b(f_n)\}_{n\ge1}$ 都有界. 求证有子列 $\{f_{n_k}\}_{k\ge1}$ 在 $[a,b]$ 上处处收敛于一个有界变差函数.

证明. 因为 $|f_n(x)-f_n(a)|\le T_a^b(f_n)$, 所以, $|f_n(x)|\le T_a^b(f_n)+|f_n(a)|$. 因此, $\{f_n(x)\}_{n\ge1}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界. 从而 $\{T_a^x(f_n)\}_{n\ge1}$ 和 $\{T_a^x(f_n)-f_n(x)\}_{n\ge1}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界单增. 由 Helly 选择原理, 存在子列 $\{f_{n_k}\}_{k\ge1}$, 使对每一 $x\in[a,b]$, $T_a^x(f_{n_k})\to g(x)$, $T_a^x(f_{n_k})-f_{n_k}(x)\to h(x)$, $k\to\infty$. 这样 $f_{n_k}(x)=T_a^x(f_{n_k})-(T_a^x(f_n)-f_{n_k}(x))\to g(x)-h(x)$. 由于 g 和 h 都单增, 所以 $g(x)-h(x)$ 有界变差.

提示: 同证明.

15. 设 $f\in L[0,1]$. g 在 $[0,1]$ 上实值单增, 并且对任何 $[a,b]\subset[0,1]$ 有 $|\int_a^b f(x)\,dx|^2\le|g(b)-g(a)|(b-a)$. 求证 $f^2\in L[0,1]$.

证明. 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, $E=\{x:F'(x)=f(x)$ 且 $g'(x)$ 存在有限 $\}$. 则 $m(E)=1$. 任取 $x\in E$ 及 $\Delta>0$, 由题设, $|\frac{1}{\Delta}\int_x^{x+\Delta}f(t)\,dt|^2\le\frac{g(x+\Delta)-g(x)}{\Delta}$. 令 $\Delta\to0^+$, 得 $|f(x)|^2\le g'(x)$, $x\in E$. 但 $g'\in L[0,1]$, 所以 $f^2\in L[0,1]$.

提示: 同证明.

16. 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上有界可测函数, 且存在 $0<\lambda<1$ 以及 $1\le p<\infty$, 使得对任何有界区间 $[a,b]$,

$$\left(\int_a^b |f(x)|dx\right)^p \le \lambda(b-a)^{p-1}\int_a^b |f(x)|^p dx,$$

求证 $f(x)=0$, a.e.

证明. 由题设,

$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|dx\right)^p \le \frac{\lambda}{b-a}\int_a^b |f(x)|^p dx.$$

令 $b\to a$, 得

$$|f(x)|^p \le \lambda |f(x)|^p, \qquad a.e.$$

所以 $f(x)=0$, a.e.

提示: 无

17. 证明定理 5.4.2.

证明.

提示: 无

18. 设 f 在 $[a,b]$ 上满足 Lipschitz 条件, 即有 $M>0$ 使 $|f(x_1)-f(x_2)|\le M|x_1-x_2|$.

(i) 求证 f 绝对连续且 $|f'(x)|\le M$, a.e.

(ii) 若 f 在 $[a,b]$ 有有界导函数, 则 f 满足 Lipschitz 条件, 从而绝对连续.

证明.

提示: 无

19. 设 $f\in \mathrm{AC}[a,b]$, $p\ge 1$, 求证 $|f|^p\in \mathrm{AC}[a,b]$. 若 $0<p<1$, 结论如何? 试研究 $f(x)=x^2\sin^2\frac{1}{x}$, $p=\frac{1}{2}$.

证明. 由微分中值定理, $|f(b_n)|^p-|f(a_n)|^p = p\xi^{p-1}(|f(b_n)|-|f(a_n)|)$, 其中 ξ 介于 $|f(b_n)|$ 和 $|f(a_n)|$ 之间. 因为 f 在 $[a,b]$ 上连续, 所以 f 有界. 设 $|f(x)|\le M$, 则

$$\left||f(b_n)|^p-|f(a_n)|^p\right| \le pM^{p-1}|f(b_n)-f(a_n)|.$$

再从 f 绝对连续可知 $|f|^p$ 也绝对连续, 其中 $1\le p<\infty$.

