数学规划

浙江大学　谈之奕

运筹学概况

运筹学

数学
建模
MATH T

- 运筹学（Operations Research）
  - 运筹学的研究对象是人类对各种资源的运用及筹划活动，它的研究目的在于了解和发现这种运用及筹划活动的基本规律，以便发挥有限资源的最大效益，来达到总体、最优的目标

——摘自《数学大辞典（第二版）》

- 最优化（Optimization）
  - 在一定约束之下如何选取某些因素的值使某项（或某些）指标达到最优的一门学科。运筹学中所处理的问题绝大部分都是最优化问题

——《中国大百科全书（第一版）·数学》

operation *noun* Oxford **Learner's Dictionaries**

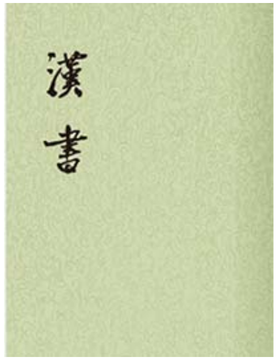
9 ★ *(also* **op***)* [countable, usually plural] military activity

高祖曰："公知其一，未知其二。夫運籌策帷帳之中，决勝於千里之外，吾不如子房。鎮國家，撫百姓，給餽餉，不絕糧道，吾不如蕭何。連百萬之軍，戰必勝，攻必取，吾不如韓信。此三者，皆人傑也，吾能用之，此吾所以取天下也。項羽有一范增而

——《史记•高祖本纪》

不與人利，此其所以失天下也。"上曰："公知其一，未知其二。夫運籌帷幄之中，决勝千里之外，吾不如子房；填國家，撫百姓，給餉餽，不絕

——《汉书•高帝纪》



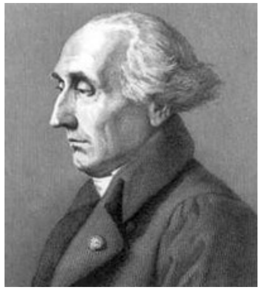
[宋]罗大经《鹤林玉露》甲编卷之三"帷帐"

紹興省試：高祖能用三傑賦。一卷文甚奇，而第四韻押"運籌帷帳"，考官以漢書乃"帷幄"，非"帳"字，不敢取。出院以語周益公，公曰："有司誤，非作賦者誤也，史記正是'帷帳'，漢書乃作'幄'。"

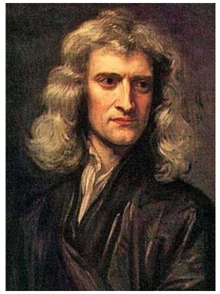
起源

- 运筹学的三个源头
  - 优化理论与算法
    - Fermat定理（1637）
    - Lagrange乘子法（1788）
    - Newton法（1665）
    - Cauchy最速下降法（1847）
  - 著名数学问题
    - 七桥问题（Euler，1736）
    - Steiner树问题（Gauss，1836）
  - 企业管理实践
    - 伯利恒钢铁公司（Taylor，Gantt等，二十世纪初）
    - 哥本哈根电话公司（Erlang，1909）

Pierre de Fermat
(1607-1665)
法国数学家



Joseph-Louis Lagrange
(1736-1813)
法国数学家



Isaac Newton
(1642-1727)
英国科学家

Augustin-Louis Cauchy
(1789-1857)
法国数学家、物理学家

$$f(x)=f(x_k)+(x-x_k)^{\mathrm{T}}\nabla f(x_k)+\frac{1}{2}(x-x_k)^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(x_k)(x-x_k)+o(\|x-x_k\|^2)$$

$$x_{k+1}=x_k-\alpha_k\left(\nabla^2 f(x_k)\right)^{-1}\nabla f(x_k) \qquad x_{k+1}=x_k-\alpha_k\nabla f(x_k)$$

Frederick Winslow Taylor
(1856-1915) 美国管理学家

Taylor FW. *The Principles of Scientific Management*. Harper & Brothers, 1914.

诞生

数学
建模
MATH T

- 运筹学与“二战”
  - 在第二次世界大战期间，英、美等国在运用科技指导作战的实践中认识到优化决策的作用和意义，推动运筹学发展为一个独立学科
    - Blackett领导的多学科团队Blackett Circus对英国空军雷达系统的决策支持
    - Morse参与美国海军反潜作战

Fortun M, Schweber SS, Scientists and the legacy of World War II: The case of operations research, *Social Studies of Science*, 23, 595-642, 1993.

Patrick Maynard Stuart Blackett
（1897－1974）
英国物理学家、运筹学家
1948年诺贝尔物理学奖得主

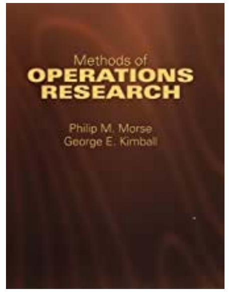
Philip McCord Morse
（1903－1985）
美国物理学家、运筹学家

The Origins of OR informs

The term "operational research" was originally used in Britain during World War II to connote scientific research done to integrate new radar technologies into Royal Air Force tactics. By 1941 the term had

https://www.informs.org/Explore/History-of-O.R.-Excellence/Bibliographies/The-Origins-of-OR

Morse PM, Kimball GE, *Methods of Operations Research*, The MIT Press, 1951



诞生

- 运筹学的商业应用
  - 自二十世纪三十年代起，Kantorovich开始研究计划经济体系中的数学问题，提出了众多实际问题的线性规划模型
  - 二十世纪四十年代，Koopmans在对商船调度的研究中提出了运输问题及其它资源配置问题的线性规划模型

Kantorovich LV. *Mathematical Methods in the Organization and Planning of Production*. Leningrad State University Press, 1939. （中译本：生产组织与计划中的数学，中国科学院力学研究所运筹室译，科学出版社，**1959**）

英译版：***Management Science*, 6, 366-422, 1960**


MATHEMATICAL METHODS OF ORGANIZING AND PLANNING PRODUCTION*†

L. V. KANTOROVICH

Leningrad State University

1939

Contents

FOREWORD

Leonid Vitaliyevich Kantorovich (1912-1986)
苏联数学家、经济学家

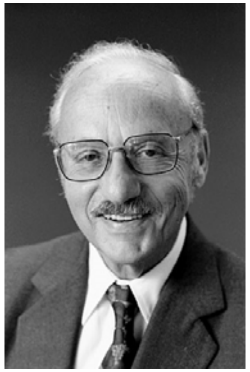
Tjalling Charles Koopmans (1910-1985)
美国经济学家

1975年Nobel经济学奖得主

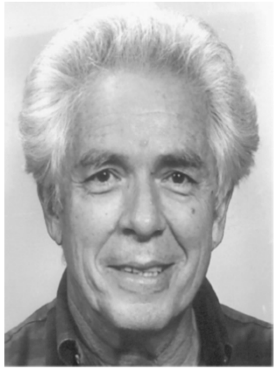
Prize motivation: for their contributions to the theory of optimum allocation of resources

发展

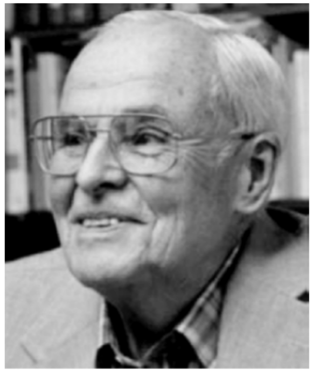
- 运筹学的发展
  - 1947年，Dantzig提出了一般线性规划模型及其求解方法——单纯形法
  - 1951年，Kuhn和Tucker给出了刻划非线性规划最优解性质的Karush–Kuhn–Tucker条件
  - 1954年，Ford和Fulkerson证明了网络流最大流最小割原理
  - 1958年，Gomory给出了求解整数线性规划的割平面法



George Bernard Dantzig (1914-2005)
美国数学家

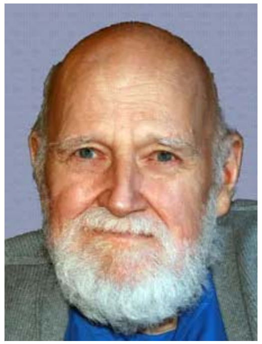


Harold William Kuhn (1925-)
美国数学家



Albert William Tucker (1905－1995)
美国数学家

Ralph Edward Gomory (1929-)
美国数学家



Lester Randolph Ford Jr. (1927-2017)
美国数学家

Delbert Ray Fulkerson (1924-1976)
美国数学家

数学
建模
MATH T

运筹学

- 运筹学的主要分支
  - 数学规划（Mathematical Programming）
    - 线性规划（Linear Programming）
    - 非线性规划（Nonlinear Programming）
    - 整数规划（Integer Programming）
    - 多目标规划（Multiobjective Programming）
  - 组合优化（Combinatorial Optimization）
  - 随机运筹
    - 排队论（Queuing Theory）
    - 库存论（Inventory theory）
    - 可靠性理论（Reliability Theory）
  - 博弈论（Game Theory）与决策理论（Decision Theory）

- 运筹学的研究内容
  - 优化理论
  - 应用问题
  - 实际案例

数据分析 → 数学建模
↓
推广应用 ← 计算求解

- 运筹学的数学基础
  - 连续：微积分、线性代数、计算数学
  - 离散：离散数学（组合数学、图论）、计算复杂性、算法设计与分析
  - 随机：概率论、随机过程

运筹学

数学
建模
MATH T

- 运筹学的学术组织与学术期刊
  - INFORMS（Institute for Operations Research and the Management Sciences）
    - 1995年，美国运筹学学会（ORSA）与美国管理学会（TIMS） 合并成立，国际上最大的运筹学学术组织
  - MOS（Mathematical Optimization Society）
  - IFORS（International Federation of Operational Research Societies）
    - 各国运筹学会的联合组织
  - 中国运筹学会
    - 1991年，由原中国数学会运筹学分会升格为中国科学技术协会下属一级学会

