$N=\{0,1,2\cdots\}$. 关于 $+,\times$ 封闭 $\to Z=\{\cdots,-2,-1,0,1,\cdots\}$. 关于 $+,\times,-$ 封闭

$\to Q=\{\frac{p}{q}\mid p.q互素.q\in N^+\}$. 关于 $+-\times\div$ 封闭.

确界: 对 $S\subset R$. $U=\{S的上界\}$. than $\sup S=\min U$

ξ 称为 S 的上确界即为: ① $\forall x\in S$. $x\le\xi$. i.e. $\xi\in U$

② $\forall\varepsilon>0$. $\exists x_0\in S$. s.t. $\xi-x_0<\varepsilon$

i.e. $\xi=\min U$

确界存在定理 $\Rightarrow$ 单调有界定理 $\Rightarrow$ 闭区间套定理

$\Uparrow$ $\Downarrow$

(B-W Th)

柯西收敛定理 $\Leftarrow$ 致密性定理 $\Leftarrow$ 有限覆盖定理

$\Downarrow\Uparrow$

聚点定理

实数完备性

非空有上界的实数集有上确界. $S\subset R(S\neq\emptyset)$. S 有上界 $\Rightarrow S$ 有上确界

上确界可在 S 中也可不在 S 中.

若 S 无上界. 称 $\sup S=+\infty$.

确界是唯一的.

单调有界定理: 单调有界数列必收敛

若单增无上界. 则数列以 $+\infty$ 为极限 (去掉有界性)

有界数列必有收敛子列 (去掉单调性)

闭区间套定理: