第八章　平稳过程遍历定理

回顾Bernoulli 大数律：

假设$\xi_1, \xi_2, \cdots$,是一列独立同分布随机变量，

$$P(\xi_1 = 1)p, \quad P(\xi_1 = 0) = 1 - p, \quad 0 < p < 1$$

那么

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p$$

该定理可以用来计算某随机事件发生的概率。

具体地说，假设A是某随机试验E的一个事件，$P(A)=p$，但p未知。如何估计p呢？

一个常用的办法是
独立重复随机试验n次(n足够大)，并记录试验结果。
记n_A为事件A发生的次数，$0 \leq n_A \leq n$。那么

$$p \asymp \frac{n_A}{n}$$

作为Bernoulli大数律的推广，我们有Khinchine 大数律：
假设$\xi_1, \xi_2, \cdots$,是一列独立同分布随机变量，$E\xi_1 = \mu$。那么

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu$$

该定理可以用于计算各种物体长度、重量等。
比如，为了获得某物体的长度，我们独立重复测量该物体n次(n足够大)，并记录测量结果。记S_n为n次测量值得和，那么

$$\mu \asymp \frac{S_n}{n}$$

注：在计算事件概率和获得物体长度时，我们都运用观测法: 独立重复试验，记录所观测到的结果。
但是在有些问题中，我们无法独立重复某试验。
比如，跳水比赛。我们不可能让运动员反复跳水，记录成绩。
实际情况是，运动员跳水一次，9名裁判打分，最后计算平均成绩（除去最高分和最低分）。

下面考虑另一种情况。

令X_n，$n \geq 1$ 表示某股票第n天的开盘价。

由于受到政治、经济、气候、和战争等多方面因素的影响，

股票价格是随机变量，是随时间变化而变化的随机变量。

即是一个随机过程。

比如当前时刻为n，那么股票价格$X_1, X_2, \cdots, X_n$已经获得。

问，下一个时刻股票价格X_{n+1}如何？上涨？下跌？

股民在买卖股票之前，喜欢研究股票市场，并做出自己的预测。
一个基本问题：X_{n+1}的分布知道吗？平均值知道吗？
股民不可能知道！！！
下一个时刻的价格是随机变量的，但股民无法通过试验获取数据，积累经验。

考虑平稳随机过程。

回顾平稳随机过程的定义

假设$X_n, n \geq 0$是一个取实数值的随机过程。如果

(1) $EX_n = \mu$，$n \geq 0$;

(2) $EX_n^2 < \infty$，并且相关函数EX_nX_{n+k}与n无关

那么称该随机过程是平稳的。

类似地，

假设$X_t, t \geq 0$是一个取实数值的随机过程。如果

(1) $EX_t = \mu$，$t \geq 0$;

(2) $EX_t^2 < \infty$，并且相关函数EX_sX_{s+t}与s无关

那么称该随机过程是平稳的。

可以类似地定义其他时间参数的平稳随机过程。

例1 假设ξ是随机变量，$E\xi=\mu$，$E\xi^2<\infty$。定义

$$X_n=\xi,\quad n\geq 0$$

那么$X_n,n\geq 0$是平稳随机过程

例2 假设$X_n,n\geq 0$是一列独立同分布随机变量，如果

$$EX_0=\mu,\quad EX_0^2<\infty$$

那么$X_n,n\geq 0$是平稳随机过程

例3. 余弦波过程

假设$\Theta \sim U(0, 2\pi)$上的均匀分布，定义

$$X(t,\Theta) = a\cos(wt+\Theta), \quad -\infty < t < \infty$$

容易计算得

$$EX(t,\Theta) = 0, \quad -\infty < t < \infty$$

$$EX(t,\Theta)X(s,\Theta) = \frac{a^2}{2}\cos(w(t-s))$$

所以，$X_t, -\infty < t < \infty$是平稳过程。

例4. 简单随机游动

$S_n, n \geq 0$不是平稳随机过程。

- 时间平均

假设$X_n, n \geq 0$ 是取实数值的平稳随机过程，$EX_0 = \mu$。
$X_0, X_1, \cdots, X_{n-1}$的平均值定义为

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k$$

定义：假设$X_n, n \geq 0$ 是取实数值的平稳随机过程，
$EX_0 = \mu$。如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k = \mu, \quad a.e.\text{几乎处处}$$

