

《计算机模拟》

第13讲 – 元胞自动机

胡贤良

浙江大学数学科学学院

随机模拟无极限：探索复杂性问题方法



斯蒂芬·霍金：

“我认为，下个世纪将是复杂性的世纪”

复杂系统是当今科学研究的热点和前沿问题，有着多方面的应用，是多学科交叉研究的领域。

1. 初等元胞自动机

2. Sznajd模型

3. 渗流模型

- 研究的目的是揭示复杂系统整体行为特征的形成机理，构建系统的模拟模型是研究这类问题的一种有力手段。
- 通常认为：系统各单元之间的局部相互作用形式是形成系统整体行为特征的主要原因，这为建立这类模型提供了思路。

元胞自动机(Cellular Automata , CA)

- 元胞自动机是一种时间、空间和状态变化均离散的**动态系统模型**，是为了研究复杂系统动态演化特征而开发的一种数学模型：
 - ✓ 使用一系列规则来构造简单、易于模拟、演化行为丰富的模型
 - ✓ 模拟生长/反应扩散/涌现/相变等非线性现象
 - ✓ **不需要**物理学那样的一组**数学方程**
- 元胞自动机是一类模型(模式)的**总称**
 - 本质在于抓住系统内各单元之间相互作用机理
 - 依靠相互作用机制来产生许多复杂的行为特征
 - 凡是满足这些规则的模型都可以算做是CA模型
- 观赏 2D/3D Cellular Automata的mp4视频



元胞自动机 - 模型构造

元胞自动机的构成包括：元胞、状态、元胞空间、邻域及更新规则等：

1. 元胞： CA 系统的基本单元

- 元胞自动机的最基本的成分

- 分布在离散的一维、二维或多维欧几里得空间的格点上

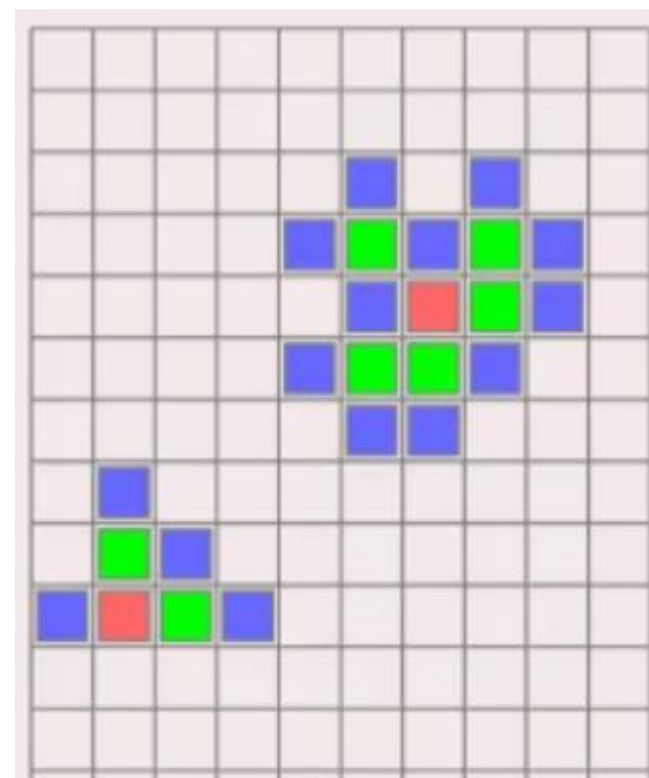
2. 状态 s_i^t ：表示 t 时刻第 i 元胞的状态

- 元胞的变量，取有限离散值，如：0 -1 二进制、离散的整数值

- 元胞状态的取值集合称为其状态集，记为 S ,它的个数记为 K

- 经典形式的 CA , $K = 2$, 即元胞的状态只取两个值

- 实际应用中，往往对其进行了扩展，有 $K > 2$ 的 CA



3. 元胞空间 (Lattice)

➤ 元胞空间：元胞在空间上的分布或排列情况

➤ **拓扑结构**：元胞空间的几何构造

➤ 往往以 L^d 表示 d 维网格，通常 $L^d \subset \mathbb{Z}^d$ 。

➤ 最常用的是一维和二维方形网格的 CA

➤ 构形(configuration)：在同一时刻，整个网格上的**所有元胞状态值的排列情况**。

➤ 动态演化：CA的构形随时间的变化情况

➤ 必须指定**边界条件**。通常的边界条件有：

- ① 周期型边界：一维为首尾相接的“圈”；二维表现上下、左右相接（环面）
- ② 定值型边界：指所有边界外元胞均取某一固定常量，如取零
- ③ 反射型边界：指在边界外的元胞状态是以边界为轴的镜面反射
- ④ 随机型边界：即在边界上的元胞实时产生随机的状态值

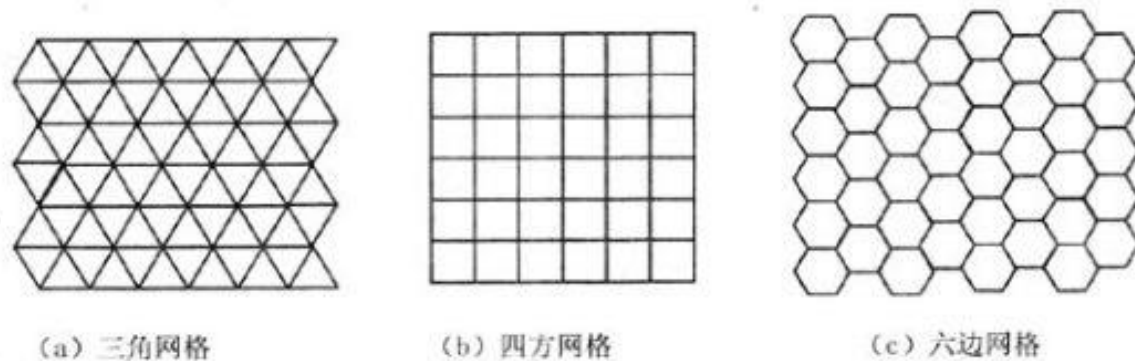
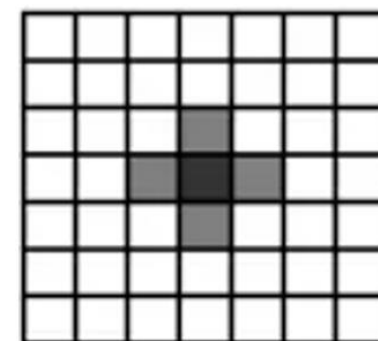
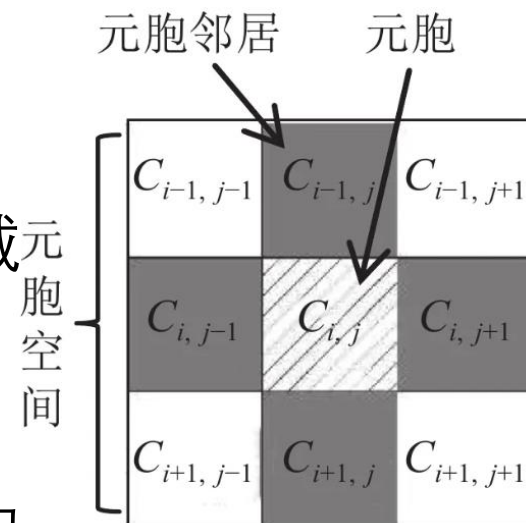


图 2-5 二维元胞自动机的三种网格划分（根据李才伟，1997）

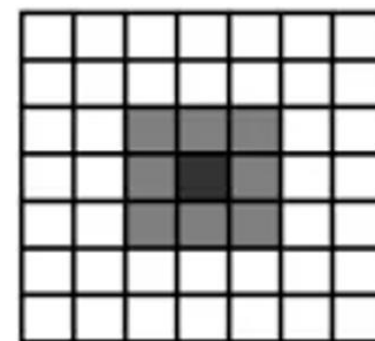
4. 邻域

一个元胞的所有邻居连同自己的集合，用 N_i 表示第 i 元胞的邻域

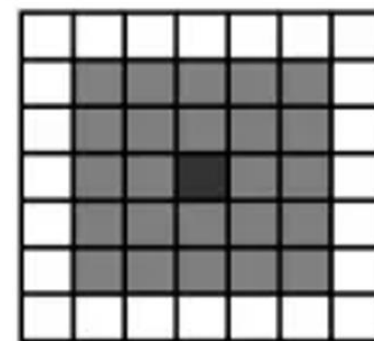
- 存在相互作用的一对元胞是互为邻居的！
- 一维情形：与给定元胞的距离不超过半径 r 范围内的所有元胞均被认为是该元胞的邻居
- 二维元胞自动机的邻域确定稍复杂。以常见的方形网格形式为例，有如下几类情形：



a. von neuman 型



b. moore 型 ($r=1$)



c. moore 型 ($r=2$)

- 冯诺依曼型：以上下左右四个相邻元胞为邻域，如图a
- 摩尔型，如图b（生命游戏就是以用摩尔型邻域的）
- 扩展摩尔型，如图c

5. 更新规则

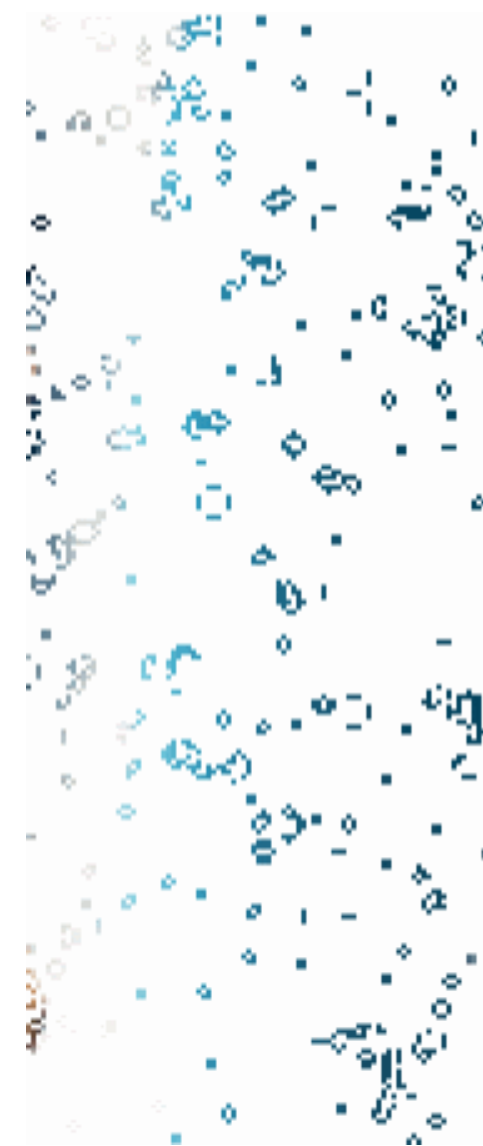
通过模拟方法确定每个元胞的状态随时间变化的规律：

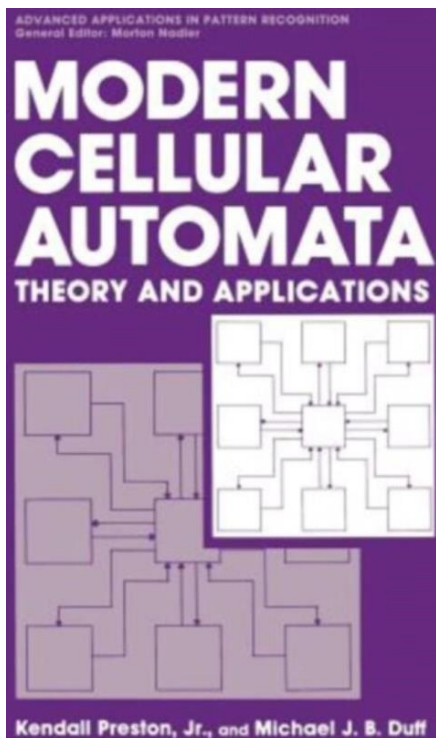
- 元胞的下一时刻状态是根据该元胞及其邻域的当前构形来确定
- 同质性：更新规则对每个元胞都是一样的
- 并行性：在每一时刻所有元胞状态都同时发生更新
- CA 的更新规则可以是确定性的，也可以是随机的
- 可以将一个元胞的状态的更新规则写成为一个函数关系，即

$$s_i^{t+1} = f(s_{N_i}^t), \quad \forall i$$

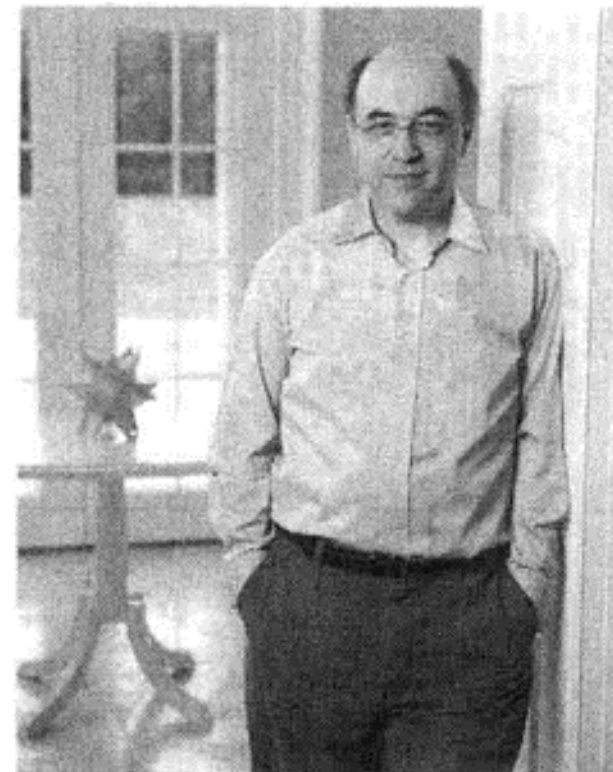
其中， $s_{N_i}^t$ 为 t 时刻元胞 i 邻域 N_i 的构形。从模型构造中不难发现：

- CA 是由大量元胞通过简单的局部相互作用而构成一种动态系统
- 一般地，CA 的演化特性不能通过数学求解来分析，只能借助于模拟方法来研究





- CA 的雏形由冯·诺依曼 (John von Neumann) 根据乌拉姆 (S. Ulam) 的建议于 1952 年提出， 目的是想模仿像人脑那样高效的信息处理能力，模仿生物细胞自我复制进行计算模拟，开创了**人工智能**研究的先河。
- 1970 年， 剑桥大学数学家**康威** (J . Conway) 将它改造成一个有趣的“**生命的游戏**”模型， 它的结构极其简单却具有自组织的行为特性， 从而使 CA 引起了人们的注意。
- 20 世纪 80 年代初在洛斯阿拉姆斯 (Los Alamos) 研究所(美国的原子弹研究所)工作的物理学家**Stefen Wolfram** (数学软件 Mathematica 的创始人)开始注意有关的研究。他于1982年开发出一系列的一维和二维**元胞自动机**模型， 它们被称之为**初等**元胞自动机， 并由此掀起了一阵研究的热潮。1980s、1990s是元胞自动机研究最热门的时期， 应用领域遍及自然科学及社会科学。



案例1：康威生命游戏(Conway's game of life)

- 格点的邻居定义八个方位：

东，南，西，北，东北，西北，东南，西南

- 规则如下：

- 当格点处于1状态时：

- 如果1类邻居的数量为2或3，则下一时刻该格点为1；
- 否则为0

- 当格点处于0状态时：

- 如果1类邻居的数量为3，则下一时刻该格点为1；
- 否则为0

- 这和生命体的规律很类似，如果周围同类太少，则会因为"孤独"而死去；如果同类太多，又会因为竞争而"饿死"。



生命游戏：“滑翔机”：

每4个回合沿右下方移动一格

案例2: Wolfram 的初等元胞自动机

➤ 初等元胞自动机是 $K = 2$ ，邻域半径 $r = 1$ 的一维元胞自动机，是最简单的元胞自动机模型，邻域集中的元胞的个数是 $2r + l = 3$ ， $N_i = \{s_{i-1}, s_i, s_{i+1}\}$



➤ 由于每个元胞有两个状态 $\{0,1\}$ ，这样，当前元胞加上左右两个邻居一共就有 $2^3 = 8$ 种状态:



➤ 设 $S = \{0, 1\}$ 。此时 $s_{N_i} = (s_{i-1}, s_i, s_{i+1})$ ，则更新规则即意味着考虑以当前格点与其左右格点的状态确定其下一状态，可记为

$$s_i^{t+1} = f(s_{i-1}, s_i, s_{i+1})$$

一个简单的示例:

t	111	110	101	100	011	010	001	000
t+1	1	1	0	0	1	1	0	0

初等元胞自动机 - 规则与命名

- 初等元胞自动机只可能有256种不同规则：邻域的**构形**只有 8 种，而每个构形只对应 0 或 1 两个值之一，所以共有 $2^8 = 256$ 种。
- Wolfram提出：给每个规则定义一个标号。他的定义方式是将更新表中的 0 和 1 序列都看成是一个二进制数，再转化为十进制数：

