第十章-导体和电介质2

1、导体的静电平衡

√ 2、电容器

√ 3、电介质的极化

4、静电场的能量

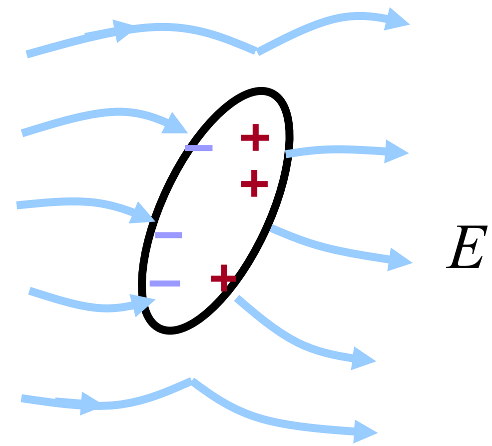
dhlu@zju.edu.cn 鲁定辉

2022年9月20日

静电平衡的导体：

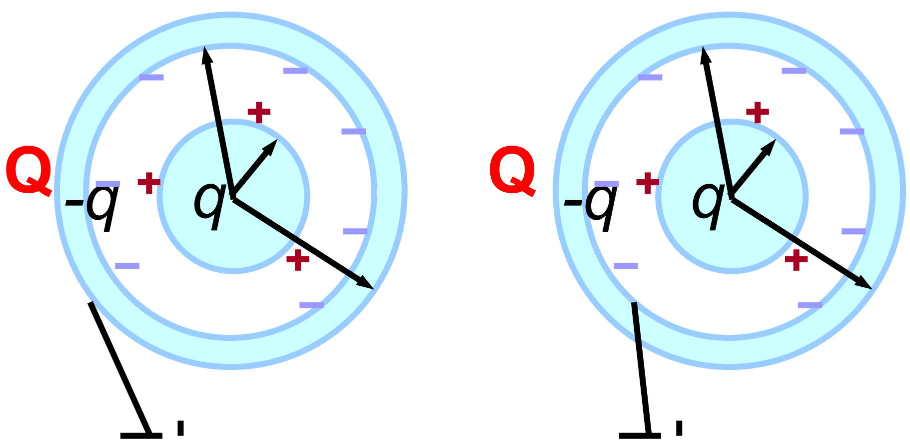
1、导体内部场强处处为零 $\vec{E}_{in} = 0$

2、表面场强垂直于导体表面 $\vec{E}_{表面} \perp 表面$



连通导体各部分电势相等！

接地≠电荷流入大地

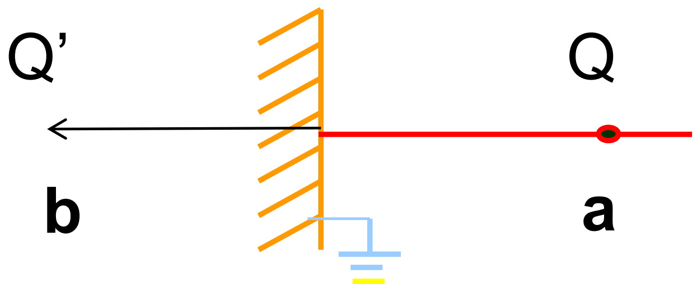


Q：两种接法下电荷分布有什么不同？

接地导体板

满足特定边界条件
的泊松方程

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_i}$$



能不能找到等效电荷（电像），使其激发的电场与感应电荷一样？

静电场的唯一性定理保证了满足确定边界条件的解是唯一的。-试探法

像电荷位置和大小

$$b = -a$$

$$Q' = -Q$$

→Q所受静电力 = Q与Q'之间的库仑力

→导体板上感应电荷的分布为

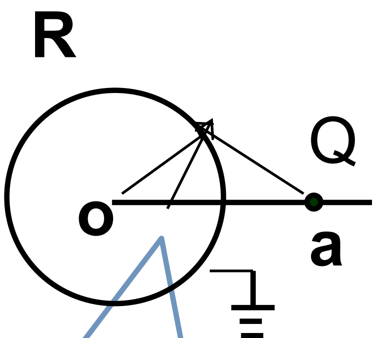
$$\sigma\big|_{z=0} = \varepsilon_0 E_z\big|_{z=0} = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial z}\bigg|_{z=0}$$

电像法1-复杂的感应电荷分布（略）

导体球外一个点电荷

导体球面电势为零

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_i}$$



距o为b的像电荷Q′代替复杂的感应电荷?

$$\phi\big|_R = 0,$$

$$即\ \frac{Q}{r} + \frac{Q'}{r'}\Big|_R = 0$$

$$r = \sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}$$

$$r' = \sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb\cos\theta}$$

像电荷位置和大小

$$b = \frac{R^2}{a}$$

$$Q' = -\frac{R}{a}Q$$

感应电荷分布

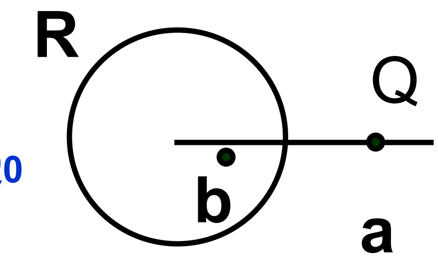
$$\sigma\big|_{r=R} = \varepsilon_0 E\big|_{r=R} = -\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=R}$$

$$\oint \sigma\big|_{r=R} R^2 d\Omega = Q'$$

电像法2

例：点电荷与孤立带电导体球之间的力

导体球带电Q_0



1、电像Q’ & Q 使球面等势！
2、另外电荷Q_0-Q’均匀分布在球面！

$$b=\frac{R^2}{a},\quad Q'=-\frac{R}{a}Q$$

→需要两个电像，才能满足边界条件

电荷Q受力 $$F=\frac{QQ'}{4\pi\varepsilon_0(a-b)^2}+\frac{Q(Q_0+Q')}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{QQ_0}{a^2}-\frac{Q^2R_0^3(2a^2-R_0^2)}{a^3(a^2-R_0^2)^2}\right]=\begin{cases}\text{排斥力，} & a>>R\\ \text{吸引力，} & a\approx R\end{cases}$$

