第二章部分习题参考答案与提示

1. 设 $E_1 \subset E_2 \subset \mathbb{R}$, 求证: $m^*(E_1) \le m^*(E_2)$.

证明. 设开区间列 $\{I_n : n \ge 1\}$ 构成 E_2 的一个覆盖, 则它也构成 E_1 的一个覆盖, 从而 $m^*(E_1) \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ell(I_n)$. 由 $\{I_n : n \ge 1\}$ 的任意性可得 $m^*(E_1) \le m^*(E_2)$.

提示: 无

2. 求证: $m^*(E) = \inf\{m(Q) : E \subset Q, Q\text{是开集}\}$.

证明. 记 $\lambda = \inf\{m(Q) : E \subset Q, Q\text{是开集}\}$. 对任何开集 Q, $E \subset Q$, 有 $m^*(E) \le m^*(Q) = m(Q)$, 所以, $m^*(E) \le \lambda$. 因此, 当 $m^*(E) = \infty$ 时, 命题成立.

当 $m^*(E) < \infty$ 时, 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在开区间列 $\{I_k : k \ge 1\}$, 使得 $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ 并且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \le m^*(E) + \varepsilon$. 令 $Q = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, 则 Q 是开集, $E \subset Q$, $m(Q) \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \le m^*(E) + \varepsilon$. 因此, $\lambda \le m^*(E) + \varepsilon$. 令 $\varepsilon \to 0$ 可得 $\lambda \le m^*(E)$.

提示: 无

3. 设 $E \subset \mathbb{R}$, $M > 0$. 求证: $m^*(E) = \inf\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : I_n\text{为开区间}, \ell(I_n) < M, E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\}$.

证明. 设 $\lambda = \inf\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : I_n\text{为开区间}, \ell(I_n) < M, E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\}$. 则有 $m^*(E) \le \lambda$. 若 $m^*(E) = \infty$, 则结论成立.

下设 $m^*(E) < \infty$. 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在开区间列 $\{I_n : n \ge 1\}$, 使得 $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ 并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \le m^*(E) + \varepsilon$. 对任何 $n \ge 1$, 由于 $\ell(I_n) < \infty$, 所以存在有限多个区间 $I_n^{(k)}$, $1 \le k \le m_n$, 使得 $I_n \subset \bigcup_{k=1}^{m_n} I_n^{(k)}$, $\ell(I_n^{(k)}) < M$ 并且 $\sum\limits_{k=1}^{m_n} \ell(I_n^{(k)}) < \ell(I_n) + \varepsilon/2^n$. 再从 $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{m_n} I_n^{(k)}$ 可得

$$\lambda \le \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_n} \ell(I_n^{(k)}) \le \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ell(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \le m^*(E) + 2\varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0$ 即可得到所要结论.

提示: 无

4. 设 G_1 和 G_2 是不相交的开集, $E_1 \subset G_1$, $E_2 \subset G_2$. 求证: $m^*(E_1 \cup E_2) = m^*(E_1) + m^*(E_2)$.

证明. 设区间列 $\{I_n : n \geq 1\}$ 是 $E_1 \cup E_2$ 的一个开覆盖, 则 $\{I_n \cap G_i : n \geq 1\}$ 是 $E_i \cap G_i$ 的一个开覆盖. 于是

$$\begin{aligned} m^*(E_1) + m^*(E_2) &\leq \sum_{n=1}^{\infty}(m^*(I_n \cap G_1) + m^*(I_n \cap G_2)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(m(I_n \cap G_1) + m(I_n \cap G_2)) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n) \end{aligned}$$

由 $\{I_n : n \geq 1\}$ 的任意性, 我们有 $m^*(E_1) + m^*(E_2) \leq m^*(E_1 \cup E_2)$. 另一方面, 由外侧度的次可加性, $m^*(E_1 \cup E_2) \leq m^*(E_1) + m^*(E_2)$. 所以, $m^*(E_1 \cup E_2) = m^*(E_1) + m^*(E_2)$.

证明二: 由已知, $E_1 \subset G_1$, $E_2 \subset G_1^c$. 因为 G_1 可测, 所以

$$m^*(E_1 \cup E_2) \geq m^*((E_1 \cup E_2) \cap G_1) + m^*((E_1 \cup E_2) \cap G_1^c) = m^*(E_1) + m^*(E_2).$$

而反向不等式显然成立, 故 $m^*(E_1 \cup E_2) = m^*(E_1) + m^*(E_2)$.

提示: 设区间列 $\{I_n : n \geq 1\}$ 是 $E_1 \cup E_2$ 的一个开覆盖, 证明 $m^*(E_1) + m^*(E_2) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n)$.

5. 若 $d(E_1, E_2) = \inf\{|x_1 - x_2| : x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\} > 0$, 求证 $m^*(E_1 \bigcup E_2) = m^*(E_1) + m^*(E_2)$.

证明. 令 $G_1 = \{x : d(x, E_1) < d(x, E_2)\}$, $G_2 = \{x : d(x, E_2) < d(x, E_1)\}$. 则 G_1 和 G_2 都是开集并且 $E_1 \subset G_1$, $E_2 \subset G_2$. 由习题 2.4 可知结论成立.

提示: 用习题 2.4 结论.

6. 设 $m^*(A) < \infty$, $m^*(B) < \infty$. 求证: $|m^*(A) - m^*(B)| \leq m^*(A \triangle B)$.

证明. 因为 $A \subset (A \triangle B) \cup B$, 所以 $m^*(A) \leq m^*(B) + m^*(A \triangle B)$. 类似可证 $m^*(B) \leq m^*(A) + m^*(A \triangle B)$. 故结论成立.

提示: 无

7. **例.** 设 $\{E_n\}_{n \geq 1}$ 单增, 求证 $m^*(\lim\limits_{n \to \infty} E_n) = \lim\limits_{n \to \infty} m^*(E_n)$.

证明. 若有某 n 使 $m^*(E_n) = \infty$, 则命题显然成立. 故不妨设对一切 $n \geq 1$ 有 $m^*(E_n) < \infty$. 于是有开集 G_n 使 $E_n \subset G_n$ 并且 $m(G_n) < m^*(E_n) + \varepsilon$.

由 $\{E_n\}$ 的单增性, $E_n \subset \bigcap_{s=n}^{\infty} G_s \triangleq P_n$, 其中 P_n 可测, 单增且 $m(P_n) < m^*(E_n) + \varepsilon$. 从而

$$\begin{aligned} & m^*(\lim_{n \to \infty} E_n) = m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq m(\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n) \\ = \ & \lim_{n \to \infty} m(P_n) \leq \lim_{n \to \infty} m^*(E_n) + \varepsilon. \end{aligned}$$

由此易知所要证等式成立.

证明.

提示: 无

8. 设对每一 $x \in I = (a, b)$, A_x 是一个实数集, 而且当 $x_1 < x_2$ 时 $A_{x_1} \subset A_{x_2}$. 求证

(i) $m^*(\bigcup_{x \in I} A_x) = \lim\limits_{x \to b^-} m^*(A_x)$;
(ii) $m^*(\bigcap_{x \in I} A_x) \leq \lim\limits_{x \to a^+} m^*(A_x)$;
(iii) 当 A_x 可测时 $m(\bigcup_{x \in I} A_x) = \lim\limits_{x \to b^-} m(A_x)$; 此外当有某个 A_x 测度有限时, $m(\bigcap_{x \in I} A_x) = \lim\limits_{x \to a^+} m(A_x)$.

证明.

(i) 取单增数列 x_n 使得 $x_n \to b$. 则 $\bigcup_{x \in I} A_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{x_n}$, $\lim\limits_{x \to b^-} m^*(A_x) = \lim\limits_{n \to \infty} m^*(A_{x_n})$. 由习题 2.7 可知结论成立.
(ii) 对任何 $y \in (a, b)$, $\bigcap_{x \in I} A_x \subset m^*(A_y)$, 所以 $m^*(\bigcap_{x \in I} A_x) \leq m^*(A_y)$. 于是 $m^*(\bigcap_{x \in I} A_x) \leq \lim\limits_{x \to a^+} m^*(A_x)$.
(iii) 任取单减实数列 x_n, 使得 $x_n \to a$, 则 $\bigcap_{x \in I} A_x = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{x_n}$ 是可测集并且 $\lim\limits_{x \to a+0} m(A_x) = \lim\limits_{n \to \infty} m(A_{x_n})$. 由测度的性质即知结论成立.

提示: 无

9. 设 $E \subset \mathbf{R}$, $0 < m^*(E) < \infty$, 求证 $f(x) = m^*((-\infty, x) \bigcap E)$ 是 x 的连续函数. 由此证明 $I = \{m^*(F) : F \subset E\}$ 是一个有界闭区间.

证明. 对任何 $x < y$, $(-\infty, y) \cap E \subset (((-\infty, x) \cap E) \cup ([x, y) \cap E))$. 由外测度的性质, $f(y) \leq f(x) + m^*([x, y) \cap E) \leq f(x) + y - x$. 所以, $0 \leq f(y) - f(x) \leq y - x$. 因此, $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

为证明 $I = \{m^*(F) : F \subset E\}$ 是一个有界闭区间, 只需证明 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ 且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = m^*(E)$.

因为 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增, 所以 $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. 由习题 2.7, $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = m^*(E)$. 所以, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = m^*(E)$.

另一方面, 由于 $m^*(E) < \infty$, 所以存在开集 G, 使得 $E \subset G$ 并且 $m(G) < \infty$. 因此, 对整数 n, $f(n) = m^*((-\infty, n)\cap E) \le m^*((-\infty, n)\cap G) = m((-\infty, n)\cap G)$. 由测度的性质, $\lim\limits_{n\to-\infty} f(n) = 0$

提示: 用习题 2.7

10. 设 $\{E_n\}_{n\ge1}$ 是可测集列.

$m(\bigcup_{n\ge1}\bigcap_{k\ge n} E_k)$

(i) $m(\varliminf\limits_{n\to\infty} E_n) \le \varliminf\limits_{n\to\infty} m(E_n)$; 有限

(ii) 若有 k_0 使 $m(\bigcup_{k=k_0}^{\infty} E_k) < \infty$, 求证

$$m(\varlimsup_{n\to\infty} E_n) \ge \varlimsup_{n\to\infty} m(E_n);$$

(iii) 若 $m(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) < \infty$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} E_n$ 存在, 求证

$$m(\lim_{n\to\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

$\varliminf\limits_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n\ge1}\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k$.

定理 2.3.6. 函数的下极限)

证明. 单增

(i) 由于 $\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \subset E_n$, 所以 $m(\varliminf\limits_{n\to\infty} E_n) = \lim\limits_{n\to\infty} m(\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k) \le \varliminf\limits_{n\to\infty} m(E_n)$.

$m(\bigcap_{k\ge n} E_k) \le m(E_n)$ $\forall n$.

(ii) 因为 $\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$ 关于 n 单减并且存在 k_0 使得 $\bigcup_{k=k_0}^{\infty} E_k$ 的测度有限, 有限 所以 $m(\varlimsup\limits_{n\to\infty} E_n) = \lim\limits_{n\to\infty} m(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k)$. 又因为 $\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \supset E_n$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} m(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k) \ge \varlimsup\limits_{n\to\infty} m(E_n)$.

(iii) 由 (i)(ii) 可得.

$E_n \subset \bigcup_{k\ge n} E_k$

提示: 无

11. 设 A 可测并且 $m(A\triangle B) = 0$, 求证 B 可测.

证明. 因为 $A\triangle B = (A-B)\cup(B-A)$, 所以 $m(A-B) = m(B-A) = 0$. 因此, $A\cap B^c$ 和 $B\cap A^c$ 都是可测集. 又 $A = (A\cap B)\cup(A\cap B^c)$, 所以 $A\cap B$ 可测. 于是 $B = (B\cap A)\cup(B\cap A^c)$ 可测.

提示: 无

12. 设 $0 < m(E) < \infty$. 求证有测度皆为 $m(E)$ 的开集列 $\{G_n\}_{n\ge1}$, 使 $m(E\Delta G_n) \to 0 (n\to\infty)$.

证明. 对任何 $n \ge 1$, 取开集 $H_n \supset E$ 使得 $m(H_n - E) < \frac{1}{2n}$. 由习题 2.9, 存在 H_n 的开子集 G_n 使得 $m(G_n) = m(E)$. 此时, $m(G_n - E) + m(E - G_n) \le m(H_n - E) + m(H_n - G_n) \le 1/n$. 所以结论成立.

提示: 无

13. 设 E_1 和 E_2 都可测, 求证: $m(E_1) + m(E_2) = m(E_1\cup E_2) + m(E_1\cap E_2)$.

证明. 注意到 $E_1 = (E_1\cap E_2)\cup(E_1\cap E_2^c)$, $E_2 = (E_2\cap E_1)\cup(E_2\cap E_1^c)$, 我们有

两个不相交集合.

$$m(E_1) + m(E_2) = 2m(E_1\cap E_2) + m(E_1\cap E_2^c) + m(E_2\cap E_1^c).$$

又 $E_1\cup E_2 = (E_1\cap E_2^c)\cup(E_1\cap E_2)\cup(E_2\cap E_1^c)$, 所以,

$$m(E_1\cup E_2) = m(E_1\cap E_2^c) + m(E_1\cap E_2) + m(E_2\cap E_1^c).$$

由此可知结论成立.

提示: 无

14. 求证: $\mathbb{R}$ 中可测集全体具有基数 2^c.

证明. $[0,1]$ 中 Cantor 完备集 C 具有连续统势并且测度为零. 由于 C 的任何子集都可测, 所以可测集全体的基数不小于 2^c, 从而等于 2^c.

$\ge 2^c$

提示: 无

15. (i) 若 F 是 $[0,1]$ 中闭集且 $m(F) = 1$. 试问是否一定 $F = [0,1]$? 一定

(ii) 若 G 是 $(0,1)$ 中开集且 $m(G) = 1$. 试问是否一定 $G = (0,1)$?

证明. (i). 若存在 $x \in [0,1] - F$, 则存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $V(x,\varepsilon)\cap F = \emptyset$ 并且 $m(V(x,\varepsilon)\cap[0,1]) > 0$, 与 $m(F) = 1$ 矛盾.

(ii). 不一定. 见 Cantor 完备集的构造.

提示: 无

16. 若 $A\bigcup B$ 和 A 都可测, 试问 B 是否一定可测? 若其中 $m(A) = 0$, 结论如何? 若 $A\bigcap B = \emptyset$, 结论又如何?

证明. (i). 不一定, 如 $A = [0,1]$, B 为 $[0,1]$ 内的不可测集, 则 $A\cup B$ 可测.

(ii). 若 $m(A) = 0$, 则 $B = A\cup B - (A - B)$ 可测. 若 $A\bigcap B = \emptyset$, 则 B 可测.

提示: 无 任意 存在

17. 设 $E \subset \mathbf{R}$, $m(E) > 0$, $0 < \alpha < 1$. 求证有开区间 I 使 $m(I\bigcap E) > \alpha\cdot m(I)$.

证明. 不妨设 $m(E) < \infty$. 假设对任何开区间 I, $m(I\bigcap E) \le \alpha\cdot m(I)$. 任取一列开区间 $\{I_n : n \ge 1\}$, 使得 $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. 则有 $m^*(E) = m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E\cap I_n)) \le \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n\cap E) \le \sum_{n=1}^{\infty} \alpha\cdot m(I_n)$. 对 $\{I_n : n \ge 1\}$ 取下确界, 得 $m^*(E) \le \alpha m^*(E)$. 所以 $m^*(E) = 0$, 矛盾.

$m(I\cap E) = m(I)$ X

提示: 任取一列开区间 $\{I_n : n \geq 1\}$, 使得 $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, 则有 $m^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n \cap E)$

18. 设可测集 $E \subset [0,1]$. 若有 $\delta > 0$, 使对 $[0,1]$ 中任何区间 (a,b) 有 $m(E \bigcap (a,b)) \geq \delta(b-a)$. 求证 $m(E) = 1$.

δ

证明. 若 $m(E) < 1$, 则 $m(E^c) > 0$. 此时存在单减开集列 $\{G_n : n \geq 1\}$ 使得 $E^c \subset G_n$, $m(G_n) \to m(E^c)$. 于是 $m(G_n - E^c) = m(E \cap G_n) \geq \delta m(G_n) \geq \delta m(E^c) > 0$. 令 $n \to \infty$, 得 $0 \geq \delta m(E^c)$, 矛盾.

证明二. 若 $m(E) < 1$, 则 $m(E^c) > 0$. 于是由习题 2.17, 存在 $[0,1]$ 中区间 I, 使得 $m(I \cap E^c) > (1-\delta)m(I)$. 从而 $m(I) = m(I \cap E) + m(I \cap E^c) > \delta m(I) + (1-\delta)m(I) = m(I)$, 矛盾.

提示: 无

任意

19. 设 $E \subset \mathbf{R}$, $m(E) > 0$, $[a,b]$ 是有界区间, $\forall \varepsilon > 0$. 求证存在有限个实数 $\{x_k\}_{1 \leq k \leq n}$, 使 $[a,b] - \bigcup_{k=1}^{n} E_{x_k}$ 的测度小于 ε, 其中 $E_{x_k} = \{x + x_k : x \in E\}$.

why

$n\ell(I)$

证明. 不妨设 $0 < \varepsilon < b - a$. 由习题 2.17, 存在开区间 I, 使得 $\ell(I) < \varepsilon/2$ 并且 $m(E \cap I) > \alpha \cdot \ell(I)$, 其中 $\alpha = \frac{b-a-\varepsilon}{b-a-\varepsilon/2} < 1$. 取 $[a,b]$ 的一个分划

n份

y_n y_{n+1}

a b

$$a = y_0 < y_1 < \cdots < y_n < y_{n+1} = b,$$

其中 $y_k - y_{k-1} = \ell(I)$, $1 \leq k \leq n$, $y_{n+1} - y_n \leq \ell(I) < \varepsilon/2$. 取 x_k 使得 I 关于 x_k 的平移 I_{x_k} 为 (y_{k-1}, y_k). 则

$y_n - a > b - a - \frac{\varepsilon}{2}$

$$\begin{aligned} m\Big(\bigcup_{k=1}^{n}(E_{x_k} \cap I_{x_k})\Big) &= \sum_{k=1}^{n} m(E_{x_k} \cap I_{x_k}) = n \cdot m(E \cap I) \\ &\geq n\alpha \cdot \ell(I) = \alpha(y_n - a) \\ &> \alpha(b - a - \varepsilon/2) = b - a - \varepsilon. \end{aligned}$$

why

又 $[a,b] - \bigcup_{k=1}^{n} E_{x_k} \subset [a,b] - \bigcup_{k=1}^{n}(E_{x_k} \cap I_{x_k})$, 所以其测度小于 ε.

提示: 同证明.

20. 设 $\{E_k\}_{k \geq 1}$ 是 $[0,1]$ 中测度皆为 1 的可测集列, 求证 $m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = 1$.

证明. $m([0,1] - \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = m(\bigcup_{k=1}^{\infty}([0,1] - E_k)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m([0,1] - E_k) = 0$.

提示: 无

$m(A-B) = m(A) - m(B)$

$B \subseteq A$

① 写结论 ② 序号按题目.

21. 设 $\{E_k\}_{k \geq 1}$ 是 $[0,1]$ 中的可测集列, 使得 $m(E_k) \to 1 (k \to \infty)$. 求证对任何 $0 < \lambda < 1$, 有子列 $\{E_{k_n}\}_{n \geq 1}$ 使 $m(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{k_n}) > \lambda$.

证明. 因为 $m(E_k) \to 1$, 所以 $m([0,1] - E_k) \to 0$. 从而存在子列 $\{E_{k_n} : n \geq 1\}$, 使得 $m(E_{k_n}^c) < \frac{1-\lambda}{2^n}$, $n \geq 1$. 于是

$$m\left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{k_n}\right)^c\right) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_{k_n}^c\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(E_{k_n}^c) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\lambda}{2^n} = 1 - \lambda.$$

从而 $m(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{k_n}) > \lambda$.

提示: 无

22. 设 $\{E_k\}_{1 \leq k \leq n}$ 是 $[0,1]$ 中的 n 个可测集, 满足 $\sum_{k=1}^{n} m(E_k) > n - 1$. 求证 $m(\bigcap_{k=1}^{n} E_k) > 0$.

证明. 因为 $m((\bigcap_{k=1}^{n} E_k)^c) = m(\bigcup_{k=1}^{n} E_k^c) \leq \sum_{k=1}^{n} m(E_k^c) = \sum_{k=1}^{n}(1 - m(E_k)) = n - \sum_{k=1}^{n} m(E_k) < 1$, 所以 $m(\bigcap_{k=1}^{n} E_k) > 0$.

提示: 无

23. 设 $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是一族区间, 求证 $E = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ 可测.

证明. 把区间分为四类: 开区间、左开右闭区间、左闭右开区间、闭区间. 分别证明每一类区间的并为可测集. 注意: 此处要求闭区间不能是 (退化的) 一个点.

例如, 设 I_λ 是一族闭区间. 对任何 $x \in E := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$, 令 $a_x = \inf\{a : [a,x] \subset E\}$, $b_x = \sup\{b : [x,b] \subset E\}$, 则 $a_x < b_x$ 并且 $(a_x, b_x) \subset E$. 对于 $x_1 \neq x_2$, (a_{x_1}, b_{x_1}) 与 (a_{x_2}, b_{x_2}) 或者不相交, 或者相同. 因此, 这些开区间的端点集 F 是至多可数集, 从而 $E = \bigcup_{x \in E}(a_x, b_x) \cup (E \cap F)$ 是可测集.

提示: 同证明.

$F_n \subseteq E$ 且 $m^*(E - F_n) < \frac{1}{n}$

24. 设 $m^*(E) < \infty$. 试证下列三件事等价:

(i) E 可测;

(ii) 存在 E 的闭子集列 $\{F_n\}$ 使 $m(F_n) \to m^*(E)$;

(i) ⇒ (ii) 定理 2.5.1

(iii) 存在 E 的可测子集列 $\{E_n\}$ 使 $m(E_n) \to m^*(E)$.

证明. 只证 (iii) ⇒ (i). 设 $\{E_n : n \geq 1\}$ 为一列可测集, $E_n \subset E$ 并且 $m(E_n) \to m^*(E)$. 因为 E_n 可测, 所以 $m^*(E) = m^*(E \cap E_n) + m^*(E \cap E_n^c) = m^*(E_n) + m^*(E - E_n)$. 因此, $m^*(E - E_n) \to 0$. 于是 $m^*(E - \bigcup_{n \geq 1} E_n) \leq m^*(E - E_n) \to 0$. 所以 $E - \bigcup_{n \geq 1} E_n$ 是零测集, 从而 E 可测.

