科学计算(Scientific Computing)

第二章 插值理论

任课老师: Xiao-liang Cheng(程晓良)

Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, P.R. China.

2023. 3 .7

插值理论

1. 多项式插值
    - Lagrange插值公式
    - 误差估计
    - Newton插值公式

插值理论

1. 多项式插值
   - Lagrange插值公式
   - 误差估计
   - Newton插值公式
2. Hermite插值
   - Hermite插值问题
   - Hermite插值误差
   - 混合插值问题

插值理论

1. 多项式插值
   - Lagrange插值公式
   - 误差估计
   - Newton插值公式
2. Hermite插值
   - Hermite插值问题
   - Hermite插值误差
   - 混合插值问题
3. 分段插值
   - Runge现象
   - 分段线性插值
   - 分段k次多项式插值
   - 分段三次Hermite插值
   - 样条插值函数

为什么要用插值?

例如零阶第一类Bessel函数$J_0(x)$:

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{2^{2m} m! \Gamma(m+1)}$$

为了便于应用，把一些x对应的值计算出来，制作成Bessel函数表，供需要时查寻. 如在一Bessel函数表上，可查到下列值.

Bessel函数表

x	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04	...	2.00	2.01	2.02
$J_0(x)$	0.7652	0.7608	0.7563	0.7519	0.7473	...	0.2239	0.2181	0.2124

有的甚至提供不出$f(x)$的表达式，而只是通过实验或计算获得若干节点x_i上的函数值$f(x_i) = y_i$,即只有一张函数表

函数表

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
$y = f(x)$	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_{n-1}	y_n

无论上述哪一种情况，如果这时需要知道不在函数表中的某x的函数值$f(x)$该怎么办呢？**插值**就是一种解决办法。

多项式插值

多项式插值问题: 给定函数$f(x)$在$n+1$个互不相同的点$x_i(i=0,1,\cdots,n)$上的函数值$f(x_i)=y_i$，求一个n次多项式$p_n(x)$，使得

$$p_n(x_i)=y_i, \qquad i=0,1,\cdots,n,$$

其中点x_i称为插值节点.

用几何语言来描述，就是已知曲线$y=f(x)$上的$n+1$个点$(x_i,y_i)(i=0,1,\cdots,n)$，寻找一条$n$次代数曲线$y=p_n(x)$,也通过这$n+1$个点.

存在性定理

定理: 满足条件$p_n(x_i) = y_i, i = 0, 1, \cdots, n$的插值多项式$p_n(x)$存在并且唯一.

证明: 待定系数法. 设$p_n(x)$为

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

从而问题转化为确定系数$a_0, a_1, \cdots, a_n$以满足插值条件，即

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

这是以$a_0, a_1, \cdots, a_n$为未知量的线性方程组.

插值理论

其系数行列式恰为范德蒙(Vandermonde)行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

由于点x_i互不相同，故$D \neq 0$. 根据Cramer法则，存在唯一解$a_0, a_1, \cdots, a_n$，亦即可以唯一确定一个n次多项式$p_n(x)$.

怎么求?

根据Cramer法则，

$$a_i = D_i/D$$

其中

$$D_i = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{i-1} & y_0 & x_0^i & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{i-1} & y_1 & x_1^i & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{i-1} & y_0 & x_0^i & \cdots & x_0^n \end{vmatrix}$$

这种通过求解线性方程组来构造插值多项式的方法不仅计算量太大，而且因为Vandermonde矩阵通常是病态的，使得舍人误差对计算结果有巨大的影响，因此实际计算很少采用此公式.

Lagrange插值公式

基函数的形式:

$$p_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x).$$

其中$l_i(x)$是n次多项式满足

$$l_i(x_i) = 1, \quad l_i(x_j) = 0, \ j \neq i.$$

或

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$$

显然

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n.$$

如何求基函数？零点！

$$l_i(x) = c(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n).$$

由$l_i(x_i) = 1$推出常数c,

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}.$$

用简明记号

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}.$$

当$n = 1$时,

$$p_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

几何意义: 就是连接平面上两点(x_0, y_0), (x_1, y_1)的直线.

当$n = 2$时,

$$p_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

几何意义: 就是连接平面上三个点(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)的抛物线.

误差估计: $f(x) - p_n(x) = ?$

定理: 设$x_0, x_1, \cdots, x_n$是区间$[a, b]$上的$n+1$个互不相同的点， $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$, 且$P_n(x)$是满足$p_n(x_i) = y_i = f(x_i), (i = 0, 1, \cdots, n)$的$n$次插值多项式. 则对每个$x \in [a, b]$, 存在$\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

记

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

证明

构造性证明: 对$x \neq x_i$, 令

$$\phi(t) = f(t) - p_n(t) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\omega_n(x)}\omega_n(t).$$

则$\phi(t)$有$n+2$个不同的零点$x, x_0, x_1, \cdots, x_n$. 反复应用Rolle定理, 至少存在一个零点

$$\phi^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

即得结论.

例： 设$f(x) \in C^2[a,b], f(a) = f(b) = 0$. 求证

$$\max_{a \le x \le b} |f(x)| \le \frac{(b-a)^2}{8} \max_{a \le x \le b} |f''(x)|.$$

证明： 易知，满足条件$p_1(a) = p_1(b) = 0$的线性插值多项式$p_1(x) = 0$, 由定理, 存在$\xi \in (a,b)$,使得

$$f(x) = f(x) - p_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$$

而

$$\max_{a \le x \le b} |(x-a)(x-b)| = (\frac{b-a}{2})^2$$

可知结论成立.

例: 已知$f(x) = \sin(\pi x) + x^4$, 求在结点$-1, 0, 1, 2$的函数$f(x)$的三次Lagrange插值多项式$p(x)$.

解析I. 按定义算!

例: 已知$f(x)=\sin(\pi x)+x^4$, 求在结点$-1,0,1,2$的函数$f(x)$的三次Lagrange插值多项式$p(x)$.

解析I. 按定义算!

性质: 若$f(x),g(x)$的插值多项式分别是$p(x),q(x)$, (插值节点相同) 则$f(x)+g(x)$的插值多项式是$p(x)+q(x)$.

解析II. 设$f_1(x)=\sin(\pi x)$在结点$-1,0,1,2$的三次Lagrange插值多项式$P(x)=0$.
而记$f_2(x)=x^4$在结点$-1,0,1,2$的三次Lagrange插值多项式$Q(x)$.
则由误差估计

$$x^4-Q(x)=\frac{(x^4)^{(4)}}{4!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

于是

$$Q(x)=x^4-x(x-1)(x+1)(x-2)=2x^3+x^2-2x.$$

最后所求$p(x)=0+Q(x)=2x^3+x^2-2x.$

性质: (2.20)

若

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j\, l_j(x),$$

则

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j l_j(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{\omega_n(x)}{(x-x_j)\omega_n'(x_j)},$$

$$p_n(x) = \omega_n(x) \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{1}{(x-x_j)\omega_n'(x_j)},$$

$$p_n(x) = \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{n} y_j \frac{1}{(x-x_j)\omega_n'(x_j)}}{\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(x-x_j)\omega_n'(x_j)}}.$$

Newton插值公式

对于给定的$n+1$个节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$，考虑n次多项式

$$Q(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + c_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}).$$

若要求它满足插值条件: $Q(x_i) = f(x_i) = y_i, i = 0, 1, \cdots, n$, 那么它就是以$x_0, x_1, \cdots, x_n$为节点的$n$次插值多项式$P_n(x)$.

对于这样的$Q(x)$, 其系数c_i可递推得到:

$$Q(x_0) = c_0 = f(x_0) \Longrightarrow c_0 = f(x_0)$$
$$Q(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0) = f(x_1) \Longrightarrow c_1 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$
$$Q(x_2) = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2)$$
$$\Longrightarrow c_2 = \left[\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\right]\frac{1}{x_2-x_1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

即从$Q(x_0)$可以求出c_0,再从$Q(x_1)$求出c_1，如此等等，最后从$Q(x_n)$求出c_n. 插值多项式$P_n(x)$也可以这样生成.

定义: 设函数$f(x)$在$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k$上有定义，$f(x)$的以$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k$为插值节点的$k$次插值多项式的首项($k$次)系数称为$f(x)$的$k$**阶差商**，记为$f[x_0, x_1, \cdots, x_k]$.

定理: (1)$f(x)$的k阶差商为

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_k)}.$$

(2)$f(x)$在$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k$上的$k$阶差商与$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k$的次序无关，即对于任意一个$0, 1, 2, \cdots, k$的排列$i_0, i_1, i_2, \cdots i_k$,都有

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = f[x_{i_0}, x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}].$$

这个性质称为差商的**对称性**.

定理:

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \cdots, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}.$$

证明： 用数学归纳法.
令$P_{(0,1,\cdots,k-1)}(x)$表示$f(x)$的以$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}$为节点的$k-1$次插值多项式，用$P_{(1,2,\cdots,k)(x)}$表示以$x_1, x_2, \cdots, x_k$为节点的$k-1$次插值多项式.

它们的首项系数(即x^{k-1}的系数)分别为$f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}]$及$f[x_1, x_2, \cdots, x_k]$.

构造多项式

$$P(x) = P_{(0,1,\cdots,k-1)}(x) + \frac{x - x_0}{x_k - x_0}\left(P_{(1,2,\cdots,k)}(x) - P_{(0,1,\cdots,k-1)}(x)\right)$$

显然它是一个k次多项式.

而且

$$
\begin{aligned}
P(x_0) &= P_{(0,1,\cdots,k-1)}(x_0) = f(x_0) \\
P(x_i) &= P_{(0,1,\cdots,k-1)}(x_i) + \tfrac{x_i-x_0}{x_k-x_0}\left(P_{(1,2,\cdots,k)}(x_i) - P_{(0,1,\cdots,k-1)}(x_i)\right) \\
&= f(x_i), \qquad i = 1, 2, \cdots, k-1 \\
P(x_k) &= P_{(0,1,\cdots,k-1)}(x_k) + \tfrac{x_k-x_0}{x_k-x_0}\left(P_{(1,2,\cdots,k)}(x_k) - P_{(0,1,\cdots,k-1)}(x_k)\right) \\
&= P_{(1,2,\cdots,k)}(x_k) = f(x_k)
\end{aligned}
$$

因此$P(x)$恰为$f(x)$的以$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k$为节点的$k$次插值多项式，其首项系数是$f[x_0, x_1, \cdots, x_k]$为

$$
\frac{f[x_1, x_2, \cdots, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}
$$

上述定理给出差商的另一个特征：差商可以通过递归定义. 事实上，只要定义一阶差商

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

就可以定义k阶差商了，这也是很多教科书采用的方法.

