1. (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$

令 $x_n=\frac{1}{n!}$ $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$

故 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}=0<1$ 由 d'Alembert 判别法知 级数收敛

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)$

由于 $\frac{\ln x}{x}$ 在 x 充分大时是减函数，故 $\frac{\ln(n+1)}{n+1}<\frac{\ln n}{n}$. n 充分大.

从而：$\frac{1}{n}\ln n>\ln(n+1)-\ln n$ 即 $\ln n^{\frac{1}{n}}>\ln\frac{n+1}{n}$.

从而 $n^{\frac{1}{n}}-1>\frac{1}{n}$. 而 $\sum\frac{1}{n}$ 发散.

故 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)$ 发散.

(12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$

令 $x_n=\frac{2^n n!}{n^n}$. 则 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\cdot\sqrt[n]{n!}=$

其中 $\ln\sqrt[n]{n!}=\frac{1}{n}\ln n!=\frac{1}{n}(\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n)=\frac{1}{n}(\ln 1+\cdots+\ln n-n\cdot\ln n)+\ln n$

$=\frac{1}{n}(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n})+\ln n=\int_0^1\ln x\,dx+\ln n=-1+\ln n$

故 $\sqrt[n]{n!}=\frac{1}{e}n$

从而 $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sqrt[n]{n!}=\frac{2}{e}<1$. 由 Cauchy 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ 收敛

(14) $\sum_{n=1}^{\infty}(2n-\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$

令 $x_n=2n-\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}=\frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}}-\frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}$

令 $f(x)=2x-\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$

$\int_1^{+\infty}f(x)\,dx=\left(x^2-\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)\Big|_1^{+\infty}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{2}-1+\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$. 故 $\sum_{n=1}^{\infty}(2n-\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$ 收敛.

(16) $\sum_{n=3}^{\infty}(-\ln\cos\frac{\pi}{n})$

令 $x_n=-\ln\cos\frac{\pi}{n}\to 1-\cos\frac{\pi}{n}\to\frac{1}{2}(\frac{\pi}{n})^2=\frac{\pi^2}{2n^2}$ $n\to+\infty$.

而 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^2}{2n^2}$ 收敛，故 $\sum_{n=3}^{\infty}(-\ln\cos\frac{x}{n})$ 收敛。

(17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$ $(a>0)$

令 $x_n=a^n/(1+a)\cdots(1+a^n)$. $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{a}{1+a^{n+1}}<1$ （n充分大）

故级数收敛。

2. (1) 令 $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$ $x_n=\frac{n^n}{(n!)^2}$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}e^2=0$ 由 Cauchy 判别法，S收敛，从而 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$.

即 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$

(2) 令 $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{n(n+1)}}$ $x_n=\frac{(2n)!}{2^{n(n+1)}}$

$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{(2n+2)(2n+1)}{4^{n+1}}\to0<1\ (n\to\infty)$，由 d'Alembert 判别法知 S收敛。

从而 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$. 即 $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{2^{n(n+1)}}=0$.

3. (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(a+1)\cdots(a+n)}$ 令 $x_n=\frac{n!}{(a+1)\cdots(a+n)}$.

$r=n(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1)=n\cdot(\frac{a+n+1}{n+1}-1)=\frac{n}{n+1}a$. 令 $n\to\infty$

故当 $a>1$ 时，级数收敛，$0<a<1$ 时，级数发散。

当 $a=1$ 时，$x_n=\frac{1}{e^n}\cdot\frac{n^n}{(1+1)(1+2)\cdots(1+n)}\geq\frac{1}{e^n}\cdot\frac{n^n}{2^n}=(\frac{n}{2e})^n\to+\infty$ 发散。$(n\to\infty)$

故当 $0<a\leq1$ 时，级数发散，当 $a>1$ 时，级数收敛

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$ 令 $x_n=(\frac{1}{2})^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$

$r=n(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1)=n(2^{\frac{1}{n}}-1)$ 由伯努利不等式 $2^{\frac{1}{n}}\geq1+\frac{2}{n}$ $(n\to\infty)$

故 $r=n\cdot\frac{2}{n}=2>1$. 级数收敛。

4. (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$

$\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx \geq \int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{1}{4n^2\pi^2}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{4n^2\pi^2}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_{n\pi}^{2n\pi} = \frac{1}{8n\pi}$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8n\pi}$ 发散. 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$ 发散

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\ln(1+x)dx$

$\int_0^{\frac{1}{n}}\ln(1+x)dx \leq \frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$ $n\to\infty$ 而 $\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛.

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\ln(1+x)dx$ 收敛.

5. 利用不等式 $\frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1}\frac{dx}{x} < \frac{1}{n}$,证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$

存在.(此极限为 Euler 常数 γ — 见例 2.4.8.)

proof: $\frac{1}{n+1} < \ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}$. 则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} < \sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = S_n$.

即 $S_{n+1}-1 < \ln(n+1) < S_n$ 则有 $S_{n+1}-1-\ln n < \ln\frac{n+1}{n} < S_n-\ln n$

$S_n-\ln n > \ln\frac{n+1}{n}$ $\wedge$ $S_{n+1}-\ln(n+1) < 1$ 从而 $\ln\frac{n+1}{n} < S_n-\ln n < 1$

而 $\ln\frac{n+1}{n} > 0$. 故 $0 < S_n-\ln n < 1$. 即 $\{S_n-\ln n\}$ 有界.

$[S_{n+1}-\ln(n+1)-(S_n-\ln n)] = \frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n} < 0$ (n充分大)

故 $\{S_n-\ln n\}$ 在n充分大时单减有下界. 从而 极限存在

7. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$ 也收敛;反之如何?

反之不一定收敛. 令 $x_n=\frac{1}{n}$. 则 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$ 收敛 但 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 不收敛.

9. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调增加,且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$,

(1) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[f(n+1)-f(n)]$ 收敛,并求其和;

(2) 进一步设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上二阶可导,且 $f''(x)<0$,证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f'(n)$ 收敛.

(1) $F(n)=\sum_{n=1}^{\infty}[f(n+1)-f(n)] = \lim_{n\to\infty}f(n+1)-f(1) = A-f(1)$ 收敛.

故 $\sum_{n=1}^{\infty}[f(n+1)-f(n)] = A-f(1)$. 收敛.

(2) $f'(x) \geq 0$ 且 $f'(x)$ 单减.

$$f'(n) = f(\xi_1) - f(\xi_2) \qquad n-1 \leq \xi_2 \leq n \leq \xi_1 \leq n+1$$

则 $f'(n) \leq f(n+1) - f(n)$. 则 $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} [f(n+1) - f(n)]$ 收敛.

故 $\sum f'(n)$ 收敛.

10. 设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \mathrm{d}x, n = 1,2,\cdots,$

(1) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+2}}{n}$ 的和;

(2) 设 $\lambda > 0$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

(1) 令 $x_n = \frac{a_n + a_{n+2}}{n} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{n} \tan^n x \, d\tan x$

$$= \int_0^1 \frac{1}{n} x^n dx = \frac{1}{n(n+1)} \cdot x^{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \cdots) = 1 - \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 1$

(2). $\frac{a_n + a_{n+2}}{n} = \frac{1}{n(n+1)} \geq \frac{2a_n}{n} \Rightarrow a_n \leq \frac{1}{2(n+1)}$

$\frac{a_n}{n^\lambda} \leq \frac{1}{2(n+1)n^\lambda} \to \frac{1}{2n^{1+\lambda}} \ (n \to \infty)$ $1+\lambda > 1$. 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

13. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散, $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{S_n^2}$ 收敛.

$$\frac{x_n}{S_n^2} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^2} < \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n S_{n-1}} = \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n} \qquad n \geq 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{S_n^2} = \frac{x_1}{S_1^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x_n}{S_n^2} < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_3} + \cdots + \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n} + \cdots$$

$$= \frac{2}{x_1} - \lim_{n \to \infty} \frac{1}{S_n} = \frac{2}{x_1} - \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} x_n} \to \frac{2}{x_1} \text{ 收敛.}$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{S_n^2}$ 收敛.

14. 设 $\{a_n\}$ 为 Fibonacci 数列(见例 2.4.4), 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ 收敛, 并求其和.

$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} [(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$ 令 $x_n = \frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{\sqrt{5}} [(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{4})^n]$

其中: $\sqrt[n]{(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^n} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} < 1$ $\quad \left|\sqrt[n]{(\frac{1-\sqrt{5}}{4})^n}\right| = \left|\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right| < 1$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ 收敛.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\sum_{i=1}^{n} (\frac{1+\sqrt{5}}{4})^n - \sum_{i=1}^{n} (\frac{1-\sqrt{5}}{4})^n\right] = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{4}(1 - (\frac{1+\sqrt{5}}{4})^n)}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{4}} - \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{4}(1 - (\frac{1-\sqrt{5}}{4})^n)}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{4}}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}-1}{3+\sqrt{5}}\right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{8\sqrt{5}}{4} = 2$$