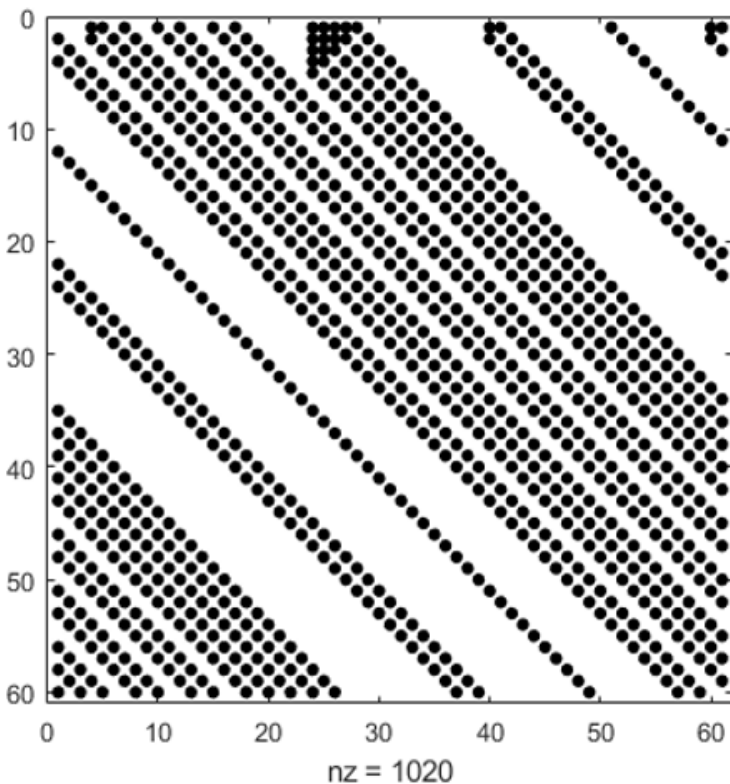
$$k = s_{i-1}2^2 + s_i2 + s_{i+1}, \quad R = \sum_{k=0}^7 a_k 2^k$$

- 将 R 定义为初等元胞自动机的标号。如下图所示的更新规则，是对应于 $R = 184$, 即第 76 号初等元胞自动机。

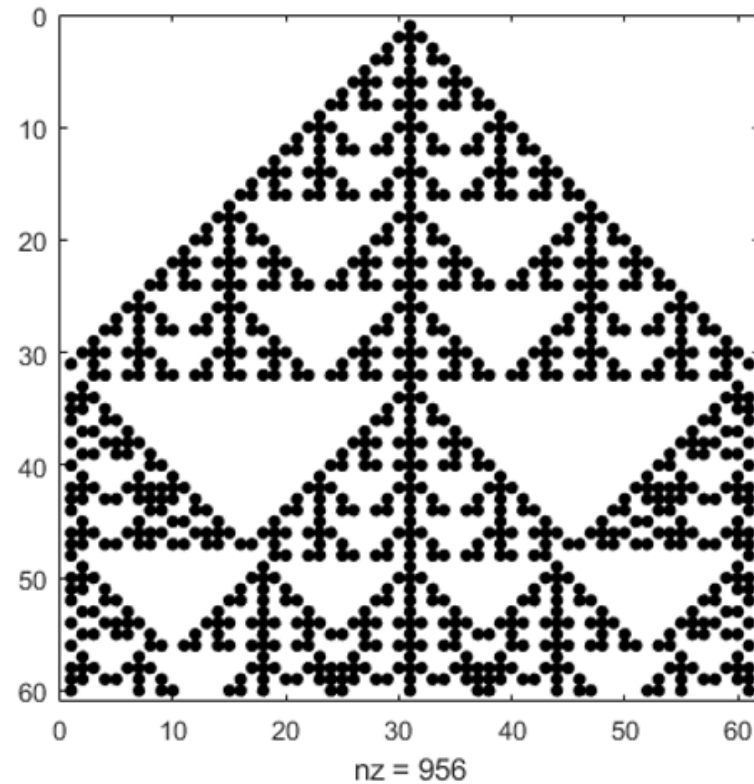
k	7	6	5	4	3	2	1	0
s_N	111	110	101	100	011	010	001	000
a_k	1	0	1	1	1	0	0	0

初等元胞自动机 (w184.m)

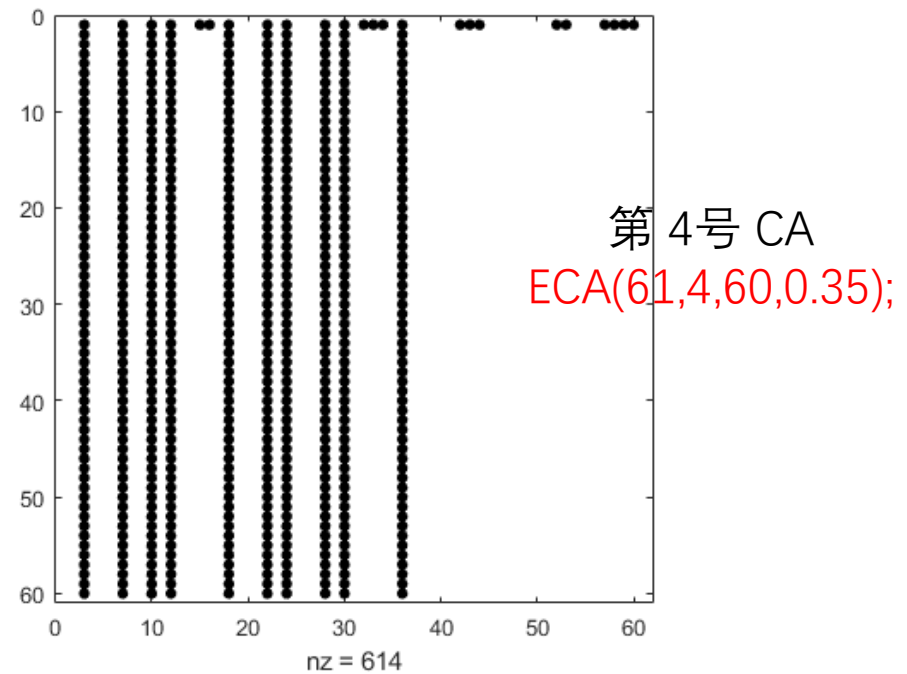
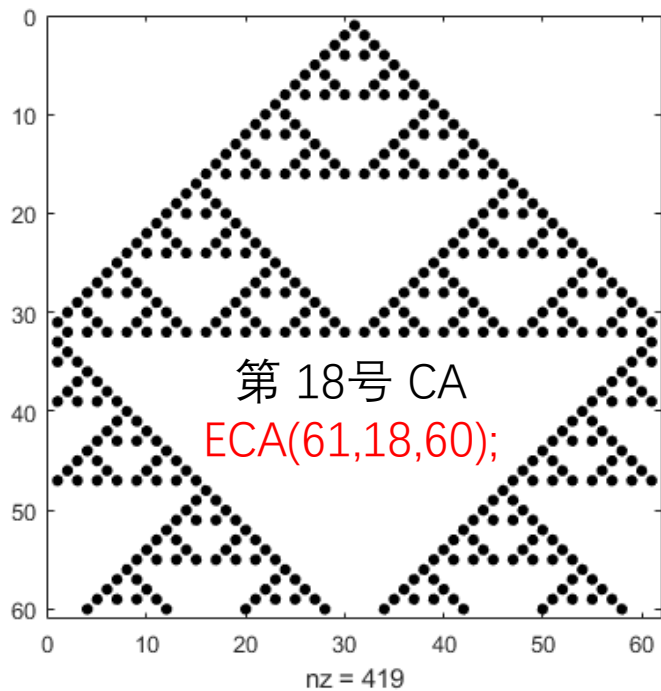
- function A = ECA(N, R, Times, p0)
- % N, R, Times:分别是CA的元胞数、标号和演化时间
- % p0:初始构形中以密度p0来随机分配状态为1的元胞，缺省时则仅有一个状态为1的元胞，它位于构形的中间
- % A:输出CA演化到最后时刻的构形



第 184号 CA
ECA(61,184,60,0.3);



第 150 号 CA
ECA(61,150,60);



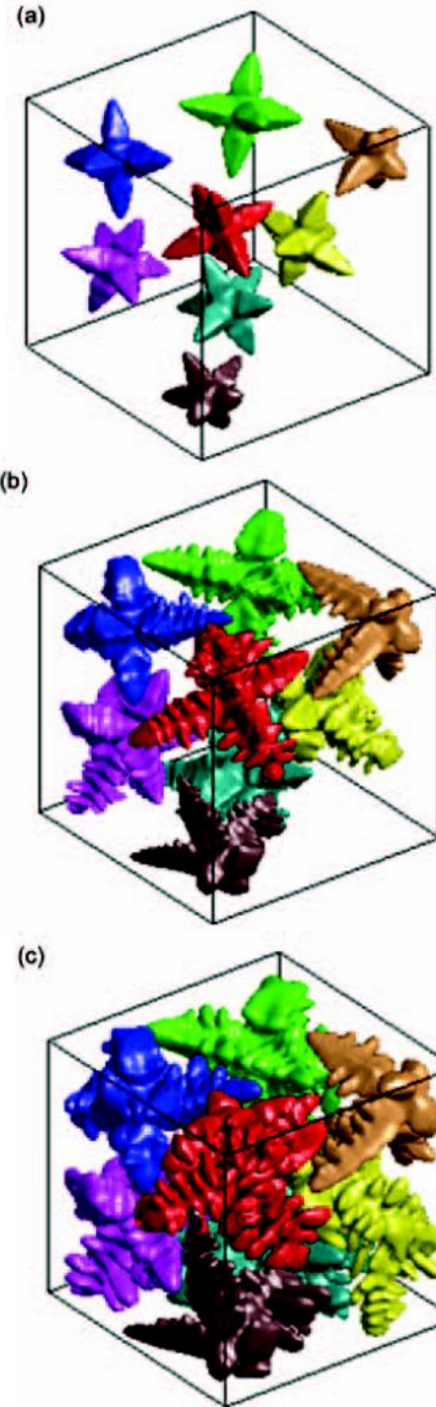
- CA的动态行为分类（Wolfram）：自任何初始状态开始，经过一定时间运行后
- (1)平稳型：每一个元胞处于固定状态，不随时间变化而变化。
- (2)周期型：CA的构形序列趋于统计上的稳定模式或周期性模式。
- (3)混沌型：元胞自动机构形表现出混沌的非周期行为，所生成的演化图像通常展现出某种分形特征。
- (4)复杂型：出现复杂的局部结构，或者说是局部的混沌。某些特定的元胞自动机是图灵完备的。