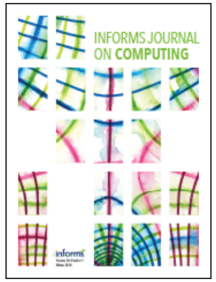
Operations Research

Management Science

Mathematical Programming

Production and Operations Management

Mathematics of Operations Research



INFORMS Journal on Computing

Interfaces

informs
https://www.informs.org/

Mathematical Optimization Society
http://www.mathopt.org/

IFORS
International Federation of Operational Research Societies
http://ifors.org/

ORS 中国运筹学会
OPERATIONS RESEARCH SOCIETY OF CHINA
http://www.orsc.org.cn/

运筹学

数学建模
MATH T

- 优化软件
  - 优化商业软件
    - LINGO
    - Gurobi
    - COPT
    - IBM ILOG CPLEX
  - 综合性数学软件
    - Matlab
    - Mathematica
  - 程序语言与开源软件
    - C系列
    - Python
    - R
  - 优化建模语言
    - GAMS (General Algebraic Modeling System)
    - AMPL (A Mathematical Programming Language)
- 软件与求解器资源与评测平台
  - **Decision Tree for Optimization Software**

（**http://plato.asu.edu/guide.html**）

LINGO **www.lindo.com**

GUROBI OPTIMIZATION **www.gurobi.com**

杉数科技 Cardinal Operations **www.shanshu.ai/copt**

CPLEX Optimizer **www.ibm.com/analytics/cplex-optimizer**

MathWorks **www.mathworks.com**

WOLFRAM **www.wolfram.com**

GAMS **www.gams.com**

AMPL **ampl.com/**

数学规划建模

数学规划

数学
建模
MATH T

- 数学规划
  - 若干个变量在满足一些等式或不等式限制条件下，使目标函数取得最大值或最小值
  - 研究问题的数学性质，构造求解问题的方法，实现求解问题的算法，以及将算法应用于实际问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(\mathbf{x}) \\
s.t. \quad & g_i(\mathbf{x}) \geq 0 \quad i = 1, \cdots, s \\
& h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad j = 1, \cdots, t \\
& \mathbf{x} \in \mathbb{F}^n
\end{aligned}
$$

目标函数

min 极小
max 极大

subject to
约束条件

决策变量取值
范围约束

等式约束

不等式约束

- 可行域

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n \mid g_i(\mathbf{x}) \geq 0, i = 1, \cdots, s, h_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, \cdots, t\}$$

- 可行解 $\mathbf{x} \in S$
- 最优解
  - $\mathbf{x}^* \in S$ ，且对任意 $\mathbf{x} \in S, f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$
- 最优值 $f(\mathbf{x}^*)$

最值问题：求函数 $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x} \in S$ 上的最大（小）值

条件极值：求函数 $f(\mathbf{x})$ 在满足等式约束 $h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \cdots, t$ 下的最大（小）值

数学规划分类

数学建模

MATH T

- 数学规划分类（按函数性质）
  - 线性规划（linear programming）
    - 目标函数为线性函数，约束条件为线性等式或不等式
  - 非线性规划（nonlinear programming）
    - 目标函数为非线性函数，或至少有一个约束条件为非线性等式或不等式
      - 二次规划（Quadratic Programming, QP）：目标函数为二次函数，约束条件为线性等式或不等式
      - 带二次约束的二次规划（Quadratically Constrained Quadratic Program，QCQP）：目标函数为二次函数，约束条件为线性或二次等式或不等式
      - 线性分式规划（linear fractional programming）：目标函数为两个线性函数的商，约束条件为线性等式或不等式

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \\ s.t. \quad & g_i(\mathbf{x}) \ge 0 \quad i=1,\cdots,s \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad j=1,\cdots,t \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ s.t. \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i=1,\cdots,m \\ & x_1,\cdots,x_n \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{cx} \\ s.t. \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{Ax} \\ s.t. \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{\mathbf{cx} + d}{\mathbf{ux} + v} \\ s.t. \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

目前尚未出现可以用来解决所有非线性规划问题的方法。求解非线性规划问题的多数算法只能逐渐逼近于最优解或局部最优解。有时也需寻求最优解的充分必要条件以判断算法得到的解是否为最优解

数学规划分类

数学建模

MATH T

- 数学规划分类（按变量性质）
  - 整数规划（integer programming）：至少有一个决策变量限定取整数值
    - 整数决策变量意义
      - 用于表示只能取离散值的对象的数量
      - 用于表示约束条件之间的逻辑关系或复杂的函数形式
      - 用于表示非数值的优化或可行性问题
    - 特殊整数规划
      - 部分决策变量取整数值的数学规划特称为混合整数规划（Mixed Integer Programming, MIP）
      - 0-1规划：决策变量仅取值0或1的数学规划
- 数学规划分类（按约束条件）
  - 无约束优化（unconstrained optimization）
  - 约束优化（constrained optimization）

整数规划的求解难度显著高于线性规划。优化软件只能解决决策变量数和约束条件数较少的整数规划

The Navy had kept me on as a consultant, so I continued to work on Navy problems through monthly trips to Washington. On one of these trips a group presented a linear programming model of a Navy Task Force. One of the presenters remarked that it would be nice to have whole number answers as 1.3 aircraft carriers, for example, meant nothing.

Gomory RE, Early integer programming. *Operations Research*, 50, 78-81, 2002

数学规划

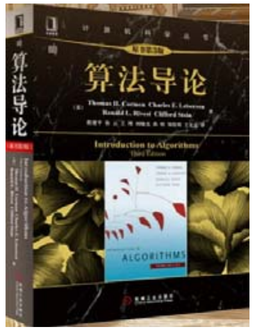
数学
建模
MATH T

- 数学规划建模
  - 将实际问题表示成数学规划的形式，使得可以借助数学规划的算法或软件求解具体的实例，利用数学规划的理论和方法分析解决问题
  - 建立实际问题的数学规划模型一般包含确定决策变量、给出目标函数、列出约束条件等步骤
    - 约束条件为等式或不等式，等式或不等式左侧一般为决策变量的简单函数，不直接出现分段函数、逻辑关系等复杂形式
- 数学规划建模的意义
  - 运用通用方法和数学软件求解具体问题的桥梁
  - 具有定量目标和复杂限制的优化问题的最优解求解方法

贪心法（Greedy）
分治（Divide and Conquer）
回溯（Backtracking）
分支定界（Branch-and-Bound）
动态规划（Dynamic Programming）
局部搜索（Local Search）
启发式算法（Heuristic）

最优性　普适性　复杂性　便捷性

Cormen TH, Leiserson CE, Rivest RL, Stein C. *Introduction to Algorithms*. MIT press, 2009（中译本：算法导论，殷建平等译，机械工业出版社，2012



数学
建模
MATH T

食谱问题

- 食谱问题（diet problem）
  - n 种不同的食品，第 j 种食品的单位售价为 c_j
  - 人体正常生命活动过程需要 m 种基本营养成分，一个人每天至少需要摄入第 i 种营养成分 b_i 个单位
  - 每单位第 j 种食物包含第 i 种营养成分 a_{ij} 个单位
  - 在满足人体营养需求的前提下，寻找最经济的配食方案
- 数学规划建模
  - 决策变量：食谱中第 j 种食物的数量为 x_j 个单位
  - 目标函数：所有食物费用之和 $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$
  - 约束条件：
    - 满足人体营养需求 $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n \ge b_i$，$i = 1, \cdots, m$
    - 摄入食物量非负 $x_j \ge 0$

从第 j 种食物中摄入的
第 i 种营养成分数量



	猪肉	鸡肉	鱼肉	需求
单价	60	30	20	
蛋白质	120	180	160	50
脂肪	300	90	30	90

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i,\ i = 1, \cdots, m$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, \cdots, n$$

食谱问题

- 食谱问题

$$
\begin{aligned}
\min\quad & 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\
s.t.\quad & 120x_1 + 180x_2 + 160x_3 \ge 50 \\
& 300x_1 + 90x_2 + 30x_3 \ge 90 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

MATHEMATICA

```
c = {60, 30, 20};
b = {50, 90};
A = (120 180 160
     300  90  30);
LinearProgramming[c, A, b]
线性规划
{13/48, 7/72, 0}
```

LINGO

```
MODEL:
sets:
    nut/1..2/:b;
    food/1..3/:c,x;
    cost(nut,food):a;
endsets
data:
  c=60 30 20;
  b=50 90;
  a=120 180 160 300 90 30;
enddata
min=@sum(food(j):c(j)*x(j));
@for(nut(i): @sum(food(j):a(i,j)*x(j))>b(i););
END
```

TABLE A. NUTRITIVE VALUES OF COMMON FOODS PER DOLLAR OF EXPENDITURE, AUGUST 15, 1939

Commodity	Unit	Price Aug. 15, 1939 (cents)	Edible Weight per $1.00 (grams)	Calories (1,000)	Protein (grams)	Calcium (grams)	Iron (mg.)	Vitamin A (1,000 I.U.)	Thiamine (mg.)	Ribo-flavin (mg.)	Niacin (mg.)	Ascorbic Acid (mg.)
**1. Wheat Flour (Enriched)	10 lb.	36.0	12,600	44.7	1,411	2.0	365		55.4	33.3	441	
2. Macaroni	1 lb.	14.1	3,217	11.6	418	.7	54		3.2	1.9	68	
3. Wheat Cereal (Enriched)	28 oz.	24.2	3,280	11.8	377	14.4	175		14.4	8.8	114	
4. Corn Flakes	8 oz.	7.1	3,194	11.4	252	.1	56		13.5	2.3	68	
5. Corn Meal	1 lb.	4.6	9,861	36.0	897	1.7	99	30.9	17.4	7.9	106	
6. Hominy Grits	24 oz.	8.5	8,005	28.6	680	.8	80		10.6	1.6	110	
7. Rice	1 lb.	7.5	6,048	21.2	460	.6	41		2.0	4.8	60	
71. Tea	¼ lb.	17.4	652	—	—	—	—			2.3	42	
72. Cocoa	8 oz.	8.6	2,637	8.7	237	3.0	72		2.0	11.9	40	
73. Chocolate	8 oz.	16.2	1,400	8.0	77	1.3	39		.9	3.4	14	
74. Sugar	10 lb.	51.7	8,773	34.9	—	—	—					
75. Corn Sirup	24 oz.	13.7	4,966	14.7	—	.5	74				5	
76. Molasses	18 oz.	13.6	3,752	9.0	—	10.3	244		1.9	7.5	146	
77. Strawberry Preserves	1 lb.	20.5	2,213	6.4	11	.4	7	.2	.2	.4	3	

