

一、一种体育彩票以  $A, B$  两队之间的  $r$  场比赛结果为竞猜对象，每场比赛有胜、负两种结果，投注时需竞猜所有场次的获胜队，每位彩民投注额均为1。比赛全部结束后，猜中场次最多的彩民平分全部投注额。若所有彩民猜中的场次数均相等，则投注额由所有彩民平分。

(1) 设  $r=1$ ，只有甲、乙两人投注。已知  $A$  获胜的概率为  $a \geq \frac{1}{2}$ ，乙投注“ $A$  获胜”的概率为  $p \in [0,1]$ 。分别求甲投注“ $A$  获胜”和“ $B$  获胜”时，他能获得的期望收益；

(2) 设  $r=1$ ，共有包括甲在内的  $N+1$  人投注。已知  $A$  获胜的概率为  $a \geq \frac{1}{2}$ ，除甲外的其余  $N$  人投注“ $A$  获胜”的概率均为  $p \in [0,1]$ 。试问  $a$  和  $p$  满足何种条件时，甲投注“ $A$  获胜”可使其期望收益较大；

(3) 设  $r=2$ ，共有包括甲在内的  $N+1$  人投注， $N$  为一充分大的数。已知每场比赛  $A$  获胜的概率略大于  $\frac{1}{2}$ ，除甲外的其余  $N$  人均投注“ $B$  获胜两场”。试问此时甲应如何投注可使其期望收益较大。

二、一种彩票每注面额 1 元，投注者可从  $P$  种可能方案中选择 1 种。彩票设置大、中、小三类奖项，若某注彩票选择的方案属于某类奖项获奖方案之一，该注彩票获得相应的奖项。只有 1 种方案可获大奖，总奖金额为  $J$ ，由所有获奖的彩票平分。有  $s$  种方案可获中奖，总奖金额为  $rN$ ，由所有获奖的彩票平分，其中  $N$  为当期彩票的总投注额， $0 < r < 1$ 。有  $t$  种方案可获小奖，小奖每注奖金为固定值  $a$  元。

(1) 求当期共有  $w$  注彩票获得大奖的概率；

(2) 求每注彩票的期望收益；

(3) 该种彩票会将上期末中的大奖与中奖奖金注入奖池，作为当期大奖的奖金。试证明，若当期大奖总奖金额  $J < (1-r)P - at$ ，则每注彩票的期望收益仍小于面值。