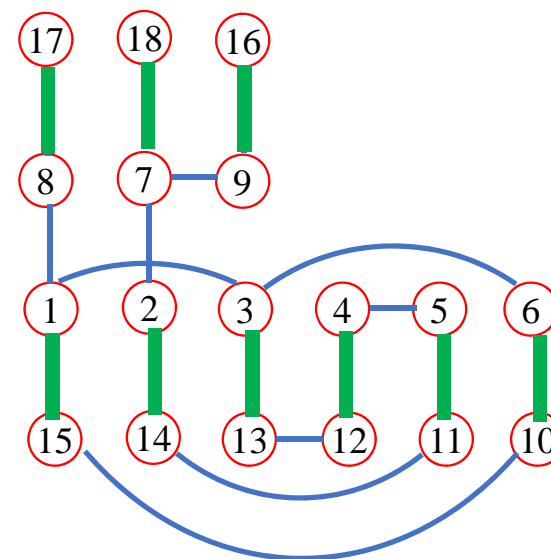


# 图的应用

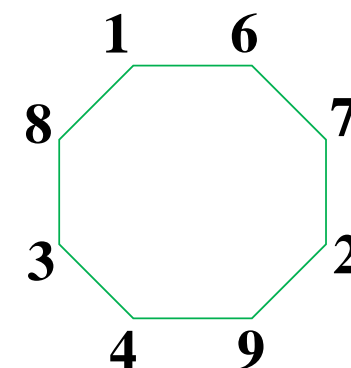
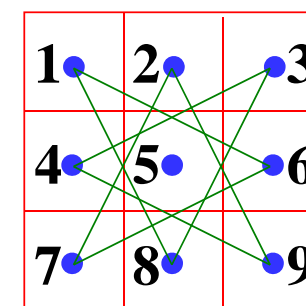
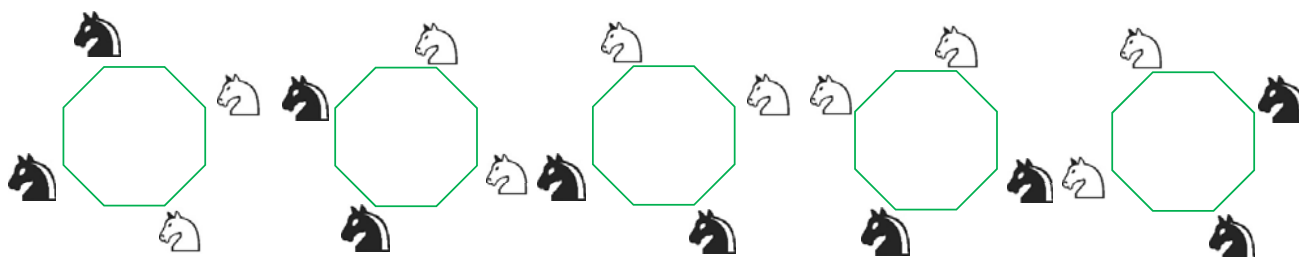
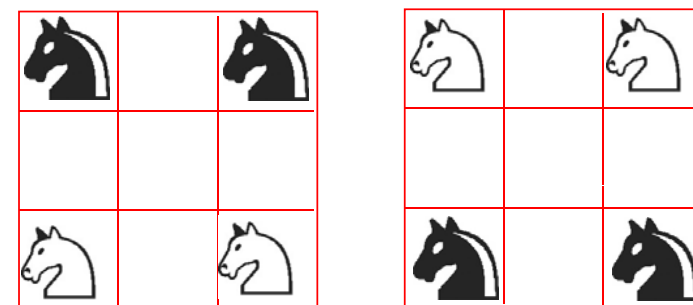
- 搭档问题
  - 编号为1~18的18名同学组成9对，每对两名同学的编号之和为一平方数。求每对同学的编号
- 图论方法
  - 将每位同学作为一个顶点，两个顶点之间有边相连当且仅当两名同学的编号之和为一平方数
  - 求图的完美匹配



# 图的应用

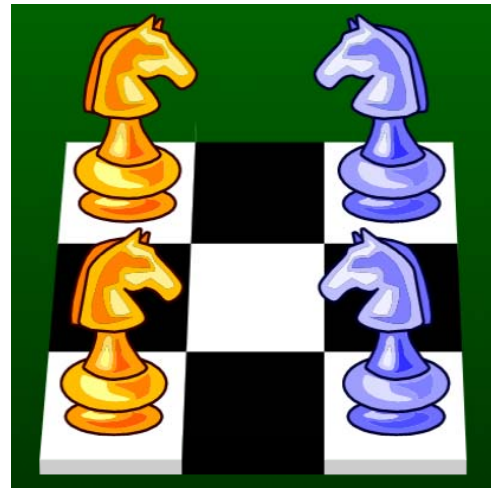
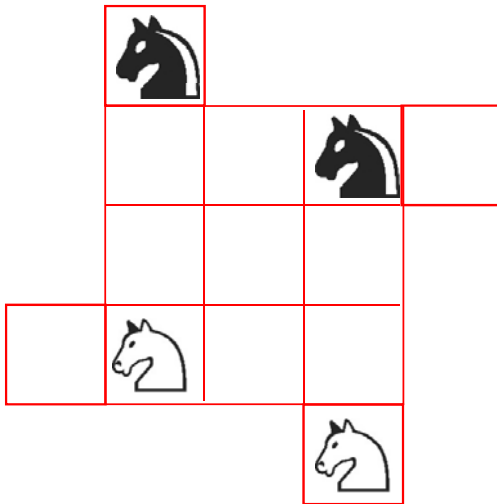
- 黑白异位游戏