77种常见食物所含各种营养成分数量（以价值1美元计）

George Joseph Stigler
（1911－1991）
美国经济学家
1982年诺贝尔经济学奖得主

G. J. Stigler, The Cost of Subsistence, *Journal of Farm Economics*, 27, 303-314, 1945

食谱问题

食品种类 (选自77种常用食品)	Stigler所得近似解		最优解	
	年摄入量	费用	年摄入量	费用
小麦粉（Wheat Flour）	370磅	13.33	299磅	10.78
炼乳（Evaporated Milk）	57加仑	3.84	—	—
卷心菜（Cabbage）	111磅	4.11	111磅	4.10
菠菜（Spinach）	23磅	1.85	23磅	1.83
干菜豆（Dried Navy Beans）	285磅	16.80	378磅	22.29
牛肝（Beef Liver）	—	—	2.57磅	0.69
年度总费用（$） (以1939年度价格计算)		39.93		39.69

营养物质	PDA
热量	3000卡
蛋白质	70克
钙	0.8克
铁	12毫克
维生素A	5000IU
维生素B1	1.8毫克
维生素B2	2.7毫克
烟碱酸	18毫克
维生素C	75毫克

1943年美国研究院发布的从事中等强度活动，体重为154磅的成年男性9种营养成分的每天推荐摄入量（PDA）

运输问题

数学建模 MATH T

- 运输问题（Transportation Problem）
  - 某货物有 m 个产地，产地 i 的产量为 $a_i, i=1,\cdots,m$，n 个销地，销地 j 的销量为 $b_j,\ j=1,\cdots,n$
    - 产销平衡，$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$
  - 由产地 i 到销地 j 的运输单价为 c_{ij} ，$i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n$
  - 如何调运货物从产地到销地，可使总运输费用最小

	产量	北	上	广
销量	运价	**20**	**30**	**50**
杭	**40**	**10**	**1**	**12**
蓉	**60**	**13**	**15**	**10**

- 运输问题的数学规划模型
  - 决策变量 x_{ij}： 产地 i 调运到销地 j 的货物数量
  - 约束条件
    - 每个产地的货物全部运出 $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i,\ i=1,\ \cdots,m$
    - 每个销地的货物全部运入 $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j,\ j=1,\cdots,n$
    - 调运货物量非负 $x_{ij} \ge 0$

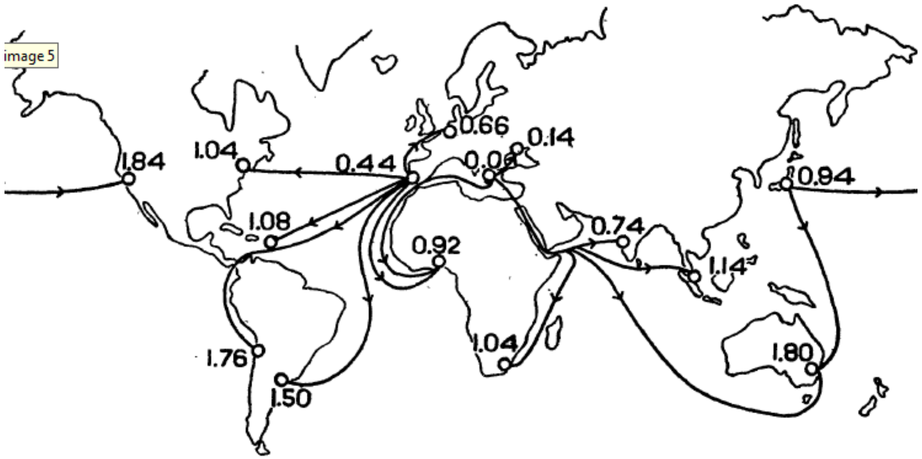
$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i,\ i=1,\ \cdots,m \\ & \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j,\ j=1,\cdots,n \\ & x_{ij} \ge 0,\ i=1,\ \cdots,m,\ j=1,\cdots,n \end{aligned}$$

$$\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n}, x_{21}, \cdots, x_{2n}, \cdots, x_{m1}, \cdots, x_{mn})^T$$

运输问题

数学
建模
MATH T



以净输入港口为产地，净输出港口为销地的运输问题的最优解，给出了最优空船调运路线

1925年全球主要港口到港离港货物量(百万吨)

Koopmans TC. Optimum utilization of the transportation system. *Econometrica*, 17(S), 136-146, 1949.

	到港	离岗	净值
纽约（**New York**）	**23.5**	**32.7**	**-9.2**
旧金山（**San Francisco**）	**7.2**	**9.7**	**-2.5**
圣托马斯（**St. Thomas**）	**10.3**	**11.5**	**-1.2**
布宜诺斯艾利斯(**Buenos Aires**）	**7.0**	**9.6**	**-2.6**
安托法加斯塔（**Antofagasta**）	**1.4**	**4.6**	**-3.2**
鹿特丹（**Rotterdam**）	**126.4**	**130.5**	**-4.1**
里斯本（**Lisbon**）	**37.5**	**17.0**	**20.5**
雅典（**Athens**）	**28.3**	**14.4**	**13.9**
敖德萨（**Odessa**）	**0.5**	**4.7**	**-4.2**
拉各斯（**Lagos**）	**2.0**	**2.4**	**-0.4**
德班（**Durban**）	**2.1**	**4.3**	**-2.2**
孟买（**Bombay**）	**5.0**	**8.9**	**-3.9**
新加坡（**Singapore**）	**3.6**	**6.8**	**-3.2**
横滨（**Yokohama**）	**9.2**	**3.0**	**6.2**
悉尼（**Sydney**）	**2.8**	**6.7**	**-3.9**

数独

- 数独（Sudoku）
  - 81个方格排列成 9 行 9 列的方块，该方块可划分成 9 个小方块，每个小方块由相邻 3 行 3 列共 9 个方格构成
  - 在每个方格中填入1,2,3,4,5,6,7,8,9共 9 个数字之一，使得每行、每列、每个小方块中填入的数字各不相同
- 数学规划建模
  - 决策变量：第 i 行第 j 列所填的数字
    - $x_{ij}=k$ ：第 i 行第 j 列所填的数字为 k

如何表示 $x_{11},x_{12},x_{13},x_{14},x_{15},x_{16},x_{17},x_{18},x_{19}$ 各不相同 $\cancel{x_{11}\neq x_{13}}$

	4		2	8				6
		6	9					5
7			5				8	
			6			4		
	9				8		5	
		2						
	8				2			1
2					9	3		
5				7	3		4	

1895 *La France*
carré magique diabolique
（evil magic square）

1979 Howard Garns
Number Place

1984 Nikoli Co., Ltd.
数字は独身に限る
（Sūji wa dokushin ni kagiru）
（the digits must be single）

数独

- 数学规划建模
  - 决策变量：$x_{ijk}=\begin{cases}1 & 第\,i\,行第\,j\,列所填的数字为\,k \\ 0 & 其他\end{cases}$
  - 约束条件
    - 每个格子中填入的数字是唯一的　$\cancel{x_{111}=1,\ x_{112}=1}$
      - 对任意 i,j，$x_{ij1},x_{ij2},x_{ij3},x_{ij4},x_{ij5},x_{ij6},x_{ij7},x_{ij8},x_{ij9}$ 中恰有一个取值1
      - $\sum_{k=1}^{9} x_{ijk}=1,\ i,j=1,\cdots,9$
    - 每一行填入的数字各不相同
      - 对任意$k,k=1,\cdots,9$，第 i 行各列中只有一个数字为 k
      - 对任意$k,k=1,\cdots,9$，$x_{i1k},\cdots,x_{i9k}$ 中恰有1个取值1
      - $\sum_{j=1}^{9} x_{ijk}=1,\ i,k=1,\cdots,9$

第4行1,2列中所填数之和大于5　$\sum_{k=1}^{9} kx_{41k}+\sum_{k=1}^{9} kx_{42k}>5$

$x_{124}=1$

	4		2	8				6
		6	9					5
7			5				8	
			6			4		
	9				8		5	
		2						
	8				2			1
2					9	3		
5				7	3		4	

数学
建模
MATH T

数独

- 数学规划建模
  - $s.t.\quad \sum_{k=1}^{9} x_{ijk}=1,\ i,j=1,\cdots,9$ 每个格子中填入的数字唯一

数学规划可以没有目标函数

$$\sum_{j=1}^{9} x_{ijk}=1,\quad i,k=1,\cdots,9$$ 每行各列中的数各不相同

$$\sum_{i=1}^{9} x_{ijk}=1,\quad j,k=1,\cdots,9$$ 每列各行中的数各不相同

$$\sum_{i=3s+1}^{3s+3}\sum_{j=3t+1}^{3t+3} x_{ijk}=1,\quad s,t=0,1,2,k=1,\cdots,9$$ 每个小方块中的数各不相同

$$x_{ijk}=1,\quad (i,j,k)\in P$$ P 由预置的数字及其位置确定，如 $x_{124}=1$ ，$x_{142}=1$等

$$x_{ijk}=0,1,\ i,j,k=1,\cdots,9$$

Solver Status
Model PILP
State Global Opt
Extended Solver Status
Solver B-and-B

Variables
otal: 704
onlinear: 0
ıtegers: 704
Constraints
otal: 325
onlinear: 0

Generator Memory Used (K)
148
Elapsed Runtime (hh:mm:ss)
00:00:00

1	4	5	2	8	7	9	3	6
8	3	6	9	4	1	7	2	5
7	2	9	5	3	6	1	8	4
3	1	8	6	2	5	4	9	7
4	9	7	3	1	8	6	5	2
6	5	2	7	9	4	8	1	3
9	8	3	4	6	2	5	7	1
2	7	4	1	5	9	3	6	8
5	6	1	8	7	3	2	4	9

下料问题

数学
建模
MATH T

长度	需量
7米	200
5米	150
4米	100
15米	?

