R^n 中的拓扑

luojunxun

2023 年 3 月 16 日

summary: 这里的 R^n 是 n 维欧式空间, 在其中已经定义了范数和距离

(邻域):$x \in R^n, \epsilon > 0; V(x, \epsilon) = \{y \in R^n | d(x, y) < \epsilon\}$ 称为 x 的 ϵ 邻域

. E 称为 x 的邻域 $\iff \exists \epsilon > 0 \ s.t. V(x, \epsilon) \subset E$

Theorem 定理 1.5.1:$V(x, \epsilon)$ 是其每一点的邻域

(R^n中的开集和闭集):$G \subset R^n$ 是其中每一点的邻域, 则称 G 是开集; 补集是开集的集合称为闭集

Theorem 定理 1.5.2:*1.* 全空间和空集定义为既开又闭集 *2.* 开集的有限交和任意并是开集 *3.* 闭集的任意交和有限并是开集

Theorem 定理 1.5.4:$F \subset R^n$是闭集 $\iff$ F中的任何点列$\{x_n\}$如果收敛到x,那么$x \in F$ *:* 也就是说闭集中的点列如果收敛, 那么一定收敛到它自身中

Proof:[定理 1.5.4] 充分性:假定 F 是闭集,$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是 F 中的数列, 并且收敛到 x, 如果$x \notin F, i.e. x \in F^c$.从而存在 x 的足够小的邻域包含在$F^c$ 中, 但是由于数列是收敛的, 当 n 充分大的时候, 数列中的点将全部属于这个邻域, 从而这些点在 F 的补集中, 但是数列的点在 F 中取, 这就产生了矛盾

. 必要性: 假定任意 F 中的数列收敛到 $x \in F$, 反设 F^c 不是开的, 则 $\exists x_0 \in F^c, s.t. \forall \epsilon > 0, V(x_0, \epsilon)$ 不是 x_0 的邻域, 按照 $\epsilon = \frac{1}{k}, k \in N$, 取 $x_k \in V(x_0, \frac{1}{k}) \cap F$, 就构成了 F 中的一个数

列, 但是这个数列收敛到了 F^c 中, 这与条件相悖, 从而证明了结论.

(R 中开集): 显然 R 中开区间是 R 中开集

. 若$G \subset R$是开集, (a,b)是 R 中开区间, 若:$(a,b) \subset G$但是$a, b \notin G$.则 (a,b) 称为 G 的构成区间其中 a,b 可以是无穷

Lemma 1.5.1: G 是 R 中开集, 那么 G 中每一个点都属于 G 的一个构成区间

Proof :$\forall x \in G, \exists \epsilon > 0, s.t. o(x,\epsilon) \subset G, let : a = \inf\{a' < x|(a',x) \subset G\}, b = \sup\{b' > x|(x,b') \subset G\}$ **这里 a,b 都不属于 G, 否则 a,b 是内点, 从而不是确界**

Theorem 定理 1.5.5:*R 中开集 G 至多是可数个两两不交的开区间的并*

. 由引理 1.5.1,G 是 G 的构成区间的并, 构成区间是不交的, 这样就是一族开区间的并, 从而至多是可数的

(R^n 中集的内点, 内核, 附着点和闭包): E 是 x 的邻域, 则 x 称为 E 的内点;E 的内点的全体称为 E 的内核记为 E^o; 若 x 的任一邻域与 E 交非空, 称 x 是 E 的附着点 (孤立点也是附着点);E 的附着点全体称为 E 的闭包, 记为 $\overline{E}$

Theorem 定理 1.5.6: *内核是包含于集的最大开集, 闭包是包含集的最小闭集 (反证法)*

1.5.6: 集是开集等价于集和内核相等, 集是闭集等价于集和闭包相等

Theorem $x \in \overline{E}$: *存在 E 中点列使得其收敛到 x*