- 一  $3 \times 3$  方格棋盘，第一行左、右两个方格各置一匹黑马，第三行左、右两个方格各置一匹白马，按国际象棋中马的走子规则，如何用最少的步数将黑马白马的位置互换
- 将每个格子作为图的一个顶点，对应两个格子的顶点之间有边相连当且仅当马能从一个跳到另一个



# 黑白异位

- Guarini's Problem



<https://www.proprofsgames.com/knight-switch/>

Paolo Guarini di Forlì, 15-16世纪意大利人, Dudeney认为游戏由Guarini于1512年提出, 但在9世纪左右阿拉伯棋手Al-Ádlí ar-Rúmi的著作中已记载了该游戏

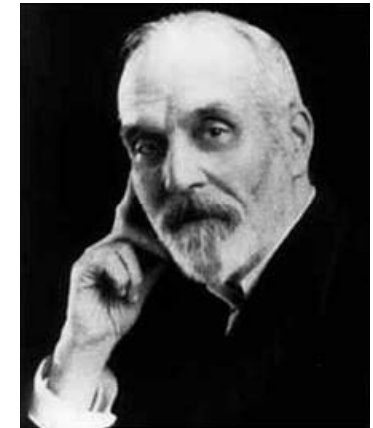
## AMUSEMENTS IN MATHEMATICS

BY  
HENRY ERNEST DUDENEY  
AUTHOR OF "THE CANTERBURY PUZZLES: AND  
OTHER CURIOUS PROBLEMS," ETC.

In Mathematics he was greater  
Than Tycho Brahe or Eratosthenes;  
For he, by geometrick scale,  
Could take the size of peas at ale;  
Resolve, by sines and tangents, straight,  
If bread or butter wanted weight;  
And wisely tell what hour o' th' day  
The cock does strike, by signs.  
BUTLER'S Hudibras.

