浙江大学
ZheJiang University

数学建模

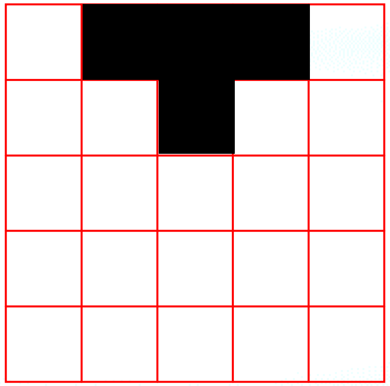
浙江大学数学系　谈之奕

tanzy@zju.edu.cn


浙江大学
ZheJiang University
基本数学模型
关灯游戏

关灯游戏

- 给定一个 5×5 方格棋盘，棋盘上的每个方格有白色和黑色两种状态
- 点击棋盘上任何一个方格时，这个方格自身及与之相邻的上、下、左、右四个方格（若存在）均改变状态
- 是否可以通过点击棋盘上的若干个方格，使棋盘上所有方格的状态由白色变为黑色



浙江大学
ZheJiang University
数学建模

棋盘状态

- 用 0 和 1 分别表示方格的白色和黑色两种状态
- 将棋盘上的**25**个方格依序用整数**1~25**编号
- 棋盘的一种状态可用一**25**维列向量 $\mathbf{c}=\{c_1,\cdots,c_{25}\}^{\mathrm{T}}$ 来表示，其中 $c_i\in\{0,1\}$。所有棋盘状态的全体记为 $\mathcal{C}$
- 所有方格均为白色和均为黑色的状态分别为 **0** 和 **1**

1	**2**	**3**	**4**	**5**
6	**7**	**8**	**9**	**10**
11	**12**	**13**	**14**	**15**
16	**17**	**18**	**19**	**20**
21	**22**	**23**	**24**	**25**

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

状态变换

- 定义$\mathscr{C}$上的一个变换t，它固定地将某些方格 i 的状态由c_i变为$1-c_i$，其余方格的状态保持不变
- 记 V 为 $\mathscr{C}$ 上所有变换的全体组成的集合
- 定义恒等变换t_0，$t_0(c)=c, c\in\mathscr{C}$
- 对任一棋盘状态重复两次施行同一变换，棋盘状态保持不变，即有 $t(t(c))=c, c\in\mathscr{C}$

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

域

- 集合 F 称为**域**（**field**），若有 F 上加法运算 $\oplus$ 和乘法运算 $\otimes$
  - 加法满足交换律、结合律
  - 存在加法零元素 0，对任意 $a\in F, a\oplus 0=a$
  - 对任意 $a\in F$，存在 $-a\in F, a\oplus(-a)=0$
  - 乘法满足交换律、结合律
  - 存在乘法单位元 1，对任意 $a\in F\setminus\{0\}, a\otimes 1=a$
  - 对任意 $a\in F\setminus\{0\}$，存在 $a^{-1}\in F, a\otimes a^{-1}=1$
  - 加法和乘法满足分配律 $a\otimes(b\oplus c)=(a\otimes b)\oplus(a\otimes c)$

$(F,\oplus)$ 是交换群

$(F\setminus\{0\},\otimes)$ 是交换群

有限域

数学建模

- $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ 关于数的加法和乘法都构成域，常称为数域
- 只含有有限多个元素的域称为有限域
- 二元数域 $F_2=\{0,1\}$

$$\begin{array}{c|cc} \oplus & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \otimes & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

