浙江大学 2018 – 2019 学年春夏学期

求是数学班《高等代数 II》测验 II

2019.05.05

1. 设实对称阵 $\boldsymbol{A} \in M_3(\mathbb{R})$ 的全部特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$, 且 $x_3 = (1,1,1)^T$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 2 的一个特征向量.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的全体特征向量;

(2) 求正交阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角阵;

(3) 求 $\boldsymbol{A}$.

2. 若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是 n 维欧式空间 V 的线性无关向量组, 证明: 存在一个向量 ξ, 使得 $\langle \alpha_i, \xi \rangle = 1 (i = 1, \cdots, n)$.

3. 设 T 是线性空间 V 上的正规变换, $2, 3, 6$ 是 T 的三个特征值, 证明: 存在向量 $v \in V$, 使得 $||v|| = \sqrt{3}, ||Tv|| = 7$.

4. 设 n 为正整数, $T \in L(\mathbb{F}^n)$ 定义如下: $T(z_1, \cdots, z_n) = (0, z_1, \cdots, z_{n-1})$, 求 $T^*(z_1, \cdots, z_n)$.

5. 设 $T \in L(V)$ 是自伴随算子, $\lambda \in \mathbb{F}, \varepsilon > 0$, 证明: 若有 $v \in V$, 使得 $||v|| = 1$, 且 $||Tv - \lambda v|| < \varepsilon$, 则 T 有特征值 λ', 使得 $|\lambda - \lambda'| < \varepsilon$.

6. 设 V 是复内积空间, $T \in L(V)$ 是正规算子, 使得 $T^9 = T^8$, 证明: T 是自伴随算子, 且 $T^2 = T$.

7. 设 $T \in L(V)$ 是自伴随算子, 若 $a, b \in \mathbb{R}$, 满足 $a^2 < 4b$, 证明: $T^2 + aT + bI$ 可逆.

8. 设 V 是 n 维实内积空间, 给定 V 的一个非零向量 v, 定义 $H_v : V \to V$ 如下: 对 $x \in V$,

$$H_v(x) = x - 2\frac{\langle x, v\rangle}{\langle v, v\rangle}v.$$

(1) 验证: H_v 是正交变换;

(2) 验证: $H_v(v) = -v$, 以及 $H_v(w) = w \Leftrightarrow v \perp w$;

(3) 设 $n \geq 3, v_1, \cdots, v_n$ 是 V 的正交基, 证明: 存在实数 $k_1, \cdots, k_n$, 使得 $k_1 H_{v_1} + \cdots + k_n H_{v_n}$ 是 V 上的恒等变换.

9. 对线性相关的向量组应用 Gram-Schmidt 过程, 结果会怎样?