Andrey (Andrei) Andreyevich Markov

(14 June 1856 N.S. ï 20 July 1922)

Andrey (Andrei) Andreyevich Markov

14 June 1856 N.S. – 20 July 1922

a Russian mathematician.

He is best known for his work on stochastic processes.

A primary subject of his research later became known as Markov chains and Markov processes.

Markov and his younger brother Vladimir Andreevich Markov (1871 – 1897) proved Markov brothers' inequality.

His son, another Andrei Andreevich Markov (1903 – 1979), was also a notable mathematician, making contributions to constructive mathematics and recursive function theory.

1. Markov链定义
2. m-步转移概率矩阵
3. 状态空间分类
4. 常返性和瞬时性
5. 极限分布与平稳分布
6. 可逆Markov链
7. 连续时间Markov链
8. 应用

1. Markov链定义

Markov链是一类特殊的随机过程，时间参数空间可为离散或连续集，但其状态空间最多包含可数个状态。我们从离散时间Markov链开始，令$X_0, X_1, \cdots, X_n, \cdot$是随机过程，状态空间为

$$\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \cdots, e_N\}$$

其中$N < \infty$或者$N = \infty$。

需要指出，e_i可以是数，向量，但大多情况下是抽象的点（状态），比如“运行”、“维修”；“晴天”、“阴雨”。为表达简单起见，记

$$\mathcal{E} = \{1, 2, \cdots, N\}$$

事件$\{X_n = i\}$ 意味着随机过程在第n时刻处于状态i。

定义：如果对任意$n \geq 0$，任意状态i, j以及$i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}$，下列成立

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_0 = i_0)$$
$$= P(X_{n+1} = j | X_n = i) \qquad (1)$$

称$X_n, n \geq 0$是Markov链。

Markov链最早由Markov于1905年提出并加以研究。人们通常称等式(1)为Markov性质.

它表明在给定当前状态$\{X_n = i\}$下，随机过程将来（$n+1$时刻）处于状态j的概率大小与过去历史状态$\{i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}\}$独立。

记

$$p_{n;i,j} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

称为Markov链在第n时刻从状态i转移到状态j的概率。

特别，如果$p_{n;i,j}$与n无关，那么称该Markov链为（时间）齐次Markov链。

如无特殊声明，本章仅讨论齐次Markov链。令

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,N} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{N,1} & p_{N,2} & \cdots & p_{N,N} \end{pmatrix}$$

称$\mathbf{P}$为Markov链的转移概率矩阵。$\mathbf{P}$是一个$N \times N$的矩阵，完全刻画了Markov链各个状态之间转移的概率大小。根据概率的基本性质可知

$$p_{i,j} \geq 0, \quad 1 \leq i,j \leq N$$

并且

$$\sum_{j=1}^{N} p_{i,j} = 1, \quad 1 \leq i \leq N$$

例1. 简单随机游动：$S_0 = 0$

$$S_n = S_{n-1} + \xi_n, \quad n \geq 1$$

例2. 罐子(Urn)模型

某罐子装有a个黑球，b个红球。现在随意摸出一球，如果是红球，将其放回并添加一个红球；如果是黑球，将其放回。令X_n表示第n次摸球之后，罐子中红球的个数。那么状态空间为：

$$\mathcal{E} = \{b, b+1, b+2, \cdots\}$$

$$P(X_0 = b) = 1$$

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P(X_{n+1} = j | X_n = i) \\ &= \begin{cases} \frac{i}{a+i}, & j = i+1 \\ \frac{a}{a+i}, & j = i \\ 0, & \end{cases} \end{aligned}$$

例3. 仓储(Inventory)模型

某大型超市仓库按下列方案储存货物：

- 初始仓库储存量为S。
- 如果当日营业结束后，发现仓库货物少于或等于s，则马上增加到S；
- 如果当日营业结束后，发现仓库货物多于s，则不增加货物。

已知该货物每天销售量是随机的，并且相互独立，分布为

$$P(\xi = k) = p_k, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

令X_n表示第$n+1$天营业开始时仓库里的货物储存量，ξ_n表示第n天的货物销售量，那么

状态空间为

$$\mathcal{E} = \{s+1, s+2, \cdots, S\}$$

$$P(X_0 = S) = 1$$

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - \xi_{n+1}, & X_n - \xi_{n+1} > s \\ S, & X_n - \xi_{n+1} \leq s \end{cases}$$

可以计算转移概率（略）

例4. 赌博（Gamble）模型

甲乙两人进行赌博，每局赌注1元，甲赢的概率为p。

赌博开始时，甲拥有赌资a元，乙拥有赌资b元。

一方输光后，赌博结束。

令X_n表示第n局后甲拥有的赌资。

状态空间为

$$\mathcal{E} = \{0, 1, 2, \cdots, a+b\}$$

$$P(X_0 = a) = 1$$

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = \begin{cases} p, & j = i + 1, 0 < i < a + b \\ 1 - p, & j = i - 1, 0 < i < a + b \\ 1, & i = a + b, j = a + b \\ 1, & i = 0, j = 0 \end{cases}$$

- Markov 链的表示

1. 概率转移矩阵

正如上面讨论的那样，Markov链的分布规律完全初始分布和转移概率矩阵所确定。转移概率矩阵刻画了状态之间转移的内在机制，随机过程的许多长时间渐近性质仅依赖于转移概率矩阵，因此显得尤为重要。所以人们描述Markov链时，通常只强调转移概率矩阵**P**。

2. 有向图

令(V, G) 是一个图，其中V表示顶点集，G是边集。如果每条边被赋予了一个方向，通常用箭头表示，那么该图是一个有向图。图、有向图是现代数学的一个最基本工具，对于研究Markov链，特别对于直观地理解一些基本概念、状态之间的转移和一些算法非常有帮助。

令$X_n, n \geq 0$是一个Markov链，状态空间为$\mathcal{E} = \{1, 2, \cdots, N\}$，转移概率矩阵为$\mathbf{P}$。为给出有向图表示，令$V = \mathcal{E}$。如果$p_{i,j} > 0$，则在两点$i$和$j$之间画一条有向弧线，其中箭头从$i$指向$j$；并在弧线附近写上数字$p_{i,j}$，旨在指出从状态$i$到$j$之间的转移概率大小。$p_{i,j} = 0$，则不用弧线连结；当然，如果$p_{i,i} > 0$，则画从$i$到自身一条封闭弧线。

例.

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

有向图:

3. 递推方程构造

假设Y_n，$n \geq 1$是一列独立同分布随机变量，取值空间为S'。

令X_0是取值于S的随机变量，并且与Y_n's独立；

$f: S \times S' \to S$一个映射。定义

$$X_n = f(X_{n-1}, Y_n), \quad n \geq 1$$

那么$X_n, n \geq 0$是Markov链，具有转移概率

$$p_{ij} = P(f(i, Y_1) = j)$$

- 确定Markov链的分布

令

$$p_0(i) = P(X_0 = i)$$

并且

$$\mathbf{p}_0 = (p_0(1), p_0(2), \cdots, p_0(N))$$

称$\mathbf{p}_0$为Markov链的初始分布。

$\mathbf{p}_0$描述着随机系统的初始状态分布规律。

通常情况下，它是可选择、可控制的。

初始分布$\mathbf{p}_0$和转移概率矩阵$\mathbf{P}$完全决定着Markov链的分布。

事实上，对任意状态j，利用全概率公式

$$
\begin{aligned}
p_1(j) =: P(X_1 = j) &= \sum_{i=1}^{N} P(X_1 = j | X_0 = i) P(X_0 = i) \\
&= \sum_{i=1}^{N} p_0(i) p_{i,j}
\end{aligned}
$$

令

$$\mathbf{p}_1 = (p_1(1), p_1(2), \cdots, p_1(N))$$

那么，

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 \mathbf{P}$$

类似地，

$$
\begin{aligned}
p_2(j) =: P(X_1 = j) &= \sum_{i=1}^{N} P(X_2 = j | X_1 = i) P(X_1 = i) \\
&= \sum_{i=1}^{N} p_1(i) p_{i,j}
\end{aligned}
$$

令

$$\mathbf{p}_2 = (p_2(1), p_2(2), \cdots, p_2(N))$$

那么，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 \mathbf{P} \\
&= \mathbf{p}_0 \mathbf{P}^2
\end{aligned}
$$

依此运用归纳法，得

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_0 \mathbf{P}^n$$

其中

$$\mathbf{p}_n = (p_n(1), p_n(2), \cdots, p_n(N))$$

表示Markov链在第n时刻处于各个状态的概率分布。

- 任意有限维联合分布

Markov链的任意有限维分布同样由初始分布$\mathbf{p}_0$和转移概率矩阵$\mathbf{P}$所确定。事实上，利用条件概率的链式法则，

$$
\begin{aligned}
&P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n) \\
&= P(X_0 = i_0) P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) P(X_2 = i_2 | X_1 = i_1, X_0 = i_0) \\
&\quad \cdots P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_0 = i_0)
\end{aligned}
$$

进而，由Markov性质得

$$
\begin{aligned}
&P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n) \\
&= p_0(i_0) p_{i_0,i_1} p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_{n-1},i_n}
\end{aligned}
$$

- m-步转移概率矩阵

回忆

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

人们自然会问，2步转移概率

$$P(X_{n+2} = j | X_n = i) = ?$$

令$p_{ij}^{(2)} = P(X_{n+2} = j | X_n = i)$。由条件概率运算法则知，

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(2)} &= \sum_{k=1}^{N} P(X_{n+2} = j | X_{n+1} = k, X_n = i) P(X_{n+1} = k | X_n = i) \\ &= \sum_{k=1}^{N} p_{kj} p_{ik} \end{aligned}$$

这样，如果令

$$\mathbf{P}^{(2)} = (p_{ij}^{(2)})_{N\times N}$$

那么

$$\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}^2$$

类似地，令$p_{ij}^{(3)} = P(X_{n+3} = j|X_n = i)$，

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(3)} &= \sum_{k=1}^{N} P(X_{n+3} = j|X_{n+1} = k, X_n = i)P(X_{n+1} = k|X_n = i) \\ &= \sum_{k=1}^{N} p_{kj}^{(2)} p_{ik} \end{aligned}$$