带电导体球可以
吸引同号电荷！

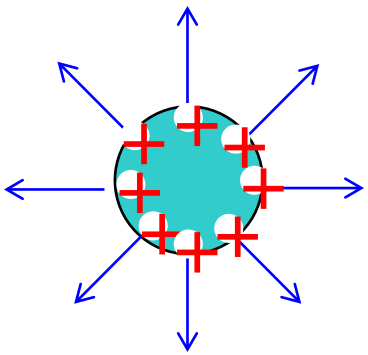
电像法3

§ 10.2 电容器

一、孤立导体的电容

储存
电能的器件

孤立导体球电势



$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\Rightarrow \quad q \propto U$$

定义 $C = \dfrac{q}{U}$

导体升高单位电势所需电量，
反映器件在给定电势差下的储电能力

电池用途不同，
充放电曲线不同

$$C = \frac{q}{U}$$

导体球电容:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R$$

只与半径有关

电容大小与器件的几何形状、结构、电介质有关，而与电荷和电势差无关。

单位：法拉（F）= 库仑/伏特

地球电容：$C = 4\pi\varepsilon_0 R = 4\times3.14\times8.85\times10^{-12}\times6.37\times10^{6}$

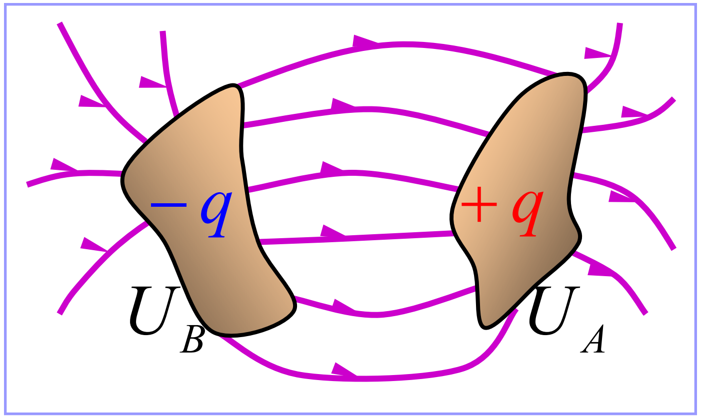
$\approx 7.08\times10^{-4}$ (F)

常用：微法拉（μF）、皮法拉（pF）：

1μF=10^{-6}F，1pF=10^{-6}μF

二、典型电容器

实用电容器由两个彼此靠近的导体组成。极板间距很小



→提高能量密度

→使电容不受外界影响

计算步骤1）让极板分别带电 $\pm q$；
2）求极板间场强；再求 $U_A - U_B$；
3）得出电容

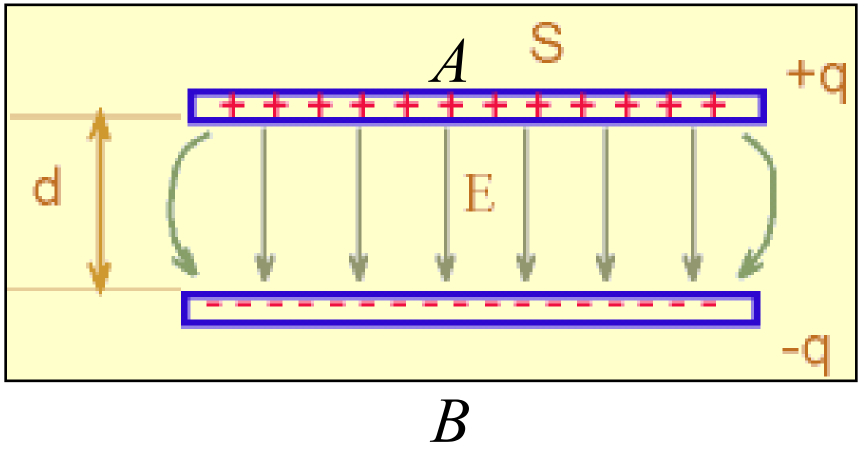
$$C = \frac{q}{U_A - U_B}$$

q为任一导体所带电量，

U_A-U_B为电势差

掌握 1) 平板电容
2) 同轴圆柱型电容
3) 同心球形电容

（1）平行板电容



设极板分别带电+q和-q，忽略边缘效应，板间为均匀场强（高斯定理）

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

板间真空，极板面积S，间距d

电势差

$$U_A-U_B=\int_{R_A}^{R_B}\vec{\mathbf{E}}\cdot\mathrm{d}\vec{\mathbf{l}}$$

$$=Ed$$

$$=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}d=\frac{qd}{\varepsilon_0 S}$$

