第一章 集合与映射

习 题 1.1 集合

1. 证明由n个元素组成的集合$T=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$有$2^n$个子集。

解 由k个元素组成的子集的个数为C_n^k，$\sum_{k=0}^{n} C_n^k=(1+1)^n=2^n$。

2. 证明：

(1) 任意无限集必包含一个可列子集；

(2) 设A与B都是可列集，证明$A\cup B$也是可列集。

证 (1)设T是一个无限集，先取$a_1\in T$。由于T是无限集，必存在$a_2\in T$，$a_2\neq a_1$。再由T是无限集，必存在$a_3\in T$，$a_3\neq a_1$，$a_3\neq a_2$。这样的过程可以无限进行下去，于是得到可列集$S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$，$S\subset T$。

（2）设$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\}$，则$A\cup B$可表示为

$$A\cup B=\{a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_n,b_n,\cdots\}。$$

3. 指出下列表述中的错误：

(1) $\{0\}=\varnothing$；

(2) $a\subset\{a,b,c\}$；

(3) $\{a,b\}\in\{a,b,c\}$；

(4) $\{a,b,\{a,b\}\}=\{a,b\}$。

解 (1) $\{0\}$是由元素0构成的集合，不是空集。

（2） a是集合$\{a,b,c\}$的元素，应表述为$a\in\{a,b,c\}$。

（3） $\{a,b\}$是集合$\{a,b,c\}$的子集，应表述为$\{a,b\}\subset\{a,b,c\}$。

（4） $\{a,b,\{a,b\}\}$ 是由 a,b 和 $\{a,b\}$ 为元素构成的集合，所以 $\{a,b,\{a,b\}\}\supset\{a,b\}$，但$\{a,b,\{a,b\}\}\neq\{a,b\}$。

4. 用集合符号表示下列数集：

(1) 满足$\dfrac{x-3}{x+2}\leq 0$的实数全体；

(2) 平面上第一象限的点的全体；

(3) 大于 0 并且小于 1 的有理数全体；

(4) 方程$\sin x\cot x=0$的实数解全体。

解（1） $\{x\mid -2<x\leq 3\}$。

（2） $\{(x,y)\mid x>0且y>0\}$。

（3） $\{x\mid 0<x<1且x\in Q\}$。

（4） $\left\{x\mid x=k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z\right\}$。

5. 证明下列集合等式：

(1) $A\cap(B\cup D)=(A\cap B)\cup(A\cap D)$；

(2) $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$。

证（1）设$x\in A\cap(B\cup D)$，则$x\in A$，并且或者$x\in B$，或者$x\in D$。于是或者$x\in A\cap B$，或者$x\in A\cap D$，即$x\in(A\cap B)\cup(A\cap D)$，因此

$$A\cap(B\cup D)\subset(A\cap B)\cup(A\cap D)；$$

设$x\in(A\cap B)\cup(A\cap D)$，则或者$x\in A\cap B$，或者$x\in A\cap D$。于是$x\in A$，并且或者$x\in B$，或者$x\in D$，即$x\in A\cap(B\cup D)$，因此

$$A\cap(B\cup D)\supset(A\cap B)\cup(A\cap D)。$$

（2）设 $x \in (A \cup B)^C$，则 $x \overline{\in} A \cup B$，即 $x \overline{\in} A$ 且 $x \overline{\in} B$，于是 $x \in A^C \cap B^C$，因此

$$(A \cup B)^C \subset A^C \cap B^C；$$

设 $x \in A^C \cap B^C$，则 $x \overline{\in} A$ 且 $x \overline{\in} B$，即 $x \overline{\in} A \cup B$，于是 $x \in (A \cup B)^C$，因此

$$(A \cup B)^C \supset A^C \cap B^C 。$$

6. 举例说明集合运算不满足消去律：

(1) $A \cup B = A \cup C \quad \neq> \quad B = C$；

(2) $A \cap B = A \cap C \quad \neq> \quad B = C$。

其中符号“ $\neq>$ ”表示左边的命题不能推出右边的命题。

解 （1）设 $A = \{a,b,c\}$，$B = \{b,c,d\}$，$C = \{c,d\}$，则 $A \cup B = A \cup C$，但 $B \neq C$。

（2）设 $A = \{a,b,c\}$，$B = \{c,d,e\}$，$C = \{c,d\}$，则 $A \cap B = A \cap C$，但 $B \neq C$。

7. 下述命题是否正确?不正确的话，请改正。

(1) $x \overline{\in} A \cap B \;\Leftrightarrow\; x \overline{\in} A$ 并且 $x \overline{\in} B$；

(2) $x \overline{\in} A \cup B \;\Leftrightarrow\; x \overline{\in} A$ 或者 $x \overline{\in} B$。

解（1）不正确。$x \overline{\in} A \cap B \;\Leftrightarrow\; x \overline{\in} A$ 或者 $x \overline{\in} B$。

（2）不正确。$x \overline{\in} A \cup B \;\Leftrightarrow\; x \overline{\in} A$ 并且 $x \overline{\in} B$。

习　题 1.2　映射与函数

1．设$S=\{\alpha,\beta,\gamma\}$, $T=\{a,b,c\}$，问有多少种可能的映射f：$S\to T$？其中哪些是双射?

解 有$3^3=27$种可能的映射，其中有$3!=6$种是双射，它们是

$$f:\begin{cases}\alpha\mapsto a\\ \beta\mapsto b\\ \gamma\mapsto c\end{cases},\quad f:\begin{cases}\alpha\mapsto a\\ \beta\mapsto c\\ \gamma\mapsto b\end{cases},\quad f:\begin{cases}\alpha\mapsto b\\ \beta\mapsto c\\ \gamma\mapsto a\end{cases},\quad f:\begin{cases}\alpha\mapsto b\\ \beta\mapsto a\\ \gamma\mapsto c\end{cases},\quad f:\begin{cases}\alpha\mapsto c\\ \beta\mapsto a\\ \gamma\mapsto b\end{cases},\quad f:\begin{cases}\alpha\mapsto c\\ \beta\mapsto b\\ \gamma\mapsto a\end{cases}。$$

2. (1) 建立区间$[a, b]$与$[0, 1]$之间的一一对应；

(2) 建立区间$(0, 1)$与$(-\infty,+\infty)$之间的一一对应。

解（1） $f:[a,b]\to[0,1]$

$$x\mapsto y=\frac{x-a}{b-a};$$

（2） $f:(0,1)\to(-\infty,+\infty)$

$$x\mapsto \tan(x-\frac{1}{2})\pi=-\cot(\pi x)。$$

3．将下列函数f和g构成复合函数，并指出定义域与值域：

(1) $y=f(u)=\log_a u$，$u=g(x)=x^2-3$；

(2) $y=f(u)=\arcsin u$，$u=g(x)=\mathrm{e}^x$；

(3) $y=f(u)=\sqrt{u^2-1}$, $u=g(x)=\sec x$；

(4) $y=f(u)=\sqrt{u}$, $u=g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$。

解（1） $y=\log_a(x^2-3)$，定义域：$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$，值域：$(-\infty,+\infty)$；

（2） $y=\arcsin 3^x$，定义域：$(-\infty,0]$，值域：$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$；

（3） $y=|\tan x|$，定义域：$\bigcup\limits_{k\in Z}\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$，值域：$[0,+\infty)$；

（4） $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$，定义域：$(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$，值域：$[0,1)\cup(1,+\infty)$。

4. 指出下列函数是由哪些基本初等函数复合而成的：

(1) $y=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{3}\log_a{}^3(x^2-1)$。

解（1） $y=\arcsin u$， $u=\dfrac{1}{\sqrt{v}}$， $v=x^2+1$；

（2） $y=\dfrac{1}{3}u^3$， $u=\log_a v$， $v=x^2-1$。

5. 求下列函数的自然定义域与值域：

(1) $y=\log_a\sin x$ （$a>1$）；

(2) $y=\sqrt{\cos x}$；

(3) $y=\sqrt{4-3x-x^2}$；

(4) $y=x^2+\dfrac{1}{x^4}$。

解（1）定义域：$\bigcup\limits_{k\in Z}(2k\pi,(2k+1)\pi)$，值域：$(-\infty,0]$；

（2）定义域：$\bigcup\limits_{k\in Z}\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$，值域：$[0,1]$；

（3）定义域：$[-4,1]$，值域：$\left[0,\dfrac{5}{2}\right]$；

（4）定义域：$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，值域：$\left[\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2},+\infty\right)$。

6. 问下列函数 f 和 g 是否等同?

(1) $f(x)=\log_a(x^2)$， $g(x)=2\log_a x$；

(2) $f(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$， $g(x)=1$；

(3) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$，$g(x)=1$。

解　（1）函数 f 和 g 不等同；

（2）函数f和g不等同；

（3）函数f和g等同。

7. (1) 设$f(x+3)=2x^3-3x^2+5x-1$,求$f(x)$；

(2) 设$f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\dfrac{3x-1}{3x+1}$,求$f(x)$。

解（1）令$x+3=t$，则$x=t-3$，代入等式，得到

$$f(t)=2(t-3)^3-3(t-3)^2+5(t-3)-1=2t^3-21t^2+77t-97,$$

所以$f(x)=2x^3-21x^2+77x-97$；

（2）令$\dfrac{x}{x-1}=t$，则$x=\dfrac{t}{t-1}$，代入等式，得到

$$f(t)=\frac{\dfrac{3t}{t-1}-1}{\dfrac{3t}{t-1}+1}=\frac{2t+1}{4t-1}，$$ 所以$f(x)=\dfrac{2x+1}{4x-1}$。

8. 设$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$,求$f\circ f$， $f\circ f\circ f$,$f\circ f\circ f\circ f$的函数表达式。

解（1） $f\circ f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$；

$f\circ f\circ f(x)=\dfrac{x+2}{2x+3}$；

$f\circ f\circ f\circ f(x)=\dfrac{2x+3}{3x+5}$。

9. 证明：定义于$(-\infty,+\infty)$上的任何函数都可以表示成一个偶函数与一个奇函数之和。

证　显然$\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$是偶函数， $\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$是奇函数，而

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}。$$

10. 写出折线$\overline{ABCD}$所表示的函数关系$y=f(x)$的分段表示，其中

$A=(0,3)$， $B=(1,-1)$， $C=(3,2)$， $D=(4,0)$。

解 $y=\begin{cases}-4x+3 & x\in[0,1]\\ \dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{2} & x\in(1,3]\\ -2x+8 & x\in(3,4]\end{cases}$。

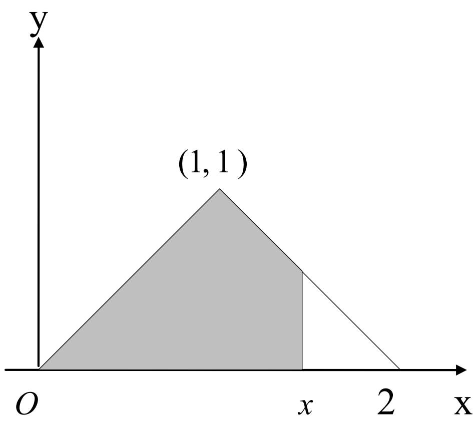


图 1.2.8

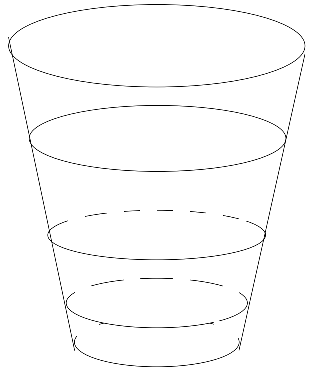


图 1.2.9

11. 设$f(x)$表示图1.2.8中阴影部分面积，写出函数$y=f(x)$，$x\in[0,\ 2]$的表达式。

解 $y=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2 & x\in[0,1]\\ -\dfrac{1}{2}x^2+2x-1 & x\in(1,2]\end{cases}$。

12. 一玻璃杯装有汞、水、煤油三种液体，比重分别为13.6，1，0.8克／厘米^3(图1.2.9)，上层煤油液体高度为5厘米，中层水液体高度为4厘米，下层汞液体高度为2厘米，试求压强P与液体深度x之间的函数关系。

解 $P(x)=\begin{cases}78.4x & x\in[0,5]\\ 98x-98 & x\in(5,9]\\ 1332.8x-11211.2 & x\in(9,11]\end{cases}$。

13. 试求定义在$[0,\ 1]$上的函数，它是$[0,\ 1]$与$[0,\ 1]$之间的一一对应，

但在$[0,1]$的任一子区间上都不是单调函数。

解 $f(x)=\begin{cases} x & x\text{为有理数} \\ 1-x & x\text{为无理数} \end{cases}$。

第二章　数列极限

习　题 2.1　实数系的连续性

1.　(1) 证明$\sqrt{6}$不是有理数；

(2) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$是不是有理数?

证 (1) 反证法。若$\sqrt{6}$是有理数，则可写成既约分数$\sqrt{6}=\dfrac{m}{n}$。由$m^2=6n^2$，可知m是偶数，设$m=2k$，于是有$3n^2=2k^2$，从而得到n是偶数，这与$\dfrac{m}{n}$是既约分数矛盾。

（2）$\sqrt{3}+\sqrt{2}$不是有理数。若$\sqrt{3}+\sqrt{2}$是有理数，则可写成既约分数$\sqrt{3}+\sqrt{2}=\dfrac{m}{n}$，于是$3+2\sqrt{6}+2=\dfrac{m^2}{n^2}$，$\sqrt{6}=\dfrac{m^2}{2n^2}-\dfrac{5}{2}$，即$\sqrt{6}$是有理数，与（1）的结论矛盾。

2. 求下列数集的最大数、最小数，或证明它们不存在：

$A=\{x\,|\,x\geq 0\}$；

$B=\left\{\sin x\,|\; 0<x<\dfrac{2\pi}{3}\right\}$；

$C=\left\{\dfrac{n}{m}\,\middle|\, m,n\in\mathbf{N}^+\text{并且}n<m\right\}$。

解　$\min A=0$；因为$\forall x\in A$，有$x+1\in A$，$x+1>x$，所以$\max A$不存在。

$\max B=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$；因为$\forall x\in B$，$\exists\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，使得$x=\sin\alpha$，于是有$\sin\dfrac{\alpha}{2}\in B$，$\sin\dfrac{\alpha}{2}<x$，所以$\min B$不存在。

$\max C$与$\min C$都不存在，因为$\forall \frac{n}{m} \in C$，有$\frac{n}{m+1} \in C$，$\frac{n+1}{m+1} \in C$，$\frac{n}{m+1} < \frac{n}{m} < \frac{n+1}{m+1}$，所以$\max C$与$\min C$都不存在。

3. A, B是两个有界集，证明：

(1) $A \cup B$是有界集；

(2) $S = \{x + y | x \in A, y \in B\}$也是有界集。

证 （1）设$\forall x \in A$，有$|x| \le M_1$，$\forall x \in B$，有$|x| \le M_2$，则$\forall x \in A \cup B$，有$|x| \le \max\{M_1, M_2\}$。

(2) 设$\forall x \in A$，有$|x| \le M_1$，$\forall x \in B$，有$|x| \le M_2$，则$\forall x \in S$，有$|x| \le M_1 + M_2$。

4. 设数集S有上界，则数集$T = \{x | -x \in S\}$有下界，且$\sup S = -\inf T$。

证 设数集S的上确界为$\sup S$，则对任意$x \in T = \{x | -x \in S\}$，有$-x \le \sup S$，即$x \ge -\sup S$；同时对任意$\varepsilon > 0$，存在$y \in S$，使得$y > \sup S - \varepsilon$，于是$-y \in T$，且$-y < -\sup S + \varepsilon$。所以$-\sup S$为集合$T$的下确界，即$\inf T = -\sup S$。

5. 证明有界数集的上、下确界唯一。

证 设$\sup S$既等于A，又等于B，且$A < B$。取$\varepsilon = \frac{B - A}{2} > 0$，因为$B$为集合$S$的上确界，所以存在$x \in S$，使得$x > B - \varepsilon > A$，这与$A$为集合$S$的上确界矛盾，所以$A = B$，即有界数集的上确界唯一。同理可证有界数集的下确界唯一。

6. 对任何非空数集S，必有$\sup S \ge \inf S$。当$\sup S = \inf S$时，数集S有什么特点?

