旋转群的有限子群

昨日旧友

Wednesday 12th October, 2022

Part I

这是抽象代数群的对称理论部分关于旋转群的有限子群的笔记，我本来想把这部分笔记像往常一样打在幕布上的，但是我发现，我的英语水平不够我下次再看见我的笔记的时候能反应过来，所以还是用中文叙述一下比较好

Part II

1 所需知识

需要知道一些基本的群，比如 C_n 循环群之类的, 然后，假定 G 是 SO_3 的有限子群，而且 G 的阶是 $N.S$ 是空间中的单位球面。那么 G 中的每个元素 g 作用在 R^3 上表现为绕空间中过原点的一条直线 l 的旋转，这条直线和单位球有两个交点，我们称每个交点为一个 $pole$（极点），用 P 表示所有极点构成的集合。再定义一个 $pair : (g, p)$ 也就是极点和对应的稳定子构成的对，我们这里让 g 不等于恒等变换 (因为恒等变换有无穷多个极点)

2 先证明 G 在 P 上作用

回顾 P 的定义,P 中元素是那些经过 G 中某个元素 g 作用以后保持自身不变的元, 要证明 G 在 P 上作用, 就是说要去证明 P 中任意元经过 G 中一个给定元作用以后得到的生成元, 还能被 G 中另外一个元保持不动.

从而我们任取 $g \in G, p \in P$ 并且 p 是 $x \in G$ 的极点 $i.e. xp = p$, 则 gp 是生成元.
那么 $gxg^{-1} \in G$ 就是我们要找的. 因为 $(gxg^{-1})(gp) = gxp = gp$
这就证明了 G 在 P 上作用

3 利用 $pair$ 构造等式

通过固定 $pair$ 中的 g 或者是 p 来对它的个数进行计数
固定 g: 因为 G 的阶是 N, 除去恒等元, 每个元有两个稳定子, 这就是说一共有 $2 \times (N-1)$ 个 $pair$
固定 p:G 作用在每个 $p \in P$ 上形成了一些不交的轨道, 称这些轨道是 $O_i, (i = 1, 2, ..)$.
(注意, 平常用小写字母来标记每个轨道, 但是这里我们并不清楚到底哪些元处在同一个轨道, 所以我们用自然数做标记)
那么我们把每个轨道上的元对应的 $pair$ 全计算出来, 再相加, 就能得到总数
这里我们给出一些记号
$|O_p| = r_p, |G_p| = n_p$ 也就是用 r_p 和 n_p 分别表示 p 的稳定化子的阶和轨道的阶. 再由计数公式 $|G| = |O_p||G_p| \quad i.e.\ N = r_p n_p$, 同一轨道的元的轨道的阶是一样的, 从而稳定子的阶也是一样的, 那么在每个轨道中, 元素 p 对应 $r_p - 1$ 个非恒等的稳定子, 那么就有 $n_p(r_p - 1)$ 个 $pair$, 对轨道个数求和就得到 $\sum_i n_i(r_i - 1)$ 最终得到等式

$$\sum_i n_i(r_i - 1) = 2N - 2$$

两边同时除 N 得到 $\sum_i (1 - \frac{1}{r_i}) = 2 - \frac{2}{N}$ 这里 $r_i \geq 2$ 因为至少有恒等元

4 数值分析

这样的话, 左边的每个元大于等于 $\frac{1}{2}$ 但是右边小于 2, 这就是说左边最多能求和三次, 换句话说, 最多有三条轨道!
也就是说空间中的任何一个几何体在 G 的作用下形成的极点最多只能构成三个等价类. 逐一考虑

4.1 一条轨道

不可能, 因为 N 至少是 2, 这样的话右边至少是 1, 但是左边小于 1

4.2 两条轨道

这样的话化成 $\frac{N}{r_1}+\frac{N}{r_2}=2$ 但是 $r_i|N$ 所以只能 $r_1=r_2=N, n_1=n_2=1$ 也就是说 G 保持 p_1,p_2 不变,(这里我们反过来确定了 G 的种类), 这样 G 是绕 p_1,p_2 连线直线的旋转群 C_n

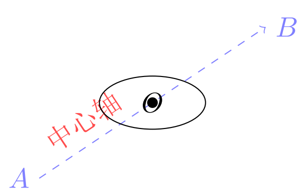
4.3 三条轨道

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-1=\frac{2}{N}$$

这时候 $r_1=2$, 因为如果所有的 r_i 都至少为 3, 左边会小于零

4.3.1 $r_2=2$

这时 $r_1=r_2=2, n_1=n_2=\frac{N}{2}, r_3=\frac{N}{2}, n_3=2$ 先来看轨道三: 轨道三只有两个元,G 中的元要么让他们保持不动, 要么让他们互换. 那么 g 要么是围绕以这两个极点为轴的的直线 l_{AB} 的旋转, 要么是 l_{AB} 的翻转 (即交换 A 和 B). 再结合轨道一和轨道二, 认定 G 是一个让正 $\frac{N}{2}$ 边形不动的二面体群 $D_{\frac{N}{2}}$, 这个正多面体就在轴 AB 的中垂面上, 轨道一上的元可以认为是面的中点, 轨道二上的元可以认为是正多面体的顶点



" 轨道一对应的是边, 轨道二对应的是顶点, 轨道三对应的是面"

4.3.2 $r_2\geq 2$

如果 $r_2=3$ 那么 r_3 最多是 5, 否则左边小于零, 如果 $r_3=4$, 那么 $r_3=3$(只能, 但是这和我们默认使用的增序不符合). 现在只有三种可能

$(i): r_i=(2,3,3), n_i=(6,4,4), N=12$

这是空间中保持正四面体不动的群 T

$(ii): r_i = (2, 3, 4), n_i = (12, 8, 6), N = 24$

这是空间中保持正八面体不动的群 O

$(iii): r_i = (2, 3, 5), n_i = (30, 20, 12), N = 60$

这是空间中保持正十二面体不动的群 I