note

luojunxun

2023 年 4 月 10 日

例 7 设 $f(z)=u(r,\theta)+\mathrm{i}v(r,\theta)$ 对所有 $z\in\mathbb{C}\left(z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)$ 解析, 证明

$$\int_0^{2\pi}[u(r,\theta)\cos\theta-v(r,\theta)\sin\theta]\mathrm{d}\theta=0$$

证设 $f(z)$ 沿着闭曲线 $|z|=1$ 的积分, $C:|z|=1$ 的参数表示

$$C:z(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\quad 0\leqslant\theta\leqslant2\pi$$

由柯西积分定理知

$$\begin{aligned}0=&\oint_{|z|=1}f(z)\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}[u(r,\theta)+\mathrm{i}v(r,\theta)]\mathrm{i}[\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta]\mathrm{d}\theta\\=&\mathrm{i}\int_0^{2\pi}[u(r,\theta)\cos\theta-v(r,\theta)\sin\theta]\mathrm{d}\theta\\&-\int_0^{2\pi}[u(r,\theta)\sin\theta+v(r,\theta)\cos\theta]\mathrm{d}\theta\\&\therefore\int_0^{2\pi}[u(r,\theta)\cos\theta-v(r,\theta)\sin\theta]\mathrm{d}\theta=0\end{aligned}$$

例 10 计算积分 $\oint_C\frac{\sin z}{4z+\pi}\mathrm{d}z$, 其中 C 是 $|z|=1$ 逆时针方向.(Cauchy 公式的逆用)

$$\text{解}\oint_C\frac{\sin z}{4z+\pi}\mathrm{d}z=\frac{1}{4}\oint_{|z|=1}\frac{\sin z}{z-\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}z$$
$$=\frac{1}{4}\cdot2\pi\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\mathrm{i}$$

例 11 计算积分 $\oint_C \frac{1}{4z^2+4z-3}\,\mathrm{d}z$, 其中 C 为 (a) $|z|=1$, 逆时针方向; (b) $\left|z+\frac{3}{2}\right|=1$, 逆时针方向；(c) $|z|=3$, 逆时针方向. 解 $\frac{1}{4z^2+4z-3}=\frac{1}{(2z-1)(2z+3)}$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{4}\frac{1}{(z-1/2)(z+3/2)}\\
&=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{z-1/2}-\frac{1}{z+3/2}\right)
\end{aligned}
$$

(a)
$$
\begin{aligned}
\oint_{|z|=1}\frac{1}{4z^2+4z-3}\,\mathrm{d}z&=\frac{1}{8}\left(\oint_{|z|=1}\frac{1}{z-1/2}\,\mathrm{d}z-\oint_{|z|=1}\frac{1}{z+3/2}\,\mathrm{d}z\right)\\
&=\frac{1}{8}\cdot 2\pi\mathrm{i}=\frac{\pi\mathrm{i}}{4};
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\oint_{\left|z+\frac{3}{2}\right|=1}\frac{1}{4z^2+4z-3}\,\mathrm{d}z=&\frac{1}{8}\left[\oint_{\left|z+\frac{3}{2}\right|=1}\frac{1}{z-1/2}\,\mathrm{d}z\right.\\
&\left.-\oint_{\left|z+\frac{3}{2}\right|=1}\frac{1}{z+3/2}\,\mathrm{d}z\right]\\
&=-\frac{1}{8}2\pi\mathrm{i}=-\frac{\pi\mathrm{i}}{4}
\end{aligned}
$$

(c)
$$
\begin{aligned}
\oint_{|z|=3}\frac{1}{4z^2+4z-3}\,\mathrm{d}z&=\frac{1}{8}\left[\oint_{|z|=3}\frac{1}{z-1/2}\,\mathrm{d}z-\oint_{|z|-3}\frac{1}{z+3/2}\,\mathrm{d}z\right]\\
&=\frac{1}{8}(2\pi\mathrm{i}-2\pi\mathrm{i})=0.
\end{aligned}
$$

定理 3.7 (积分平均值定理) 设 $f(z)$ 在包含闭圆 $C=\{z;\ |z-z_0|=R\}$ 的单连通区域 D 内解析, 则

$$
f\left(z_0\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+\mathrm{Re}^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{d}\theta
$$

定理 3.8 (最大模原理) 设 $f(z)$ 是 D 内不恒为常数的解析函数, 则 $|f(z)|$ 的最大值不能在 D 内取到.

定理 3. 7$'$ (最大模原理) 设 $f(z)$ 在有界区域 D 上解析且不恒为常数. 如果 $f(z)$ 在 $\bar{D}$ 上连续, 设 M 是 $|f(z)|$ 在 $\bar{D}$ 上的最大值, 则它只能在边界上达到.

(最小模原理) 设 $f(z)$ 是 D 内不恒为常数的解析函数, 如果对于所有的 $z\in D$ 有 $|f(z)|\geqslant m(m>0)$, 则 $|f(z)|$ 在 D 内任何点处都不能达到最小值 m.