由电容定义

$$C=\frac{q}{U_A-U_B}=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

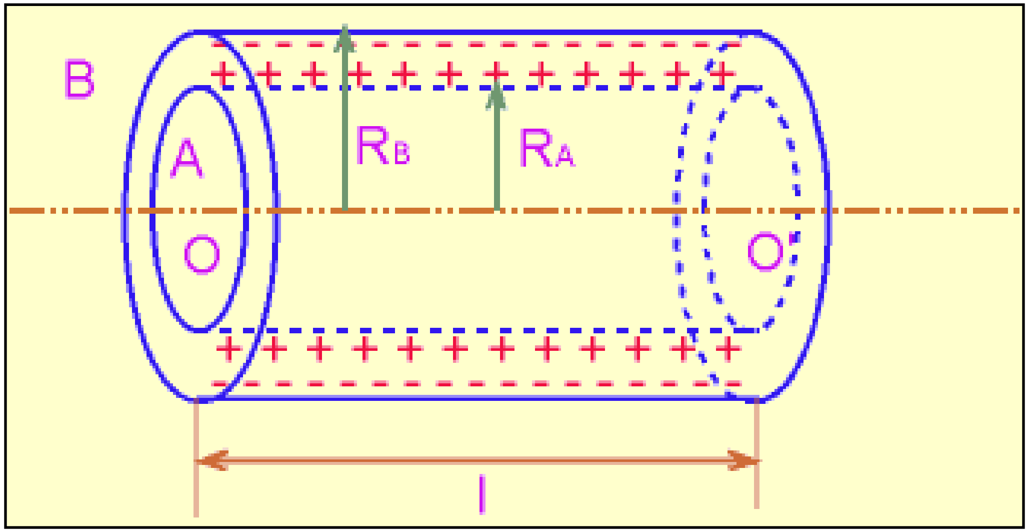
正比于板面积，与间距成反比，应记住！

（2）同轴圆柱形电容

带电+q和-q，忽略边缘效应

电荷线密度 $\lambda = \frac{q}{l}$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad , R_A < r < R_B$$



两同轴金属圆柱面，柱面半径 R_A、R_B，长$l >> (R_B - R_A)$。

电势差

$$U_A - U_B = \int_{R_A}^{R_B} \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{l}}$$

$$= \int_{R_A}^{R_B} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \mathrm{d}r$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_B}{R_A}$$

→电容

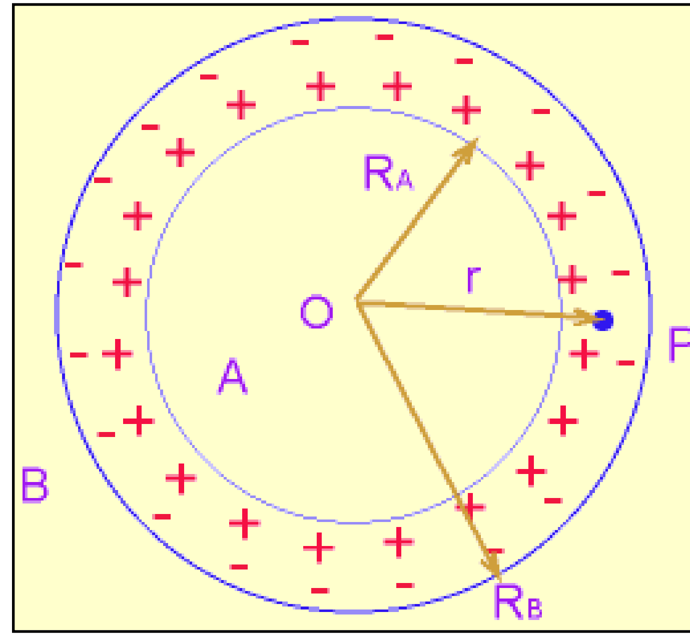
$$C = \frac{q}{U_A - U_B} = \frac{\lambda l}{U_A - U_B} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln \frac{R_B}{R_A}}$$

（3）同心球形电容器

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},\quad R_A<r<R_B$$

$$U_A-U_B=\int_{R_A}^{R_B}\vec{\mathbf{E}}\cdot\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}$$

$$=\int_{R_A}^{R_B}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A}-\frac{1}{R_B}\right)$$