- CA模型特征：

- (1)**离散性**：空间、时间和状态都是离散的，且状态空间还是有限的；
- (2)**齐次性**：元胞的分布方式相同，空间分布规则整齐；
- **(3)局部性**：每一个元胞的状态更新只取决于其邻域中元胞的当前状态；
- (4)**同质性**：在元胞空间内的每个元胞的变化都服从相同的规律；
- (5)**并行性**：各个元胞的更新是同步完成的
- (6)**高维数**：指CA中构形的维数，它等于元胞的个数。

- CA推广

- 耦合格子映射（coupled map lattice, CML）模型，由R. Kapranov 和K. Kaneko等人提出。连续状态模拟化学和物理中的一些时空混沌现象
- 交通元胞机模型：邻域的扩展、随机性规则的引入等



案例3：NaSch模型 - 模拟道路交通流

- 最早的交通元胞自动机模型——**第184号** (Wolfram)
- 推广：NaSch模型—德国学者Nagel和Schreckenberg于1992年提出

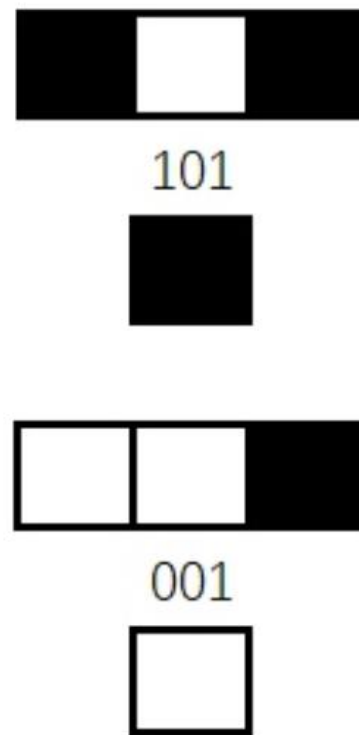
- 模型规定：

- 每个格点有两种状态：空、被某车辆占据。
- 一个格点最多只能被一辆车辆占据，并且每辆车恰占一个格点

- 符号说明：

- $v_i(t)$ 为第 i 辆车 t 时刻速度， $0 \leq v_i(t) \leq v_{max}$ ，只取整数
- $x_i(t)$ 为第 i 辆车 t 时刻位置
- $d_i(t)$ 为第 i 辆车在 t 时刻与前方紧邻车辆的间距，则有

$$d_i(t) = x_{i+1}(t) - x_i(t) - 1$$



- 加速过程:

- 若前方有空位, 车辆**加速**提高一个单位速度;
- 若前方格点有车辆占据, 则**滞留**在原位车速**0**:

$$v_i = \min\{v_i + 1, v_{max}\}$$

- 安全刹车:

- 若 $d_i(t) \leq v_i(t)$, 为避免碰车, 第 i 辆车减速到

$$v_i = \min\{v_i - 1, d_i\}$$

- 随机慢化:

- 随机慢化概率设为 P , 即有:

$$v_i = \begin{cases} \max\{v_i - 1, 0\}, & \text{以概率 } P \\ v_i, & \text{以概率 } (P - 1) \end{cases}$$

- 位置更新:

$$x_i(t + 1) = x_i(t) + v_i(t)$$

车辆的初始分布(构形)



第一步: 加速过程



第二步: 安全刹车过程



第三步: 随机慢化过程(以慢化概率 P)



第四步: 位置更新



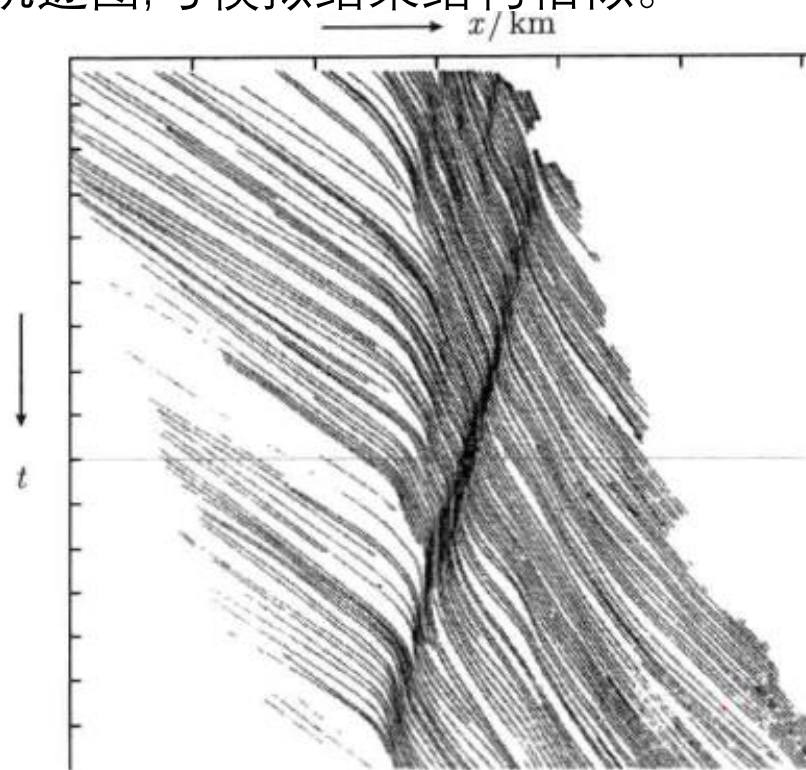
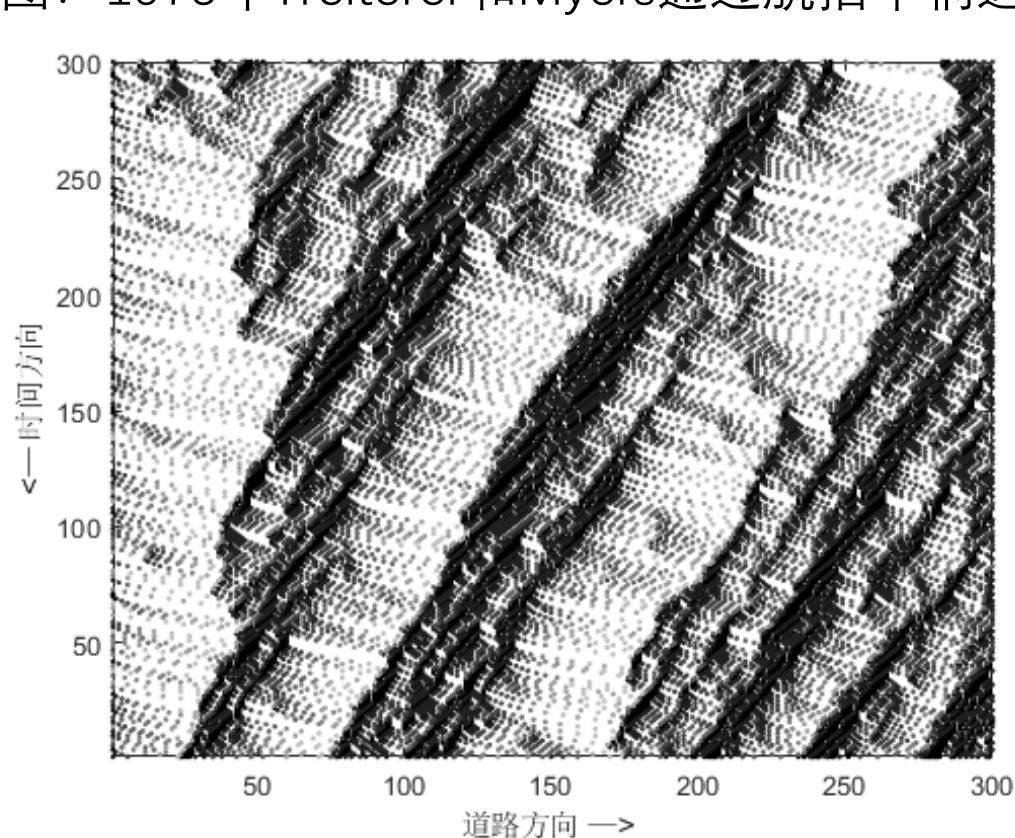
边界条件:

