$x^4+x^2+1=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

$$\int\frac{x^4+5x+4}{x^2+5x+4}dx$$

$x^4+5x+4=x^4+5x+4=x^2(x^2+5x+4)-5x(x^2+5x+4)+21(x^2+5x+4)-80x-80.$

从最高项往下配　(其实这里 $x=-1$ 是上下的公因子)

$\int\tan^2x\,dx=\int(\sec^2x-1)dx=\tan x-x+C$

$\int\cot^2x\,dx=\int(\csc^2x-1)dx=-\cot x-x+C$

$\int\frac{dx}{1+\cos x}=\tan\frac{x}{2}+C$　$\int\frac{dx}{1-\cos x}=-\cot\frac{x}{2}+C$

$\frac{dx}{x}$ ☆. 有 $\frac{dx}{x}$ 时. 令 $x^n=t$ 有 $n\ln x=\ln t$ 即 $n\frac{dx}{x}=\frac{dt}{t}$ 即 $\frac{dx}{x}=\frac{dt}{nt}$.

$\Downarrow$

$\frac{dx}{x}=\frac{dt}{nt}$

对于 $\int_\alpha^\beta\sin^mx\cos^nx\,dx$. 若m.n中有一个是奇数. 可将奇数次的三角放到d_中并用 $s^2+c^2=1$ 化简. 用第一类换元积分计算.

如 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3x\cos^4x\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2x)\cos^4x\,d\cos x$

若m与n均为偶数. 就降幂来做.

$\int_\alpha^\beta\sin^4x\cos^2x\,dx=\frac{1}{8}\int_\alpha^\beta 2\sin^2x\cdot4\sin^2x\cos^2x\,dx=\frac{1}{8}\int_\alpha^\beta(1-\cos2x)\sin^22x\,dx$ (可算)

又若 $\alpha=0$ $\beta=\frac{\pi}{2}$. 用这个结论.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^nx\,dx=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & n=\text{偶数},\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}=\frac{(n-1)!!}{n!!}, & n=\text{奇数}.\end{cases}$$

由此我们可以归纳如下：对于形如 $\int_\alpha^\beta\sin^mx\cos^nx\,dx$ 的积分，当 m 与 n 中有一个是奇数时，都可以用本例中的换元积分法求出积分值；当 m 与 n 都是偶数时，一般只能通过三角函数的恒等变形（如半角公式等），将三角函数的幂指数降低到 1 后加以解决. 但是当 $\alpha=0,\beta=\frac{\pi}{2}$（或积分可化成 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^mx\cos^nx\,dx$ 的形式）时，只要 m 与 n 中有一个是偶数，就可以用例 7.3.8 中得到的递推公式求出积分值.