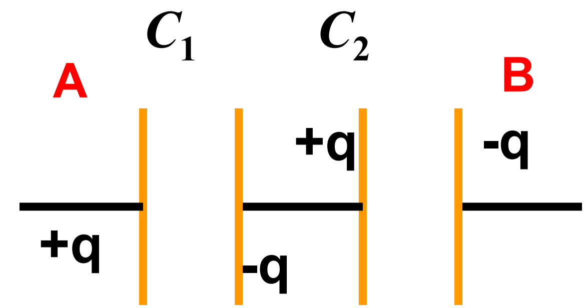


两同心金属球壳半径 R_A、R_B，电荷+q、-q

→电容 $$C=\frac{q}{U_A-U_B}=\frac{4\pi\varepsilon_0 R_A R_B}{R_B-R_A}$$

验证：$R_B\to\infty$，$C=4\pi\varepsilon_0 R_A$，即孤立导体球电容。

三、电容器的串联和并联



◆ C_1、C_2、…C_n串接，**极板电量q**，

中间极板有感应电荷，电势差U_1、U_2…U_n，

总电势差 U_A-U_B= U_1+U_2…+U_n

等效总电容= 所带总电量与两端电势差之比。

$$\frac{1}{C}=\frac{U_A-U_B}{q}=\frac{U_1+U_2+\cdots+U_n}{q}$$

$$=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n}$$

→串联后总电容减小，但总耐压增加。

电容器的性能指标：

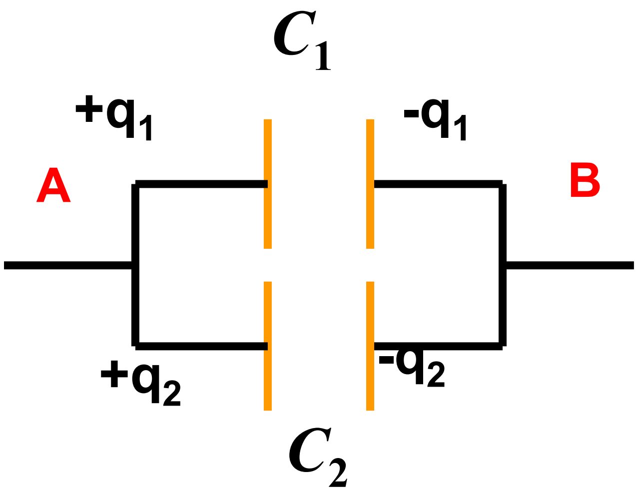
电容值

和耐压（最高工作电压）

◆ C_1、C_2、$\cdots C_n$ 并接，各子电容电量q_1、$q_2\cdots q_n$，

总电量 $Q = q_1+q_2+\cdots+q_n$

电势差 U_A-U_B



$$C=\frac{Q}{U_A-U_B}=\frac{q_1+q_2+\cdots+q_n}{U_A-U_B}$$

$$=C_1+C_2+\cdots+C_n$$

→并联使总电容增加。

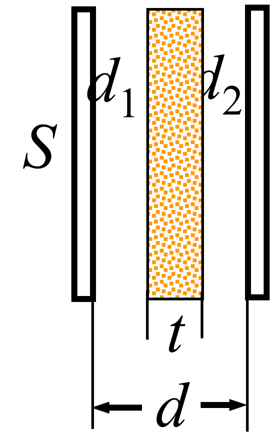
但耐压值为其中最低耐压值。

电容串并联的合成公式与电阻串并联正好相反

电容并联

例 空气中平板电容，极板面积S，间距d（远小于极板线度），在两板间平行插入一面积也是S、厚度 t的金属片，求该电容器的电容。

解 插入金属片，相当于两个电容的串联。



设左右间距为d_1、d_2，

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1}, \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_2}$$

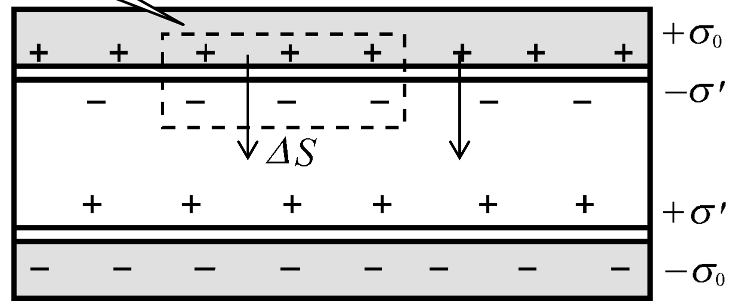
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$= \frac{d_1}{\varepsilon_0 S} + \frac{d_2}{\varepsilon_0 S} = \frac{d-t}{\varepsilon_0 S} \rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 S}{d-t}$$

即板间距d-t 的电容

∵ q不变 →两板间电势差变小，C变大

高斯面



一、电介质的影响

实验：将介质充入孤立平板电容，
类似地，极板间电势差变小

→ E 变小

→高斯面内的净电荷变小

→绝缘介质表面必然新出现了负的束缚电荷

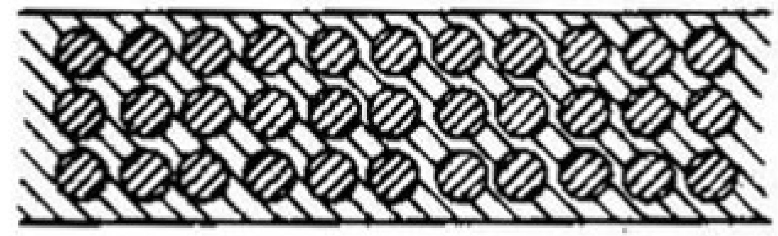
若电势差缩小到 $\dfrac{1}{\varepsilon_r}$ 倍

$$C=\frac{q}{U_A-U_B}=\varepsilon_r C_{\text{真空}}$$

介质使电容增大，相对介电常数

电介质的定性作用

小导体球模型→现代分子极化图像

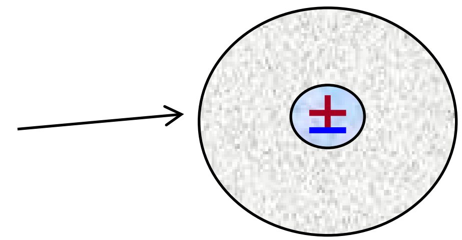


二、电介质的极化规律

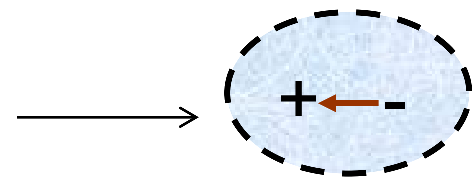
1) 无极和有极分子（整体电中性）

- 无极分子：H_2，O_2，N_2

正负电中心重合，电偶极矩 $\vec{p} = 0$。

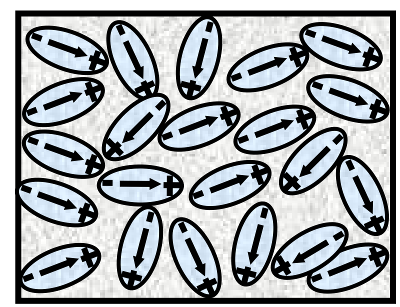


- 有极分子：CO，NO，HCl，H_2O



正负电中心不重合，$\vec{p} \neq 0$。

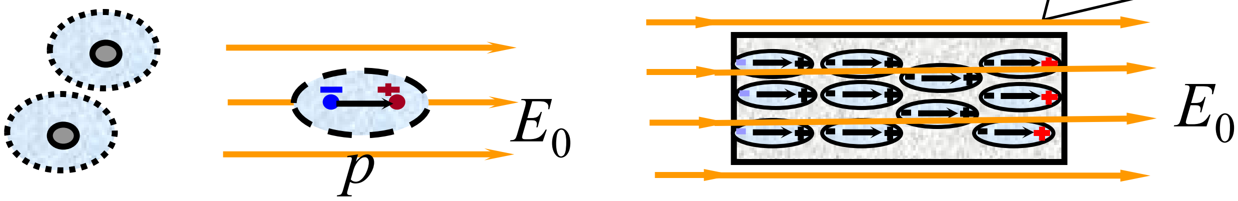
无外电场时，大量有极分子的等效电偶极矩之和 $\sum \vec{p} = 0$