解 对于任意的$x \in S$，有$\inf S \le x \le \sup S$，所以$\sup S \ge \inf S$。当$\sup S = \inf S$时，数集S是由一个实数构成的集合。

7. 证明非空有下界的数集必有下确界。

证 参考定理2.1.1的证明。

8. 设$S=\{x| x\in \mathbf{Q}\text{并且}x^2<3\}$，证明：

(1) S没有最大数与最小数；

(2) S在$\mathbf{Q}$内没有上确界与下确界。

证 （1）$\forall \frac{q}{p}\in S$，$\frac{q}{p}>0$，则$\left(\frac{q}{p}\right)^2<3$，$\frac{q}{p}<2$。取有理数$r>0$充分小，使得$r^2+4r<3-\left(\frac{q}{p}\right)^2$，于是$\left(\frac{q}{p}+r\right)^2=\left(\frac{q}{p}\right)^2+r^2+\frac{2q}{p}r<\left(\frac{q}{p}\right)^2+r^2+4r<3$，即$\frac{q}{p}+r\in S$，所以$S$没有最大数。同理可证$S$没有最小数。

（2）反证法。设S在$\mathbf{Q}$内有上确界，记$\sup S=\frac{n}{m}$ （$m,n\in \mathbf{N}^+$且m,n互质)，则显然有$0<\frac{n}{m}<2$。由于有理数平方不能等于3，所以只有两种可能：

(i) $\left(\frac{n}{m}\right)^2<3$，由 (1) 可知存在充分小的有理数$r>0$，使得$\left(\frac{n}{m}+r\right)^2<3$，这说明$\frac{n}{m}+r\in S$，与$\sup S=\frac{n}{m}$矛盾；

(ii) $\left(\frac{n}{m}\right)^2>3$，取有理数$r>0$充分小，使得$4r-r^2<\left(\frac{n}{m}\right)^2-3$，于是$\left(\frac{n}{m}-r\right)^2=\left(\frac{n}{m}\right)^2-\frac{2n}{m}r+r^2>\left(\frac{n}{m}\right)^2-4r+r^2>3$，这说明$\frac{n}{m}-r$也是$S$的上界，与$\sup S=\frac{n}{m}$矛盾。所以$S$没有上确界。

同理可证S没有下确界。

习 题 2.2 数列极限

1. 按定义证明下列数列是无穷小量：

(1) $\left\{\dfrac{n+1}{n^2+1}\right\}$；　　(2) $\{(-1)^n(0.99)^n\}$；

(3) $\left\{\dfrac{1}{n}+5^{-n}\right\}$；　　(4) $\left\{\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}\right\}$；

(5) $\left\{\dfrac{n^2}{3^n}\right\}$；　　(6) $\left\{\dfrac{3^n}{n!}\right\}$；

(7) $\left\{\dfrac{n!}{n^n}\right\}$；　　(8) $\left\{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{2n}\right\}$。

证 (1) $\forall\varepsilon\ (0<\varepsilon<2)$，取 $N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，成立 $0<\dfrac{n+1}{n^2+1}<\dfrac{2}{n}<\varepsilon$。

(2) $\forall\varepsilon\ (0<\varepsilon<1)$，取 $N=\left[\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg 0.99}\right]$，当 $n>N$ 时，成立

$$\left|(-1)^n(0.99)^n\right|<(0.99)^{\frac{\lg\varepsilon}{\lg 0.99}}=\varepsilon\text{。}$$

(3) $\forall\varepsilon\ (0<\varepsilon<2)$，取 $N_1=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N_1$ 时，成立 $\dfrac{1}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$；取 $N_2=\left[\log_5\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N_2$ 时，成立 $5^{-n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$；则当 $n>N=\max\{N_1,N_2\}$ 时，成立 $\left|\dfrac{1}{n}+5^{-n}\right|<\varepsilon$。

(4) $\forall\varepsilon\ (0<\varepsilon<1)$，取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，成立

$$0<\frac{1+2+\cdots+n}{n^3}=\frac{n+1}{2n^2}<\frac{1}{n}<\varepsilon\text{。}$$

(5) 当 $n>11$ 时，有 $\dfrac{n^2}{3^n}=\dfrac{n^2}{(1+2)^n}<\dfrac{n^2}{2^3C_n^3}=\dfrac{6n}{8(n-1)(n-2)}<\dfrac{1}{n}$。于是 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\max\left\{11,\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$，当 $n>N$ 时，成立 $0<\dfrac{n^2}{3^n}<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$。

（6）当$n>5$，有$\dfrac{3^n}{n!}\le\dfrac{3^5}{5!}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-5}<3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-5}$。于是$\forall\varepsilon\,(0<\varepsilon<3)$，取

$N=5+\left[\dfrac{\lg\frac{\varepsilon}{3}}{\lg\frac{1}{2}}\right]$，当$n>N$时，成立$0<\dfrac{3^n}{n!}<3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-5}<\varepsilon$。

（7）记$\dfrac{n}{2}$的整数部分为m，则有$\dfrac{n!}{n^n}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^m$。$\forall\varepsilon\,(0<\varepsilon<1)$，取

$N=2\left[\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg\frac{1}{2}}\right]+4$，当$n>N$时，有$m>\dfrac{N}{2}-1>\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg\frac{1}{2}}$，于是成立

$0<\dfrac{n!}{n^n}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^m<\varepsilon$。

（8）首先有不等式$0<\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{2n}<\dfrac{1}{n}$。$\forall\varepsilon\,(0<\varepsilon<1)$，取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，成立$0<\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{2n}<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$。

2. 按定义证明下述极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-1}{3n^2+2}=\dfrac{2}{3}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}=1$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\dfrac{1}{2}$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3n+2}=1$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$,其中$x_n=\begin{cases}\dfrac{n+\sqrt{n}}{n}, & n\text{是偶数},\\ 1-10^{-n}, & n\text{是奇数},\end{cases}$。

证 （1）$\forall\varepsilon>0$，取$N=\left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$，当$n>N$时，成立

$$\left|\frac{2n^2-1}{3n^2+2}-\frac{2}{3}\right|=\frac{7}{3(3n^2+2)}<\frac{1}{n^2}<\varepsilon\text{。}$$

（2）$\forall\varepsilon>0$，取$N=\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，成立

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}-1\right|=\frac{1}{\sqrt{n^2+n}+n}<\frac{1}{2n}<\varepsilon\text{。}$$

（3） $\forall\varepsilon>0$，取$N=\left[\frac{1}{8\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，成立

$$\left|(\sqrt{n^2+n}-n)-\frac{1}{2}\right|=\frac{n}{2(\sqrt{n^2+n}+n)^2}<\frac{1}{8n}<\varepsilon\text{。}$$

（4）令$\sqrt[n]{3n+2}=1+a_n$，则$a_n>0$，$3n+2=(1+a_n)^n>1+C_n^2a_n^2$。当$n>3$时，有$a_n<\sqrt{\frac{2(3n+1)}{n(n-1)}}<\frac{3}{\sqrt{n}}$，所以$\forall\varepsilon>0$，取$N=\left[\frac{9}{\varepsilon^2}\right]$，当$n>N$时，成立

$$\left|\sqrt[n]{3n+2}-1\right|=a_n<\frac{3}{\sqrt{n}}<\varepsilon\text{。}$$

（5） $\forall\varepsilon\ (0<\varepsilon<1)$，取$N=\max\left\{\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right],\left[\lg\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$，当$n>N$时，若$n$是偶数，则成立$|x_n-1|=\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$；若$n$是奇数，则成立$|x_n-1|=\frac{1}{10^n}<\varepsilon$。

3. 举例说明下列关于无穷小量的定义是不正确的：

(1) 对任意给定的$\varepsilon>0$，存在N，使当$n>N$时成立$x_n<\varepsilon$；

(2) 对任意给定的$\varepsilon>0$，存在无穷多个x_n,使丨x_n丨<ε 。

解 （1）例如$x_n=-n$，则$\{x_n\}$满足条件，但不是无穷小量。

（2）例如$x_n=\begin{cases}n & n\text{是奇数}\\ \frac{1}{n} & n\text{是偶数}\end{cases}$，则$\{x_n\}$满足条件，但不是无穷小量。

4. 设k是一正整数，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$的充分必要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+k}=a$。

证 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，$\forall n>N$，成立$|x_n-a|<\varepsilon$，于是也成立$|x_{n+k}-a|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+k}=a$；

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+k}=a$，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists N'$，$\forall n>N'$，成立$|x_{n+k}-a|<\varepsilon$，取

$N = N'+k$，则$\forall n > N$，成立$|x_n - a| < \varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。

5. 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。

证　由$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$，可知$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_1$，$\forall n > N_1$，成立$|x_{2n} - a| < \varepsilon$；$\exists N_2$，$\forall n > N_2$，成立$|x_{2n+1} - a| < \varepsilon$。于是取$N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$，$\forall n > N$，成立$|x_n - a| < \varepsilon$。

6. 设$x_n \ge 0$，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \ge 0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$。

证　首先有不等式$\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| \le \sqrt{|x - a|}$。由$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，可知$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，$\forall n > N$，成立$|x_n - a| < \varepsilon^2$，于是$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a_n}\right| \le \sqrt{|x_n - a_n|} < \varepsilon$。

7. $\{x_n\}$是无穷小量，$\{y_n\}$是有界数列，证明$\{x_n\ y_n\}$也是无穷小量。

证　设对一切n，$|y_n| \le M$。因为$\{x_n\}$是无穷小量，所以$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，$\forall n > N$，成立$|x_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$。于是$\forall n > N$，成立$|x_n y_n| < \varepsilon$，所以$\{x_n\ y_n\}$也是无穷小量。

8. 利用夹逼法计算极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+\sqrt{1}} + \dfrac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}$。

解（1）由$1 < \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} < \sqrt[n]{n}$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$，可知

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=1。$$

(2) 由 $\frac{n}{n+\sqrt{n}}<\left(\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)<\frac{n}{n+1}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n}}=1$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$，可知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)=1。$$

(3) 由 $2=\frac{2n+2}{n+1}<\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}<\frac{2n+2}{n}$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+2}{n}=2$，可知

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}=2。$$

(4) 应用不等式 $2k>\sqrt{(2k-1)(2k+1)}$，得到 $0<\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$，可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}=0。$$

9. 求下列数列的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n-1}{n^2+1}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+2n^2-3n+1}{2n^3-n+3}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+n^3}{3^{n+1}+(n+1)^3}$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n^2+1}-1)\sin\frac{n\pi}{2}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[4]{n^2+1}-\sqrt{n+1})$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$；

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$；

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\lg n}$；

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$。

解（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+4n-1}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=3$。

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+2n^2-3n+1}{2n^3-n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{2-\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^3}}=\dfrac{1}{2}$。

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+n^3}{3^{n+1}+(n+1)^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{n^3}{3^n}}{3\left[1+\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}\right]}=\dfrac{1}{3}$。

（4）因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+1}=1$，$|\sin\dfrac{n\pi}{2}|\le 1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n^2+1}-1)\sin\frac{n\pi}{2}=0\text{。}$$

（5）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\dfrac{1}{2}$。

（6）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[4]{n^2+1}-\sqrt{n+1})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}[n^2+1-(n+1)^2]}{(\sqrt[4]{n^2+1}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n^2+1}+n+1)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n\sqrt{n}}{(\sqrt[4]{n^2+1}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n^2+1}+n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}})(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1+\frac{1}{n})}=-\frac{1}{2}\text{。}$$

（7）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lg 1+\lg\frac{1}{2}+\cdots+\lg\frac{1}{n}}{n}=-\infty$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}=0\text{。}$$

（8）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\cdots\cdot\frac{(n-2)n}{(n-1)^2}\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}。$$

（9）$1<\sqrt[n]{n\lg n}<\sqrt[n]{n^2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}=1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\lg n}=1。$$

（10）设 $x_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$，则 $2x_n=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}$，两式相减，得到 $x_n=1+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}})-\frac{2n-1}{2^n}$。由

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}})=2$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2^n}=0$，可知

$$\lim_{n\to\infty}x_n=3。$$

10. 证明：若 $a_n>0$（$n=1,2,\cdots$），且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

证 取 $1<r<l$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$，可知 $\exists N,\forall n>N$，成立 $\frac{a_n}{a_{n+1}}>r>1$，于是 $0<a_n<a_{N+1}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-N-1}$。由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{a_{N+1}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-N-1}\right\}=0$ 可知

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0。$$

11．证明：若 $a_n>0$（$n=1,2,\cdots$），且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$。

证 由 $\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}}$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a$，可知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a。$$

12. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 存在，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+2a_2+\cdots+na_n)=0$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(n!\,a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=0$　$(a_i>0,i=1,2,\cdots,n)$。

解（1）设$a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=a$，则由$\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k=nS_n-\sum\limits_{k=1}^{n-1}S_k$可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ka_k=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}[\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}S_k]=a-a=0。$$

（2）由$0<(n!a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\le\frac{1}{n}(a_1+2a_2+\cdots+na_n)$与（1），即得到

$$\lim_{n\to\infty}(n!\cdot a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=0。$$

13．已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab。$$

证　令$a_n=a+\alpha_n,b_n=b+\beta_n$，由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，可知$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$。设$\forall n\in\mathrm{N}^+$，$|\beta_n|\le M$。因为

$$\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab+\frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k+\frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n}\beta_k+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_{n-k+1},$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k\beta_{n-k+1}|\le\frac{M}{n}\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|,$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}|\alpha_k|=0$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_k=0$，得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab。$$

14．设数列$\{a_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$　$(-\infty<a<+\infty)$。证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0。$$

证　因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1})=a$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n})=0。$$

习　题　2.3　无穷大量

1. 按定义证明下述数列为无穷大量：

(1) $\left\{\dfrac{n^2+1}{2n+1}\right\}$；　　(2) $\left\{\log_a\left(\dfrac{1}{n}\right)\right\}$ $(a>1)$；

(3) $\{n-\arctan n\}$；　　(4) $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right\}$。

证（1）$\forall G>0$，取 $N=[3G]$，当 $n>N$ 时，成立 $\left|\dfrac{n^2+1}{2n+1}\right|>\dfrac{n}{3}>G$。

（2）$\forall G>0$，取 $N=[a^G]$，当 $n>N$ 时，成立 $\left|\log_a\left(\dfrac{1}{n}\right)\right|=\log_a n>G$。

（3）$\forall G>0$，取 $N=[G+\dfrac{\pi}{2}]$，当 $n>N$ 时，成立 $|n-\arctan n|>G$。

（4）$\forall G>0$，取 $N=[2G^2]$，当 $n>N$ 时，成立

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right|>\frac{n}{\sqrt{2n}}>G\text{。}$$

2. (1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$（或 $-\infty$），按定义证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=+\infty\text{（或}-\infty\text{）};$$

(2) 设 $a_n>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，利用（1）证明：

$$\lim_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=0\text{。}$$

证（1）设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，则 $\forall G>0,\exists N_1>0,\forall n>N_1: a_n>3G$。对固定的 N_1，$\exists N>2N_1,\forall n>N:\left|\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}\right|<\dfrac{G}{2}$，于是

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\ge\frac{a_{N_1+1}+a_{N_1+2}+\cdots+a_n}{n}-\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}\right|>\frac{3G}{2}-\frac{G}{2}=G\text{。}$$

同理可证当 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$ 时，成立 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=-\infty$。

（2） $\ln(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=\dfrac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=-\infty$，可知

$\lim\limits_{n\to\infty}\ln(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=-\infty$，从而

$$\lim_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=0。$$

3. 证明：

(1) 设$\{x_n\}$是无穷大量，$|y_n|\ge\delta>0$，则$\{x_n y_n\}$是无穷大量；

(2) 设$\{x_n\}$是无穷大量，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b\neq 0$，则$\{x_n y_n\}$与$\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$都是无穷大量。

证 （1）因为$\{x_n\}$是无穷大量，所以$\forall G>0$，$\exists N$，$\forall n>N$，成立$|x_n|>\dfrac{G}{\delta}$。于是$\forall n>N$，成立$|x_ny_n|>G$，所以$\{x_n y_n\}$也是无穷大量。

（2）由$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b\neq 0$，可知$\exists N'$，$\forall n>N'$，成立$\dfrac{|b|}{2}\le|y_n|\le 2|b|$。因为$\{x_n\}$是无穷大量，所以$\forall G>0$，$\exists N''$，$\forall n>N''$，成立$|x_n|>\max\left\{\dfrac{2G}{|b|},2|b|G\right\}$。取$N=\max\{N',N''\}$，$\forall n>N$，成立$|x_ny_n|>G$与$\left|\dfrac{x_n}{y_n}\right|>G$，所以$\{x_n y_n\}$与$\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$都是无穷大量。

4. (1) 利用 Stolz 定理，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2}{n^3}=\frac{4}{3};$$

(2) 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\dfrac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2}{n^3}-\dfrac{4}{3}\right]$。

解（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2}{n^3-(n-1)^3}=\dfrac{4}{3}$。

（2）$\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\dfrac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2}{n^3}-\dfrac{4}{3}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3[1^2+3^2+\cdots+(2n+1)^2]-4n^3}{3n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3(2n+1)^2-4n^3+4(n-1)^3}{3n^2-3(n-1)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{24n-1}{6n-3}=4$。

5. 利用 Stolz 定理，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n}=0 \quad (a>1)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0 \quad (a>1$，$k$是正整数)。

证 （1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\log_a\dfrac{n}{n-1}=0$。

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k-(n-1)^k}{a^n-a^{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{P_{k-1}(n)}{a^{n-1}(a-1)}$，

其中$P_{k-1}(n)$为关于n的$k-1$次多项式；重复上述过程k次即得到

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{P_{k-1}(n)}{a^{n-1}(a-1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{P_{k-2}(n)}{a^{n-2}(a-1)^2}=\cdots=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{P_0(n)}{a^{n-k}(a-1)^k}=0$。

6. (1) 在 Stolz 定理中，若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\infty$，能否得出$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\infty$的结论?

(2) 在 Stolz 定理中，若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$不存在，能否得出$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}$不存在的结论?

解 （1）不能。考虑例子$x_n=(-1)^n n$，$y_n=n$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n(2n-1)}{1}=\infty$， 但 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$极限不存在。

（2）不能。考虑例子$x_n=1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}n$，$y_n=n^2$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}n}{2n-1}$极限不存在，但$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=0$。

7. 设$0<\lambda<1$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，证明

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+\lambda a_{n-1}+\lambda^2 a_{n-2}+\cdots+\lambda^n a_0)=\frac{a}{1-\lambda}。$$

证 记$k=\lambda^{-1}$，则$a_n+\lambda a_{n-1}+\cdots+\lambda^n a_0=\dfrac{k^n a_n+k^{n-1}a_{n-1}+\cdots+a_0}{k^n}$，利用 Stolz 定理,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+\lambda a_{n-1}+\lambda^2 a_{n-2}+\cdots+\lambda^n a_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{k^n a_n+k^{n-1}a_{n-1}+\cdots+a_0}{k^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{k^n a_n}{k^{n-1}(k-1)}=\frac{a}{1-\lambda}。$$

8. 设$A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$,当$n\to\infty$时有极限。$\{p_n\}$为单调递增的正数数列，且$p_n\to+\infty$ $(n\to\infty)$。证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_n}=0 。$$

证 设$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$，作代换$a_k=A_k-A_{k-1}$，得到

$$\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_n}=A_n-\frac{A_1(p_2-p_1)+A_2(p_3-p_2)+\cdots+A_{n-1}(p_n-p_{n-1})}{p_n},$$

对上式求极限，在求后一分式的极限时应用 Stolz 定理,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}A_n-\lim_{n\to\infty}\frac{A_1(p_2-p_1)+A_2(p_3-p_2)+\cdots+A_{n-1}(p_n-p_{n-1})}{p_n}$$

$$=A-\lim_{n\to\infty}\frac{A_n(p_n-p_{n-1})}{p_n-p_{n-1}}=A-A=0。$$

习　题 2.4　收敛准则

1.　　利用$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$求下列数列的极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$；　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n$；　　（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$；

（5）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$。

解（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{-(n-1)}\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{-1}\right]=\dfrac{1}{e}$。

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{-1}\right]=e$。

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$。

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}=1$。

（5）当$n\ge 2$时，有

$$\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^n\le\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n。$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)^n=e$与$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$，即得$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)^n=e$。

2. 利用单调有界数列必定收敛的性质，证明下述数列收敛，并求出极限：

(1) $x_1=\sqrt{2}$, $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$, $n=1,2,3,\cdots$；

(2) $x_1=\sqrt{2}$, $x_{n+1}=\sqrt{2x_n}$, $n=1,2,3,\cdots$；

(3) $x_1=\sqrt{2}$, $x_{n+1}=\dfrac{-1}{2+x_n}$, $n=1,2,3,\cdots$；

(4) $x_1=1$， $x_{n+1}=\sqrt{4+3x_n}$, $n=1,2,3,\cdots$；

(5) $0< x_1 <1$， $x_{n+1}=1-\sqrt{1-x_n}$, $n=1,2,3,\cdots$；

(6) $0< x_1 <1$, $x_{n+1}=x_n(2-x_n)$, $n=1,2,3,\cdots$。

解 （1）首先有$0<x_1=\sqrt{2}<2$，设$0<x_k<2$，则$0<x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<2$，由数学归纳法可知$\forall n$， $0<x_n<2$。由

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{2+x_n}-\sqrt{2+x_{n-1}}=\frac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{2+x_n}+\sqrt{2+x_{n-1}}},$$

可知数列$\{x_{n+1}-x_n\}$保持同号；再由$x_2-x_1>0$，可知$\forall n$， $x_{n+1}-x_n>0$，所以$\{x_n\}$是单调增加有上界的数列，因此收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对等式$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$两端求极限，得到方程$a=\sqrt{2+a}$，解此方程，得到$a=2$，因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=2。$$

（2）首先有$0<x_1=\sqrt{2}<2$，设$0<x_k<2$，则$0<x_{k+1}=\sqrt{2x_k}<2$，由数学归纳法可知$\forall n$，$0<x_n<2$。由$x_{n+1}-x_n=\sqrt{2x_n}-x_n=\sqrt{x_n}(\sqrt{2}-\sqrt{x_n})>0$，可知$\{x_n\}$是单调增加有上界的数列，因此收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对等式$x_{n+1}=\sqrt{2x_n}$两端求极限，得到方程$a=\sqrt{2a}$，解此方程，得到$a=2$（另一解$a=0$舍去），因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=2。$$

（3）首先有$x_1=\sqrt{2}>-1$，设$x_k>-1$，则$x_{k+1}=\dfrac{-1}{2+x_k}>-1$，由数学

归纳法可知$\forall n$，$x_n > -1$。由$x_{n+1} - x_n = \dfrac{-1}{2+x_n} - x_n = -\dfrac{(x_n+1)^2}{2+x_n} < 0$，可知$\{x_n\}$是单调减少有下界的数列，因此收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，对等式$x_{n+1} = \dfrac{-1}{2+x_n}$两端求极限，得到方程$a = \dfrac{-1}{2+a}$，解此方程，得到$a = -1$，因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -1 \text{。}$$

（4）首先有$0 < x_1 = 1 < 4$，设$0 < x_k < 4$，则$0 < x_{k+1} = \sqrt{4+3x_k} < 4$，由数学归纳法可知$\forall n$，$0 < x_n < 4$。由$x_{n+1}^2 - x_n^2 = 4 + 3x_n - x_n^2 = (4-x_n)(1+x_n) > 0$，可知$\{x_n\}$是单调增加有上界的数列，因此收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，对等式$x_{n+1} = \sqrt{4+3x_n}$两端求极限，得到方程$a = \sqrt{4+3a}$，解此方程，得到$a = 4$，因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 4 \text{。}$$

（5）首先有$0 < x_1 < 1$，设$0 < x_k < 1$，则$0 < x_{k+1} = 1 - \sqrt{1-x_k} < 1$，由数学归纳法可知$\forall n$，$0 < x_n < 1$。由$x_{n+1} - x_n = 1 - x_n - \sqrt{1-x_n} < 0$，可知$\{x_n\}$是单调减少有下界的数列，因此收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，对等式$x_{n+1} = 1 - \sqrt{1-x_n}$两端求极限，得到方程$a = 1 - \sqrt{1-a}$，解此方程，得到$a = 0$（另一解$a = 1$舍去），因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \text{。}$$

（6）首先有$0 < x_1 < 1$，设$0 < x_k < 1$，则$0 < x_{k+1} = x_k(2-x_k) < 1$，由数学归纳法可知$\forall n$，$0 < x_n < 1$。由$x_{n+1} - x_n = x_n(2-x_n) - x_n = x_n(1-x_n) > 0$，可知$\{x_n\}$是单调增加有上界的数列，因此收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，对等式$x_{n+1} = x_n(2-x_n)$两端求极限，得到方程$a = a(2-a)$，解此方程，得到$a = 1$（另一解$a = 0$舍去），因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1 \text{。}$$

3. 利用递推公式与单调有界数列的性质，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{2n+1} = 0$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a>1)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$。

证 （1）设 $x_n = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{2n+1}$，则 $x_n > 0$，$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+2}{2n+3} < 1$，所以 $\{x_n\}$ 是单调减少有下界的数列，因此收敛。设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，对等式 $x_{n+1} = \frac{n+2}{2n+3} x_n$ 两端求极限，得到 $a = \frac{1}{2}a$，于是 $a = 0$，因此

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{2n+1} = 0 \text{。}$$

（2）设 $x_n = \frac{a^n}{n!}$，则 $x_n > 0$，且当 $n > a$ 时，$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a}{n+1} < 1$，所以 $\{x_n\}$ 从某一项开始是单调减少有下界的数列，因此收敛。设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$，对等式 $x_{n+1} = \frac{a}{n+1} x_n$ 两端求极限，得到 $x = 0$，因此

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \text{。}$$

（3）设 $x_n = \frac{n!}{n^n}$，则 $x_n > 0$，$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1$，所以 $\{x_n\}$ 是单调减少有下界的数列，因此收敛。设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，对等式 $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x_{n+1}$ 两端求极限，得到 $a = ea$，于是 $a = 0$，因此

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \text{。}$$

4. 设 $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$，$n = 1,2,3,\cdots$，分 $x_1 = 1$ 与 $x_1 = -2$ 两种情况求

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

解 对$x_1=1$，易知$\forall n$，$x_n>0$，且当$n\ge 2$时，$x_n\ge\sqrt{2}$。由

$x_{n+1}-x_n=-\frac{x_n}{2}+\frac{1}{x_n}\le 0$，可知数列$\{x_n\}$单调减少有下界，所以收敛。设

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，对等式$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right)$两端求极限，得到$a=\frac{1}{2}(a+\frac{2}{a})$，解得

$a=\sqrt{2}$（$a=-\sqrt{2}$舍去），因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\sqrt{2}\text{。}$$

对$x_1=-2$，易知$\forall n$，$x_n\le-\sqrt{2}$。由$x_{n+1}-x_n=-\frac{x_n}{2}+\frac{1}{x_n}\ge 0$，可知数列$\{x_n\}$单调增加有上界，所以收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=b$，对等式$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right)$两端求极限，得到$b=\frac{1}{2}(b+\frac{2}{b})$，解得$b=-\sqrt{2}$（$b=\sqrt{2}$舍去），因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n=-\sqrt{2}\text{。}$$

5. 设$x_1=a$，$x_2=b$，$x_{n+2}=\frac{x_{n+1}+x_n}{2}$（$n=1,2,3,\cdots$），求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

解 首先利用递推公式$x_{n+1}-x_n=-\frac{1}{2}(x_n-x_{n-1})$，得到数列$\{x_{n+1}-x_n\}$的通项公式$x_{n+1}-x_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(b-a)$。于是由

$$x_n=x_1+(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\cdots+(x_n-x_{n-1})=a+(b-a)\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k,$$

得到

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{a+2b}{3}\text{。}$$

6. 给定$0<a<b$，令$x_1=a$，$y_1=b$。

(1) 若$x_{n+1}=\sqrt{x_n y_n}$，$y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$（$n=1,2,3,\cdots$），

证明$\{x_n\}$，$\{y_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$。这个公共极限称

为a与b的算术几何平均；

(2) 若$x_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$，$y_{n+1}=\dfrac{2x_ny_n}{x_n+y_n}$（$n=1,2,3,\cdots$），证明$\{x_n\}$，$\{y_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$。这个公共极限称为$a$与$b$的算术调和平均。

证 (1) 首先易知$\forall n$，有$x_n\le y_n$。由$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n}(\sqrt{y_n}-\sqrt{x_n})\ge 0$，$y_{n+1}-y_n=\frac{1}{2}(x_n-y_n)\le 0$，得到$a\le x_n<x_{n+1}<y_{n+1}<y_n\le b$，即$\{x_n\}$是单调增加有上界的数列，$\{y_n\}$是单调减少有下界的数列，所以它们收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y$，对$y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$的两端求极限，得到$x=y$。

（2）首先易知当$n\ge 2$时，有$x_n\ge y_n$。由$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(y_n-x_n)\le 0$，$y_{n+1}-y_n=\dfrac{y_n(x_n-y_n)}{x_n+y_n}\ge 0$，得到当$n\ge 2$时，

$\dfrac{2ab}{a+b}\le y_n<y_{n+1}<x_{n+1}<x_n\le\dfrac{a+b}{2}$，即$\{y_n\}$是单调增加有上界的数列，$\{x_n\}$是单调减少有下界的数列，所以它们收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y$，对$x_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$的两端求极限，得到$x=y$。

7. 设$x_1=\sqrt{2}$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2+x_n}$（$n=1,2,3,\cdots$），证明数列$\{x_n\}$收敛，并求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

解 当$0<x_n<\sqrt{2}-1$时，有$x_{n+1}>\sqrt{2}-1$；当$x_n>\sqrt{2}-1$时，有$0<x_{n+1}<\sqrt{2}-1$。

由于$x_1=\sqrt{2}>\sqrt{2}-1$，得到$\forall n$，$x_{2n+1}>\sqrt{2}-1$，$0<x_{2n}<\sqrt{2}-1$。于是由

$$x_{2n+1}-x_{2n-1}=\frac{2+x_{2n-1}}{5+2x_{2n-1}}-x_{2n-1}=\frac{-2(x_{2n-1}-\sqrt{2}+1)(x_{2n-1}+\sqrt{2}+1)}{5+x_{2n-1}}<0,$$

$$x_{2n+2}-x_{2n}=\frac{2+x_{2n}}{5+2x_{2n}}-x_{2n}=\frac{-2(x_{2n}-\sqrt{2}+1)(x_{2n}+\sqrt{2}+1)}{5+x_{2n}}>0,$$

可知数列$\{x_{2n-1}\}$单调减少有下界，数列$\{x_{2n}\}$单调增加有上界，从而都收敛。

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=a$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1}=b$，对等式$x_{2n+1}=\dfrac{2+x_{2n-1}}{5+2x_{2n-1}}$与$x_{2n+2}=\dfrac{2+x_{2n}}{5+2x_{2n}}$两端求极限，得到方程$a=\dfrac{2+a}{5+2a}$与$b=\dfrac{2+b}{5+2b}$，解此两方程，得到解$a=\sqrt{2}-1$与$b=\sqrt{2}-1$（另两解$a=-\sqrt{2}-1$与$b=-\sqrt{2}-1$舍去），因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\sqrt{2}-1。$$

8. 设｛x_n｝是一单调数列，证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$的充分必要条件是：存在｛$x_n$｝的子列$\{x_{n_k}\}$满足$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=a$。

证 必要性显然，现证充分性。不妨设｛x_n｝单调增加，$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=a$，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists K$，$\forall k>K$：$-\varepsilon<x_{n_k}-a\le 0$。取$N=n_{K+1}$，$\forall n>N$，$\exists M>K+1$，使得$n_{K+1}<n<n_M$，于是$-\varepsilon<x_{n_{K+1}}-a\le x_n-a\le x_{n_M}-a\le 0$，因此$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$。

9. 若有界数列｛x_n｝不收敛，则必存在两个子列$\{x_{n_k^{(1)}}\}$与$\{x_{n_k^{(2)}}\}$收敛于不同的极限，即$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k^{(1)}} = a$，$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k^{(2)}} = b$，$a\neq b$。

证 由于｛x_n｝不收敛，所以$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall N$，$\exists m>n>N$：$|x_m-x_n|\ge\varepsilon_0$。

取$N_1=1$，$\exists m_1>n_1>N_1$：$|x_{m_1}-x_{n_1}|\ge\varepsilon_0$，

取$N_2=m_1$，$\exists m_2>n_2>N_2$：$|x_{m_2}-x_{n_2}|\ge\varepsilon_0$，

……，

取$N_k=m_{k-1}$，$\exists m_k>n_k>N_k$：$|x_{m_k}-x_{n_k}|\ge\varepsilon_0$，

…….

于是得到｛x_n｝的两个子列｛x_{n_k}｝与｛x_{m_k}｝，它们都是有界数列。首先｛x_{n_k}｝具有收敛子列｛$x_{n_k'}$｝，由于对应的｛$x_{m_k'}$｝也是有界数列，又具有收敛子列｛$x_{m_k''}$｝。

记$\{n_k"\}=\{n_k^{(1)}\}$，$\{m_k"\}=\{n_k^{(2)}\}$，则得到 $\{x_n\}$ 的两个子列$\{x_{n_k^{(1)}}\}$与$\{x_{n_k^{(2)}}\}$，它们收敛于不同的极限。

10. 若数列$\{x_n\}$无界，但非无穷大量，则必存在两个子列$\{x_{n_k^{(1)}}\}$与$\{x_{n_k^{(2)}}\}$，其中 $\{x_{n_k^{(1)}}\}$ 是无穷大量，$\{x_{n_k^{(2)}}\}$ 是收敛子列。

证　由于数列$\{x_n\}$不是无穷大量，所以$\exists M>0$，使得数列$\{x_n\}$中有无穷多项满足$|x_n|\le M$，于是从中可以取出数列$\{x_n\}$的一个收敛子列$\{x_{m_k}\}$。又由于数列$\{x_n\}$无界，所以对$\forall G>0$，数列$\{x_n\}$中必有无穷多项满足$|x_n|>G$。

取$G_1=1$，则$\exists n_1$，使得$|x_{n_1}|>G_1$，

取$G_2=2$，则$\exists n_2>n_1$，使得$|x_{n_2}|>G_2$，

……，

取$G_k=k$，则$\exists n_k>n_{k-1}$，使得$|x_{n_k}|>G_k$，

…….

记$\{n_k\}=\{n_k^{(1)}\}$，$\{m_k\}=\{n_k^{(2)}\}$，则得到 $\{x_n\}$ 的两个子列$\{x_{n_k^{(1)}}\}$与$\{x_{n_k^{(2)}}\}$，其中 $\{x_{n_k^{(1)}}\}$ 是无穷大量，$\{x_{n_k^{(2)}}\}$ 是收敛子列。

11. 设S是非空有上界的数集，$\sup S = a \,\overline{\in}\, S$。证明在数集$S$中可取出严格单调增加的数列$\{x_n\}$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。

证　由$\sup S = a \,\overline{\in}\, S$，可知$\forall \varepsilon>0$，$\exists x\in S$，使得$a-\varepsilon<x<a$。

先取$\varepsilon_1=1$，则$\exists x_1\in S$，使得$a-\varepsilon_1<x_1<a$；对$\varepsilon_2=\min\{\frac{1}{2},a-x_1\}>0$，则$\exists x_2\in S$，使得$a-\varepsilon_2<x_2<a$，其中$x_1=a-(a-x_1)\le a-\varepsilon_2<x_2$；对$\varepsilon_3=\min\{\frac{1}{3},a-x_2\}>0$，则$\exists x_3\in S$，使得$a-\varepsilon_3<x_3<a$，其中$x_2=a-(a-x_2)\le a-\varepsilon_3<x_3$；……；对$\varepsilon_n=\min\{\frac{1}{n},a-x_{n-1}\}>0$，则$\exists x_n\in S$，使得$a-\varepsilon_n<x_n<a$，其中$x_{n-1}=a-(a-x_{n-1})\le a-\varepsilon_n<x_n$；……。由此在数

集S中取到了严格单调增加的数列$\{x_n\}$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。

12. 设$\{(a_n, b_n)\}$是一列开区间，满足条件：

(1) $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots < b_n < \cdots < b_2 < b_1$，

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n)=0$。

证明存在唯一的实数ξ属于所有的开区间(a_n, b_n)，且$\xi=\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n$。

证 根据题意，$\{a_n\}$单调增加有上界，$\{b_n\}$单调减少有下界，因此都收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$，则$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}[a_n + (b_n - a_n)] = \xi$。由于$\{a_n\}$严格单调增加，$\{b_n\}$严格单调减少，可知$\forall n$，有$a_n < \xi < b_n$，即$\xi$属于所有的开区间$(a_n, b_n)$。

若存在另一ξ'属于所有的开区间(a_n, b_n)，则由$a_n < \xi' < b_n$，利用极限的夹逼性，得到$\xi' = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$，即满足题意的$\xi$是唯一的。

13. 利用 Cauchy 收敛原理证明下述数列收敛：

(1) $x_n = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \cdots + a_n q^n \quad (|q|<1, |a_k| \le M)$；

(2) $x_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$。

证 （1）$\forall \varepsilon\left(0<\varepsilon<\dfrac{M}{1-|q|}\right)$，取$N=\left[\dfrac{\ln\dfrac{(1-|q|)}{M}\varepsilon}{\ln|q|}\right]$，当$n>N$时，成立

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k q^k\right| \le M|q|^{n+1}(1+|q|+|q|^2+\cdots+|q|^{m-n-1}) < \frac{M}{1-|q|}|q|^{n+1} < \varepsilon。$$

（2）$\forall \varepsilon > 0$，取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，成立$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{m}(-1)^{k+1}\dfrac{1}{k}\right| < \dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$。

14. (1) 设数列$\{x_n\}$满足条件$\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_n|=0$，问$\{x_n\}$是否一定是基本数列。

(2) 设数列$\{x_n\}$满足条件$|x_{n+1}-x_n|<\frac{1}{2^n}$（$n=1,2,3,\cdots$）。证明$\{x_n\}$是基本数列。

解（1）不一定。反例：$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$。

（2）$\forall\varepsilon(0<\varepsilon<1)$，取$N=1+\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln\frac{1}{2}}\right]$，$\forall m>n>N$，成立

$$|x_m-x_n|\le|x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|$$

$$<\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{m-1}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<\varepsilon\text{。}$$

15. 对于数列$\{x_n\}$构造数集A_k：

$$A_k=\{x_n\mid n\geqslant k\}=\{x_k,x_{k+1},\cdots\}\text{。}$$

记$\operatorname{diam}A_k=\sup\{|x_n-x_m|,\ x_n\in A_k,x_m\in A_k\}$，证明数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是

$$\lim_{k\to\infty}\operatorname{diam}A_k=0\text{。}$$

证　因为$\lim\limits_{k\to\infty}\operatorname{diam}A_k=0$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists K$，$\forall k>K$，成立$\operatorname{diam}A_k<\varepsilon$。取$N=K$，则$\forall m>n>N$，成立$|x_m-x_n|\le\operatorname{diam}A_{k+1}<\varepsilon$。

16. 利用 Cauchy 收敛原理证明：单调有界数列必定收敛。

证　采用反证法。不妨设$\{x_n\}$是单调增加的有界数列。假设它不收敛，则$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall N>0$，$\exists m,n>N$：$|x_m-x_n|>\varepsilon_0$。

取$N_1=1,\exists m_1>n_1>N_1:x_{m_1}-x_{n_1}>\varepsilon_0$;

取$N_2=m_1,\exists m_2>n_2>N_2:x_{m_2}-x_{n_2}>\varepsilon_0$;

……

取$N_k=m_{k-1},\exists m_k>n_k>N_k:x_{m_k}-x_{n_k}>\varepsilon_0$;

…….

于是$x_{m_k}-x_{n_1}>k\varepsilon_0\to+\infty\ (k\to\infty)$，与数列$\{x_n\}$有界矛盾。

第三章　函数极限与连续函数

习　题　3.1　函数极限

1. 按函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 8$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$；

(3) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x+1}{2x-1} = \dfrac{1}{2}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0+} \ln x = -\infty$；　　(6) $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$；

(7) $\lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{2x}{x^2-4} = +\infty$；　　(8) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{x+1} = -\infty$。

证　(1) 先取 $|x-2|<1$，则 $1<x<3$，$|x^3-8| = |(x^2+2x+4)(x-2)| < 19|x-2|$，于是对任意的 $\varepsilon>0$，取 $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{19}\right\} > 0$，当 $0<|x-2|<\delta$ 时，成立 $|x^3-8| < 19|x-2| < \varepsilon$，所以

$$\lim_{x\to 2} x^3 = 8。$$

(2) 首先函数 $\sqrt{x}$ 的定义域为 $x\ge 0$，且 $\left|\sqrt{x}-2\right| = \dfrac{|x-4|}{\sqrt{x}+2} \le \dfrac{1}{2}|x-4|$，于是对任意的 $\varepsilon>0$，取 $\delta = \min\{4, 2\varepsilon\} > 0$，当 $0<|x-4|<\delta$ 时，成立 $\left|\sqrt{x}-2\right| \le \dfrac{1}{2}|x-4| < \varepsilon$，所以

$$\lim_{x\to 4} \sqrt{x} = 2。$$

(3) 先取 $|x-3|<1$，则 $2<x<4$，$\left|\dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{x-3}{2(x+1)}\right| < \dfrac{1}{6}|x-3|$，于是对任意的 $\varepsilon>0$，取 $\delta = \min\{1, 6\varepsilon\} > 0$，当 $0<|x-3|<\delta$ 时，成立 $\left|\dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{6}|x-3| < \varepsilon$，所以

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{2}。$$

(4) 先取 $|x|>1$，则 $|2x-1| \ge |x|$，$\left|\dfrac{x+1}{2x-1} - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{3}{2|2x-1|} \le \dfrac{3}{2|x|}$，于是对任意的 $\varepsilon>0$，取 $X = \max\left\{1, \dfrac{3}{2\varepsilon}\right\} > 0$，当 $|x|>X$ 时，成立 $\left|\dfrac{x+1}{2x-1} - \dfrac{1}{2}\right| \le \dfrac{3}{2|x|} < \varepsilon$，所以

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x+1}{2x-1} = \frac{1}{2}。$$

（5）对任意的$G>0$，取$\delta=e^{-G}>0$，当$0<x<\delta$时，成立$\ln x<-G$，所以

$$\lim_{x\to 0+}\ln x=-\infty\text{。}$$

（6）对任意的$0<\varepsilon<1$，取$X=\ln\frac{1}{\varepsilon}>0$，当$x>X$时，成立$0<e^{-x}<e^{\ln\varepsilon}=\varepsilon$，所以

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0\text{。}$$

（7）先取$0<x-2<1$，则$2<x<3$，$\frac{2x}{x+2}>1$，于是对任意的$G>0$，取$\delta=\min\left\{1,\frac{1}{G}\right\}$，当$0<x-2<\delta$时，成立$\frac{2x}{x^2-4}=\frac{2x}{(x+2)(x-2)}>\frac{1}{x-2}>G$，所以

$$\lim_{x\to 2+}\frac{2x}{x^2-4}=+\infty\text{。}$$

（8）先取$x<-1$，则$\frac{x}{x+1}>1$，于是对任意的$G>0$，取$X=\max\{1,G\}$，当$x<-X$时，成立$\frac{x^2}{x+1}<x<-G$，所以

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x+1}=-\infty\text{。}$$

2. 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^5-5x^3+2x}{x^5-x^3+3x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+2x)(1+3x)-1}{x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$；

(7) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$；

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$；

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$；

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$。

解

（1）$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{2}{3}$。

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{1}{2}$。

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^5-5x^3+2x}{x^5-x^3+3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-5x^2+3x^4}{3-x^2+x^4}=\frac{2}{3}$。

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+2x)(1+3x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+5x+6x^2)-1}{x}=5$。

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+x^n}{x}=n$。

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+nmx+C_n^2m^2x^2+\cdots+m^nx^n)-(1+mnx+C_m^2n^2x^2+\cdots+n^mx^m)}{x^2}$$

$=\dfrac{1}{2}nm(n-m)$。

(7) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\cos\dfrac{x+a}{2}\sin\dfrac{x-a}{2}}{x-a}=\cos a$。

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}=2$。

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 4x\sin 2x}{x^2}=4$。

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{x^3\cos x}=\dfrac{1}{2}$。

3．利用夹逼法求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$； (2) $\lim\limits_{x\to +\infty}x^{\frac{1}{x}}$。

解 (1) $\forall x>0$，当 $\dfrac{1}{n+1}<x\le\dfrac{1}{n}$，有 $\dfrac{n}{n+1}<x\left[\dfrac{1}{x}\right]\le 1$。由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$，可知 $\lim\limits_{x\to 0+}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$。$\forall x<0$，当 $-\dfrac{1}{n}<x\le-\dfrac{1}{n+1}$，有 $1\le x\left[\dfrac{1}{x}\right]<\dfrac{n+1}{n}$。由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$，可知 $\lim\limits_{x\to 0-}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$。由此得到

$$\lim_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1。$$

(2) 当 $n\le x<n+1$，有 $n^{\frac{1}{n+1}}<x^{\frac{1}{x}}<(n+1)^{\frac{1}{n}}$。由 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n+1}}=1$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}}=1$，得到

$$\lim_{x\to +\infty}x^{\frac{1}{x}}=1。$$

4．利用夹逼法证明：

(1) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^k}{a^x}=0$ $(a>1$，k 为任意正整数)；

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln^k x}{x}=0$ (k 为任意正整数)。

解（1）首先有$0<\dfrac{x^k}{a^x}<\dfrac{([x]+1)^k}{a^{[x]}}$，由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^k}{a^n}=0$即得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}=0。$$

（2）令$\ln x=t$，则$\dfrac{\ln^k x}{x}=\dfrac{t^k}{e^t}$，且当$x\to+\infty$时，有$t\to+\infty$。再利用（1）的结论，即得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^k x}{x}=0。$$

5. 讨论单侧极限：

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}, & 0<x\le 1,\\ x^2, & 1<x<2,\\ 2x & 2<x<3,\end{cases}$ 在 $x=0,1,2$ 三点；

(2) $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+1}{2^{\frac{1}{x}}-1}$， 在 $x=0$ 点；

(3) Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数},\end{cases}$$ 在任意点；

(4) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right]$，在 $x=\dfrac{1}{n}$ （$n=1,2,3,\cdots$）。

解（1）$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to2-}f(x)=4$，$\lim\limits_{x\to2+}f(x)=4$。

（2）$\lim\limits_{x\to0-}f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=1$。

（3）$D(x)$在任意点无单侧极限。

（4）$\lim\limits_{x\to\frac{1}{n}-}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\frac{1}{n}+}f(x)=1$。

6. 说明下列函数极限的情况：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}e^x\sin x$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$；　　(6) $\lim\limits_{x\to0+}\left(\dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right]\right)$。

解（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$。

（2）$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x\sin x=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\sin x$极限不存在，所以$\lim\limits_{x\to\infty}e^x\sin x$极限不存在。

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}=\begin{cases}0 & \alpha<1\\ 1 & \alpha=1\\ +\infty & \alpha>1\end{cases}$。

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=0$，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$极限不存在。

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x}=1$。

(6) 取$x_n'=\frac{1}{n}$，$x_n''=\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_n'}-\left[\frac{1}{x_n'}\right]\right)=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_n''}-\left[\frac{1}{x_n''}\right]\right)=\frac{1}{2}$，所以$\lim\limits_{x\to0+}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)$极限不存在。

7．设函数

$$f(x)=\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)。$$

问当$x\to0$时，$f(x)$的极限是否存在?

解 由于$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+\left(e^{\frac{1}{x}}\right)^4}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1$，

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{-x}\right)=2-1=1$，所以

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1。$$

8. 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$（$a\geqslant0$），证明：$\lim\limits_{x\to\sqrt{a}}f(x^2)=A$。

证 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$（$a\geqslant0$），则$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta'>0$，$\forall x(0<|x-a|<\delta')$，有$|f(x)-A|<\varepsilon$。取$\delta=\min\left\{1,\frac{\delta'}{1+2\sqrt{a}}\right\}>0$，则当$0<|x-\sqrt{a}|<\delta$时，首先有$|x+\sqrt{a}|<1+2\sqrt{a}$，于是$0<|x^2-a|=|(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})|<\delta'$，从而$|f(x^2)-A|<\varepsilon$，这就说明了$\lim\limits_{x\to\sqrt{a}}f(x^2)=A$。

9. (1) 设$\lim\limits_{x\to0}f(x^3)=A$，证明：$\lim\limits_{x\to0}f(x)=A$。

(2) 设$\lim\limits_{x\to 0} f(x^2) = A$，问是否成立$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = A$?

证 （1）设$\lim\limits_{x\to 0} f(x^3) = A$，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta'>0$，$\forall x(0<|x|<\delta')$（即$0<|x^3|<\delta'^3$），有$|f(x^3)-A|<\varepsilon$。取$\delta=\delta'^3>0$，则当$0<|x|<\delta$时，有$0<\left|x^{\frac{1}{3}}\right|<\delta'$，从而$|f(x)-A|<\varepsilon$，这就说明了$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=A$ 。

(2)当$\lim\limits_{x\to 0} f(x^2)=A$时，不一定成立$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=A$。例如：$f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$，则$\lim\limits_{x\to 0} f(x^2)=1$，但极限$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在。

10. 写出下述命题的“否定命题”的分析表述：

(1) $\{x_n\}$是无穷小量；

(2) $\{x_n\}$是正无穷大量；

(3) $f(x)$在x_0的右极限是A；

(4) $f(x)$在x_0的左极限是正无穷大量；

(5) 当$x\to-\infty$，$f(x)$的极限是A；

(6) 当$x\to+\infty$，$f(x)$是负无穷大量。

解（1）$\exists\varepsilon_0>0,\forall N,\exists n>N:|x_n|\ge\varepsilon_0$。

（2）$\exists G_0>0,\forall N,\exists n>N:x_n\le G_0$。

（3）$\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x\in(x_0,x_0+\delta):|f(x)-A|\ge\varepsilon_0$。

（4）$\exists G_0>0,\forall\delta>0,\exists x\in(x_0-\delta,x_0):f(x)\le G_0$。

（5）$\exists\varepsilon_0>0,\forall X>0,\exists x\in(-\infty,-X):|f(x)-A|\ge\varepsilon_0$。

（6）$\exists G_0>0,\forall X>0,\exists x\in(X,+\infty):f(x)\ge -G_0$。

11. 证明$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=+\infty$的充分必要条件是：对于任意从右方收敛于$x_0$的数列$\{x_n\}\,(x_n>x_0)$，成立

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty。$$

证 必要性：由$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=+\infty$，可知$\forall G>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x(0<x-x_0<\delta)$：$f(x)>G$。因为数列$\{x_n\}\,(x_n>x_0)$收敛于$x_0$，对于上述$\delta>0$，$\exists N$，$\forall n>N$：$0<x_n-x_0<\delta$。于是当$n>N$时，成立$f(x_n)>G$，即$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty$。

充分性：用反证法。设$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=+\infty$不成立，则$\exists G_0>0$，$\forall\delta>0$，$\exists x(0<x-x_0<\delta)$：$f(x)\le G_0$。取$\delta_n=\dfrac{1}{n}$，$n=1,2,3,\cdots$：

对于$\delta_1=1$，$\exists x_1(0<x_1-x_0<1)$：$f(x_1)\le G_0$；

对于$\delta_2=\dfrac{1}{2}$，$\exists x_2(0<x_2-x_0<\dfrac{1}{2})$：$f(x_2)\le G_0$；

$\cdots$,

对于$\delta_k=\dfrac{1}{k}$，$\exists x_k(0<x_k-x_0<\dfrac{1}{k})$：$f(x_k)\le G_0$；

$\cdots$,

于是得到数列$\{x_n\}$ $(x_n>x_0)$收敛于x_0，但相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$不可能是无穷大量，由此产生矛盾，所以$\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=+\infty$成立。

12. 证明$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$的充分必要条件是：对于任意正无穷大量$\{x_n\}$，成立

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=-\infty\text{。}$$

证　必要性：由$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，可知$\forall G>0$，$\exists X>0$，$\forall x>X$：$f(x)<-G$。因为数列$\{x_n\}$是正无穷大量，对于上述$X>0$，$\exists N$，$\forall n>N$：$x_n>X$。于是当$n>N$时，成立$f(x_n)<-G$，即$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=-\infty$。

充分性：用反证法。设$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$不成立，则$\exists G_0>0$，$\forall X>0$，$\exists x>X$：$f(x)\ge -G_0$。取$X_n=n$，$n=1,2,3,\cdots$：

对于$X_1=1$，$\exists x_1>1$：$f(x_1)\ge -G_0$；

对于$X_2=2$，$\exists x_2>2$：$f(x_2)\ge -G_0$；

$\cdots$,

对于$X_k=k$，$\exists x_k>k$：$f(x_k)\ge -G_0$；

$\cdots$,

于是得到数列$\{x_n\}$为正无穷大量，但相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$不可能是负无穷大量，由此产生矛盾，所以$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$成立。

13. 证明$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在而且有限的充分必要条件是：对于任意正无穷大量$\{x_n\}$，相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$收敛。

证　必要性：设$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，$\forall x>X$：$|f(x)-A|<\varepsilon$。因为数列$\{x_n\}$是正无穷大量，对于上述$X>0$，$\exists N$，$\forall n>N$：$x_n>X$。于是当$n>N$时，成立$|f(x_n)-A|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$。

充分性：因为对于任意正无穷大量$\{x_n\}$，相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$收敛，我们可以断言$\{f(x_n)\}$收敛于同一个极限。如果存在正无穷大量$\{x'_n\}$与$\{x''_n\}$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}f(x'_n)=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x''_n)=B$，且$A\ne B$，则取$x_{2n-1}=x'_n$，$x_{2n}=x''_n$，$\{x_n\}$仍然是正无穷大量，但相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$不收敛。

设$\{f(x_n)\}$都收敛于同一个极限A，现用反证法证明$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$。

设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 不成立，则 $\exists\varepsilon_0>0$，$\forall X>0$，$\exists x>X$：$|f(x)-A|\ge\varepsilon_0$。取 $X_n=n$，$n=1,2,3,\cdots$：

对于 $X_1=1$，$\exists x_1>1$：$|f(x_1)-A|\ge\varepsilon_0$；

对于 $X_2=2$，$\exists x_2>2$：$|f(x_2)-A|\ge\varepsilon_0$；

$\cdots$,

对于 $X_k=k$，$\exists x_k>k$：$|f(x_k)-A|\ge\varepsilon_0$；

$\cdots$,

于是得到数列 $\{x_n\}$ 为正无穷大量，但相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 不收敛于 A，由此产生矛盾，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$。

14．分别写出下述函数极限存在而且有限的 Cauchy 收敛原理，并加以证明：

（1）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$；（2）$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$；（3）$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$。

解　（1）极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在而且有限的充分必要条件是：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对一切 $x',x''\in\{x|\ 0<|x-x_0|<\delta\}$，成立 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。

先证必要性。设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，

$\forall x',x''\in\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$：$|f(x')-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，$|f(x'')-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$。于是

$$|f(x')-f(x'')|\le|f(x')-A|+|f(x'')-A|<\varepsilon。$$

再证充分性。任意选取数列 $\{x_n\}$，$x_n\ne x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，则对于条件中的 $\delta>0$，$\exists N$，$\forall n>N$：$0<|x_n-x_0|<\delta$。于是当 $m>n>N$ 时，成立 $|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$。这说明函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 是基本数列，因而收敛。再根据相应的 Heine 定理，可知 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在而且有限。

（2）$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ 存在而且有限的充分必要条件是：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对一切 $x',x''\in\{x|\ 0<x-x_0<\delta\}$，成立 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。

先证必要性。设 $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=A$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，

$\forall x',x''\in\{x|\ 0<x-x_0<\delta\}$：$|f(x')-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，$|f(x'')-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$。于是

$$|f(x')-f(x'')|\le|f(x')-A|+|f(x'')-A|<\varepsilon。$$

再证充分性。任意选取数列 $\{x_n\}$，$x_n>x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，则对于条件中的 $\delta>0$，$\exists N$，$\forall n>N$：$0<x_n-x_0<\delta$。于是当 $m>n>N$ 时，成立 $|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$。这说明函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 是基本数列，因而收敛。再根据相应的 Heine 定理，可知 $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ 存在而且有限。

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 存在而且有限的充分必要条件是：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $X>0$，对一切 $x', x''<-X$，成立 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。

先证必要性。设 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，$\forall x', x''<-X$：$|f(x')-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，$|f(x'')-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$。于是

$$|f(x')-f(x'')|\le|f(x')-A|+|f(x'')-A|<\varepsilon。$$

再证充分性。任意选取数列 $\{x_n\}$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$，则对于条件中的 $X>0$，$\exists N$，$\forall n>N$：$x_n<-X$。于是当 $m>n>N$ 时，成立 $|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$。这说明函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 是基本数列，因而收敛。再根据相应的 Heine 定理，可知 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 存在而且有限。

15．设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上满足函数方程 $f(2x)=f(x)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，证明

$$f(x)\equiv A,\quad x\in(0,+\infty)。$$

证 $\forall x_0\in(0,+\infty)$，利用 $f(x)=f(2x)$ 得到 $f(x_0)=f(2^n x_0)$，由于

$\lim\limits_{n\to\infty} f(2^n x_0)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，得到 $f(x)\equiv A,\quad x\in(0,+\infty)$。

习　题 3.2　连续函数

1. 按定义证明下列函数在其定义域连续：

(1) $y=\sqrt{x}$；　　　　(2) $y=\sin\frac{1}{x}$；

(3) $y=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

证 （1）函数 $y=\sqrt{x}$ 的定义域是 $D=[0,+\infty)$。设 $x_0\in D$，对任意的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon^2>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ （$x\in D$）时，成立

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|\le\sqrt{|x-x_0|}<\varepsilon,$$

所以函数 $y=\sqrt{x}$ 在其定义域连续。

（2）函数 $y = \sin\frac{1}{x}$ 的定义域是 $D=(-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)$。设 $x_0\in D$，对任意的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{\frac{|x_0|}{2},\frac{|x_0|^2}{2}\varepsilon\right\}>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，成立

$$\left|\sin\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x_0}\right|\le\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|=\frac{|x-x_0|}{|xx_0|}<\frac{2|x-x_0|}{|x_0|^2}<\varepsilon,$$

所以函数 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在其定义域连续。

（3）函数 $y=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 的定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$。由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，可知函数在 $x_0=0$ 连续。设 $x_0\neq 0$，对任意的 $\varepsilon>0$，取

$\delta=\min\left\{\frac{|x_0|}{2},\frac{|x_0|^2}{2(|x_0|+1)}\varepsilon\right\}>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，成立

$$\left|\frac{\sin x}{x}-\frac{\sin x_0}{x_0}\right|=\frac{|x_0\sin x-x\sin x_0|}{|xx_0|}\le\frac{|x_0||\sin x-\sin x_0|+|\sin x_0||x-x_0|}{|xx_0|}$$

$$<\frac{2(|x_0|+1)}{|x_0|^2}|x-x_0|<\varepsilon,$$

所以 $y=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在其定义域连续。

2. 确定下列函数的连续范围：

(1) $y=\tan x+\csc x$；　　　　(2) $y=\frac{1}{\sqrt{\cos x}}$；

(3) $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-3)}{x+1}}$；　　　　(4) $y=[x]\ln(1+x)$；

(5) $y=\left[\dfrac{1}{x}\right]$； (6) $y=\operatorname{sgn}(\sin x)$。

解（1）$\bigcup\limits_{k\in Z}\left(\dfrac{k\pi}{2},\dfrac{(k+1)\pi}{2}\right)$。

（2）$\bigcup\limits_{k\in Z}\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$。

（3）$(-1,1]\cup[3,+\infty)$。

（4）$\{x\mid x>-1,\ x\notin \mathrm{N}^+\}$。

（5）$\{(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\}\setminus\left\{\dfrac{1}{k}\mid k\in Z,k\neq 0\right\}$。

（6）$\bigcup\limits_{k\in Z}(k\pi,(k+1)\pi)$。

3. 若 $f(x)$ 在点 x_0 连续，证明 $f^2(x)$ 与 $|f(x)|$ 在点 x_0 也连续。反之，若 $f^2(x)$ 或 $|f(x)|$ 在点 x_0 连续，能否断言 $f(x)$ 在点 x_0 连续?

解 设 $f(x)$ 在点 x_0 连续，则 $\forall 0<\varepsilon<1$，$\exists\delta>0$，$\forall x(|x-x_0|<\delta)$，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，同时还有 $|f(x)+f(x_0)|<1+2|f(x_0)|$，于是成立

$$\left|f^2(x)-f^2(x_0)\right|=\left|(f(x)+f(x_0))(f(x)-f(x_0))\right|<(1+2|f(x_0)|)\varepsilon$$

与

$$\big||f(x)|-|f(x_0)|\big|\le|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

这说明 $f^2(x)$ 与 $|f(x)|$ 在点 x_0 也连续。

反之，若 $f^2(x)$ 或 $|f(x)|$ 在点 x_0 连续，则不能断言 $f(x)$ 在点 x_0 连续。例如：$f(x)=\begin{cases}1 & x\ge 0\\ -1 & x<0\end{cases}$ 在点 $x_0=0$ 不连续，但 $f^2(x)$ 或 $|f(x)|$ 在点 $x_0=0$ 是连续的。

4. 若 $f(x)$ 在点 x_0 连续，$g(x)$ 在点 x_0 不连续，能否断言 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 不连续?

又若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 都不连续，则上面的断言是否成立?

解 若 $f(x)$ 在点 x_0 连续，$g(x)$ 在点 x_0 不连续，不能断言 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 不连续：例如 $f(x)\equiv 0$ 在点 $x_0=0$ 连续，$g(x)=\begin{cases}1 & x\ge 0\\ 2 & x<0\end{cases}$ 在点 $x_0=0$ 不连续，但 $f(x)g(x)\equiv 0$ 在点 $x_0=0$ 连续。

又若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 都不连续，也不能断言 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 不连续：例如 $f(x)=\begin{cases}2 & x\ge 0\\ 1 & x<0\end{cases}$ 在点 $x_0=0$ 不连续，$g(x)=\begin{cases}1 & x\ge 0\\ 2 & x<0\end{cases}$ 在点 $x_0=0$ 不连续，但 $f(x)g(x)\equiv 2$ 在点 $x_0=0$ 连续。

5. 若 f,g 在 $[a,b]$ 上连续，则 max $\{f,g\}$ 与 min$\{f,g\}$ 在 $[a,b]$ 上连续，其中

$x^2+x-2.$

$(x-1)^2(x+2)$

$x-1\,)\,x^3-3x+2$

$(x^2-2x+1)(x+2)$

x^3-x^2

$(x-1)(x+1)(x+2)$ x^3

x^2-3x+2

x^2-x

$-2x+2$

$\max\{f, g\} = \max\{f(x), g(x)\}$，$x \in [a,b]$；

$\min\{f, g\} = \min\{f(x), g(x)\}$，$x \in [a,b]$。

证 由 f, g 在 $[a,b]$ 上的连续性，可知 $|f(x)-g(x)|$ 在 $[a,b]$ 上连续，利用等式

$$\max\{f,g\} = \frac{1}{2}\{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\},$$

$$\min\{f,g\} = \frac{1}{2}\{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|\},$$

即得到 $\max\{f,g\}$ 与 $\min\{f,g\}$ 在 $[a,b]$ 上的连续性。

6. 若对任意 $\delta>0$，f 在 $[a+\delta, b-\delta]$ 上连续，能否得出

(1) f 在 (a,b) 上连续?

(2) f 在 $[a,b]$ 上连续?

解 （1）能。（2）不能。

7. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\alpha>0$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\beta$，证明：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=\alpha^{\beta}$；并求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{2x-1}{x+1}}$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$ $(\sin a\neq 0)$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+x}{n-1}\right)^{n}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$。

证 由于 $\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)\ln f(x)]=\beta\ln\alpha$，利用指数函数的连续性，得到

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\beta\ln\alpha} = \alpha^{\beta}。$$

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{2x-1}{x+1}} = 1$。

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x-1}} = e^2$。

（3）$\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim\limits_{x\to a}\left[\left(1+\dfrac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{\sin a}{\sin x-\sin a}}\right]^{\frac{\sin x-\sin a}{(x-a)\sin a}} = e^{\cot a}$。

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+x}{n-1}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{x+1}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{x+1}}\right]^{\frac{(x+1)n}{n-1}} = e^{x+1}$。

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1-\tan\frac{1}{n}}{2\tan\frac{1}{n}}}\right]^{\frac{2n\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}}=e^2$。

8. 指出下列函数的不连续点，并确定其不连续的类型：

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$；　(2) $y=[x]\sin\dfrac{1}{x}$；

(3) $y=\dfrac{x}{\sin x}$；　(4) $y=[2x]-2[x]$；

(5) $y=\dfrac{1}{x^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$；　(6) $y=x\ln^n|x|$；

(7) $y=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$；　(8) $y=\dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{\sqrt{1+2x}-1}$；

(9) $y=\begin{cases}\sin\pi x, & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数};\end{cases}$　(10) $y=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi}{p}, & x=\dfrac{q}{p}\ (p,q\text{互质，}p>0),\\ 0, & x\text{为无理数}.\end{cases}$

解 (1) $x=1,-2$，第二类不连续点。

(2) $x=k\ (k\in Z,k\neq 0)$，第一类不连续点；$x=0$，第二类不连续点。

(3) $x=k\pi\ (k\in Z,k\neq 0)$，第二类不连续点；$x=0$，第三类不连续点。

(4) $x=\frac{1}{2}k\ (k\in Z)$，第一类不连续点。

(5) $x=0$，第三类不连续点。

(6) $x=0$，第三类不连续点。

(7) $x=0$，第一类不连续点；$x=1$，第三类不连续点；$x=-1$，第二类不连续点。

(8) $x=0$，第三类不连续点。

(9) 非整数点，第二类不连续点。

(10) 非整数有理点，第三类不连续点。

9. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，且满足 $f(x^2)=f(x)$，$x\in(0,+\infty)$，证明 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为常数函数。

证 $\forall x\in(0,+\infty)$，利用 $f(x^2)=f(x)$ 得到 $f(x)=f(x^{\frac{1}{2^n}})$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{\frac{1}{2^n}}=1$ 及 $f(x)$ 的连续性，得到 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x^{\frac{1}{2^n}})=f(1)$。

习　题 3.3　无穷小量与无穷大量的阶

1. 确定 a 与α，使下列各无穷小量或无穷大量等价于(～) ax^{α}：

(1) $u(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3$, ($x\to 0$，$x\to\infty$)；

(2) $u(x) = \dfrac{x^5 + 2x^2}{3x^4 - x^3}$ ($x\to 0$，$x\to\infty$)；

(3) $u(x) = \sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}$ ($x\to 0+$，$x\to+\infty$)；

(4) $u(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ ($x\to 0+$，$x\to+\infty$)；

(5) $u(x) = \sqrt{1+3x} - \sqrt[3]{1+2x}$ ($x\to 0$，$x\to+\infty$)；

(6) $u(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ ($x\to+\infty$)；

(7) $u(x) = \sqrt{x^3+x} - x^{\frac{3}{2}}$ ($x\to 0+$)；

(8) $u(x) = \sqrt{1+x\sqrt{x}} - \mathrm{e}^{2x}$ ($x\to 0+$)；

(9) $u(x) = \ln\cos x - \arctan x^2$ ($x\to 0$)；

(10) $u(x) = \sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\sin x}$ ($x\to 0$)。

解 (1) $u(x) \sim 2x^3\ (x\to 0)$； $u(x)\sim x^5\ (x\to\infty)$。

(2) $u(x)\sim -2x^{-1}\ (x\to 0)$； $u(x)\sim \dfrac{1}{3}x\ (x\to\infty)$。

(3) $u(x)\sim x^{\frac{2}{3}}\ (x\to 0+)$； $u(x)\sim x^{\frac{3}{2}}\ (x\to+\infty)$。

(4) $u(x)\sim x^{\frac{1}{8}}\ (x\to 0+)$； $u(x)\sim x^{\frac{1}{2}}\ (x\to+\infty)$。

(5) $u(x)\sim \dfrac{5}{6}x\ (x\to 0)$； $u(x)\sim \sqrt{3}x^{\frac{1}{2}}\ (x\to+\infty)$。

(6) $u(x)\sim \dfrac{1}{2}x^{-1}\ (x\to+\infty)$。

(7) $u(x)\sim x^{\frac{1}{2}}\ (x\to 0+)$。

(8) $u(x)\sim -2x\ (x\to 0+)$。

（9） $u(x) \sim -\frac{3}{2}x^2\ (x \to 0)$。

（10） $u(x) \sim x\ (x \to 0)$。

2. (1) 当 $x\to+\infty$时，下列变量都是无穷大量，将它们从低阶到高阶进行排列，并说明理由。

$$a^x\ (a>1),\ x^x,\ x^\alpha\ (\alpha>0),\quad \ln^k x\ (k>0),\quad [x]!;$$

(2) 当 $x\to0+$时，下列变量都是无穷小量，将它们从高阶到低阶进行排列，并说明理由。

$$x^\alpha\ (\alpha>0),\ \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]!},\ a^{-\frac{1}{x}}\ (a>1),\ \left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{x}},\ \ln^{-k}\left(\frac{1}{x}\right)\ (k>0)。$$

解（1）当 $x\to+\infty$时，从低阶无穷大量到高阶无穷大量的排列为

$$\ln^k x\quad (k>0),\quad x^\alpha\quad (\alpha>0),\quad a^x\quad (a>1),\quad [x]!,\ x^x。$$

证明：设 $n \le x < n+1$，则 $0<\frac{x^\alpha}{a^x}<\frac{(n+1)^\alpha}{a^n}$，$0<\frac{a^x}{[x]!}<\frac{a^{n+1}}{n!}$，$0<\frac{[x]!}{x^x}<\frac{(n+1)!}{n^n}$。

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^\alpha}{a^n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{n!}=0$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}=0$，即得到 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=0$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^x}{[x]!}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[x]!}{x^x}=0$，同时也得到 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^k x}{x^\alpha}=\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{y^k}{(e^\alpha)^y}=0\quad (y=\ln x)$。

（2）当 $x\to0+$时，从高阶无穷小量到低阶无穷小量的排列为

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{x}},\ \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]!},\ a^{-\frac{1}{x}}\ (a>1),\ x^\alpha\ (\alpha>0),\quad \ln^{-k}\left(\frac{1}{x}\right)\ (k>0)。$$

证明：令 $y=\frac{1}{x}$，则当 $x\to0+$时，有 $y\to+\infty$。参考（1）的排列即可得到（2）的排列。

3. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+2x^2}}{\ln(1+3x)}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})$；　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$；

(5) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{a^x-a^\alpha}{x-\alpha}$ $(a>0)$；　　(6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^\alpha-a^\alpha}{x-a}$ $(a>0)$；

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\ln(1+x)-\ln x)$；　　(8) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$ $(a>0)$；

(9) $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$；　　(10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x-\dfrac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$；

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{x}-1)$ $(x>0)$；　　(12) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})$ $(x>0)$。

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+2x^2}}{\ln(1+3x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x}-1)-(\sqrt[3]{1+2x^2}-1)}{\ln(1+3x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}x^2}{3x}=\dfrac{1}{6}$。

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x(1+\sqrt{\cos x})}=0$。

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}$。

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}}=1$。

(5) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{a^x-a^\alpha}{x-\alpha}=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{a^\alpha(a^{x-\alpha}-1)}{x-\alpha}=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{a^\alpha(x-\alpha)\ln a}{x-\alpha}=a^\alpha\ln a$。

(6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^\alpha-a^\alpha}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^\alpha(e^{\alpha\ln\frac{x}{a}}-1)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^\alpha\alpha\ln(1+\frac{x-a}{a})}{x-a}$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^\alpha\alpha\cdot\frac{x-a}{a}}{x-a}=\alpha a^{\alpha-1}$。

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\ln(1+x)-\ln x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}=1$。

(8) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln(1+\dfrac{x-a}{a})}{x-a}=\dfrac{1}{a}$。

(9) $\lim\limits_{x\to 0}(x+\mathrm{e}^{x})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x+\mathrm{e}^{x}-1)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=e^{2}$。

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x-\dfrac{x^{2}}{2}\right)^{\frac{1}{x^{2}}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-(1-\cos x)-\dfrac{x^{2}}{2}\right)^{\frac{1}{x^{2}}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-x^{2}\right)^{\frac{1}{x^{2}}}=e^{-1}$。

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}n\,(\sqrt[n]{x}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}n(e^{\frac{1}{n}\ln x}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}(n\cdot\dfrac{1}{n}\ln x)=\ln x$。

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}n^{2}(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})=\lim\limits_{n\to\infty}n^{2}\left[(e^{\frac{1}{n}\ln x}-1)-(e^{\frac{1}{n+1}\ln x}-1)\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[n^{2}\ln x\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]=\ln x$。

习　题 3.4　闭区间上的连续函数

1．证明：设函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$（有限数），则$f(x)$在$[a,+\infty)$有界。

证　由$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$（有限数），可知$\exists X > a$，$\forall x > X$：$|f(x)-A|<1$，即$A-1<f(x)<A+1$。再由$f(x)$在闭区间$[a,X]$上的连续性，可知$f(x)$在$[a,X]$上有界，即$\forall x\in[a,X]$：$|f(x)|<B$。令$M=\max\{B,A+1\}$，$m=\min\{-B,A-1\}$，则$\forall x\in[a,+\infty)$，成立$m<f(x)<M$。

2．证明：若函数$f(x)$在开区间(a,b)上连续，且$f(a+)$和$f(b-)$存在，则它可取到介于$f(a+)$和$f(b-)$之间的一切中间值。

证　令

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & x\in(a,b) \\ f(a+) & x=a \\ f(b-) & x=b \end{cases},$$

则$\tilde{f}(x)$在闭区间$[a,b]$连续，不妨设$f(a+)<f(b-)$，由闭区间上连续函数的中间值定理，可知$\tilde{f}(x)$在闭区间$[a,b]$上可取到$[f(a+),f(b-)]$上的一切值，于是$f(x)$在开区间(a,b)上可取到介于$f(a+)$和$f(b-)$之间的一切中间值。

3．证明：若闭区间$[a,b]$上的单调有界函数$f(x)$能取到$f(a)$和$f(b)$之间的一切值，则$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数。

证　采用反证法。不妨设$f(x)$单调增加。若$\xi\in(a,b)$是$f(x)$的不连续点，则$f(\xi-)$与$f(\xi+)$都存在，且$f(a)\le f(\xi-)<f(\xi+)\le f(b)$，于是$f(x)$取不到开区间$(f(\xi-),f(\xi+))$中异于$f(\xi)$的值，与条件矛盾；若$x=a$是$f(x)$的

不连续点，则 $f(a+)$ 存在，且 $f(a)<f(a+)\le f(b)$，于是 $f(x)$ 取不到开区间 $(f(a),f(a+))$ 中的值，也与条件矛盾；同样可以证明 $x=b$ 也不可能是 $f(x)$ 的不连续点。

4. 应用 Bolzano-Weierstrass 定理证明闭区间上连续函数的有界性定理。

证 采用反证法。设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，但无界，则存在点列 $\{x_n\}$，$x_n\in[a,b]$，满足 $|f(x_n)|>n$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$。由 Bolzano-Weierstrass 定理，存在子列 $\{x_{n_k}\}$，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi$，且 $\xi\in[a,b]$。因为 $f(x)$ 在点 ξ 连续，所以有 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(\xi)$，与 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$ 产生矛盾。

5. 应用闭区间套定理证明零点存在定理。

证 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，不妨设 $a=a_1$，$b=b_1$，$f(a)<0$，$f(b)>0$。

如果 $f(\frac{a_1+b_1}{2})=0$，则定理得证。如果 $f(\frac{a_1+b_1}{2})<0$，则令 $a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$，$b_2=b_1$；如果 $f(\frac{a_1+b_1}{2})>0$，则令 $a_2=a_1$，$b_2=\frac{a_1+b_1}{2}$。

如果 $f(\frac{a_2+b_2}{2})=0$，则定理得证。如果 $f(\frac{a_2+b_2}{2})<0$，则令 $a_3=\frac{a_2+b_2}{2}$，$b_3=b_2$；如果 $f(\frac{a_2+b_2}{2})>0$，则令 $a_3=a_2$，$b_3=\frac{a_2+b_2}{2}$。

……,

这样的过程可以一直进行下去。如果存在某个 k，使得 $f(\frac{a_k+b_k}{2})=0$，则定理得证；如果不存在某个 k，使得 $f(\frac{a_k+b_k}{2})=0$，则得到一个闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$，满足 $f(a_n)<0$，$f(b_n)>0$。由闭区间套定理，可知存

在唯一属于所有闭区间$[a_n,b_n]$的点ξ，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$。再由$f(x)$在点$\xi$的连续性，可知$f(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)\le 0$与$f(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)\ge 0$，从而得到$f(\xi)=0$，定理得证。

6. 证明方程$x=a\sin x+b$（$a,b>0$）至少有一个正根。

证　令$f(x)=x-a\sin x-b$，则$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续。取$A>a+b$，则$f(0)<0$，$f(A)>0$，由零点存在定理，$f(x)$在$(0,A)$上至少有一个根。

7．证明方程$x^3+px+q=0$（$p>0$）有且仅有一个实根。

证　令$f(x)=x^3+px+q$，则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是严格单调增加的。由$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，易知$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有且仅有一个实根。

8．证明：

（1）$\sin\frac{1}{x}$在（0,1）上不一致连续，但在$(a,1)(a>0)$上一致连续；

（2）$\sin x^2$在$(-\infty,+\infty)$上不一致连续，但在$[0,A]$上一致连续；

（3）$\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上一致连续；

（4）$\ln x$在$[1,+\infty)$上一致连续；

(5) $\cos\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上一致连续。

证（1）在$(0,1)$上，令$x_n'=\frac{1}{n\pi}$，$x_n''=\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}$，$x_n'-x_n''\to 0$，但$\left|\sin\frac{1}{x_n'}-\sin\frac{1}{x_n''}\right|=1$，所以$\sin\frac{1}{x}$在（0,1）上不一致连续。

在$(a,1)$（$a>0$)上，$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=a^2\varepsilon>0$，$\forall x_1,x_2\in(a,1)$，$|x_1-x_2|<\delta$，成立

$$\left|\sin\frac{1}{x_1}-\sin\frac{1}{x_2}\right|\le\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|\le\frac{|x_1-x_2|}{a^2}<\varepsilon,$$

所以 $\sin\frac{1}{x}$ 在$(a,1)$ $(a>0)$上一致连续。

（2）在$-\infty,+\infty)$上，令 $x_n' = \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}$， $x_n'' = \sqrt{n\pi}$，则 $x_n' - x_n'' \to 0$，但

$$\left|\sin\left(x_n'\right)^2 - \sin\left(x_n''\right)^2\right| = 1,$$

所以 $\sin x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续。

在 $[0, A]$ 上，$\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2A} > 0$，$\forall x_1, x_2 \in [0, A]$，$|x_1 - x_2| < \delta$，成立

$$\left|\sin x_1^2 - \sin x_2^2\right| \le \left|x_1^2 - x_2^2\right| \le 2A|x_1 - x_2| < \varepsilon,$$

所以 $\sin x^2$ 在$[0,A]$上一致连续。

（3） $\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon^2 > 0$，$\forall x_1, x_2 \in [0,+\infty)$，$|x_1 - x_2| < \delta$，成立

$$\left|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right| \le \sqrt{|x_1 - x_2|} < \varepsilon,$$

所以$\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续。

（4） $\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon > 0$，$\forall x_1, x_2 \in [1,+\infty)$，$0 \le x_1 - x_2 < \delta$，成立

$$|\ln x_1 - \ln x_2| = \left|\ln\left(1 + \frac{x_1 - x_2}{x_2}\right)\right| \le |x_1 - x_2| < \varepsilon,$$

所以 $\ln x$ 在$[1,+\infty)$上一致连续。

（5） $\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon^2 > 0$，$\forall x_1, x_2 \in [0,+\infty)$，$|x_1 - x_2| < \delta$，成立

$$\left|\cos\sqrt{x_1} - \cos\sqrt{x_2}\right| \le \left|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right| \le \sqrt{|x_1 - x_2|} < \varepsilon,$$

所以$\cos\sqrt{x}$ 在$[0,+\infty)$ 上一致连续。

9．证明：对椭圆内的任意一点 P，存在椭圆过 P 的一条弦，使得 P 是该弦的中点。

证 过 P 点作弦，设弦与 x 轴的夹角为 θ，P 点将弦分成长度为 $l_1(\theta)$ 和 $l_2(\theta)$ 的两线段，则 $f(\theta) = l_1(\theta) - l_2(\theta)$ 在 $[0,\pi]$ 连续，满足 $f(0) = -f(\pi)$，于

是必有$\theta_0 \in [0,\pi]$，满足$f(\theta_0)=0$，也就是$l_1(\theta_0)=l_2(\theta_0)$。

10．设函数$f(x)$在[0,2]上连续，且$f(0)=f(2)$，证明：存在$x,y\in[0,2]$，

$y-x=1$，使得$f(x)=f(y)$。

证 令$F(x)=f(x+1)-f(x)$，则$F(x)$在$[0,1]$上连续，$F(1)=-F(0)$，于是必有$x_0\in[0,1]$，满足$F(x_0)=0$。令$y_0=x_0+1$，则$x_0,y_0\in[0,2]$，$y_0-x_0=1$，使得$f(x_0)=f(y_0)$。

11. 若函数$f(x)$在有限开区间(a,b)上一致连续, 则$f(x)$在(a,b)上有界。

证 由$f(x)$在(a,b)上一致连续，可知$f(a+)$，$f(b-)$存在且有限。令

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & x\in(a,b) \\ f(a+) & x=a \\ f(b-) & x=b \end{cases},$$

则$\tilde{f}(x)$在闭区间$[a,b]$连续，所以$\tilde{f}(x)$在$[a,b]$有界，因此$f(x)$在(a,b)上有界。

12．证明：

（1）某区间上两个一致连续函数之和必定一致连续；

（2）某区间上两个一致连续函数之积不一定一致连续。

证（1）设函数$f(x)$，$g(x)$在区间I上一致连续，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x',x''\in I$，$|x'-x''|<\delta$，成立$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}$，$|g(x')-g(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}$，于是

$$|[f(x')+g(x')]-[f(x'')+g(x'')]|<\varepsilon,$$

所以$f(x)+g(x)$在区间I上一致连续。

（2）设$f(x)=g(x)=x$，区间$I=[0,+\infty)$，则$f(x)$，$g(x)$在区间I上一致连续，但$f(x)g(x)=x^2$在区间I上不一致连续。

13．设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(x)\neq 0, x\in[a,b]$，证明$f(x)$在$[a,b]$上

恒正或恒负。

证 设$f(x)$在$[a,b]$上不保持定号，则存在$x',x''\in[a,b]$（不妨设$x'<x''$），使$f(x')$与$f(x'')$不同号，由闭区间上连续函数的中间值定理，必定存在$\xi\in[x',x'']$，使得$f(\xi)=0$，这就产生矛盾，所以$f(x)$在$[a,b]$上必定恒正或恒负。

14．设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，$a\le x_1<x_2<\cdots<x_n\le b$，证明在$[a,b]$中必有$\xi$，使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]。$$

证 根据闭区间上连续函数的中间值定理，闭区间上连续函数一定能取到最大值和最小值之间任何一个值。由于

$$\min_{x\in[a,b]}\{f(x)\}\le\frac{1}{n}\left[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\right]\le\max_{x\in[a,b]}\{f(x)\},$$

所以在$[a,b]$中必有ξ，使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]。$$

15．若函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$(有限数)，则$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续。

证 由$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，$\forall\varepsilon>0,\exists X>a,\forall x',x''>X:\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$。由于$f(x)$在$[a,X+1]$连续，所以一致连续，也就是

$\exists 0<\delta<1,\forall x',x''\in\left[a,X+1\right](\left|x'-x''\right|<\delta):\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$。于是

$\forall x',x''\in\left[a,+\infty\right)(\left|x'-x''\right|<\delta):\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$。

第四章　微分

习　题　4.1　微分和导数

1. 半径为 1cm 的铁球表面要镀一层厚度为 0.01cm 的铜，试用求微分的方法算出每只球需要用铜多少克？（铜的密度为 $8.9\mathrm{g/cm^3}$。）

解 球体积$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$，每只球镀铜所需要铜的质量为

$$m=\rho\Delta V\approx 4\rho\pi r^2\Delta r\approx 1.12\,\mathrm{g}。$$

2. 用定义证明，函数$y=\sqrt[3]{x^2}$在它的整个定义域中，除了$x=0$这一点之外都是可微的。

证 当$x=0$时，$\Delta y=\sqrt[3]{\Delta x^2}$是$\Delta x$的低阶无穷小，所以$y=\sqrt[3]{x^2}$在$x=0$不可微。当$x\neq 0$时，

$$\begin{aligned}\Delta y&=\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}-\sqrt[3]{x^2}=(\sqrt[3]{x+\Delta x}+\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x})\\&=\frac{\sqrt[3]{x+\Delta x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x+\Delta x}+\sqrt[3]{x^2}}\Delta x=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\Delta x+o(\Delta x),\end{aligned}$$

所以$y=\sqrt[3]{x^2}$在$x\neq 0$是可微的。

习　题　4.2　导数的意义和性质

1．　设$f'(x_0)$存在，求下列各式的值：

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$；

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$。

解 (1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+(-\Delta x))-f(x_0)}{(-\Delta x)}=-f'(x_0)$。

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x-x_0\to 0}\dfrac{f(x_0+(x-x_0))-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$。

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=2f'(x_0)$。

2．　(1) 用定义求抛物线$y=2x^2+3x-1$的导函数；

(2) 求该抛物线上过点$(-1,-2)$处的切线方程；

(3) 求该抛物线上过点$(-2,1)$处的法线方程；

(4) 问该抛物线上是否有(a,b)，过该点的切线与抛物线顶点与焦点的连线平行?

解 (1)因为$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)-1-(2x^2+3x-1)}{\Delta x}=4x+3+2\Delta x$，所以

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=4x+3\text{。}$$

(2)由于 $f'(-1)=-1$，切线方程为$y=-1\cdot[x-(-1)]+(-2)=-x-3$。

(3)由于 $f'(-2)=-5$，法线方程为$y=-\dfrac{1}{-5}[x-(-2)]+1=\dfrac{x+7}{5}$。

(4) 抛物线顶点与焦点的连线平行于 y 轴，即斜率为无穷大，由(1)可

知不存在x，使得$f'(x)=\infty$，所以这样的点(a,b)不存在。

3．设$f(x)$为$(-\infty,+\infty)$上的可导函数，且在$x=0$的某个邻域上成立

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x),$$

其中$\alpha(x)$是当$x\to 0$时比x高阶的无穷小。求曲线$y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程。

解 记$F(x)=f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)$，可得$\lim\limits_{x\to 0}F(x)=-2f(1)=0$，即$f(1)=0$。由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x+\alpha(x)}{x}=8$与

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(1+\sin x)-f(1)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right]-3\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(1-\sin x)-f(1)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right]=4f'(1),$$

得到$f'(1)=2$。于是曲线$y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程为$y=2(x-1)$。

4． 证明：从椭圆的一个焦点发出的任一束光线，经椭圆反射后，反射光必定经过它的另一个焦点。 （见图 4.2.5）

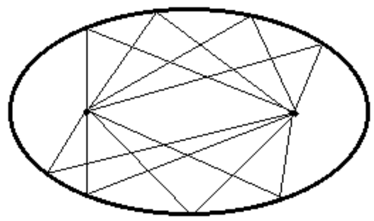


图4.2.5

证 设椭圆方程为

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\quad a>b>0$，焦点坐标为$(\pm c,0), c=\sqrt{a^2-b^2}$。假设$(x_0,y_0)$为椭圆上任意一点，当$y_0=0$时结论显然成立。现设$y_0\neq 0$，则过此点的切线斜率为$\tan\theta=-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$，$(x_0,y_0)$与焦点$(-c,0)$连线的斜率为$\tan\theta_1=\dfrac{y_0}{x_0+c}$，此连线与切线夹角的正切为$k=\dfrac{\tan\theta_1-\tan\theta}{1+\tan\theta_1\tan\theta}$。利用$c^2=a^2-b^2$和$\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$代入计算，得到

$$k=\frac{\dfrac{y_0}{x_0+c}+\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}}{1-\dfrac{y_0}{x_0+c}\cdot\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}}=\frac{a^2y_0^2+b^2x_0^2+cx_0b^2}{(a^2-b^2)x_0y_0+a^2cy_0}=\frac{a^2b^2+cx_0b^2}{c^2x_0y_0+a^2cy_0}=\frac{b^2}{cy_0}\text{。}$$

(x_0,y_0)与另一焦点$(c,0)$连线的斜率为$\tan\theta_2=\dfrac{y_0}{x_0-c}$，此连线与切线夹角的正切为

$$\frac{\tan\theta-\tan\theta_2}{1+\tan\theta\tan\theta_2}=\frac{-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}-\dfrac{y_0}{x_0-c}}{1-\dfrac{y_0}{x_0-c}\cdot\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}}=\frac{cx_0b^2-a^2y_0^2-b^2x_0^2}{(a^2-b^2)x_0y_0-a^2cy_0}=\frac{cx_0b^2-a^2b^2}{c^2x_0y_0-a^2cy_0}=\frac{b^2}{cy_0}=k\text{。}$$

由于两个夹角的正切相等，所以两个夹角相等，命题得证。

5．证明：双曲线$xy=a^2$上任一点处的切线与两坐标轴构成的直角三角形的面积恒为$2a^2$。

证 假设(x_0,y_0)为双曲线上任意一点，则$x_0y_0=a^2$，过这一点的切线斜率为$y'\big|_{x_0}=-\dfrac{a^2}{x_0^2}=-\dfrac{y_0}{x_0}$，切线方程为

$$y-y_0=-\frac{y_0}{x_0}(x-x_0)\text{，}$$

易得切线与两坐标轴的交点为$(0,2y_0)$和$(2x_0,0)$。切线与两坐标轴构成的直角三角形的面积为

$$S=\frac{1}{2}(2y_0)(2x_0)=2x_0y_0=2a^2\text{。}$$

6． 求函数在不可导点处的左导数和右导数。

（1）$y=|\sin x|$； （2）$y=\sqrt{1-\cos x}$；

（3）$y=\mathrm{e}^{-|x|}$； （4）$y=|\ln(x+1)|$.

解 （1）对$y=f(x)=|\sin x|$，当$x=0$时，

$$f_{+}^{'}(0)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{|\sin\Delta x|-|\sin 0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1,$$
$$f_{-}^{'}(0)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{|\sin\Delta x|-|\sin 0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{-\sin\Delta x}{\Delta x}=-1,$$

所以$x=0$是不可导点。又由于函数y是周期为π的函数，所有不可导点为$x=k\pi\ (k\in Z)$，且$f_{-}'(k\pi)=-1$， $f_{+}'(k\pi)=1$。

（2） $y=f(x)=\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}=\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|$，由（1）可知不可导点为$x=2k\pi\ (k\in Z)$，且经计算得到 $f_{-}'(2k\pi)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$， $f_{+}'(2k\pi)=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

（3） $y=f(x)=\mathrm{e}^{-|x|}$不可导点只有$x=0$，且

$$f_{+}^{'}(0)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{e^{-\Delta x}-1}{\Delta x}=-1,\quad f_{-}^{'}(0)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=1。$$

（4） $y=f(x)=|\ln(x+1)|$不可导点只有$x=0$，且

$$f_{+}^{'}(0)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{|\ln(\Delta x+1)|-\ln 1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\ln(\Delta x+1)}{\Delta x}=1,$$
$$f_{-}^{'}(0)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{|\ln(\Delta x+1)|-\ln 1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{-\ln(\Delta x+1)}{\Delta x}=-1。$$

7．讨论下列函数在$x=0$处的可导性：

(1) $y=\begin{cases}|x|^{1+a}\sin\frac{1}{x},(a>0) & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$ (2) $y=\begin{cases}x^2, & x>0,\\ ax+b, & x\le 0;\end{cases}$

(3) $y=\begin{cases}x\,\mathrm{e}^x, & x>0,\\ ax^2, & x\le 0;\end{cases}$ (4) $y=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{a}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解 （1） $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|^{1+a}\sin\frac{1}{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(|\Delta x|^a\operatorname{sgn}(\Delta x)\sin\frac{1}{x}\right)=0$，所以函数在$x=0$可导。

(2) 如果函数在$x=0$可导，则必须在$x=0$连续，由$f(0+)=f(0)=b$可得$b=0$。当$b=0$时， $f_{+}^{'}(0)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta x^2-0}{\Delta x}=0$， $f_{-}^{'}(0)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{a\Delta x-0}{\Delta x}=a$，

故当$a=b=0$时函数在$x=0$可导，其他情况下函数在$x=0$不可导。

（3）由于$f_+'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\dfrac{\Delta x e^{\Delta x}-0}{\Delta x}=1$，$f_-'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\dfrac{a\Delta x^2-0}{\Delta x}=0\ne f_+'(0)$，故函数在$x=0$不可导。

（4）当$a\ge 0$时函数在$x=0$不连续，所以不可导；当$a<0$时，

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^{\frac{a}{\Delta x^2}}-0}{\Delta x}=0$，所以当$a<0$时函数在$x=0$可导。

8． 设$f(x)$在$x=0$处可导，在什么情况下，$|f(x)|$在$x=0$处也可导?

