6.3

1. $\det A = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 1$ 且 A 的列向量是单位正交的.

故 σ 是第一类等距变换.

令 $x' = x$ 有 $\begin{cases} x + \sqrt{2}y + z = 0 \\ x - (2-\sqrt{2})y - z = 0 \\ x = (\sqrt{2}-1)z \end{cases} \Rightarrow l:\ \frac{x}{\sqrt{2}-1} = -y = z$ 为不动直线

3.

6.3.7.

证明: 取 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 为 $\mathbb{R}^3$ 空间的一组标准正交基. 不妨设 O 是不动点.

那么 $(\sigma(\vec{e}_1), \sigma(\vec{e}_2), \sigma(\vec{e}_3)) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)M$. M 是正交矩阵. 其中 $M = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. $\det M = -1$.

令 $M' = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. 令 $\phi\gamma = \gamma - 2(\gamma\cdot\eta)\eta$. 其中 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. 故 $\phi M' = M$ 从而有 $\det M' = 1$.

从而由 M' 诱导的变换是第一类等距变换. 可知其为绕某直线的旋转.

而 M' 与 ϕ 的复合为 M. 且 ϕ 是一个镜面反射.

故 6.3.7 得证

6.3.8.

(1) $x' = Mx + x_0$. 有 $\sigma: \sigma(x) = x - x_0$. $\tau: \tau(x) = M(x)$.

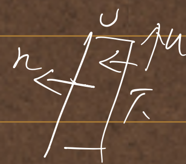
则 $f = \tau(\sigma) = \tau\circ\sigma$. 即第一类变换为平移和旋转之积.

(2) 又 $\phi\gamma = \gamma - 2(\gamma\cdot\eta)\cdot\eta$. $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. 仿上上题的做法. $\det M' = -\det M = 1$

即有第二类变换是第一类变换与反射之积

4.

(1). 取 $\vec{n}$ 为垂直平面 π_1, π_2 的单位向量. $\mathcal{A}\vec{\gamma} = \vec{\gamma} - 2(\vec{\gamma},\vec{n})\vec{n}$ 为镜面反射.

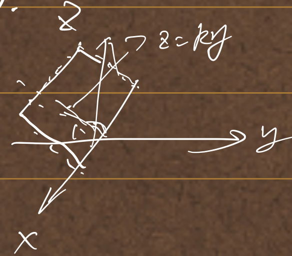


$\forall \vec{p} \in \mathbb{R}^3$, 有唯一分解 $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$, 其中 $\vec{a} \parallel \pi_1$, $\vec{b} \parallel \vec{n}$.

$\mathcal{A}\vec{p} = \vec{a} - \vec{b}$, $\mathcal{A}(\mathcal{A}\vec{p}) = \vec{p}$. 故向量保持不变.

任取 $P \in \pi_1$, 则 P 经两次反射等价于对 π_2 反射. 故 $\mathcal{A}P = P'$ 是一个平移. 平移向量为 $2\vec{d}$. 其中 $\vec{d} \perp \pi_1$, 且 $|\vec{d}| = d(\pi_1, \pi_2)$ (在欧氏度量中).

故这是一个平移.



$(\cos\theta, \sin\theta)$

(2). 不妨设 π_1 为 xOy 平面, 交线为 x 轴

$\mathcal{A}\gamma = \gamma - 2(\gamma, \eta_1)\eta_1$, $\eta_1 = (0,0,1)$.

$\mathcal{B}\gamma = \gamma - 2(\gamma,\eta_2)\eta_2$, $\eta_2 = (0,1,k)\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$ $\vec{OP} = (0, -\frac{1}{k}, 1)$ 在 π_2 上.

$\mathcal{BA}(\xi) = \xi - 2(\xi,\eta_1)\eta_1 - 2(\xi - 2(\xi,\eta_1)\eta_1, \eta_2)\eta_2$

$= \xi - 2z\eta_1 + \frac{2kz-2y}{\sqrt{1+k^2}}\eta_2$

$= \left(x, \frac{(k^2-1)y+2kz}{1+k^2}, \frac{(k^2-1)z-2ky}{1+k^2}\right) = M\xi$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k^2-1}{k^2+1} & \frac{2k}{k^2+1} \\ 0 & \frac{-2k}{k^2+1} & \frac{k^2-1}{k^2+1} \end{pmatrix} \qquad \det M = \frac{1}{(k^2+1)^2}(k^2+1)^2 = 1 \quad (M\text{ 是正交矩阵})$$

故 $\mathcal{BA}$ 是旋转. 从而两相交平面反射之积为旋转

习题 6.4.

3. (1) 反设 $p \in l$ 不是不动点, 取不动点 $P_1, P_2 \in l$. 则 $l_1 = P_1P$, $l_2 = P_2P$.

由仿射将平行直线映成平行直线知 P_1, P_2, P 共线. 且分比不变. 矛盾!

故 P 是不动点, 由 P 任意性.

l 上点都是不动点.

(2) 取 P_1, P_2, P_3 构成平面 π, 则 π 上点是不动点. 取 $\overrightarrow{P_0P_4} \perp \pi$. 则由 P_4 不动, P_0 不动知直线 P_0P_4 不动. 故由 π, l 上向量张成空间的向量都不变. 而 $\dim \pi = 2$ $\dim l = 1$

故其为仿射变换。

4.(1). 取 $P_0(1,0,0)\in\pi_0$

设 $\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}. \end{cases}$ $(1,0,0)$. $(0,1,0)$. $(0,0,1)$ 不动.

$\Rightarrow X' = MX + X_0$ 其中. $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ $X_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

即 $\begin{cases} x' = 2x + y + z - 1 \\ y' = 2x + 3y + 2z - 2 \\ z' = -2x - 2y - z + 2 \end{cases}$

(2) 设 $\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}. \end{cases}$ $(1,0,0)\to(1,0,0)$ $(0,1,0)\to(0,1,0)$ $(0,1,-1)\to(0,1,-1)$ $(0,0,1)\to(1,1,1)$ $(0,0,0)\to(0,0,0)$

$\Rightarrow X' = MX$ 其中 $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

故 $\begin{cases} x' = x + z \\ y' = y + z \\ z' = z \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = \frac{x}{a} \\ y' = \frac{y}{b} \\ z' = \frac{z}{c} \end{cases}$ $\Rightarrow x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$

$V_2 / V_1 = \frac{1}{abc}$. 故 $V_1 = \frac{4}{3}\pi abc$. 即 $V = \frac{4}{3}abc\pi$.