那么称$X_n, n \geq 0$ 具有均值遍历性。

具有均值遍历性的随机过程可以用时间平均代替样本平均!
问题：什么样的平稳随机过程具有具有均值遍历性呢？

例1 假设ξ是随机变量，$E\xi = \mu$，$E\xi^2 < \infty$。定义

$$X_n = \xi, \quad n \geq 0$$

那么$X_n, n \geq 0$是平稳随机过程，但不具有均值遍历性。
事实上，时间平均：

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k = \xi$$

显然，一般情况下

$$\xi \neq \mu$$

例2 假设$X_n, n \geq 0$是一列独立同分布随机变量，如果

$$EX_0 = \mu, \quad EX_0^2 < \infty$$

那么$X_n, n \geq 0$是平稳随机过程，并且具有均值遍历性。
事实上，时间平均为：

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k$$

根据独立和的大数律

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k = \mu$$

一般情况下，下列定理成立:

定理：$X_n, n \geq 0$是平稳随机过程，$EX_0 = \mu$。那么

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k = \mu$$

当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} EX_0 X_k = \mu^2$$

证明：假设$\mu = 0$，

$$E(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} X_i)^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} EX_i^2 + \frac{2}{n^2}\sum_{i<j} EX_iX_j$$

显然，

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} EX_i^2 = \frac{1}{n}EX_0^2 \to 0$$

并且

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2}\sum_{i<j} EX_iX_j &= \frac{1}{n^2}\sum_{i<j} EX_0X_{j-i} \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{i<j:j-i=l} EX_0X_l\end{aligned}$$

注意到：

$$\sharp\{i<j: j-i=l\}=n-l$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2}\sum_{i<j}EX_iX_j &= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n-1}(1-\frac{l}{n})EX_0X_l\\ &= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}(1-\frac{l}{n})EX_0X_l\end{aligned}$$

这样

$$E(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} X_i)^2 \to 0$$

当且仅当

$$\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}(1-\frac{l}{n})EX_0X_l \to 0$$

推论1：$X_n, n \geq 0$是平稳随机过程，$EX_0 = \mu$。如果

$$\sum_{l=1}^{\infty} |EX_0 X_l| < \infty$$

那么$X_n, n \geq 0$具有均值遍历性：

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k \stackrel{L^2}{=} \mu$$

推论2：$X_n, n \geq 0$是平稳随机过程，$EX_0 = \mu$。如果

$$EX_0 X_l \to 0, \quad l \to \infty$$

那么$X_n, n \geq 0$具有均值遍历性：

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k \stackrel{L^2}{=} \mu$$

例. 假设$X_n, n \geq 0$是非周期不可约有限状态Markov链，其平稳分布一定存在。令平稳分布

$$\pi = (\pi_1, \cdots, \pi_N)$$

并选其作为初始分布。这样，$X_n, n \geq 0$是平稳过程。
假设$k \in \mathcal{E}$。令

$$\xi_n(k) = \begin{cases} 1, & X_n = k \\ 0, & X_n \neq k \end{cases}$$

那么$\xi_n, n \geq 0$是一个平稳随机过程。

计算该平稳过程的数字特征

平均值：

$$E\xi_n(k) = P(X_n = k) = P(x_0 = k) = \pi_k$$

相关函数：

$$\begin{aligned} E\xi_n(k)\xi_{n+m}(k) &= P(X_n = k, x_{n+m} = k) \\ &= P(X_{n+m} = k | X_n = k)P(X_n = k) \\ &= \pi_k p_{k,k}^{(m)}, \quad m \geq 0 \end{aligned}$$

既然$X_n, n \geq 0$是正常返的Markov链，那么

$$p_{k,k}^{(m)} \to \pi_k, \quad m \to \infty$$

所以，

$$E\xi_0(k)\xi_m(k) \quad = \quad \pi_k p_{k,k}^{(m)} \to \pi_k^2 = E\xi_0(k)^2, \quad m \to \infty$$

记

$$S_n = \sum_{m=0}^{n-1} \xi_m(k)$$

那么$\frac{S_n}{n}$表示前n个时刻Markov链处于状态k的频率。
根据$\xi_n(k), n \geq 0$的均值遍历性，我们有

$$\frac{S_n}{n} \to \pi_k$$

注：称非周期、不可约、正常返Markov链为遍历的(Ergodic)

- 连续时间参数的平稳过程

假设$X_t, t \geq 0$为平稳随机过程，$EX_t = \mu$。

下面定义时间平均

$$\frac{1}{T}\int_0^T X_t dt = ?$$

(1) 如果对每个ω，样本路径$(X_t(\omega), t \geq 0)$是连续函数，那么可以直接定义$\int_0^T X_t(\omega)dt$，从而可以对每个ω定义时间平均