- 下料问题（Cutting-Stock Problem）
  - 现有 W 米长的钢管若干。生产某产品需长为 w_i 米的短管 b_i 根，$i=1,\cdots,k$ 。如何截取方能使材料最省
- 下料问题的数学规划模型
  - 决策变量
    - x_{ji}： 第 j 根钢管截取的第 i 种短管数量

      $i=1,\cdots,k,\ j=1,\cdots,n$ $\left(n=\sum_{i=1}^{k} b_i\right)$

      $$y_j=\begin{cases}1 & \text{第 } j \text{ 根钢管被截取,}\\ 0 & \text{其他,}\end{cases}\quad j=1,\cdots,n$$
  - 约束条件
    - $\sum_{i=1}^{k} x_{ji}w_i \le W,\ j=1,\cdots,n \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} x_{ji}w_i \le Wy_j$
    - $\sum_{j=1}^{n} x_{ji} \ge b_i, i=1,\cdots,k$
  - 目标函数 $\min \cancel{n}$ $\min \sum_{j=1}^{n} y_j$

$\exists i, x_{ji}>0 \Rightarrow y_j=1 \longrightarrow \sum_{i=1}^{k} x_{ji}>0 \Rightarrow y_j=1$

$\sum_{i=1}^{k} x_{ji} \le \cancel{y_j}$

$y_j=1 \Rightarrow \exists i, x_{ji}>0$ 给定目标下，最优解自动满足

钢管之间没有区别，重复变量过多

下料问题

数学
建模
MATH T

- 下料问题的数学规划模型
  - 决策变量 z_i： 按第 i 种方式截取的原料的数量，$i=1,\cdots,7$
- 装箱问题（bin-packing problem）
  - 给定一系列大小已知的物品和若干个容量相同的箱子，如何将物品放入箱子中，使所用箱子数尽可能少

京东物流科技
创新挑战赛（2021）
开发者赛道-初赛A榜
三维装箱算法
jdata.jd.com

长度	需量	可能截取方案						
7米	200	**2**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
5米	150	**0**	**1**	**0**	**3**	**2**	**1**	**0**
4米	100	**0**	**0**	**2**	**0**	**1**	**2**	**3**
15米	?	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**

$$
\begin{aligned}
\min\quad & z_1+z_2+z_3+z_4+z_5+z_6+z_7 \\
s.t.\quad & 2z_1+z_2+z_3 \ge 200 \\
& z_2+3z_4+2z_5+z_6 \ge 150 \\
& 2z_3+z_5+2z_6+3z_7 \ge 100 \\
& z_i \ge 0 \text{ 且 } z_i \text{ 为整数}, \quad i=1,2,\cdots,7.
\end{aligned}
$$

若有多种钢管或短管类型过多，可行方案数量庞大，得到所有可行方案也是困难的

选址问题

数学
建模
MATH T

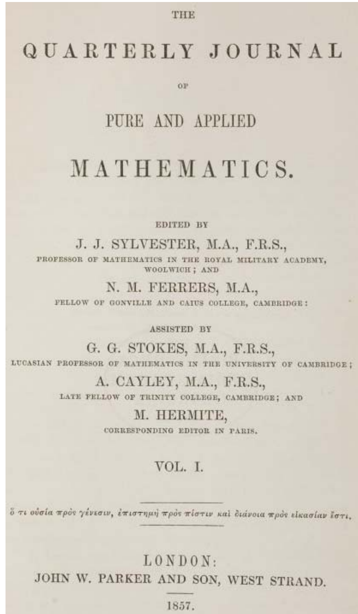
- 选址问题（最小圆覆盖）
  - 平面上 n 个点，第 j 个点的坐标为 (x_j, y_j)
  - 求一个面积最小的圆，使这 n 个点均为该圆内的点
- 数学规划
  - 带二次约束的二次规划模型
    - 决策变量：圆心 (x_0, y_0)，半径 r
    - 目标函数：r^2
    - 约束条件：每个点到圆心的距离不超过半径

$$\min \ r^2$$
$$s.t.\quad (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 \le r^2, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$x_i^2 - 2x_0x_i + y_i^2 - 2y_0y_i \le \underline{r^2 - x_0^2 - y_0^2}$$

  - 二次规划模型
    - 用决策变量 $\lambda = r^2 - (x_0^2 + y_0^2)$ 替代 r

$$\min \ \lambda + x_0^2 + y_0^2$$
$$s.t.\quad \lambda + 2x_0x_i + 2y_0y_i \ge x_i^2 + y_i^2, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$



THE

QUARTERLY JOURNAL

OF

PURE AND APPLIED

MATHEMATICS.

EDITED BY

J. J. SYLVESTER, M.A., F.R.S.,

PROFESSOR OF MATHEMATICS IN THE ROYAL MILITARY ACADEMY, WOOLWICH; AND

N. M. FERRERS, M.A.,

FELLOW OF GONVILLE AND CAIUS COLLEGE, CAMBRIDGE:

ASSISTED BY

G. G. STOKES, M.A., F.R.S.,

LUCASIAN PROFESSOR OF MATHEMATICS IN THE UNIVERSITY OF CAMBRIDGE;

A. CAYLEY, M.A., F.R.S.,

LATE FELLOW OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE; AND

M. HERMITE,

CORRESPONDING EDITOR IN PARIS.

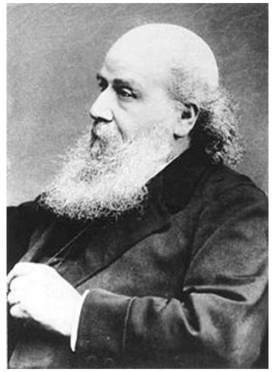
VOL. I.

ὅ τι οὐσία πρὸς γένεσιν, ἐπιστημὴ πρὸς πίστιν καὶ διάνοια πρὸς εἰκασίαν ἐστι,

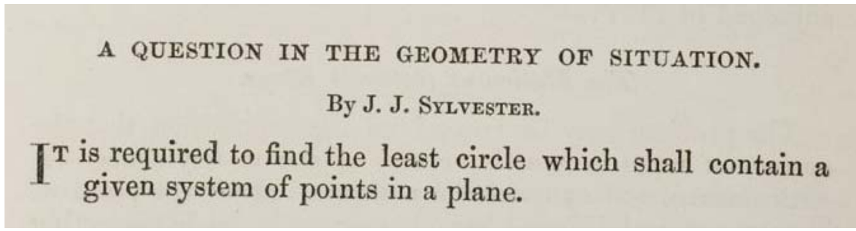
LONDON:

JOHN W. PARKER AND SON, WEST STRAND.

1857.



James Joseph Sylvester (1814-1897)
英国数学家



A QUESTION IN THE GEOMETRY OF SITUATION.

By J. J. SYLVESTER.

IT is required to find the least circle which shall contain a given system of points in a plane.

数学规划

数学
建模
MATH T

- 数学规划建模的基本要求
  - 数学规划模型是问题要求和限制的真实反映
    - 数学规划模型的最优解（可行解）与问题最优解（可行解）是否一致或对应
    - 是否遗漏问题的隐含约束、决策变量的必然要求、多组决策变量间的联系等约束条件
  - 数学规划模型应符合数学规划的内容规范和形式要求
    - 要素完整、变量指标运用准确。逻辑关系、集合运算等一般不在数学规划中出现
  - 问题可能存在多个数学规划描述，需根据实际情况进行选择和不断完善
    - 复杂目标函数和约束条件的简化，0-1变量的灵活运用
    - 可行域约简、数学规划的重构、分解与松弛
- 数学规划建模的适用范围
  - 具有简单最优算法或可转化为已知多项式时间可解问题，不需运用数学规划求解
  - 最优解不具必要性，或求解时间要求高于精度要求等问题，不宜盲目运用数学规划求解
  - 建立数学规划模型困难，因实例规模或问题结构等原因使求解不具现实可能性的问题，不能直接运用数学规划求解

思考题

数学建模
MATH T

- 时间分配问题
  - 有 T 天时间可用于安排复习 n 门课程，每天只能复习一门课程，每门课程至少复习一天
  - 用 t 天时间复习第 j 门课程可使该门课程提高 p_{jt} 分
  - 如何制定复习计划可使所有课程提高的总分尽可能大

课程	1天	2天	3天	4天
E	3	5	6	7
C	5	5	6	9
M	2	4	7	8
P	6	7	9	9

- 数学规划模型
  - 决策变量
    - x_j：第 j 门课程复习的天数

$$x_{jt}=\begin{cases}1 & \text{第 } j \text{门课程复习} t \text{天,}\\ 0 & \text{其他,}\end{cases} \quad j=1,\cdots,n,t=1,\cdots,T$$

  - 约束条件
    - $\sum_{j=1}^{n} x_j \le T$

$$\sum_{t=1}^{n} x_{jt}=1$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} t x_{jt} \le T$$

$$\sum_{t=1}^{n} t_j \le T, \cancel{\text{其中}} x_{jt_j}=1$$

  - 目标函数
    - $\min \sum_{j=1}^{n} \cancel{p_{j,x_j}}$

$$\min \sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} p_{jt} x_{jt}$$

数学规划案例

投资组合

数学
建模
MATH T

- 投资组合问题
  - 证券市场有若干种股票，如何投资可使得收益最大而风险最小　　如何量化风险
    - 不确定性是金融市场的本质特征之一。在金融市场上，投资者为获得更多的收益愿意承担更大的风险
  - 金融资产的收益率是一个随机变量
    - 收益率的方差或标准差表现为风险
- 投资组合的数学规划模型
  - 金融市场有 n 种资产，资产 j 的收益率为随机变量 r_j
    - 记 $\mathbf{r}=(r_1,r_2,\cdots,r_n)^{\mathrm{T}}$，其期望向量为 $\boldsymbol{\mu}$，协方差矩阵为 $\mathbf{V}$
  - 设投资于资产 j 的份额为 x_j
    - 记 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，则 $\mathrm{E}(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{r})=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}$ ，$\mathrm{Var}(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{r})=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x}$
    - 求 $\mathbf{x}$ 使得收益期望 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}$ 最大，风险 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x}$ 最小　　双目标优化

