柯西收敛准则证明单调有界定理.

证明: 设 $\{x_n\}$ 是单调递增有上界的数列. 下面证明 $\{x_n\}$ 收敛.

即 $x_{n+1}>x_n$ 且 $\exists a$, $x_n<a$. 记 $m=\inf\{a\}$.

$\forall \varepsilon>0$, $\exists N_0>0$ s.t. $\forall n,m>N_0$, $|x_m-m|<\frac{\varepsilon}{2}$ $|x_n-m|<\frac{\varepsilon}{2}$.

此时 $|x_m-x_n|\le|x_m-m|+|x_n-m|<\varepsilon$. 故 $\{x_n\}$ 收敛.

8. 设 $S=\{x\mid x\in\mathbf{Q}$ 并且 $x^2<3\}$, 证明:

(1) S 没有最大数与最小数;

(2) S 在 $\mathbf{Q}$ 内没有上确界与下确界.

(1). 只证 S 无最大数.

反设 $M=\frac{p}{q}$ $(p,q)=1$ 且 $p,q\in\mathbb{Z}$. $q>0$ 是 S 的最大数. 故 $\frac{p}{q}<2$

取 $r\in\mathbb{Q}$ 且 r 充分小. s.t. $r^2+4r<3-\frac{p^2}{q^2}$

则 $(r+\frac{p}{q})^2=r^2+(\frac{p}{q})^2+\frac{2r\cdot p}{q}<r^2+4r+(\frac{p}{q})^2<3$. 故 $\frac{p}{q}+r\in S$

故 M 不是最大数.

(2). 反设 $\frac{n}{m}$ 是 S 在 Q 中上确界. 则或者 $(\frac{n}{m})^2>3$. 或者 $(\frac{n}{m})^2<3$

① 取 r 充分小. s.t. $4r-r^2>(\frac{n}{m})^2-3$. 又 $\frac{n}{m}<2$. 则 $(\frac{n}{m}-r)^2=(\frac{n}{m})^2-\frac{2nr}{m}+r^2>(\frac{n}{m})^2+r^2-4r>3$.

故 $(\frac{n}{m}-r)$ 是其上界. 矛盾!

② 取 r 充分小. s.t. $4r-r^2<3-(\frac{n}{m})^2$. 则 $(\frac{n}{m}+r)^2=(\frac{n}{m})^2+r^2-\frac{2rn}{m}<r^2-4r+(\frac{n}{m})^2<3$.

故 $(\frac{n}{m}-r)^2<3$. 即 $\frac{n}{m}-r$ 是上界. 矛盾!

故 S 在 Q 中无上确界.