线性空间

- 定义 V上的加法运算

$$(t \oplus s)(c) = t(s(c)), c \in \mathscr{C}, t, s \in V$$

  - 加法满足交换律、结合律
  - t_0为加法零元素，t 的逆元素为 t 自身
- 定义F_2 中元素与 V 中元素的数乘运算

$$1 \otimes t = t, 0 \otimes t = t_0$$

- V 关于以上定义的加法和数乘运算构成 F_2上的线性空间

基和维数

- 定义 f_i 为只改变方格 i 的状态的变换，即
  $$f_i(c_1,\cdots,c_{i-1},c_i,c_{i+1},\cdots,c_{25})^{\mathrm{T}}$$
  $$=(c_1,\cdots,c_{i-1},1-c_i,c_{i+1},\cdots,c_{25})^{\mathrm{T}},\ i=1,\cdots,25$$
- $f_i, i=1,\cdots,25$ 线性无关，构成 V 的一组基，$\dim V=25$
- $\sum\limits_{i=1}^{25} f_i$ 可将状态 **0** 变为状态 **1**，但 f_i 不能通过点击棋盘上某一个方格来实现

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

游戏规则

- 记 g_i 为点击方格 i 对应的变换，则

$$g_i = f_i \oplus f_{i-1} \oplus f_{i+1} \oplus f_{i-5} \oplus f_{i+5}, i = 1, \cdots, 25,$$

其中 $f_k = t_0$，若 $k \notin \{1, \cdots, 25\}$

- 在同一方格上点击两次（不论是否连续），效果抵消
- 问题转化为求 $x_i \in \{0,1\}, i = 1, \cdots, 25,$

使得 $\sum_{i=1}^{25} g_i x_i = \sum_{i=1}^{25} f_i$

		$i-5$		
	$i-1$	i	$i+1$	
		$i+5$		

矩阵表示

$$(g_1, g_2, \cdots, g_{25}) = (f_1, f_2, \cdots, f_{25})\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1
\end{pmatrix}$$

		$i-5$		
	$i-1$	i	$i+1$	
		$i+5$		

1	**2**			
6				

分块矩阵

- 令 $\mathbf{H}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{I}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  则 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_5 & \mathbf{I}_5 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_5 & \mathbf{H}_5 & \mathbf{I}_5 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_5 & \mathbf{H}_5 & \mathbf{I}_5 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{H}_5 & \mathbf{I}_5 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_5 & \mathbf{H}_5 \end{pmatrix}$

线性方程组

- 令 $\mathbf{X}=(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{X}_3,\mathbf{X}_4,\mathbf{X}_5)^{\mathrm{T}}$，其中

$$\mathbf{X}_i=(x_{5i-4},x_{5i-3},x_{5i-2},x_{5i-1},x_{5i})^{\mathrm{T}}, i=1,2,3,4,5$$

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{25} g_i x_i=\sum_{i=1}^{25} f_i$

$$\boxed{(g_1,\cdots,g_{25})=(f_1,\cdots,f_{25})\mathbf{A}}$$

$$\Leftrightarrow (f_1,\cdots,f_{25})\mathbf{AX}=(g_1,\cdots,g_{25})\mathbf{X}=(f_1,\cdots,f_{25})\mathbf{1}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{AX}=\mathbf{1}$$

记号约定

- 若不特别说明，加法和数乘均为 F_2 中的运算，加法用 $+$ 表示，矩阵相乘略去 $\otimes$ 号
- 对任意矩阵 $\mathbf{B}$ ，$\mathbf{B}+\mathbf{B}=\mathbf{0}$，$\mathbf{B}_1-\mathbf{B}_2=\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2$ ，但矩阵乘法仍不可交换
- 在讨论 5×5 方格棋盘时，略去表示矩阵阶数的下标

初等变换

数学建模

$$
\begin{pmatrix} A & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}
H & I & 0 & 0 & 0 & 1\\
I & H & I & 0 & 0 & 1\\
0 & I & H & I & 0 & 1\\
0 & 0 & I & H & I & 1\\
0 & 0 & 0 & I & H & 1
\end{pmatrix}
\xrightarrow[H\otimes(2)+(1)]{}
\begin{pmatrix}
0 & H^2+I & H & 0 & 0 & H1+1\\
I & H & I & 0 & 0 & 1\\
0 & I & H & I & 0 & 1\\
0 & 0 & I & H & I & 1\\
0 & 0 & 0 & I & H & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[(H^2+I)\otimes(3)+(1)]{}
\begin{pmatrix}
0 & 0 & H^3 & H^2+I & 0 & (H^2+H)1\\
I & H & I & 0 & 0 & 1\\
0 & I & H & I & 0 & 1\\
0 & 0 & I & H & I & 1\\
0 & 0 & 0 & I & H & 1
\end{pmatrix}
$$

$$\boxed{(H^2+I)H+H=H^3}$$

$$\boxed{\begin{gathered}((H^2+I)1)+(H1+1)\\ =(H^2+H)1\end{gathered}}$$

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

初等变换

$$
\begin{pmatrix} A & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & H^3 & H^2+I & 0 & (H^2+H)1 \\ I & H & I & 0 & 0 & 1 \\ 0 & I & H & I & 0 & 1 \\ 0 & 0 & I & H & I & 1 \\ 0 & 0 & 0 & I & H & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned} &(H^3H)+(H^2+I) \\ &\quad = H^4+H^2+I \end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned} &H^3 1+(H^2+H)1 \\ &\quad = (H^3+H^2+H)1 \end{aligned}
$$

$$
\xrightarrow[H^3\otimes(4)+(1)]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & H^4+H^2+I & H^3 & (H^3+H^2+H)1 \\ I & H & I & 0 & 0 & 1 \\ 0 & I & H & I & 0 & 1 \\ 0 & 0 & I & H & I & 1 \\ 0 & 0 & 0 & I & H & 1 \end{pmatrix}
$$

初等变换

$$
\begin{pmatrix} A & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & H^4+H^2+I & H^3 & (H^3+H^2+I)1 \\ I & H & I & 0 & 0 & 1 \\ 0 & I & H & I & 0 & 1 \\ 0 & 0 & I & H & I & 1 \\ 0 & 0 & 0 & I & H & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\boxed{\begin{aligned} &(H^4+H^2+I)H+H^3 \\ &=H^5+H \end{aligned}}
$$

$$
\boxed{\begin{aligned} &(H^4+H^2+I)1 \\ &+(H^3+H^2+H)1 \\ &=(H^4+H^3+H+I)1 \end{aligned}}
$$

$$
\xrightarrow[(H^4+H^2+I)\otimes(5)+(1)]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & H^5+H & (H^4+H^3+H+I)1 \\ I & H & I & 0 & 0 & 1 \\ 0 & I & H & I & 0 & 1 \\ 0 & 0 & I & H & I & 1 \\ 0 & 0 & 0 & I & H & 1 \end{pmatrix}
$$

阶梯型矩阵

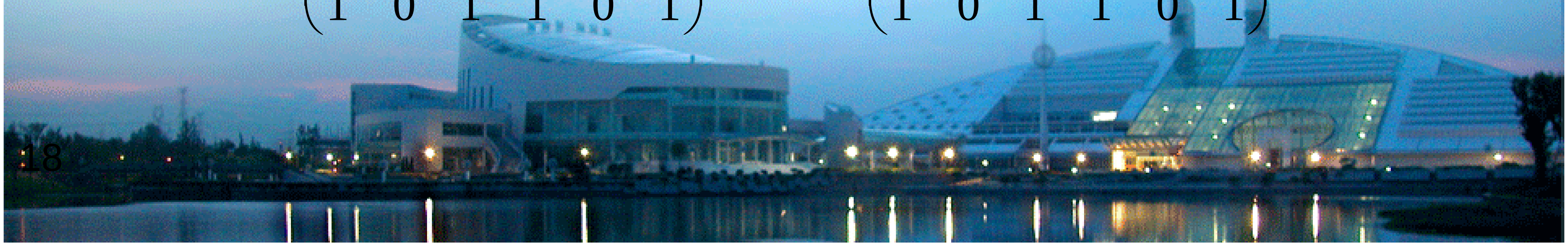
$$
\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P} & \mathbf{M1} \\ \mathbf{I} & \mathbf{H} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{H} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{H} & \mathbf{I} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{H} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{PX}_5 = \mathbf{M1} \\ \mathbf{X}_1 + \mathbf{HX}_2 + \mathbf{X}_3 = \mathbf{1} \\ \mathbf{X}_2 + \mathbf{HX}_3 + \mathbf{X}_4 = \mathbf{1} \\ \mathbf{X}_3 + \mathbf{HX}_4 + \mathbf{X}_5 = \mathbf{1} \\ \mathbf{X}_4 + \mathbf{HX}_5 = \mathbf{1} \end{cases} \qquad \mathbf{M1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{P} = \mathbf{H}^5 + \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} = \mathbf{H}^4 + \mathbf{H}^3 + \mathbf{H} + \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