如果令

$$\mathbf{P}^{(3)} = (p_{ij}^{(3)})_{N\times N}$$

那么

$$\mathbf{P}^{(3)} = \mathbf{P}^{(2)}\mathbf{P} = \mathbf{P}^3$$

一般地，令

$$p_{ij}^{(3)} = P(X_{n+3} = j | X_n = i), \quad \mathbf{P}^{(m)} = (p_{ij}^{(m)})_{N\times N}$$

我们有

$$\mathbf{P}^{(m)} = \mathbf{P}^m$$

注：等式左边是m步转移概率矩阵；

右边是一步转移概率矩阵的m次方。

- Kolmogorov-Chapman 方程

特别：对任意n和m，

$$\mathbf{P}^{(n+m)} = \mathbf{P}^{(n)}\mathbf{P}^{(m)}$$

因此，

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=1}^{N} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$$

称上述等式为Kolmogorov-Chapman方程。

- 赌徒破产问题（一步分析法）

甲、乙两人进行赌博，分别拥有资金a和b元。根据过去历史记录，每局甲赢乙的概率为$0 < p < 1$。每局输赢1元，各局相互独立。问：甲最终输光的概率是多少？

解：运用Markov 链模型。

令$X_n, n \geq 0$表示甲在第n局后所拥有的资产，那么

$$X_0 = 0, \quad X_{n+1} = X_n + \pm 1$$

状态空间为

$$\mathcal{E} = \{0, 1, 2, \cdots, a+b\}$$

转移概率为

$$P(X_{n+1}=i+1|X_n=i)=p \quad 0<i<a+b$$
$$P(X_{n+1}=i-1|X_n=i)=1-p \quad 0<i<a+b$$
$$P(X_{n+1}=0|X_n=0)=1$$
$$P(X_{n+1}=a+b|X_n=a+b)=1$$

对任意$k>1$，令q_k表示甲拥有k元资产时最终输光的概率。

根据题意，我们要计算q_a.

显然，

$$q_0 = 1, \quad q_{a+b} = 0$$

采用一步分析法：

$$q_k = pq_{k+1} + (1-p)q_{k-1}, \quad 0 < k < a+b$$

$$p(q_{k+1} - q_k) = (1-p)(q_k - q_{k-1})$$

根据递推得

$$\begin{aligned}(q_{k+1} - q_k) &= \frac{1-p}{p}(q_k - q_{k-1}) \\ &= \cdots = (\frac{1-p}{p})^k(q_1 - q_0)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-1 &= q_{a+b} - q_0 = \sum_{k=1}^{a+b}(q_k - q_{k-1}) \\
&= (q_1 - q_0)\sum_{k=1}^{a+b}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k-1}
\end{aligned}
$$

讨论：

（1） $p \neq \frac{1}{2}$

$$
\begin{aligned}
-1 &= (q_1 - q_0)\sum_{k=1}^{a+b}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k-1} \\
&= (q_1 - q_0)\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b} - 1}{\frac{1-p}{p} - 1}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} q_a - q_0 &= (q_1 - q_0)\sum_{k=1}^{a+b}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a-1} \\ &= -\frac{\frac{1-p}{p}-1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}-1}\cdot\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a}-1}{\frac{1-p}{p}-1} \\ &= -\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a}-1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_a &= 1-\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a}-1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}-1} \\ &= \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a}}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}-1} \end{aligned}$$

（2） $p=\frac{1}{2}$

$$-1=(q_1-q_0)(a+b)$$

$$q_1-q_0=-\frac{1}{a+b}$$

$$q_a-q_0 = a(q_1-q_0)=-\frac{a}{a+b}$$

$$\begin{aligned} q_a &= 1-\frac{a}{a+b} \\ &= \frac{b}{a+b} \end{aligned}$$

结论：

（1） $p > \frac{1}{2}$

$$q_a = \frac{(\frac{1-p}{p})^{a+b} - (\frac{1-p}{p})^a}{(\frac{1-p}{p})^{a+b} - 1} \to (\frac{1-p}{p})^a, \quad b \to \infty$$

（2） $p = \frac{1}{2}$

$$q_a = \frac{b}{a+b} \to 1, \quad b \to \infty$$

（2） $p < \frac{1}{2}$

$$q_a = \frac{(\frac{1-p}{p})^{a+b} - (\frac{1-p}{p})^a}{(\frac{1-p}{p})^{a+b} - 1} \to 1, \quad b \to \infty$$

注：

In 1711, De Moivre, in his book De Mesura Sortis gave an ingenious deviation of the probability of ruin

2. 状态空间分解

在Markov链运行和转移的过程中，一些状态起着特殊作用，它们比另外一些状态显得更重要。

在这一节，我们讨论几类特殊状态，并给出状态空间的分解。

首先，介绍一个基本概念。

- 可到达

假设$X_n, n \geq 0$是一个Markov链，$\mathcal{E}$ 为状态空间。

给定任意$i, j \in \mathcal{E}$ ，如果存在$n \geq 0$使得

$$p_{ij}^{(n)} > 0, \quad (p_{ii}^{(0)} = 1, p_{ij}^{(0)} = 0, \quad i \neq j)$$

称状态i可到达状态j，记作$i \to j$。

例

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

如果$i \to j$，$j \to i$，称状态i和状态j互通，记作$i \leftrightarrow j$。

- 互通是等价关系。

事实上，互通具有下列性质

(1) 对称性: 如果$i \leftrightarrow j$，那么$j \leftrightarrow i$;

(2) 传递性：如果$i \leftrightarrow j$，$j \leftrightarrow k$，那么$i \leftrightarrow k$;

(3) 自反性：$i \leftrightarrow i$

按等价关系可以将状态空间分成若干个（有限或无穷个）等价类。

例.

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

两个等价类：$C_1=\{1,2\}$，$C_2=\{3,4,5\}$

从一个等价类不能到达另一个等价类。如果Markov链处于某个类，那么它将永远呆在那个类中。

例.

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

两个等价类：$C_1=\{1,2\}$，$C_2=\{3,4,5\}$

但是，从C_1可以到达C_2: $2\rightarrow 3$;

从C_2不能到达C_1

- 不可约Markov链

如果Markov链的任意两个状态都是互通的，称该Markov链为不可约Makov链。

例1. 简单随机游动

例2. 反射随机游动: $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q & r & p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q & r & p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & q & r & p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q & r & p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 闭集

假设$S \subseteq \mathcal{E}$，如果从S中任何状态出发，都无法到达$\mathcal{E} \setminus S$中的状态，称S为闭集。

换句话说，如果S是闭集，那么对任意$i \in S$ 和$j \notin S$，都有$i \nrightarrow j$。

显然，空集$\emptyset$和$\mathcal{E}$是闭集。

例.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

两个等价类：$C_1 = \{1, 2\}$，$C_2 = \{3, 4, 5\}$

从C_1可以到达C_2: $2 \to 3$;

从C_2不能到达C_1;

- C_2是闭集

例. 赌博问题：$\mathcal{E} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

等价类$C_1 = \{1, 2, 3\}$，$C_2 = \{0\}$，$C_3 = \{4\}$

C_1不是闭集；

C_2，C_3 是闭集；

- 周期

假设$i \in \mathcal{E}$，令

$$d_i = gcd\{n \geq 1; p_{ii}^{(n)} > 0\} \tag{2}$$

其中gcd表示最大公因子，称d_i为状态i的周期。

如果$d_i = 1$，称状态i是非周期的。

注：假设$d_i = d$，那么存在一个自然数m使得对任意$n \geq m$

$$p_{ii}^{(nd)} > 0 \tag{3}$$

例1. 简单随机游动

每个状态的周期为2

例2.赌博问题：$\mathcal{E} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = d_2 = d_3 = 2$$

$$d_0 = d_4 = 1$$

定理：如果$i \leftrightarrow j$，那么$d_i = d_j$。
换句话说，互通状态具有相同的周期。
证明：d_i和d_j都是自然数，只要证明d_i和d_j互相整除即可。
首先证明：$d_j | d_i$ (d_j 是d_i的一个因子)。
既然$i \leftrightarrow j$，所以存在$n \geq 1$使得$p_{ij}^{(n)} > 0$，$m \geq 1$使得$p_{ji}^{(m)} > 0$。
这样，

$$p_{jj}^{(n+m)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(n)} > 0$$

$$d_j | n + m$$

另外，假设$s \geq 1$ 使得$p_{ii}^{(s)} > 0$。

那么

$$p_{jj}^{(n+s+m)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(s)} p_{ij}^{(n)} > 0$$

$$d_j | n+s+m$$

所以

$$d_j | s$$

因此

$$d_j | d_i$$

类似地，可以证明

$$d_i | d_j$$

- 常返态

给定状态$j \in \mathcal{E}$，令

$$T_j = \inf\{n \geq 1; X_n = j\}$$

这里，如果不存在$n \geq 1$使得$X_n = j$，约定$T_j = \infty$。

如果$X_0 = j$，那么称T_j为Markov链首次回到状态j的时刻。

如果$X_0 = i \neq j$，那么称T_j为Markov链首次到达状态j的时刻。

- 常返态

如果

$$P(T_j < \infty | X_0 = j) = 1$$

称j是常返状态。进而，

如果$E(T_j | X_0 = j) < \infty$，称$j$为正常返状态；

如果$E(T_j | X_0 = j) = \infty$，称$j$为零常返状态。

- 瞬时态

如果

$$P(T_j < \infty | X_0 = j) < 1$$

称j是瞬时状态。

状态是否常返对于Markov链来说非常重要，我们将在下一节详细讨论。

下面给出一个基本性质。

定理：假设$i \leftrightarrow j$，那么

(1) i是瞬时状态当且仅当j是瞬时状态；

(2) i是常返状态当且仅当j是常返状态；

(3) i是正常返状态当且仅当j是正常返状态。

这样，常返性和瞬时性是一个类性质。

该定理将在下一节给出。

定理：假设$i \in \mathcal{E}$ 是常返状态，令$C_i = \{j \in \mathcal{E}; i \leftrightarrow j\}$，那么$C_i$是闭集。