- 开口: 车辆以一定的概率驶离道路, 而新的车辆以泊松分布到达流来到道路的入口处。
- 周期: 从道路驶出的车辆又从另一端进入道路, 即道路头尾相连。

算例(carful):

道路离散化成300个元胞；车辆的速度0~6；初始道路车辆密度为30%；采用开口边界条件。

- 左图：模拟的车辆行驶时空图，运行了300个时间步。图中颜色表示在此位置有车，灰度越深则车速越慢，当成为完全黑色时则表明该车处于堵塞的滞留状态。
- 右图：1975年Treiterer和Myers通过航拍车辆运行轨迹图,与模拟结果结构相似。





Katarzyna Sznajd-Weron

Professor · Professor at Wroclaw University of Science and Technology

Poland

[ResearchGate](#)

Profile

Research (103)

Stats



案例4：Sznajd模型

2000 年波兰物理学家 K. Sznajd-Weron和J. Sznajd 提出了一种**新的元胞自动机规则**，命名为**Sznajd 模型**([Opinion evolution in closed community, International Journal of Modern Physics C, vol. 11, pp. 1157–1165, 2001](#))。他们的目的是应用元胞自动机的**局部相互作用机制**来研究社会中的一些演化现象，如：社会舆论形成、金融市场的投资行为等。开辟了新的研究方向：“**社会物理学**” (Sociophysics)

Sznajd 模型的基本设定

➤ 本质上是一类元胞自动机：

邻域 $R=1$ 、周期边界、元胞状态 $1/-1$ 表示正反两种观点

➤ 独特之处在于其**异步**更新规则：

▣ 在每个时间步随机地选出一对相邻的元胞（**一维**）或者互为相邻的四个元胞（**二维**）

▣ 检查它们的状态是否一致：

- ✓ 若它们一致，则将它们的邻居元胞状态也更新为相同；
- ✓ 若不一致，则按某种指定的规则更新它们的邻居状态。

➤ 稍有区别的更新规则容易构造 Sznajd 模型不同衍生版！

```
import networkx as nx
import ndlib.models.ModelConfig as mc
import ndlib.models.opinions as op

# Network topology
g = nx.erdos_renyi_graph(1000, 0.1)

# Model selection
model = op.SznajdModel(g)
config = mc.Configuration()
config.add_model_parameter('fraction_infected', 0.1)

model.set_initial_status(config)

# Simulation execution
iterations = model.iteration_bunch(200)
```

[Network Diffusion Library](#): execution of a Sznajd model simulation on a random graph. The initial infected node is set to be the 10% of the overall population.

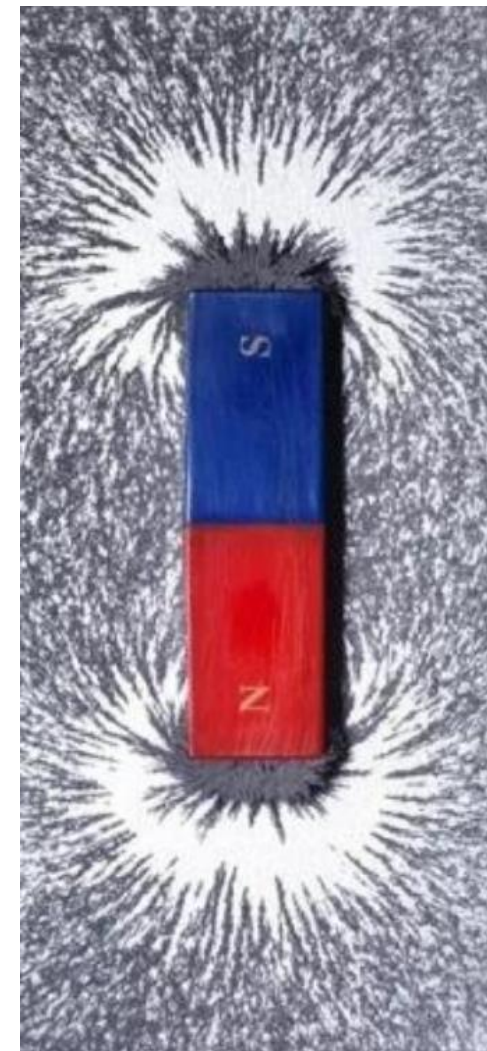
一维 Sznajd模型更新规则

针对随机选出的一对相邻元胞，根据状态 s_i 和 s_{i+1} 确定

(1) 如果它们状态相同 ($s_i s_{i+1} == 1$)，则取： $s_{i-1} = s_{i+2} = s_i$

(2a) 否则，令： $s_{i-1} = s_{i+1}$ ， $s_{i+2} = s_i$

- 更新规则(2a)体现了社会上个人的**从众行为**，对应Ising模型的反铁磁性
- 将最终演化导致三种稳定态（构型）之一：
 - ① 以 1/4 的概率出现全体赞成的状况（铁磁性吸引子）
 - ② 以 1/4 的概率出现全体反对的状况（铁磁性吸引子）
 - ③ 以 1/2 的概率出现一半赞成一半反对的状态（反铁磁性吸引子）



更新规则推广(sznajd1.m)

随机选出的一对相邻元胞的状态 s_i 和 s_{i+1} 不相同($s_i s_{i+1} = -1$)时, 邻居元胞 s_{i-1} 和 s_{i+2} 取值方式是任意的, 常见的三种改进方式:

(2b) $s_{i-1} = s_i, s_{i+2} = s_{i+1}$

(2c) 保持原来的状态

(2d) 以概率 p 取 1, 以概率 $1 - p$ 取 -1

模型的宏观表现量(表示赞成与反对者的差额比例)

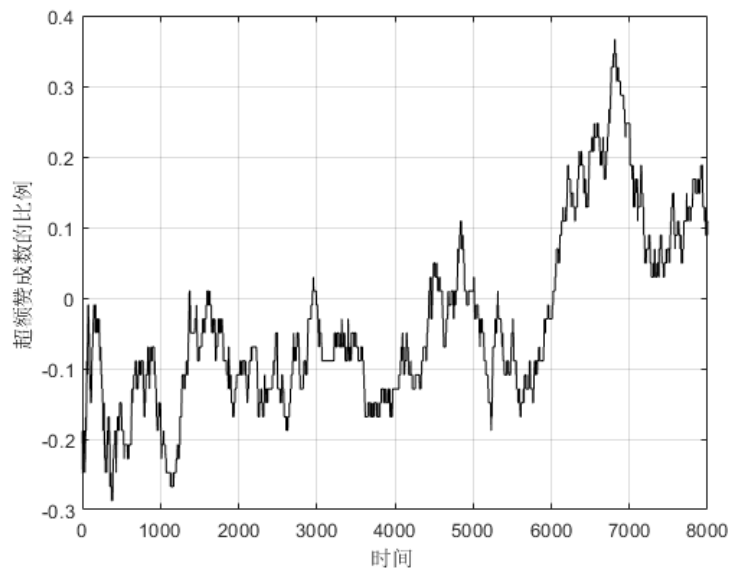
$$M(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i$$

这里 N 为元胞数, 等价于Ising模型的“平均磁化率”。该统计量的动态演化是模拟关心的数量。

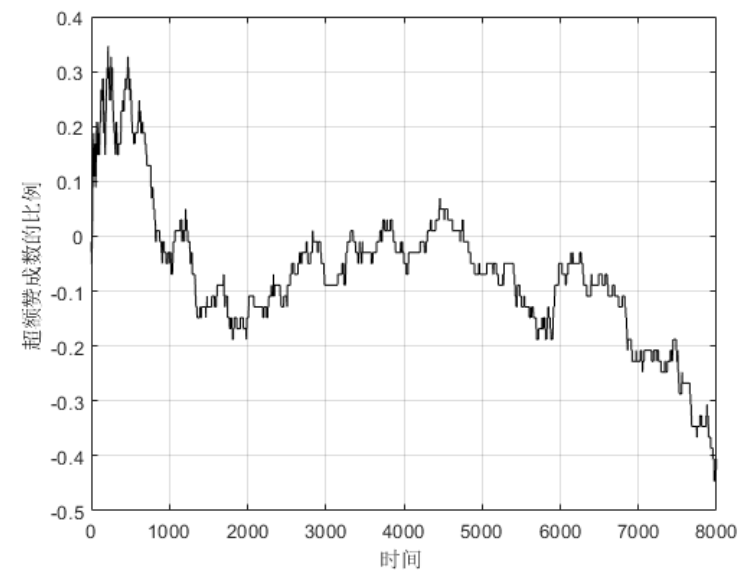
```
1 function sznajd1(Times, mode, p)
2     n = 101; M = zeros(1, Times);
3     S = randsample([-1,1], n, 'true');
4     M(1) = sum(S) / n;
5     for t = 2:Times
6         i = randsample(1:n, 1, 'true');
7         im = i - 1; ip = i + 1; ipp = i + 2;
8         switch i
9             case 1
10                 im = n;
11             case n-1
12                 ipp = 1;
13             case n
14                 ip = 1; ipp = 2;
15         end
16         if S(i)*S(ip)>0
17             S(im) = S(i);
18             S(ipp) = S(i);
19         else
20             switch mode
21                 case 'a'
22                     S(im) = S(ip); S(ipp) = S(i);
23                 case 'b'
24                     S(im) = S(i); S(ipp) = S(ip);
25                 case 'c'
26                     continue
27                 case 'd'
28                     if rand <= p; S(im) = 1; end
29                     if rand <= p; S(ipp) = 1; end
30             end
31         end
32         M(t) = sum(S) / n;
33     end
34     plot(M, 'k'); grid on; xlabel('t'); ylabel('M');
35 end
```