阶梯型矩阵

$$
(\mathbf{P}\quad \mathbf{M1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(5)+(2)\\(5)+(3)}]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[\substack{(3)+(1)\\(3)+(2)}]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4)+(2)]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$



特解与通解

- 非齐次线性方程组 $\mathbf{PX}_5=\mathbf{M1}$ 的特解为 $(1,1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$
- 齐次线性方程组 $\mathbf{PX}_5=\mathbf{0}$ 的通解为 $(b,a,a+b,a,b)^{\mathrm{T}}$
- 非齐次线性方程组 $\mathbf{PX}_5=\mathbf{M1}$ 的一切解为

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

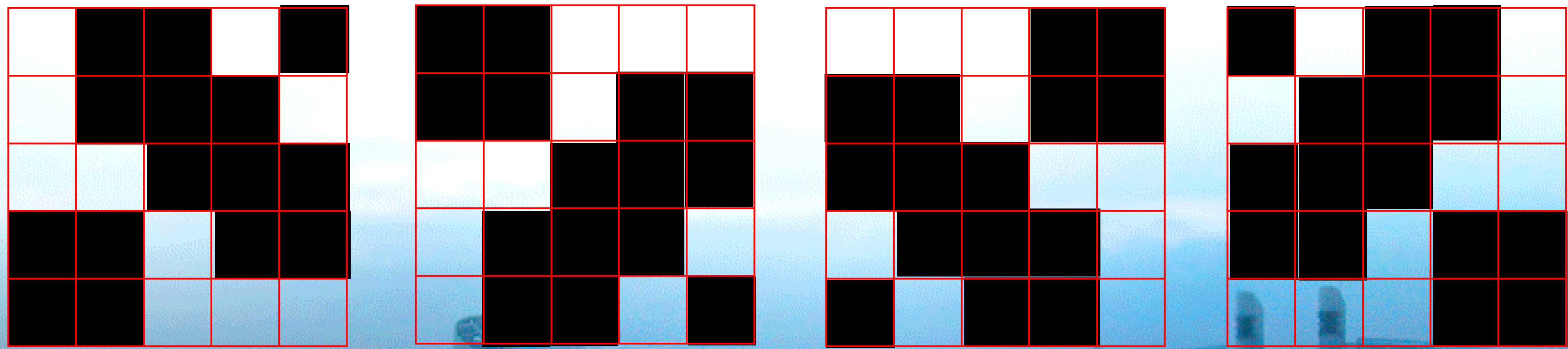
$$\boxed{(\mathbf{P}\ \mathbf{M1})\rightarrow\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&1&1&0&1&1\\0&0&1&1&1&0\\1&0&1&1&0&1\end{pmatrix}}$$

