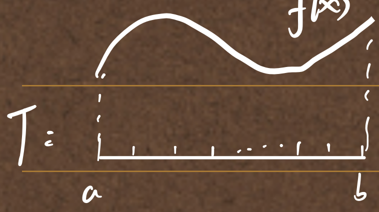

f 在 $[a,b]$ 上可积. T: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 是 $[a,b]$ 的划分.

$\Delta x_i = [x_{i-1}, x_i]$ $\xi_i \in \Delta x_i$

Riemann和: $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. $\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = J$. 称 J 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上定积分.

即 $J=\int_a^b f(x)\,dx$

$M_i \triangleq \sup_{x\in\Delta x_i} f(x)$ $m_i \triangleq \inf_{x\in\Delta x_i} f(x)$ $\omega_i \triangleq M_i - m_i$ 称为 f 在 Δx_i 上的振幅.

Darboux 和: $\bar{S}(f,T) \triangleq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ 且 大和不增,小和不减.

$\underline{S}(f,T) \triangleq \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$

故 $\underline{S}(f,T) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \bar{S}(f,T)$

$\forall T$. $\underline{S}(f,T) \le \bar{S}(f,T)$. $\forall T_1, T_2$. $\underline{S}(f,T_1) \le \bar{S}(f,T_2)$. (将 T_1, T_2 合起来即可)

于是 $\{\underline{S}(f,T) \mid \forall T\}$ 有上界. $\{\bar{S}(f,T) \mid \forall T\}$ 有下界.

$\inf_{T} \bar{S}(f,T) \triangleq \bar{I}$ 称为 f 在 $[a,b]$ 的上积分. 同理 $\sup_{T} \underline{S}(f,T)$ 称为下积分.

Darboux Th: ① $\lim_{\|T\|\to 0} \bar{S}(f,T) = \bar{I}$ ② $\lim_{\|T\|\to 0} \underline{S}(f,T) = \underline{I}$