1 第十四次作业

问题 1. 求证：两个紧集的并是紧集；在Hausdorff空间中，两个紧集的交是紧集。相对闭集.

问题 2. 设X关于拓扑$\mathcal{T}, \mathcal{T}'$都是紧致的Hausdorff空间，证明：要么$\mathcal{T} = \mathcal{T}'$, 要么$\mathcal{T}, \mathcal{T}'$不可比较。

问题 3. 设$f : X \to Y$是映射, Y是紧致的Hausdorff空间。证明：f连续当且仅当$G_f : \{(x, f(x)) | x \in X\}$（称为$f$的图像）是$X \times Y$的闭子集。$X{\times}Y \setminus G_f$ 开集.

问题 4. 设Y是紧空间, 证明投影$X \times Y \to X$是闭映射。找个管子

问题 1. 求证：两个紧集的并是紧集；在*Hausdorff*空间中，两个紧集的交是紧集。

证：设X、Y是两个紧集，则对任一开覆盖$X=\bigcup_{\alpha\in J_1}U_\alpha$，$Y=\bigcup_{\beta\in J_2}V_\beta$，∃有限指标集$J_3$，$J_4$，

s.t. $X=\bigcup_{\alpha\in J_3}U_\alpha$，$Y=\bigcup_{\beta\in J_4}V_\beta$，故$(\bigcup_{\alpha\in J_3}U_\alpha)\cup(\bigcup_{\beta\in J_4}V_\beta)$是$X\cup Y$的有限开覆盖，故$X\cup Y$是紧的。

证：设X是T_2空间中的紧集，考虑$x\in X$和$y\in X^c$，由Hausdorff性，∃U_x，V_x，开集，

s.t. $x\in U_x$，$y\in V_x$，由X的紧性，则∃有限多个开集U_{x_1}，$U_{x_2}\cdots U_{x_s}$，s.t. $X\subseteq\bigcup_{i=1}^{s}U_{x_i}$

相应的有V_{x_1}，$V_{x_2}\cdots V_{x_s}$是包含y的与对应U_{x_i}无交的开集，令$V=\bigcap_{i=1}^{s}V_{x_i}$，则$V$是开集，

且$y\in V\subseteq X^c$，由y的任意性，知X^c是开集，从而X是闭集。

故T_2空间中紧集都是闭集，则其交是闭集，其交作为它们的闭子空间紧致，故交是紧致的。

问题 2. 设X关于拓扑$\mathcal{T},\mathcal{T}'$都是紧致的*Hausdorff*空间，证明：要么$\mathcal{T}=\mathcal{T}'$，要么$\mathcal{T},\mathcal{T}'$不可比较。

证明：$\forall x\in X$，∃$W\in\mathcal{T}$是X中开集，s.t. $x\in W\subseteq X$，同时由X关于$\mathcal{T}'$的紧性，W也是

紧的，故∃有限覆盖$\bigcup_{\alpha\in J}U_\alpha\supseteq W$，$U_\alpha\in\mathcal{T}'$。

① 若$\forall\alpha\in J$，$U_\alpha\setminus W\neq\phi$，则$\mathcal{T},\mathcal{T}'$不可比较。

② 否则∃$\beta\in J$，$U_\alpha\subseteq W$，即$\forall x\in W\in\mathcal{T}$，∃$U\in\mathcal{T}'$，s.t. $x\in U\subseteq W$，故$\mathcal{T}'$比$\mathcal{T}$细。

同样方法，知$\mathcal{T}$比$\mathcal{T}'$细，故$\mathcal{T}=\mathcal{T}'$

要$\mathcal{T}=\mathcal{T}'$或不可比较

问题 3. 设$f:X\to Y$是映射，Y是紧致的*Hausdorff*空间。证明：f连续当且仅当$G_f:\{(x,f(x)|x\in X\}$（称为f的图像）是$X\times Y$的闭子集。

⇒：X是全集，故是闭的，由f的连续性$f(X)$也是闭的，故$X\times f(X)=G_f$是$X\times Y$中闭集

⇐：$X\times f(X)$是$X\times Y$中闭集，$\{x_n\}\subset X$，且$x_n\to x_0\ (n\to\infty)$，由$\{f(x_n)\}$有收敛子列（Y紧）

$f(x_{n_k})\to y_0\ (n_k\to\infty)$，由于$G_f$是闭的，$(x_0,y_0)\in G_f$，故$\{f(x_n)\}$任一收敛子列收敛到$y_0$，

又任一$\{f(x_n)\}$有收敛子列，故$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=y_0$，即$f$在$x_0$连续，由$x_0$任意性，$f$连续。

问题 4. 设Y是紧空间，证明投影$X \times Y \to X$是闭映射。

任取 $X \times Y$ 中闭集 $U \times Y$. 则 U 是 X 中闭集.

若 Y 是开集. 任取 $y \in Y$. 构造一列开集 $\{U_k\}$. 有 $U_{k+1} \supseteq U_k \supseteq \cdots \supseteq U_1 \ni y$. 且 $U_k \neq Y$. $k \to \infty$

则 $\cup U_k$ 是 Y 的一个开覆盖. 但其没有有限子覆盖. 与 Y 的紧性矛盾! 故 Y 是闭的.

从而 $f(U \times Y) = U$ 是闭集 f 将闭集映成闭集. 故 f 是闭映射.