一维 Sznajd 模型蒙特卡罗模拟 网格尺寸101, $times = 8000$

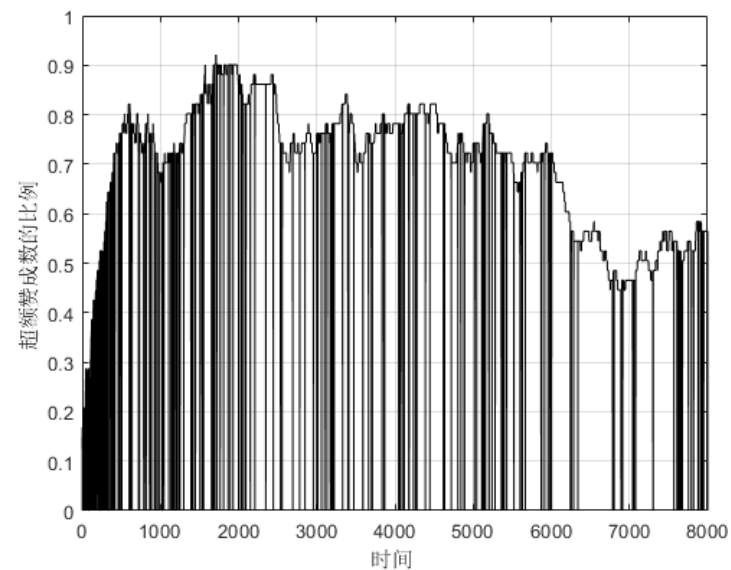
2a



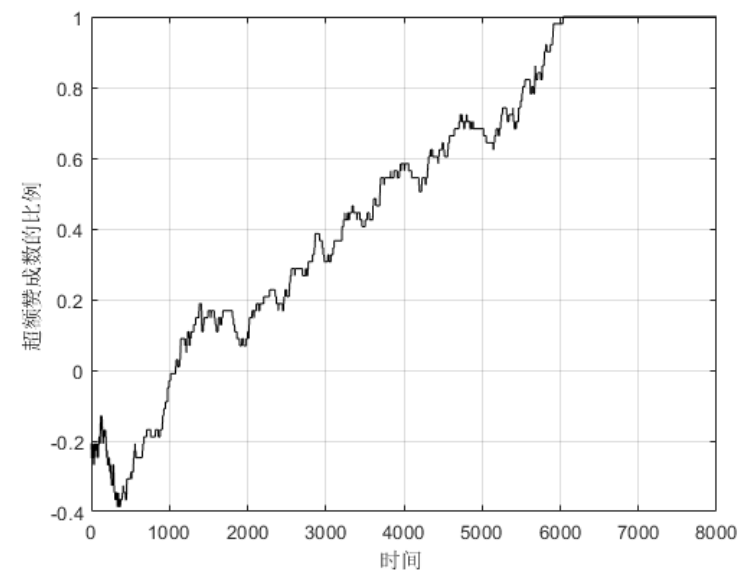
2b



2c



2d



二维 Sznajd 模型：以社会舆论形成为例

将社会上大众媒体对舆论的引导因素纳入更新规则。考虑二维平面上 $L \times L$ 尺寸的元胞网格，在每一时间步：

- ① 随机选出四个组成一个正方形的元胞，则它们的邻居是与四个元胞周围的八个元胞。

- ② 若四个元胞的状态一致，则

八个邻居的状态都更新为与四个元胞一样

否则，

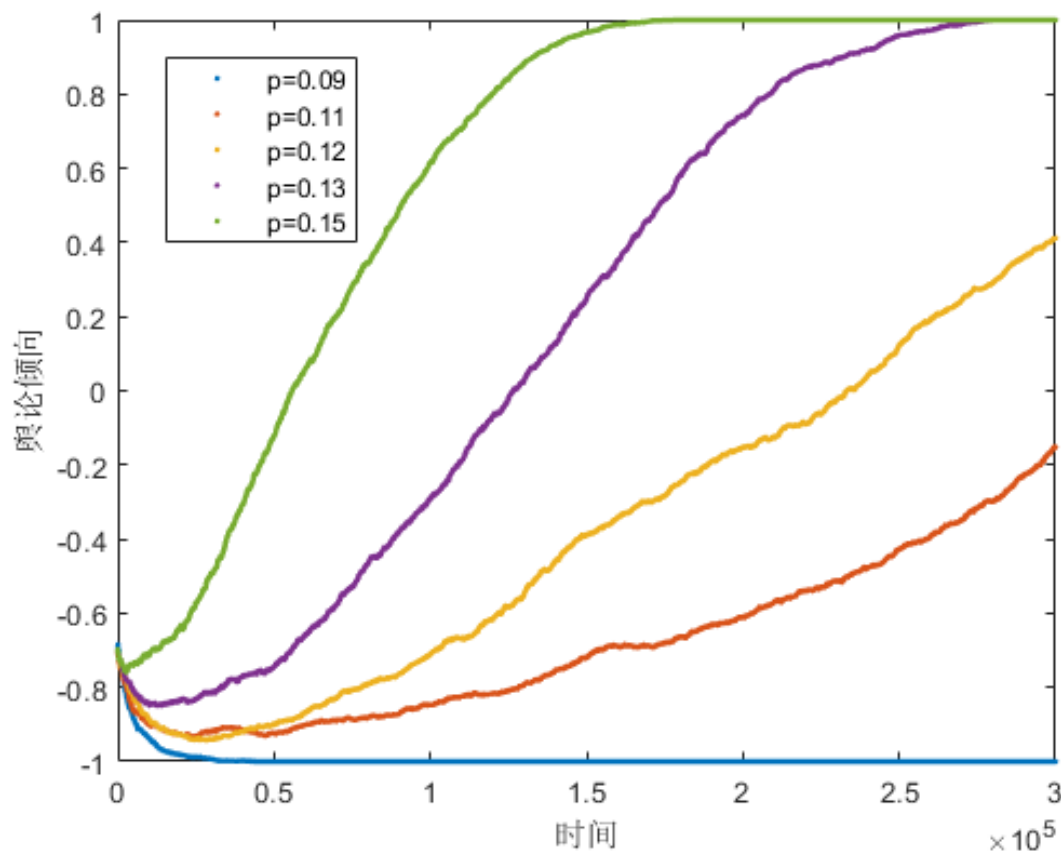
每个邻居独立地以概率 p 更新成状态1

这里， p 体现了社会上媒体对人们观点意见的影响程度，称为大众媒体的影响度。期望能够像二维伊辛模型那样存在相变。

```
39 - if (S(i, j)*S(i, jp) == 1 && ...  
40 -     S(i, j)*S(ip, j) == 1 && ...  
41 -     S(ip, j)*S(ip, jp) == 1)  
42 -     S(im, j) = S(i, j); S(im, jp) = S(i, j);  
43 -     S(i, jpp) = S(i, j); S(ip, jpp) = S(i, j);  
44 -     S(ipp, j) = S(i, j); S(ipp, jp) = S(i, j);  
45 -     S(i, jm) = S(i, j); S(ip, jm) = S(i, j);  
46 - else  
47 -     if U(t-1,1) < p; S(im, j) = 1; end  
48 -     if U(t-1,2) < p; S(im, jp) = 1; end  
49 -     if U(t-1,3) < p; S(i, jm) = 1; end  
50 -     if U(t-1,4) < p; S(ip, jm) = 1; end  
51 -     if U(t-1,5) < p; S(i, jpp) = 1; end  
52 -     if U(t-1,6) < p; S(ip, jpp) = 1; end  
53 -     if U(t-1,7) < p; S(ipp, j) = 1; end  
54 -     if U(t-1,8) < p; S(ipp, jp) = 1; end  
55 - end  
56 - M(t) = sum(sum(S)) / (n*n);
```


二维 Sznajd 模型模拟算例(sznajd2.m)