证明：采用反证法。假设C_i不是闭集，

那么存在$j \in C_i$和$k \notin C_i$使得$j \rightarrow k$。

显然，$k \nrightarrow j$。否则，$j \leftrightarrow k$，并因此$i \leftrightarrow k$。

这样，i可到达j，j可到达k，但k不可到达i。

因此i不是常返状态，矛盾。

- 状态空间分解

定理：

$$\mathcal{E} = C_1 + C_2 + \cdots + C_M + \mathcal{N}$$

其中C_i表示常返状态等价类，$\mathcal{N}$表示所有瞬时状态全体。

注意，不同等价类是互不相交的闭集；M可以取$+\infty$。

3. 常返和瞬时状态

这一节，我们将进一步讨论状态的常返性和瞬时性。

回忆

$$T_j = \min\{n \geq 1; X_n = j\}$$

令

$$\begin{aligned} f_{jj}^{(n)} &= P(T_j = n | X_0 = j) \\ &= P(X_1 \neq j, \cdots, X_{n-1} \neq j, X_n = j | X_0 = j) \end{aligned}$$

j是常返状态当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = 1$$

j是瞬时状态当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} < 1$$

另外，

$$E(T_j | X_0 = j) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)}$$

例. 假设$X_n, n \geq 0$是Markov 链，状态空间为$\mathcal{E} = \{1, 2, 3\}$，转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

有向图表示：

所有状态互通，具有周期为1

下面考虑状态1的常返性问题。

$$f_{11}^{(1)} = P(T_1 = 1|X_0 = 1) = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} f_{11}^{(2)} &= P(T_1 = 2|X_0 = 1) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{11}^{(3)} &= P(T_1 = 3|X_0 = 1) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$n \geq 3$

$$\begin{aligned} f_{11}^{(n)} &= P(T_1 = n | X_0 = 1) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\frac{2}{3})^{n-3} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{9} \cdot (\frac{2}{3})^{n-3} \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned} P(T_1 < \infty | X_0 = 1) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}^{(n)} \\ &= f_{11}^{(1)} + f_{11}^{(2)} + \sum_{n=3}^{\infty} f_{11}^{(n)} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{9} \cdot (\frac{2}{3})^{n-3} \\ &= 1 \end{aligned}$$

1是常返状态。

$$
\begin{aligned}
E(T_1<\infty|X_0=1) &= \sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}^{(n)} \\
&= 1\cdot f_{11}^{(1)} + 2\cdot f_{11}^{(2)} + \sum_{n=3}^{\infty} n f_{11}^{(n)} \\
&= \frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{9}\cdot\sum_{n=3}^{\infty} n(\frac{2}{3})^{n-3} \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

1是正常返的，平均常返时间为$\frac{8}{3}$。

例2. 假设$X_n, n \geq 0$是Markov 链，状态空间为$\mathcal{E} = \{1, 2, 3, 4\}$，转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

有向图表示：

下面考虑各个状态的常返性问题。

$$f_{44}^{(n)} = 0, \quad n \geq 1$$

4是瞬时状态；

$$f_{33}^{(1)} = \frac{2}{3}, \quad f_{33}^{(n)} = 0, \quad n \geq 2$$

3是瞬时状态；

$$f_{11}^{(1)} = \frac{1}{2}, \quad f_{11}^{(2)} = \frac{1}{2}, \quad f_{11}^{(n)} = 0, \quad n \geq 3$$

1是常返状态；

$$f_{22}^{(1)} = 0, \quad f_{22}^{(2)} = \frac{1}{2}, \quad f_{22}^{(n)} = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad n \geq 3$$

2是常返状态

平均常返时间分别为

$$E(T_1|X_0=1)=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$E(T_2|X_0=2)=\sum_{n=2}^{\infty}n\frac{1}{2^{n-1}}=3$$

1，2都是正常返的

问题：

（1）如何判断简单随机游动各个状态的常返性呢？

（2）如何判断下列Markov链各个状态的常返性呢？

假设$X_n, n \geq 0$是Markov 链，状态空间为$\mathcal{E} = \{1,2,3,4\}$，转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

下面给出其他判别条件。

定理：j是常返状态当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$$

j是瞬时状态当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty$$

证明：首先，给出$p_{jj}^{(n)}$和$f_{jj}^{(n)}$之间的关系。

$$
\begin{aligned}
p_{jj}^{(n)} &= P(X_n = j | X_0 = j) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(T_j = k, X_n = j | X_0 = j) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(T_j = k | X_0 = j) P(X_n = j | T_j = k, X_0 = j) \\
&= \sum_{k=1}^{n} f_{jj}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}
\end{aligned}
$$

应用上述递推关系，

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} f_{jj}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$$

交换求和次序得，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} &= \sum_{k=1}^{\infty} f_{jj}^{(k)} \sum_{n=k}^{\infty} p_{jj}^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f_{jj}^{(k)} \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f_{jj}^{(k)} (1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)})\end{aligned}$$

假设

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty$$

我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} f_{jj}^{(k)} &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)}}{1+\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)}} \\ &< 1\end{aligned}$$

假设

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$$

对任意$M \geq 1$，

$$\sum_{n=1}^{M} p_{jj}^{(n)} = \sum_{n=1}^{M}\sum_{k=1}^{n} f_{ii}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$$

交换求和次序得，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{M} p_{jj}^{(n)} &= \sum_{k=1}^{M} f_{jj}^{(k)} \sum_{n=k}^{M} p_{jj}^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=1}^{M} f_{jj}^{(k)} \sum_{n=0}^{M-k} p_{jj}^{(n)}\end{aligned}$$

进一步，

$$\sum_{n=1}^{M} p_{jj}^{(n)} \leq \sum_{k=1}^{M} f_{jj}^{(k)}(1+\sum_{n=1}^{M} p_{jj}^{(n)})$$

$$\sum_{k=1}^{M} f_{jj}^{(k)} \geq \frac{\sum_{n=1}^{M} p_{jj}^{(n)}}{1+\sum_{n=1}^{M} p_{jj}^{(n)}}$$

两边取极限$M \to \infty$，

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{jj}^{(k)} \geq 1$$

因此

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{jj}^{(k)} = 1$$

例. (1) 考虑直线上简单随机游动，

$S_0, S_1, \cdots, S_n, \cdots$ 是Markov链，状态空间为

$$\mathcal{E} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$$

那么每一个状态都是常返的，并且是零常返的。

既然所有状态都是互通的，只要考虑0状态即可。

$$\begin{aligned} p_{00}^{(2k)} &= P(S_{2k} = 0 | S_0 = 0) \\ &= \frac{(2k)!}{(k!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2k}} \end{aligned}$$

回忆Stirling 公式，

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}(1 + o(1))$$

所以，

$$p_{00}^{(2k)} = \frac{(2k)!}{(k!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2k}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{k^{1/2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{00}^{(2k)} = \infty$$

因此，0是常返状态。

为计算ET_0，我们需要计算$f_{00}^{(2k)}$

$$
\begin{aligned}
f_{00}^{(2k)} &= P(T_0 = 2k) \\
&= P(S_1 \neq 0, \cdots, S_{2k-1} \neq 0, S_{2k} = 0 | S_0 = 0) \\
&= \frac{1}{2k-1} \cdot \frac{(2k)!}{(k!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2k}} \\
&\sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{k^{3/2}}
\end{aligned}
$$

因此，

$$
ET_0 = \sum_{k=1}^{\infty} 2k f_{00}^{(2k)} = \infty
$$

即，0是零常返状态。

(2) 考虑平面上简单随机游动。

假设$\xi_n, n \geq 1$是一列独立同分布随机变量，

$$P(\xi_1 = (1,0)) = P(\xi_1 = (0,1)) = \frac{1}{4}$$

$$P(\xi_1 = (-1,0)) = P(\xi_1 = (0,-1)) = \frac{1}{4}$$

定义

$$S_0 = (0,0), \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

$S_0, S_1, \cdots, S_n, \cdots$是平面格点上Markov 链。

显然，所有状态是互通的。

下面证明$\mathbf{0} = (0,0)$是常返状态。

计算$p^{(n)}_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$.

$$
\begin{aligned}
p^{(2m)}_{\mathbf{0},\mathbf{0}} &= P(S_{2m} = \mathbf{0}) \\
&= \sum_{k+l=m} \frac{(2m)!}{(2k)!(2l)!} \cdot \frac{(2k)!}{(k!)^2} \cdot \frac{(2l)!}{(l!)^2} \cdot \frac{1}{4^{2m}} \\
&= \sum_{k+l=m} \frac{(2m)!}{(k!)^2(l!)^2} \cdot \frac{1}{4^{2m}} \\
&= \frac{(2m)!}{(m!)^2} \cdot \frac{1}{4^{2m}} \sum_{k+l=m} \frac{(m!)^2}{(k!)^2(l!)^2} \\
&= \frac{(2m)!}{(m!)^2} \cdot \frac{1}{4^{2m}} \cdot \frac{(2m)!}{(m!)^2} \\
&\sim \frac{1}{\pi m}
\end{aligned}
$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_{\mathbf{0},\mathbf{0}}^{(2m)} = \infty$$

所以，**0**是常返状态。

(3) 考虑3-维空间上简单随机游动。

假设$\xi_n, n \geq 1$是一列独立同分布随机变量，

$$P(\xi_1 = (1,0,0)) = P(\xi_1 = (0,1,0)) = P(\xi_1 = (0,0,1)) = \frac{1}{6}$$

$$P(\xi_1 = (-1,0,0)) = P(\xi_1 = (0,-1,0)) = P(\xi_1 = (0,0,-1)) = \frac{1}{6}$$

定义

$$S_0 = (0,0,0), \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

$S_0, S_1, \cdots, S_n, \cdots$是3-维空间格点上Markov 链。

显然，所有状态是互通的。

下面证明$\mathbf{0}=(0,0,0)$是瞬时状态。

计算$p_{\mathbf{0},\mathbf{0}}^{(n)}$。

$$
\begin{aligned}
p_{\mathbf{0},\mathbf{0}}^{(2m)} &= P(S_{2m}=\mathbf{0}) \\
&= \sum_{j+k+l=m} \frac{(2m)!}{(2j)!(2k)!(2l)!} \cdot \frac{(2j)!}{(j!)^2} \cdot \frac{(2k)!}{(k!)^2} \cdot \frac{(2l)!}{(l!)^2} \cdot \frac{1}{6^{2m}} \\
&= \frac{1}{(2m)!} \cdot \frac{1}{6^{2m}} \sum_{j+k+l=m} \frac{1}{(j!)^2(k!)^2(l!)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\max_{j+k+l=m} \frac{1}{(j!)^2(k!)^2(l!)^2} \le C \frac{1}{((\frac{m}{3})!)^6}
$$

$$
p_{\mathbf{0},\mathbf{0}}^{(2m)} \sim \frac{1}{m^{3/2}}
$$

所以，

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_{\mathbf{0},\mathbf{0}}^{(2m)} < \infty$$

因此，$\mathbf{0}$是瞬时状态。

(4) 非对称随机游动

假设$\xi_n, n \geq 1$是一列独立随机变量，

$$P(\xi_1 = 1) = p, \quad P(\xi_1 = -1) = 1 - p, \quad p \neq \frac{1}{2}$$

令

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \quad k \geq 1$$

那么，$S_0, S_1, S_2, \cdots$，是从0出发的Markov链，各个状态互通，周期仍为2.

