1. 依题可定义 X 中的关系"$\sim$"为，$x\sim y \Leftrightarrow \exists A\in\mathcal{F}$, s.t $x,y\in A$.
依次可以验证"$\sim$"满足：自反性，对称性，传递性.
故"$\sim$"确实为 X 中的等价关系. 根据"$\sim$"定义可知 $X/\sim=\mathcal{F}$

2. 证：

"$\Rightarrow$" 由于 $r>0$，故 $\exists\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\in r$. s.t $a_n\geq 0$

又 $r\neq 0$，故 $\exists q\in\mathbb{Q}$. s.t $\forall N\in\mathbb{N}_+$，$\exists n>N$ 时，$|a_n|=a_n\geq q$

于是：$N=1$，$\exists k_1>N$，s.t $a_{k_1}\geq q$

$N=k_1$，$\exists k_2>k_1$，s.t $a_{k_2}\geq q$

$\vdots$

$N=k_n$，$\exists k_n>k_{n-1}$，s.t $a_{k_n}\geq q$

一直下去，构造有理数列 $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$

因为 Cauchy 列的子列也是 Cauchy 列，故 $\{a_{k_n}\}$ 也是 Cauchy 列.

可以验证 $\{a_{k_n}-q\}_{n=1}^{\infty}$，$\{a_n-q\}_{n=1}^{\infty}\in r-q$ 均为 Cauchy 列.

又 $\because\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列，故 $\forall 0<q'\in\mathbb{Q}$，$\exists N_0\in\mathbb{N}_+$，s.t $k_n, n>N_0$ 时

$|a_{k_n}-a_n|<q'$，故而有.

$k_n, n>N_0$，$|(a_{k_n}-q)-(a_n-q)|<q'$.

以而 $\{a_{k_n}-q\}\sim\{a_n-q\}$

i.e $\{a_{k_n}-q\}\in r-q$

故 $r-q\geq 0$

"$\Leftarrow$" 若 $r-q\geq 0$，则有 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}\in r-q$. s.t $b_n\geq 0$. i.e $b_n+q\geq 0$

因此 $\{b_n+q\}_{n=1}^{\infty}\in r-q+q=r$

故而 $r\geq 0$.

若 $r=0$，取 $q'\in\mathbb{Q}$ 满足 $q>q'>0$，则

$\exists N_0\in\mathbb{N}_+$，$n>N_0$ 时，$|b_n+q|<q'$

i.e. $-q-q'<b_n<q'-q<0$

这与 $b_n\geq 0\ (\forall n\in\mathbb{N}_+)$ 矛盾.

故 $r>0$.

3. 证明：实数 a, b，在关系 "$a=b, a>b, b>a$" 中只能有一种关系成立

令 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\in a$，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}\in b$，则有 $\{a_n-b_n\}_{n=1}^{\infty}\in a-b$ (1)

若 $a>b$，则 $a\neq b$ 且 $a-b\geq 0$，由(1)知 $a-b>0$，由第二题

知 $\exists 0<q'\in\mathbb{Q}$，s.t. $a-b-q'\geq 0$，则 $\exists\{c_n\}_{n=1}^{\infty}\in a-b-q'$，s.t. $c_n\geq 0$

从第二题证明知 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\overset{def}{=}\{c_n+q'\}_{n=1}^{\infty}\in a-b$，并且 $A_n\geq q'$，$\forall n\in\mathbb{N}_+$

$\forall 0<q\in\mathbb{Q}$ 且 $q<q'$，$\exists N_0\in\mathbb{N}_+$，s.t. $n>N_0$ 时，

$|a_n-b_n-A_n|<q$，或者 $|b_n-a_n+A_n|<q$ (2)

若此时还有 $b-a>0$，则 $b\neq a$，$b-a\geq 0$，故而有 $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}\in b-a$

s.t. $B_n\geq 0$，$\forall n\in\mathbb{N}_+$，由(2)可知 $\{-A_n\}_{n=1}^{\infty}\in b-a$，从而

$\{B_n\}_{n=1}^{\infty}\sim\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$，故而对上述 $q>0$，总有 $N_1\in\mathbb{N}_+$

当$n > N_1$时，

$$|B_n-(-A_n)| = |B_n+A_n| < q.$$

或者. $-A_n-q < B_n < -A_n+q < -q+q < 0$.

这与$\forall n \in N_+$, $B_n \geq 0$矛盾. 故而$a>b$时. $a=b$与$b>a$均不可能成立. 同理可证. $b>a$时, $a=b$与$a>b$均不可能成立

当$a=b$时, 根据$a>b$与$b>a$的定义可知, $a>b$与$b>a$均不可能成立.

再证: 实数a与0的关系只有"$a=0$, $a>0$. $0>a$"三种情况.

$\forall \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in a$, 若$\{a_n\} \in O$, 则$a=0$, 若$\{a_n\} \notin O$, 则存在$0 < q_0 \in Q$, 用第二题中类似的方法构造$\{a_n\}$的子列$\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, 使得每一项$a_{k_n}$, 有$|a_{k_n}| \geq q_0$. 我们断言. 当$\{a_{k_n}\}$中有无穷多项满足$a_{k_n} \geq q_0 > 0$时, $0 \geq a_{k_n}$至多有有限项, 否则. $a>0$与$0>a$同时成立, 这与之前所述矛盾, 从而此时$a>0$成立. 同理, 当$\{a_{k_n}\}$有无穷多项满足$0 \geq a_{k_n}$时, $0>a$成立.

综上, 命题得证.

4.

- $\varnothing, \mathbb{R}$是$\mathbb{R}$中的开集，故而$\varnothing, \mathbb{R} \in \mathcal{F}$

- $\forall x_0 \in U \cap V$，则$x_0 \in U$并且$x_0 \in V$，
由于U是开集，故而有x_0的邻域$O(x_0; \varepsilon_1)$，s.t
$O(x_0; \varepsilon_1) \subset U$，同理有$O(x_0; \varepsilon_2) \subset V$.
令$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$，则$O(x_0, \varepsilon) \subset U \cap V$.
故而x_0是$U \cap V$的内点，由于x_0的任意性知
$U \cap V$是$\mathbb{R}$中的开集，从而$U \cap V \in \mathcal{F}$.

- $\forall x_0 \in \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$，则有某个$i_0 \in J$. s.t
$x_0 \in U_{i_0}$. 又$U_{i_0} \in \mathcal{F}$，故而有$O(x_0; \varepsilon_0) \subset U_{i_0}$，
从而$O(x_{i_0}, \varepsilon_0) \subset \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$. 因而$x_0$为$\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$的内
点. 由x_0的任意性知. $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$为$\mathbb{R}$中的开集，从而结
论成立.