提示: 同证明.

总结结果. 方法..

(ii) ⇒ (iii) 显然.

可测证明: ①定义 $\forall A$: $m^*(A)=$ …
②性质（已知可测集的并、交、补）.
③等价性质 ④ 1, 2.

25. 设 $m^*(E) < \infty$. 求证有 G_δ 集 G, 使 $G \supset E$, $m^*(E) = m(G)$.

证明. 因为 $m^*(E) < \infty$, 所以存在开集列 $\{G_n : n \geq 1\}$, 使得 $G_n \supset E$ 并且 $m^*(G_n) \to m^*(E)$. 令 $G = \bigcap_{n\geq 1} G_n$, 则 $E \subset G$ 并且 $m^*(E) \leq m^*(\bigcap_{n\geq 1} G_n) = m^*(G) \leq m(G_n) \to m^*(E)$

提示: 无

H 可测

26. 设 $A \bigcup B$ 可测且 $m(A \bigcup B) = m^*(A) + m^*(B) < \infty$. 求证 A 和 B 都可测.

证明. 取 G_δ 集 H 使 $H \supset B$ 并且 $\boxed{m(H) = m^*(B)}$, 则 $E := (A \cup B) \cap H^c$ 是 A 的可测子集. 因为

$E \subset A$

选取 G_δ

$$m^*(B) \leq m((A \cup B) \cap H) \leq m(H) = m^*(B),$$

$B \cap H^c = \phi$

所以 $m^*(B) = m((A \cup B) \cap H)$. 再从

$$m^*(A) + m^*(B) = m(A \cup B) = m((A \cup B) \cap H^c) + m((A \cup B) \cap H)$$

可得 $m^*(A) = m((A \cup B) \cap H^c)$. $\surd = m(E)$

对任何 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $G \supset A$, 使得 $m(G) < m^*(A) + \varepsilon$; 存在闭集 $F \subset E$, 使得 $m(E - F) < \varepsilon$. 于是, $F \subset E \subset A \subset G$ 并且 $m(G) < m^*(A) + \varepsilon = m(E) + \varepsilon = m(E-F) + m(F) + \varepsilon$. 因此, $m(G - F) = m(G) - m(F) \leq m(E - F) + \varepsilon < 2\varepsilon$. 所以 A 可测. 类似可证 B 可测.

书定理 2.5.1 推论.

提示: 同证明.

27. 构造不相交的集 A 和 B 使 $m^*(A \bigcup B) < m^*(A) + m^*(B)$.

证明. 取 $[0,1]$ 中的不可测集 A, 令 $B = [0,1] - A$. 由习题 2.26 可知 $m^*(A \bigcup B) < m^*(A) + m^*(B)$.

$A \cup B = [0,1]$

提示: 无

28. 设 $E \subset \mathbf{R}$, $m(E) > 0$. 令

$$E^* = \{x \in E : 对任何\delta > 0有 m(E \bigcap (x - \delta, x + \delta)) > 0\}.$$

求证 E^* 可测且 $m(E^*) = m(E)$.

将弧立点剔换

证明. 对每一 $x \in E - E^*$, 存在 $\delta_x > 0$ 使得 $m(E \cap (x - \delta_x, x + \delta_x)) = 0$, 从而存在有理数 r_x, R_x 使得 $r_x < x < R_x$ 并且 $m(E \cap (r_x, R_x)) = 0$. 因为端点为有理数的开区间至多可数, 所以 $E - E^* \subset \bigcup\{E \cap (r_x, R_x) : x \in E - E^*\}$ 是零测集. 从而 $E^* = E - (E - E^*)$ 可测并且 $m(E^*) = m(E)$.

提示: 无

$x - \delta_x < r_x < x < R_x < x + \delta_x$

29. 设 $E \subset \mathbf{R}$ 可测, a 和 b 是两个实数. 求证 $F = \{ax + b : x \in E\}$ 可测并且 $m(F) = |a| \cdot m(E)$.

证明. 不妨设 $a \neq 0$. 设 $A \subset \mathbf{R}$. 设 $\{I_k : k \geq 1\}$ 是一列开区间, $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, 则 $aA \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} aI_k$. 于是

$$m^*(aA) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(aI_k) = |a| \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k).$$

所以,

$$m^*(aA) \leq |a| m^*(A), \qquad \forall a \neq 0.$$

以 $\frac{1}{a}A$ 代 A, 得

$$m^*(A) = m^*(\frac{1}{a} \cdot aE) \leq \frac{1}{|a|} m^*(aA).$$

因此,

$$m^*(aA) \geq |a| m^*(A).$$

故 $m^*(aA) = |a| m^*(A)$.

因为 E 可测, 所以对任何 $A \subset \mathbf{R}$,

$$m^*(\frac{1}{a}A) \geq m^*((\frac{1}{a}A) \cap E) + m^*((\frac{1}{a}A) \cap E^c)$$

从而

$$\begin{aligned} m^*(A) &= am^*(\frac{1}{a}A) \\ &\geq am^*((\frac{1}{a}A) \cap E) + am^*((\frac{1}{a}A) \cap E^c) \\ &= m^*(A \cap aE) + am^*(A \cap (aE)^c). \end{aligned}$$

所以 aE 可测且 $m(aE) = am(E)$. 再从测度的平移不变性可知结论成立.

证明二. 设 $a > 0$. 若 $E = (c, d)$ 为开区间, 则 $aE = (ac, ad)$ 可测并且 $m(aE) = ad - ac = am(E)$. 这样当 E 为开集时结论成立. 对于一般的可测集 E 以及 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 F 及开集 G 使得 $m(G - F) < \varepsilon/a$. 此时 aF 为闭集, aG 为开集, $aF \subset aE \subset aG$, $G - F$ 为开集, 故 $m(aG - aF) = m(a(G - F)) = am(G - F) < \varepsilon$. 所以, aE 可测.

当 $m(E) = \infty$ 时, $m(G) = \infty$, $m(aG) = am(G) = \infty$, 从而 $m(aF) = \infty$, 因此 $m(aE) = \infty$.

当 $m(E) < \infty$ 时, $0 < m(aG) - m(aE) < m(a(G - F)) < \varepsilon$, $0 < am(G) - am(E) < am(G) - am(F) = m(a(G - F)) < \varepsilon$. 又 $m(aG) = am(G)$, 所以 $|m(aE) - am(E)| < \varepsilon$. 由 ε 的任意性, $m(aE) = am(E)$.

提示: 无

30. 设可测集 $E\subset[0,\infty)$, $\lambda>0$. 求证 E^λ 可测, 其中 $E^\lambda=\{x^\lambda: x\in E\}$.

证明. 先设 $E\subset(a,b)$, $0<a<b<\infty$.

若 $E=\bigcup_{n=1}^\infty(a_n,b_n)$ 为开集, 则 $E^\lambda=\bigcup_{n=1}^\infty(a_n^\lambda,b_n^\lambda)$ 为开集, 从而可测. 若 E 为闭集, 则 E^λ 也是闭集, 从而可测.

对于一般情形, 任取 $\varepsilon>0$, 存在 (a,b) 中的开集 G 和闭集 F, 使得 $F\subset E\subset G$ 并且 $m(G-F)<\varepsilon$. 于是 $F^\lambda\subset E^\lambda\subset G^\lambda$, F^λ 为闭集, G^λ 为开集. 若 $G-F=\bigcup_{n=1}^\infty(a_n,b_n)$, 则 $G^\lambda-F^\lambda=\bigcup_{n=1}^\infty(a_n^\lambda,b_n^\lambda)$. 又 $b_n^\lambda-a_n^\lambda=\lambda\xi^{\lambda-1}(b_n-a_n)\le M(b_n-a_n)$, 其中 M 只与 a,b 有关. 因此, $m(G^\lambda-F^\lambda)\le M\cdot m(G-F)<M\varepsilon$. 所以 E^λ 可测.

对于一般的集合 E, $(E\cap(1/n,n))^\lambda$ 可测, 对 $n\ge1$ 求并即可得到 E^λ 可测.

提示: 先考虑 E 为有限开区间的情形.

31. **例.** 若 $E\subset\mathbf{R}$, $m(E)>0$, 求证 0 是 $\{x-y: x,y\in E\}$ 的内点.

证明. 由题 2.17, 存在开区间 (a,b) 使 $m((a,b)\bigcap E)>\frac{3}{4}(b-a)$. 令 $F=(a,b)\bigcap E$. 可证 0 是 $H=\{x-y: x,y\in F\}$ 的内点. 因为不然就有 $z_n\notin H$ 使 $z_n\to0$. 令 $F_n=\{x+z_n: x\in F\}$, 则 F_n 可测, $m(F_n)=m(F)>\frac{3}{4}(b-a)$, 而且对一切 $n\ge1$ 有 $F_n\bigcap F=\emptyset$. 于是 $m(F_n\bigcup F)>\frac{6}{4}(b-a)$. 但对任何 $\varepsilon>0$, 当 n 充分大时 $F_n\bigcup F\subset(a-\varepsilon,b+\varepsilon)$. 由此得矛盾.

证明.

提示: 无

32. 设 $m(A)>0$, $m(B)>0$. 求证 $\{a-b: a\in A, b\in B\}$ 及 $\{a+b: a\in A, b\in B\}$ 都有内点.

证明. 先证明存在 $x\in\mathbb{R}$, 使得 $A\cap B_x$ 是正测集. $I=$ ~~(a,b)~~ (k,h)

由习题 2.17, 存在 $0<\alpha<1$ 以及区间 $I=[a,b]$ 使得 $m(A\cap I)>\alpha(b-a)$. 由习题 2.19, 存在有限个实数 $x_1,\dots,x_n$, 使得 $m(I-\bigcup_{k=1}^n B_{x_k})<\alpha(b-a)$. 因此, $m(\bigcup_{k=1}^n B_{x_k}\cap I)+m(A\cap I)>b-a$. 故 $m(\bigcup_{k=1}^n B_{x_k}\cap A)>0$. 从而存在某个 k, 使得 $m(B_{x_k}\cap A)>0$. 不相交

$m(I)=b-a$.

因为 $\{a-b: a\in A, b\in B\}\supset\{a'-b'+x_k: a',b'\in A\cap B_{x_k}\}$, 由习题 2.31, x_k 是 $\{a-b: a\in A, b\in B\}$ 的内点. 类似可证 $\{a+b: a\in A, b\in B\}$ 存在内点.

提示: 同证明.

33. 设 $m(E)>0$, 并且对任何 $x,y\in E$, $(x+y)/2\in E$, 证明: E 有内点.

2^n.

 循环矩阵

$\begin{pmatrix}\pm1\\ \pm1\\ \vdots\\ \pm1\end{pmatrix}_{n\times1}$

证明. 令 $E_1=\frac{1}{2}E$. 由习题 2.32, $E\supset\{x+y: x,y\in E_1\}$ 含有内点.