但每个状态都是瞬时的。

如果$p > \frac{1}{2}$，那么$S_n \to \infty$；

如果$p < \frac{1}{2}$，那么$S_n \to -\infty$

定理：(1) 如果i是瞬时状态，那么

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$$

(2) 如果i是零常返状态，那么

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$$

(3) 如果i是非周期正常返状态，那么

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\tau_i}$$

(4) 如果i是周期为d_i的正常返状态，那么

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd_i)} = \frac{d_i}{\tau_i}$$

其中$\tau_i = E(T_i|X_0 = i) < \infty$。

证明：(1) 如果i是瞬时状态，那么

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$$

(2) 如果i是零常返状态，那么

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} = \infty$$

注意到下列递推关系：

$$p_{ii}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ii}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)}$$

令

$$\lambda = \limsup_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}$$

并选择一个子列$n_k, k \geq 1$使得

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} p_{ii}^{(n_k)}$$

可以证明，

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} p_{ii}^{(n_k - l)}, \quad \forall l \geq 1$$

另一方面，令

$$r_0 = 1, \quad r_k = P(T_i > k | X_0 = i), \quad k \geq 1$$

显然，

$$\sum_{k=0}^{\infty} r_k = E(T_i | X_0 = i) = \infty$$

下面证明：

$$1 = \sum_{k=0}^{n} r_k p_{ii}^{(n-k)}$$

令$L_n = \max\{0 \leq k \leq n : X_k = i\}$，即$L_n$是在$n$之前最后处于状态$i$。

那么

$$
\begin{aligned}
1 &= P(L_n \le n | X_0 = i) = \sum_{k=0}^{n} P(L_n = k | X_0 = i) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(X_k = i, X_{k+1} \ne i, \cdots, X_n \ne i | X_0 = i) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(X_k = i | X_0 = i) P(X_{k+1} \ne i, \cdots, X_n \ne i | X_k = i) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(X_k = i | X_0 = i) P(T_i > n - k | X_0 = i) \\
&= \sum_{k=0}^{n} r_{n-k} p_{ii}^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} r_k p_{ii}^{(n-k)}
\end{aligned}
$$

特别，对上述子列n_k

$$1 = \sum_{l=0}^{n_k} r_l p_{ii}^{(n_k-l)}$$

对任意$M \geq 1$，取充分大的$k \geq 1$

$$1 \geq \sum_{l=0}^{M} r_l p_{ii}^{(n_k-l)}$$

$$\begin{aligned} 1 &\geq \liminf_{k\to\infty} \sum_{l=0}^{M} r_l p_{ii}^{(n_k-l)} \\ &= \sum_{l=0}^{M} r_l \liminf_{k\to\infty} p_{ii}^{(n_k-l)} \\ &= \lambda \sum_{l=0}^{M} r_l. \end{aligned}$$

所以

$$\lambda \leq \frac{1}{\sum_{l=0}^{M} r_l} \to 0, \quad M \to \infty$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$$

(3) 如果i是非周期正常返状态，那么

$$\sum_{k=0}^{\infty} r_k = E(T_i|X_0 = i) < \infty$$

在

$$1 = \sum_{l=0}^{n_k} r_l p_{ii}^{(n_k-l)}$$

中两边取极限得

$$1 = \sum_{l=0}^{\infty} r_l \lambda$$

所以

$$\lambda = \frac{1}{\sum_{l=0}^{\infty} r_l} = \frac{1}{\tau_i}$$

类似地证明

$$\liminf_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\tau_i}$$

这样，

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\tau_i}$$

(4)

推论：

(1) 如果j是零常返或瞬时状态，那么对任意状态i

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$$

(2) 如果j是非周期正常返状态，那么对任意$i: i \to j$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}}{\tau_j}$$

其中$f_{ij} = P(i \mapsto j)$

证明：注意到下列关系式：

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$$

(1) 对任意$M \geq 1$

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{(n)} &= \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} \\
&= \sum_{k=1}^{M} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=M+1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}
\end{aligned}
$$

分别令$n \to \infty$和$M \to \infty$ 得

$$
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{M} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{M} p_{jj}^{(n-k)} = 0
$$

$$
\lim_{M\to\infty} \sum_{k=M+1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} = \lim_{M\to\infty} \sum_{k=M+1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} = 0
$$

(2) 对任意$M \geq 1$，令$n \to \infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{M} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} &= \sum_{k=1}^{M} f_{ij}^{(k)} \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n-k)} \\
&= \frac{1}{\tau_j} \sum_{k=1}^{M} f_{ij}^{(k)}
\end{aligned}$$

再令$M \to \infty$，注意到$i \to j$

$$\lim_{M\to\infty} \sum_{k=1}^{M} f_{ij}^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} = f_{ij}$$

定理: 有限状态Markov链一定存在正常返状态

证明：采用反证法。注意到，对任意$n \geq 1$和任意状态i, j

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(n)} = 1$$

但是，假设每个状态都是瞬时的或零常返的，那么

令$n \to \infty$，根据推论(1)，

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(n)} = \sum_{j=1}^{N} \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$$

矛盾。

推论：假设$i \leftrightarrow j$，那么

(1) i是瞬时状态当且仅当j是瞬时状态；

(2) i是常返状态当且仅当j是常返状态；

(3) i是正常返状态当且仅当j是正常返状态。

证明：假设$i \leftrightarrow j$，那么存在$k \geq 1$，$m \geq 1$

$$p_{ij}^{(k)} > 0, \quad p_{ji}^{(m)} > 0$$

对任意$n \geq 1$，

$$p_{ii}^{(k+n+m)} \geq p_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n)} p_{ji}^{(m)}$$

$$p_{jj}^{(k+n+m)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(k)}$$

由此可以得出，

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(k+n+m)} > p_{ij}^{(k)} p_{ji}^{(m)} \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(k+n+m)} > p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(k)} \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$$

这样得到：

(1) i是瞬时状态当且仅当j是瞬时状态；

(2) i是常返状态当且仅当j是常返状态；

另外，

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(k+n+m)} \geq p_{ij}^{(k)} p_{ji}^{(m)} \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(k+n+m)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(k)} \lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}$$

(3) i是正常返状态当且仅当j是正常返状态。

-

给定状态i，

$$T_i = \inf\{n \geq 1; X_n = i\}$$

当$P(T_i < \infty | X_0 = i) = 1$，称$i$是常返状态。
从i出发，一定在某一个时刻Markov链再次返回i。令

$$M_i = \sharp\{n \geq 1; X_n = i\}$$

这样，

$$P(T_i < \infty | X_0 = i) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad P(M_i \geq 1 | X_0 = i) = 1$$

定理：（1）如果i是常返状态，那么

$$P(M_i = \infty | X_0 = i) = 1$$

（2）如果i是瞬时状态，那么

$$P(M_i < \infty | X_0 = i) = 1$$

进而，令

$$p = P(T_i < \infty | X_0 = i) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)}$$

那么

$$P(M_i = 0) = 1 - p, \quad P(M_i = n) = (1-p)p^n, \quad n \geq 1$$

即M_i是几何随机变量。

证明：对任意$m \geq 1$，

$$
\begin{aligned}
P(M_i \geq m | X_0 = i) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(T_i = k | X_0 = i) P(M_i \geq m | T_i = k) \\
&= p P(M_i \geq m - 1 | X_0 = i)
\end{aligned}
$$

由此类推，

$$
P(M_i \geq m | X_0 = i) = p^{m-1} P(M_i \geq 1 | X_0 = i)
$$

这样，

$$
P(M_i \geq m | X_0 = i) = p^m
$$

令$m \to \infty$，

$$\begin{aligned} P(M_i = \infty | X_0 = i) &= \lim_{m\to\infty} P(M_i \geq m | X_0 = i) \\ &= \lim_{m\to\infty} p^m \end{aligned}$$

容易看出，

当$p = 1$，

$$P(M_i = \infty | X_0 = i) = 1$$

当$p < 1$，

$$P(M_i = \infty | X_0 = i) = 0$$

$$P(M_i < \infty | X_0 = i) = 1$$

4. 极限分布和平稳分布

假设$X_n, n \geq 0$是Markov链，状态空间为$\mathcal{E}$，转移概率为$\mathbf{P}$。

如果存在$\mathcal{E}$上一个概率分布$\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_N)$使得对任意$j \in \mathcal{E}$

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \mu_j$$

称μ是该Markov链的极限分布。

问题：

什么条件下Markov链存在极限分布?

