一、中世纪英国学者 Alcuin 在他的著作中给出了下面的过河问题。现有n件物品需用一艘船从河的左岸运至右岸。两件不同的物品之间可能存在排斥性，即它们不能同时位于河的一侧，除非此时船也在河的这一侧。用图$G=(V,E)$表示物品之间的排斥性。V中每个顶点表示一件物品，两个顶点之间有边相连当且仅当这两个顶点表示的物品是排斥的。所有物品和船的一种状态可用三元组(V_L,V_R,b)表示，其中V_L,V_R分别代表位于河左岸和右岸的物品集，且有$V_L\cup V_R=V$，$V_L\cap V_R=\varnothing$，$b\in\{左,右\}$表示船所在的位置。船从左岸到达右岸，或从右岸到达左岸的过程称为一次运输。每次运输时船至多装载k件物品，k称为船的容量。现要求给出一由多次运输组成的可行运输方案，将所有物品从左岸运到右岸。

（1）请用图论语言表示一次允许的运输过程导致的状态变化，进而完整描述上述问题。

（2）记$\beta(G)$为G的最小顶点覆盖所包含顶点的数目，k^*为G的 **Alcuin 数**，即存在可行运输方案时船容量的最小值，证明$\beta(G)\le k^*\le\beta(G)+1$。

（3）设X_1,X_2,X_3,Y_1,Y_2为V的子集，$X=X_1\cup X_2\cup X_3$，$Y=V\setminus X$，这些子集满足以下条件：

（ⅰ）X_1,X_2,X_3两两不交，X为G的独立集；

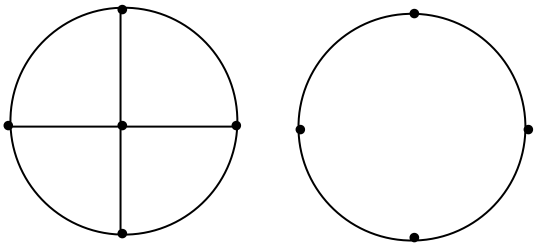
（ⅱ）$|Y|\le k$，Y_1,Y_2为Y的非空子集；

（ⅲ）$X_1\cup Y_1$和$X_2\cup Y_2$为G的独立集；

（ⅳ）$|Y_1|+|Y_2|\ge|X_3|$

试设计一可行运输方案，并证明其运输次数不超过$2|V|+1$。

二、考虑图上的**警察与小偷游戏**（cop and robber game）。给定连通无向图$G=(V,E)$。游戏开始前，每位警察先占据图中一个顶点，小偷再选择图中一个顶点。随后警察和小偷轮流行动，在每一轮中，所有警察先行动，小偷后行动。每次行动可沿图上一条边从一个顶点到达另一个顶点，也可原地不动。



W_4 C_4

警察和小偷都了解图的形状并能在行动前看到其他人的位置。若在某次行动后，某个警察和小偷位于同一顶点，则称警察抓获小偷。对某个图G，不论警察和小偷的初始位置为何以及小偷如何行动，警察总能采取相应的行动方案在有限轮后抓获小偷所需的最少警察数称为图G的警察数（cop-number），记为$c(G)$。

（1）分别求轮W_4和圈C_4的警察数；

（2）证明：若$c(G)=1$，必存在顶点u,w，使得$N(u)\cup\{u\}\subseteq N(w)\cup\{w\}$，这里$N(v)$是图中与$v$有边相连的顶点集；

（3）试通过建立该问题与图论中某问题的联系给出$c(G)$的一个上界；

（4）设在G中没有长度为 3 或 4 的圈，G的最小度$\delta(G)=d$。证明：（ⅰ）若警察数不超过$d-1$，则不论警察选择哪些顶点，小偷总可以选择某个顶点使得警察无法在第一轮抓获小偷；（ⅱ）若警察数不超过$d-1$，小偷至第$t-1$轮警察行动后仍未被抓获，则他总可以采取某种行动，使得在第t轮仍未被抓获；（ⅲ）$c(G)\ge\delta(G)$。