当 $0<p<1$ 时, 命题不一定成立. 例如, 取 $f(x)=x^2\sin^2\frac{1}{x}$, $f(0)=0$, $p=\frac{1}{2}$. 此时 $f'(x)=2x\sin^2\frac{1}{x}-\sin\frac{2}{x}$ 在 $(0,1)$ 中有界, 故 f 在 $[0,1]$ 上绝对连续.

但 $|f(x)|^{1/2}=x|\sin\frac{1}{x}|$, $\left||f|^{1/2}(\frac{1}{n\pi})-|f|^{1/2}(\frac{1}{(n+1/2)\pi})\right|=\frac{1}{(n+1/2)\pi}$, 所以 $|f|^{1/2}$ 在 $[0,1]$ 上不绝对连续.

提示: 同证明.

20. 用定义证明 $\sqrt{x}$ 在 $[0,1]$ 上绝对连续.

证明. 任给 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon^2/4$. 设 $\{(a_k,b_k)\}_{1\le k\le n}$ 是 $[0,1]$ 上一列两两不相的交开区间, 其中 $a_1<a_2<\cdots<a_n$. 当 $\sum\limits_{k=1}^n(b_k-a_k)<\delta=\varepsilon^2/4$ 时, 设 $b_s\le \varepsilon^2/4\le a_{s+1}$, 则

$$\sum_{k=1}^{s-1}(\sqrt{b_k}-\sqrt{a_k})\le \sqrt{b_{s-1}}\le\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4}}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

并且

$$\begin{aligned}\sum_{k=s}^{n}(\sqrt{b_k}-\sqrt{a_k}) &= \sum_{k=s}^{n}\frac{b_k-a_k}{\sqrt{b_k}+\sqrt{a_k}}\\ &\le \sum_{k=s}^{n}\frac{b_k-a_k}{\sqrt{b_k}}\le\frac{2}{\varepsilon}\sum_{k=s}^{n}(b_k-a_k)\le\frac{2}{\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon^2}{4}=\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

从而 $\sum\limits_{k=1}^{n}(\sqrt{b_k}-\sqrt{a_k})<\varepsilon$. 故结论成立.

提示: 无

21. 设 $E\subset\mathbb{R}$ 可测, $f_n(x)=n\int_0^{\frac{1}{n}}\chi_E(x+t)\,dt$, $n=1,2,\cdots$. 求证

(i) f_n 在任何有界区间 $[a,b]$ 上绝对连续;

(ii) $f_n(x)\to\chi_E(x)$, a.e. 于 $\mathbb{R}$;

(iii) $\int_a^b|f_n(x)-\chi_E(x)|\,dx\to 0$, $n\to\infty$, $-\infty<a<b<\infty$.

证明.

(i) $f_n(x)=n[\int_x^{x+\frac{1}{n}}\chi_E(t)\,dt]=n[\int_0^{x+\frac{1}{n}}\chi_E(t)\,dt-\int_0^x\chi_E(t)\,dt]$ —两个不定积分之差, 故是绝对连续的.

(ii) $\frac{d}{dx}\int_0^x\chi_E(t)\,dt=\chi_E(x)$, a.e. 从而 $f_n(x)=n\int_x^{x+\frac{1}{n}}\chi_E(t)\,dt\to\chi_E(x)$, a.e.

(iii) $|f_n(x)|\le 1$, $|\chi_E(x)|\le 1$, $|f_n(x)-\chi_E(x)|\le 2$. 故由控制收敛定理, $\int_a^b|f_n(x)-\chi_E(x)|\,dx\to 0$.

提示: 无

22. 若 $m(E)<\infty$, 对于 21 题中的 f_n 是否有 $\int_{\mathbb{R}}|f_n(x)-\chi_E(x)|\,dx\to 0$?

证明. 因为 $\chi_E \in L(\mathbb{R})$ 并且

$$\begin{aligned}|f_n(x)-\chi_E(x)| &= \left|n\int_0^{1/n}\Big(\chi_E(x+t)-\chi_E(x)\Big)\,dt\right| \\ &\le n\int_0^{1/n}|\chi_E(x+t)-\chi_E(x)|\,dt.\end{aligned}$$

所以,

$$\int_{\mathbb{R}}|f_n(x)-\chi_E(x)|\,dx \le n\int_0^{1/n} dt\int_{\mathbb{R}}|\chi_E(x+t)-\chi_E(x)|\,dx.$$

因为 $\lim\limits_{t\to 0^+}\int_{\mathbb{R}}|\chi_E(x+t)-\chi_E(x)|\,dx=0$, 对任何 $\varepsilon>0$, 存在 n_0, 使得当 $0<t<1/n_0$ 时, $\int_{\mathbb{R}}|\chi_E(x+t)-\chi_E(x)|\,dx<\varepsilon$. 因此, 当 $n>n_0$ 时, $\int_{\mathbb{R}}|f_n(x)-\chi_E(x)|\,dx\le n\int_0^{1/n}\varepsilon\,dt=\varepsilon$. 故结论成立.