如何计算极限分布？

显然，

$$P(X_n = j) = \sum_{i=1}^{N} p_0(i) p_{ij}^{(n)}$$

如果存在$\mathcal{E}$上一个概率分布$\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_N)$使得对任意$i, j \in \mathcal{E}$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \mu_j$$

那么

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P(X_n = j) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N} p_0(i) p_{ij}^{(n)} \\ &= \sum_{i=1}^{N} p_0(i) \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \mu_j \end{aligned}$$

μ是该Markov链的极限分布。

由于

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n$$

我们需要计算

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n$$

例. 某地区的天气状况可分为多云和阴天两种，分别记为1和2，并可用Markov链$X_n, n \geq 0$ 描述，其转移概率矩阵为：

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

如果已知今天是多云，求3天、5天、10天后天气状况的分布规律？

按题意，需要计算的是：

$$(p_{11}^{(3)}, p_{12}^{(3)}), \quad (p_{11}^{(5)}, p_{12}^{(5)}), \quad (p_{11}^{(10)}, p_{12}^{(10)})$$

计算$\mathbf{P}^3$，$\mathbf{P}^5$，$\mathbf{P}^{10}$。结果如下：

$$\mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} 0.403 & 0.597 \\ 0.403 & 0.597 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^5 = \begin{pmatrix} 0.400077 & 0.599923 \\ 0.399949 & 0.600051 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{10} = \begin{pmatrix} 0.400000 & 0.600000 \\ 0.400000 & 0.600000 \end{pmatrix}$$

从中可以看出，10天后天气是多云的概率近似为0.4，阴天的概率近似为0.6。

实际上，如果今天是阴天，10天后天气是多云的概率仍为0.4，阴天的概率为0.6。

换句话说，10天后的天气与当前天气状况无关。特别，长时间以后，天气状况有一个稳定的规律（可预报的）。

例2. 考虑两状态Markov链：

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

其中$0 < p, q < 1$
直接计算表明：

$$\mathbf{P}^n = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix} + \frac{(1-(p+q))^n}{p+q}\begin{pmatrix} p & -p \\ -q & q \end{pmatrix}$$

令$n\to\infty$得

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}^{(n)}=\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}^{n}=\frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix}$$

具体写出:

$$\lim_{n\to\infty}p_{11}^{(n)}=\lim_{n\to\infty}p_{21}^{(n)}=\frac{q}{p+q}$$

$$\lim_{n\to\infty}p_{12}^{(n)}=\lim_{n\to\infty}p_{22}^{(n)}=\frac{p}{p+q}$$

该Markov链一定存在极限分布:

$$\mu_1=\frac{q}{p+q},\quad \mu_2=\frac{p}{p+q}$$

极限分布并不一定存在。

例3. 考虑两状态Markov链：

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

有向图表示：

显然，

$$\mathbf{P}^{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^{2n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

极限分布不存在。

例4. 考虑3状态Markov链，转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

计算极限分布。

分成以下三步：

（1）计算特征根

（2）计算特征向量

（3）计算$\mathbf{P}^n$

（1）计算特征根

$$\det(\mathbf{P}-\lambda) = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ 1 & -\lambda & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-\frac{\lambda}{4}-\frac{3}{16})$$

特征根为

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{8}(-1+3i), \quad \lambda_3 = \frac{1}{8}(-1-3i)$$

（2）计算特征向量

求解方程：

$$\mathbf{P}\vec{r} = \lambda\vec{r}$$

$$\begin{aligned}
\vec{r}_1 &= (1, 1, 1) \\
\vec{r}_2 &= (-7 - 9i, -16 + 24i, 26) \\
\vec{r}_3 &= (-7 + 9i, -16 - 24i, 26)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -7 - 9i & -7 + 9i \\ 1 & -16 + 24i & -16 - 24i \\ 1 & 26 & 26 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{780}\begin{pmatrix} 418 & 156 & 208 \\ -8+14i & -3-11i & 11-3i \\ -8-14i & -3-11i & 11-3i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1+3i}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1-3i}{8} \end{pmatrix}\mathbf{C}^{-1}$$

（3）计算$\mathbf{P}^n$

$$\mathbf{P}^n=\mathbf{C}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&(\frac{-1+3i}{8})^n&0\\0&0&(\frac{-1-3i}{8})^n\end{pmatrix}\mathbf{C}^{-1}$$

令$n\to\infty$

$$\mathbf{P}^n \to \mathbf{C}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\mathbf{C}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{8}{15}&\frac{1}{5}&\frac{4}{15}\\\frac{8}{15}&\frac{1}{5}&\frac{4}{15}\\\frac{8}{15}&\frac{1}{5}&\frac{4}{15}\end{pmatrix}$$

极限分布为$\mu=(\frac{8}{15},\frac{1}{5},\frac{4}{15})$

- 平稳分布

假设$X_n, n \geq 0$是Markov 链，初始分布为$\mathbf{p}_0$，转移概率矩阵为$\mathbf{P}$。

如果该Markov是（强）平稳的，那么X_0，X_1，$\cdots$ 具有相同的分布，即

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = \cdots$$

而

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_0 \mathbf{P}^n$$

所以

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_0 \mathbf{P}$$

反过来，假设

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_0\mathbf{P}$$

那么X_0，X_1，$\cdots$ 具有相同的分布。

对任意$k, n \geq 0$，

$$\begin{aligned} P(X_k = i_0, X_{k+1} = i_1, \cdots, X_{k+n} = i_n) &= p_k(i_0)p_{i_0i_1}\cdots p_{i_{n-1}i_n} \\ &= p_0(i_0)p_{i_0i_1}\cdots p_{i_{n-1}i_n} \end{aligned}$$

所以$(X_k, X_{k+1}, \cdots, X_{k+n})$和$(X_0, X_1, \cdots, X_n)$具有相同的联合分布，即$X_n, n \geq 0$是强平稳过程。

因此，$X_n, n \geq 0$是强平稳过程当且仅当初始分布和转移概率矩阵满足

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_0\mathbf{P}$$

假设$X_n, n \geq 0$是Markov 链，状态空间为$\mathcal{E}$，转移概率矩阵为$\mathbf{P}$。如果在$\mathcal{E}$上存在概率分布$\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_N)$使得

$$\pi = \pi\mathbf{P}$$

称π为该Markov链的平稳分布。

由定义看出，为求平稳分布，需要解下列具有约束条件的线性方程组。

$$\begin{cases} \pi = \pi\mathbf{P} \\ \sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1 \\ \pi_i \geq 0 \end{cases}$$

例1. 假设$X_n, n \geq 0$是Markov 链，状态空间为$\mathcal{E} = \{1, 2, 3, 4\}$，转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

那么$\pi = \pi\mathbf{P}$写作

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{1}{10}\pi_1 + \frac{3}{10}\pi_2 + \frac{2}{5}\pi_3 + \frac{3}{10}\pi_4 \\ \pi_2 = \frac{1}{5}\pi_1 + \frac{2}{5}\pi_2 \\ \pi_3 = \frac{1}{5}\pi_1 + \frac{2}{5}\pi_3 + \frac{1}{5}\pi_4 \\ \pi_4 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{3}{10}\pi_2 + \frac{1}{5}\pi_3 + \frac{1}{2}\pi_4 \end{cases}$$

求解得:

$$\pi_2 = \frac{1}{3}\pi_1, \quad \pi_3 = \frac{1}{13}\pi_1, \quad \pi_4 = \frac{20}{13}\pi_1$$

代入等式

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$$

得

$$\pi_1 = \frac{39}{145}, \quad \pi_2 = \frac{13}{145}, \quad \pi_3 = \frac{33}{145}, \quad \pi_4 = \frac{60}{145}$$

例2. 假设$X_n, n \geq 0$是Markov 链，状态空间$\mathcal{E} = \{1, 2, 3, \cdots\}$，转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{7}{8} & 0 & \frac{1}{8} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

计算平稳分布。

$\pi\mathbf{P} = \pi$可以写作

$$\frac{1}{2}\pi_1 + \frac{3}{4}\pi_2 = \pi_1$$
$$\frac{1}{2}\pi_1 + \frac{7}{8}\pi_3 = \pi_2$$
$$\frac{1}{4}\pi_2 + \frac{15}{16}\pi_4 = \pi_3$$
$$\cdots\cdots$$

由此得到，

$$\begin{aligned}
\pi_2 &= \tfrac{2}{3}\pi_1 \\
\pi_3 &= \tfrac{4}{21}\pi_1 \\
\pi_4 &= \tfrac{8}{15\cdot 21}\pi_1 \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

将其代入

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \cdots = 1$$

得

$$\pi_0 = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{1\cdot 3\cdot 7\cdot (2^k - 1)}\Big)^{-1}$$

其它可以容易得到。

定理：假设$X_n, n \geq 0$是非周期不可约Markov 链，状态空间为$\mathcal{E}$，转移概率矩阵为$\mathbf{P}$。那么该Markov链存在平稳分布当且仅当该Markov 链是正常返的；并且

$$\pi_i = \frac{1}{\tau_i}, \quad 1 \leq i \leq N$$

其中平稳分布$\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_N)$，

$\tau_i = ET_i$，$i = 1, 2, \cdots, N$

证明：既然该Markov 链是非周期不可约的，那么根据定理知: 对任意$i, j \in \mathcal{E}$，极限$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$存在，并且与$i$无关. 记

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}}{\tau_j}$$

这里约定，如果j 是瞬时或零常返状态，$\tau_j = \infty$，

$f_{ij} = P(i \to j)$ 表示从状态i到达j的概率。

假设该Markov 链存在平稳分布，令$\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_N)$。那么对任意$j \in \mathcal{E}$

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{N} \pi_i p_{ij}^{(n)}$$

令$n \to \infty$得

$$\begin{aligned} \pi_j &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \pi_i p_{ij}^{(n)} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \pi_i \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \\ &= \frac{1}{\tau_j} \sum_{i=1}^{N} f_{ij} \pi_i \end{aligned}$$

既然

$$\pi_1+\pi_2+\cdots+\pi_N=1$$

一定存在一个$1\le j\le N$使得$\pi_j>0$，因此$\tau_j<\infty$，j是正常返状态。进而，根据不可约性，所有状态都是正常返的。

这样，对所有状态$i,j\in\mathcal{E}$，$f_{ij}=1$。

因此，

$$\begin{aligned}\pi_j &= \frac{1}{\tau_j}\sum_{i=1}^{N} f_{ij}\pi_i\\ &= \frac{1}{\tau_j}\sum_{i=1}^{N}\pi_i=\frac{1}{\tau_j}\end{aligned}$$

反过来，假设该Markov 链是正常返的，平均常返时间$ET_j < \infty$，$j = 1, 2, \cdots, N$。

注意到，对任意$i, j \in \mathcal{E}$和$n \geq 1$

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{N} p_{ik}^{(n)} p_{kj}$$

先证明：

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\tau_j} \leq 1$$

事实上，

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(n)} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\tau_j}$$

由Fatou引理，

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\tau_j} &= \sum_{j=1}^{N} \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(n)} = 1. \end{aligned}$$

另一方面，再次利用Fatou引理，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\tau_j} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{N} p_{ik}^{(n)} p_{kj} \\
&\geq \sum_{k=1}^{N} \lim_{n\to\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\tau_k} p_{kj}
\end{aligned}
$$

