$[e_1', e_2', e_3'] = [e_1, e_2, e_3]\, C.$

$[X, Y, Z]^T = C\,[X', Y', Z']^T + [X_0, Y_0, Z_0]$

$C = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ 原坐标系逆转 θ

$C = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ X逆转θ，Y逆转$\theta+\pi$.

例 10.6.2.

1). 平面交点为 $O^*(1, 2, 0)$

$\vec{e_1}^* = \frac{1}{\sqrt{3}}[1, -1, 1]^T \quad \vec{e_2}^* = \frac{1}{\sqrt{6}}[1, 2, 1] \quad \vec{e_3}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}[-1, 0, +1]^T$

故 $C = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & +1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ 且 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ 平移

即 $\begin{cases} x = 1/\sqrt{3}\, x' + 1/\sqrt{6}\, y' - 1/\sqrt{2}\, z' + 1 \\ y = -1/\sqrt{3}\, x' + 2/\sqrt{6}\, y' + 2 \\ z = 1/\sqrt{3}\, x' + 1/\sqrt{6}\, y' + 1/\sqrt{2}\, z' \end{cases}$ $*$

2). 代入$*$式

有：$\frac{9}{\sqrt{6}} y' - \frac{1}{\sqrt{2}} z' + 13 = 0$. 即 $9y' - \sqrt{3}z + 13\sqrt{6} = 0$.

3). $\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = C^T \begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x^* = 1/\sqrt{3}\,(x - y + z + 1) \\ y^* = 1/\sqrt{6}\,(x + 2y + z - 5) \\ z^* = 1/\sqrt{2}\,(-x + z + 1) \end{cases}$

代入有：$3x + 3z - 3 = 0$. 即：$x + z = 1$

1. 设平面上的直角坐标系$I=\{O,\vec{e_1},\vec{e_2}\}$ 到平面上直角坐标系$I^*=\left\{O^*,\vec{e_1^*},\vec{e_2^*}\right\}$ 的点坐标变换公式为

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}x^*+\frac{\sqrt{2}}{2}y^*+2 \\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x^*+\frac{\sqrt{2}}{2}y^*-3 \end{cases}$$

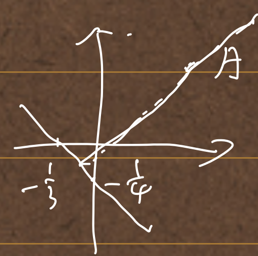
(1) 求直线$2x+y+1=0$ 在I^* 中的方程;

(2) 求$x^*+y^*-2=0$ 在I 中的方程.

(1) 将 x, y 代入方程中, 得到: $x^*+3y^*+2\sqrt{2}=0$

(2) $\begin{cases} x^*=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y-5) \\ y^*=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y+1) \end{cases}$ 代入 得到: $x=4+2\sqrt{2}$

2. 在平面直角坐标系$I=\{O,\vec{e_1},\vec{e_2}\}$ 中, 以直线$l:3x+4y+1=0$ 为新坐标系的x^* 轴, 取过点$A(4,3)$ 且垂直于l 的直线为y^* 轴, 建立新坐标系$I^*=\left\{O^*,\vec{e_1^*},\vec{e_2^*}\right\}$, 写出从$I$ 到I^* 的点坐标变换公式.



$O^*(1,-1)$ $\vec{e_1^*}=(4,-3)$ 或 $(-4,3)$ $\vec{e_2^*}=(3,4)$ 或 $(-3,-4)$.

① $[\vec{e_1'},\vec{e_2'}]=[\vec{e_1},\vec{e_2}]\begin{bmatrix}4 & 3\\ -3 & 4\end{bmatrix}$.

有: $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 3\\ -3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4x'+3y'+1\\ -3x'+4y'-1\end{bmatrix}$

即: $\begin{cases} x=4x^*+3y^*+1 \\ y=-3x^*+4y^*-1 \end{cases}$

同理. 有 $\begin{cases} x=-4x^*+3y^*+1 \\ y=3x^*+4y^*-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=4x^*-3y^*+1 \\ y=-3x^*-4y^*-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-4x^*-3y^*+1 \\ y=3x^*-4y^*-1 \end{cases}$

3. 已知从空间直角坐标系$I=\{O,\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$ 到空间直角坐标系$I^*=\left\{O^*,\vec{e_1^*},\vec{e_2^*},\vec{e_3^*}\right\}$ 的点坐标变换公式为

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}x^*+\frac{1}{\sqrt{3}}y^*+\frac{1}{\sqrt{6}}z^*-1 \\ y=\frac{1}{\sqrt{3}}y^*-\frac{2}{\sqrt{6}}z^*+1 \\ z=-\frac{1}{\sqrt{2}}x^*+\frac{1}{\sqrt{3}}y^*+\frac{1}{\sqrt{6}}z^*+1 \end{cases}$$

(1) 向量$\vec{v}=\{1,1,1\}$ 在新坐标系I^* 下的坐标;

(2) 求球面$(x+1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ 在I^* 中的方程.