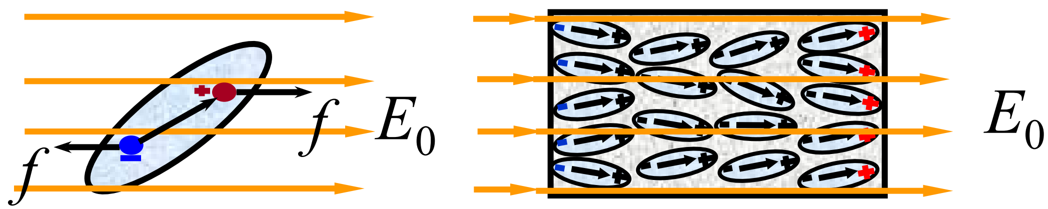


电介质的微观图像

2）外电场中的极化图像

无极分子的位移极化





有极分子以取向极化为主，
位移极化仅占**10%**

极化强度：

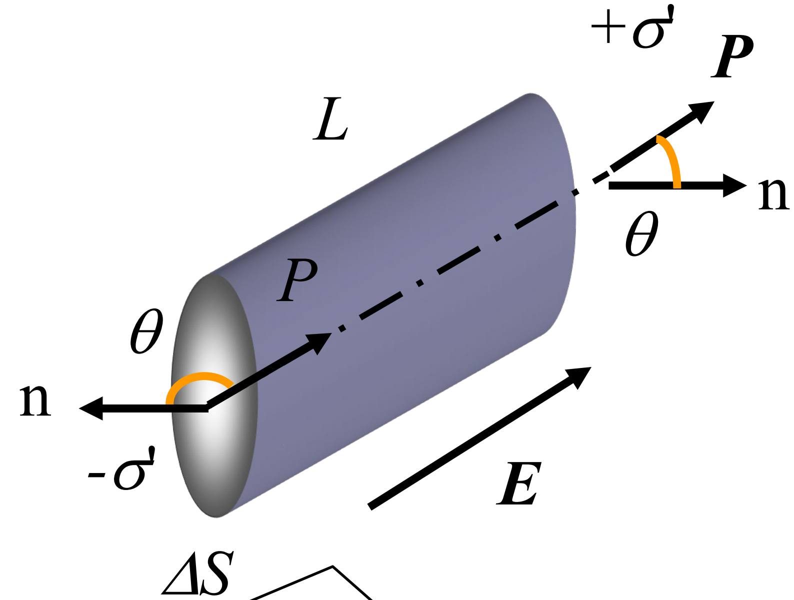
单位体积内分子电偶极矩的矢量和

$$\vec{\mathbf{P}}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\sum \vec{\mathbf{p}}_i}{\Delta V}$$

单位：库仑/米^2(C/m^2)

若介质和外场都均匀，束缚电荷只出现在介质表面，
内部的影响会互相抵消。

束缚电荷面密度与极化强度



端面有束缚电荷，电偶极矩

$$q'\vec{\mathbf{L}} = \sigma'\Delta S \cdot \vec{\mathbf{L}}$$

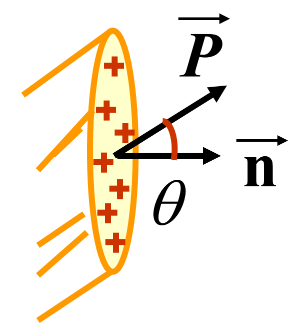
即柱体内电偶极矩的矢量和

$$\sum \vec{\mathbf{p}}_{\mathrm{i}} = \sigma'\Delta S \cdot \vec{\mathbf{L}}$$

均匀极化介质内，沿P取斜柱体，底面ΔS，体积$\Delta V=\Delta SL\cos\theta$

极化强度 $$\left|\vec{\mathbf{P}}\right| = \frac{\left|\sum \vec{\mathbf{p}}_{\mathrm{i}}\right|}{\Delta V}$$

$$= \frac{\sigma'\Delta SL}{\Delta SL\cos\theta} = \frac{\sigma'}{\cos\theta} \Rightarrow \sigma' = \left|\vec{\mathbf{P}}\right|\cos\theta = P_n = \vec{\mathbf{P}}\cdot\vec{\mathbf{n}}$$



束缚电荷面密度= P在表面的法向分量$\mathbf{P_n}$

$0 < \theta < \pi/2$，极化电荷为正

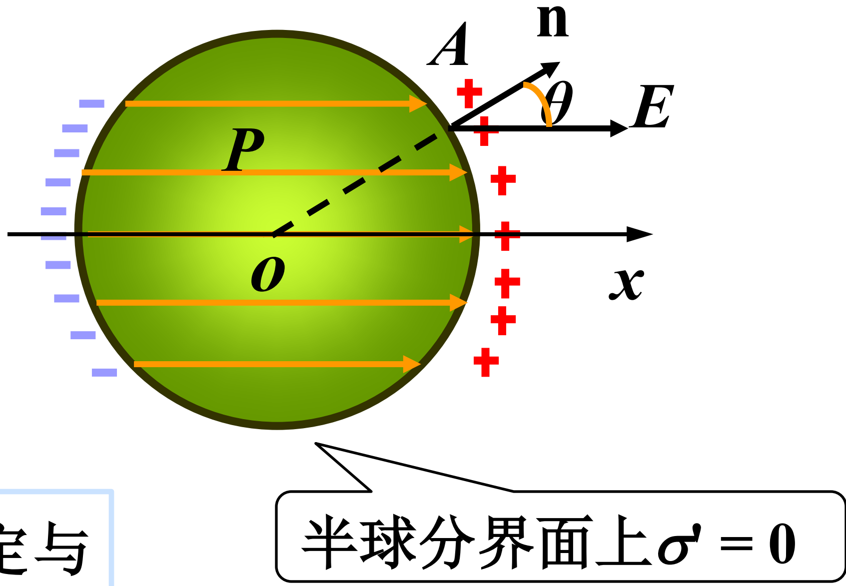
例 均匀极化、半径R的电介质球，已知极化强度P。求介质球表面上极化面电荷的空间分布。

解：由 $\sigma' = P_n = P\cos\theta$ ，极化面电荷不均匀！

右半球 $\theta < \dfrac{\pi}{2}$ ，σ'为正；

左半球 $\theta > \dfrac{\pi}{2}$ ，σ'为负；

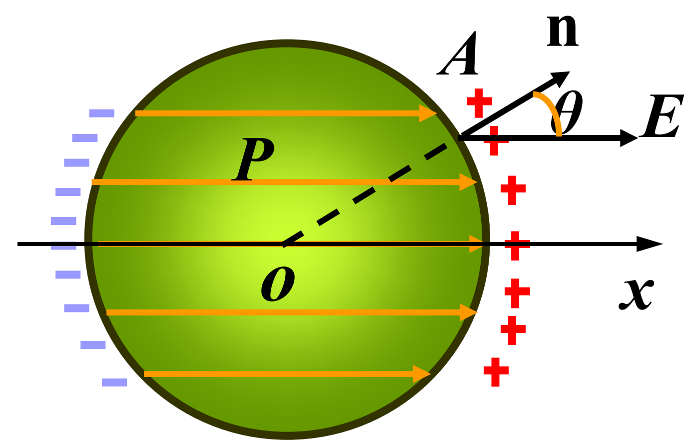
中轴线两端θ=0，π；σ' 值最大



极化电荷在介质内部产生的电场必定与外电场的方向相反，称退极化场。

极化电荷在球心产生的附加场：

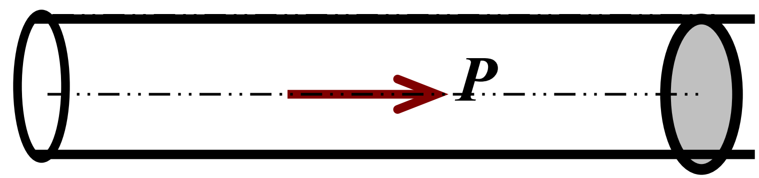
$$E' = \frac{P}{3\varepsilon_0}$$



→可证明，在介质球内部的电场是均匀的

$$E'_{中} = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 (l/2)^2} - \frac{-q'}{4\pi\varepsilon_0 (l/2)^2}$$

$$= \frac{2PS}{\pi\varepsilon_0 l^2}$$



→介质纵向尺度越大，退极化场越弱

请阅读p72, 压电效应和电致伸缩，铁电体(传感器，显示等应用)

§ 10.4 电介质中的静电场

对于大多数各向同性电介质，场强不大条件下，P与**总电场**成正比（线性的实验规律）

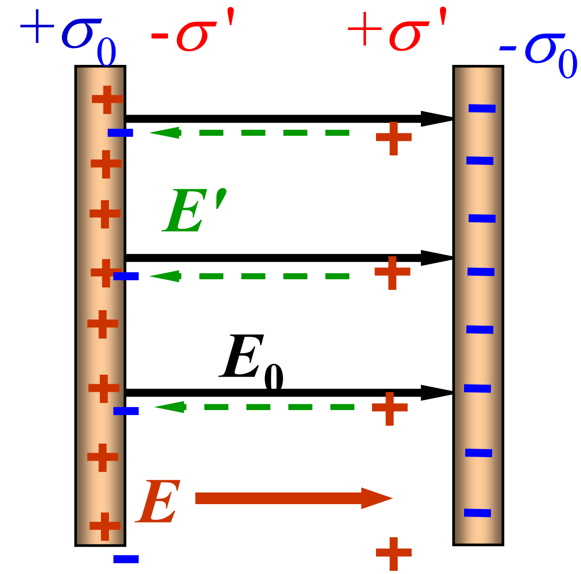
$$\rightarrow \quad \vec{\mathbf{P}} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}}$$

无量纲的极化率χ_e

空气-0.00059，玻璃-2.4

油-3.5，

铁电体可达 100,000！



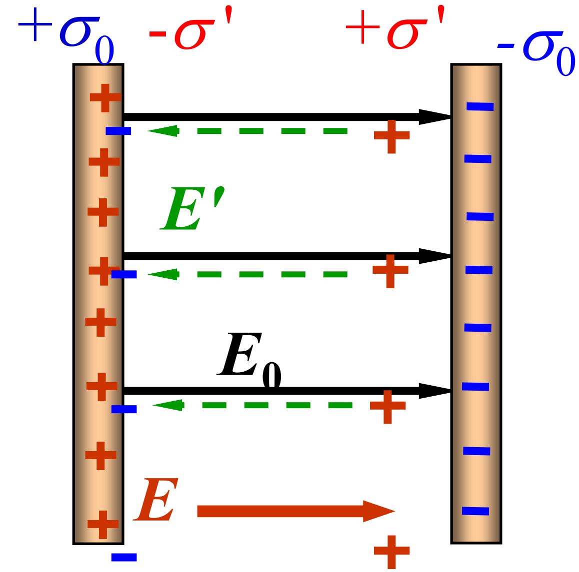
介质内总电场 $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$

通常，χ_e与温度、密度有关

$$\chi_e \propto 1/T, \ Curie's\ law$$

$$\chi_e = \frac{N\alpha}{1-(N\alpha/3)}, \ Clausius-Mossotti$$

◆ 平板电容器内介质电场



极板上自由电荷面密度 $\pm\sigma_0$，

介质端面束缚电荷面密度 $\pm\sigma'$，

它们分别激发均匀电场

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \qquad \text{和} \qquad E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

总电场与自由电荷的电场同方向

$$E = E_0 - E' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

依赖于未知束缚电荷？

$\because P = \sigma'$

$P = \chi_e \varepsilon_0 E$

彼此依赖，相互制约，综合分析

将附加场 $E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{P}{\varepsilon_0} = \chi_e E$

代入 $E = E_0 - E'$

$= E_0 - \chi_e E$

总电场

$$E = \frac{E_0}{1+\chi_e} = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

$\varepsilon_r = 1+\chi_e$

称为相对介电常数

束缚电荷面密度和自由电荷关系

$$\sigma' = \chi_e \varepsilon_0 E$$

$$= \frac{\chi_e}{1+\chi_e}\sigma_0$$

$$= (1-\frac{1}{\varepsilon_r})\sigma_0$$

适用于线性、各向同性电介质

二、电位移矢量D和介质内的高斯定理

极化电荷是静电荷→ 激发的场就是静电场

∴静电场环路定理和高斯定理形式上仍成立！

◆ 环路定理： $\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$

极化电荷产生的仍是无旋场

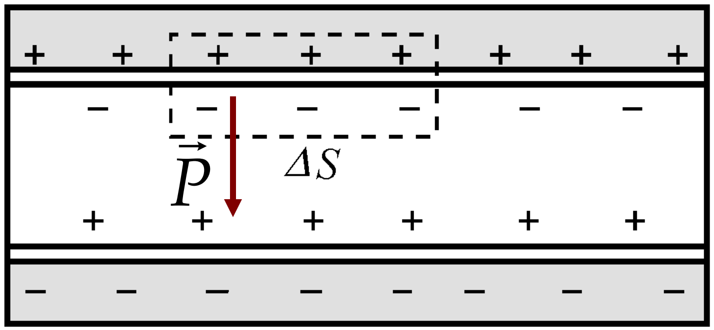
◆ 介质内的高斯定理：

$$\oint_S \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{S}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q$$

q' 未知，应设法替代或消去

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\sum q_0 + \sum q'\right)$$

$$\oint_S \vec{\mathbf{P}}\cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{S}} = P_n \Delta S = \sigma' \Delta S$$



代入高斯定理（注意负号），

$$\oint_S \vec{\mathbf{E}}\cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{S}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\sum q_0 - \sigma'\Delta S\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\sum q_0 - \oint_S \vec{\mathbf{P}}\cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{S}}\right)$$

$$\Rightarrow \oint_S (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P})\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum q_0$$

引入电位移矢量（辅助矢量）

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\Rightarrow \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum q_0$$

$$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \chi_e \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}}$$

$$= (1+\chi_e)\varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}}$$

$$= \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} = \varepsilon\ \vec{\mathbf{E}}$$

D 仅与 q_0 有关 ∴均匀介质内连续

ε 为介电常数或电容率

三、电介质在电容器中的作用

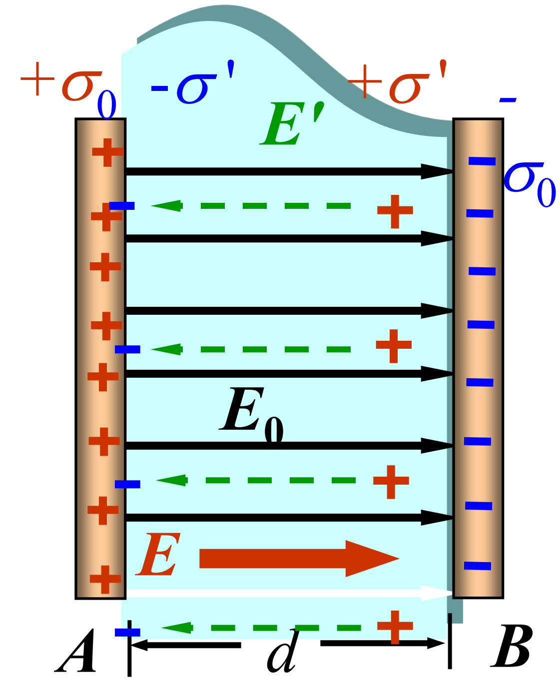
◆ 增大电容量

$$C_0=\frac{q_0}{U_0}=\frac{q_0}{E_0 d}$$

$$C=\frac{q_0}{U}=\frac{q_0}{Ed}$$

$$=\frac{\varepsilon_r q_0}{E_0 d}=\frac{\varepsilon_r q_0}{U_0}=\varepsilon_r C_0$$

→可缩小器件体积，达到同样电容



◆ 增大耐压能力

$$E=\frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

空气击穿强度： 10^3V/mm

多数电介质的击穿场强比空气高（几倍-几十倍）

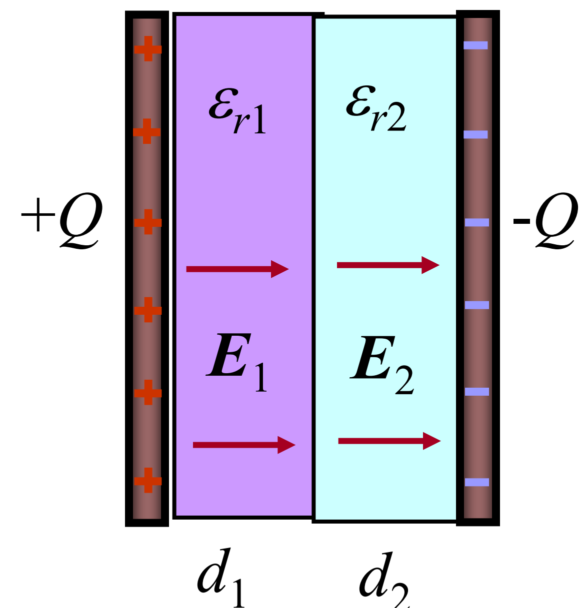
例：平板电容极板面积S，两导体极板间充有两种各向同性均匀电介质，厚度d_1和d_2，相对介电常数ε_{r1}和ε_{r2}。已知极板带自由电荷 $+Q$ 和 $-Q$，求