所有方案

浙江大学 ZheJiang University
数学建模

- 将 X_5 代入可依次求得 X_4, X_3, X_2, X_1，由此可求得 $AX=1$ 的一切解
- 无论采用哪种方案均需点击15个方格，任一方案均为次数最少的方案

$$\begin{cases} PX_5 = M1 \\ X_1 + HX_2 + X_3 = 1 \\ X_2 + HX_3 + X_4 = 1 \\ X_3 + HX_4 + X_5 = 1 \\ X_4 + HX_5 = 1 \end{cases}$$

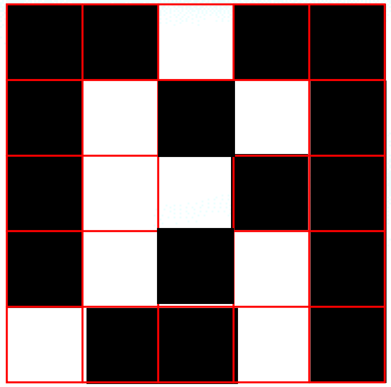


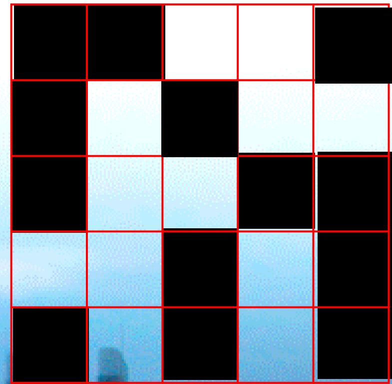
关灯游戏 V2.0

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

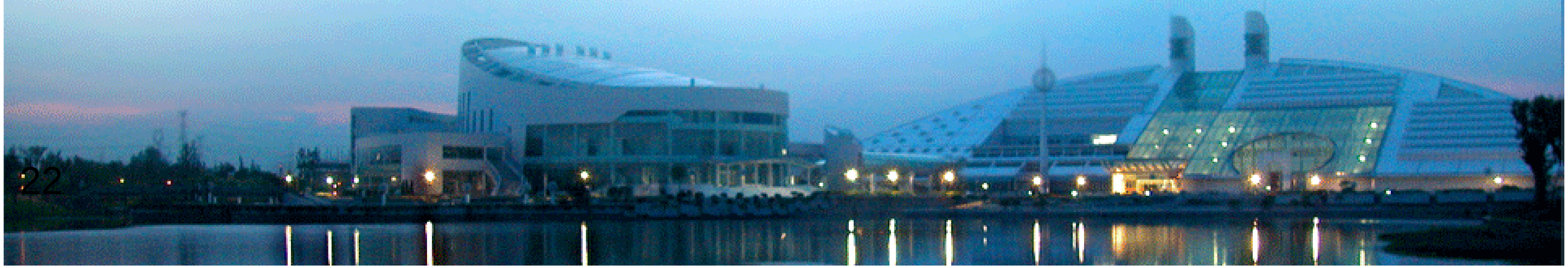
- 给定一个5×5方格棋盘，以及两个棋盘状态 $\mathbf{c}', \mathbf{c}'' \in \mathscr{C}$，是否可以通过点击棋盘上的若干个方格，使棋盘状态由 $\mathbf{c}'$ 变为 $\mathbf{c}''$
- 上述问题等价于判断 $\mathbf{AX} = \mathbf{c}' + \mathbf{c}''$ 是否有解
- 是否可以不通过求解线性方程组，而从状态本身直接判断





任意状态转换

- 是否可以通过点击若干个方格实现任意两种棋盘状态之间的转换
- 对任意向量 $\mathbf{b}$，以方阵 $\mathbf{B}$ 为系数矩阵的线性方程组 $\mathbf{BX}=\mathbf{b}$ 均有解的充要条件是 $\mathbf{B}$ 可逆
  - （充分性）$\mathbf{X}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ 即为 $\mathbf{BX}=\mathbf{b}$ 的一个解
  - （必要性）$\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_n$ 可被 $\mathbf{B}$ 的列向量组线性表出，$n=\mathrm{rank}(\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_n)\le \mathrm{rank}(\mathbf{B})\le n$