提示: 同证明.

23. 设 $g_k\in AC[a,b]$, $k\ge 1$, $|g_k'(x)|\le F(x)$, a.e., $k\ge 1$, $F\in L[a,,b]$. 令若 $g_k(x)\to g(x)$, $g_k'(x)\to f(x)$, a.e., 求证 $g'(x)=f(x)$, a.e.

证明. 对任何 $k\ge 1$ 及 $a\le x\le b$, $g_k(x)=g_k(a)+\int_a^x g_k'(t)\,dt$. 令 $k\to\infty$ 并利用控制收敛定理得 $g(x)=g(a)+\int_a^x f(t)\,dt$. 从而 $g'(x)=f(x)$, a.e.

提示: 用控制收敛定理.

24. 任给 $0<\lambda<1$, 存在 $[0,1]$ 上的严格单增绝对连续函数 f, 使 $m(E)\ge\lambda$, 其中 $E=\{x\in(0,1): f'(x)=0\}$.

证明. 取 $[0,1]$ 上一个测度为 λ 的 Cantor 型完备集 F_λ. 设 $[0,1]-F_\lambda=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$, 其中 (a_n,b_n) 为构成区间. 定义

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{(a_n,b_n)}(x),\qquad f(x)=\int_0^x g_\lambda(t)\,dt.$$

则 f 在 $[0,1]$ 上严格单增绝对连续并且 $f'(x)=g(x)$, a.e. 所以 $m(\{f'=0\})=0$.

提示: 同证明.

25. 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上可微, 且 $f,f'\in L(\mathbb{R})$. 求证 $\int_{\mathbb{R}}f'(x)\,dx=0$.

证明. 由已知, 对任何有界区间 $[a,b]$, f 在 $[a,b]$ 上绝对连续, 所以 $f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)\,dx$. 但 $f\in L(\mathbb{R})$, 故存在 $a_n\to-\infty$ 以及 $b_n\to\infty$ 使 $f(b_n)\to 0$, $f(a_n)\to 0$. 于是

$$\int_{\mathbb{R}}f'(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_{a_n}^{b_n}f'(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}(f(b_n)-f(a_n))=0.$$

提示: 同证明.

26. 设 f 定义于 $\mathbb{R}$, 而且在任何有界闭区间上绝对连续. 求证对任何 $-\infty<a<b<\infty$ 及 $x\in\mathbb{R}$ 有 $\frac{d}{dx}\int_a^b f(t+x)\,dt=\int_a^b f'(t+x)\,dt$.

证明. 由条件 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 而且 $f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处存在有限, 而且在任何有界区间上 L 可积. 此时对任何 $x\in\mathbb{R}$,

$$\int_a^b f(t+x)\,dt=\int_{a+x}^{b+x}f(t)\,dt=\int_0^{b+x}f(t)\,dt-\int_0^{a+x}f(t)\,dt.$$

由于 f 连续, 故

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(t+x)\,dt=f(b+x)-f(a+x)=\int_{a+x}^{b+x}f'(t)\,dt=\int_a^b f'(t+x)\,dt.$$

提示: 无

27. 设 f_n 是 $[a,b]$ 上单增的绝对连续函数, $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处收敛. 求证 $s(x)\in AC[a,b]$.

证明. $s(b)-s(a)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f_n(b)-f_n(a)]=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n'(t)\,dt=\int_a^b\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n'(t)\,dt$ (因为 $f_n'(t)\ge 0$ 及 Levi 单调收敛定理). 这样 $g(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n'(t)\in L[a,b]$. 从而对任何 $a\le x\le b$ 有 $s(x)-s(a)=\int_a^x g(t)\,dt$. 故 $s\in AC[a,b]$.

提示: 无

28. 证明.

提示: 无

29. 设 $\alpha>0$, $\beta>0$, $f(x)=x^\alpha\sin x^{-\beta}$, $0<x\le 1$, $f(0)=0$. 求证当且仅当 $\alpha>\beta$ 时 $f(x)$ 绝对连续.

