R^n 中的拓扑

luojunxun

2023 年 3 月 16 日

(R^n 中的聚点, 导集, 孤立点和完备集): 聚点:$E \subset R^n, \forall V(x,\epsilon) : (V - \{x\}) \cap E \neq \emptyset$ 则 x 称为 E 的聚点. 也就是存在 E 中的数列 (充分大的时候不恒等于 x) 收敛到 x;

聚点全体称为集合 E 的导集, 记为 E'

若 $x \in E, x \notin E'$ 称 x 是 E 的孤立点

没有孤立点的闭集称为完备集

Example: 区间 $E = (1,2]$ 的导集是 $E' = [1,2]$ 且 E 没有孤立点, 任何闭区间是完备集

Theorem 定理 1.5.8: $x \in E' \iff \exists \{x_k\} \subset R^n, x_k \neq x, x_k \to x$

Theorem 定理 1.5.9: $\overline{E} = E \cup E'$, *并且 E 是完备集的充要条件是其和其导集相等*

Proof:[1.5.9] 1.$E' \subset \overline{E}$ 因为聚点都是附着点, 从而有 $E \cup E' \subset \overline{E}$; 反过来, 任取 $x \in \overline{E}$ 有 $\{x_k\} \subset E, x_k \to x$ 则或者存在 $x_j \in \{x_k\}, s.t. x_j = x$ 从而 $x \in E$ 或者 $\forall j : x_j \neq x$. 但是 $x_k \to x$, 从而 $x \in E'$ $i.e. \overline{E} \subset E \cup E'$

2. 必要性是显然的, 因为这就意味着 E 中的每个点都是聚点 (没有孤立点) 充分性:E 完备, 则 E 是闭集, 从而有 $\overline{E} = E \cup E' = E \Rightarrow E' \subset E$ 再证 $E \subset E'$ 则 E 中任意一点 x 的任意领域都包含 E 中的点, 从而存在一个取自于 E 中的数列, 其极限是 x 并且每一项都不等于 x, 从而 x 是聚点

运算性质: (i) $(A^c)^\circ = (\bar{A})^c$ (ii) $\overline{A^c} = (A^\circ)^c$; (iii) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;

(iv) $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B} : [A = (0,1); B = (1,2)]$; (v) $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ : [A \cap B = \emptyset]$

(vi) $(A \bigcap B)^\circ = A^\circ \bigcap B^\circ$.

(疏集和稠集): 疏集: 任何非空开集必有非空开子集和其不相交; 稠集: 任何非空开集和其交非空

Example: 整数集是实数集的疏集, 有理数集是实数集的稠集

Theorem 定理 1.5.10: $E \subset R^n$

1.E 是疏集 $\iff (\overline{E})^o = \emptyset$;

2.E 是稠集 $\overline{E} = R^n$

Theorem 1.5.10′**:** *若* $A \subset B, \overline{A} \supset B$ *称* A *是* B *的稠子集: 例如* $A = (0,1) \cap Q, B = (0,1)$

Proof:[1.5.10] 1. 充分性: 反设闭包中存在一个内点 x, 那么存在 x 的开领域 V 包含于 E 的闭包, 从而 V 中的点都是附着点. 任取 V 中另一点 y, 因为 y 是 E 的附着点, 从而存在 y 的开领域和 E 的交非空, 这里我们构造了开集 V 和他的一个开子集 V(y), 并且开子集和 E 的交非空, 这和 E 是疏集矛盾; 必要性: 也就是说 E 的闭包中没有内点, 任取 $x \in R^n$, 在 x 的任一领域中一定存在 y 不是 E 的闭包中的点, 从而 $y \in (\overline{E})^c$(开集), 也就说存在 y 的领域与 E 的闭包的交是空集, 从而与 E 交也是空集, 这也就是说任一开领域 V(x) 中有一开领域 V(y) 与 E 交空, 由于 x 是任取的, 那么 E 是疏集.
2. 充分性:$\overline{E} \subset R^n$ 是确定的. 任取 x 是全空间中的点, 由于 E 是稠集, 从而 x 的任一开领域与 E 有交, 这就是附着点的定义, 从而 $x \in \overline{E}$; 必要性: 任取 x 是全空间中的点, 由于 x 是附着点, 从而 x 的领域和 E 交非空. 由 x 的任意性即知 E 是稠集

R 中的完备集 F: 首先 F 是闭的且没有孤立点, 从而 F^c 是开的, 由定理 1.5.5 其至多是可数个开集的并, 并且这些开集的端点互异, 否则 F 有孤立点了.

Theorem 定理 1.5.11: *R 中集 F 是完备的当且仅当 R-F 是至多可数个两两不相交的无相同端点的开区间的并*

构造 R 中的 Cantor 完备集 [1]:

该集合是通过下述方法构造的: 1. 将区间 $[0,1]$ 三等分，去掉中间的开区间 $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ ，得到两个闭区间的并集

$$F_1=\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]=F_{1,1}\cup F_{1,2}.$$

2. 分别将区间 $F_{1,1},F_{1,2}$ 再三等分，去掉中间的开区间 $\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right),\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$ ，得到四个闭区间的并集

$$F_2=\left[0,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right]=F_{2,1}\cup F_{2,2}\cup F_{2,3}\cup F_{2,4}.$$

3. 这样一直进行下去，到第 n 次分割后得到 2^n 个闭区间的并集

$$F_n=\bigcup_{j=1}^{2^n}F_{n,2^j}.$$

取极限就得到 Cantor 三分集

$$F=\lim_{n\to\infty}F_n$$

定义 $f(x)=\frac{2k-1}{2^{n+1}},x\in F_{n+1,k},k=1,2,\cdots,2^n$ 称为 Cantor 函数

Cantor 集 (函数) 的性质: 1. 零测集 2. 非空有界闭集 3. 完备集 4. 疏集 5. 不可数集

Cantor 函数几乎处处导数值为零但却是个单调增函数

参考文献

[1] “Cantor 三分集.” [Online]. Available: https://zhuanlan.zhihu.com/p/54711962