浙江大学 ZheJiang University

数学建模

子空间

- $\mathrm{rank}(\mathbf{A})=\mathrm{rank}(\mathbf{P})+20=23<25$, 通过点击若干方格未必能从一个状态变为另一状态
- $g_1, g_2, \cdots, g_{25}$线性相关
- 记 $W=L(g_1, g_2, \cdots, g_{25})$，则 $\dim W=23$

$$(g_1, \cdots, g_{25})=(f_1, \cdots, f_{25})\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \to \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P} \\ \mathbf{I} & \mathbf{H} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{H} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{H} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{H} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

扩充

- 记 $(g_1,\cdots,g_{23},f_{24},f_{25})=(f_1,\cdots,f_{23},f_{24},f_{25})\mathbf{A}'$

$$\mathbf{A}'=\begin{pmatrix}\mathbf{H} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{I} & \mathbf{H} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{H} & \mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{H} & \mathbf{K}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{L}\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P}'\\ \mathbf{I} & \mathbf{H} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{H} & \mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{H} & \mathbf{K}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{L}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L}=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}'=(\mathbf{H}^4+\mathbf{H}^2+\mathbf{I})\mathbf{L}+\mathbf{H}^3\mathbf{K}=\begin{pmatrix}0&1&1&0&1\\1&1&1&1&0\\1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{P}'|\neq 0$$

$$|\mathbf{A}'|\neq 0$$

$$\mathbf{K}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

划分

数学建模

- $g_1,\cdots,g_{23},f_{24},f_{25}$线性无关，是$V$的另一组基，$g_1,\cdots,g_{23}$是$W$的一组基，$f_{24},f_{25},f_{24}+f_{25}\notin W$
- 定义

$$V_1=W$$
$$V_2=f_{24}+W=\{f_{24}+g\mid g\in W\}$$
$$V_3=f_{25}+W=\{f_{25}+g\mid g\in W\}$$
$$V_4=f_{24}+f_{25}+W=\{f_{24}+f_{25}+g\mid g\in W\}$$

划分

- V_1, V_2, V_3, V_4 构成 V 的一个划分
  - 对任意 $t \in V$，t 属于某个 V_k
  - $V_k \cap V_l = \varnothing, k \neq l$
    - 若 $t \in V_2 \cap V_3$，则存在 g', g''，使得 $t = f_{24} + g' = f_{25} + g''$，从而 $f_{24} + f_{25} = g' + g'' \in W$，矛盾

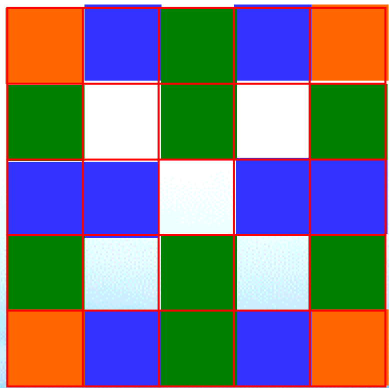
$$V_1 = W$$
$$V_2 = f_{24} + W$$
$$V_3 = f_{25} + W$$
$$V_4 = f_{24} + f_{25} + W$$

- 两变换之和是否属于 W 是 V 上的一种等价关系

变换分类

- 任一 f_i 必属于某个 V_k ，通过四个线性方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{e}_i, \mathbf{AX}=\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_{24}, \mathbf{AX}=\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_{25}, \mathbf{AX}=\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_{24}+\mathbf{e}_{25}$ 解的情况可判断 f_i 属于哪个集合

V_1	V_2	V_3	V_4
7,9,13, 17,19	**2,4,11,12, 14,15,22,24**	**1,5, 21,25**	**3,6,8,10, 16,18,20,23**
仅点击方格	点击方格 + f_{24} 一次	点击方格 + f_{25} 一次	点击方格+ f_{24}, f_{25} 各一次