证明. 若 $\alpha>\beta$, 则 $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\sin x^{-\beta}-\beta x^{\alpha-\beta-1}\cos x^{-\beta}$. 由于 $\alpha-1>-1$, $\alpha-\beta-1>-1$, 故 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上 L 可积, 并且 $f(x)=\int_0^x f'(t)\,dt$. 即 f 是一个不定积分, 从而 f 绝对连续.

若 $\alpha\le\beta$, 取 $x_0=0$, $x_n=(\frac{2}{n\pi})^{1/\beta}$, $n\ge 1$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)-f(x_{n-1})| &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{(2n-1)\pi}\right)^{\alpha/\beta} \\ &= 2\cdot\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\alpha/\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^{\alpha/\beta}}=\infty.\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 不是有界变差函数, 从而不绝对连续.

提示: 同证明.

30. 研究定理 5.1.1 证明后的例 5.1.1 中的函数, 说明对 $[a,b]$ 中任一零测集 E, 存在 $[a,b]$ 上单增绝对连续函数 f, 使对每一 $x\in E$ 有 $f'(x)=\infty$.

证明. 因为 E 是 $[a,b]$ 中零测集, 所以存在单减开集列 $\{G_n\}_{n\geq 1}$ 使 $E\subset G_n$ 且 $m(G_n)<\frac{1}{2^n}$. 令 $f_n(x)=m([a,x]\bigcap G_n)$, $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$. 则每个 $f_n(x)$ 都是单增绝对连续函数且 $|f_n(x)|<\frac{1}{2^n}$, 故 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上单增绝对连续函数.

固定某个 $x\in E$. 对任何 $n\geq 1$, $x\in G_n$. 因为 G_n 是开集, 所以当 h 充分小时, $x+h\in G_n$, 从而 $[x,x+h]\subset G_k$, $1\leq k\leq n$ 并且

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{f_k(x+h)-f(x)}{h}=\sum_{k=1}^{n}\frac{m([x,x+h]\cap G_k)}{h}=n.$$

由 n 的任意性知 $f'(x)=\infty$.

提示: 注意到每个 f_n 都是单增绝对连续函数且 $|f_n(x)|\leq 1/2^n$. 易知 f 绝对连续.

31. 设 $f\in L[a,b]$ 且 $\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\,dx=o(|h|)$, 求证 f 几乎处处为常数.

证明. 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, $E=\{x:F'(x)=f(x)\}$, 则 $m(E)=b-a$. 任取 $x_1,x_2\in E$, $x_1<x_2$, 则

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{h}\int_{x_2}^{x_2+h}f(t)\,dt-\frac{1}{h}\int_{x_1}^{x_1+h}f(t)\,dt\right| &= \frac{1}{|h|}\left|\int_{x_1}^{x_2}(f(t+h)-f(t))\,dt\right|\\ &\leq \frac{1}{|h|}\int_a^b|f(t+h)-f(t)|\,dt\to 0.\end{aligned}$$

从而 $F'(x_2)=F'(x_1)$, 即 $f(x_1)=f(x_2)$.

提示: 同证明.

32. 设 f 在 $[a,b]$ 上实值单增, 求证 $f=g+h$, 其中 $g\in AC[a,b]$, h 单增且 $h'(x)=0$, a.e.

证明. 此时 $f'\in L[a,b]$. 令 $g(x)=\int_a^x f'(t)\,dt$, $h(x)=f(x)-g(x)$. 则 $g\in AC[a,b]$. 而对 $a\leq x_1<x_2\leq b$, 由于 $\int_{x_1}^{x_2}f'(t)\,dt\leq f(x_2)-f(x_1)$, 故 $f(x_1)-\int_a^{x_1}f'(t)\,dt\leq f(x_2)-\int_a^{x_2}f'(t)\,dt$, 即 h 单增. 此外 $[f(x)-g(x)]'=[f(x)-\int_a^x f'(t)\,dt]'=f'(x)-f'(x)=0$, a.e.

提示: 无

33. 设对每一 $0<x<1$, f 在 $[0,x]$ 上绝对连续, 在 $[x,1]$ 上有界变差, 而且 f 在 $x=1$ 连续, 求证 f 在 $[0,1]$ 上绝对连续.

