集合与实数集

luojunxun

2023 年 4 月 16 日

开覆盖, 紧集

Theorem 1.5.20: R^n 中的紧集是有界闭集

Theorem 1.5.21:$F \overset{compact}{\subset} R^n, f \in C(F) \Rightarrow (i:) f$ 在 F 上有界并且能取到最大最小值

$(ii:) f$ 在 F 上一致连续$i.e. \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t. \forall d(x,y) < \delta, x, y \in F : |f(x) - f(y)| < \epsilon$

Proof:[1.5.21] 1. 只需证明连续函数把紧集映射成紧

集:任取$f(F)$的开覆盖$H = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda \supset f(F); \forall H_\lambda \in H,$

考虑其原像$f^{-1}(H_\lambda)$, 则根据连续映射的性质-开集的原像是开集$f^{-1}(H_\lambda) \overset{open}{\subset} R^n;$

$\Rightarrow \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(H_\lambda) \supset F;$则这是 F 的一个开覆盖, 但 F 是紧的, 则$\exists\Lambda'$是有限集 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda'} f^{-1}(H_\lambda) \supset F.$

再取其像就有$f(F) \subset f(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda'} f^{-1}(H_\lambda)) =$

$\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda'} H_\lambda$ $i.e.$任意 f(F) 的开覆盖有有限子覆盖, 从而 f(F) 是紧集

2. 首先由 f 的连续性有 $\forall x \in F, \forall \epsilon > 0, \exists \delta_x > 0\ s.t. \forall y \in O(x, \delta_x) : |f(x) - f(y)| < \epsilon;$

这里 $\bigcup\limits_{x\in F} O(x, \delta_x) \supset F$是 F 的开覆盖, 由 F 的紧致性:$\exists G \subset F$是有限集$s.t.$ $\bigcup\limits_{x\in G} O(x, \delta_x) \supset F$

$let\ \delta = \min\limits_{x\in G}\{\delta_x\}$, 则有:$\forall x, y \in F, d(x,y) < \delta : |f(x) - f(y)| < \epsilon$ 从而 f 一致连续 [1][2]

work: 闭集是可数个开集的交, 开集是可数个闭集的并

参考文献

[1] “紧集上的连续函数有界有最值.” [Online]. Available: https://www.zhihu.com/question/521878593

[2] “紧集上的连续函数一致连续.” [Online]. Available: https://www.zhihu.com/question/56393706