判别准则

- 记 $U=\{f_i \mid c'_i \neq c''_i\}$，通过施行 U 中所有变换可使棋盘状态由 $\mathbf{c}'$ 变为 $\mathbf{c}''$
- 记 $m_k=|U\cap V_k|, k=1,2,3,4$，当且仅当 m_2,m_3,m_4 均为奇数或均为偶数时棋盘状态转变只需点击棋盘方格即可实现

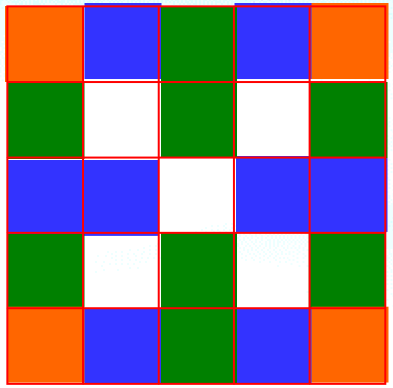
$m_2m_3m_4$	f_{24}	f_{25}
奇奇奇	**1+0+1**	**0+1+1**
奇奇偶	**1+0+0**	**0+1+0**
奇偶奇	**1+0+1**	**0+0+1**
偶奇奇	**0+0+1**	**0+1+1**
奇偶偶	**1+0+0**	**0+0+0**
偶奇偶	**0+0+0**	**0+1+0**
偶偶奇	**0+0+1**	**0+0+1**
偶偶偶	**0+0+0**	**0+0+0**

