5. 讨论下列函数在[0,1]的可积性：

(1) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right], & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$ (2) $f(x)=\begin{cases}-1, & x\text{ 为有理数},\\ 1, & x\text{ 为无理数};\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 为有理数},\\ x, & x\text{ 为无理数};\end{cases}$ (4) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解：(1)：$\forall\delta\in(0,1)$，f在$[\delta,1]$只有有限个间断点，故$\forall\varepsilon>0$，$\exists P_1$ s.t. $\sum_{i=1}^{n_1}\omega_i\Delta x_i<\frac{1}{2}\varepsilon$

对于f在$[0,\delta]$上，$\exists P_2$ s.t. $\|P_2\|=\frac{\varepsilon}{2\delta+1}$，$\sum_{i=1}^{n_2}\omega_i\Delta x_i<\sum_{i=1}^{n_2}\|P\|\cdot\Delta x_i<\frac{1}{2}\varepsilon$

将P_1与P_2合并为一个新划分，则$\exists P$ s.t. $\lim_{\|P\|\to0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$，由可积第二充要条件$f$可积。

(2) $\forall P$，$\lim_{\|P\|\to0}\omega_i\Delta x_i=2\lim_{\|P\|\to0}\Delta x_i=2\neq0$，故$f$在$[0,1]$不可积。

(3) $\forall P$，$\lim_{\|P\|\to0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\lim_{\|P\|\to0}\sum_{i=1}^{n}x_i(x_i-x_{i-1})>\lim_{\|P\|\to0}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-x_{i-1}^2)=\frac{1}{2}\neq0$.

故f在$[0,1]$不可积。

(4) $\forall\delta\in(0,1)$，f在$[\delta,1]$只有有限个不连续点，故$\forall\varepsilon>0$，$\exists P_1$ s.t. $\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{1}{2}\varepsilon$

对于$x\in(0,\delta)$，$\sum_{i=1}^{n_2}\omega_i\Delta x_i<\sum_{i=1}^{n_2}\|P_2\|\cdot\Delta x_i=\|P_2\|\delta$，只需令$\|P_2\|<\frac{\varepsilon}{\delta}$即可。

则$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$，即$f$在$[0,1]$可积。

6. 设$f(x)$在$[a,b]$上可积，且在$[a,b]$上满足$|f(x)|\geqslant m>0$（m为常数），证明$\frac{1}{f(x)}$在$[a,b]$上也可积.

解：$\forall P$，$\lim_{\|P\|\to0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0$（对$f$），且$f(x)=0$无解，即$m_i\neq0$.

对$\frac{1}{f}$，$0<\lim_{\|P\|\to0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i'\Delta x_i=\lim_{\|P\|\to0}\sum_{i=1}^{n}\frac{\omega_i}{M_i m_i}\Delta x_i<\frac{1}{m^2}\lim_{\|P\|\to0}\omega_i\Delta x_i=0$.

知$\lim_{\|P\|\to0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0$，即$\frac{1}{f(x)}$在$[a,b]$可积。

7. 设有界函数$f(x)$在$[a,b]$上的不连续点为$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，且$\lim_{n\to\infty}x_n$存在，证明$f(x)$在$[a,b]$上可积.

解：记$\lim_{n\to\infty}x_n=c$，$\exists\delta>0$，$\exists N>0$ s.t. x_n落在$U(c,\delta)$之外的点为有限多个。

故f在$[a,b]\setminus U(c,\delta)$上只有有限个不连续点，$\forall\varepsilon>0$ $\exists P_1$ s.t. $\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}$

$\wedge$对于$f:U(c,\delta)\to\mathbb{R}$，$\exists\eta>0$，$f(U(c,\delta))\subseteq(f(c)-\eta,f(c)+\eta)$

此时 $\exists P_2$. s.t. $\sum_{i=1} \omega_{2i}\Delta x_i < 2n\cdot 2\delta = 4n\delta$. 只需令 $n < \frac{\varepsilon}{8\delta}$. 即有 $\sum_{i=1} \omega_{2i}\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}$

将 P_1, P_2 合并为一个对 $[a,b]$ 的划分. 则 $\sum_{i=1}^{n} \omega_i\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积

9. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $A \leqslant f(x) \leqslant B$, $g(u)$ 在 $[A,B]$ 上连续, 证明复合函数 $g(f(x))$ 在 $[a,b]$ 上可积.

解: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 至多有限个间断点 $\Leftrightarrow$ $f([a,b]) = \bigcup I_k$. I_k 是有限长的区间. $g(u)$ 在每一段 I_k 上都连续. 故 $g(u)$ 在每一段 I_k 上可积. 从而 $g(u)$ 在 $f([a,b])$ 可积. 即 $g(f(x))$ 在 $[a,b]$ 可积.