$$\frac{1}{T}\int_0^T X_t(\omega)dt$$

例. 余弦波过程

$$X(t,\Theta) = a\cos(wt+\Theta), \quad t \geq 0$$

(2) 如果样本路径$(X_t(\omega), t \geq 0)$不是连续函数，我们需要过程引进均方积分的概念。

给定$T > 0$，将$[0, T]$进行划分，

分点为$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T$。

对每个ω，作和：

$$Y_n(\omega) =: \sum_{k=1}^{n} X_{t_k}(\omega)$$

$Y_n, n \geq 1$是一列随机变量

如果存在一个随机变量Y_T使得

$$\lim_{n\to\infty} E(Y_n - Y_T)^2 = 0$$

称X_t在$[0, T]$内均方可积，并记

$$\int_0^T X_t dt = Y_T$$

进而，称

$$\frac{1}{T}\int_0^T X_t dt$$

为随机过程在$[0, T]$内的时间平均。

定义：如果

$$\lim_{T\to\infty} E\Big(\frac{1}{T}\int_0^T X_t dt - \mu\Big)^2 = 0$$

称$X_t, t \geq 0$具有均值遍历性，并记

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X_t dt \stackrel{L^2}{=} \mu$$

问题：什么条件下，平稳随机过程具有均值遍历性？

定理：假设$X_t, t \geq 0$是平稳随机过程，$EX_t = \mu$。那么

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X_t dt \overset{L^2}{=} \mu$$

当且仅当

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \Big(1-\frac{\tau}{T}\Big)(EX_0X_\tau - \mu^2)d\tau = 0$$

证明：假设$\mu = 0$。

$$\begin{aligned} E(\frac{1}{T}\int_0^T X_t dt)^2 &= \frac{1}{T^2}E\int_0^T\int_0^T X_tX_s dsdt \\ &= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T EX_tX_s dsdt \\ &= \frac{2}{T^2}\int_0^T\Big(\int_s^T EX_sX_t dt\Big)ds \end{aligned}$$

注意到，

作变量替换：$\tau = t - s$，那么

$$
\begin{aligned}
E(\frac{1}{T}\int_0^T X_t dt)^2 &= \frac{2}{T^2}\int_0^T \Big(\int_s^T EX_0X_{t-s}dt\Big)ds \\
&= \frac{2}{T^2}\int_0^T \Big(\int_0^{T-s} EX_0X_\tau d\tau\Big)ds \\
&= \frac{2}{T^2}\int_0^T EX_0X_\tau \Big(\int_0^{T-\tau} ds\Big)d\tau \\
&= \frac{2}{T^2}\int_0^T (T-\tau)EX_0X_\tau d\tau \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T (1-\frac{\tau}{T})EX_0X_\tau d\tau
\end{aligned}
$$

结论成立！

例. 余弦波过程

$$X(t,\Theta)=a\cos(wt+\Theta),\quad t\geq 0$$

其中$\Theta\sim U(0,2\pi)$，那么该过程具有均值遍历性

方法一：按定义，计算

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T X(t,\Theta)dt &= \frac{1}{T}\int_0^T a\cos(wt+\Theta)dt\\ &= \frac{1}{T}\cdot\frac{a}{w}(\sin(wT+\Theta)-\sin\Theta)\\ &\to 0,\quad T\to\infty\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t,\Theta)dt=0$$

方法二：验证定理条件。

注意到，

$$EX_0X_\tau = \frac{a^2}{2}\cos\tau$$

所以，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T}\int_0^T (1-\frac{\tau}{T})EX_0X_\tau d\tau \\
&= \frac{a^2}{2}\frac{1}{T}\int_0^T (1-\frac{\tau}{T})\cos\tau d\tau \\
&\to 0, \quad T\to\infty
\end{aligned}$$

推论1. 假设$X_t, t \geq 0$是平稳随机过程，$EX_t = \mu$。如果

$$\int_0^{\infty} |EX_0X_t - \mu^2| dt < \infty$$

那么

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X_t dt \overset{L^2}{=} \mu$$

推论2. 假设$X_t, t \geq 0$是平稳随机过程，$EX_t = \mu$。如果

$$\lim_{T\to\infty} EX_0X_t = \mu^2$$

那么

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X_t dt \overset{L^2}{=} \mu$$

- 回顾一下，当该过程各个时刻相互独立时，

$$EX_0X_t = \mu^2$$

在上面，我们讨论了随机过程$X_n, n \geq 0$和随机过程$X_t, t \geq 0$的均值遍历性。

类似地，可以讨论

随机过程$X_n, n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$和

随机过程$X_t, -\infty < t < \infty$

的均值遍历性.

定理：假设$X_t, -\infty < t < \infty$是平稳随机过程，$EX_t = \mu$。

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X_t dt \overset{L^2}{=} \mu$$

当且仅当

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{2T} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right)(EX_0X_\tau - \mu^2)d\tau = 0$$

遍历性定理成立的条件是很宽的，工程中遇到的大多数平稳随机过程都满足要求。

但是，要验证这些条件并不是一件容易的事。

因此，在实践中通常假定所研究的随机过程具有遍历性。

从这个假定出发，对各种数据进行分析、处理，看所得结论是否与实际问题相符。

如果不符，则另作处理。