1) $[x^*,y^*,z^*]=[x+1,y-1,z-1]\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6}\\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6}\end{bmatrix}$ 代入$(0,0,0)$与$(1,1,1)$作差.

$v=(0,\sqrt{3},0)$

2) 代入得: $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}y^2+\frac{1}{6}z^2+\frac{2}{\sqrt{6}}xy+\frac{2}{2\sqrt{3}}xz+\frac{2}{3\sqrt{2}}yz+$ 即 $x^2+y^2+z^2=1$.

$\frac{1}{3}y^2+\frac{4}{6}z^2 \qquad -\frac{4}{3\sqrt{2}}yz+$

$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}y^2+\frac{1}{6}z^2-\frac{2}{\sqrt{6}}xy-\frac{2}{2\sqrt{3}}xz+\frac{2}{3\sqrt{2}}yz=1$

4. 在空间直角坐标系$I=\{O,\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$ 中已给出三个互相垂直的平面

$$\pi_1: 3x+y-z-1=0$$
$$\pi_2: x+4y+7z=0$$
$$\pi_3: x-2y+z=0$$

建立一个新的直角坐标系$I^*=\left\{O^*,\vec{e_1^*},\vec{e_2^*},\vec{e_3^*}\right\}$，使得$\pi_1,\pi_2,\pi_3$ 依次为坐标系I^* 的坐标平面$O^*y^*z^*$，$O^*x^*z^*$，$O^*x^*y^*$，且坐标系I^* 的坐标向量在I 中的第一分量均为负，求从I 到I^* 的点坐标变换公式.

$\vec{e_1'}=\frac{1}{\sqrt{11}}(-3,-1,1)$ $\vec{e_2'}=\frac{1}{\sqrt{66}}(-1,-4,-7)$ $\vec{e_3'}=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)$ $\vec{OO'}=(\frac{3}{11},\frac{1}{11},\frac{-1}{11})$

$$\begin{cases} x=-3/\sqrt{11}\,x'-1/\sqrt{66}\,y'-1/\sqrt{6}\,z'+3/11 \\ y=-1/\sqrt{11}\,x'-4/\sqrt{66}\,y'+2/\sqrt{6}\,z'+1/11 \\ z=1/\sqrt{11}\,x'-7/\sqrt{66}\,y'-1/\sqrt{6}\,z'-1/11 \end{cases}$$

5. 设平面$\pi: x-ky+z+2=0$ 与曲面$x^2+z^2=2y^2$ 相交，问当k 为何值时，交线是抛物线，椭圆或双曲线?

① 当$k=0$. $\begin{cases} x+z+2=0 \\ x^2+z^2=2y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2-(z+1)^2=1 \\ x+z+2=0. \end{cases}$ 双曲线.

?

② 当$k\neq0$. $(k^2-2)x^2+(k^2-2)z^2-4xz-8x-8z-8=0$

i. 当$k^2=2$ 即$k=\pm\sqrt{2}$. $xz+2x+2z+2=0$ 可化为 $x^2-z^2=1$. 为双曲线

ii. 当$k\in R\setminus\{0,\pm\sqrt{2}\}$. 可化为 $x^2+z^2=1$. 圆.

6. 是否存在平行于x 轴的一张平面π，它与双叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1(a>b)$ 的截线是圆?

设平面π的方程为 $y\cos\theta'+z\sin\theta'+t=0$

当$\cos\theta'=0$. $z=-t/\sin\theta'=m$. 为椭圆.

当$\cos\theta'\neq0$. $y=-t/\cos\theta'-z\tan\theta'=m+z\tan\theta$

代入. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}+\frac{z^2\tan^2\theta+2m\tan\theta\cdot z+m^2}{b^2}=1$

即. $\frac{x^2}{a^2}+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)z^2+\frac{2m\tan\theta}{b^2}\cdot z+\frac{m^2}{b^2}-1=0.$

配方有: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{c^2-b^2}{b^2c^2}\left(z+\frac{mc^2\tan\theta}{c^2-b^2}\right)^2=1-\frac{m^2}{b^2}+\frac{m^2c^2\tan^2\theta}{b^2(c^2-b^2)}$

令 $x'=\frac{x}{a}$ $\quad z'=\left(z-\frac{mc^2\tan\theta}{c^2-b^2}\right)\frac{bc}{\sqrt{c^2-b^2}}$