集合与实数集

luojunxun

2023 年 3 月 21 日

Cantor 三分集

(性质): 1.Cantor 三分集没有内点:$(\overline{C})^o = C^o = \emptyset$

2.$G = [0,1] - C$ 是稠子集

3.C 有连续统势

R^n 中的长方体

(开长方体): $\prod_{k=1}^{n}(a_k, b_k)$; 同样能定义半开长方体, 闭长方体

其中 $b_k - a_k$ 称为边长, $\prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$ 称为体积; 当所有的边长都相等的时候, 对应的长方体称为方体.

Theorem 定理 1.5.14: R^n 中任意开集是可数个两两不相交的半开方体的并

R^n 中的连续函数, 点和集之间的距离

(连续函数 f): 如数学分析中的定义: 自变量充分靠近的时候, 函数值也充分靠近

Theorem 5.15: 实值函数 f 在 R^n 上连续的充要条件是:$\forall \alpha > 0$ 集合 $A_\alpha = \{x|f(x) > \alpha\}, A_\alpha = \{x|f(x) > \alpha\}$ 是开集

Proof:[5.15]

必要性: 任取一点 $x \in A_\alpha \Rightarrow f(x) - \alpha > 0 \Rightarrow \exists V(x), s.t. \forall y \in V(x) : f(y) - \alpha > 0$

(连续函数的保号性)

充分性: 任取 $x \in R^n$. 记 $A = \{y | f(y) > f(x) - \epsilon\}, B = \{y | f(y) < f(x) + \epsilon\}$

(这里相当于取 $\alpha = f(x) \pm \epsilon$):$\rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow \exists V(x) \subset A \cap B \Rightarrow \forall y \in V(x), f(x) - \epsilon < f(y) < f(x) + \epsilon$. *i.e.* $|f(x) - f(y)| < \epsilon \Rightarrow f \in C$

Lemma 1.5.2: $D \subset R^n; \forall x, y \in R^n : |d(x, D) - d(y, D)| \leq d(x, y)$

Theorem 1.5.16:$D \subset R^n : d(x, D)$是$x \in R^n$的一致连续函数

Theorem 1.5.17(Bolzano-Weierstrass):R^n 中的有界点列必有收敛子列

Theorem 1.5.18:$F \overset{closed}{\subset} R^n, x \in R^n \Rightarrow \exists y \in F \ s.t. \ d(x, y) = d(x, F)$ 于是当$x \notin F$: $d(x, F) > 0$

Theorem 1.5.19(闭集套定理):$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$是R^n中的一列单调减的非空有界闭集, 则 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k \neq \emptyset$

开覆盖, 紧集