23-24 秋冬概率论

2024 年 1 月 13 日

1. 证明: $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right)-\sum_{1 \leq i<j \leqslant n} P\left(A_i \cap A_j\right)+\cdots+(-1)^{n-1} P\left(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n\right)$

2. 两批零件，第一种 n_1 个，寿命 $X_1, \cdots X_{n1} \sim E\left(\lambda_1\right)$ ，第二种 n_2 个，

寿命 $Y_1, \cdots, Y_{n_2} \sim E\left(\lambda_2\right)$ ，有一个零件失效则失效，记 T 为失效时间

(1) 证明 $T \sim E\left(\lambda_1 n_1+\lambda_2 n_2\right)$

(2) 第一种零件失效导致失效的概率

3. $X_1 \ldots X_n$ 独立同分布 $\sim P(\lambda)$

$$S=x_1+\cdots+x_n \quad \bar{x}=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \quad T=\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2$$

(1) 计算 ET

(2) $S=s(s=0,1, \cdots)$ 时, 证明 $X_i \sim B\left(s, \frac{1}{n}\right)$

(3) 计算 $E(T \mid S)$

4. $p(x, y)=C(x-y)^2 e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}$

(1) 求 C

(2) 求 $P_x(x), P_y(y)$

(3) 计算 r_{XY}

(4) 证明 $X+Y, X-Y$ 独立

5. X_i 独立同分布，$E\left|X_1\right|<\infty, \mu=EX_1$ ，证明 $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu$

6. N_p 服从几何分布，参数为 p X_i 独立同分布 $\sim N(\mu,\sigma^2)$

$$Y_p = \sum_{k=1}^{N_p} X_k$$

(1) 证明 Y_p 是随机变量

(2) 求 EY_p

(3) 求 $\operatorname{Var} Y_p$

(4) 证明 Y_p 不是正态随机变量

7. (附加) (1) 证明 Y_p 是连续型随机变量

(2) $p \to 0$ ，证明 Y_P 收敛到某个分布函数