1. 不妨设这些点为 $x_i$ $(k=1,2,\cdots,k)$。$\forall \varepsilon>0$ $\exists P$ s.t. $x_i\in I_i$ $\begin{cases} I_i=U(x_i,\delta_i) \\ I_i\cap I_j=\varnothing\ (i\neq j) \end{cases}$ 且 $I_i'$ 为不包含 $x_i$ 的区间。记 $M=\max\{|f(x_i)-g(x_i)|\}$。令 $\delta=\max\{\delta_i\}=\dfrac{\varepsilon}{2kM+1}$。

那么 $\left|\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx\right|=\left|\sum_{i=1}^{k}[f(x_i)-g(x_i)]\cdot 2\delta_i\right|<2Mk\dfrac{\varepsilon}{2kM+1}<\varepsilon$ 考虑 $\varepsilon$ 的任意性。

故 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$

5. 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 至少存在一点 $x_0$，s.t. $f(x_0)>0$。由保号性，$\exists\delta$ s.t. $\forall x\in U(x_0,\delta)$，$f(x)>0$。

$\int_a^b f(x)dx\geqslant\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)dx=\lim\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$，由于 $f(\xi_i)>0$，故 $\lim\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i>0$。

即 $\int_a^b f(x)dx>0$

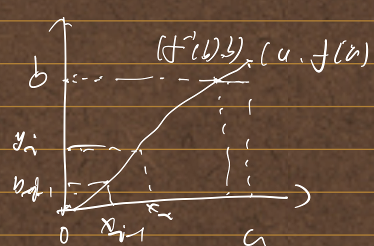
7. $\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}1\cdot f(x)dx=f(\xi)\int_a^{\frac{a+b}{2}}dx=\dfrac{b-a}{2}f(\eta)$ 其中

$f(\eta)\in[\inf f([a,\tfrac{a+b}{2}]),\ \sup f([a,\tfrac{a+b}{2}])]$ $\eta\in(a,\tfrac{a+b}{2})$。

而有 $f(b)=\dfrac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)dx=f(\eta)$。由 Rolle 定理，$\exists\xi\in(\eta,b)$ s.t. $f'(\xi)=0$

故 $\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $f'(\xi)=0$

10. 证明：当 $a=f^{-1}(b)$，即 $f(a)=b$ 时




$\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy=\int_0^a f(x)dx+\int_0^{f(a)}f^{-1}(y)dy=af(a)$

证明如下：对 $[0,a]$ 划分，$0=x_0<x_1\cdots<x_n=a$。

从而相应的，有对 $[0,f(a)]$ 的划分，$0=y_0<y_1<\cdots<y_n=f(a)$。

$\int_0^a f(x)dx+\int_0^{f(a)}f^{-1}(y)dy=\sum_{i=1}^{n}y_i(x_i-x_{i-1})+\sum_{i=1}^{n}x_{i-1}(y_i-y_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i-x_{i-1}y_{i-1})$

$=af(a)-0=af(a)=ab$。$(\|P\|\to 0)$

当 $a\neq f^{-1}(b)$ 时，不妨设 $a>f^{-1}(b)$，则 $\exists c$ s.t. $f(c)=b$

$\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy=bc+\int_c^a f(x)dx$ 由于 $f'(x)>0$，$f(x)$ 增，故 $f(x)>f(c)$ $\forall x\in(c,a)$ 成立。

从而有 $\int_c^a f(x)dx>\int_c^a f(c)dx=b(a-c)$

从而有 $\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy=bc+\int_c^a f(x)dx>bc+b(a-c)=ab$

则有 $\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy = bc + \int_c^a f(x)dx > bc + b(a-c) = ab$

综上，$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy \geq ab$，当且仅当 $f(a)=b$ 时取"="

12. (1) $\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 = \left[\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i)\Delta x_i\right]^2 \xlongequal{\Delta x_i\text{取定}} \Delta x_i^2 \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i)\right)^2$

(柯西不等式) $\leq \Delta x_i^2 \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f^2(x_i) \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n g^2(x_i) = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f^2(x_i)\Delta x_i \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n g^2(x_i)\Delta x_i$

$= \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$.

即 $\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$

(2). 等价于证明 $\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx \leq \int_a^b f^2(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx + 2\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx}$

即证明 $\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$.

由 Schwarz 不等式知其成立，故原命题得证。

35 号