f: $\forall u>a$, f在$[a,u]$上R-可积

$\int_a^{+\infty} f(x)dx \Leftrightarrow \lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)dx = \lim_{u\to\infty} F(u)$ $\exists$ 存在.

$\Downarrow$ Cauchy收敛准则

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists G>a$, s.t. $\forall u_1, u_2>G$, $\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$.

性质: ①线性性: $\int_a^{+\infty}(\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int_a^{+\infty} f(x)dx + \beta\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

②f在任何$[t,u]$上可积, 则对$a<b$. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$与$\int_b^{+\infty} f(x)dx$ 同敛态!

③$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists G>0$, s.t. $\forall u>G$, $\left|\int_u^{+\infty} f(x)dx\right|<\varepsilon$.

④f在$[a,u]$上可积..($\forall u>a$). 则若$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$收敛, 则$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

但是: f: R-可积 $\Rightarrow |f|$: R可积.

$\not\Leftarrow$

即 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

反常: $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx \overset{④}{\Rightarrow} \int_a^{+\infty} f(x)dx$. $\begin{cases}\text{绝对收敛一定收敛} \\ \text{条件收敛}\begin{cases}\int_a^{+\infty}|f(x)|dx \text{ 不收敛} \\ \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ - -}\end{cases}\end{cases}$

$\not\Leftarrow$

④ proof: $\forall u_2>u_1>a$.

$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)dx\right| \le \int_{u_1}^{u_2}|f(x)|dx$, 由 Cauchy 收敛准则.

$\forall\varepsilon>0, \exists G>0$, s.t. $\forall u_1, u_2>G$, $\left|\int_{u_1}^{u_2}|f(x)|dx\right|<\varepsilon$. 从而 $\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)dx\right|<\varepsilon$.

再由 Cauchy收敛准则, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛.

非负函数的无穷限反常积分的判别 $f(x)\ge 0$

1. $f(x)\ge 0$ $(x\ge a)$ $F(u)=\int_a^u f(x)dx$ 单增

$\lim_{u\to\infty}\int_a^u f(x)dx$ 收敛 $\Leftrightarrow \lim_{u\to\infty} F(u)$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $F(u)$ 有界 (单调有界定理)

2. f, g是定义在 $[a,+\infty)$ 上的非负函数. f, g在其上R-可积 且 $f(x)\le g(x)$

则 大的收敛,小的也收敛. 小的发散,大的也发散.

极限形式. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=c$ (f, g条件如上)

① 当 $0<c<+\infty$ 时, f与g同敛态.

② 当 $c=0$ 则 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛.

③ 当 $c=+\infty$, 则由 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 发散 $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散.

p-积分 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ $(a>0)$. $\begin{cases} p>1 & \text{收敛.} \\ 0<p\le 1 & \text{发散.} \end{cases}$

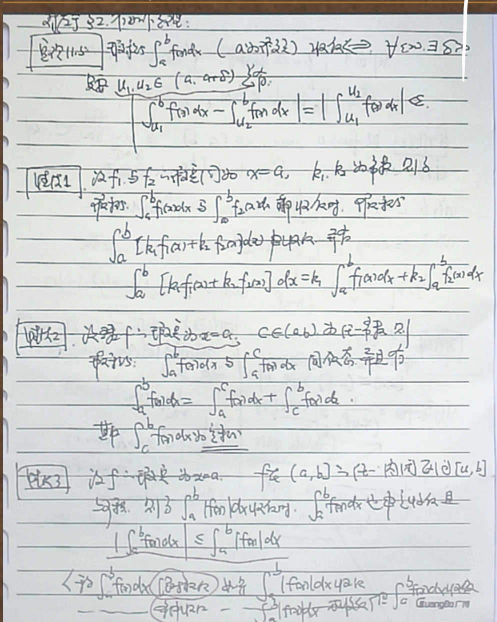
令 $g(x)=x^{-p}$ $a>0$ $f(x)$是定义在 $[a,+\infty)$ 上的非负函数.

① $0\le f(x)\le g(x)=\frac{1}{x^p}$. $p>1$ 时. $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛.