Markowitz H, Portfolio Selection, *The Journal of Finance*, 7, 77-91, 1952

Harry Markowitz
(1927-　)
美国经济学家
1990年Nobel经济学
奖得主

投资组合

数学
建模
MATH T

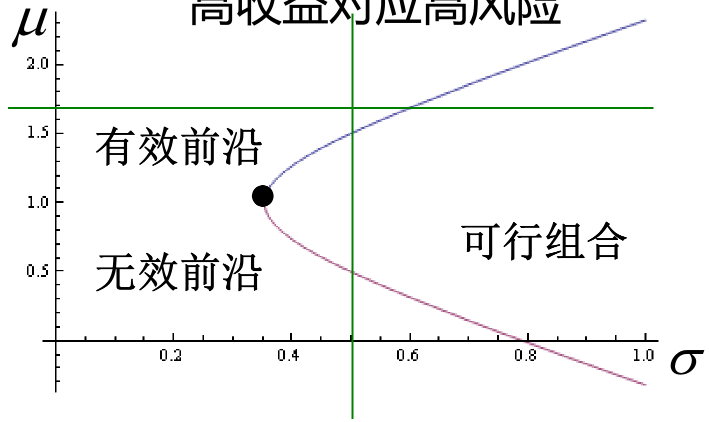
- 投资组合的数学规划模型
  - 对任意参数 μ，选择投资组合 $\mathbf{x}^*(\mu)$，在收益达到给定值 μ 的前提下，组合的风险最小

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu} = \mu \\ & \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{e} = 1 \end{aligned}$$

主要目标法

只含等式约束的二次规划

高收益对应高风险



  - 对应于 μ 的极小风险组合
    - $\mathbf{x}^*(\mu) = \dfrac{1}{ac-b^2}\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} \quad \mathbf{e})\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu \\ 1 \end{pmatrix}$

$$a = \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}, \quad b = \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}, \quad c = \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}$$

  - 最优组合下风险与收益的关系
    - $\sigma^*(\mu)^2 = \mathbf{x}^*(\mu)^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x}^*(\mu) = \dfrac{a-2b\mu+c\mu^2}{ac-b^2}$

$$\frac{\sigma^*(\mu)^2}{\frac{1}{c}} - \frac{\left(\mu - \frac{b}{c}\right)^2}{\frac{ac-b^2}{c^2}} = 1$$

在 (σ,μ) 平面上，极小风险组合的收益 μ 与风险 $\sigma^*(\mu)$ 的轨迹为一条双曲线的右支

赛程编制

数学建模 MATH T

- 联赛赛程编制
  - Symmetry and separation
  - Breaks
  - The carry-over effect

For the season 1994–1995, 16 of the 23 compact schedules were based on a canonical 1-factorization. By the season 2008–2009, this number decreased to 13. The canonical schedule was abandoned in the Czech Republic, Poland, Ireland, Belgium, Germany, and Norway. We know that the introduction of mathematical programming played an important role in this change for the latter three competitions. Indeed, for schedulers that rely on a manual approach, the canonical schedule forms a familiar reference

Goossens DR, Spieksma FCR, Soccer schedules in Europe: An overview, *Journal of Scheduling*, 15:641–651, 2012.

	n	Format	Symmetry	♯ Breaks		Canonical	
Austria	10	4RR	English + English	52	(1,63)	yes	(yes)
Belgium	18	2RR	Mirror	48	(1,50)	no	(yes)
Cyprus	14	2RR	Mirror	36	(1,50)	yes	(yes)
Czech Rep.	16	2RR	French	32	(1,14)	no	(yes)
England	20	2RR	None	130	(3,61)	no	(no)
France	20	2RR	French	40	(1,11)	no	(no)
Germany	18	2RR	Mirror	48	(1,50)	no	(yes)
Hungary	16	2RR	Mirror	42	(1,50)	yes	(yes)
Ireland	12	3RR	Mirror	54	(1,80)	no	(yes)
Italy	20	2RR	Mirror	66	(1,83)	no	(no)
Luxembourg	14	2RR	French	32	(1,33)	yes	(yes)
Malta	10	2RR	Mirror	24	(1,50)	yes	(yes)
Netherlands	18	2RR	None	116	(3,63)	no	(no)
N. Ireland	12	3RR	Mirror	70	(2,33)	yes	(no)
Norway	14	2RR	None	28	(1,17)	no	(yes)
Poland	16	2RR	Mirror	56	(2,00)	no	(yes)
Portugal	16	2RR	Mirror	42	(1,50)	yes	(yes)
Romania	18	2RR	Mirror	48	(1,50)	yes	(yes)
Russia	16	2RR	French	32	(1,14)	yes	(no)
Scotland	12	3RR	None	84	(2,80)	no	(no)
Slovakia	12	3RR	Mirror	50	(1,67)	yes	(yes)
Spain	20	2RR	Mirror	54	(1,50)	yes	(yes)
Switzerland	10	4RR	Mirror + Inverted	44	(1,38)	yes	(no)
Turkey	18	2RR	Mirror	48	(1,50)	yes	(yes)
Wales	18	2RR	None	94	(2,94)	no	(no)

赛程编制

数学建模
MATH T

- 比利时足球甲级联赛
  - In the traditional approach, which Belgian soccer used for decades until the 2005–2006 season, a schedule was constructed manually, under the supervision of the calendar committee’s secretary
  - After Demasure illustrated in a master’s thesis that there was ample room for schedule improvement for the then ongoing 2005–2006 season, the KBVB invited us to work on the schedule for the new season
  - As we were gathering wishes from all involved parties, we realized that we could not satisfy all of them because they conflicted. After some deliberations, the calendar committee agreed to attach a priority level to each of the wishes
  - We constructed a mixed-integer programming model. … We solved the model and developed a corresponding schedule with a minimal sum of incurred penalties within a few hours using ILOG CPLEX 8.1 on a Pentium IV 2 GHz computer

Goossens DR, Spieksma FCR, Scheduling the Belgian Soccer League, *Interfaces*, 39, 109–118, 2009.

1	2	3	4	5	6	7
1-3	2-4	1-7	2-8	1-11	2-12	1-15
4-17	3-18	3-5	4-6	3-9	4-10	3-13
6-15	5-1	6-2	5-18	5-7	6-8	5-11
8-13	7-16	8-17	7-3	8-4	7-18	7-9
10-11	9-14	10-15	9-1	10-2	9-5	10-6
12-9	11-12	12-13	11-16	12-17	11-3	12-4
14-7	13-10	14-11	13-14	14-15	13-1	14-2
16-5	15-8	16-9	15-12	16-13	15-16	16-17
18-2	17-6	18-4	17-10	18-6	17-14	18-8

Priority	Level 1	Level 2	Level 3	Level 4	Level 5
Importance	15,000	500	20	4	1

Katholieke Universiteit Leuven

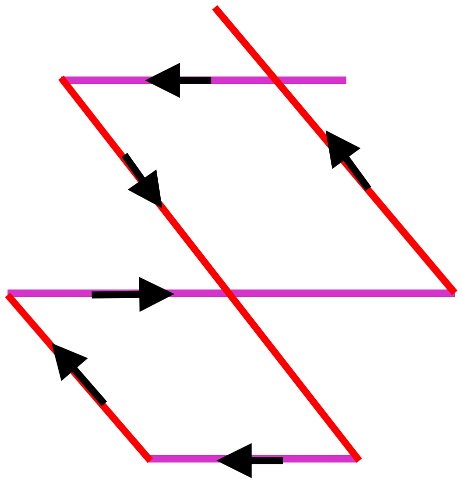
Royal Belgian Football Association（RBFA）（Koninklijke Belgische Voetbalbond， KBVB）

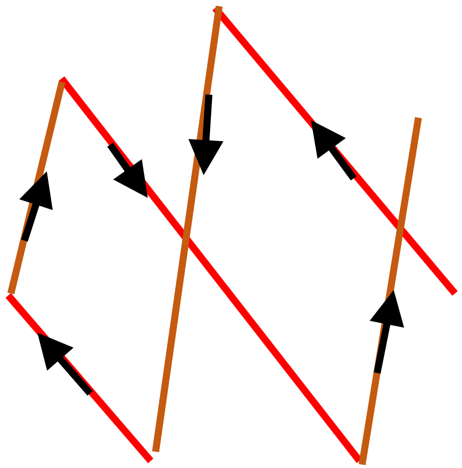
数学
建模
MATH T

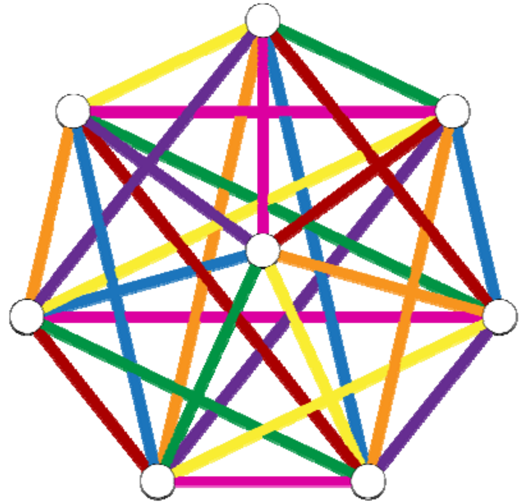
赛程编制

- 图的因子分解

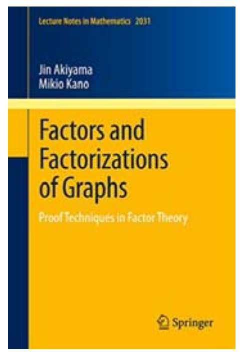
	1	2	3	4	5	6	7
1	+8	+3	- 5	+7	- 2	+4	- 6
2	- 7	- 8	+4	- 6	+1	- 3	+5
3	+6	- 1	+8	+5	- 7	+2	- 4
4	- 5	+7	- 2	- 8	+6	- 1	+3
5	+4	- 6	+1	- 3	+8	+5	- 2
6	- 3	+5	- 7	+2	- 4	- 8	+1
7	+2	- 4	+6	- 1	+3	- 5	+8
8	- 1	+2	- 3	+4	- 5	+6	- 7