有了差商的定义，现在我们就可以把$f(x)$的以$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$为节点的$n$次插值多项式表示为

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + \cdots + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

这个公式称为**Newton插值公式**. 需要提醒大家的是插值多项式是唯一的, Lagrange插值公式与Newton插值公式只不过表示形式不同.

为什么要研究Newton插值公式?

显然Newton插值具有继承性. 当我们算得$P_{k-1}(x)$后，如果要增加一个插值节点，只要在$P_{k-1}(x)$上增加一项$f[x_0,x_1,\cdots,x_k](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})$ 就可以得到$P_k(x)$.

差商表

x_0	$f(x_0)$				
		$f[x_0,x_1]$			
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0,x_1,x_2]$		
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1,x_2,x_3]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$
		$f[x_2,x_3]$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	
x_3	$f(x_3)$		$f[x_2,x_3,x_4]$		
		$f[x_3,x_4]$			
x_4	$f(x_4)$				

定理: 对任意的x, 若$x \neq x_i, i = 0, 1, 2, \cdots, n$, 则

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ &\quad + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \\ &\quad + f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})(x - x_n) \end{aligned}$$

证明: 在$f(x)$的定义域中任取一点z,且z与$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$不相同。根据Newton插值公式，以$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, z$为节点的$n+1$次插值多项式可表示为

$$\begin{aligned} Q(x) = \quad & f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ & + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \\ & + f[x_0, x_1, \cdots, x_n, z](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})(x - x_n) \end{aligned}$$

根据插值条件，

$$Q(z) = f(z)$$

即

$$\begin{aligned} f(z) = \quad & f(x_0) + f[x_0, x_1](z - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](z - x_0)(z - x_1) + \cdots \\ & + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](z - x_0)(z - x_1)\cdots(z - x_{n-1}) \\ & + f[x_0, x_1, \cdots, x_n, z](z - x_0)(z - x_1)\cdots(z - x_{n-1})(z - x_n) \end{aligned}$$

将z换成x, 即得结论.

由上面结论，我们有

$$f(x)-P_n(x)=f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n),$$

其中$P_n(x)$就是插值点$x_0,x_1,\cdots,x_n$的插值多项式

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\ &\quad +\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

根据插值误差估计式，我们容易得到:

例子: 证明对于$x\neq x_j, j=0,1,\cdots,n$, 存在$\xi$

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x]=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

若$f(x)$是n次多项式，则

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x]\equiv 0.$$

Hermite插值的问题

问题: 给定函数$f(x)$在节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$处的函数值$y_0, y_1, \cdots, y_n$及一阶导数值$y_0', y_1', \cdots, y_n'$, 求$2n+1$次多项式$H_{2n+1}(x)$满足条件

$$H_{2n+1}(x_i) = y_i, \qquad H_{2n+1}'(x_i) = y_i', \qquad i = 0, 1, \cdots, n.$$

或直接写成

问题: 给定函数$f(x)$在节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$处的函数值及一阶导数值, 求$2n+1$次多项式$H_{2n+1}(x)$满足条件

$$H_{2n+1}(x_i) = f(x_i), \qquad H_{2n+1}'(x_i) = f'(x_i), \qquad i = 0, 1, \cdots, n.$$

如何求?

从构造基函数着手. 把$H_{2n+1}(x)$表示成

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^{n} y_i' B_i(x)$$

的形式，其中，$A_i(x), B_i(x)$是待定的不超过$2n+1$次的多项式，要求它们满足下面的条件:

$$\begin{array}{lll} A_i(x_j) = \delta_{ij}, & A_i'(x_j) = 0, & i, j = 0, 1, \cdots, n \\ B_i(x_j) = 0, & B_i'(x_j) = \delta_{ij}, & i, j = 0, 1, \cdots, n. \end{array}$$

先来确定$B_i(x)$.因为

$$B_i(x_j)=0,\qquad B_i'(x_j)=0,\quad i\neq j$$

故$x_j, j\neq i$为$B_i(x)$的二重零点，即$B_i(x)$有因子$(x-x_j)^2, j\neq i$.
又因为

$$B_i(x_i)=0,\qquad B_i'(x_i)=1$$

所以$B_i(x)$中还有一个单因子$x-x_i$.而$B_i(x)$是次数不超过$2n+1$的多项式，因此，$B_i(x)$可以表示成

$$B_i(x)=c(x-x_0)^2(x-x_1)^2\cdots(x-x_{i-1})^2(x-x_i)(x-x_{i+1})^2\ldots(x-x_n)^2$$

由$B_i'(x_i)=1$可得

$$c=\frac{1}{(x_i-x_0)^2(x_i-x_1)^2\cdots(x_i-x_{i-1})^2(x_i-x_{i+1})^2\ldots(x_i-x_n)^2}$$

故

$$\begin{aligned}B_i(x)&=\frac{(x-x_0)^2(x-x_1)^2\cdots(x-x_{i-1})^2(x-x_i)(x-x_{i+1})^2\ldots(x-x_n)^2}{(x_i-x_0)^2(x_i-x_1)^2\cdots(x_i-x_{i-1})^2(x_i-x_{i+1})^2\ldots(x_i-x_n)^2}\\&=\frac{\omega_n^2(x)}{(x-x_i)[\omega_n'(x_i)]^2}=(x-x_i)l_i^2(x).\end{aligned}$$

再来确定$A_i(x)$.与前面同样的讨论，可知$A_i(x)$有因子$(x-x_j)^2, j\neq i, j=0,1,\cdots,n$. 故$A_i(x)$可表为

$$A_i(x)=(ax+b)(x-x_0)^2(x-x_1)^2\cdots(x-x_{i-1})^2(x-x_{i+1})^2\ldots(x-x_n)^2$$

待定常数a,b由条件$A_i(x_i)=1, A_i'(x_i)=0$确定，即应满足

$$\begin{cases}(ax_i+b)[\omega_n'(x_i)]^2=1\\ a[\omega_n'(x_i)]^2+(ax_i+b)[\omega_n'(x_i)]^2\sum\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\dfrac{2}{x_i-x_j}=0\end{cases}$$

因此，

$$\begin{cases}a=-\dfrac{2}{[\omega_n'(x_i)]^2}\sum\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\dfrac{1}{x_i-x_j}=-\dfrac{2l_i'(x_i)}{[\omega_n'(x_i)]^2}\\ b=\dfrac{1}{[\omega_n'(x_i)]^2}\left(1+2x_il_i'(x_i)\right)\end{cases}$$

代入$A_i(x)$得

$$
\begin{aligned}
A_i(x) &= \left(1-2(x-x_i)l_i'(x_i)\right)\frac{\omega_n^2(x)}{(x-x_i)^2[\omega_n'(x_i)]^2} \\
&= \left(1-2(x-x_i)l_i'(x_i)\right)l_i^2(x).
\end{aligned}
$$

为了便于在计算机上实现Hermite插值的计算，整理写成

$$
\begin{aligned}
H_{2n+1}(x) &= \sum_{i=0}^{n}\left(y_i\Big(1-2(x-x_i)\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_j}\Big)+y_i'(x-x_i)\right)\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)^2 \\
&= \sum_{i=0}^{n}\left(y_i+(x_i-x)\Big(2y_i\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_j}-y_i'\Big)\right)\left(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)^2
\end{aligned}
$$

Hermite插值误差

定理: 设$x_0, x_1, \cdots, x_n$是区间$[a,b]$上的$n+1$个互不相同的点，$f(x) \in C^{2n+2}[a,b]$，且$f(x_i) = y_i$，$f'(x_i) = y_i'(i = 0, 1, \cdots, n)$，$H_{2n+1}(x)$是Hermite插值多项式. 则对每个$x \in [a,b]$,存在$\xi \in (a,b)$,使得

$$f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_n^2(x).$$

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n).$$

证明:

对$x \neq x_j$, 作辅助函数$g(t)$如下:

$$g(t) = f(t) - H_{2n+1}(t) - \frac{f(x) - H_{2n+1}(x)}{(x-x_0)^2(x-x_1)^2\cdots(x-x_n)^2}(t-x_0)^2(t-x_1)^2\cdots(t-x_n)^2$$

则$g(x) = 0$, 直接计算可得$g(x_i) = 0, g'(x_i) = 0 (i = 0, 1, \cdots, n)$. 因此, $g(t)$ 在$[a, b]$内至少有$n+1$个二重零点$x_0, x_1, \cdots, x_n$和一个单零点x. 根据罗尔定理, $g'(t)$在$x, x_0, x_1, \cdots, x_n$之间至少有$n+1$个零点,且$x_0, x_1, \cdots, x_n$仍然是$g'(t)$的零点。故在(a, b)内$g'(t)$至少有$2n+2$个互不相同的零点。再对$g'(t)$应用罗尔定理, 知$g''(t)$在(a, b)内至少有$2n+1$个互不相同的零点。这种推理继续下去, 最后, $g^{(2n+2)}(t)$在(a, b)内至少有一个零点, 记之为ξ, 即$g^{(2n+2)}(\xi) = 0$.

$$f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_n^2(x).$$

例: 已知函数$f(x)$在节点x_0, x_1, x_2上的函数值y_0, y_1, y_2和在x_1处的导数值m_1,即

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \qquad f'(x_1) = m_1$$

求一个次数不超过3的多项式$P(x)$,使得

$$P(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \qquad P'(x_1) = m_1.$$

解析I.基于继承性. 设$P_2(x)$是以x_0, x_1, x_2为节点的Lagrange插值多项式:

$$P_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2$$

则

$$P(x_i) - P_2(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, 2.$$

而$P(x) - P_2(x)$为不超过3次的多项式，故可设

$$P(x) - P_2(x) = c(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

其中c为待定常数。从而

$$P(x) = P_2(x) + c(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \tag{2.1}$$

由$P'(x_1) = m_1$得

$$c = \frac{1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \left[m_1 - \frac{x_1 - x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 - \frac{2x_1 - x_0 - x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 - \frac{x_1 - x_0}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2 \right]$$

把c代入(2.1)，即得所求的插值多项式$P(x)$.

解析II.构造基函数. 设

$$P(x) = y_0\varphi_0(x) + y_1\varphi_1(x) + y_2\varphi_2(x) + m_1\psi(x)$$

其中假定$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \psi(x)$都是3次多项式。若它们分别满足下列条件：

$$\varphi_0(x_0) = 1, \qquad \varphi_0(x_1) = \varphi_0(x_2) = \varphi_0'(x_1) = 0 \tag{2.2}$$

$$\varphi_1(x_1) = 1, \qquad \varphi_1(x_0) = \varphi_1(x_2) = \varphi_1'(x_1) = 0 \tag{2.3}$$

$$\varphi_2(x_2) = 1, \qquad \varphi_2(x_0) = \varphi_2(x_1) = \varphi_2'(x_1) = 0 \tag{2.4}$$

$$\psi'(x_1) = 1, \qquad \psi(x_0) = \psi(x_1) = \psi(x_2) = 0 \tag{2.5}$$

则上述$P(x)$即为所求.

$$\varphi_0(x) = \frac{(x-x_1)^2(x-x_2)}{(x_0-x_1)^2(x_0-x_2)}$$

$$\varphi_1(x) = (x-x_0)(x-x_2)\left[\frac{(x_0+x_2-2x_1)}{x_1-x_0)^2(x_1-x_2)^2}(x-x_1) + \frac{1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\right]$$

$$\varphi_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)^2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)^2}, \qquad \psi(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}.$$

例: 设$f(x)=\cos(\pi x)+x^3+10x^2$,求三次多项式插值$p(x)$,满足

$$p(0)=f(0),\quad p(1)=f(1),\quad p''(0)=f''(0),\quad p''(1)=f''(1).$$

解析. 首先只要求$f_1(x)=\cos(\pi x)$的插值$q(x)$即可.

$$q(0)=f_1(0)=1,\ \ q(1)=-1,\ \ q''(0)=-\pi^2,\ \ q''(1)=\pi^2.$$

则$q''(x)$是一次多项式,

$$q''(x)=-\pi^2(1-x)+\pi^2x=-\pi^2+2\pi^2x.$$

$$q(x)=c_1+c_2x-\frac{1}{2}\pi^2x^2+\frac{1}{3}\pi^2x^3.$$

由条件$q(0)=1,q(1)=-1$得

$$c_1=1,\ \ c_2=-2+\frac{1}{6}\pi^2.$$

于是最后所求

$$p(x)=1+(-2+\frac{1}{6}\pi^2)x+(10-\frac{1}{2}\pi^2)x^2+(1+\frac{1}{3}\pi^2)x^3.$$

例: 设$x_0 \neq x_1$, 求4次多项式$p(x)$满足

$$p(x_0) = m_0,\ p'(x_0) = m_1,\ p''(x_0) = m_2,\ p'''(x_0) = m_3,\ p(x_1) = n_0.$$

解析. 由Taylor展开，设

$$p(x) = m_0 + m_1(x - x_0) + \frac{1}{2}m_2(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}m_3(x - x_0)^3 + c(x - x_0)^4.$$

根据条件$p(x_1) = n_0$来确定c.

例: 设$f(x)$是一个n次多项式，满足

$$f(k)=\frac{k}{k+1},\quad k=0,1,2,\cdots,n.$$

求$f(n+1)$的值.

解析. 令

$$g(x)=(x+1)f(x)-x$$

它是一个$n+1$的多项式，且

$$g(0)=g(1)=\cdots=g(n)=0.$$

于是

$$g(x)=cx(x-1)(x-2)\cdots(x-n).$$

由$g(-1)=1$得c, 再计算$g(n+1)$.

练习题

1. 给定三个实数$x_0 < x_1 < x_2$，设$f(x)$是三阶连续可微的函数，

(1) 找出二次多项式$p(x)$满足插值条件，

$$p(x_0) = f(x_0), \quad p'(x_k) = f'(x_k), \ k = 1, 2;$$

(2) 当$x < x_0$时，导出并证明误差估计式$e(x) = f(x) - p(x)$.

练习题

1. 给定三个实数$x_0 < x_1 < x_2$，设$f(x)$是三阶连续可微的函数，

(1) 找出二次多项式$p(x)$满足插值条件，

$$p(x_0) = f(x_0), \quad p'(x_k) = f'(x_k),\ k = 1, 2;$$

(2) 当$x < x_0$时，导出并证明误差估计式$e(x) = f(x) - p(x)$.

证明: (2) 记

$$E(x) = \int_{x_0}^{x} (s - x_1)(s - x_2)\, ds. \qquad E(x_0) = 0,\ E'(x_1) = E'(x_2) = 0.$$

构造

$$\phi(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{E(x)} E(t).$$

则

$$\phi(x_0) = \phi(x) = 0, \quad \phi'(x_1) = \phi'(x_2) = 0.$$

反复用Rolle定理，可得.

Runge现象

设$f(x) \in C[a,b]$.如果对$f(x)$构造插值多项式，那么自然期望随着n越来越大，这些多项式能够在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$,即当$n \to \infty$时，我们期望

$$\|f - P_n\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |f(x) - P_n(x)|$$

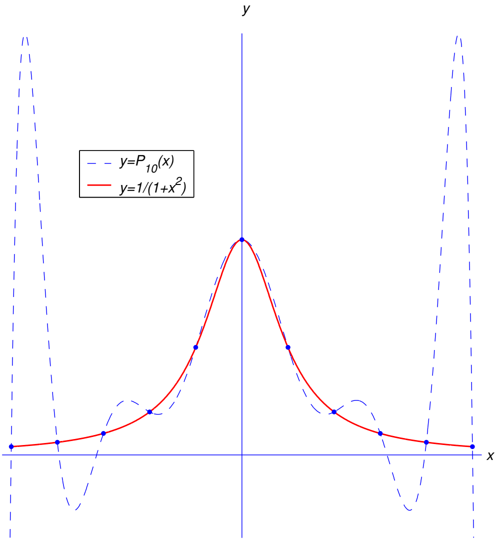
能收敛于零.

1901年Runge给出这样一个例子：

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$

定义在区间$[-1,1]$上. 如果$P_n(x)$是由这个函数利用区间$[-1,1]$内的等距节点所构造的插值多项式，那么会发现序列$\|f - P_n\|_\infty$是无界的. 实际上，对不太大的n(例如$n \le 15$)，我们就可以看到插值多项式$P_n(x)$的剧烈震荡. 这就是所谓的**Runge现象**。

Runge现象



Faber定理: 对任意给定的节点组

$$a \leq x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} \leq b \qquad (n \geq 0)$$

在$[a, b]$上存在一个连续函数f，使得f在这组节点上的插值多项式不能一致收敛f.

插值法收敛性定理: 若f是$[a, b]$上的连续函数，则存在一组节点，使得f在这组节点上的插值多项式$P_n(x)$一致收敛于f, 即

$$\lim_{n \to \infty} \|f - P_n\|_\infty = 0.$$

无论如何，Runge现象让人们意识到，盲目采用高阶插值多项式是不妥当的. 从计算的角度看也是这样.

分段线性插值

将所考察的区间$[a, b]$作一**分划**：

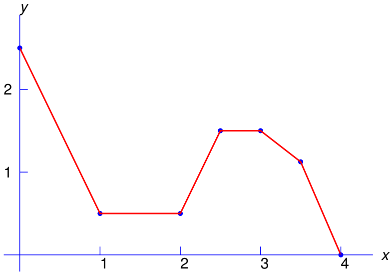
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

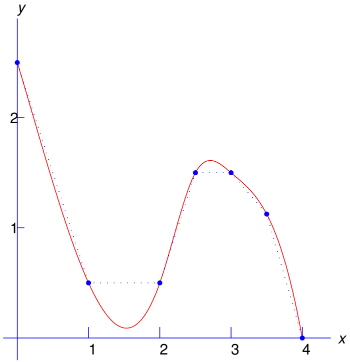
并在每个子区间$[x_{i-1}, x_i]$$(i = 1, 2, \cdots, n)$上构造线性插值多项式，然后把每个子区间上的插值多项式拼接在一起，作为整个区间上的插值函数. 因此这样构造的插值函数是分段线性多项式，称该分段插值为**分段线性插值**. 用$S_1(x)$表示.

$$S_1(x) = y_{i-1}\frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + y_i\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

从几何上看，$S_1(x)$就是对于给定的数据点$(x_i, y_i)(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$，连接其相邻两点所得的一条折线.

分段线性插值





根据Lagrange插值误差定理，对于取值$f(x_i) = y_i(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$的被插函数$f(x)$，若$f(x) \in C^2[a, b]$，则在子区间$[x_{i-1}, x_i]$上有下述误差估计式

$$|f(x) - S_1(x)| \leq \frac{h_i^2}{8} \max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} |f''(x)|$$

这里$h_i = x_i - x_{i-1}$.

定理： 设$f(x) \in C^2[a, b], f(x_i) = y_i(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$，则当$x \in [a, b]$时，对于分段线性插值多项式$S_1(x)$，下式成立：

$$|f(x) - S_1(x)| \leq \frac{h^2}{8} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

其中，$h = \max_{1 \leq i \leq n} h_i$.

例子： 对于Runge函数$f(x)=\dfrac{1}{1+25x^2}$，在$[-1,1]$上作步长为$h=\dfrac{2}{n}$的等距分划，节点$x_i=-1+ih, i=0,1,2,\cdots,n$。在这个分划上构造分段线性插值多项式$S_1(x)$，问要使误差$R(x)=f(x)-S_1(x)$的绝对值小于$10^{-5}$, h应该取多大？n要多大？

解： 由$f(x)=\dfrac{1}{1+25x^2}$得

$$f''(x)=-50\frac{1-75x^2}{(1+25x^2)^3}$$

因此在$[-1,1]$上

$$|f''(x)|\leq 50$$

根据定理，只要h满足下面的不等式即可：

$$|R(x)|\leq\frac{50}{8}h^2<10^{-5}$$

由此得

$$h<0.0013,\qquad n=\frac{2}{h}>1538$$

即要使误差$R(x)=f(x)-S_1(x)$的绝对值小于10^{-5}，h应小于0.0013，n至少要取1539.

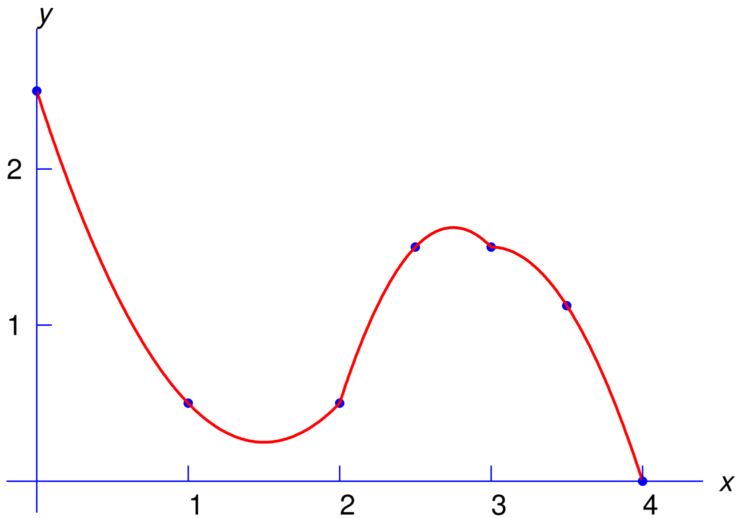
分段k次多项式插值

将所考察的区间$[a, b]$作一**分划**：

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

并在每个子区间$[x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \cdots, n)$上构造$k$次插值多项式，然后把每个子区间上的插值多项式拼接在一起，作为整个区间上的插值函数. 因此这样构造的插值函数是分段k次多项式，称该分段插值为**分段k次多项式插值**. 用$S_k(x)$表示.

图：分段二次插值



分划

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

假定在每个节点x_i上给出了被插函数的函数值y_i和导数值y_i'，求一个分段三次Hermite插值$H(x)$, 要求在每个子区间$[x_i, x_{i+1}](i = 0, 1, \cdots, n-1)$上的限制$H_i(x)$应满足

$$\begin{array}{ll} H(x_{i-1}) = y_{i-1}, & H(x_i) = y_i \\ H'(x_{i-1}) = y'_{i-1}, & H'(x_i) = y'_i \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
H_i(x) \quad = \quad & \frac{(x_i-x_{i-1})^3-3(x_i-x_{i-1})(x-x_{i-1})^2+2(x-x_{i-1})^3}{(x_i-x_{i-1})^3}y_{i-1} \\
& +\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)^2}{(x_i-x_{i-1})^2}y'_{i-1} \\
& +\frac{3(x_i-x_{i-1})(x-x_{i-1})^2-2(x-x_{i-1})^3}{(x_i-x_{i-1})^3}y_i \\
& +\frac{(x-x_{i-1})^2(x-x_i)}{(x_i-x_{i-1})^2}y'_i
\end{aligned}
$$

显然在子区间$[x_{i-1},x_i]$与$[x_i,x_{i+1}]$的交接处$x=x_i$点上，$H(x)$是连续的，因为$H_i(x_i)=y_i=H_{i+1}(x_i)$，且一阶导数$H'(x)$也是连续的，因为$H'_i(x_i)=y'_i=H'_{i+1}(x_i)$. 但二阶导数的连续性就不能保证了.

误差余项

定理:
设$f(x) \in C^4[a,b], f(x_i) = y_i, f'(x_i) = y_i'(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$，则当$x \in [a,b]$时，分段三次Hermite插值多项式$H(x)$成立

$$|f(x) - H(x)| \leq \frac{h^4}{384} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$$

其中，$h = \max_{0 \leq i \leq n-1} h_i = \max_{0 \leq i \leq n-1} |x_{i+1} - x_i|.$

证明. 在每一小区间段，余项

$$R(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_i)}{4!} (x - x_i)^2 (x - x_{i+1})^2, \;\; x_i < \xi_i < x_{i+1}.$$

样条插值函数

问题: 设在区间

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

给定这些点上的函数值$f(x_i) = y_i \ (i = 0, 1, \cdots, n)$. 现在要求构造一个三次样条插值函数$s(x)$满足下列条件:

(1)$s(x_i) = y_i, \ i = 0, 1, 2, \cdots, n;$

(2)在每个小区间$[x_i, x_{i+1}]$上是一个不高于三次的多项式;

(3)$s(x) \in C^2[a, b]$.

说明(1)(2)(3)并不能唯一确定$s(x)$，缺二个条件.

为什么缺二个条件?

用待定系数来计算: 每个区间是三次多项式，每个区间待定4个系数，因此共有$4n$个未知量.

方程个数(约束条件):

由(1), 我们有方程个数: $2n$个;

由(3), 区间间光滑性要求C^2, 有$2(n-1)$个.