证明. 由已知, $f'\in L([0,1])$ 并且当 $0\leq x<1$ 时,

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\,dt.$$

因为 f 在 $x=1$ 处连续, 在上式中令 $x\to 1^-$, 得上式对 $x\in[0,1]$ 成立. 所以 f 在 $[0,1]$ 上绝对连续.

提示: 同证明.

34. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 几乎处处可导且 $f'\in L(a,b)$. 若对任何 $\varepsilon>0$, f 在 $[a+\varepsilon,b]$ 上绝对连续, 求证: f 在 $[a,b]$ 上绝对连续. $x\in[a+\varepsilon,b]$

证明. 与习题 5.33 类似. $f(b)-f(x)=\int_x^b f'(t)dt$

提示: 同证明.

35. 设 $f\in L([0,1])$ 并且在 0 的一个邻域有界.

(i) 求证: 对任何 $n\geq 1$, $f(x^n)\in L([0,1])$.

(ii) 若 f 单调, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(x^n)\,dx$.

(一般若 $f\in L([0,1])$, 则 $f(x^n)$ 不一定可积. 例如 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.)

证明. (i). 由已知, 存在 $\varepsilon>0$ 使 f 在 $[0,\varepsilon]$ 上有界. 因为

$$\begin{aligned}\int_0^1|f(x^n)|dx &= \frac{1}{n}\int_0^1|f(y)|y^{1/n-1}dy\\ &= \frac{1}{n}\left(\underbrace{\int_0^{\varepsilon}|f(y)|y^{1/n-1}dy}_{\text{有界}}+\int_{\varepsilon}^1|f(y)|y^{1/n-1}dy\right),\end{aligned}$$

所以 $f(x^n)$ 可积.

(ii). 设 f 单增, 则 $f(x)\geq f(x^n)\geq f(x^{n+1})$, $0\leq f(x)-f(x^n)\leq f(x)-f(x^{n+1})$. 故由 Levi 单调收敛定理,

$$\int_0^1\left(f(x)-\lim_{n\to\infty}f(x^n)\right)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1(f(x)-f(x^n))\,dx.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x^n)\,dx=\int_0^1\lim_{n\to\infty}f(x^n)\,dx=\int_0^1\lim_{t\to 0^+}f(t)\,dx=\lim_{t\to 0^+}f(t).$$

若 f 单减, 则 $f(x)\leq f(x^n)\leq f(x^{n+1})$, $0\leq f(x^n)-f(x)\leq f(x^{n+1})-f(x)$. 同样得 $\int_0^1 f(x^n)\,dx\to\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$.

提示: 同证明.

36. 证明. 设 $f\in L([a,b])$, 若 $x\in(a,b)$ 是 f 的近似连续点, 且 f 在 x 附近有界, 证明 x 是 f 的 Lebesgue 点.

提示: 无

37. 设 f 在 $[a,b]$ 上严格单增绝对连续. 则为使其反函数 f^{-1} 在 $[f(a),f(b)]$ 上绝对连续, 充要条件是 $m(E)=0$, 其中 $E=\{x\in(a,b): f'(x)=0\}$.

证明. (i). 充分性. 设 $m(E)=0$. 由于 $f'\in L([a,b])$, 所以 $0<f'(x)<+\infty$, a.e. 因此, 对几乎所有的 x, $(f^{-1})'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$.

对任何 $y\in[f(a),f(b)]$, 由变量替换定理得,

$$\begin{aligned}\int_{f(a)}^{y}(f^{-1})'(s)\,ds &= \int_a^x (f^{-1})'(f(t))f'(t)\,dt\\ &= \int_a^x \frac{f'(t)}{f'(t)}\,dt\\ &= x-a=f^{-1}(y)-a.\end{aligned}$$

即

$$f^{-1}(y)=a+\int_{f(a)}^{y}(f^{-1})'(s)\,ds,\qquad y\in[f(a),f(b)].$$

所以 $f^{-1}(y)$ 绝对连续.

(ii). 必要性. 设 f^{-1} 绝对连续. 因为绝对连续函数把零测集映为零测集并且 $m(f(E))=\int_E f'(x)\,dx=0$, 所以 $E=f^{-1}f(E)$ 是零测集.

提示: 同证明.

36, 证明: 要证明: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|\,dt=0$

x 为近似连续点, 则 $\exists$ 可测集 $E\subseteq[a,b]$, 使 x 为 E 的全密点

且 f 沿 E 在点 x 连续.