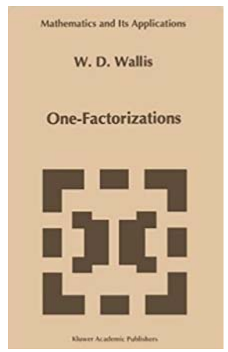






K_8 的1- 因子分解





Akiyama J, Kano M, *Factors and Factorizations of Graphs: Proof Techniques in Factor Theory*, Springer, 2011
Wallis WD, *One-Factorizations*, Springer, 1997

赛程编制

数学
建模
MATH T

- Break数
  - 对 n (偶数）支队伍的赛程，用形如 HAH…HA，长度为 $n-1$（奇数）的字符串表示每支队伍的主客场安排，称为模式（pattern）
    - 任何两支队伍的模式互不相同
  - n 支队伍的单循环赛程，全程所有队伍总break数至少为 $n-2$
    - 只有HAHA…HAH 和 AHAH…AHA 两种模式没有break，其它模式的break数至少为 1
    - 总break数至少为 $n-2$
  - n 支队伍的镜像双循环赛程，全程所有队伍总break数至少为 $3n-6$
    - 若半程没有break，则全程也没有break，这样的队伍至多有两支
    - 若半程只有一个break，由于模式字符串长度为奇数，在前后半程之间有一个break
    - 若半程有至少两个break，全程break数至少为 4
    - 总break数至少为 $3(n-2)=3n-6$

赛程编制问题

数学建模 *MATH T*

- 世界杯南美赛区预选赛赛程编制
  - 10个成员国，4.5个决赛阶段名额
  - 双循环主客场制，9阶段18轮。两轮为一个阶段，每阶段跨时一周，不同阶段相隔一月或数月

2002-2014世界杯南美赛区预选赛赛程（镜像）

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ARG	CHI	VEN	BOL	COL	ECU	BRA	PAR	PER	URU
BOL	URU	COL	ARG	VEN	CHI	PAR	ECU	BRA	PER
BRA	COL	ECU	PER	URU	PAR	ARG	CHI	BOL	VEN
CHI	ARG	PER	URU	PAR	BOL	VEN	BRA	COL	ECU
COL	BRA	BOL	VEN	ARG	PER	ECU	URU	CHI	PAR
ECU	VEN	BRA	PAR	PER	ARG	COL	BOL	URU	CHI
PAR	PER	URU	ECU	CHI	BRA	BOL	ARG	VEN	COL
PER	PAR	CHI	BRA	ECU	COL	URU	VEN	ARG	BOL
URU	BOL	PAR	CHI	BRA	VEN	PER	COL	ECU	ARG
VEN	ECU	ARG	COL	BOL	URU	CHI	PER	PAR	BRA

	主主，客客	主客	客主
ARG	0	9	0
BOL	4	2	3
BRA	0	0	9
CHI	2	1	6
COL	2	6	1
ECU	2	4	3
PAR	2	3	4
PER	2	6	1
URU	2	4	3
VEN	2	1	6

	Argentina 阿根廷
	Bolivia 玻利维亚
	Brazil 巴西
	Chile 智利
	Colombia 哥伦比亚
	Ecuador 厄瓜多尔
	Paraguay 巴拉圭
	Peru 秘鲁
	Uruguay 乌拉圭
	Venezuela 委内瑞拉

赛程编制

- 世界杯南美赛区预选赛赛程编制
  - 关于原赛制的讨论
    - 存在同一阶段内两场比赛均为主场或客场的情况，且各队出现上述情况的次数不均衡
    - 同一阶段内各队先主后客和先客后主的次数不均衡
    - 赛程编制原理不透明，关键比赛存在争议
  - 2018世界杯预选赛新举措
    - 各成员国提交候选方案，南美洲足联投票决定最终赛程模板
      - 赛程模板中各队用编号代替，抽签决定编号与球队对应关系
    - Durán团队为智利足联编制赛程已逾十年，他们设计的方案为智利足联所采纳，并最终在投票中胜出

Federación de Fútbol de Chile

Guillermo Durán
Professor of
Department of Mathematics and Calculus Institute
Faculty of Exact and Natural Sciences
University of Buenos Aires

Durán G, Guajardo M, Sauré D. Scheduling the South American Qualifiers to the 2018 FIFA World Cup by integer programming. *European Journal of Operational Research*, 262, 1109-1115, 2017.

赛程编制

数学
建模
MATH T

- 赛制与Break数
  - 根据世界杯南美赛区预选赛的特点，不必考虑连续两场比赛之间的break，只需考虑同一阶段两场比赛之间的double-round break
  - n (偶数）支队的镜像赛程的double-round break数至少为 $2n-4$
    - 若半程没有break，则全程也没有break，这样的队伍至多有两支
    - 若半程至少有1个break，全程至少有2个double-round break
      - 前后半程之间若有break，必为double-round
      - 若前半程的break不为double-round，后半程的break必为double-round
    - 总break数至少为 $2(n-2)=2n-4$

	1	2	3	…	9	10	11	12	…	17	18	
镜像（mirror）	1	2	3	…	9	1	2	3	…	8	9	意、德
法制（French）	1	2	3	…	9	2	3	4	…	9	1	法、俄
英制（English）	1	2	3	…	9	9	1	2	…	7	8	奥
逆向（Inverted）	1	2	3	…	9	9	8	7	…	2	1	瑞士

赛程编制

数学
建模
MATH T

- 数学规划
  - 决策变量

$$x_{ijk}=\begin{cases}1 & 第k轮队i在主场与队j比赛,\\ 0 & 其他,\end{cases}\quad i,j=1,\cdots,10,k=1,\cdots,18$$

  - 约束条件（部分）
    - 每轮各队恰有一场比赛 $\sum_{i=1}^{10}\left(x_{ijk}+x_{jik}\right)=1,\ \ j=1,\cdots,10,k=1,\cdots,18$
    - 任意两队在前后半程各交手一次 $\sum_{k=1}^{18}x_{ijk}=1,\quad i,j=1,\cdots,10,i\neq j$
    - 任意两队之间的两场比赛中每队均有一个主场

$$\sum_{k=1}^{9}\left(x_{ijk}+x_{jik}\right)=1,\ i,j=1,\cdots,10\qquad \sum_{k=10}^{18}\left(x_{ijk}+x_{jik}\right)=1,\ i,j=1,\cdots,10$$

    - 任一队不连续与种子队（用 I_s 表示）对阵

$$\sum_{j\in I_s}\left(x_{ijk}+x_{jik}+x_{i,j,k+1}+x_{j,i,k+1}\right)\leq 1,\ i\in I\setminus I_s,k=1,\cdots,17$$

		1
1	ARG	CHI
2	BOL	URU
3	BRA	COL
4	CHI	ARG
5	COL	BRA
6	ECU	VEN
7	PAR	PER
8	PER	PAR
9	URU	BOL
10	VEN	ECU

$$x_{291}=x_{351}=x_{411}=x_{781}=x_{10,6,1}=1,$$

$$x_{ij1}=0,(i,j)\notin\begin{Bmatrix}(2,9),(3,5),(4,1),\\(7,8),(10,6)\end{Bmatrix}$$

赛程编制

数学
建模
MATH T

- 数学规划
  - 每支队伍各阶段先主后客（先客后主）的次数尽可能均衡
    - 定义辅助变量

$$y_{il}=\begin{cases}1 & 第\,l\,阶段队\,i\,两场比赛为先主后客\\ 0 & 其他\end{cases} \qquad i=1,\cdots,10,\ l=1,\cdots,9$$

    - 两组变量之间的关系 $y_{il}=1 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{10} x_{i,j,2l-1}=1 且 \sum_{j=1}^{10} x_{j,i,2l}=1$
      - $$\begin{cases}\sum_{j=1}^{10}\left(x_{i,j,2l-1}+x_{j,i,2l}\right)\le 1+y_{il}\\ y_{il}\le \sum_{j=1}^{10} x_{i,j,2l-1} \qquad i=1,\cdots,10, l=1,\cdots,9\\ y_{il}\le \sum_{j=1}^{10} x_{j,i,2l}\end{cases}$$
    - 每支队伍先主后客的总次数尽可能均衡 $4\le \sum_{l=1}^{9} y_{il}\le 5,\quad i=1,\cdots,10$

$$y_{ij}=1 \Leftrightarrow z_i=z_j=1$$

$$y_{ij}=z_i z_j$$

$$\begin{cases} y_{ij}\le x_i\\ y_{ij}\le x_j\\ y_{ij}+1\ge x_i+x_j\end{cases}$$

赛程编制

数学建模 MATH T

- 数学规划
  - 各支队伍各阶段连续客场的次数尽可能少
    - 法制双循环赛制 $x_{i,j,1}=x_{j,i,18}, x_{i,j,k}=x_{j,i,k+8}, k=2,\cdots,9, i,j=1,\cdots,10$
    - 定义辅助变量

$$w_{il}=\begin{cases}1 & \text{第}\,l\,\text{阶段队}\,i\,\text{两场比赛均为客场} \\ 0 & \text{其他}\end{cases} \qquad i=1,\cdots,10, l=1,\cdots,9$$

    - 两组变量之间的关系 $w_{il}=1 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{10} x_{j,i,2l-1}=1$ 且 $\sum_{j=1}^{10} x_{j,i,2l}=1$
    - 目标函数 $\min \sum_{i=1}^{10}\sum_{l=1}^{9} w_{il}$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{10}\left(x_{j,i,2l-1}+x_{j,i,2l}\right)\le 1+w_{il}, & i=1,\cdots,10, l=1,\cdots,9 \\ w_{il}\le \sum_{j=1}^{10} x_{j,i,2l-1}, & i=1,\cdots,10, l=1,\cdots,9 \\ w_{il}\le \sum_{j=1}^{10} x_{j,i,2l}, & i=1,\cdots,10, l=1,\cdots,9\end{cases}$$

