集合与实数集

luojunxun

2023 年 3 月 12 日

(集合的划分): 1. 有限集　2. 无限集: 可数集 & 不可数集

所谓可数集就是能和自然数集建立一一对应的集合 (换言之其中的元能以一个顺序完全排列),

若否的无限集就是不可数集.

Theorem 1.4.3:

1. 任一无限集必包含一个可数子集

2. 可数集的任一无限子集是可数集

3. 至多可数个可数集的并是可数的

Proof:[1.4.3] 1.$a_1 \in A, a_n \in A - \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} a_k$ 那么 $\{a_n\}$ 就是一个可数子集

2.$E \subset A \sim N, \left(\begin{array}{l} \quad n_1 = \min\{n : a_n \in E\} \\ \quad n_2 = \min\{n : a_n \in E \text{ 且} n > n_1\} \\ \quad n_3 = \min\{n : a_n \in E \text{ 且} n > n_2\} \\ \cdots \end{array} \right)$ 那么 $E = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots\}$

就是一个可数集

3. 类似 $Cauchy$ 乘积

*1.4.3 推论:*Q 是可数集

Theorem 凡无限集必定和其一真子集等价: 证明如下

Lemma 若 A 是无限集且 B 至多是可数集, 则 $A \sim A \cup B$**: 不妨设** $A \cap B \neq \emptyset$**, 若否**

取 $B_1 = B - A$**, 则** $A \cup B = A \cup B_1$;

由定理 1.4.3:A 包含一个可数子集, 记为 E:

$$\text{考虑 } h : A \to A \cup B = \begin{cases} i : A - E \to A - E \subset A \cup B \\ \\ f^{-1} \circ g : E \to E \cup B \; here : E \overset{g}{=\!=} N; E \cup B \; B \overset{f}{=\!=} N \end{cases}$$

从而 $A \sim A \cup B$

由引理和定理 1.4.3:A 有一个可数子集 E, 且 $A - E$(无限集) 和 $A = (A - E) \cup E$ 等价

Example:$\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是 R 中两两不交的开区间族, 则其至多可数: Λ 是有限集则显然有限, 当其为无限集:$\forall \lambda \in \Lambda, \exists \gamma_\lambda \in Q \cap I_\lambda \; f : \{\gamma_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset Q \to \{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \;\; so \; \overline{\overline{\{I_\lambda\}}}_{\lambda \in \Lambda} \leq \overline{\overline{Q}}$

证明 A 最多是可数集:从上面的例题可以看出证明一个集合最多是可数集可以建立一个 A 到 Q 的单射来证明

(连续统势): 闭区间 $[0, 1]$ 是不可数集, 与其等价的集合我们都称为连续统, 称其有连续统势

Theorem 连续统势: 任何区间具有连续统势, 特别的 R 是实属连续统