提示: 无

34. $(0,1)$ 中的数 x 用十进制表示, x_n 是其第 n 位小数. 令 $A_9=\{x\in(0,1): \max\{x_n\}=9\}$. 求证 $m(A_9)=1$. 循环

证明. 对 $n\ge1$, 令

$$B_n=\{x\in[0,1]: x_n=9, 0\le x_k\le8, 1\le k\le n-1\}.$$

固定 n 以及 $n-1$ 个小于 9 的非负整数 $x_1,\dots,x_{n-1}$, 则前 n 位小数分别是 $x_1,\dots,x_{n-1},9$ 的数 x 构成一个区间 $[\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x_k}{10^k}+\frac{9}{10^n},\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x_k}{10^k}+\frac{10}{10^n}]$, 它的长度为 $\frac{1}{10^n}$. 从而 $m(B_n)=9^{n-1}/10^n$. 因为 $B_n\cap B_{n+1}$ 为有限集并且当 $k\ge2$ 时 $B_n\cap B_{n+k}=\emptyset$, 由 $A_9=\bigcup_{n\ge1}B_n$ 可得

球面上的分布.

$$m(A_9)=\sum_{n=1}^\infty m(B_n)=\sum_{n=1}^\infty\frac{9^{n-1}}{10^n}=1.$$

1 2 3 4 5

提示: 同证明.

35. 在题 2.34 中, 若 $A=\{x\in(0,1): \{x_n\}$ 中只有有限个 $9\}$, 求证 $m(A)=0$.

证明. 由习题 2.34, $\{x\in(0,1): \max\{x_n\}<9\}$ 是零测集.

任意固定 n 个不超过 9 的非负整数 $y_1,\dots,y_n$. 令 $B_n=\{x\in[0,1]: x_k=y_k, 1\le k\le n, x_k<9, k\ge n+1\}$. 则 $10^nB_n-\sum_{k=1}^n10^{n-k}x_k=\{x\in(0,1): \max\{x_k\}<9\}$ 是零测集, 从而 B_n 是零测集, 所以 $\{x\in[0,1]: x_k<9, k\ge n+1\}$ 是零测集. 故 A 是零测集.

提示: 同证明. E.

36. 设 $m(E)>0$. 求证 E 有不可测子集.

证明. 与 $[0,1]$ 中不可测集的构造类似.

提示: 无

37. 设 F 是 $[0,1]$ 中不可测集. 求证有 $0<\varepsilon<1$, 使对 $[0,1]$ 中任何满足 $m(E)\ge\varepsilon$ 的可测集 E, $F\bigcap E$ 也是不可测集. 但若 $0<\varepsilon<1$, $\exists$ … 可测集 E. $F\cap E$ 可测

证明. 反证. 设对任何 $n\ge1$, 存在可测集 $E_n\subset[0,1]$ 使得 $m(E_n)>1-1/n$ 并且 $F\cap E_n$ 可测. 从而 $E=\cup_{n\ge1}E_n$ 可测并且 $m(E)=1$. 此时 $\bigcup_{n\ge1}(F\cap E_n)=F\cap E$ 可测. 由于 $F\cap E^c=F\cap([0,1]-E)$ 是零测集, 所以 $F=(F\cap E)\cup(F\cap E^c)$ 可测, 矛盾.

提示: 同证明.

38. 设 $f(x)$ 定义在 $\mathbf{R}$ 上, 并且对任何可测集 E, $f(E)$ 可测. 求证对任何零测集 E, $f(E)$ 也是零测集.

反证法

证明. 设 E 是零测集并且 $m(f(E))>0$, 则 $f(E)$ 有不可测子集 F. 从而有 E 的子集 E^* 使得 $F=f(E^*)$. 但 E^* 为零测集, 可测, 而 $f(E^*)=F$ 不可测, 矛盾.

提示: 同证明.

39. 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续. 求证为使 f 把任何可测集变为可测集, 充要条件是 f 把任何零测集变为零测集.

证明. 必要性由习题 2.38 可得. 利用连续函数将紧集→闭集

下证充分性. 设 E 是可测集. 若 F 是有界闭集, 则 $f(F)$ 是闭集, 可测. 若 F 是无界闭集, 则 $f(F)=\bigcup_{n\geq 1}f(F\cap[-n,n])$ 可测. 因此对任何闭集 F, $f(F)$ 可测. 从而, 对任何 F_σ 集 F, $f(F)$ 可测.

因为 E 可测, 所以存在 F_σ 集 F, 使得 $F\subset E$ 并且 $m(E-F)=0$. 此时 $f(E-F)$ 是零测集, 从而 $f(E)=f(E-F)\cup f(F)$ 可测.

提示: 同证明.

40. 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续可微且 $f'(x)>0$. 求证当 E 可测时, $f^{-1}(E)$ 也可测.

证明. 此时 f 严格单增, 故 $g(y)=f^{-1}(y)$ 在 $I:=(f(-\infty),f(+\infty))$ 上有定义, 并且是严格单增可微函数. 此外, 对任何 $y\in I$,

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)},\qquad y=f(x).$$

因为 f' 连续且大于 0, 所以 $g(y)$ 在任何有界区间上的导函数有界. 由习题 2.39, 为证结论成立, 只需证明 g 把零测集映射到零测集, 而这又只需证明 g 把有界零测集映射到零测集.

设 E 是有界区间 (a,b) 中的零测集, 令 $M=\max_{x\in[a,b]}|g'(x)|$. 此时存在开集 $G=\bigcup_{n\geq 1}(a_n,b_n)\subset(a,b)$ 使得 $E\subset G$, $m(G)=\sum_{n\geq 1}(b_n-a_n)<\varepsilon/M$. 注意到 $g((a_n,b_n))$ 是一个区间, 记为 I_n. 对 (a_n,b_n) 中任何两点 x,y, $|g(x)-g(y)|\leq M|x-y|$. 因此 $m(I_n)\leq M(b_n-a_n)$. 于是

$$m(g(E))\leq m(g(G))=m(\bigcup_{n\geq 1}g((a_n,b_n)))\leq\sum_{n\geq 1}m(I_n)\leq M\cdot m(G)<\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to 0$, 得到 $m(g(E))=0$.

提示: 同证明.

41. 例. 设 $E\subset[a,b]$ 可测, $\{I_k\}_{1\leq k\leq n}$ 是 $[a,b]$ 中 n 个开区间, 并且 $m(I_k\bigcap E)\geq\frac{2}{3}m(I_k), 1\leq k\leq n$. 求证 $m(E\bigcap(\bigcup_{k=1}^n I_k))\geq\frac{1}{3}m(\bigcup_{k=1}^n I_k)$.

证明. 不失一般性, 设 $I_k=(a_k,b_k)$ 满足下列三条件: (i) $a_1<a_2<\cdots<a_n$; (ii) $\bigcup_{k=1}^n I_k=(a_1,b_n)$; (iii) 对任何 $1<k<n$, $\bigcup_{s\neq k}I_s$ 不是开区间.

此时 I_1 仅与 I_2 有非空交, I_n 仅与 I_{n-1} 有非空交, 而对任何 $1<k<n$, I_k 仅与 I_{k-1} 及 I_{k+1} 有非空交. 下面对 $n=3$ 来证, 但其证法有一般性. 此时

$$\begin{aligned}
I_1 &= (I_1-I_2)\bigcup(I_1\bigcap I_2)\triangleq A_1\bigcup A_2,\\
I_2 &= (I_1\bigcap I_2)\bigcup(I_2-I_1-I_3)\bigcup(I_2\bigcap I_3)\triangleq A_2\bigcup A_3\bigcup A_4,\\
I_3 &= (I_2\bigcap I_3)\bigcup(I_3-I_2)\triangleq A_4\bigcup A_5,
\end{aligned}$$

其中 $\{A_k\}_{1\leq k\leq 5}$ 两两不相交且 $\bigcup_{k=1}^5 A_k=\bigcup_{k=1}^3 I_k$. 令

$$a_k=m(A_k),\ a_k^*=m(A_k\bigcap E),\quad 1\leq k\leq 5.$$

由于 $m(I_k\bigcap E)\geq\frac{2}{3}m(I_k)$, 从而由上面三个恒等式得

$$\begin{aligned}
a_1^*+a_2^* &= m(I_1\bigcap E)\geq\frac{2}{3}m(I_1)=\frac{2}{3}(a_1+a_2),\\
a_2^*+a_3^*+a_4^* &= m(I_2\bigcap E)\geq\frac{2}{3}m(I_2)=\frac{2}{3}(a_2+a_3+a_4),\\
a_4^*+a_5^* &= m(I_3\bigcap E)\geq\frac{2}{3}m(I_3)=\frac{2}{3}(a_4+a_5).
\end{aligned}$$

由此易知 $2\sum_{k=1}^5 a_k^*\geq\frac{2}{3}\sum_{k=1}^5 a_k$, 即 $m(E\bigcap\bigcup_{k=1}^3 I_k)\geq\frac{1}{3}m(\bigcup_{k=1}^3 I_k)$.

证明.

提示: 无

42. 设 $0<\varepsilon<1$. 试构造 $[0,1]$ 中测度为 ε 的完备疏集.

证明. 第一步, 在 $[0,1]$ 中间取走长度为 $(1-\varepsilon)/3$ 的开区间.

第二步, 在剩下的两个闭区间的中间分别取走长度为 $(1-\varepsilon)/3^2$ 的开区间.

第三步, 在剩下的 4 个闭区间的中间分别取走长度为 $(1-\varepsilon)/3^3$ 的开区间.

同时 ……

提示: 同证明.

43. 构造 A 和 B, 使得 $A\cap B=\emptyset$, $A\cup B=[0,1]$, 并且对任何区间 $I\subset[0,1]$, 有 $m(A\cap I)>0$, $m(B\cap I)>0$.

证明. 设 $G=\bigcup_{n\geq 1}(a_n,b_n)$ 是一个开集, 其中 $\{(a_n,b_n):n\geq 1\}$ 两两不相交. 对任何 $n\geq 1$, 由习题 2.42, 存在 (a_n,b_n) 的稠开子集 B_n, 使得 $m(B_n)<\frac{1}{2}(b_n-a_n)$. 令 $B=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$, 则 B 是 G 中稠开子集, 并且对 G 的每个构成区间 (a_n,b_n), $m((a_n,b_n)-B)=m((a_n,b_n)-B_n)>\frac{1}{2}(b_n-a_n)$.

设 $A_0=(0,1)$. 归纳地定义 A_n, 使得 A_{n+1} 是 A_n 的稠开子集, $m(A_{n+1})<\frac{1}{2}m(A_n)$, 并且对 A_n 的任一构成区间 I, $m(I-A_{n+1})>\frac{1}{2}m(I)$. 令

$$\tilde{A}=\bigcup_{n=0}^{\infty}(A_{2n}-A_{2n+1}),\quad \tilde{B}=\bigcup_{n=0}^{\infty}(A_{2n+1}-A_{2n+2}),\quad \tilde{C}=\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n.$$

则 $\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C}$ 这三个集合两两不相交. 若 $x\in(0,1)-\tilde{C}$, 则存在 n_0 使得 $x\notin A_{n_0}$. 设 n_0 是使得 $x\notin A_n$ 的最小的 n, 则 $n_0\geq 1$, $x\in A_{n_0-1}-A_{n_0}$. 因此, $x\in\tilde{A}\cup\tilde{B}$. 于是, $\tilde{A}\cup\tilde{B}\cup\tilde{C}=(0,1)$. 再从 $m(A_n)\to 0$ 知 $m(\tilde{C})=0$. 所以 $m(\tilde{A}\cup\tilde{B})=1$.

设 I 是 $[0,1]$ 中任一区间. 由于 A_{2n} 是 $(0,1)$ 的稠开子集且 $m(A_{2n})\to 0$, 所以存在 N, 使得 A_{2N} 的某个构成区间 $(a_{2N},b_{2N})\subset I$. 于是

$$m(I\cap(A_{2N}-A_{2N+1}))\geq m((a_{2N},b_{2N})-A_{2N+1})\geq\frac{1}{2}(b_{2N}-a_{2N})>0.$$

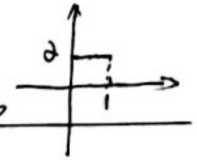
从而 $m(I\cap\tilde{A})>0$. 类似可证 $m(I\cap\tilde{B})>0$.

令 $A=\tilde{A}$, $B=\tilde{B}\cup\tilde{C}\cup\{0,1\}$, 则 A,B 即为所求.

提示: 同证明.

构造类似 Cantor 集的集合.

m({f>2}) 是否左连续? →



m({f≥2}) 是否右连续

第三章部分习题参考答案与提示

1. 设 $[a,b]$ 上的可测函数 f 几乎处处有限. 求证: $m(\{f>\alpha\})$ 是 $\alpha\in\mathbb{R}$ 的右连续函数, $m(\{f\geq\alpha\})$ 是 $\alpha\in\mathbb{R}$ 的左连续函数.

证明. 任取 $\alpha_n\downarrow\alpha$. $\{f>\alpha\}-\{f>\alpha_n\}=\{\alpha<f\leq\alpha_n\}\downarrow\emptyset$.

由测度性质知 $m(\{f>\alpha\})-m(\{f>\alpha_n\})=m(\{\alpha<f\leq\alpha_n\})\to 0$. 即 $m(\{f>\alpha_n\})\to m(\{f>\alpha\})$. 故 $m(\{f>\alpha\})$ 关于 α 右连续.

同样取 $\alpha_n\uparrow\alpha$, 则 $\{f\geq\alpha_n\}-\{f\geq\alpha\}=\{\alpha_n\leq f<\alpha\}\downarrow\phi$, 故可得 $m(\{f\geq\alpha\})$ 关于 α 左连续.

提示: 无

2. 设 $[0,1]$ 上可测函数 $f(x)$ 几乎处处有限.

(i) 求证当 $n\to\infty$ 时, $m(\{f>n\})\to 0$, $m(\{f>-n\})\to 1$.

(ii) 求证有 $\alpha_0\in\mathbb{R}$, 使 $m(\{f\geq\alpha_0\})\geq\frac{1}{2}$, $m(\{f\leq\alpha_0\})\geq\frac{1}{2}$.

证明.

(i) $\{f>n\}\downarrow\{f=\infty\}$ —零测集. $\{f>-n\}\uparrow([0,1]-\{f=-\infty\})$ 由此得 (i).

(ii) 由 (i) 知必有 α, 使 $m(\{f\geq\alpha\})\geq\frac{1}{2}$. 令 $\alpha_0=\sup\{\alpha:m(\{f\geq\alpha\})\geq\frac{1}{2}\}$. 由 (i) 知 $\alpha_0\in\mathbb{R}$. 由习题 3.1 知 $m(\{f\geq\alpha\})$ 关于 α 左连续, 故 $m(\{f\geq\alpha_0\})\geq\frac{1}{2}$.

今证 $m(\{f\leq\alpha_0\})\geq\frac{1}{2}$. 若不然, $m(\{f\leq\alpha_0\})<\frac{1}{2}$. 由习题 3.1 知, m($\{f\leq\alpha\}$ 关于 α 右连续, 因此从 $m(\{f\leq\alpha_0\})<\frac{1}{2}$ 知有 $\varepsilon>0$ 使 $m(\{f\leq\alpha_0+\varepsilon\})<\frac{1}{2}$, $m(\{f\geq\alpha_0+\varepsilon\})\geq\frac{1}{2}$. 此与 α_0 的取法矛盾.

提示: 无

3. 设 $D\subset\mathbb{R}$ 是可测集, $f(x)$ 沿 D 连续, 求证 f 在 D 上可测.

证明. 对任意实数 α, 讨论集 $E_\alpha=\{x\in D:f(x)>\alpha\}$. 任取 $x\in E_\alpha$, 由于 f 沿 D 在 x 连续, 故有 $\delta_x>0$, 使 $f(y)>\alpha$, $\forall y\in D\bigcap V(x,\delta_x)$, 其中 $V(x,\delta_x)$ 表示 x 为中心, δ_x 为半径的开球. 即 $D\bigcap V(x,\delta_x)\subset E_\alpha$.

这样, $E_\alpha\subset\bigcup\limits_{x\in E_\alpha}(D\bigcap V(x,\delta_x))\subset E_\alpha$, $E_\alpha=D\bigcap(\bigcup\limits_{x\in E_\alpha}V(x,\delta_x))$. 但 $\bigcup\limits_{x\in E_\alpha}V(x,\delta_x)$ 是开集, 可测, 故 E_α 可测. 从而 f 是可测函数.

提示: 无

任何一球 \

a_n　　b_n.
$(a+\frac{b-a}{2n},\ b-\frac{b-a}{2n})$

4. 若对任何 $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$，$f$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可测，求证 f 在 (a,b) 上可测.

证明. 对任何 $\lambda\in\mathbb{R}$，$\{x\in(a,b):f(x)>\lambda\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in([a_n,b_n]:f(x)>\lambda\}$，其中 $a_n\downarrow a$，$b_n\downarrow b$. 从而 f 在 (a,b) 上可测.

提示: 无

5. 设 $f(x)$ 定义在可测集 D 上，若 f^2 在 D 上可测而且 $\{f>0\}$ 是可测集，求证 f 在 D 上可测.

$\{f\geq\lambda\}$ 可测

证明. 由于 $\{f>0\}$ 可测，故 $\{f\leq0\}$ 可测. 任取 $\alpha\in\mathbb{R}$，若 $\alpha\geq0$，则 $\{f>\alpha\}=\{f^2>\alpha^2\}\bigcap\{f>0\}$ 可测; 若 $\alpha<0$，则 $\{f>\alpha\}=\{f>0\}\bigcup\{\alpha<f\leq0\}$. 而 $\{\alpha<f\leq0\}=\{f^2<\alpha^2\}\bigcap\{f\leq0\}$ 可测，故 $\{f>\alpha\}$ 可测.

提示: 无

6. 若 D 是可测集，而且对任何有理数 r，$\{x\in D:f(x)>r\}$ 是可测集，求证 f 在 D 上可测.

证明. 此时对任何 $\alpha\in\mathbb{R}$，取单减收敛于 α 的有理数列 $\{r_n\}_{n\geq1}$，则 $\{f>\alpha\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{f>r_n\}$ 可测，从而得结论.

$\{f=r\}$

提示: 无

$f=\begin{cases}\sqrt{2}, & x\in N.\\ \sqrt{5}, & x\notin N.\end{cases}$

7. 设 $\{f_\lambda(x)\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $[a,b]$ 上得一族可测函数，试问 $f(x)=\sup\{f_\lambda(x):\lambda\in\Lambda\}$ 是否一定可测? 若所有 $f_\lambda(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续，结论又如何?

证明. 一般来说，f 不一定可测. 例如，取 E 为 $[0,1]$ 中的不可测集，

$$f_\lambda(x)=\begin{cases}1, & x=\lambda,\\ 0, & x\neq\lambda,\end{cases}\qquad \lambda\in E.$$

则 $\{f_\lambda(x)\}_{\lambda\in E}$ 是 $[0,1]$ 上的一族可测函数. 而 $f(x)=\chi_E$ 是一个不可测函数.

若所有 $f_\lambda(x)$ 都连续，则对任何 $\alpha\in\mathbb{R}$，$\{f_\lambda\leq\alpha\}$ 是闭集，从而 $\{f\leq\alpha\}=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\{f_\lambda\leq\alpha\}$ 是闭集，可测. 故 f 可测.

提示: 同证明.

8. 设 f 是可测集 D 上的可测函数，求证对任何开集 $G\subset\mathbb{R}$，和闭集 F，$f^{-1}(G)$ 和 $f^{-1}(F)$ 皆可测.

证明. 若 $D\subset\mathbb{R}^n$，$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$ 是开集，则 $f^{-1}(G)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{a_n<f<b_n\}$ 可测. $f^{-1}(F)=f^{-1}(\mathbb{R})-f^{-1}(F^c)=D-f^{-1}(F^c)$ 可测，其中 F^c 是开集.

提示: 无

$f^{-1}(G)=\{x: f(x)\in G\}$

开集的原象仍是开集

$\mathbb{R}$上连续函数可测

9. 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续，$D\subset\mathbb{R}^n$ 可测，$g(x)$ 是 D 上几乎处处有限的可测函数，求证 $f\circ g$ 在 D 上可测.

连续

证明. (i) 任取 $\alpha\in\mathbb{R}$，则 $G=\{y\in\mathbb{R}:f(y)>\alpha\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$ 是一个开集，从而 $\{x\in D:f(g(x))>\alpha\}=\{x\in D:g(x)\in G\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{a_n<g<b_n\}$.

(ii) 有简单函数列 $\{g_n(x)\}$ 使 $g_n(x)\to g(x)$，$\forall x\in D$. 此时 $f(g(x))$ 是简单函数且 $f(g_n(x))\to f(g(x))$, a.e.，从而 $f\circ g$ 可测.

提示: 无

10. 设 $\{f_n(x)\}_{n\geq1}$ 是可测集 D 上的可测函数列，求证 D 中使 $\{f_n(x)\}_{n\geq1}$ 收敛的点 x 全体是可测集.

证明. $F(x)=\overline{\lim_{n\to\infty}}f_n(x)$ 和 $f(x)=\underline{\lim_{n\to\infty}}f_n(x)$ 都是可测函数. 由于 $\{F\geq f\}=D$ 可测，$\{F>f\}$ 可测，故 $\{F=f\}=D-\{F>f\}$ 可测.

提示: 无

11. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可微，求证 $f'(x)$ 可测.　f'一定连续吗.

证明. 此时 $f(x)$ 和 $f(x+\frac{1}{n})$ 都连续，可测. 从而 $f'(x)$ 作为可测函数列 $(f(x+\frac{1}{n})-f(x))/\frac{1}{n}=n[f(x+\frac{1}{n})-f(x)]$ 的极限函数，也可测.

提示: 无

12. 求证为使 $\mathbb{R}$ 上几乎处处有限的可测函数 $f(x)$ 除一零测集外为常数，充要条件是对任何实数 λ，$\{f>\lambda\}$ 和 $\{f<\lambda\}$ 中至少有一个为零测集.

证明. 必要性显然. 设充分性条件满足. 不妨设对某一 λ，$\{f>\lambda\}$ 是零测集. 由于 $m(\{f>\lambda\})$ 关于 λ 单减，令 $\lambda_0=\inf\{\lambda:m(\{f>\lambda\})=0\}$. 若 $\lambda_0=-\infty$，则 $f(x)$ 几乎处处为 $-\infty$，此与题设矛盾. 从而 $\lambda_0\in\mathbb{R}$. 由于 $m(\{f>\lambda\})$ 是 λ 的右连续函数，从而 $m(\{f>\lambda_0\})=0$. 其次对任何 $\lambda<\lambda_0$，由于 $m(\{f>\lambda\})>0$，故由充分性条件 $m(\{f<\lambda\})=0$. 由于 $m(\{f<\lambda\})$ 是 λ 的左连续函数，从而 $m(\{f<\lambda_0\})=0$. 因此 $f(x)=\lambda_0$, a.e..

提示: 无

13. 在 Egoroff 定理中，若 $f(x)=+\infty$, a.e.，试叙述此时定理的结论并证明之.

证明.

提示: **定理**　设 $\{f_n:n\geq1\}$ 是测度有限的可测集 D 上的可测函数列. 若 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=+\infty$, a.e.，则对任何 $M,\varepsilon>0$，存在 D 的闭子集 F，使 $m(D-F)<\varepsilon$，并且 $f_n(x)>M$，$\forall x\in F$.

证明. 令

$$D_1 = \{x \in D : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\}. \checkmark$$

则 $m(D_1) = m(D)$. 对每个 $n, r \geq 1$, 令

$$A_n^{(r)} = \bigcap_{k=n}^{\infty} \{x \in D_1 : f_k(x) > r\}.$$

当 r 固定时, $\{A_n^{(r)}\}_{n\geq 1}$ 单增并且 $D_1 \overset{=}{\subset} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^{(r)} = \lim_{n\to\infty} A_n^{(r)}$. 由测度的性质, 存在 n_r, 使

$$m(D_1 - A_{n_r}^{(r)}) < \frac{\varepsilon}{2^{r+1}}.$$

令 $E = \bigcap_{r=1}^{\infty} A_{n_r}^{(r)}$. 则 f_n 在 E 上一致发散于 $+\infty$. 此外,

$$m(D - E) = m(D_1 - E) = m\left(\bigcup_{r=1}^{\infty} (D_1 - A_{n_r}^{(r)})\right)$$
$$\leq \sum_{r=1}^{\infty} m(D_1 - A_{n_r}^{(r)}) < \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{r+1}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

再取 E 的闭子集 F 使 $m(E - F) < \frac{\varepsilon}{2}$. 则 f_n 在 F 上一致发散于 $+\infty$ 并且 $m(D - F) \leq m(D - E) + m(E - F) < \varepsilon$.

假设 $\exists k_0$, $f(x)$ 在 D_{k_0} 上不可测

14. 设 $\{D_k : k \geq 1\}$ 是一列两两不相交的可测集, $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$. 求证: 为使 $f(x)$ 在 D 上可测, 充分必要条件是对任何 $k \geq 1$, $f(x)$ 在 D_k 上可测.

证明. $\{x \in D : f(x) > a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in D_k : f(x) > a\}$.

提示: 无

15. 设 f 是 $[a, b]$ 上的实值可测函数, 求证有 $h_k > 0$, $h_k \to 0$, 使 $f(x + h_k) \to f(x)$, a.e.

证明. 由 Lusin 定理, 对每一 $k \geq 1$, 有闭子集 $F_k \subset (a, b)$, 使 $m(F_k) > b - a - \frac{b-a}{2^{k+1}}$, 而且 f 沿 F_k 连续. 此时 f 在 F_k 上一致连续. 因此有充分小的 $h_k > 0$, 使 $F_k^{*} = \{x - h_k : x \in F_k\} \subset (a, b)$ 且

$$|f(x + h_k) - f(x)| < \frac{1}{k}, \quad x \in F_k, x + h_k \in F_k.$$

令 $E_k = F_k \bigcap F_k^{*}$. 则易知 $m(E_k) > b - a - \frac{b-a}{2^k}$, 并且对任何 $x \in E_k$, 必定 $x + h_k \in F_k$. 从而 $|f(x + h_k) - f(x)| < 1/k$. 令 $E = \varliminf_{k\to\infty} E_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k$. 则 $E \subset [a, b]$, $m(E) = b - a$. 而对每一 $x \in E$, 必有 n_0 使 $x \in \bigcap_{k=n_0}^{\infty} E_k$. 从而 $|f(x + h_k) - f(x)| < 1/k$, $k \geq n_0$. 故 $f(x + h_k) \to f(x)$, a.e.

提示: 无

16. 设 f 是 $[a, b]$ 上几乎处处有限的可测函数. 求证: 有连续函数列 $\{g_n(x)\}_{n\geq 1}$, 使 $\max_{a\leq x\leq b} |g_n(x)| \leq \sup_{a\leq x\leq b} |f(x)|$ 并且 $g_n(x) \to f(x)$, a.e.

证明. 由 Lusin 定理, 对每个 $k \geq 1$, 存在连续函数 $h_k(x)$ 使 $\max_{a\leq x\leq b} |h_k(x)| \leq \sup_{a\leq x\leq b} |f(x)|$ 并且 $m(\{h_k \neq f\}) < 1/k$. 从而对任何 $\delta > 0$, $m(\{|h_k - f| \geq \delta\}) \leq m(\{h_k \neq f\}) < 1/k \to 0$, 即 $h_k \Rightarrow f$. 由 Riesz 定理, 有子列 $h_{k_n} \to f(x)$, a.e. 取 $g_n(x) = h_{k_n}(x)$ 即可.

a.e

↓

测度收敛.

提示: 同证明.

17. 设 $\{f_p\}_{p\geq 1}$ 是 $[a, b]$ 上一列可测函数. 求证为使 $f_p(x) \to 0$, a.e., 充要条件是对任何 $\varepsilon > 0$, $m(\{\sup_{p\geq k} |f_p(x)| > \varepsilon\}) \to 0$, $k \to \infty$.

证明. 令

$$D = \{x \in [a, b] : \lim_{p\to\infty} f_p(x) = 0\} (= \bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{p=k}^{\infty} \{|f_p| \leq \frac{1}{r}\}).$$

$f_p \to 0$, a.e., 等价于 $m(D) = b - a$, 等价于 $m(D^c) = 0$, 等价于 $\bigcup_{r=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{p=k}^{\infty} \{|f_p| > \frac{1}{r}\}$ 是零测集, 等价于对任何 $r \geq 1$,

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{p=k}^{\infty} \{|f_p| > \frac{1}{r}\} = \lim_{k\to\infty} \bigcup_{p=k}^{\infty} \{|f_p| > \frac{1}{r}\} = \lim_{k\to\infty} \{\sup_{p\geq k} |f_p(x)| > \frac{1}{r}\}$$

是零测集, 其中 $\{\sup_{p\geq k} |f_p(x)| > \frac{1}{r}\}_{k\geq 1}$ 是测度有限单减集合列. 从而 $f_p(x) \to 0$, a.e., 等价于 $\lim_{k\to\infty} m(\{\sup_{p\geq k} |f_p(x)| > \frac{1}{r}\}) = 0$, $\forall r \geq 1$.

提示: 无

18. 设 f 在 $[0, 1]$ 上有界可测. 试问是否必定有 $[0, 1]$ 上的连续函数 g 使 $f(x) = g(x)$, a.e.?

证明. 不一定. 取 $f = \chi_{[0, 1/2]}$ 即可.

提示: 同证明.

19. 设 $\{f_k(x)\}_{k\geq 1}$ 是 $[a, b]$ 上一列实值可测函数, 求证有正数列 $\{a_k\}_{k\geq 1}$ 使 $a_k f_k(x) \to 0$, a.e.

证明. 此时对每一 $k \geq 1$, 有 n_k 使 $m(\{|f_k| \geq n_k\}) < 1/2^k$, $k = 1, 2, \cdots$. 令

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{|f_k| \geq n_k\}$$

则 $m(E) \le \sum_{k=n}^{\infty} m(\{|f_k| \ge n_k\}) < \sum_{k=n}^{\infty} 1/2^k = 1/2^{n-1} \to 0 \quad (n \to \infty)$. 故 $m(E) = 0$. 取 $a_k = 1/(k \cdot n_k)$. 则对任何 $x \in E^c = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\{|f_k| < n_k\}$, 必有某 n_0 使 $x \in \bigcap_{k=n_0}^{\infty}\{|f_k| < n_k\}$, 从而 $a_k|f_k(x)| < 1/(k\cdot n_k)\cdot n_k = 1/k \to 0$.

提示: 无

20. $(0,1)$ 中的数 x 用十进制小数 $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k/10^k$ 表示, 并记 $x = \{x_k\}_{k\ge1}$. 令 $f(x) = \max\{x_k : k \ge 1\}$, 求证 f 在 $(0,1)$ 上可测.

证明. 由习题 2.34, $\{f = 9\}$ 是可测集, 测度为 1. 故 $f(x) = 9$, a.e.

提示: 同证明.

21. 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上实值可测函数且 $f(x+1) = f(x)$, a.e. 求 $g(x)$, 使 $g(x) = f(x)$, a.e., 并且对任何 $x \in \mathbb{R}$, $g(x+1) = g(x)$.

证明. 由于 $\{f(x+n+1) \ne f(x)\} \subset \{f(x+n+1) \ne f(x+n)\} \bigcup \{f(x+n) \ne f(x)\}$, 因此用归纳法易证对每一整数 n, $A_n = \{f(x+n) \ne f(x)\}$ 是零测集. 令 $A = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} A_n$, $B = \mathbb{R} - A$, 则 A 是零测集. 现对任何 $x \in A$, 有 n_0 使 $f(x+n_0) \ne f(x)$. 于是对任何整数 n, $x+n \in A_{n_0-n} \subset A$. 即对任何 $x \in A$ 及整数 n, 亦有 $x+n \in A$. 现在 B 上定义 $g(x) = f(x)$, 在 A 上定义 $g(x) = 1$ 即可.

提示: 无

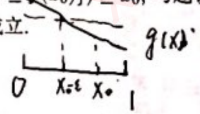
$g(x_0) < f(x_0)$

$x > x_0$,

$g(x) < f(x_0)$

22. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $(0,1)$ 上可测而且都单减左连续. 若对任何 $\lambda \in \mathbb{R}$ 有 $m(\{f \ge \lambda\}) = m(\{g \ge \lambda\})$, 求证 $f(x) = g(x)$, $\forall x \in (0,1)$.

证明. 设存在 $x_0 \in (0,1)$ 使 $f(x_0) > g(x_0)$. 由于 g 左连续, 故有 $\varepsilon > 0$, 使对任何 $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ 皆有 $f(x_0) > g(x)$. 即 $(x_0 - \varepsilon, x_0) \bigcap \{g \ge f(x_0)\} = \emptyset$. 再由 g 单减知 $m(\{g \ge f(x_0)\}) \le x_0 - \varepsilon$. 但 $m(\{f \ge f(x_0)\}) \ge x_0$, 与题设矛盾. 从而 $f(x) \le g(x)$. 同理 $g(x) \le f(x)$. 因此, 结论成立.



提示: 同证明.

23. 设在可测集 D 上 $f_k \Rightarrow f, g_k \Rightarrow g$. 求证

(i) $f_k \pm g_k \Rightarrow f \pm g$;

(ii) $|f_k| \Rightarrow |f|$;

(iii) $\min\{f_k, g_k\} \Rightarrow \min\{f, g\}$ 且 $\max\{f_k, g_k\} \Rightarrow \max\{f, g\}$;

(iv) 当 $m(D) < \infty$ 时 $f_k g_k \Rightarrow fg$.

此外举例说明在一般情形下 $f_k g_k \Rightarrow fg$ 不成立.

证明.

(i) $\{|(f_k \pm g_k) - (f \pm g)| \ge \delta\} \subset \{|f_k \pm g_k| \ge \delta/2\} \cup \{|f \pm g| \ge \delta/2\}$.

(ii) $\{||f_k| - |f|| \ge \delta\} \subset \{|f_k - f| \ge \delta\}$.

(iii) 利用 (i)(ii) 以及下列恒等式

$$\max\{f_k, g_k\} = \frac{f_k + g_k - |f_k - g_k|}{2}, \quad \min\{f_k, g_k\} = \frac{f_k + g_k + |f_k - g_k|}{2}.$$

(iv) 若 $f_k g_k \not\Rightarrow fg$, 则存在 $\delta_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ 及子列 $\{f_{k_n} g_{k_n} : n \ge 1\}$ 使得

$$m(\{|f_{k_n} g_{k_n} - fg| \ge \delta_0\}) \ge \varepsilon_0, \quad n \ge 1. \tag{3.2}$$

但 $f_{k_n} \Rightarrow f$, $g_{k_n} \Rightarrow g$, 故存在子列几乎处处收敛, 不妨设 $f_{k_n} \to f$, $g_{k_n} \to g$, a.e., 则 $f_{k_n} g_{k_n} \to fg$, a.e. 由 $m(D) < \infty$ 知 $f_{k_n} g_{k_n} \Rightarrow fg$. 与 (3.2) 矛盾.

在 $\mathbb{R}$ 上 $f_k(x) = x + 1/k$, $f(x) = x$, 则 $f_k \Rightarrow f$. 但 $f_k^2(x) = x^2 + 2x/k + 1/k^2$, $f^2(x) = x^2$, $f_k^2(x) - f^2(x) = 2x/k + 1/k^2$, 对任何 $\delta > 0$, $m(\{|f_k^2 - f^2| \ge \delta\}) = \infty$. 因此, $f_k^2 \not\Rightarrow f^2$.

提示: 无

f有界?

24. 设在有界区间 $[a,b]$ 上 $f_k \Rightarrow f$, 而 g 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 求证 $g \circ f_k \Rightarrow g \circ f$.

证明. 若 $g \circ f_k \not\Rightarrow g \circ f$, 则存在 $\delta_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ 及子列 $\{f_{k_n} : n \ge 1\}$, 使得

Riesz.

$$m(\{|g \circ f_{k_n} - g \circ f| \ge \delta_0\}) \ge \varepsilon_0, \quad n \ge 1.$$

又 $f_{k_n} \Rightarrow f$, 故存在子列几乎处处收敛, 不妨设 f_{k_n} 几乎处处收敛于 f. 由 g 连续知 $(g \circ f_{k_n}) \to g \circ f$, a.e. 又 $[a,b]$ 是有界区间, 故 $g \circ f_{k_n} \Rightarrow g \circ f$, 与上式矛盾.

① ② Riesz.

提示: 同证明.

25. 例. 设在 $[0,1]$ 上 $\{f_k\}$ 测度收敛. 此外有 M 使

$$|f_k(x_1) - f_k(x_2)| \le M|x_1 - x_2|, k = 1, 2, \cdots, x_1, x_2 \in [0,1].$$

求证 $\{f_k(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

证明. 任给 $\varepsilon > 0$. 取正数 δ 和 λ 使 $\delta + 4M\lambda < \varepsilon$, $\lambda < \frac{1}{4}$. 此时有 K 使

$$m(\{|f_m - f_n| \ge \delta\}) < \lambda, \quad m, n > K.$$

令 $E_{m,n} = \{|f_m - f_n| < \delta\}$, 则 $m(E_{m,n}) > 1 - \lambda (m, n > K)$. 现可证明对每一 $x \in [0,1]$ 及 $m, n > K$, 必有 $d(x, E_{m,n}) < 2\lambda$. 因为不

然 $(x-2\lambda, x+2\lambda)\bigcap E_{m,n}=\emptyset$. 但 $m((x-2\lambda,x+2\lambda)\bigcap[0,1])\geq 2\lambda$, 从而 $1\geq m(((x-2\lambda,x+2\lambda)\bigcap[0,1])\bigcup E_{m,n})\geq 2\lambda+1-\lambda>1$, 此为矛盾. 于是对每一 $x\in[0,1]$, 必有 $x_{m,n}\in E_{m,n}$ 使 $|x-x_{m,n}|<2\lambda$. 这样当 $m,n>K$ 时,

$$\begin{aligned}|f_m(x_{m,n})-f_n(x_{m,n})| &< \delta,\\ |f_m(x_{m,n})-f_m(x)| &\leq M|x_{m,n}-x|<2M\lambda,\\ |f_n(x_{m,n})-f_n(x)| &\leq M|x_{m,n}-x|<2M\lambda.\end{aligned}$$

由此, 当 $m,n>K$ 时, 对一切 $x\in[0,1]$ 有 $|f_m(x)-f_n(x)|<\delta+4M\lambda<\varepsilon$, 从而 $\{f_k(x)\}$ 一致收敛.

提示: 无

26. 设在可测集 D 上, 对每一固定的 $n\geq 1$, $f_{n,k}\Rightarrow f_n$, $k\to\infty$, $f_n\Rightarrow f$, $n\to\infty$, 求证 $\{f_{n,k}:n,k\geq 1\}$ 中有子列测度收敛于 f.

证明. 对任何 $n\geq 1$, 因为 $f_{n,k}\Rightarrow f_n$, 所以存在 $k_n\geq 1$, 使得

$$m(\{|f_{n,k_n}-f_n|>\frac{1}{n}\})<\frac{1}{n}.$$

对任何 $\delta>0$, 当 $n>2/\delta$ 时, 由于 $\{|f_{n,k}-f|>\delta\}\subset\{|f_{n,k}-f_n|>\delta/2\}\cup\{|f_n-f|>\delta/2\}$, 所以

$\frac{\delta}{2}>\frac{1}{n}$

$$\begin{aligned}m(\{|f_{n,k_n}-f|>\delta\}) &\leq m(\{|f_{n,k_n}-f_n|>\frac{1}{n}\})+m(\{|f_n-f|>\frac{\delta}{2}\})\\ &\leq \frac{1}{n}+m(\{|f_n-f|>\frac{\delta}{2}\})\to 0,\qquad n\to\infty.\end{aligned}$$

$\{f_{n,k_n}:n\geq 1\}$ 即为所求.

提示: 无

27. 设 $\{f_k\}_{k\geq 1}$ 是 $[0,1]$ 上一列实值可测函数且 $|f_k(x)|/(1+|f_k(x)|)\to 0$, a.e. 求证: $f_k\Rightarrow 0$.

Riesz

证明. 若对某 x, $|f_k(x)|/(1+|f_k(x)|)\to 0$, 则 $|f_k(x)|\to 0$. 因为不然有正数 $\varepsilon>0$, 使 $|f_{k_n}(x)|\geq\varepsilon$, $n=1,2,\cdots$, 从而 $|f_k(x)|/(1+|f_k(x)|)\geq\varepsilon/(\varepsilon+1)$, $n=1,2,\cdots$, 矛盾. 这样 $f_k(x)\to 0$, a.e. 故在 $[0,1]$ 上, $f_k\Rightarrow 0$.

提示: 无

28. 设 $f(\xi_1,\xi_2)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数, $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 都在 $[a,b]$ 上几乎处处有限可测. 求证 $f(g_1(x),g_2(x))$ 在 $[a,b]$ 上可测.

证明.

(i) 此时有 $[a,b]$ 上连续函数列 $\{g_1^{(n)}(x)\}_{n\geq 1}$ 和 $\{g_2^{(n)}(x)\}_{n\geq 1}$ 使 $g_1^{(n)}(x)\to g_1(x)$, a.e., $g_2^{(n)}(x)\to g_2(x)$, a.e. 于 $[a,b]$ (见题). 此时 $[a,b]$ 上的连续函数列 $f(g_1^{(n)}(x),g_2^{(n)}(x))\to f(g_1(x),g_2(x))$, a.e. 从而得本题.

(ii) 也可用简单函数列 $\{g_1^{(n)}(x)\}_{n\geq 1}$ 和 $\{g_2^{(n)}(x)\}_{n\geq 1}$ 逼近 g_1 和 g_2.

设 h_1 和 h_2 是简单函数, $h_1([a,b])=\{a_1,\cdots,a_{m_1}\}$, $h_2([a,b])=\{b_1,\cdots,b_{m_2}\}$, 则

$$\{f(g_1(x),g_2(x))>\alpha\}=\bigcup_{(i,j):\,f(a_i,b_j)>\alpha}\{h_1=a_i\}\cap\{h_2=b_j\}$$

是可测集, 由此可知 $f(g_1^{(n)}(x),g_2^{(n)}(x))$ 是简单函数列, 所以……

(iii) $\{f(\xi_1,\xi_2)>\alpha\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的开集 G, 而 $G=\bigcup I_k$, 其中 $\{I_k\}$ 是两两不相交的半开方体. 若 $I_k=(a_k,b_k]\times(c_k,d_k]$, 则

$$[a,b]\bigcap\{(g_1(x),g_2(x))\in I_k\}=\{a_k<g_1\leq b_k\}\bigcap\{c_k<g_2\leq d_k\}$$

是可测的. 从而 $[a,b]\bigcap\{(g_1(x),g_2(x))\in G\}$ 可测. 故 $\{f(g_1(x),g_2(x))>\alpha\}=\{(g_1(x),g_2(x))\in G\}$ 可测.

提示: 无

29. 设 f 和 g 都在 $\mathbb{R}$ 上可测, 求证 $f(x)g(y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上可测.

证明. 先设 f 和 g 都是简单函数,

$$f(x)=\sum_{i=1}^{S}a_i\chi_{E_i}(x),\quad g(y)=\sum_{j=1}^{T}b_j\chi_{F_j}(y),$$

其中 $\{E_i\}_{1\leq i\leq S}$ 和 $\{F_j\}_{1\leq j\leq T}$ 都是 $\mathbb{R}$ 的分划, a_i, b_j 都是实数. 此时, $f(x)g(y)=\sum_{i=1}^{S}\sum_{j=1}^{T}a_ib_j\chi_{E_i}(x)\chi_{F_j}(y)=\sum_{i=1}^{S}\sum_{j=1}^{T}a_ib_j\chi_{E_i\times F_j}(x,y)$, 其中 $E_i\times F_j$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的可测集, $\{E_i\times F_j\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个分划. 从而 $f(x)g(y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的简单函数, 可测.

对一般 f 和 g, 有简单函数列 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 使 $f_n(x)\to f(x)$, $g_n(x)\to g(x)$. 从而 $f_n(x)g_n(y)\to f(x)g(y)$. 现 $f_n(x)g_n(y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的可测函数, 从而 $f(x)g(y)$ 也是.

提示: 令 $h_1(x,y)=f(x)$, $h_2(x,y)=g(y)$. 易知 h_1 和 h_2 都是 $\mathbb{R}^2$ 上的可测函数, 从而它们的乘积也是可测函数.

30. 设 $\{D_k\}_{k\geq 1}$ 是可测集列, $\sum_{k=1}^{\infty}m(D_k)<\infty$. 若 $\{f_p\}_{p\geq 1}$ 在每一 D_k 上测度收敛, 求证 $\{f_p\}$ 在 $D=\bigcup_{k=1}^{\infty}D_k$ 上测度收敛.

可不可以不闭!