② $f(x)\ge\frac{1}{x^p}$. $0<p\le 1$. $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散.

极限形式

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^p f(x)=\lambda$ $\begin{cases} p>1.\ 0\le\lambda<+\infty & \text{则 } \int_a^{+\infty}f(x)dx \text{ 收敛.} \\ p\le 1\quad 0<\lambda\le+\infty. & \text{则 } \int_a^{+\infty}f(x)dx \text{ 发散} \end{cases}$



§2.

$\int_a^b f(x)dx$ ... $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$

$u_1, u_2\in(a, a+\delta)$

$\left|\int_{u_1}^b f(x)dx-\int_{u_2}^b f(x)dx\right|=\left|\int_{u_1}^{u_2}f(x)dx\right|<\varepsilon$.

$x=a$, k_1, k_2

$\int_a^b f_1(x)dx$ 与 $\int_a^b f_2(x)dx$

$\int_a^b[k_1f_1(x)+k_2f_2(x)]dx$

$\int_a^b[k_1f_1(x)+k_2f_2(x)]dx=k_1\int_a^b f_1(x)dx+k_2\int_a^b f_2(x)dx$

$x=a$, $c\in(a,b)$

$\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_c^b f(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

$\int_c^b f(x)dx$

$x=a$. f 在 $(a,b]$ $[u,b]$

$\int_a^b|f(x)|dx$ $\int_a^b f(x)dx$

$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx$

$\int_a^b f(x)dx$ $\int_a^b|f(x)|dx$

一般反常积分

定理：Dirichlet判别法

$F(u)=\int_a^u f(x)dx$ 在 $[a,+\infty)$ 有界. $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调且趋于 0

则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛

定理：Abel判别法.

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛. $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调有界.

则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

1.

例 8.2.9 设 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛，且 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 一致连续，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

2. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上单调. 且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛. 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

且 $f(x)=o(\frac{1}{x})$ $x\to+\infty$

proof: 不妨设 $f(x)$ 单减（如增加负号）. 则 $f(x)$ 非负.

否则 $\exists x_0$, s.t. $f(x_0)<0$. 则当 $x>x_0$ 时 $f(x)\le f(x_0)$. 此时的 R-积分趋向无穷大. 与 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛矛盾.

由于 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛. $\Rightarrow \forall \varepsilon>0$, $\exists M>0$, s.t. $\forall x>M$. $\frac{\varepsilon}{2}>\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt\ge\frac{x}{2}f(x)$

即 $xf(x)\le\varepsilon$. $\forall x>M$ 即 $xf(x)\to0$ $(x\to+\infty)$. 则 $f(x)=o(\frac{1}{x})$ #.

$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin bx}{x^\lambda}dx$ $(b\ne0)$. 收敛性.

不妨设 $b>0$. 否则考虑 $-I$ 的收敛性. 设 $bx=t$. 则 $I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{b}\frac{\sin t}{(b^{-1}t)^\lambda}dt$

即 $I=b^{\lambda-1}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t^\lambda}dt$

令 $I_0=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\lambda}dx=\int_0^1\frac{\sin x}{x^\lambda}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\lambda}dx$. $=I_1+I_2$.

对 I_2. $\lambda>1$ 绝对收敛. $0<\lambda\le1$ 条件收敛. $\lambda<0$. 发散.

对 $I_1=\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\lambda}dx$，当 $0<\lambda\le1$ 时，$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x^\lambda}=\lim\limits_{x\to0}x^{1-\lambda}=\begin{cases}1 & \lambda=1\\ 0 & 0<\lambda<1\end{cases}$

即 I_1 是 R-积分.（把 $x=0$ 的极限补充）.

再看 $\lim\limits_{x\to0}x^{\lambda-1}\frac{\sin x}{x^\lambda}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ 当 $0<\lambda-1<1$ 即 $1<\lambda<2$ 时，收敛.

当 $\lambda-1\geq1$，即 $\lambda\geq2$ 时，I_1 发散.

当 $\lambda\le0$ 时，$I_1=\int_0^1 x^{-\lambda}\sin x\,dx$ 收敛.