THOMAS NELSON AND SONS, LTD.  
LONDON, EDINBURGH, AND NEW YORK

Dudeney HE. *Amusements  
in Mathematics*, Thomas  
Nelson & Sons, 1917



Henry Ernest  
Dudeney  
(1857-1930)  
英国数学家

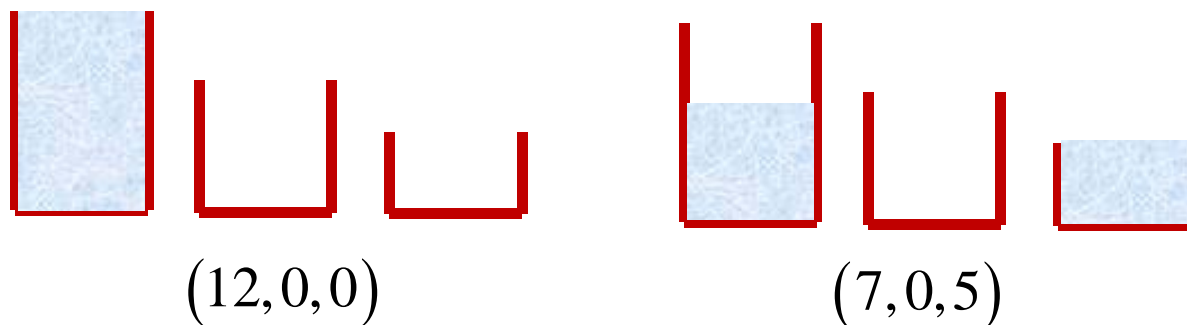
# 图的应用

- 分水问题

- 现有A,B,C三个水瓶，其容积分别为12,8,5升。A瓶装满水，B,C为空瓶。现欲利用B,C两瓶，将A瓶中的水均分，并使倾倒次数最少

- 图论方法

- 用  $(a,b,c)$  表示某一时刻的状态，其中  $a,b,c$  分别为该时刻A,B,C三个水瓶中所装水量



**Siméon Denis Poisson**  
(1781–1840)  
法国数学家、物理学家

# 分水问题

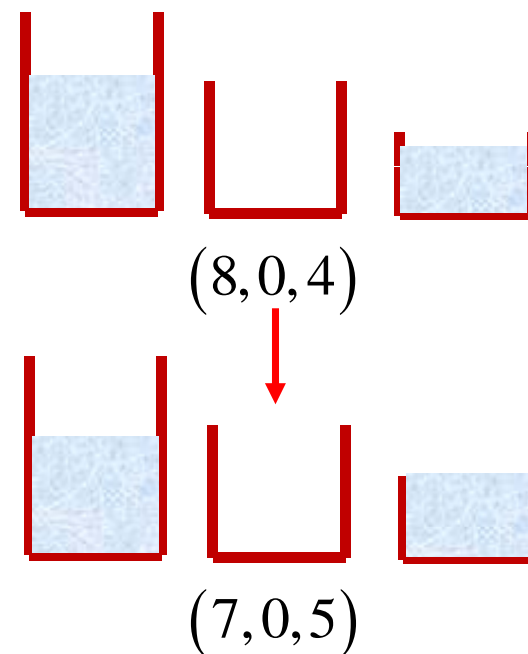
- 分水问题

- 构造有向图  $G = (V, E)$  , 其中顶点集  $V$  为所有可能状态的集合, 弧  $(\alpha, \beta) \in E$  当且仅当可通过一次倾倒使状态由  $\alpha$  变为  $\beta$
- 弧的起点与终点应满足的条件
  - 三个瓶子中恰一个瓶子的水量不变
  - 或者水量增加的瓶子装满水, 或者水量减少的瓶子没有水

- 求从  $(12, 0, 0)$  到  $(6, 6, 0)$  的最短 (有向) 路

以某个顶点为起点的弧不超过4, 图是稀疏图

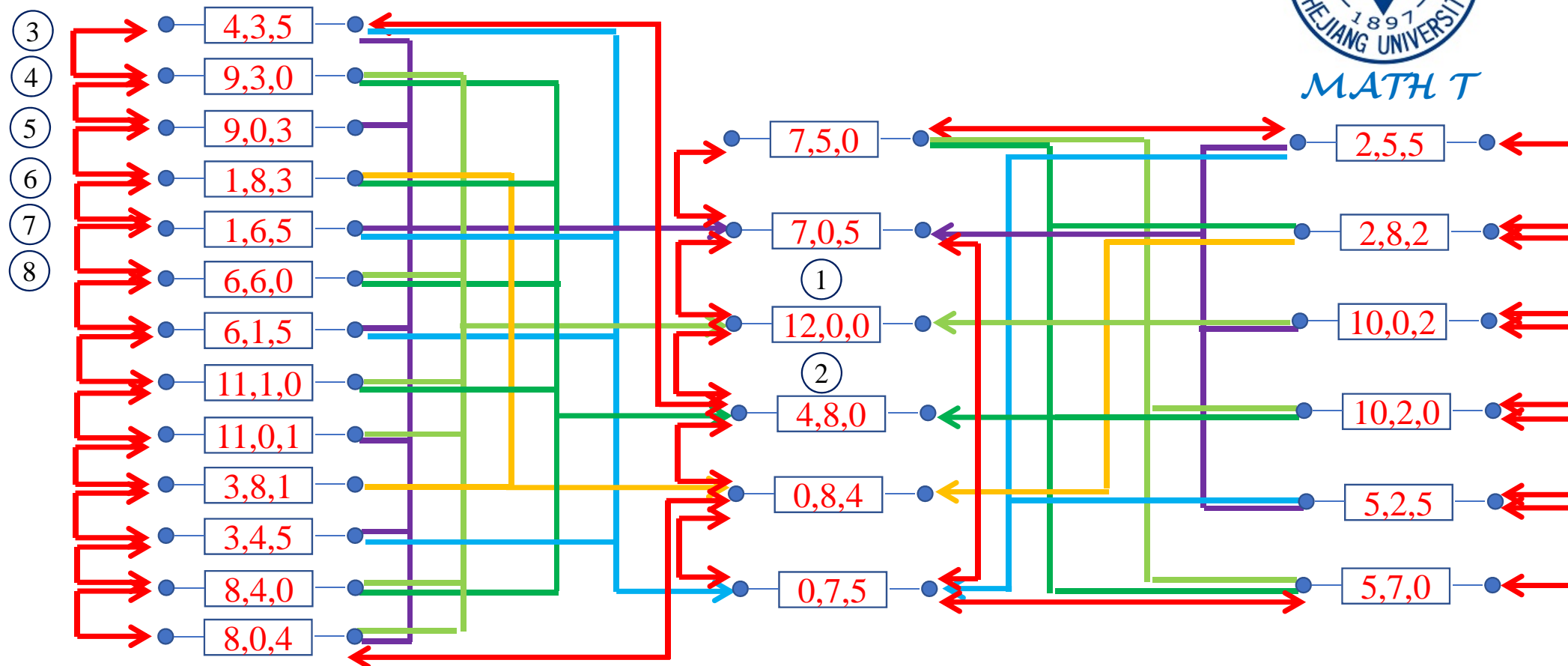
$(8, 0, 4) \rightarrow (0, 8, 4) (7, 0, 5) (12, 0, 0) (8, 4, 0)$



# 分水问题



MATH T



# 代表问题



- 代表选择问题

- 某校共有  $m$  个专业，为调研  $n$  门课程的教学情况，邀请部分同学参加座谈
  - 每门课程有一名同学参加
  - 各门课程邀请的学生各不相同
  - 来自专业  $i$  的学生数不超过  $a_i, i = 1, \dots, m$
- 存在一种可行方案当且仅当网络存在流量为  $n$  的最大流

