Darboux Th. 关于小和的证明：（f(x)在[a,b]有界）

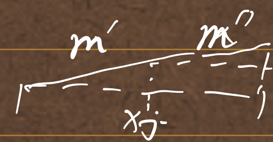
proof: 记 $l=\sup\underline{S}$ 证明 $l=\lim\limits_{\|P\|\to 0}\underline{S}(P)$

对 $\forall\varepsilon>0$，由于 l 是 $\underline{S}$ 的上确界，则 $\exists P'$, s.t. $|\underline{S}(P')-l|<\varepsilon/2$

$P': a=x_0'<x_1'<\cdots<x_p'=b$ 取 $\delta=\min\{\Delta x_1',\cdots,\Delta x_p',\frac{\varepsilon}{2(M-m)(p-1)}\}$

$\forall P: a=x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，其中 $\Delta x_i<\delta$ 是 $[a,b]$ 的一个划分，令 $P^*=P'\cup P$

那么 P 中至多有 $p-1$ 个小区间被插入 P' 中的点，



考虑区间 Δx_i，$\underline{S}(P^*)$ 与 $\underline{S}(P)$ 中小和差为

$m(x_i-x_{i-1})-[m'(x_i-x_j')+m''(x_j'-x_{i-1})]<(M-m)(x_i-x_{i-1})=(M-m)\delta$,

从而：$l-\underline{S}(P)=[l-\underline{S}(P')]+[\underline{S}(P')-\underline{S}(P^*)]+[\underline{S}(P^*)-\underline{S}(P)]$

$<\frac{1}{2}\varepsilon+0+(M-m)\delta\cdot(p-1)=\varepsilon$.

即 $|\underline{S}(P)-l|<\varepsilon$，即 $\underline{S}$ 的上确界是 $\underline{S}(P)$ 的极限.

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且在 $[a,b]$ 上满足 $|f(x)|\geqslant m>0$（m 为常数），证明 $\frac{1}{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 上也可积.

proof: $\omega_i(\frac{1}{f})=\sup\limits_{x_i\in\Delta x_i}\{\frac{1}{f(x_1)}-\frac{1}{f(x_2)}\}\le\frac{1}{m^2}\sup\limits_{x_i\in\Delta x_i}\{f(x_2)-f(x_1)\}=\frac{1}{m^2}\omega_i(f)$.

$\forall\varepsilon>0$，取 $\varepsilon_1=m^2\varepsilon$，则 $\exists P$, s.t. $|\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i-0|<\varepsilon_1$

从而 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i(\frac{1}{f})\Delta x_i<\frac{1}{m^2}\varepsilon_1=\varepsilon$ 即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists P$ s.t. $\sum_{i=1}^{n}\omega_i(\frac{1}{f})\Delta x_i<\varepsilon$.

即 $\frac{1}{f(x)}$ 可积.

7. 设有界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的不连续点为 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

proof: $f(x)$ 有界 $\Leftrightarrow\forall x\in[a,b]$，$\exists M>0$, s.t. $|f(x)|<M$.

不妨设 $x_0=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\in[a,b]$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_0>0$, s.t. $\forall n>N_0$，$|x_0-x_n|<\varepsilon$。

先考虑区间 $[a,b]\setminus U(x_0,\varepsilon_0)$，则 $f(x)$ 在其中只有有限个不连续点，从而

$\sum\omega_i\Delta x_i<\varepsilon/2$ ($\forall\varepsilon>0$)，取 $\varepsilon_0=\frac{\varepsilon}{[illegible]}$

$[a,b]\setminus U(x_0,\varepsilon_0)$

再考虑区间 $U(x_0,\varepsilon_0)$. $\sum_{U(x_0,\varepsilon_0)} w_i\Delta x_i \le 2M\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\varepsilon$.

故 $\sum_{[a,b]} w_i\Delta x_i < \varepsilon$. $(\forall\varepsilon>0, P)$. 故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

8. 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的有界函数. 证明: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的充分必要条件是对任意给定的 $\varepsilon>0$ 与 $\sigma>0$, 存在划分 P, 使得振幅 $\omega_i\ge\varepsilon$ 的那些小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的长度之和 $\sum \Delta x_i<\sigma$ (即振幅不能任意小的那些小区间的长度之和可以任意小).

proof: $\Rightarrow$ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积 $\Leftrightarrow$ $\sum_{i=1}^{n} w_i\Delta x_i < \varepsilon_0$ $(\forall\varepsilon_0>0)$ $f(x)$ 有界 $\Leftrightarrow$ $|f(x)|<M$

P 中区间可分为两类. 一类是振幅可任意小, 由于区间长度有最大值 η

取 $|w_i| < \frac{1}{\eta}\cdot\frac{\varepsilon_0}{2}$, 有 $\sum_{\Omega_1} w_i\cdot\Delta x_i < \frac{1}{2}\varepsilon_0$.

另一类是振幅 $w_i \ge \varepsilon_0$ 的区间 Ω_2 $\sum_{\Omega_2} w_i\cdot\Delta x_i \le 2M\sum_{\Omega_2}\Delta x_i$. 则若 $f(x)$ 可积.

$2M\sum_{\Omega_2}\Delta x_i = o(1)$. 即 $\sum_{\Omega_2}\Delta x_i<\sigma$.

$\Leftarrow$ 以上分类的两类区间所有 $\sum_{\Omega_1} w_i\Delta x_i$ 与 $\sum_{\Omega_2} w_i\Delta x_i$ 都为 1 的高阶无穷小. 故 $f(x)$ 可积.

积分第二中值定理的证明:

命题此: 设 $f(x)$ 在 I 上可积、$g(x)$ 在 I 上单调 (不妨设为增).

$\exists\xi\in I=[a,b]$. s.t. $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx$.

$= g(a)F(\xi) - g(a)F(a) + g(b)F(b) - g(b)F(\xi)$

proof: 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)dF(x) = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

$$= F(x)g(x)\Big|_a^b - F(\xi)\int_a^b g'(x)dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - F(\xi)g(x)\Big|_a^b$$

$$= F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(\xi)g(b) + F(\xi)g(a)$$

$$= g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$ #.