一、实数系的连续性

1. 确界存在原理（实数系连续性定理）：非空有上界的数集必有上确界，非空有下界的数集必有下确界
2. 非空有界数集的确界是唯一的
3. Dedekind 切割定理（戴德金切割定理）在实数集的一个切割中，或者其中一个有最大数，或者其中一个有最小数

二、数列极限

1. 收敛数列的极限唯一
2. 收敛数列必有界
3. 数列的保序性 两个数列的极限存在一个大小关系，那么在 n 足够大以后，数列的每一项都成立这个大小关系
4. 由数列的保序性可以推出数列的保号性
5. 数列的夹逼性 通常用来求数列极限 可以得到 limΣ（ai^n）^1/n 极限等于 max{ai}

三、量

1. 无穷大量 对于任意给定的数都能比它更大
2. 无穷小量 对于任意给定的大于零的小量，都能比它更小
3. 无穷大量和无穷小量之间的证明可以通过互相取倒数来证明 无穷大量的倒数是无穷小量 无穷小量的倒数是无穷大量（这是充分必要的）
4. 无穷大量和有限量的乘积还是无穷大量（除法也是乘法）
5. 待定型极限求法 Stolz 定理 使用条件！ 分母是严格单调增加的正无穷大量

四、收敛准则

1. 单调有界函数必收敛
2. Bn=1+1/2+1/3+……+1/n- ln(n) 的极限是γ（欧拉常数） 证明 Bn 单调递减有下界 用极限为 e 的两个式子 先证明单调递减再说明有界 Bn 还可以用来证明和 ln(n+1) 泰勒展开相关的自然数正负交替倒数和等于 ln2 的问题 （用 b2n-bn）
3. 闭区间套定理 闭区间套的两端是运动的渐进的点 最终只会有唯一的一个数属于所有的闭区间
4. 实数集是不可列集 主要是由于无理数集合不可列 有理数集事实上是可列的
5. 数列的子列的收敛必定和数列本身相同 这常常用来证明数列发散 用不同的子列得到不同的极限
6. Bolzano-Weierstrass 定理（波尔查诺-维尔斯特拉斯定理） 有界数列必有收敛子列
7. Cauchy 收敛准则 数列收敛的充要条件 当且仅当数列是基本数列 （对于给定的小量 总可以找到一个数 使得这之后所有的数列的值的差都小于这个小量）

五、函数极限与连续函数

1. 同数列极限一样 函数极限也具有相应的唯一性 保序性 保号性 局部有界性 也有夹逼性
2. Heine 定理 对于任意给定的极限是函数的极限取值点（包括无穷）的数列，相应的函数值都应该是函数的极限 （常用来证明函数的极限不存在）
3. 函数极限存在的 Cauchy 收敛定理 （与数列不同的是 函数的极限点的取值更加多样）
4. 连续函数的定义就是函数在各个点的极限等于函数值函数在这个点的取值本身（函数在某点的极限和在这一点的取值没有必然的关系）
5. 三类不连续点 i 跳跃点 j 有一边函数极限不存在 k 可去间断点
6. Riemann 函数在任意点的函数极限是零 （有理点是函数的第三类不连续点 无理点

是函数的连续点）

7. 单调函数的不连续点必定是第一类不连续点
8. 复合函数连续需要两个函数都是连续函数（否则可以举出反例）

六、量的阶和比较

1. 有界量 同阶无穷量 等价量
2. 闭区间上的连续函数 有界性定理 最值定理 零点存在性定理 中间值定理（可以取到两个数之间的任何一个数 构造辅助函数结合零点存在性定理）
3. 函数一致连续 一致连续的函数一定连续 反之不一定成立
4. 证明函数不是一致连续的方法 找两个极限相同的点列 让它们对应的函数值的差的极限不是零 P96
5. Cantor 定理 闭区间上的连续函数一致连续

七、微分

1. 可微可导必定连续 可微的充要条件就是可导
2. 反函数的导数是原函数(变量是 y)的导数的倒数
3. 乘积形式的导数是单个求导和其他原函数相乘再相加
4. 幂指函数用对数求导法
5. (sinx)^(n)=sin(x+nπ/2) (cosx)^(n)=cos(x+nπ/2)
6. Leibniz 公式 类似于牛顿二项式定理

八、微分中值定理

1. Fermat 引理 极值点处的导函数如果存在那么导数值就为零
2. Rolle 中值定理 闭区间上连续，开区间上可导的函数，如果端点函数值相等，那么开区间中必至少有一点的导函数值等于零
3. Lagrange 中值定理 闭区间上的连续函数在开区间上可导，那么任意两点之间割线的斜率和两点之间某一点的导函数值相等 Rolle 中值定理实际上是 Lagrange 中值定理的特殊情况
4. Cauchy 中值定理 两个闭区间上连续，开区间上可导的函数，单个函数任意两点函数值差的商和两点之间至少某一点处的导函数的商相等 Cauchy 中值定理实际上是 Lagrange 中值定理的参数表达形式
5. 一阶导函数和函数单调性相关 二阶导函数和函数的凸性相关 正下凸 负上凸
6. 导函数的变号零点是拐点 没有定义的点有可能是拐点
7. Jensen 不等式（琴生不等式）
8. L'Hospital 法则

九、泰勒公式

1. 常见泰勒展开
2. 求渐近线方程 注意没有定义的点

十、不定积分

1. 换元积分 分部积分
2. 有理函数的积分

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots\in(-\infty,+\infty)$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots,x\in(-1,1]$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots,x\in(-1,1)$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2-x^3+\cdots,x\in(-1,1)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots,x\in(-1,1)$$

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots+x\in[-1,1]$$

$$\arcsin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{112}x^7+\frac{35}{1152}x^9+\cdots+,x\in(-1,1)$$

$$\tan x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!}x^{2n-1}=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+\frac{1382}{155925}x^{11}+\frac{2}{60}$$

$$\int x^\alpha\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C, & \alpha\neq-1,\\ \ln|x|+C, & \alpha=-1;\end{cases}\qquad \int\ln x\mathrm{d}x=x(\ln x-1)+C;$$

$$\int a^x\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C,\text{特别地}\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C;$$

$$\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C;\qquad \int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C;$$

$$\int\tan x\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C;\qquad \int\cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C;$$

$$\int\sec x\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C;\qquad \int\csc x\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C;$$

$$\int\operatorname{sh}x\mathrm{d}x=\operatorname{ch}x+C;\qquad \int\operatorname{ch}x\mathrm{d}x=\operatorname{sh}x+C;$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C;\qquad \int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C;$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C;\qquad \int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C;$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C;$$

$$\int\sqrt{x^2\pm a^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2\pm a^2}\pm a^2\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|\right)+C.$$