解　当$f(0)\ne 0$时，不妨设$f(0)>0$，则在$x=0$的小邻域中有$f(x)>0$，故$|f(x)|=f(x)$，所以$|f(x)|$在$x=0$处也可导。

当$f(0)=0$时，由于

$$\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}=\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|\operatorname{sgn}x,$$

分别在$x=0$处计算左、右极限，得到$|f(x)|$在$x=0$处的左导数为$-|f'(0)|$，右导数为$|f'(0)|$，所以$|f(x)|$在$x=0$处也可导的充分必要条件是$f'(0)=0$。

9．设$f(x)$在$[a,b]$上连续，$f(a)=f(b)=0$，且$f_+'(a)\cdot f_-'(b)>0$，证明$f(x)$在(a,b)至少存在一个零点。

证　由题设知$f_+'(a)$和$f_-'(b)$同号，不妨设两者都为正数。由于

$f_+'(a)=\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)}{x-a}>0$，可知存在$x_1\ (a<x_1<b)$，$f(x_1)>0$。同理由于$f_-'(b)=\lim\limits_{x\to b-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim\limits_{x\to b-}\dfrac{f(x)}{x-b}>0$，可知存在$x_2\ (x_1<x_2<b)$，$f(x_2)<0$。由连续函数的零点存在定理，函数$f(x)$在$x_1,x_2$之间有零点。

10．设$f(x)$在有限区间(a,b)内可导，

（1）若 $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=\infty$，那么能否断定也有 $\lim\limits_{x\to a+} f'(x)=\infty$？

（2）若 $\lim\limits_{x\to a+} f'(x)=\infty$，那么能否断定也有 $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=\infty$？

解（1）不一定。反例：$f(x)=\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}$， $a=0$， $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=+\infty$，

$f'(x)=\dfrac{1}{x^2}(-1+\sin\dfrac{1}{x})$， $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)=\infty$ 不成立。

（2）不一定。反例：$f(x)=\sqrt{x}$， $a=0$， $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=+\infty$，而

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=0\neq\infty$。

11．设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$。证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充分必要条件是：存在在 $x=0$ 处连续的函数 $g(x)$，使得 $f(x)=xg(x)$，且此时成立 $f'(0)=g(0)$。

证　充分性。由 $f(x)=xg(x)$ 可知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0} g(x)=g(0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且成立 $f'(0)=g(0)$。

必要性。令 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ f'(0), & x=0\end{cases}$，则 $f(x)=xg(x)$，且

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=g(0)$，即 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

习　题　4.3　导数四则运算和反函数求导法则

1．用定义证明$(\cos x)' = -\sin x$。

证　由于

$$\cos(x+\Delta x)-\cos x = -2\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2},$$

根据$\sin x$的连续性和$\sin(\frac{\Delta x}{2}) \sim \frac{\Delta x}{2}(\Delta x \to 0)$，可知

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x\to 0}\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x。$$

2．证明：

(1) $(\csc x)' = -\cot x\csc x$；　(2) $(\cot x)' = -\csc^2 x$；

(3) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；　(4) $(\mathrm{arc}\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$；

(5) $(\mathrm{ch}^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$；　(6) $(\mathrm{th}^{-1} x)' = (\mathrm{cth}^{-1} x)' = \frac{1}{1-x^2}$

解（1）$(\csc x)' = \left[\frac{1}{\sin x}\right]' = -\frac{(\sin x)'}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\cot x\csc x$。

（2）$(\cot x)' = \left[\frac{1}{\tan x}\right]' = -\frac{(\tan x)'}{\tan^2 x} = -\frac{\sec^2 x}{\tan^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$。

（3）$(\arccos x)' = (\frac{\pi}{2}-\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$。

（4）$(\mathrm{arc}\cot x)' = (\frac{\pi}{2}-\arctan x)' = -\frac{1}{1+x^2}$。

（5）$(\mathrm{ch}^{-1} x)' = \frac{1}{(\mathrm{ch}\, y)'} = \frac{1}{\mathrm{sh}\, y} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}^2 y-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$。

（6）$(\mathrm{th}^{-1} x)' = \frac{1}{(\mathrm{th}\, y)'} = \frac{1}{\mathrm{sech}^2 y} = \frac{1}{1-\mathrm{th}^2 y} = \frac{1}{1-x^2}$，

$$(\mathrm{cth}^{-1}x)'=\frac{1}{(\mathrm{cth}\,y)'}=-\frac{1}{\mathrm{csch}^2 y}=-\frac{1}{\mathrm{cth}^2 y-1}=\frac{1}{1-x^2}\text{。}$$

3．求下列函数的导函数：

(1) $f(x)=3\sin x+\ln x-\sqrt{x}$；　(2) $f(x)=x\cos x+x^2+3$；

(3) $f(x)=(x^2+7x-5)\sin x$；　(4) $f(x)=x^2(3\tan x+2\sec x)$；

(5) $f(x)=\mathrm{e}^x\sin x-4\cos x+\dfrac{3}{\sqrt{x}}$；　(6) $f(x)=\dfrac{2\sin x+x-2^x}{\sqrt[3]{x^2}}$；

(7) $f(x)=\dfrac{1}{x+\cos x}$；　(8) $f(x)=\dfrac{x\sin x-2\ln x}{\sqrt{x}+1}$；

(9) $f(x)=\dfrac{x^3+\cot x}{\ln x}$；　(10) $f(x)=\dfrac{x\sin x+\cos x}{x\sin x-\cos x}$；

(11) $f(x)=(\mathrm{e}^x+\log_3 x)\arcsin x$；　(12) $f(x)=(\csc x-3\ln x)x^2\,\mathrm{sh}\,x$；

(13) $f(x)=\dfrac{x+\sec x}{x-\csc x}$；　(14) $f(x)=\dfrac{x+\sin x}{\arctan x}$；

解　(1) $f'(x)=(3\sin x)'+(\ln x)'-(\sqrt{x})'=3\cos x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$。

(2) $f'(x)=x'\cos x+x(\cos x)'+(x^2)'+(3)'=\cos x-x\sin x+2x$。

(3) $f'(x)=(x^2+7x-5)'\sin x+(x^2+7x-5)(\sin x)'$

$$=(2x+7)\sin x+(x^2+7x-5)\cos x\text{。}$$

(4) $f'(x)=(x^2)'(3\tan x+2\sec x)+x^2(3\tan x+2\sec x)'$

$$=2x(3\tan x+2\sec x)+x^2(3\sec^2 x+2\tan x\sec x)\text{。}$$

(5) $f'(x)=(e^x)'\sin x+e^x(\sin x)'-(4\cos x)'+(\dfrac{3}{\sqrt{x}})'$

$$=e^x(\sin x+\cos x)+4\sin x-\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}\text{。}$$

(6) $f'(x)=(x+2\sin x-2^x)'x^{-\frac{2}{3}}+(x+2\sin x-2^x)(x^{-\frac{2}{3}})'$

$$=(1+2\cos x-2^x\ln 2)x^{-\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}(x+2\sin x-2^x)x^{-\frac{5}{3}}\text{。}$$

(7) $f'(x)=-\dfrac{(x+\cos x)'}{(x+\cos x)^2}=\dfrac{\sin x-1}{(x+\cos x)^2}$。

(8) $f'(x)=\dfrac{(x\sin x-2\ln x)'(\sqrt{x}+1)-(x\sin x-2\ln x)(\sqrt{x}+1)'}{(\sqrt{x}+1)^2}$

$$=\frac{2(x\sin x+x^2\cos x-2)(\sqrt{x}+1)-\sqrt{x}(x\sin x-2\ln x)}{2x(\sqrt{x}+1)^2}\text{。}$$

(9) $f'(x)=\dfrac{(x^3+\cot x)'\ln x-(x^3+\cot x)(\ln x)'}{\ln^2 x}$

$$=\frac{(3x^2-\csc^2 x)x\ln x-x^3-\cot x}{x\ln^2 x}\text{。}$$

(10) $f'(x)=(1+\dfrac{2\cos x}{x\sin x-\cos x})'$

$$=\frac{(2\cos x)'(x\sin x-\cos x)-2\cos x(x\sin x-\cos x)'}{(x\sin x-\cos x)^2}$$

$$=\frac{-2(x+\sin x\cos x)}{(x\sin x-\cos x)^2}\text{。}$$

(11) $f'(x)=(e^x+\log_3 x)'\arcsin x+(e^x+\log_3 x)(\arcsin x)'$

$$=(e^x+\frac{1}{x\ln 3})\arcsin x+(e^x+\frac{\ln x}{\ln 3})\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\text{。}$$

(12) $f'(x)=(\csc x-3\ln x)'x^2\mathrm{sh}x+(\csc x-3\ln x)(x^2)'\mathrm{sh}x$

$$+(\csc x-3\ln x)x^2(\mathrm{sh}x)'$$

$$=-(\cot x\csc x+\frac{3}{x})x^2\mathrm{sh}x+(\csc x-3\ln x)(2x)\mathrm{sh}x+(\csc x-3\ln x)x^2\mathrm{ch}x$$

$$=-(x^2\cot x\csc x+3x)\mathrm{sh}x+x(\csc x-3\ln x)(2\mathrm{sh}x+x\mathrm{ch}x)\text{。}$$

(13) $f'(x)=\dfrac{(x+\sec x)'(x-\csc x)-(x+\sec x)(x-\csc x)'}{(x-\csc x)^2}$

$$=\frac{(1+\tan x\sec x)(x-\csc x)-(x+\sec x)(1+\cot x\csc x)}{(x-\csc x)^2}\text{。}$$

（14） $f'(x)=\dfrac{(x+\sin x)'\arctan x-(x+\sin x)(\arctan x)'}{\arctan^2 x}$

$$=\frac{(1+x^2)(1+\cos x)\arctan x-(x+\sin x)}{(1+x^2)\arctan^2 x}\text{。}$$

4. 求曲线 $y=\ln x$ 在 $(\mathrm{e},1)$ 处的切线方程和法线方程。

解 因为 $y'(e)=\left.\dfrac{1}{x}\right|_{x=e}=\dfrac{1}{e}$，切线方程为

$$y=\frac{1}{e}(x-e)+1=\frac{x}{e},$$

法线方程为

$$y=-e(x-e)+1=-ex+(e^2+1)\text{。}$$

5. 当 a 取何值时，直线 $y=x$ 能与曲线 $y=\log_a x$ 相切，切点在哪里?

解 设切点为 (x_0,x_0)，由于 $y=x$ 是 $y=f(x)=\log_a x$ 的切线，其斜率为 1，所以 $f'(x_0)=\dfrac{1}{x_0\ln a}=1$，故 $x_0=\dfrac{1}{\ln a}$。又由 $f(x_0)=\log_a x_0=\dfrac{\ln x_0}{\ln a}=x_0$，得到 $\ln x_0=1$，即 $x_0=e$，从而 $a=e^{e^{-1}}$，切点为 (e,e)。

6. 求曲线 $y=x^n$（$n\in\mathbf{N}^+$）上过点 $(1,1)$ 的切线与 x 轴的交点的横坐标 x_n，并求出极限 $\lim\limits_{n\to\infty}y(x_n)$。

解 因为 $y'(1)=\left.nx^{n-1}\right|_{x=1}=n$，所以过点 $(1,1)$ 的切线为 $y=n(x-1)+1$，它与 x 轴交点的横坐标为 $x_n=\dfrac{n-1}{n}$，因此

$$\lim_{n\to\infty}y(x_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}\text{。}$$

7. 对于抛物线 $y=ax^2+bx+c$，设集合

$\mathrm{S}_1=\{(x,y)\,|\,$过$(x,y)$可以作该抛物线的两条切线$\}$；

$\mathrm{S}_2=\{(x,y)\,|\,$过$(x,y)$只可以作该抛物线的一条切线$\}$；

$\mathrm{S}_3=\{(x,y)\,|\,$过$(x,y)$不能作该抛物线的切线$\}$，

请分别求出这三个集合中的元素所满足的条件。

解　$a \neq 0$，不妨设$a>0$，抛物线开口向上。过(x,y)可以作该抛物线两条切线当且仅当(x,y)在该抛物线的下方，即$y<ax^2+bx+c$。同理当$a<0$时，$y>ax^2+bx+c$，因此

$$S_1=\left\{(x,y)\mid a(ax^2+bx+c-y)>0\right\}。$$

过(x,y)只可以作该抛物线一条切线当且仅当(x,y)在该抛物线上，所以

$$S_2=\left\{(x,y)\mid ax^2+bx+c-y=0\right\}。$$

由此得到

$$S_3=(S_1\cup S_2)^C=\left\{(x,y)\mid a(ax^2+bx+c-y)<0\right\}。$$

8.（1）设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，$g(x)$ 在 $x=x_0$ 处不可导，证明 $c_1f(x)+c_2g(x)$ $(c_2\neq 0)$在$x=x_0$处也不可导。

（2）设$f(x)$与$g(x)$在$x=x_0$处都不可导，能否断定$c_1f(x)+c_2g(x)$在$x=x_0$处一定可导或一定不可导？

解　（1）记$h(x)=c_1f(x)+c_2g(x)$，当$c_2\neq 0$时，如果$h(x)$在$x=x_0$处可导，则$g(x)=[h(x)-c_1f(x)]/c_2$在$x=x_0$处也可导，从而产生矛盾。

（2）不能断定。如$g(x)=f(x)=|x|$，当$c_1=-c_2$时，$c_1f(x)+c_2g(x)$在$x=0$处是可导的；当$c_1\neq -c_2$时，$c_1f(x)+c_2g(x)$在$x=0$处不可导。

9. 在上题的条件下，讨论$f(x)g(x)$在$x=x_0$处的可导情况。

解　函数$f(x)=c$在$x=0$处可导，$g(x)=|x|$在$x=0$处不可导，则$f(x)g(x)$当$c=0$时在$x=0$处可导，当$c\neq 0$时在$x=0$处不可导。

函数$f(x)=g(x)=|x|$在$x=0$处都不可导，但$f(x)g(x)=x^2$在$x=0$处可导。函数$f(x)=g(x)=\operatorname{sgn}|x|$在$x=0$处都不可导，$f(x)g(x)=\operatorname{sgn}|x|$在$x=0$

处也不可导。

10．设$f_{ij}(x)$（$i,j=1,2,\cdots,n$）为同一区间上的可导函数，证明

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}。$$

证 根据行列式的定义

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$=\frac{d}{dx}\sum(-1)^{N(k_1k_2\cdots k_n)}f_{1k_1}(x)f_{2k_2}(x)\cdots f_{nk_n}(x)$$

$$=\sum(-1)^{N(k_1k_2\cdots k_n)}[f'_{1k_1}(x)f_{2k_2}(x)\cdots f_{nk_n}(x)+f_{1k_1}(x)f'_{2k_2}(x)\cdots f_{nk_n}(x)+\cdots$$

$$+f_{1k_1}(x)f_{2k_2}(x)\cdots f'_{nk_n}(x)]$$

$$=\begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f'_{12}(x) & \cdots & f'_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f'_{21}(x) & f'_{22}(x) & \cdots & f'_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}+\cdots$$

$$+\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{n1}(x) & f'_{n2}(x) & \cdots & f'_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}。$$

习 题 4.4 复合函数求导法则及其应用

1. 求下列函数的导数：

(1) $y=(2x^2-x+1)^2$；

(2) $y=\mathrm{e}^{2x}\sin 3x$；

(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}$；

(4) $y=\sqrt{\dfrac{\ln x}{x}}$；

(5) $y=\sin x^3$；

(6) $y=\cos\sqrt{x}$；

(7) $y=\sqrt{x+1}-\ln(x+\sqrt{x+1})$；

(8) $y=\arcsin(\mathrm{e}^{-x^2})$；

(9) $y=\ln\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)$；

(10) $y=\dfrac{1}{(2x^2+\sin x)^2}$；

(11) $y=\dfrac{1+\ln^2 x}{x\sqrt{1-x^2}}$；

(12) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1+\csc x^2}}$；

(13) $y=\dfrac{2}{\sqrt[3]{2x^2-1}}+\dfrac{3}{\sqrt[4]{3x^3+1}}$；

(14) $y=\mathrm{e}^{-\sin^2 x}$；

(15) $y=x\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

解 （1） $y'=2(2x^2-x+1)(2x^2-x+1)'=2(2x^2-x+1)(4x-1)$ 。

（2） $y'=e^{2x}(\sin 3x)'+(e^{2x})'\sin 3x=e^{2x}(3\cos 3x+2\sin 3x)$ 。

（3） $y'=-\dfrac{1}{2}(1+x^3)^{-\frac{3}{2}}(1+x^3)'=-\dfrac{3}{2}x^2(1+x^3)^{-\frac{3}{2}}$ 。

（4） $y'=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'=\dfrac{1-\ln x}{2x^2}\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)^{\frac{1}{2}}$ 。

（5） $y'=\cos x^3(x^3)'=3x^2\cos x^3$ 。

（6） $y'=-\sin\sqrt{x}(\sqrt{x})'=-\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ 。

(7) $y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x+1)'}{\sqrt{x+1}}-\frac{(x+\sqrt{x+1})'}{x+\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1+2\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}(x+\sqrt{1+x})}$

$=\frac{x-1-\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}(x+\sqrt{1+x})}$。

(8) $y'=\frac{(\mathrm{e}^{-x^2})'}{\sqrt{1-(\mathrm{e}^{-x^2})^2}}=\frac{-2x\,\mathrm{e}^{-x^2}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x^2}}}=\frac{-2x}{\sqrt{e^{2x^2}-1}}$。

(9) $y'=[\ln(x^4-1)-\ln(x^2]'=\frac{(x^4-1)'}{x^4-1}-2\frac{1}{x}=\frac{2x^4+2}{x(x^4-1)}$。

(10) $y'=\frac{-2(2x^2+\sin x)'}{(2x^2+\sin x)^3}=\frac{-2(4x+\cos x)}{(2x^2+\sin x)^3}$。

(11) $y'=\frac{(1+\ln^2 x)'x\sqrt{1-x^2}-(1+\ln^2 x)(x\sqrt{1-x^2})'}{x^2(1-x^2)}$

$=\frac{2(1-x^2)\ln x-(1+\ln^2 x)(1-2x^2)}{x^2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$。

(12) $y'=\frac{x'\sqrt{1+\csc x^2}-x(\sqrt{1+\csc x^2})'}{1+\csc x^2}$

$=\frac{\sqrt{1+\csc x^2}-x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{(-\cot x^2\csc x^2)\cdot(2x)}{\sqrt{1+\csc x^2}}}{1+\csc x^2}$

$=\frac{1+\csc x^2+x^2\csc x^2\cot x^2}{(1+\csc x^2)^{\frac{3}{2}}}$。

(13) $y'=(\frac{2}{\sqrt[3]{2x^2-1}})'+(\frac{3}{\sqrt[4]{3x^3+1}})'$

$=2(-\frac{1}{3})(2x^2-1)^{-\frac{4}{3}}(4x)+3(-\frac{1}{4})(3x^3+1)^{-\frac{5}{4}}(9x^2)$

$=-\frac{8}{3}x(2x^2-1)^{-\frac{4}{3}}-\frac{27}{4}x^2(3x^3+1)^{-\frac{5}{4}}$。

(14) $y'=\mathrm{e}^{-\sin^2 x}(-\sin^2 x)'=-\sin 2x\cdot e^{-\sin^2 x}$。

(15) $y'=\left(\dfrac{x(a^2-x^2)+x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)'=\dfrac{a^2-3x^2+1}{\sqrt{a^2-x^2}}+\dfrac{x(a^2-x^2+1)\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-2x)}{(\sqrt{a^2-x^2})^3}$

$=\dfrac{2x^4-3a^2x^2+a^4+a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$。

2. 求下列函数的导数：

(1) $y=\ln\sin x$；

(2) $y=\ln(\csc x-\cot x)$；

(3) $y=\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\dfrac{x}{a}\right)$；

(4) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$；

(5) $y=\dfrac{1}{2}(x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$.

解 (1) $y'=\dfrac{1}{\sin x}(\sin x)'=\cot x$。

(2) $y'=\dfrac{(\csc x-\cot x)'}{\csc x-\cot x}=\dfrac{-\cot x\csc x-(-\csc^2 x)}{\csc x-\cot x}=\csc x$。

(3) $y'=\dfrac{1}{2}\left(x'\sqrt{a^2-x^2}+x(\sqrt{a^2-x^2})'+a^2(\arcsin\dfrac{x}{a})'\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2-x^2}+x(\frac{1}{2})\frac{(-2x)}{\sqrt{a^2-x^2}}+a^2\frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\right)=\begin{cases}\sqrt{a^2-x^2}, & a>0,\\ -\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}, & a<0.\end{cases}$$ 。

(4) $y'=\dfrac{(x+\sqrt{x^2+a^2})'}{x+\sqrt{x^2+a^2}}=\dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$。

(5) $y'=\dfrac{1}{2}[x'\sqrt{x^2-a^2}+x(\sqrt{x^2-a^2})'-a^2\dfrac{(x+\sqrt{x^2-a^2})'}{x+\sqrt{x^2-a^2}}]$

$$=\frac{1}{2}\left[\sqrt{x^2-a^2}+x\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right)-a^2\cdot\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right]=\sqrt{x^2-a^2}$$ 。

3. 设 $f(x)$ 可导，求下列函数的导数：

（1） $f(\sqrt[3]{x^2})$；　　（2） $f\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)$；

（3） $\sqrt{f(x)}$；　　（4） $\arctan f(x)$；

（5） $f(f(e^{x^2}))$；　　（6） $\sin(f(\sin x))$；

（7） $f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$；　　（8） $\dfrac{1}{f(f(x))}$.