赛程编制

数学
建模
MATH T

- 赛程优化结果
  - 2018年预选赛赛程

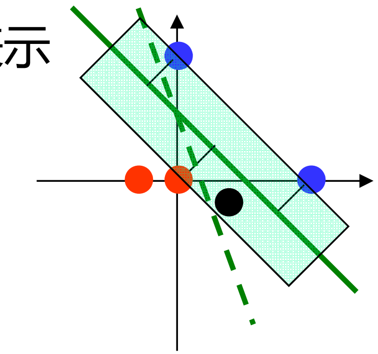
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ARG	ECU	PAR	BRA	COL	CHI	BOL	URU	VEN	PER
BOL	URU	ECU	VEN	PAR	COL	ARG	PER	CHI	BRA
BRA	CHI	VEN	ARG	PER	URU	PAR	ECU	COL	BOL
CHI	BRA	PER	COL	URU	ARG	VEN	PAR	BOL	ECU
COL	PER	URU	CHI	ARG	BOL	ECU	VEN	BRA	PAR
ECU	ARG	BOL	URU	VEN	PAR	COL	BRA	PER	CHI
PAR	VEN	ARG	PER	BOL	ECU	BRA	CHI	URU	COL
PER	COL	CHI	PAR	BRA	VEN	URU	BOL	ECU	ARG
URU	BOL	COL	ECU	CHI	BRA	PER	ARG	PAR	VEN
VEN	PAR	BRA	BOL	ECU	PER	CHI	COL	ARG	URU

	2002-2014			2018		
	主主，客客	主客	客主	主主，客客	主客	客主
ARG	0	9	0	0	5	4
BOL	4	2	3	0	5	4
BRA	0	0	9	0	4	5
CHI	2	1	6	0	5	4
COL	2	6	1	0	5	4
ECU	2	4	3	0	4	5
PAR	2	3	4	0	4	5
PER	2	6	1	0	4	5
URU	2	4	3	0	4	5
VEN	2	1	6	0	5	4

支持向量机

数学
建模
MATH T

- 支持向量机（Support Vector Machine）
  - 拟将一数据集 S 分为 C_1, C_2 两类。每个数据有 n 个特征，用 n 维实向量表示
  - 训练集 $S' = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_m\} \subseteq S$ ，其数据分类已知，记 $y_i = \begin{cases} 1 & \mathbf{x}_i \in C_1 \\ -1 & \mathbf{x}_i \in C_2 \end{cases}$
  - 假设训练集可线性分离（linearly separable），即存在超平面 $\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}+b=0$ ，使得 $\begin{cases} \mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i + b > 0 & \mathbf{x}_i \in C_1 \\ \mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i + b < 0 & \mathbf{x}_i \in C_2 \end{cases}$ ， 或 $y_i(\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i + b) > 0, i = 1, \cdots, m$
  - 求一张判别效果最好的超平面



所有点至超平面距离的最小值尽可能大

- 超平面
  - 设 $\mathbf{w}$ 为 n 维实向量， b 为实数，称 $\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}+b=0$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的超平面（hyperplane）
  - $\mathbb{R}^n$ 中点 $\mathbf{x}$ 到超平面 $\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}+b=0$ 的距离为 $\dfrac{|\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}+b|}{\sqrt{\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}}}$
    - 若 $\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}=1$，点 $\mathbf{x}$ 到超平面 $\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}+b=0$ 的距离为 $|\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}+b|$

Cortes C, Vapnik V. Support-vector networks. *Machine Learning*, *20*(3), 273-297, 1995.

支持向量机

数学建模 MATH T

- 支持向量机的数学规划

（I）
$$\max \min_{i=1,\cdots,m} |\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i + b|$$
$$\text{s.t.}\quad y_i(\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i + b) > 0,\ i=1,\cdots,m$$
$$\mathbf{w}\cdot\mathbf{w} = 1$$

目标含绝对值与极小值，约束含二次函数

（II）
$$\max \min_{i=1,\cdots,m} y_i(\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i + b)$$
$$\text{s.t.}\quad \mathbf{w}\cdot\mathbf{w} = 1$$

目标含极小值，约束含二次函数

- 若（I）有解，（I）与（II）等价
  - （I）的可行域包含在（II）的可行域内
  - （II）的最优解在（I）的可行域内
    - 由（I）有解，存在$(\mathbf{w},b)$，满足 $\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}=1$ 与 $y_i(\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i + b) > 0,\ i=1,\cdots,m$ 。$(\mathbf{w},b)$ 也是（II）的一组可行解，目标值 $\min_{i=1,\cdots,m} y_i(\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i + b) > 0$
    - （II）的最优解$(\mathbf{w}^*,b^*)$的目标值 $\min_{i=1,\cdots,m} y_i(\mathbf{w}^*\cdot\mathbf{x}_i + b^*) \ge \min_{i=1,\cdots,m} y_i(\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i + b) > 0$ ，即$(\mathbf{w}^*,b^*)$满足 $y_i(\mathbf{w}^*\cdot\mathbf{x}_i + b^*) > 0,\ i=1,\cdots,m$ ，$(\mathbf{w}^*,b^*)$是（I）的一组可行解
  - 在（I）的可行域内，对相同决策变量，（I）的目标值与（II）的目标值相等
    - 由 $y_i = \pm 1$ ，若 $y_i(\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i + b) > 0$ ，则 $y_i(\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i + b) = |\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i + b|$

支持向量机

数学
建模
MATH T

- 支持向量机的数学规划

（I） $\max \min\limits_{i=1,\cdots,m} |\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i+b|$

s.t. $y_i(\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i+b)>0,\ i=1,\cdots,m$

$\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}=1$

（II） $\max \min\limits_{i=1,\cdots,m} y_i(\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i+b)$

s.t. $\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}=1$

（III） $\min\ \mathbf{w}\cdot\mathbf{w}$

s.t. $y_i(\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i+b)\geq 1,\ i=1,\cdots,m$

带不等式约束的二次规划

- 若 $(\mathbf{w}_0,b_0)$ 是（III）的最优解，则 $\left(\frac{\mathbf{w}_0}{\sqrt{\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{w}_0}},\frac{b_0}{\sqrt{\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{w}_0}}\right)$ 是（II）的最优解
  - 设 $(\mathbf{w}^*,b^*)$ 是（II）的最优解，$\mathbf{w}^*\cdot\mathbf{w}^*=1$，最优值 $\gamma^*=\min\limits_{i=1,\cdots,m} y_i(\mathbf{w}^*\cdot\mathbf{x}_i+b^*)$
  - $y_i(\mathbf{w}^*\cdot\mathbf{x}_i+b^*)\geq\gamma^*,\ i=1,\cdots,m$，即 $y_i\left(\frac{\mathbf{w}^*}{\gamma^*}\cdot\mathbf{x}_i+\frac{b^*}{\gamma^*}\right)\geq 1,\ i=1,\cdots,m$，$\left(\frac{\mathbf{w}^*}{\gamma^*},\frac{b^*}{\gamma^*}\right)$是（III）的可行解
  - 由于 $(\mathbf{w}_0,b_0)$ 是（III）的最优解，$\sqrt{\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{w}_0}\leq\sqrt{\frac{\mathbf{w}^*}{\gamma^*}\cdot\frac{\mathbf{w}^*}{\gamma^*}}=\frac{1}{\gamma^*}$
  - $y_i\left(\frac{\mathbf{w}_0}{\sqrt{\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{w}_0}}\cdot\mathbf{x}_i+\frac{b_0}{\sqrt{\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{w}_0}}\right)\geq y_i\left(\gamma^*\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{x}_i+\gamma^*b_0\right)=\gamma^*y_i\left(\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{x}_i+b_0\right)\geq\gamma^*,\ i=1,\cdots,m$，故 $\left(\frac{\mathbf{w}_0}{\sqrt{\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{w}_0}},\frac{b_0}{\sqrt{\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{w}_0}}\right)$的目标值不小于$(\mathbf{w}^*,b^*)$的目标值，也是（II）的最优解

数学规划求解

数学建模
MATH T

线性规划

- 线性规划的矩阵形式

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{cx} \\ s.t. \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \left(\underset{m\times m}{\mathbf{B}} \quad \underset{m\times(n-m)}{\mathbf{N}} \right) \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix}$$

  - 不妨设系数矩阵 $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ 为行满秩矩阵，即 $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = m$
    - 若 $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) < m$，则存在冗余约束
  - 不妨设 $\mathbf{A}$ 的前 m 列线性无关
    - 重排 $\mathbf{A}$ 的列，并相应调整决策变量的顺序

- 线性规划的标准型
  - 目标函数极小化
  - 决策变量取非负值
    - x_j 无限制 $\Leftrightarrow x_j^+ = x_j^+ - x_j^-, x_j^+, x_j^- \geq 0$
  - 所有约束均为等式约束
    - $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{Ax} + \mathbf{y} = \mathbf{b}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$
    - $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{Ax} - \mathbf{y} = \mathbf{b}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$
  - 等式约束右端均为非负常数

- 线性规划最优解的类型
  - 唯一最优解
  - 无穷多最优解
  - 无可行解
  - 有可行解，但最优值无下界

~~有限个最优解~~

线性规划

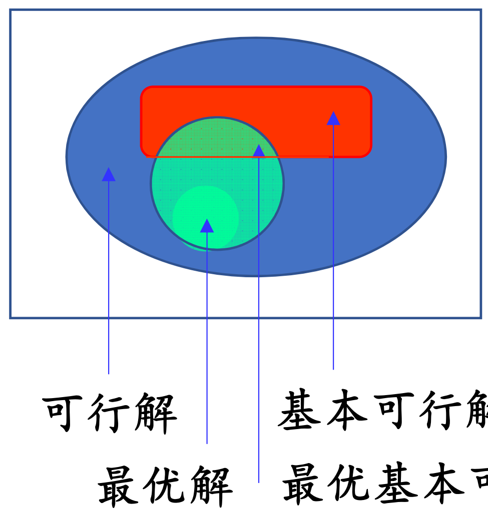
数学建模 MATH T

- 基与基可行解
  - 将 $\mathbf{A}$ 分块为 $(\mathbf{B},\mathbf{N})$，其中 $\mathbf{B}$ 为 m 阶可逆阵，称为基（basis）
  - 决策变量 $\mathbf{x}$ 相应地分块为 $\begin{pmatrix}\mathbf{x}_B\\ \mathbf{x}_N\end{pmatrix}$，$\mathbf{x}_B$ 和 $\mathbf{x}_N$ 中的分量分别称为基变量和非基变量
  - 令 $\mathbf{x}_N=\mathbf{0}$，则 $\mathbf{x}_B=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$，称 $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$ 为相应于基 $\mathbf{B}$ 的基本解
  - 当 $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}\ge\mathbf{0}$ 时，$\mathbf{x}$ 可行，称为基本可行解
- 线性规划基本定理
  - 若线性规划有可行解，必有基本可行解
  - 若线性规划有最优解，必有最优基本可行解
    - 线性规划最优解，只需在所有基本可行解中去寻找

$$\begin{aligned}\min\quad & \mathbf{cx}\\ s.t.\quad & \mathbf{Ax}=\mathbf{b}\\ & \mathbf{x}\ge\mathbf{0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\min\quad & \mathbf{cx}\\ \text{s.t.}\quad & (\mathbf{B}\ \ \mathbf{N})\begin{pmatrix}\mathbf{x}_B\\ \mathbf{x}_N\end{pmatrix}=\mathbf{b}\\ & \begin{pmatrix}\mathbf{x}_B\\ \mathbf{x}_N\end{pmatrix}\ge\mathbf{0}\end{aligned}$$

$$\mathbf{Bx}_B+\mathbf{Nx}_N=\mathbf{b}$$



线性规划

数学
建模
MATH T

- 线性规划的求解算法
  - 单纯形法（Simplex Method）
    - 从一个基本可行解转到另一个基本可行解，并使目标值下降。迭代有限次，找到最优解或判断最优值无界
    - 单纯形法是指数时间算法。存在含 m 个变量 m 个约束的线性规划，单纯形法需要进行 2^m-1 次迭代
      - 实践表明，对多数线性规划问题，单纯形法迭代次数为变量和约束数的多项式函数
  - 多项式时间算法
    - 1979年，Khachiyan 给出了求解线性规划的第一个多项式时间算法椭球算法（Ellipsoid algorithm）
    - 1984年，Karmarkar 给出了实际效果更好的多项式时间算法内点法（Interior Point Method），产生了深远的影响

Klee V, Minty GJ, How good is the simplex algorithm? In Inequalities – III (Shisha O, Eds.), Academic Press, 159–175, 1972

Leonid Genrikhovich Khachiyan

(1952-2005)

苏联数学家

Narendra Karmarkar

(1957-)

印度数学家

Khachiyan L, A polynomial algorithm in linear programming. *Doklady Akademiia Nauk SSSR*, 244, 1093-1096, 1979

Karmarkar NK, A new polynomial-time algorithm for linear programming, *Combinatorica*, 4, 373–395, 1984

整数线性规划

数学
建模
MATH T

- 整数线性规划的松弛
  - 整数线性规划（IP）去除决策变量取整数约束后所得线性规划（LP）称为（IP）的松弛（relaxation）
    - （IP）的可行域包含于（LP）的可行域中
      - （IP）的可行解也是（LP）的可行解，但反之不然
      - （IP）的最优值不优于（LP）的最优值
    - （LP）的最优解与（IP）的最优解
      - 若（LP）的最优解为整数解，则它也是（IP）的最优解
      - 若（LP）的最优解不为整数解，不存在高效的取整策略将（LP）的最优解变为（IP）的最优解
- 整数线性规划的求解
  - 整数线性规划求解不存在多项式时间算法

$$
\text{(IP)}\quad \begin{aligned} \min\ & \mathbf{cx} \\ s.t.\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^n \end{aligned}
$$

$$
\text{(LP)}\quad \begin{aligned} \min\ & \mathbf{cx} \\ s.t.\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n \end{aligned}
$$

分枝定界法

数学
建模
MATH T

- 分枝定界法（Branch and Bound，B-B）
  - 求解整数规划最常用的算法　　　指数时间算法
  - 算法思想可用于其它离散优化问题的求解

ipants. Afterwards Alison joined Ailsa in the Economics Research Division of LSE. The Economics Research Division was subsequently contacted by British Petroleum, who wanted to extend their existing linear programming models in order to solve refinery operation problems. However, these decision models now needed to incorporate discrete variables associated with the choice of locations, ship sizes, storage tanks, etc.; these more realistic models could not be solved using existing linear programming techniques. With this as motivation, Land and Doig developed a geometrically motivated solution framework that incorporated general discrete variables, not just 0/1 decision variables. This work resulted in

Ailsa H. Land, EURO Gold Medallist (1927–2021),
***European Journal of Operational Research*, 296, 1–2, 2022**

Ailsa Horton Land
(1927-2021)
英国数学家

Alison Grant Harcourt (neé Doig)
(1929-)
澳大利亚数学家

Land AH, Doig AG. An automatic method of solving discrete programming problems, *Econometrica* 28, 497–520, 1960.

ECONOMETRICA
JOURNAL OF THE ECONOMETRIC SOCIETY

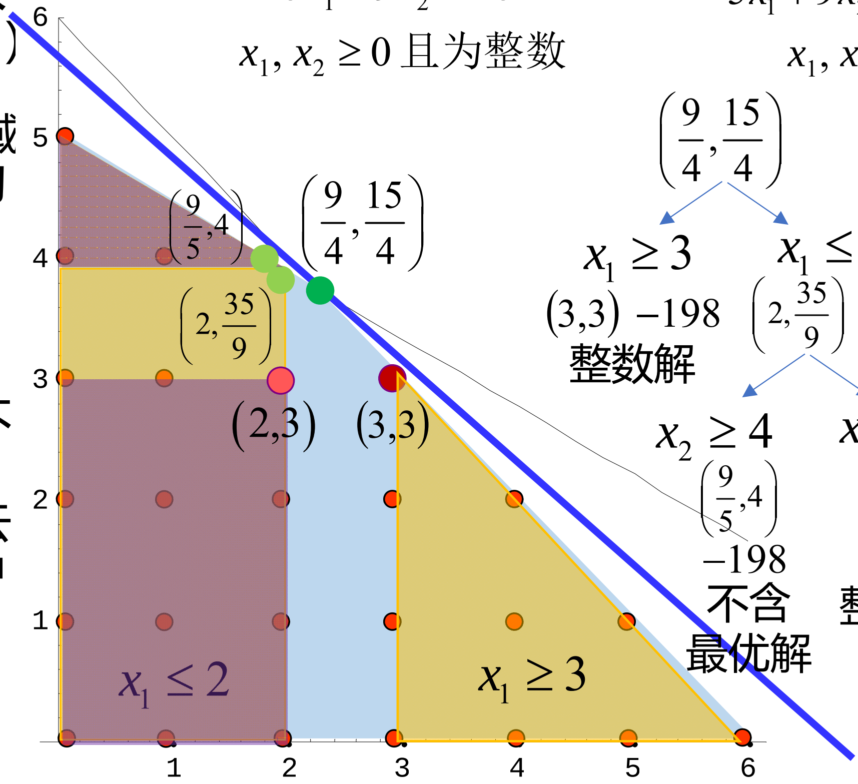
分枝定界法

数学
建模
MATH T

- 分枝定界法
  - （分枝）求解（IP）的松弛（LP）。选择最优解中任一不取整值的变量，在（IP）中分别加入一对互斥的约束，形成两个分枝（IP1）和（IP2）
    - （IP）的可行解分属（IP1）和（IP2）可行域
    - （LP）的最优解不属（LP1）和（LP2）的可行域
  - （定界）确定（IP）最优值的上界和每个分枝的下界，为剪枝提供依据
    - 若某个分枝松弛线性规划的最优解为整数解，其目标值为（IP）的最优值上界
    - 某个分枝松弛线性规划的最优值为该枝的下界
  - （剪枝）删去松弛线性规划最优解为整数解或不包含（IP）最优解的分枝
  - 遍历所有分枝，重复以上过程。所有分枝均删去时，（IP）的最优解包含在历次求得的整数解中

$$(IP)\quad \begin{aligned} \min\ & -30x_1-36x_2 \\ s.t.\ & x_1+\ x_2\le 6 \\ & 5x_1+9x_2\le 45 \\ & x_1,x_2\ge 0 \text{ 且为整数} \end{aligned}$$

$$(LP)\quad \begin{aligned} \min\ & -30x_1-36x_2 \\ s.t.\ & x_1+\ x_2\le 6 \\ & 5x_1+9x_2\le 45 \\ & x_1,x_2\ge 0 \end{aligned}$$



$\left(\frac{9}{4},\frac{15}{4}\right)$

$x_1\ge 3$ $\quad$ $x_1\le 2$

$(3,3)\ -198$ 整数解 $\quad$ $\left(2,\frac{35}{9}\right)\ -200$

$x_2\ge 4$ $\quad$ $x_2\le 3$

$\left(\frac{9}{5},4\right)$ -198 不含最优解 $\quad$ $(2,3)$ -168 整数解

参考资料

数学建模
MATH T

黄红选，韩继业，数学规划，清华大学出版社，2006

Luenberger DG, Ye Y, *Linear and Nonlinear Programming (5th)*, Springer, 2021
(中译本：线性与非线性规划（第四版），中国人民大学出版社，2018)

Vanderbei RJ, *Linear Programming(5th)*, Springer, 2020

Williams HP. *Model Building in Mathematical Programming*. Wiley, 2013.

张建中、许绍吉，线性规划，科学出版社，1990
袁亚湘、孙文瑜，最优化理论与方法，科学出版社，1997.

Conforti M, Cornuéjols G, Zambelli G, *Integer Programming*, Springer, 2014.


谢 谢