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

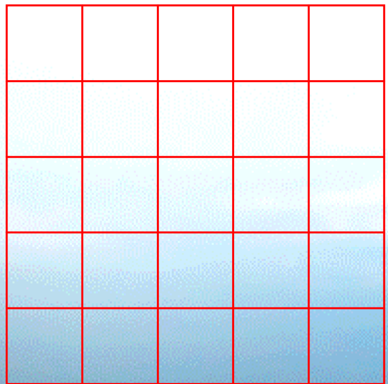
状态分类

- 根据判别准则，可将棋盘状态分为四类。同一类中任何两个状态可通过点击棋盘方格实现转换，不同类中任何两个状态无法仅通过点击棋盘方格实现转换

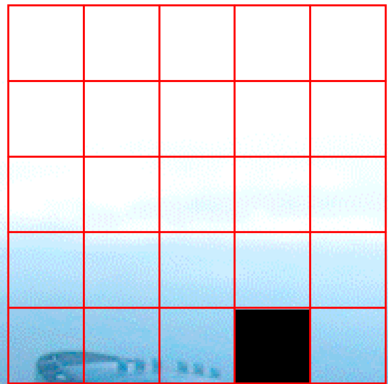


m_4 m_2 m_3

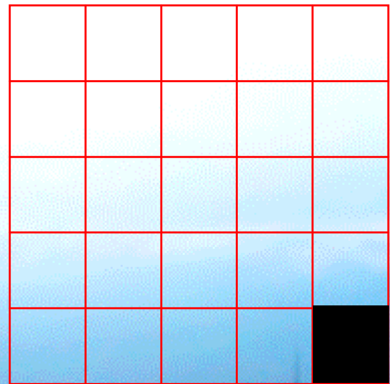
偶偶偶　奇奇奇



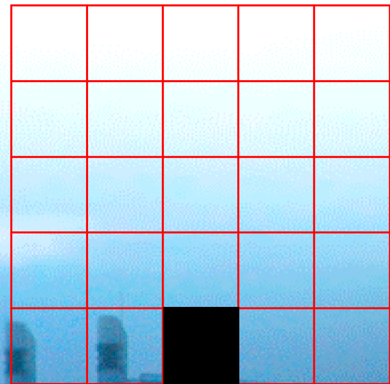
奇偶偶　偶奇奇



偶奇偶　奇偶奇



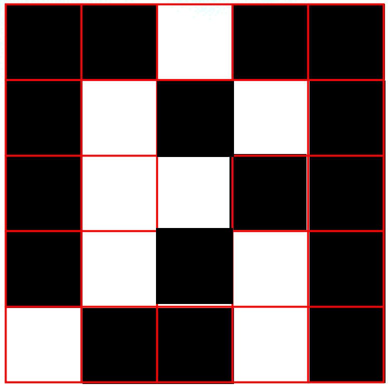
偶偶奇　奇奇偶



浙江大学 ZheJiang University

数学建模

状态分类

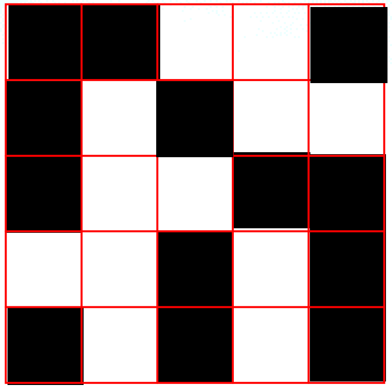


6

3

7

第二类

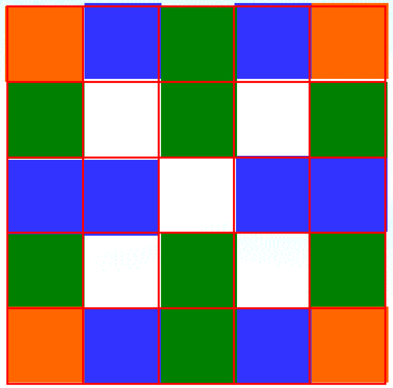


4

4

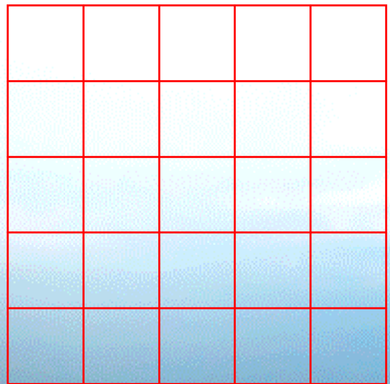
5

第四类

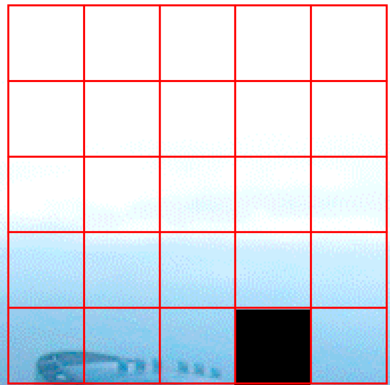


m_4 m_2 m_3

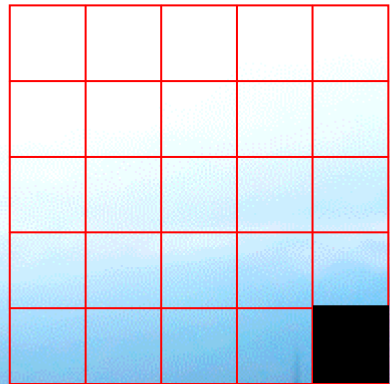
偶偶偶　奇奇奇



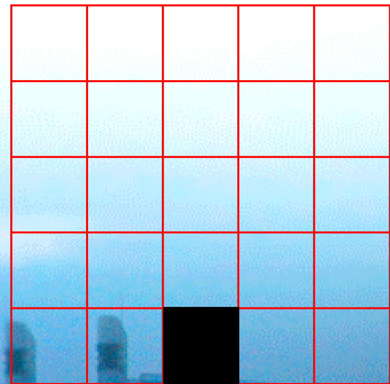
奇偶偶　偶奇奇



偶奇偶　奇偶奇



偶偶奇　奇奇偶




浙江大学
ZheJiang University
谢 谢