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{m(E\cap[x-h,x+h])}{2h}=1$$

$\therefore \frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|\,dt \le \frac{1}{h}\int_{[x-h,x+h]\cap E}|f(t)-f(x)|\,dt+\frac{1}{h}\int_{[x-h,x+h]\setminus E}|f$

$\forall\varepsilon$, $\exists h_0$, s.t. $|f(t)-f(x)|\le\varepsilon$, $t\in[x-h_0,x+h_0]\cap E$.

$$\frac{m([x-h,x+h]\setminus E)}{2h}=\frac{2h-m([x-h,x+h]\cap E)}{2h}\to 0$$

$|f(t)-f(x)|\le 2M$.

第六章部分习题参考答案与提示

1. 设 $f\in L^p(\mathbb{R})$, $1\le p<\infty$. 求证当 $\lambda\to\infty$ 时, $\int_{\{|f|>\lambda\}}|f(x)|^p dx\to 0$, $\int_{\{|x|>\lambda\}}|f(x)|^p dx\to 0$.

证明. 任取 $\lambda_n\to\infty$, 令 $f_n=f\cdot\chi_{\{|f|>\lambda_n\}}$, 则 $|f_n(x)|^p\le|f(x)|^p$, $|f_n(x)|^p\to 0$. 由控制收敛定理,

$$\int_{\{|f|>\lambda_n\}}|f(x)|^p dx=\int_{\mathbb{R}}|f_n(x)|^p dx\to 0.$$

由数列极限与函数极限之间的关系可知 $\int_{\{|f|>\lambda\}}|f(x)|^p dx\to 0$.

第二个结论类似可证.

提示: 用控制收敛定理.

2. 设 $f\in L^p(\mathbb{R}), 1\le p<\infty$. 求证当 $\lambda\to 0^+$ 及 $\lambda\to\infty$ 时皆有 $\lambda^p m(\{|f|>\lambda\})\to 0$.

证明. (i). 由习题 1, $\lambda^p m(\{|f|>\lambda\})\le\int_{\{|f|>\lambda\}}|f(x)|^p dx\to 0, \lambda\to\infty$.

(ii). 由习题 1, 对任何 $\varepsilon>0$, 存在正数 A 使 $\int_{\{|x|>A\}}|f(x)|^p dx<\frac{\varepsilon}{2}$. 令

$$E_\lambda=\{|f|>\lambda\}\bigcap\{|x|\le A\},\quad F_\lambda=\{|f|>\lambda\}\bigcap\{|x|>A\}.$$

则 $\lim_{\lambda\to 0^+}\lambda^p m(E_\lambda)\to 0$ 并且 E_λ 测度有限

$$\lambda^p m(F_\lambda)\le\int_{F_\lambda}|f(x)|^p dx\le\int_{|x|>A}|f(x)|^p dx<\frac{\varepsilon}{2}.$$

所以当 $\lambda\to 0^+$ 时, $\lambda^p m(\{|f|>\lambda\})=\lambda^p m(E_\lambda)+\lambda^p m(F_\lambda)\to 0$.

提示: 无

3. (i) 设 $m(E)<\infty, 1\le p_1<p_2<\infty$. 求证 $L^\infty(E)\subset L^{p_2}(E)\subset L^{p_1}(E)$.

(ii) 设 $1\le p_1<p_2<\infty$, 试列举函数 f 和 g, 使 $f\in L^{p_1}(\mathbb{R})-L^{p_2}(\mathbb{R}), g\in L^{p_2}(\mathbb{R})-L^{p_1}(\mathbb{R})$.

证明. (i) 因为 $\int_E|f(x)|^{p_2}dx\le\|f\|_\infty^{p_2}\cdot m(E)$, 所以 $L^\infty(E)\subset L^{p_2}(E)$. 再从 $|f(x)|^{p_1}\le|f(x)|^{p_2}+1$ 可知 $L^{p_2}(E)\subset L^{p_1}(E)$.

(ii) 令 $f=x^{-1/(p_1p_2)^{1/2}}\cdot\chi_{(0,1)}$, $g=x^{-1/(p_1p_2)^{1/2}}\cdot\chi_{(1,\infty)}$ 即可.

提示: 分别在 $[0,1]$ 和 $[1,\infty)$ 上考虑 $x^{-1/(p_1p_2)^{1/2}}$.