习题 3.2

1. $\forall \alpha \in V\ \exists! \alpha_1 \in V_1 \wedge \exists! \alpha_2 \in V_2$ s.t. $\alpha = V_1 + V_2$.

$V_1 = V_{11} \oplus V_{12}$. i.e. 对 $\alpha_1 \in V_1\ \exists! \alpha_{11} \in V_{11} \wedge \exists! \alpha_{12} \in V_{12}$.

s.t. $\alpha_1 = \alpha_{11} + \alpha_{12}$.

i.e. $\forall \alpha \in V\ \exists! \alpha_{11} \in V_{11} \wedge \exists! \alpha_{12} \in V_{12} \wedge \exists! \alpha_2 \in V_2$

s.t. $\alpha = \alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_2$

故 $V = V_{11} \oplus V_{12} \oplus V_2$

3. (1). $(A, B) = tr(AB) = tr(BA) = (B, A)$

$(A, A) = tr(AA) = tr(AA^T) = tr\ diag(X_1^T X_1 \cdots X_n^T X_n) \geq 0$. 当且仅当 $X_i = 0$ 即 $A = 0$ 取 "="

$(kA, B) = tr(kAB) = k\,tr(AB) = k(A, B)$

$(A, B+C) = tr(AB + AC) = tr(AB) + tr(AC) = (A, B) + (A, C)$.

故 V 在此内积下构成欧氏空间.

(2). $\dim V = \frac{1+n}{2} \cdot n = \frac{1}{2} n(n+1)$

(3). $\dim W = \frac{1+n}{2} n - 1$

(4). $W^\perp$ 的基 ξ 与 W 中任一基作内积 $(\xi, A) = tr(\xi A) = 0$, 而 $tr(A) = 0$,

故令 $\xi = E$

则 $E = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ 是 $W^\perp$ 的一个基

5. 设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots a_n)^T$. $\beta=(b_1,b_2\cdots b_n)^T$

(1) 则 $\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\sum_{i=1}^{n}b_i^2$ 即 $\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)(a_i+b_i)=0$.

$(\alpha+\beta,\alpha-\beta)=\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\cdot(a_i-b_i)=0$. 故 $\alpha+\beta$ 与 $\alpha-\beta$ 正交.

(2). 设V的一组正交基为 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$.

且 $W=L(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_s)$. 则 $W^\perp=L(\alpha_{s+1}\cdots\alpha_n)$.

从而 $\dim W+\dim W^\perp=n$.

由于 W 与 $W^\perp$ 互为正交补. 正交补是唯一的. 故 $(W^\perp)^\perp=W$

6. 设 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 是V的一组正交基

不妨设 $W_1=L(\alpha_i)$ $(i\in J_1)$. $W_2=L(\alpha_i)$ $(i\in J_2)$ J是指标集. 记 $J_3=J_1\cap J_2$ $J_4=J_1\cup J_2$

则 $W_1+W_2=L(\alpha_i)$ $i\in J_4$. 故 $(W_1+W_2)^\perp=L(\alpha_i)$ $i\in J\backslash J_4$

即 $(W_1+W_2)^\perp=L(\alpha_i)$. $i\in(J\backslash J_1)\cap(J\backslash J_2)$

即 $(W_1+W_2)^\perp=W_1^\perp\cap W_2^\perp$

$(W_1\cap W_2)^\perp=L(\alpha_i)$ $i\in J\backslash J_3=J\backslash J_1\cup J\backslash J_2$ 而 $W_1^\perp+W_2^\perp=L(\alpha_i)$ $i\in J\backslash J_1\cup J\backslash J_2$

故 $(W_1\cap W_2)^\perp=W_1^\perp+W_2^\perp$

7. (1). 平面若包含原点. 则为 R^3 的子空间. 否则不是

(2) ①若直线共面. 则能构成二维平面.

②若直线不共面. 则两条直线构成二维平面

三条直构 构成 R^3 空间.

(3). 不一定. 若 X是 Oxy 平面. U是 x轴 V是y轴. 而 Y是直线 $\begin{cases}y=x\\z=0\end{cases}$.

则 $Y\neq(Y\cap U)\oplus(Y\cap V)$.

习题 3.3.

1. $A^HA=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&-1&3&2\\1&2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\2&1&-1&2\\0&2&3&0\\1&0&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&2&0&6\\2&5&5&2\\0&5&14&0\\6&2&0&6\end{pmatrix}$

$A^Hb=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&-1&3&2\\1&2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\\4\end{pmatrix}$

令 $C=\left(\begin{array}{cccc|c}6&2&0&6&4\\2&5&5&2&-1\\0&5&14&0&0\\6&2&0&6&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}2&5&5&2&-1\\&-13&-15&0&7\\&&107&0&35\\&&&0&0\end{array}\right)$

$\Rightarrow x=(t,-0.93,0.33,-t-1.22)^T\quad t\in R.$

习题 4.1

3. (2) 是线性变换. 令 $f(x)=\lambda g(x)+\mu h(x)$. $\mathcal{A}: P[x]\mapsto R$

则 $\mathcal{A}(\lambda g(x)+\mu h(x))=\mathcal{A}f(x)=\lambda g(x_0)+\mu h(x_0)=\lambda\mathcal{A}(g(x))+\mu\mathcal{A}(h(x))$

(3) 既不是线性映射,也不是线性变换.

(5). $\mathcal{A}(\lambda\bar{x}+\mu\bar{y})=\lambda\bar{x}+\mu\bar{y}=\lambda\mathcal{A}(\bar{x})+\mu\mathcal{A}(\bar{y})$ $\mathcal{A}: C\mapsto C$

是线性变换.

5. 当k=1时,成立. 假定k≤n时,命题均成立

$A^{n+1}B-BA^{n+1}=A(A^nB-BA^n)+ABA^n+(A^nB-BA^n)A-A^nBA$

$=A(A^nB-BA^n)+(A^nB-BA^n)A+A(BA^{n-1}-A^{n-1}B)A$

$=A\cdot nA^{n-1}+n\cdot A^{n-1}\cdot A+A(n-1)A^{n-2}\cdot A$

$=2nA^n+(n-1)A^n$

$=(n+1)A^n$

故当n=n+1时成立.

由第二类数学归纳法知 $\forall k \in \mathbb{Z}$. 命题均成立. 证毕!

6. 反设 α. $A(\alpha) \cdots A^{k-1}(\alpha)$ 线性相关. 则∃不全为0的 l_0. l_1 ⋯ l_{k-1}.

s.t. $l_0\alpha + l_1 A(\alpha) + \cdots + l_{k-1} A^{k-1}(\alpha) = 0$

左右两边同时再进行线性变换一次.

有 $A(l_0\alpha + l_1 A(\alpha) + \cdots + l_{k-1} A^{k-1}(\alpha)) = A(0) = 0$.

有 $l_0 A(\alpha) + l_1 A^2(\alpha) + \cdots + l_{k-1} A^k(\alpha) = 0$.

即 $l_0 A(\alpha) + \cdots + l_{k-2} A^{k-1}(\alpha) = 0$. 重复下去. 得到

$l_0 A^{k-1}(\alpha) = 0$ 而 $A^{k-1}(\alpha) \neq 0$. 故 $l_0 = 0$.

同样可知 $l_1 = 0$. $l_2 = 0$ ⋯ $l_{k-1} = 0$.

故 l_i 全为0. 矛盾. 故假设不成立

故 α. $A(\alpha) \cdots A^{k-1}(\alpha)$ 线性无关.