下面继续证明：对每个$1 \le j \le N$

$$\frac{1}{\tau_j} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\tau_k} p_{kj}$$

假设存在$1 \le j_0 \le N$使得

$$\frac{1}{\tau_{j_0}} > \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\tau_k} p_{kj_0}$$

那么

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\tau_j} &> \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\tau_k} p_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\tau_k} \sum_{j=1}^{N} p_{kj} \end{aligned}$$

矛盾

最后证明：

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\tau_j} = 1$$

注意到，对任意$i, j \in \mathcal{E}$和$n, m \geq 1$

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=1}^{N} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$$

令$n \to \infty$，

$$\frac{1}{\tau_j} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\tau_k} p_{kj}^{(m)}$$

再$m \to \infty$，

$$\frac{1}{\tau_j} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\tau_k} \cdot \frac{1}{\tau_j}$$

因此，

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\tau_k} = 1$$

令$\pi_i = \frac{1}{\tau_i}$，$i = 1, 2, \cdots, N$，那么$\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_N)$是平稳分布。

- 极限分布与平稳分布之间关系

推论：假设$X_n, n \geq 0$是非周期不可约Markov 链，状态空间为$\mathcal{E}$，转移概率矩阵为$\mathbf{P}$。那么该Markov链存在极限分布分布当且仅当该Markov 链存在平稳分布；并且二者相等。

5. 可逆Markov链

假设$X_n, n \geq 0$是Markov链，状态空间为$\mathcal{E}$，转移概率矩阵为$\mathbf{P} = (p_{ij})$，初始分布为$\mathbf{p}_0$。

假设X_n是不可约Makov链。

对任意$N \geq 0$，令

$$Y_n = X_{N-n}, \quad 0 \leq n \leq N$$

定义：如果对任意$N \geq 1$，过程$Y_n, 0 \leq n \leq N$是Markov链，其中转移概率矩阵为$\mathbf{P} = (p_{ij})$，初始分布为$\mathbf{p}_0$，那么称X_n是可逆Makov链。

显然，如果X_n是可逆Makov链，那么$\forall N \geq 1$，

$$(Y_n, 0 \leq n \leq N) \stackrel{d}{=} (X_n, 0 \leq n \leq N)$$

即

$$(X_N, X_{N-1}, \cdots, X_0) \overset{d}{=} (X_0, X_1, \cdots, X_N)$$

问题：什么样的Markov是可逆的？

先看可逆Markov链的必要条件。

（1）假如可逆，那么

$$X_N \overset{d}{=} X_0, \quad \forall N \geq 1$$

该Markov链是平稳的，初始分布$\mathbf{p}_0$为平稳分布。

（2）假如可逆，那么

$$(X_1, X_0) \overset{d}{=} (X_0, X_1)$$

所以对任意$i, j \in \mathcal{E}$，

$$P(X_1 = j, X_0 = i) = P(X_0 = j, X_1 = i)$$

即

$$P(X_1 = j | X_0 = i) P(X_0 = i) = P(X_1 = i | X_0 = j) P(X_0 = j)$$

$$p_0(i) p_{ij} = p_0(j) p_{ji}, \quad i, j \in \mathcal{E}$$

再看Markov链的充分条件：

假设$X_n, n \geq 0$是不可约Makov链，状态空间为$\mathcal{E}$，转移概率矩阵为$\mathbf{P} = (p_{ij})$，初始分布为$\mathbf{p}_0$。

如果$\mathbf{p}_0$是平稳分布，并且

$$p_0(i)p_{ij} = p_0(j)p_{ji}, \quad i, j \in \mathcal{E}$$

那么该Markov链是可逆的。

证明：对任意$N \geq 1$，$i_0, i_1, \cdots, i_N \in \mathcal{E}$

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_N = i_N) = p_0(i_0)p_{i_0,i_1}p_{i_1,i_0} \cdots p_{i_{N-1},i_N}$$

另一方面，

$$
\begin{aligned}
& P(X_N=i_0, X_{N-1}=i_1, \cdots, X_0=i_N) \\
= \ & P(X_0=i_N, \cdots, X_{N-1}=i_1, X_N=i_0) \\
= \ & p_0(i_N) p_{i_N, i_{N-1}} p_{i_{N-1}, i_{N-2}} \cdots p_{i_1, i_0} \\
= \ & p_{i_{N-1}, i_N} \underline{p_0(i_{N-1})} \underline{p_{i_{N-1}, i_{N-2}}} \cdots p_{i_1, i_0} \\
= \ & p_{i_{N-1}, i_N} \underline{p_{i_{N-2}, i_{N-1}} p_0(i_{N-2})} \cdots p_{i_1, i_0} \\
= \ & p_{i_{N-1}, i_N} p_{i_{N-2}, i_{N-1}} \cdots p_{i_0, i_1} p_0(i_0) \\
= \ & p_0(i_0) p_{i_0, i_1} \cdots p_{i_{N-2}, i_{N-1}} p_{i_{N-1}, i_N} \\
= \ & P(X_0=i_0, X_1=i_1, \cdots, X_N=i_N)
\end{aligned}
$$

总结：

假设$X_n, n \geq 0$是不可约Makov链，状态空间为$\mathcal{E}$，转移概率矩阵为$\mathbf{P} = (p_{ij})$。假设平稳分布π存在，并且选择平稳分布作为初始分布，从而得到不可约平稳Markov链。如果

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}, \quad \forall i, j \in \mathcal{E}$$

那么该Markov链式可逆的。

例1. 考虑两状态Markov链，转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

问：该Markov链可逆吗？

先求平稳分布$\pi =$?

$$\pi = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$$

验证条件：

$$\pi_1 p_{12} = \pi_2 p_{21}$$

该Markov链可逆。

例1. 考虑3状态Markov链，转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.1 & 0.8 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

问：该Markov链可逆吗？

先求平稳分布$\pi =?$

$$\pi = (\frac{5}{27}, \frac{15}{27}, \frac{7}{27})$$

验证条件：

$$\pi_1 p_{12} \neq \pi_2 p_{21}$$

该Markov链不是可逆的。

- Kolmogorov 准则

假设$X_n, n \geq 0$是不可约、平稳Markov链，转移概率矩阵为$\mathbf{P} = (p_{ij})$，初始分布为平稳分布π。

该Markov链是可逆的当且仅当对任意$N \geq 1$: $i_N = i_0$

$$p_{i_0,i_1} p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_{N-1},i_0} = p_{i_0,i_{N-1}} p_{i_{N-1},i_{N-2}} \cdots p_{i_1,i_0}$$

证明：略

例1. 不可约、平稳的2状态Markov链一定是可逆的。

例2. 考虑3状态Markov链，转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.1 & 0.8 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

选择下列两条路径：

$$1 \curvearrowright 2 \curvearrowright 3 \curvearrowright 1$$

转移概率的乘积为

$$p_{12}p_{23}p_{31} = 0.6 \times 0.1 \times 0.5 = 0.03$$

$$1 \curvearrowright 3 \curvearrowright 2 \curvearrowright 1$$

转移概率的乘积为

$$p_{13}p_{32}p_{21} = 0.4 \times 0 \times 0.1 = 0$$

由Kolmogorov准则，该Markov链是不可逆的。

6. Markov链的应用

例1. 市场预测

某地区有1600户居民，使用甲、乙、丙三个公司的产品（如洗发水）。

据调查，8月份，购买甲、乙、丙三个公司产品的户数分别为480、320、800。

9月份再次调查发现：

▷ 原购买甲产品的480户中有48户转买乙产品，有96户转买丙产品，余下客户继续使用甲产品；

▷ 原购买乙产品的320户中有32户转买甲产品，有64户转买丙产品，余下客户继续使用乙产品；

▷ 原购买丙产品的800户中有64户转买甲产品，有32户转买乙产品，余下客户继续使用丙产品

户数转移矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 336 & 48 & 96 \\ 32 & 224 & 64 \\ 64 & 32 & 704 \end{pmatrix}$$

用1，2,3分别代表甲、乙、丙公司生产的产品；
令$X_n, n \geq 0$表示1600户居民使用该产品的情况，并用频率估计概率。那么

$$P(X_0 = 1) = \frac{480}{1600}$$

$$P(X_0 = 2) = \frac{320}{1600}, \quad P(X_0 = 3) = \frac{800}{1600}$$

即初始分布为$\mathbf{p}_0 = (0.3, 0.2, 05)$

转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.08 & 0.04 & 0.88 \end{pmatrix}$$

这样，9月份市场占有率为

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= (p_1(1), p_1(2), p_1(3)) \\ &= \mathbf{p}_0\mathbf{P} \\ &= (0.3, 0.2, 05)\begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.08 & 0.04 & 0.88 \end{pmatrix} \\ &= (0.27, 0.19, 0.54) \end{aligned}$$

12月份市场占有率为

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_4 &= (p_4(1), p_4(2), p_4(3)) \\
&= \mathbf{p}_0 \mathbf{P}^4 \\
&= (0.3, 0.2, 05) \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.08 & 0.04 & 0.88 \end{pmatrix}^4 \\
&= (0.2319, 0.1698, 0.5983)
\end{aligned}$$

若顾客如此长期下去，则市场占有率的极限趋势为：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}_n &= (p_n(1), p_n(2), p_n(3)) \\
&= \mathbf{p}_0 \mathbf{P}^n \\
&= (0.3, 0.2, 05) \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.08 & 0.04 & 0.88 \end{pmatrix}^n \\
&= ?
\end{aligned}
$$

等价于求平稳分布，解下列方程组：

$$
\begin{cases}
\pi = \pi \mathbf{P} \\
\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \\
\pi_1, \pi_2, \pi_3 \geq 0
\end{cases}
$$

解得：

$$\pi_1 = 0.219, \quad \pi_2 = 0.156, \quad \pi_3 = 0.625$$

即甲、乙、丙三家公司产品的市场占有率分别为：

$$21.9\%, \quad 15.6\%, \quad 62.5\%$$

例2. 拖拉机维修

某农用拖拉机站每季度对拖拉机进行一次检查和维修。根据零件磨损程度和运行率，将拖拉机分成5种情况：$\mathcal{E} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$。当拖拉机分布处于1,2,3,4,5状态时，则过去的一个季度可获利润分别为5000，4000，3000，2000，0元。为了通过经济效益，可以规定拖拉机处于状态5，或处于状态5，4或处于5，4，3时要进行大修。平均修理费用为：

处于状态3时，修理费用为300元；

处于状态4时，修理费用为500元；

处于状态5时，修理费用为1000元。

假定每次大修之后，拖拉机可以恢复到状态1。

根据过去资料，拖拉机磨损状态转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

求：

（1）运行若干季度后，拖拉机处于各个状态的平稳分布？

（2）拖拉机每季度的平均利润？

（3）如何确定拖拉机的修理方案，是每季度的平均修理费用最少？

（1）平稳分布：

假定处于5状态时才进行维修，其他状态继续运行。在这种策略性，转移矩阵为$\mathbf{P}$.