分别取大众媒体影响度为0.09, 0.11, 0.12, 0.13和0.15来运行上面的程序，初始赞成比例 $\rho = 0.15$



模拟的结果如图所示：

1. 当 $\rho > 0.13$ 时在社会上人们能达成一致赞成的状况
2. 当 $\rho < 0.12$ 时则总有一定比例的反对者存在

上述现象说明相变的发生，且相变的临界点处在0.12~0.13之间。

➤ 这个结论告诉我们，大众媒体对公众的影响不可小视，起着引导舆论倾向的作用！

案例5：元胞自动机模拟股市

二维CA可以建模城市的路网交通、凝聚物生长、森林火灾和金融市场价格变化等问题。

“考虑一支股票的价格变化情况”

- 在教材9.2节中，将股票价格的变化轨迹看做为一个几何布朗运动
- 实证研究显示：高频(时间间隔短于一天)时间序列数据的回报分布展示出明显的厚尾性。
 - 布朗运动在时间固定时服从正态分布，所以并不是一种合适的价格轨迹近似
- 人们需要采用某种具有厚尾性的分布来替代其中的正态分布，如列维 (Levy)分布等
- 问题是：为什么股票回报会呈现出厚尾性呢？或者说它是由什么机理造成的结果？

试图用元胞自动机来建模投资者的买卖行为，以此来再现股价变化的这种特性！

在平面上建立一个 $L \times L$ 尺寸的方形网格，每个格点 (i, j) 上安置一个元胞：

- 元胞被当成投资者，状态 $s(i, j)$ 取两个值：1和-1，分别代表买入/卖出一份股票；
- 邻域采用摩尔型，记 $N_{i,j}$ 为格点 (i, j) 的邻域。

在每一时间步，每个元胞的投资决策取决于两个方面的信息：

1. 它周围邻居元胞的买卖情况，这被称为局部信息；
2. 上一时刻股价的涨跌情况，这是滞后一期的市场全局信息。

这样，我们给每个元胞定义一个时变的场 h_t ：

$$h_t(i, j) = \sum_{\substack{(l, k) \in N_{i, j} \\ (l, k) \neq (i, j)}} s_t(l, k) - \alpha M_{t-1}$$

其中 $\alpha > 0$ 是系数，而 M_{t-1} 是市场的人均买卖差额量，定义为

$$M_t = \frac{1}{L^2} \sum_{i, j} s_t(i, j)$$

为了能够更真实地建模市场上的投资行为，我们认为在投资者群体中还会存在少许噪声交易者，他们的投资决策是完全随机决定的，设他们占群体的比例为 p （通常占很小的比例）。在每一时刻，除噪声交易者外其他投资者的买卖决策是根据他自己的场量大小 h_t 由下面的概率来确定：

$$P(s_{t+1} = 1) = \frac{1}{1 + e^{-2\beta h_t}}, \quad P(s_{t+1} = -1) = \frac{1}{1 + e^{2\beta h_t}}.$$

给出每个元胞状态的随机更新规则，市场的价格动态由如下定价规则确定：

$$\ln p(t+1) - \ln p(t) = \frac{M_t}{\lambda},$$

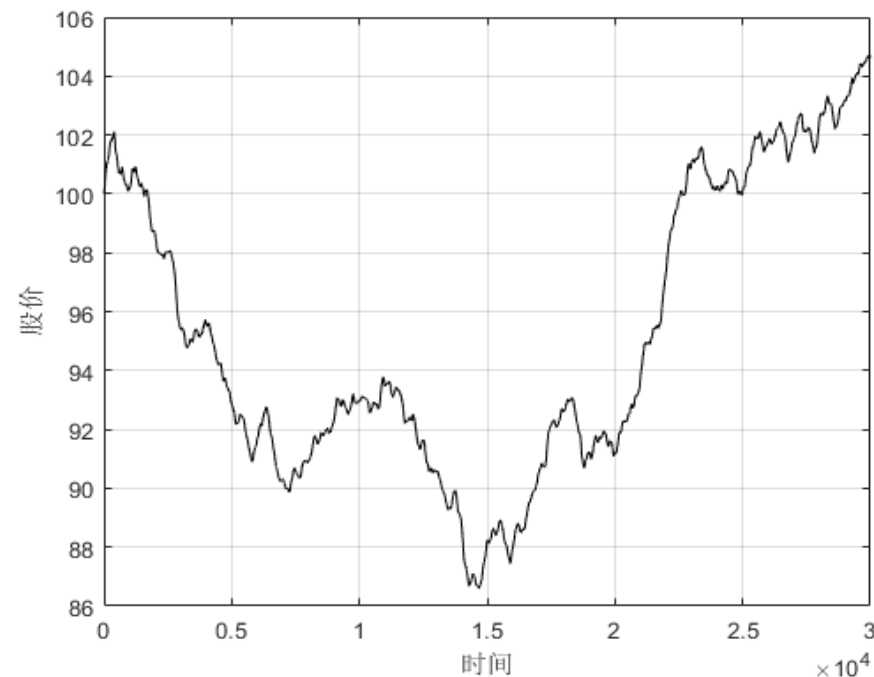
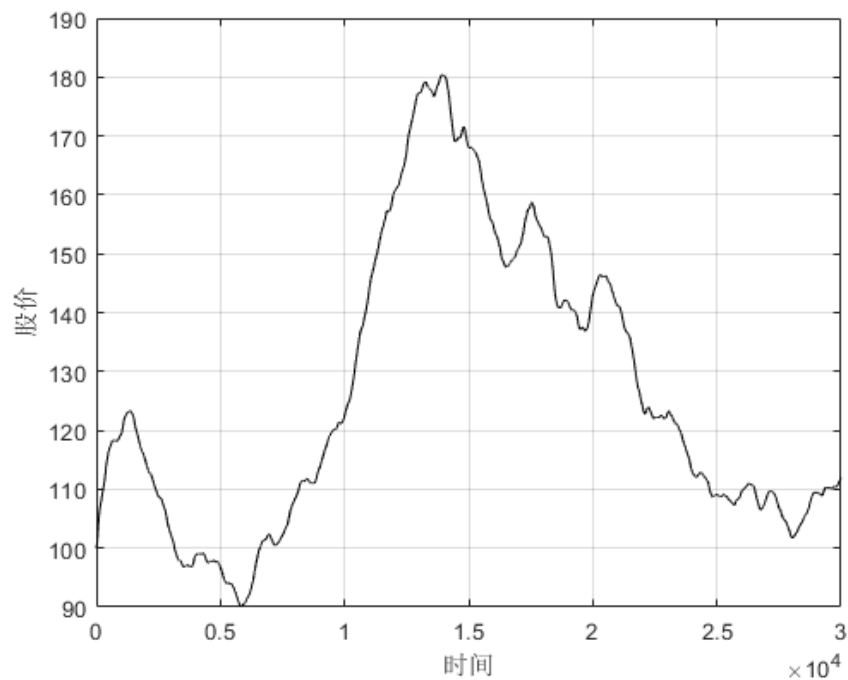
其中, $\lambda > 0$ 是市场流动率系数（市场深度系数）。股票在每一时刻的回报为

$$r_t = \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}} \approx \ln p(t+1) - \ln p(t).$$

容易发现： $r_t \propto M_t$ ，即回报正比于市场的买卖差额量。此时价格的动态轨迹为

$$p_{t+1} = p_t e^{r_t}$$

算例参数： $\alpha = 0.5, \beta = 1, \lambda = 100, p = 0.005$; 元胞的网格尺寸取 100×100 ;
初始价格设为100; 运行获得 30000 个时间步的价格轨迹。



- 左图为模拟结果: 该股票回报的经验分布的峰度是4.3761, 大于呈正态性的峰度3, 表明该分布具有一定的厚尾性; 而其偏度为0.3918, 说明具有稍许倾向于盈利的偏向。
- 右图: 给出了没有噪声交易者的股价动态轨迹 (取 $\alpha = 2.5$), 此时相应分布的峰度为3.1, 而偏度为-0.102, 接近于正态分布。

案例6：渗流模型(Percolation)