证明. 任给 $\varepsilon > 0$, 有 k_0 使 $\sum_{k=k_0+1}^{\infty} m(D_k) < \varepsilon/2$. 对每一 k, $1 \le k \le k_0$, $\{f_p\}$ 是 D_k 上的测度基本列, 从而有 N_k, 使

$$m(\{x \in D_k : |f_p(x) - f_q(x)| \ge \delta\}) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, \quad p, q > N_k.$$

取 $N = max\{N_k : 1 \le k \le k_0\}$, 则当 $p, q > N$ 时,

$$\begin{aligned}
& m(\{x \in D : |f_p(x) - f_q(x)| \ge \delta\}) \\
\le\ & m(\{x \in \bigcup_{k=1}^{k_0} D_k : |f_p(x) - f_q(x)| \ge \delta\}) + m(\{\bigcup_{k=k_0+1}^{\infty} D_k\}) \\
\le\ & \sum_{k=1}^{k_0} m(\{x \in D_k : |f_p(x) - f_q(x)| \ge \delta\}) + \sum_{k=k_0}^{\infty} m(D_k) \\
\le\ & \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

从而 $\{f_p\}$ 也是 $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$ 上的测度基本列.

提示: 无

31. 设 $f(x, y)$ 是 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 上的函数, 对每一 $x \in \mathbb{R}$, $f(x, y)$ 是 y 的连续函数, 对每一 $y \in \mathbb{R}$, $f(x, y)$ 是 x 的可测函数. 求证

(i) $F(x) = \max\{f(x, y) : 0 \le y \le 1\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上可测.

(ii) $f(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上可测.

证明.

(i) 令 $\{r_n\}_{n \ge 1}$ 是 $[0, 1]$ 上有理数全体, 则

$$\{F > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f(\cdot, r_n) > \alpha\} \text{—可测.}$$

(ii) 对每一 $n \ge 1$, 定义

$$f_n(x, y) = \begin{cases} f(x, \frac{k-1}{2^n}), & \text{若} \frac{k-1}{2^n} \le y < \frac{k}{2^n},\ -n2^n + 1 \le k \le n2^n, \\ 0, & \text{若} y < -n \text{或} y \ge n. \end{cases}$$

易证 $f_n(x, y) \to f(x, y)$ $(n \to \infty)$. 但

$$f_n(x, y) = \sum_{k=-n2^n+1}^{n2^n} f(x, \frac{k-1}{2^n}) \chi_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})}(y).$$

和号中每一项在 $\mathbb{R}^2$ 中可测 (题). 从而 $f(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上可测.

$g(x) > \lambda$.

提示: 无

32. 设 f 是 $[0, 1]$ 上几乎处处有限的可测函数. 求证有 $[0, 1]$ 上单减函数 g, 使对任何 $\lambda \in \mathbb{R}$, $m(\{g > \lambda\}) = m(\{f > \lambda\})$.

$g(x) < \lambda$.

证明. 令 $g(x) = \inf\{\lambda : m(\{f > \lambda\}) \le x\}$, $x \in (0, 1)$. 若 $0 < x_1 < x_2 < 1$, 则 $\{\lambda : m(\{f > \lambda\}) \le x_1\} \subset \{\lambda : m(\{f > \lambda\}) \le x_2\}$, 从而 $g(x_1) \ge g(x_2)$. 即 g 单减. 为证结论成立, 只需证明 $\{g > \lambda\} = (0, m(\{f > \lambda\}))$.

事实上, 若 $m(\{f > \lambda\}) \le x$, 则 $g(x) \le \lambda$. 从而 $\{g > \lambda\} \subset (0, m(\{f > \lambda\}))$. 反之, 若 $0 < x < m(\{f > \lambda\})$, 由于 $m(\{f > \lambda\})$ 关于 λ 右连续, 故存在 $\lambda_0 > \lambda$ 使 $0 < x < m(\{f > \lambda_0\})$. 从而对一切 $t \le \lambda_0$ 有 $0 < x < m(\{f > t\})$. 于是 $g(x) \ge \lambda_0 > \lambda$. 所以 $(0, m(\{f > \lambda\})) \subset \{g > \lambda\}$. 故结论成立.

提示: 同证明.

33. 设 f 在 $[a, b]$ 上连续. 对每一 $y \in \mathbb{R}$, $\eta(y)$ 表示方程 $f(x) = y$ 在 $[a, b]$ 上解的个数. 求证 $\eta(y)$ 可测.

证明. 把 $[a, b]$ 区间 2^n 等分, 分点为 $\{x_i\}_{0 \le i \le 2^n}$. 令 $I_i = f([x_{i-1}, x_i))$, $1 \le i \le 2^n - 1$, $I_{2^n} = f([x_{2^n-1}, x_{2^n}])$. 因为 f 连续, 所以 I_i 是区间, $1 \le i \le 2^n$. 令 $\chi_i^{(n)}(y)$ 是 I_i 上的特征函数, $\eta_n(y) = \sum_{i=1}^{2^n} \chi_i^{(n)}(y)$, 则 $\eta_n(y)$ 可测.

任意固定 $y \in \mathbb{R}$. 若 $\eta(y) = 0$, 则对一切 $n \ge 1$, $\eta_n(y) = 0$; 若 $\eta(y) = k$ 为正整数, 则当 n 充分大时, $\eta_n(y) = k$; 若 $\eta(y) = \infty$, 则 $\lim_{n\to\infty} \eta_n(y) = \infty$. 所以, $\eta(y) = \lim_{n\to\infty} \eta_n(y)$ 是可测函数.

提示: 无

34. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上实值可测函数, 而且对任何 $x, y \in \mathbb{R}$ 有 $f(x + y) = f(x) + f(y)$. 求证 f 连续.

证明. 由 Lusin 定理, 存在正测集 E 使 f 沿 E 连续. 不妨设 E 是有界闭集, 则 f 在 E 上一致连续. 由习题 2.32, 0 是 $\{x - y : x, y \in E\}$ 的内点. 故对任何 $z_n \to 0$, 当 z_n 充分小时, 存在 x_n, $y_n \in E$ 使 $z_n = x_n - y_n$. 于是 $f(z_n) = f(x_n) - f(y_n) \to 0$. 所以 f 在点 0 连续, 从而在 $\mathbb{R}$ 上连续.

提示: 同证明.

35. 构造 $[0, 1]$ 上处处收敛的可测函数列 $\{f_n : n \ge 1\}$, 使得它在 $[0, 1]$ 中任何测度为 1 的子集上不一致收敛.

证明. $f_n(x) = x^n$.

提示: 同证明.

36. 设 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上实值可测, 而且对任何 $x>0$, $y>0$, $f(x+y)$ 的值介于 $f(x)$ 和 $f(y)$ 之间, 求证 f 是常数.

证明. 先证 $f(x)$ 几乎处处为常数. 由习题 3.12, 只需证明对任何 $\lambda \in \mathbb{R}$, $\{f>\lambda\}$ 和 $\{f<\lambda\}$ 必有一个是零测集.

设 $E_1=\{f>\lambda\}$ 是正测集. 因为 $\{x+y:\ x,y\in E_1\}\subset E_1$, 所以 E_1 中有内点, 即存在 $a,\varepsilon>0$, 使得 $(a,a+\varepsilon)\subset E_1$. 于是 $(2a,2a+2\varepsilon)\subset E_1,\cdots$, $(na,na+n\varepsilon)\subset E_1$, $n\geq 1$. 所以, 当 n 充分大时, $(na,na+a]\subset E_1$. 因此, 存在 $x_1>0$, 使得 $(x_1,\infty)\subset E_1$.

若 $E_2=\{f<\lambda\}$ 也是正测集, 类似可证存在 $x_2>0$, 使得 $(x_2,\infty)\subset E_2$, 与 $E_1\cap E_2=\emptyset$ 矛盾.

所以, 存在常数 c 以及集合 F, 使得 $m((0,\infty)\setminus F)=0$ 并且

$$f(x)=c,\qquad x\in F.$$

对任何 $x>0$, 令 $F_1=F\cap(0,x)$, $F_2=\{x-y:\ y\in F_1\}$, 则 $m(F_1)=m(F_2)=x$. 于是, $m(F_1\cap F_2)=x>0$. 所以, 存在 $y,z\in F_1$, 使得 $z=x-y$, $x=y+z$. 因为 $f(z)=f(y)=c$, 所以 $f(x)=c$.

提示: 同证明.

第四章部分习题参考答案与提示

1. 设 $m(E)>0, f\in L(E)$, f 非负且 $\int_E f(x)dx=0$. 求证: $f(x)=0$, a.e.

证明. 对任意 $n\geq 1$, $0=\int_E f(x)dx\geq \int_{\{f\geq 1/n\}} f(x)dx \geq \frac{1}{n}\cdot m(\{f\geq 1/n\})$, 故 $m(\{f\geq 1/n\})=0$. 从而 $\{f \geq 0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{f\geq 1/n\}$ 是零测集. 因此 $f(x)=0$, a.e.

$\{f>0\}$

提示: 无

2. 设 $f\in L(E)$, 求证: $k\cdot m(\{|f|>k\})\to 0(k\to\infty)$.

紧单增

证明. 令 $f_k(x)=\begin{cases} f(x), & |f(x)|\leq k \\ 0, & |f(x)|>k \end{cases}$, 则 $|f_k(x)|\uparrow|f(x)|$, a.e. (注意 $\{|f|=\infty\}$ 是零测集) 故有单调收敛定理 $\int_E|f_k(x)|dx\uparrow\int_E|f(x)|dx$ 或 $\int_E[|f_k(x)|-|f(x)|]dx\to 0(k\to\infty)$ 但 $\int_E[|f_k(x)|-|f(x)|]dx=\int_{\{|f|>k\}}|f(x)|dx\geq k\cdot m(\{|f|>k\})$ 由此得本题.

$|f(x)|-|f_k(x)|$

提示: 无

3. 设 $m(E)<\infty$, $\{f_k\}$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数列. 求证: 为使 $f_k\Rightarrow 0$, 充要条件是 $\int_E|f_k(x)|/(1+|f_k(x)|)dx\to 0(k\to\infty)$.

证明. 设 $f_k\Rightarrow 0$. 此时对任何 $\delta>0$,

$$\begin{aligned}\int_E\frac{|f_k(x)|}{1+|f_k(x)|}dx &= \int_{\{|f_k(x)|\geq\delta\}}\frac{|f_k(x)|}{1+|f_k(x)|}dx+\int_{\{|f_k(x)|<\delta\}}\frac{|f_k(x)|}{1+|f_k(x)|}dx\\ &\leq m(\{|f_k|\geq\delta\})+\int_{\{|f_k|<\delta\}}\frac{\delta}{1+\delta}dx\\ &\leq m(\{|f_k|\geq\delta\})+\delta\cdot m(E)\end{aligned}$$

任给 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon/2m(E)$. 对此 δ, 有 K, 当 $k>K$ 时 $m(\{|f_k|\geq\delta\})<\varepsilon/2$. 这样当 $k>K$ 时, $\int_E|f_k(x)|/(1+|f_k(x)|)dx<\varepsilon/2+m(E)\varepsilon/2m(E)=\varepsilon$. 故 $\int_E|f_k(x)|/(1+|f_k(x)|)dx\to 0$.

反之若 $\int_E|f_k(x)|/(1+|f_k(x)|)dx\to 0$, 则从 $\int_E|f_k(x)|/(1+|f_k(x)|)dx\geq\int_{\{|f_k(x)|\geq\delta\}}|f_k(x)|/(1+|f_k(x)|)dx\geq m(\{|f_k|\geq\delta\})\delta/(1+\delta)$ 知 $m(\{|f_k|\geq\delta\})\to 0(k\to\infty)$, 即 $f_k\Rightarrow 0$.

提示: 无

4. 设 $f\in L([a,b]),\varepsilon>0$. 求证: