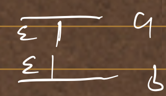
2、只需证明$\{x_k\}$的每个分量的收敛极限是唯一的 (记为 y_n).

反设 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \ne \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. (不妨设 $a>b$)

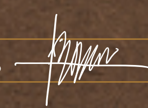


即 $\forall \varepsilon>0\ \exists N>0\ \forall n>N\quad |y_n-a|<\varepsilon\quad |y_n-b|<\varepsilon$ 取 $\varepsilon=\frac{a-b}{2}$

则 $\forall n>N\ \frac{b-a}{2}<y_n-a$ 即 $y_n>\frac{a+b}{2}$.　$y_n-b<\frac{a-b}{2}$ 即 $y_n<\frac{a+b}{2}$

即 $\frac{a+b}{2}<y_n<\frac{a+b}{2}$ →←! 故 $a=b$.

从而 $\{x_k\}$的极限唯一

(3). $S^0=\{(x,y)\mid 0<x<1,\ |y|<\sin\frac{1}{x}\}$　$\partial S=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1\ \ y=\sin\frac{1}{x}\ \ y=0\}$ 

$S'=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ |y|\le\sin\frac{1}{x}\}$

8. 当S无孤立点时.

$\bar{S}^c=S^c$. 而 $S'=\{x_n\mid\forall\delta>0\ O(x_n,\delta)\cap S\ne\emptyset\}$　(任意的δ保证 x的范围取到∞)

故 $S'^c=\{x_n\mid\exists\delta_0>0\ O(x_n,\delta)\cap S=\emptyset\}$

即 $\forall x_0\in S'^c$, $\exists\delta_0>0$ s.t. $\forall x\in(x_0,\delta)$. $x\in S'^c$ $(\delta_0<\delta)$.

即 S'^c是开集. 故 S'是闭集.

显然 $A\cup\{x_0\}$是闭集. 若A是闭集.

故 $\bar{S}=S\cup S'$是闭集.

14. $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{1}{k}=0$. 考虑 $\{0\}\cup\{\frac{1}{k}\mid k=1,2\cdots\}$ 的任一开覆盖

首先考虑这个开覆盖中包含$\{0\}$的那个子区间. S_0. 那么 $\exists\delta_0>0$.

s.t. $0\in O(0,\delta_0)\subset S_0$. 从而 $\exists K_0=[\frac{1}{\delta_0}]+1$ s.t. $\forall k>K_0$ $\frac{1}{k}<\delta_0$.

即此后 $\frac{1}{k}$ 的点全落在了这个子区间内.

那么取 $S=O(0,\delta_0)\cup\{\frac{1}{k}\mid k=1,2\cdots[K_0]\}$ 是此开覆盖的一个有限子开覆盖.

由于开覆盖是任取的. 故 $\{0\}\cup\{\frac{1}{k}\mid k=1,2\cdots\}$ 是紧集.