Simon Broadbent & John Hammersley, 1957

➤ 模拟流体能否穿透一块多孔介质

- 多孔介质中存在大量随机分布的毛细管，是一种随机性问题
- 流体能否穿透介质就归结为这些细小的通道是否连通的问题

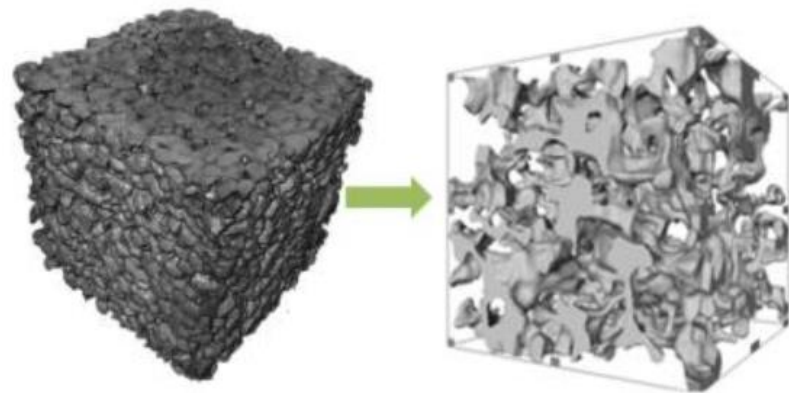
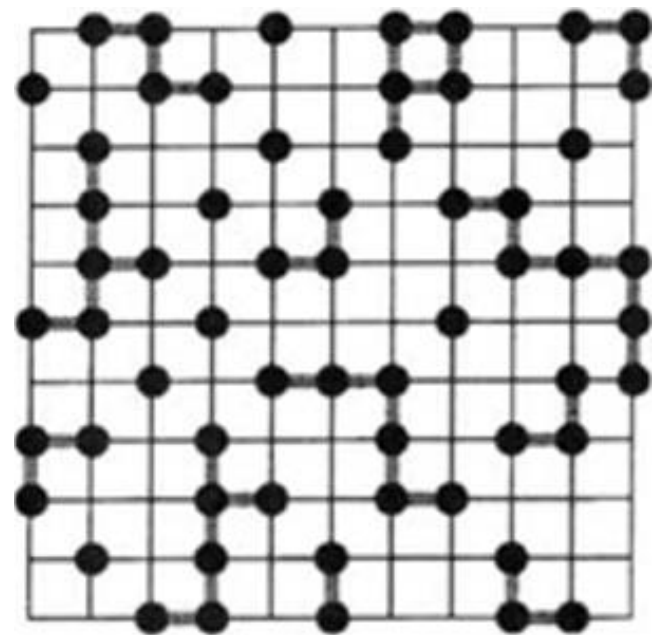
➤ 渗流模型的空间结构同元胞自动机十分相似

- 最简单的是二维的正方形网格上的渗流模型
- 渗流模型关注的是网格的边，称为键(bond)
- 每根键独立地以概率 p 开通，以概率 $1 - p$ 闭锁

开通概率 p 是一个关键的参数。通过随机模拟的试验可以证实：

存在一个临界概率 $p_c < 1$ ：当 $p < p_c$ 时，介质几乎不会发生渗流；而当 $p > p_c$ 时，介质几乎都会发生渗流。

故称 p_c 为渗流模型相变的临界值，且当 $p > p_c$ 时，模型中最大簇的大小与网格规模是成正比的！

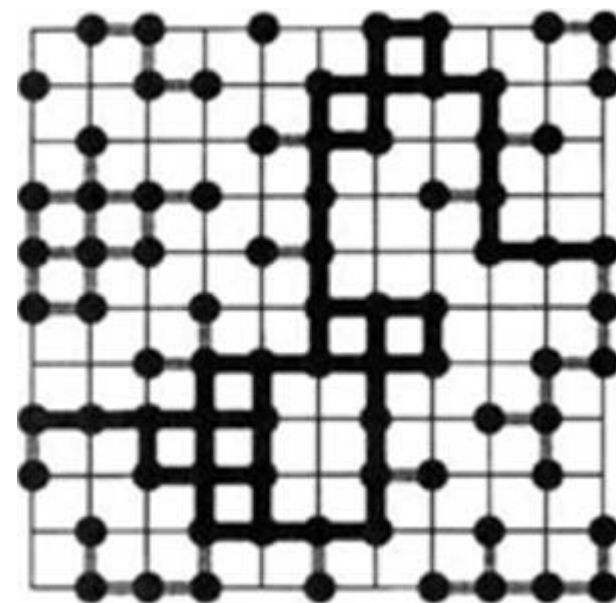


透水混凝土模型

透水混凝土孔隙模型

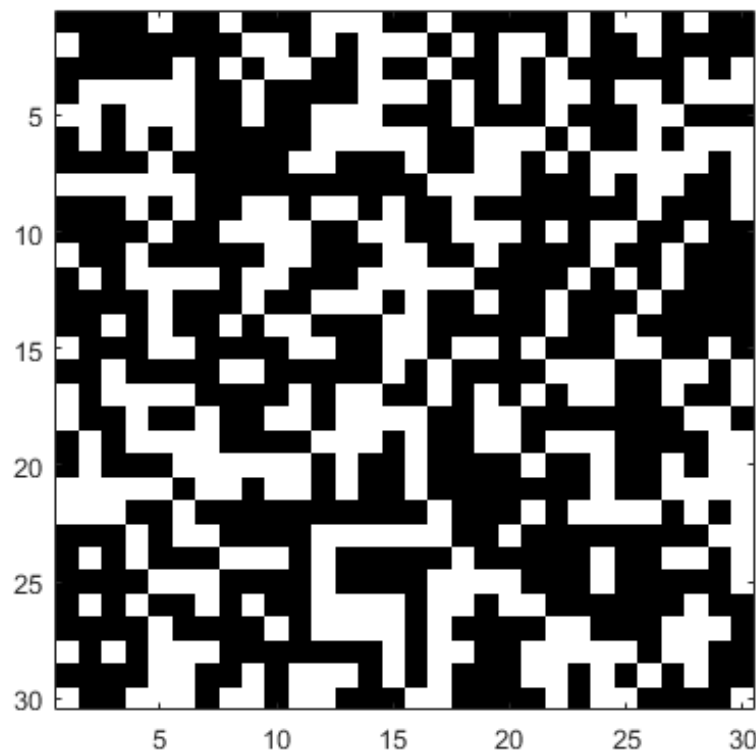
渗流类型

- **键渗流**：相互连通的粗线键构成一个簇(cluster)，并且至少有一个簇**形成介质的穿透**。
 - 如右图：有5个互不连通的簇，其中有一个连通介质左右边界的最大簇形成渗流！
- **位渗流**：关注网格的格点（称为位）是否被占据，而不是边的开通与否。
 - 把簇中连接两个状态都为1(被占据)的相邻格点的边**想象成**开通的边，这样该簇就成了像上面模型一样的连通部分。
 - 当存在一个连通左右边界的簇时，就认为**出现了渗流(Happen)**
 - 位渗流的临界值要大于键渗流(即边数要多于格点数)。

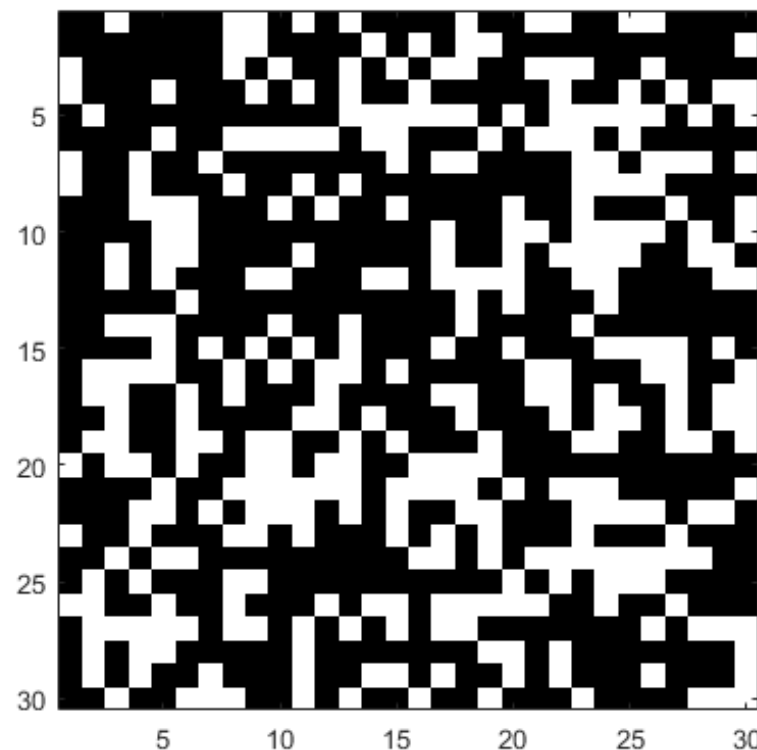


算例：模拟 $L \times L$ 网格位渗流模型（PercuShow.m）

在实际模拟研究时，人们必须在同一组参数下重复大量次数的试验，估计出在该组参数下发生渗流的概率。



未渗流 ($L=30, p=0.58$)



发生渗流 ($L=30, p=0.6$)

- 事实上，在二维正方形网格上的位相变临界概率是： $p_c = 0.59274$ 。渗流模型在数学上受到一定的重视，因为人们可以从数学上分析模型的有关临界性质，包括高维的渗流模型。渗流模型还可应用于其他领域，但这往往需要对模型作某些修改与扩展。例如反映股票价格波动的模型(Cont-Bouchaud模型)。

Homework 13 + 14

➤ 模拟探索传染病模型，参考文献：

- 元胞自动机模拟SIR模型.pdf
- 搜索相关论文…
- 复杂网络方法（调研）



备注：最后两次作业，写成报告格式，最后通过“学在浙大”提交电子版！

▼ 第14讲：复杂网络



作业

最后两周作业：传染病模型的计算机模拟方案 🕒 12-30发布

作业交付截止 2024.01.12 22:00 | 个人作业 (全部学生)