浙江大学 2018 − 2019 学年秋冬学期

求是数学班《高等代数 I》测验 I

2018.10

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&-4\end{pmatrix}$, $\alpha=\begin{pmatrix}x\\1\\1\end{pmatrix}$, 若 $A\alpha$ 与 α 线性相关, 求 x 的值.

2. 设 D 为 $\mathbb{R}_n[x]$ 上的线性映射, 对 $\mathbb{R}_n[x]$ 中的多项式 $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, $D(p(x)):=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}$.

(1) 求 D 关于基 $\beta=1,x,\cdots,x^n$ 的矩阵;

(2) 已知 $\gamma=\{1,k_1x,\cdots,k_nx^n\}$ 是 $\mathbb{R}_n[x]$ 的另一组基, D 关于 γ 的矩阵为

$$\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&0&1\\0&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix},$$

求 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 的值.

3. 设 V 是由如下四个矩阵生成的 $M_2(\mathbb{F})$ 的子空间:

$$A_1=\begin{pmatrix}-1&4\\2&0\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}5&1\\0&3\end{pmatrix},A_3=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&4\end{pmatrix},A_4=\begin{pmatrix}-2&9\\4&-5\end{pmatrix}.$$

(1) 求 $\dim V$ 和 V 的一组基;

(2) 映射 $f:V\to F$ 定义为: $f(A)=\mathrm{tr}\ A$, (其中 $\mathrm{tr}\ A$ 表示矩阵 A 的迹), $\ker f=\{A\in V\,|\,f(A)=0\}$, 求 $\dim\ker f$ 并找出 $\ker f$ 的一组基.

4. 设 T 是 n 维线性空间 V 上的一个线性变换, 证明: 可以在 V 中选取这样的两组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$, 使得对 V 中的任意向量 v, 若 $v=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\alpha_i$, 则 $T(v)=\sum\limits_{i=1}^{r}k_i\beta_i(1\le r\le n)$.

5. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的一个 n 维线性空间, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是它的一组基, 记$V_1=\mathrm{span}\{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\}$, $V_2=\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\alpha_i\,\middle|\,\sum\limits_{i=1}^{n}k_i=0,k_i\in\mathbb{F}\right\}$.

(1) 证明: V_2 是 V 的子空间;

(2) 证明: $V=V_1\oplus V_2$.

6. 设 $V_1,V_1,\cdots,V_n$ 和 W 都是线性空间 V 的子空间, 证明: 如果 W 包含在 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}V_i$ 中, 那么 W 必包含在某个 $V_i(1\le i\le n)$ 中.

7. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关, 且可以由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出. 证明: 必存在某个向量 $\beta_j(1\le j\le t)$, 使得向量组 $\beta_j,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

8. 设 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间, 定义 $V_{\mathbb{C}}:=\{u+\mathrm{i}v\,|u,v\in V\}$. 试给出 $V_{\mathbb{C}}$ 上的加法运算和在复数域 $\mathbb{C}$ 上的数乘运算, 使得 $V_{\mathbb{C}}$ 成为复数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间. 并试着猜测 V 的基和维数与 $V_{\mathbb{C}}$ 的基和维数之间的关系.