（1）两介质中场强；

（2）两介质中的极化强度；

（3）两介质交界面的极化电荷面密度；

（4）求电容。



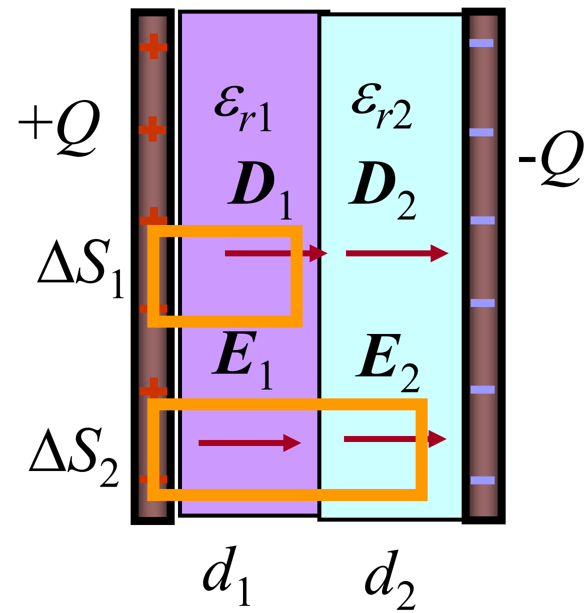
从哪里切入？

通常先求出电位移矢量D!

解1）作二个柱形高斯面S_1和S_2，由高斯定理（对称性分析）

$$\oint_{S_1} \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = D_1\Delta S_1 = \sum q_0 = \sigma\Delta S_1$$

$$\oint_{S_2} \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = D_2\Delta S_2 = \sum q_0 = \sigma\Delta S_2$$



$$\Rightarrow \quad D_1 = D_2 = \sigma, \qquad \sigma = \frac{Q}{S}$$

由 $D_1 = \varepsilon_0\varepsilon_{r1}E_1$ ， $D_2 = \varepsilon_0\varepsilon_{r2}E_2$

得场强

$$E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}} = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}S}$$

$$E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}} = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}S}$$

2） 极化强度 $P=\varepsilon_0\chi_e E$

$$=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\frac{Q}{S}$$

$$\rightarrow P_1=\frac{\varepsilon_{r1}-1}{\varepsilon_{r1}}\frac{Q}{S}$$

$$P_2=\frac{\varepsilon_{r2}-1}{\varepsilon_{r2}}\frac{Q}{S}$$

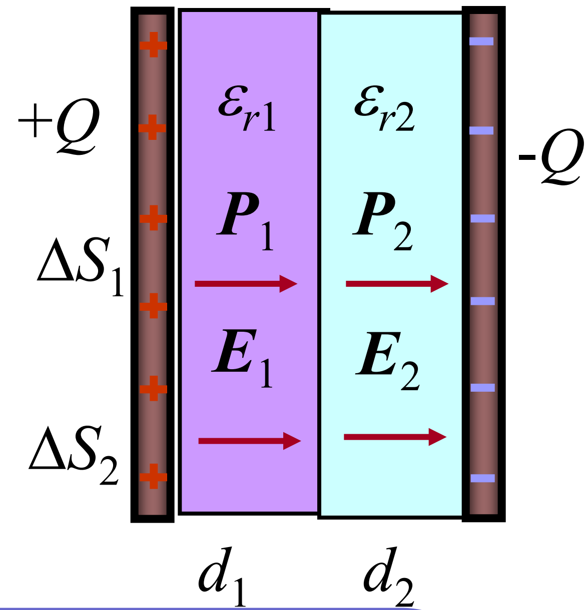
3） 介质交界面的极化电荷面密度（）

$$\sigma'=\sigma_1'+\sigma_2'$$

$$=P_1-P_2=\frac{\varepsilon_{r1}-1}{\varepsilon_{r1}}\frac{Q}{S}-\frac{\varepsilon_{r2}-1}{\varepsilon_{r2}}\frac{Q}{S}$$

符号！

$$=\frac{\varepsilon_{r1}-\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}\frac{Q}{S}$$



（4）先求两极板间的电势差

$$\Delta U = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{Qd_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} S} + \frac{Qd_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} S} = \frac{Q}{S}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}\right)$$

总电容 $C = \dfrac{Q}{\Delta U}$

$$= \frac{1}{\dfrac{d_1}{\varepsilon_1 S} + \dfrac{d_2}{\varepsilon_2 S}}$$

$\rightarrow$ $C = \dfrac{1}{\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}}$

两个电容的串联

推广到多层介质 $C = \dfrac{Q}{\Delta U} = \dfrac{S}{\dfrac{d_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{d_2}{\varepsilon_2} + \cdots + \dfrac{d_n}{\varepsilon_n}}$

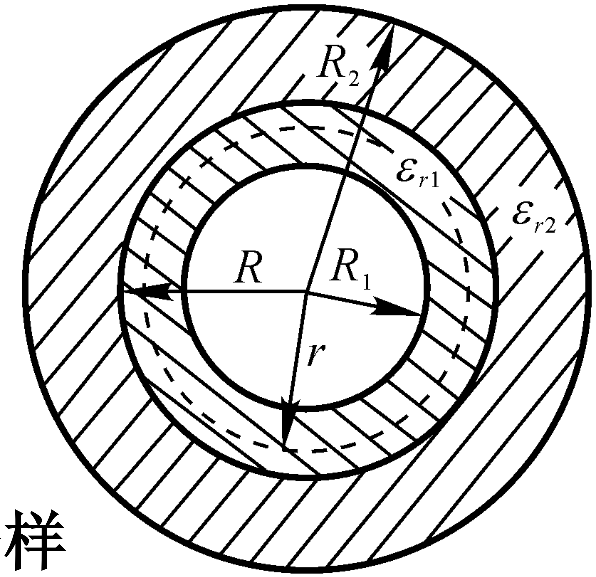
球壳电容

$$C_1=\frac{1}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R})}$$

$$C_2=\frac{1}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_2})}$$

$$C=\frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}}$$

与直接积分的结果一样



作业set2A（电容）10.11，10.13，10.14,

（介质）10.15，10.18, 10.19

1、通常周四截止

2、每次作业需拍照后做成一个PDF文档递交,不要弄乱