点集拓扑小测

请写上姓名、学号和选课序号

一(5分)、设X是T_1空间，A是X的子集，求证：$A' = \bigcap_{x\in A} \overline{A\setminus\{x\}}$.

二(3分)、求证：X是Hausdorff空间当且仅当$\Delta = \{(x,x) | x \in X\}$是$X\times X$的闭子集。

三(2分)、设A为欧氏空间$\mathbb{R}^n$的可数子集，求证：$\mathbb{R}^n \setminus A$是稠密的。

一(5分)、设X是T_1空间，A是X的子集，求证：$A' = \bigcap_{x\in A} \overline{A\setminus\{x\}}$.

证明. **1**. 左边是右边的子集: 设$a \in A'$, 任取$x \in A$, 需证$a \in \overline{A\setminus\{x\}}$.

若$x = a$, 则由极限点的判别：

$$x \in A' \Longleftrightarrow x \in \overline{A\setminus\{x\}} \Longleftrightarrow \text{包含}x\text{的任意开邻域}U, U\bigcap A\setminus\{x\} \neq \emptyset, \tag{0.1}$$

可得$a \in \overline{A\setminus\{a\}}$.

若$x \neq a$, 任取包含a的开集U, 由T_1条件，$U\setminus\{x\}$也为包含a的开邻域，同样由极限点的判别0.1, $(U\setminus\{x\})\bigcap A\setminus\{a\} \neq \emptyset$, 从而$U\bigcap A\setminus\{x\} \neq \emptyset$, 由闭包的判别

$$x \in \bar{Y} \Longleftrightarrow \text{包含}x\text{的任意开邻域}U, U\bigcap Y \neq \emptyset, \tag{0.2}$$

知$a \in \overline{A\setminus\{x\}}$.

或者: 用T_1空间的如下性质：

$$x \in A' \Longleftrightarrow \text{包含}x\text{的任意开邻域}U, U\bigcap A\setminus\{x\}\text{是无限集}. \tag{0.3}$$

任取a的开邻域U, 则$U\bigcap A\setminus\{a\}$是无限集，从而$U\bigcap A\setminus\{x\} \neq \emptyset$, 从而$a \in \overline{A\setminus\{x\}}$.

2. 右边是左边的子集: 设$a \in \bigcap_{x\in A}\overline{A\setminus\{x\}}$, 即$\forall x \in A$, $a \in \overline{A\setminus\{x\}}$, 需证$a \in A'$.

若$a \in A$, 取$x = a$有$a \in \overline{A\setminus\{a\}}$, 由0.1可得$a \in A'$.

若$a \notin A$, 因为右边显然是$\bar{A}$的子集，所以$a \in \overline{A\setminus\{x\}} \subseteq \bar{A}$, 因此$a \in \bar{A}\setminus A \subseteq A'$. □

二(3分)、求证：X是Hausdorff空间当且仅当$\Delta = \{(x,x) | x \in X\}$是$X\times X$的闭子集。

证明. $\Longrightarrow$: 任取$(x,y) \in X\times X\setminus\Delta$, 即$x \neq y$. 由Hausdorff条件，存在不交开集$U, V$满足$x \in U, y \in V$. 从而$U\times V \subseteq X\times X\setminus\Delta$, 因此$X\times X\setminus\Delta$为开集。

$\Longleftarrow$: 任取不同两点x, y, 则$(x,y) \in X\times X\setminus\Delta$. 由乘积拓扑的性质，存在两个开集$U, V$满足 $(x,y) \in U\times V \subseteq X\times X\setminus\Delta$. 从而$U, V$为$x, y$的互不相交的开邻域。因此$X$为Hausdorff空间。 □

三(2分)、设A为欧氏空间$\mathbb{R}^n$的可数子集，求证：$\mathbb{R}^n \setminus A$是稠密的。

证明. 任取非空开集U, 则U中有不可数多个点，从而$U\setminus A$非空，即$U\bigcap\mathbb{R}^n\setminus A \neq \emptyset$, 所以$\mathbb{R}^n\setminus A$是稠密的。 □