三斜率方程组

假设$s'(x_i) = m_i$, $(i = 0, 1, \cdots, n)$待定，则在区间$[x_i, x_{i+1}]$的表达式(由Hermite插值公式)

$$
\begin{aligned}
s(x) \quad &= \quad \frac{(x_{i+1}-x_i)^3 - 3(x_{i+1}-x_i)(x-x_i)^2 + 2(x-x_i)^3}{(x_{i+1}-x_i)^3} y_i \\
&+ \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})^2}{(x_{i+1}-x_i)^2} m_i \\
&+ \frac{3(x_{i+1}-x_i)(x-x_i)^2 - 2(x-x_i)^3}{(x_{i+1}-x_i)^3} y_i \\
&+ \frac{(x-x_i)^2(x-x_{i+1})}{(x_{i+1}-x_i)^2} m_{i+1}
\end{aligned}
$$

令$h_i = x_{i+1} - x_i$, 不难得到

$$
s''(x_i^+) = -\frac{6}{h_i^2} y_i + \frac{6}{h_i^2} y_{i+1} - \frac{4}{h_i} m_i - \frac{2}{h_i} m_{i+1}.
$$

同样可以得到在$[x_{i-1}, x_i]$上点x_i的左微商

$$s''(x_i^-) = \frac{6}{h_{i-1}^2} y_{i-1} - \frac{6}{h_{i-1}^2} y_i + \frac{2}{h_{i-1}} m_{i-1} + \frac{4}{h_{i-1}} m_i.$$

由于$s(x)$二阶微商连续，因此$s''(x_i^+) = s''(x_i^-)$，
得$(i = 1, 2, \cdots, n-1)$

$$(1-\alpha_i) m_{i-1} + 2m_i + \alpha_i m_{i+1} = \beta_i,$$

$$\alpha_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i},$$

$$\beta_i = 3\Big(\frac{1-\alpha_i}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1}) + \frac{\alpha_i}{h_i}(y_{i+1} - y_i)\Big).$$

补充二个边界条件:

(1)曲线在两端点x_0, x_n处的切线斜率已知，即m_0, m_n已知，则前面得到关于$m_1, m_2, \cdots, m_{n-1}$的线性方程组，它具严格对角优势，有唯一解.

(2)曲线在两端点x_0, x_n处的二阶导数已知，即$s''(x_0), s''(x_n)$已知. 常见$s''(x_0) = s''(x_n)$常称为自然样条. 相当于补充两个方程而得$m+1$阶的线性方程组.

(3)周期条件，即$s'(x_0) = s'(x_n)$, $s''(x_0) = s''(x_n)$. 同样，相当于补充两个方程而得$m+1$阶的线性方程组.

三弯矩方程组

用$s''(x)$在结点处的值作为待定系数，
即$s''(x_i) = M_i$, $i = 0, 1, 2, \cdots, n$, 于是在区间$[x_i, x_{i+1}]$的表达式

$$S''(x) = M_i \frac{x - x_{i+1}}{-h_i} + M_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i}, \quad x_i < x < x_{i+1},$$

其中$h_i = x_{i+1} - x_i$.

$$S(x) = M_i \frac{(x - x_{i+1})^3}{-6h_i} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + c(x - x_i) + d;$$

系数c, d由条件$S(x_i) = y_i$, $S(x_{i+1}) = y_{i+1}$确定.

三弯矩方程组

然后利用一阶导数在内结点的连续性，$s'(x_i^+) = s'(x_i^-)$得到方程组.

$$h_iM_{i-1}+2(h_i+h_{i+1})M_i+h_{i+1}M_{i+1} = 6(\delta_i-\delta_{i-1}), \quad i = 1, 2, \cdots n-1$$

补充两端的两个条件，得到相应的方程组.

例. **观测函数$f(x)$在若干点处的值为$f(0)=0$, $f(2)=16$,$f(4)=36$, $f(6)=54$, $f(10)=82$及$f'(0)=8$, $f'(10)=7$. 试求$f(x)$的三次样条插值多项式$S(x)$.**

解析. 由于$h_1=h_2=h_3=2, h_4=4$, 因此可得三弯矩方程组

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

解之，

$$M_1=-1,\ M_2=2,\ M_3=-1,\ M_4=-1,\ M_5=\frac{1}{2}.$$

于是

$$S(x)=\begin{cases} 8x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^3, & x\in[0,2],\\ 16+9(x-2)+(x-2)^2-\frac{1}{4}(x-2)^3, & x\in[2,4],\\ 36+10(x-4)-\frac{1}{2}(x-4)^2, & x\in[4,6],\\ 54+8(x-6)-\frac{1}{2}(x-6)^2+\frac{1}{16}(x-6)^3, & x\in[6,10].\end{cases}$$

问题：是否可以用三斜率公式求解？只要求3×3的方程组！

定理: 设$f(x) \in C^4_{[a,b]}$, 对给定划分

$$\Delta:\ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

并设$s_\Delta(x)$是对Δ的样条插值函数，则
当$\delta = \max\limits_{0 \le i \le n-1} |x_{i+1} - x_i| \to 0$时，对一切$x \in [a, b]$恒有

$$|f^{(i)}(x) - s_\Delta^{(i)}(x)| \le C_i \delta^{4-i},\ i = 0, 1, 2$$

其中C_i是与划分Δ无关的常数.