解方程组：

$$\begin{cases} \pi = \pi\mathbf{P} \\ \pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4+\pi_5=1 \\ \pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5 \geq 0 \end{cases}$$

得：

$$\pi=(0.199,0.17,0.18,0.252,0.199)$$

（2）如果按照上述修理方案，长期运行下去，逐渐趋于平稳，可赚取利润为

$$5000\times 0.199+4000\times 0.17+3000\times 0.18+2000\times 0.252=2722$$

类似地，如果采用其他修理方案，可以算出每季度平均可获得的利润。

考虑3中不同修理策略：

(i)拖拉机处于5状态时才大修。

平均修理费用为：

$$1000 \times 0.199 = 199$$

(ii)拖拉机处于5，4状态时才大修。

在这种方案下，状态转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可以计算其平稳分布为

$$\pi = (0.266, 0.228, 0.241, 0.168, 0.097)$$

平均修理费用为：

$$1000 \times 0.097 + 500 \times 0.168 = 181$$

(iii)拖拉机处于5，4，3状态时才大修。

在这种方案下，状态转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可以计算其平稳分布为

$$\pi = (0.35, 0.3, 0.19, 0.095, 0.065)$$

平均修理费用为：

$$1000 \times 0.065 + 500 \times 0.095 + 400 \times 0.19 = 169.5$$

综合上述，第3种方案更为节省修理费用。

Markov 链在生物中应用

例. Wright-Fisher Model

等位基因（英语：allele），又称对偶基因，是染色体内的基因座的可以复制的脱氧核糖核酸DNA序列，其在细胞有丝分裂时的染色体上的两个基因位点是对应排列的，故在早期细胞遗传学里称其为等位。

在一个生物体里，某个基因的[基因型]是由该基因所拥有的一对等位基因所决定。例如在人和其它[二倍体]生物，也就是每条染色体都有两套的生物，其等位基因的两个位点决定了该基因的基因型。

等位基因两个位点来自父辈和母辈的遗传，其基因型决定了生物的[表现型]。
生物的表现型由一对等位基因的一个位点决定的，称[显性基因];
而由两个位点决定的，则称为[隐性基因]。

现考虑具有A型和a 型两个等位基因的某个基因的遗传模型。

每一代有m个等位基因，其中一些是A型，另外一些是a型。令X_n 表示第n代A型等位基因的个数。已知$X_n, n \geq 0$构成Markov链，转移概率为

$$\begin{aligned} p_{ij} &=: P(X_{n+1} = j | X_n = i) \\ &= \binom{m}{j} \left(\frac{i}{m}\right)^j \left(\frac{m-i}{m}\right)^{m-j} \end{aligned}$$

该Markov链的互通类可分为：

$$\{0\}, \quad \{1,2,\cdots,m-1\}, \quad \{m\}$$

0 和m 为吸收状态，$\{1,2,\cdots,m-1\}$为瞬时状态。

（1）令

$$h_i = P(X_n = m \quad \text{对某代} n | X_0 = i)$$

那么容易验证

$$h_i = \sum_{j=0}^{m} p_{ij} h_j$$

因此，

$$h_i = \frac{i}{m}$$

说明遗传的多样性最终会消失。

（2）令

$$T = \min\{n \geq 1, \quad X_n = 0\text{或}X_n = m\}$$

那么对每个$p > 0$,

$$E(T|X_0 = [pm]) = -2m((1-p)\log(1-p) + p\log p)$$

这说明，当总体数量很大时，遗传多样性并不会很快消失。

2. Moran Model

考虑下列遗传模型。某总体有两种类型的个体组成：A型和a型。在第n时刻，从总体中随机选择一个个体，添加一个同类型的新个体；接着，再从第n时刻的个体中随机选择一个，将其去掉。这样得到第$n+1$时刻的总体。注意，同一个个体每次都可能被选到，这样总体的组成没有变化。

令X_n表示第n时刻总体中A型个体个数，那么$X_n, n \geq 0$是Markov 链，具有下列转移概率：

$$p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = \frac{i(m-i)}{m^2}, \quad p_{i,i} = \frac{i^2 + (m-i)^2}{m^2},$$

该模型与Wright-Fisher模型不一样。Moran模型仅改变个体类型，总体个数不变。

该Markov链的互通类仍可分为：

$$\{0\}, \quad \{1, 2, \cdots, m-1\}, \quad \{m\}$$

0 和m 为吸收状态，$\{1, 2, \cdots, m-1\}$为瞬时状态。

该模型是可逆的。

（1）令

$$h_i = P(X_n = m \quad \text{对某代} n | X_0 = i)$$

那么

$$h_i = \frac{i}{m}$$

（2）令

$$T=\min\{n\geq 1,\quad X_n=0或X_n=m\}$$

并记

$$k_i=E(T|X_0=i)$$

往下计算:

$$k_i=m\left(\sum_{j=1}^{i}\frac{m-i}{m-j}+\sum_{j=i+1}^{m-1}\frac{i}{j}\right)$$

事实上，对每个$1\leq j\leq m-1$，令k_i^j表示Markov链从i状态出发，在被0和m状态吸收之前，处于状态j的平均时间。

那么，

$$k_0^j = k_m^j = 0$$

并且对每个$i = 1, 2, \cdots, m-1$

$$k_i^j = \delta_{ij} + p_{i,i-1}k_{i-1}^j + p_{i,i}k_i^j + p_{i,i+1}k_{i+1}^j$$

一些递推计算表明

$$k_{i+1}^j - 2k_i^j + k_{i-1}^j = -\delta_{ij}\frac{m^2}{j(m-j)}$$

这样，

$$k_i^j = \begin{cases} \frac{i}{j} k_j^j & i \leq j \\ \frac{m-i}{m-j} k_j^j & i \geq j \end{cases}$$

其中k_j^j满足

$$\left(\frac{m-j-1}{m-j} - 2 + \frac{j-1}{j}\right) k_j^j = -\frac{m^2}{j(m-j)}$$

即

$$k_j^j = m$$

因此，

$$k_j^j = \sum_{j=1}^{m-1} k_i^j = m\left(\sum_{j=1}^{i} \frac{m-i}{m-j} + \sum_{j=i+1}^{m-1} \frac{i}{j}\right)$$

正如在Wright-Fisher模型中那样，人们对m很大的情况感兴趣。

注意到，当$0 < p < 1$时，

$$\begin{aligned}\frac{k_{[pm]}}{m^2} &= (1-p)\sum_{j=1}^{[mp]}\frac{1}{m-j} + p\sum_{j=[mp]+1}\frac{1}{j} \\ &\to -(1-p)\log(1-p) - p\log p, \quad m\to\infty\end{aligned}$$

因此，当$m\to\infty$

$$E(T|X_0=[pm]) = -m^2((1-p)\log(1-p)+p\log p)$$

Wright-Fisher模型

$$E(T|X_0=[pm]) = -2m((1-p)\log(1-p)+p\log p)$$

Moran模型

$$E(T|X_0=[pm]) = -m^2((1-p)\log(1-p)+p\log p)$$

原因在于Moran 模型每次只涉及一个个体，
而Wright-Fisher模型每次改变所有m个个体。

Markov 链在资源管理中的应用

例. 仓储装货

某仓库能容纳c单位货物. 每天货物需求量为随机变量。如果有足够货物供应的话，在第n个天货物需求量为D_n.

令X_n表示第n天结束后仓库货物存储量。

假设m为某临界值，只要当天结束时货物存储量少于或等于m，那么就将仓库添满。显然，

$$X_{n+1} = \begin{cases} (c - D_{n+1})^+ & X_n \le m \\ (X_n - D_{n+1})^+ & m < X_n \le c \end{cases}$$

进一步假定$D_1, D_2, \cdots$是独立同分布序列；那么$X_n, n \geq 1$是Markov链，状态空间为$\{0, 1, 2, \cdots, c\}$。
除一些特殊情形外，该Markov链式不可约的。
因此，存在稳定分布π，它决定着长时间之后，每个状态的分布。
给定$X_n = i$的条件下，第$n+1$天不能满足货物要求的平均量为

$$u_i = \begin{cases} E(D-c)^+ & i \leq m \\ (D-i)^+ & m < i \leq c \end{cases}$$

因此，从长远来看，不能满足货物要求的平均量

$$u(m) = \sum_{i=0}^{c} \pi_i u_i$$

同样，从长远来看，需要装货的概率

$$r(m) = \sum_{i=0}^{m} \pi_i$$

注意，随着m增加，那么$u(m)$减少，$r(m)$增加。
假定a表示装运货物的费用，b销售每单位货物的利润。那么，仓库经理需要计算m使得

$$ar(m) + bu(m)$$

达到最优。

考虑下列具体情形：$c = 3$. 因此，可能的临界值为0,1,2,3. 假设销售每单位货物获取利润为$b = 1$，每天货物要求量为

$$P(D \geq i) = 2^{-i}, \quad i = 0, 1, 2, \cdots$$

那么

$$\begin{aligned} E(D-i)^{+} &= \sum_{k=1}^{\infty} P((D-i)^{+} \geq k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(D \geq i+k) = 2^{-i} \end{aligned}$$

当$m=0,1,2$时，转移矩阵分别为:

