

一、一单行道上有  $n$  个车位，按车行方向分别记为  $1, 2, \dots, n$ 。每个车位有空闲和占用两种状态，车位  $i$  空闲的概率为  $\alpha_i > 0$ ，且各车位是否空闲相互独立。车辆行进时至多只能看到车行前方最近的一个车位的状态。若在车位  $i$  上停车的效用为  $U_i > 0$ ，未在  $n$  个车位上停车的效用为  $0$ 。一车从该道路起点出发沿道路单向行驶，试寻找一停车策略，使期望效用达到最大。

(1) 记  $V_i, i=1, \dots, n+1$  为驶过车位  $i-1$  后（车位  $0$  为道路起点）开始计划停车所可能获得的最大期望效用，试写出  $V_i$  所满足的递推关系；

(2) 令  $x_i = V_i - V_{i+1}, i=1, \dots, n$ ，试写出求解该问题的以  $x_i$  为决策变量的数学规划。

二、中铁网发售某地区的铁路车票，近期推出一款名为“中铁卡”的优惠产品。每张中铁卡售价为  $C$  元，有效期为  $T$  天，可随时购买，立即生效。购买了中铁卡的乘客在其有效期内购买面值为  $P$  元的车票只须实付  $\beta P$  元，其中  $0 < \beta < 1$ 。已知准备购买的  $n$  张车票价格  $p_j$  和购票时间  $t_j, j=1, \dots, n$ ，其中  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ ，欲使购买中铁卡和车票支付的总金额最小。

为此，构造有向图  $G=(V, E)$ ，其中  $V=\{u, w, v_1, \dots, v_n\}$ ， $v_j$  对应于需购买的第  $j$  张车票。试确定  $G$  的边和每条边的权，使该问题等价于寻找图  $G$  中自  $u$  到  $w$  的一条最短有向路。