$m=0$

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$m=1$

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$m=2$

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

平稳分布分别为

$$\pi=(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$$

$$\pi=(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$$

$$\pi=(\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{2})$$

因此

$$u(0)=\frac{1}{4},\quad u(1)=\frac{1}{6},\quad u(2)\frac{1}{8}$$

$$r(0)=\frac{1}{4},\quad r(1)=\frac{1}{3},\quad r(2)=\frac{1}{2}$$

为了达到最优，应该选择

(1) $a\le\frac{1}{4}$

$$m=2$$

(2) $\frac{1}{4}<a\le 1$

$$m=1$$

(3) $a>1$

$$m=0$$

水库模型

We are concerned with a storage facility, say a reservoir of finite capacity c. In each time period n, A_n units of resource are available to enter the facility and B_n units are drawn off. When the reservoir is full, surplus water is lost. When the reservoir is empty, no water can be supplied. We assume newly available resources cannot be used in the current time period. Then the quantity of water X_n in the reservoir at the end of period n satisfies

$$X_{n+1} = ((X_n - B_{n+1})^+ + A_{n+1}) \wedge c$$

假设A_n, B_n, c是整数值随机变量，并且$A_1, A_2, \cdots$ 是独立同分布随机变量，$B_1, B_2, \cdots$ 是独立同分布随机变量，那么$X_n, n \geq 0$是Markov链，状态空间为$0, 1, 2, \cdots, c$. 转移概率可以从A_n和B_n分布中推出。

最简单的一种情况是，水量容量足够大，$c = \infty$;

并且假定每个时间段内流出水量是固定常数，假定为1个单位，即$B_n = 1$. 那么

$$X_{n+1} = ((X_n - 1)^+ + A_{n+1})$$

可以写成

$$X_{n+1} = X_n + A_{n+1}) - \mathbf{1}_{X_n \geq 1}$$

令$\rho = EA_n$。

如果$\rho < 1$，那么$X_n, n \geq 0$是Markov链. (为什么？)

事实上，令N_n表示该Markov链在n时刻之前处于状态0的次数，即

$$N_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{X_n=0}$$

那么

$$X_n = X_0 + (A_1 + A_2 + \cdots + A_n) - (n - N_n)$$

所以

$$EX_n = EX_0 + E(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) - (n - EN_n)$$

假定$X_0 = 0$，那么

$$\frac{EN_n}{n} \geq 1 - \rho > 0$$

由遍历定理

$$\frac{1}{\tau_0} = \lim_{n \to \infty} \frac{EN_n}{n} \geq 1 - \rho > 0$$

其中τ_0为平均返回到0的平均时间，即

$$\tau_0 \leq \frac{1}{1 - \rho}$$

说明$X_n, n \geq 0$是正常返的。

下面计算平稳分布π。以平稳分布π作为初始分布，那么生成函数可以写成

$$\phi(s) = Es^{X_n} = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i s^i$$

那么

$$\begin{aligned} s\phi(s) &= Es^{X_{n+1}+1} = Es^{X_n + A_{n+1} + \mathbf{1}_{X_n=0}} \\ &= Es^{A_{n+1}}(\pi_0 s + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i s^i) \\ &= \psi(s)(\pi_0 s + \phi(s) - \pi_0) \end{aligned}$$

其中$\psi(s) = Es^{A_{n+1}}$. 因此，

$$(\psi(s) - s)\phi(s) = \pi_0 \psi(s)(1 - s)$$

注意到，

$$\frac{\psi(s)-s}{1-s} \to 1-\rho, \quad s \to 1$$

既然$\psi(1)=1=\phi(1)$，那么

$$\pi_0 = 1-\rho, \quad \tau_0 = \frac{1}{1-\rho}$$

并且

$$\phi(s) = \frac{(1-\rho)(1-s)\psi(s)}{\psi(s)-s}$$

一旦知道A_1的分布，就可以计算出平稳分布π。

Markov 决策过程

某工厂使用某机器生产加工产品，每周运行6天，周日对机器进行检测，并做出相应维修（或者更新）决策。具体情况如下：

- 机器状况分成4种：

$$\mathcal{E} = \{0, 1, 2, 3\}$$

0 — 正常运行(Good as new)
1 — 运行，稍有磨损(Operable, minor deterioration)
2 — 运行，严重磨损(Operable, major deterioration)
3 — 损坏(output of unacceptable quality)

- 该机器每周工作6天，周日停机检测。根据长期观察发现机器经过一周工作之后，状态变化具有以下规律：

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 处于各状态的机器工作一周后，所造成的损失：

$0 \Rightarrow$ 损失0

$1 \Rightarrow$ 损失1000 美元

$2 \Rightarrow$ 损失3000 美元

$3 \Rightarrow$ 停止工作，需要更换

- 维修(更换)策略：

策略R_1：

0 状态机器$\Rightarrow$ 不做维修(Do Nothing)

1 状态机器$\Rightarrow$ 不做维修(Do Nothing)

2 状态机器$\Rightarrow$ 不做维修(Do Nothing)

3 状态机器$\Rightarrow$ 更换(Replace)，达到状态0，费用4000美元

策略R_2：

0 状态机器$\Rightarrow$ 不做维修(Do Nothing)

1 状态机器$\Rightarrow$ 不做维修(Do Nothing)

2 状态机器$\Rightarrow$ 维修(Overhaul)，达到状态1，费用2000美元

3 状态机器$\Rightarrow$ 更换(Replace)，达到状态0，费用4000美元

策略R_3：

0 状态机器⇒ 不做维修(Do Nothing)

1 状态机器⇒ 不做维修(Do Nothing)

2 状态机器⇒ 更换(Replace)，达到状态0，费用4000美元

3 状态机器⇒ 更换(Replace)，达到状态0，费用4000美元

策略R_4：

0 状态机器⇒ 不做维修(Do Nothing)

1 状态机器⇒ 更换(Replace)，达到状态0，费用4000美元

2 状态机器⇒ 更换(Replace)，达到状态0，费用4000美元

3 状态机器⇒ 更换(Replace)，达到状态0，费用4000美元

- 维修或者更换需要一周时间，停工造成损失2000美元

问题: 从长计议，以上四种策略哪种最优(整体损失最小)?

- 令$X_0, X_1, X_2, \cdots$表示该机器每周检测状态，其构成Markov链，状态空间为$\mathcal{E}$。假设初始状态$X_0 = 0$(刚开始是台新机器)，状态之间的转移情况由维修决策而确定。

策略R_1分析:

按照该策略，每周机器状态发生变化，转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

通过计算，平稳分布为

$$\mu_1 = (\mu_1(0), \mu_1(1), \mu_1(2), \mu_1(3)) = (\frac{2}{13}, \frac{7}{13}, \frac{2}{13}, \frac{2}{13})$$

- 在维修策略R_1下，损失包括：

1 状态机器工作一周⇒ 损失1000 美元

2 状态机器工作一周⇒ 损失3000 美元

3 状态机器⇒ 更换费用4000美元，停工一周2000美元，累计6000美元

- 考虑到长期下去，机器处于各个状态的概率权重，该维修策略R_1带来的总损失为

$$
\begin{aligned}
EC_1 &= \frac{2}{13}\times 0+\frac{7}{13}\times 1000+\frac{2}{13}\times 3000+\frac{2}{13}\times 6000 \\
&= \frac{25000}{13}\approx 1923\text{美元}
\end{aligned}
$$

策略R_2分析:

按照该策略，每周机器状态发生变化，转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

通过计算，平稳分布为

$$\mu_2 = (\mu_2(0), \mu_2(1), \mu_2(2), \mu_2(3)) = (\frac{2}{21}, \frac{5}{7}, \frac{2}{21}, \frac{2}{21})$$

- 在维修策略R_2下，损失包括：

1 状态机器工作一周$\Rightarrow$ 损失1000 美元

2 状态机器$\Rightarrow$ 维修费用2000美元，停工一周2000美元

累计4000美元

3 状态机器$\Rightarrow$ 更换费用4000美元，停工一周2000美元，

累计6000美元

- 考虑到长期下去，机器处于各个状态的概率权重，该维修策略R_2带来的总损失为

$$
\begin{aligned}
EC_1 &= \frac{2}{21}\times 0+\frac{5}{7}\times 1000+\frac{2}{21}\times 4000+\frac{2}{21}\times 6000 \\
&= \frac{35000}{21}\approx 1667\text{美元}
\end{aligned}
$$

策略R_3分析:

按照该策略，每周机器状态发生变化，转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

通过计算，平稳分布为

$$\mu_3 = (\mu_3(0), \mu_3(1), \mu_3(2), \mu_3(3)) = (\frac{2}{11}, \frac{7}{11}, \frac{1}{11}, \frac{1}{11})$$

- 在维修策略R_3下，损失包括：

1 状态机器工作一周⇒ 损失1000 美元

2 状态机器⇒ 更换费用4000美元，停工一周2000美元

累计6000美元

3 状态机器⇒ 更换费用4000美元，停工一周2000美元，

累计6000美元

- 考虑到长期下去，机器处于各个状态的概率权重，该维修策略R_2带来的总损失为

$$
\begin{aligned}
EC_1 &= \frac{2}{11} \times 0 + \frac{7}{11} \times 1000 + \frac{1}{11} \times 6000 + \frac{1}{11} \times 6000 \\
&= \frac{19000}{11} \approx 1727\text{美元}
\end{aligned}
$$

策略R_4分析:

按照该策略，每周机器状态发生变化，转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}_4 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

通过计算，平稳分布为

$$\mu_4 = (\mu_4(0), \mu_4(1), \mu_4(2), \mu_4(3)) = (\frac{1}{2}, \frac{7}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{32})$$

- 在维修策略R_4下，损失包括：

1 状态机器⇒ 更换费用4000美元，停工一周2000美元
累计6000美元

2 状态机器⇒ 更换费用4000美元，停工一周2000美元
累计6000美元

3 状态机器⇒ 更换费用4000美元，停工一周2000美元，
累计6000美元

- 考虑到长期下去，机器处于各个状态的概率权重，该维修策略R_2带来的总损失为

$$\begin{aligned} EC_1 &= \frac{1}{2} \times 0 + \frac{7}{16} \times 6000 + \frac{1}{32} \times 6000 + \frac{1}{32} \times 6000 \\ &= \frac{96000}{32} = 3000\text{美元} \end{aligned}$$

综合以上：实行维修策略R_2，整体损失最小为1667美元。

Hiller, Lieberman, (2015) Introduction to Operations Research,
Chapter 19 Markov Decision Processes