解　（1） $f(\sqrt[3]{x^2})'=f'(\sqrt[3]{x^2})(\sqrt[3]{x^2})'=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}f'(x^{\frac{2}{3}})$。

（2） $f\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)'=f'\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)'=-\dfrac{1}{x\ln^2 x}f'(\dfrac{1}{\ln x})$。

（3） $[\sqrt{f(x)}]'=\dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}}[f(x)]'=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$。

（4） $[\arctan f(x)]'=\dfrac{1}{1+[f(x)]^2}[f(x)]'=\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$。

（5） $[f(f(e^{x^2}))]'=f'(f(e^{x^2}))[f(e^{x^2})]'=f'(f(e^{x^2}))f'(e^{x^2})(e^{x^2})'$

$=2xe^{x^2}f'(e^{x^2})f'(f(e^{x^2}))$。

（6） $[\sin(f(\sin x))]'=\cos(f(\sin x))(f(\sin x))'=\cos(f(\sin x))f'(\sin x)(\sin x)'$

$=\cos(f(\sin x))f'(\sin x)\cos x$。

（7） $\left[f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)\right]'=f'\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)'=-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}f'\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$。

（8） $\left(\dfrac{1}{f(f(x))}\right)'=-\dfrac{f'(f(x))}{f^2(f(x))}[f(x)]'=-\dfrac{f'(f(x))f'(x)}{(f(f(x)))^2}$。

4．用对数求导法求下列函数的导数：

（1） $y=x^x$；　　（2） $y=(x^3+\sin x)^{\frac{1}{x}}$；

（3） $y=\cos^x x$；　　（4） $y=\ln^x(2x+1)$；

(5) $y = x\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^3}}$；　　　　(6) $y = \prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$；

(7) $y = \sin x^{\sqrt{x}}$.

解　由于 $(\ln y)' = \dfrac{y'}{y}$，所以 $y' = y(\ln y)'$。

（1） $\ln y = x\ln x$，

$$y' = y(\ln y)' = y[x'\ln x + x(\ln x)'] = (1+\ln x)x^x \text{。}$$

（2） $\ln y = \dfrac{1}{x}\ln\left(x^3+\sin x\right)$，

$$y' = y(\ln y)' = y\left[\left(\frac{1}{x}\right)'\ln\left(x^3+\sin x\right) + \left(\frac{1}{x}\right)\ln\left(x^3+\sin x\right)'\right]$$

$$=(x^3+\sin x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{3x^2+\cos x}{x(x^3+\sin x)} - \frac{\ln(x^3+\sin x)}{x^2}\right]\text{。}$$

（3） $\ln y = x\ln\cos x$，

$$y' = y(x\ln\cos x)' = y[x'\ln\cos x + x(\ln\cos x)'] = (\ln\cos x - x\tan x)\cos^x x \text{。}$$

（4） $\ln y = x\ln\ln(2x+1)$，

$$y' = y[x'\ln\ln(2x+1) + x(\ln\ln(2x+1))']$$

$$=\left[\ln\ln(2x+1) + \frac{2x}{(2x+1)\ln(2x+1)}\right]\ln^x(2x+1)\text{。}$$

（5） $\ln y = \ln x + \dfrac{1}{2}\ln(1-x^2) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^3)$，

$$y' = y[(\ln x)' + \frac{1}{2}(\ln(1-x^2))' - \frac{1}{2}(\ln(1+x^3))']$$

$$=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^3}}\left[\frac{1}{x} - \frac{x}{1-x^2} - \frac{3x^2}{2(1+x^3)}\right]\text{。}$$

（6） $\ln y = \sum_{i=1}^{n}\ln(x-x_i)$，

$$y' = y[\sum_{i=1}^{n} \ln'(x - x_i)] = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i}。$$

（7）令 $u = x^{\sqrt{x}}, \ln u = \sqrt{x} \ln x$，则

$$u' = u[(\sqrt{x})' \ln x + \sqrt{x}(\ln x)'] = u(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}) = u(\frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}})，于是，$$

$$y' = (\sin u)'(u)' = \frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}} x^{\sqrt{x}} \cos x^{\sqrt{x}}。$$

5．对下列隐函数求 $\frac{dy}{dx}$：

（1）$y = x + \arctan y$；（2）$y + x e^{y} = 1$；

（3）$\sqrt{x - \cos y} = \sin y - x$；（4）$xy - \ln(y + 1) = 0$；

（5）$e^{x^2 + y} - xy^2 = 0$；（6）$\tan(x + y) - xy = 0$；

（7）$2y \sin x + x \ln y = 0$；（8）$x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

解　（1）在等式两边对 x 求导，得到

$$y' = x' + (\arctan y)' = 1 + \frac{y'}{1 + y^2},$$

解得

$$y' = \frac{1 + y^2}{y^2}。$$

（2）在等式两边对 x 求导，得到

$$y' + x' e^{y} + x e^{y} y' = y'(1 + x e^{y}) + e^{y} = 0,$$

解得

$$y' = -\frac{e^{y}}{1 + x e^{y}}。$$

（3）等式两边平方，再对 x 求导，得到

$$1+\sin y\cdot(y)'=2(\sin y-x)(\cos y\cdot(y)'-1),$$

解得

$$y'=\frac{1+2(\sin y-x)}{2(\sin y-x)\cos y-\sin y}。$$

（4）在等式两边对x求导，得到

$$x'y+xy'-[\ln(y+1)]'=y+xy'-\frac{1}{1+y}y'=0,$$

解得

$$y'=\frac{y^2+y}{1-x-xy}。$$

（5）在等式两边对x求导，得到

$$e^{x^2+y}(x^2+y)'-(xy^2)'=e^{x^2+y}(2x+y')-(y^2+2xyy')=0,$$

解得

$$y'=-\frac{2xe^{x^2+y}-y^2}{e^{x^2+y}-2xy}。$$

（6）在等式两边对x求导，得到

$$\sec^2(x+y)(x+y)'-(xy)'=\sec^2(x+y)(1+y')-(y+xy')=0,$$

解得

$$y'=\frac{\sec^2(x+y)-y}{x-\sec^2(x+y)}。$$

（7）在等式两边对x求导，得到

$$2y'\sin x+2y(\sin x)'+(x\ln y)'=2y'\sin x+2y\cos x+\ln y+x\cdot\frac{y'}{y}=0,$$

解得

$$y' = -\frac{2y^2\cos x + y\ln y}{x + 2y\sin x}。$$

（8）在等式两边对 x 求导，得到

$$3x^2 + 3y^2 y' - 3ax'y - 3axy' = 3(x^2 + y^2 y' - ay - axy') = 0，$$

解得

$$y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}。$$

6． 设所给的函数可导，证明：

⑴ 奇函数的导函数是偶函数；偶函数的导函数是奇函数；

⑵ 周期函数的导函数仍是周期函数。

证 ⑴设 $f(x)$ 为奇函数，则

$$f'(-x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x) - f(-x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[-f(x-\Delta x)] - [-f(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{-\Delta x\to 0}\frac{f(x+(-\Delta x)) - f(x)}{(-\Delta x)} = f'(x)；$$

设 $f(x)$ 为偶函数，则

$$f'(-x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x) - f(-x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= -\lim_{-\Delta x\to 0}\frac{f(x+(-\Delta x)) - f(x)}{(-\Delta x)} = -f'(x)。$$

（2）设 $f(x)$ 是周期为 T 的函数，则

$$f'(x+T) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f((x+T)+\Delta x) - f(x+T)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)。$$

7．求曲线 $xy + \ln y = 1$ 在 $M(1,1)$ 点的切线和法线方程。

解 对方程两边求导，得到 $y + xy' + \frac{y'}{y} = 0$，解得 $y' = -\frac{y^2}{xy+1}$，将 $(1,1)$ 代入得到 $y'(1) = -\frac{1}{2}$。于是切线方程为 $y - 1 = -\frac{1}{2}(x-1)$，即

$$x+2y-3=0,$$

法线方程为 $y-1=2(x-1)$，即

$$2x-y-1=0\text{。}$$

8． 对下列参数形式的函数求 $\dfrac{dy}{dx}$：

（1）$\begin{cases} x=at^2, \\ y=bt^3; \end{cases}$ （2）$\begin{cases} x=1-t^2, \\ y=t-t^3; \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x=t^2\sin t, \\ y=t^2\cos t; \end{cases}$ （4）$\begin{cases} x=a\mathrm{e}^{-t}, \\ y=b\mathrm{e}^{t}; \end{cases}$

（5）$\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t; \end{cases}$ （6）$\begin{cases} x=\operatorname{sh} at, \\ y=\operatorname{ch} bt; \end{cases}$

（7）$\begin{cases} x=\dfrac{t+1}{t}, \\ y=\dfrac{t-1}{t}; \end{cases}$ （8）$\begin{cases} x=\sqrt{1+t}, \\ y=\sqrt{1-t}; \end{cases}$

（9）$\begin{cases} x=\mathrm{e}^{-2t}\cos^2 t, \\ y=\mathrm{e}^{-2t}\sin^2 t; \end{cases}$ （10）$\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=t-\arctan t. \end{cases}$

解：（1）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'}{x'}=\dfrac{3bt^2}{2at}=\dfrac{3bt}{2a}$。

（2）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'}{x'}=\dfrac{1-3t^2}{-2t}=\dfrac{3t^2-1}{2t}$。

（3）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'}{x'}=\dfrac{2t\cos t-t^2\sin t}{2t\sin t+t^2\cos t}=\dfrac{2\cos t-t\sin t}{2\sin t+t\cos t}$。

（4）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'}{x'}=\dfrac{be^t}{(-ae^{-t})}=-\dfrac{b}{a}e^{2t}$。

（5）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'}{x'}=\dfrac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)}=-\tan t$。

（6）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'}{x'}=\dfrac{b\mathrm{sh}bt}{a\mathrm{ch}at}$。

(7) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'}{x'}=\dfrac{(1+t^{-1})'}{(1-t^{-1})'}=\dfrac{-t^{-2}}{t^{-2}}=-1$。

(8) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'}{x'}=\dfrac{\dfrac{-1}{2\sqrt{1-t}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{1+t}}}=-\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}$。

(9) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'}{x'}=\dfrac{-2e^{-2t}\sin^2 t+e^{-2t}2\sin t\cos t}{-2e^{-2t}\cos^2 t+e^{-2t}2\cos t(-\sin t)}=\dfrac{(\sin t-\cos t)\tan t}{\sin t+\cos t}$。

(10) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'}{x'}=\dfrac{1-\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{t}{2}$。

9．求曲线 $x=\dfrac{2t+t^2}{1+t^3}$， $y=\dfrac{2t-t^2}{1+t^3}$ 上与 $t=1$ 对应的点处的切线和法线方程。

解　将 $t=1$ 代入参数方程，有 $x=\dfrac{3}{2}, y=\dfrac{1}{2}$。经计算，

$$x'(\mathrm{t})=\frac{(2t+t^2)'(1+t^3)-(2t+t^2)(1+t^3)'}{(1+t^3)^2}=\frac{(2+2t)(1+t^3)-(2t+t^2)3t^2}{(1+t^3)^2}$$

$$=\frac{2+2t-4t^3-t^4}{(1+t^3)^2},$$

$$y'(t)=\frac{(2t-t^2)'(1+t^3)-(2t-t^2)(1+t^3)'}{(1+t^3)^2}=\frac{(2-2t)(1+t^3)-(2t-t^2)3t^2}{(1+t^3)^2}$$

$$=\frac{2-2t-4t^3+t^4}{(1+t^3)^2}。$$

于是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2-2t-4t^3+t^4}{2+2t-4t^3-t^4}。$$

当 $t=1$ 时，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-\dfrac{3}{4}}{-\dfrac{1}{4}}=3$，所以切线方程为

$$y=3(x-\frac{3}{2})+\frac{1}{2}=3x-4\text{，}$$

法线方程为

$$y=-\frac{1}{3}(x-\frac{3}{2})+\frac{1}{2}=-\frac{x}{3}+1\text{。}$$

10．设方程$\begin{cases} e^x=3t^2+2t+1, \\ t\sin y-y+\dfrac{\pi}{2}=0. \end{cases}$确定$y$为$x$的函数，其中$t$为参变量，求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$。

解　将$t=0$代入参数方程，可得$e^x=1,-y+\dfrac{\pi}{2}=0$，即$x=0,y=\dfrac{\pi}{2}$。在两个方程的两端对$t$求导，得到

$$\begin{cases} e^x x'=6t+2, \\ \sin y+t\cos y\cdot y'-y'=0, \end{cases}$$

再将$t=0$代入，解得$x'(0)=2,y'(0)=1$。所以

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\frac{2}{1}=2\text{。}$$

11．证明曲线

$$\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t), \\ y=a(\sin t-t\cos t). \end{cases}$$

上任一点的法线到原点的距离等于$|a|$。

证　利用参数形式所表示的函数的求导公式，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a(\cos t-\cos t+t\sin t)}{a(-\sin t+\sin t+t\cos t)}=\tan t\text{，}$$

曲线在对应于参数t的点处的法线方程为

$$y-a(\sin t-t\cos t)=-\cot t(x-a(\cos t+t\sin t))\text{，}$$

简化后为

$$\cos t\cdot x+\sin t\cdot y-a=0,$$

法线到原点的距离为

$$d=\left|\frac{a}{\cos^2 t+\sin^2 t}\right|=|a|。$$

12．设函数$u=g(x)$在$x=x_0$处连续，$y=f(u)$在$u=u_0=g(x_0)$处连续。请举例说明，在以下情况中，复合函数$y=f(g(x))$在$x=x_0$处并非一定不可导：

（1）$u=g(x)$在x_0处可导，而$y=f(u)$在u_0处不可导；

（2）$u=g(x)$在x_0处不可导，而$y=f(u)$在u_0处可导；

（3）$u=g(x)$在x_0处不可导，$y=f(u)$在u_0处也不可导。

解　（1）$u=g(x)=x^2, f(u)=|u|, x_0=0, u_0=0, y=f(g(x))=|x^2|=x^2$。

（2）$u=g(x)=|x|, f(u)=u^2, x_0=0, u_0=0, y=f(g(x))=|x|^2=x^2$。

（3）$g(x)=\max\{0,x\}, f(u)=\min\{0,u\}$，则$u=g(x)$在$x_0=0$处不可导，$y=f(u)$在$u_0=g(0)=0$处也不可导，但$y=f(g(x))\equiv 0$处处可导。

13．设函数$f(u)$，$g(u)$和$h(u)$可微，且$h(u)>1$，$u=\varphi(x)$也是可微函数，利用一阶微分的形式不变性求下列复合函数的微分：

（1）$f(u)g(u)h(u)$；　　（2）$\dfrac{f(u)g(u)}{h(u)}$；

（3）$h(u)^{g(u)}$；　　（4）$\log_{h(u)} g(u)$；

（5）$\arctan\left[\dfrac{f(u)}{h(u)}\right]$；　　（6）$\dfrac{1}{\sqrt{f^2(u)+h^2(u)}}$.

解　（1）$d[f(u)g(u)h(u)]=[f'(u)g(u)h(u)+f(u)g'(u)h(u)+f(u)g(u)h'(u)]du$

$$=[f'(u)g(u)h(u)+f(u)g'(u)h(u)+f(u)g(u)h'(u)]\varphi'(x)dx。$$

(2) $d\left[\dfrac{f(u)g(u)}{h(u)}\right]=\dfrac{[f'(u)g(u)+f(u)g'(u)]h(u)-[f(u)g(u)]h'(u)}{(h(u))^2}du$

$$=\frac{f'(u)g(u)h(u)+f(u)g'(u)h(u)-f(u)g(u)h'(u)}{(h(u))^2}\varphi'(x)dx$$ 。

(3) $d[h(u)^{g(u)}]=\left[e^{g(u)\ln(h(u))}\right]'du=e^{g(u)\ln(h(u))}\left[g(u)\ln(h(u))\right]'du$

$$=h(u)^{g(u)}\left[g(u)\frac{h'(u)}{h(u)}+g'(u)\ln h(u)\right]\varphi'(x)dx$$ 。

(4) $d\log_{h(u)}g(u)=d\dfrac{\ln g(u)}{\ln h(u)}=\dfrac{[\ln g(u)]'\ln h(u)-\ln g(u)[\ln h(u)]'}{\ln^2 h(u)}du$

$$=\frac{h(u)g'(u)\ln h(u)-h'(u)g(u)\ln g(u)}{h(u)g(u)\ln^2 h(u)}\varphi'(x)dx$$ 。

(5) $d\arctan\left[\dfrac{f(u)}{h(u)}\right]=\dfrac{\left[\dfrac{f(u)}{h(u)}\right]'}{1+\left[\dfrac{f(u)}{h(u)}\right]^2}du=\dfrac{f'(u)h(u)-f(u)h'(u)}{f^2(u)+h^2(u)}\varphi'(x)dx$ 。

(6) $d\dfrac{1}{\sqrt{f^2(u)+h^2(u)}}=-\dfrac{\left[f^2(u)+h^2(u)\right]'}{2(f^2(u)+h^2(u))^{\frac{3}{2}}}du=-\dfrac{f(u)f'(u)+h(u)h'(u)}{(f^2(u)+h^2(u))^{\frac{3}{2}}}\varphi'(x)dx$ 。

习　题　4.5　高阶导数和高阶微分

1．求下列函数的高阶导数：

(1) $y = x^3 + 2x^2 - x + 1$，求 y'''；　(2) $y = x^4 \ln x$，求 y''；

(3) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x}}$，求 y''；　(4) $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$，求 y''；

(5) $y = \sin x^3$，求 y''、y'''；　(6) $y = x^3 \cos\sqrt{x}$，求 y''、y'''；

(7) $y = x^2 e^{3x}$，求 y'''；　(8) $y = e^{-x^2} \arcsin x$，求 y''；

(9) $y = x^3 \cos 2x$，求 $y^{(80)}$；　(10) $y = (2x^2 + 1)\operatorname{sh} x$，求 $y^{(99)}$.

解　(1) $y' = 3x^2 + 4x - 1,\ y'' = 6x + 4,\ y''' = 6$。

(2) $y' = 4x^3 \ln x + x^3$，$y'' = 12x^2 \ln x + 4x^2 + 3x^2 = 12x^2 \ln x + 7x^2$。

(3) $$y' = \frac{2x\sqrt{1+x} - x^2 \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1+x} = \frac{4x + 3x^2}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}},$$

$$y'' = \frac{(4+6x)(1+x)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{3}{2}(4x+3x^2)(1+x)^{\frac{1}{2}}}{2(1+x)^3} = \frac{3x^2 + 8x + 8}{4(1+x)^{\frac{5}{2}}}。$$

(4) $$y' = x^{-1} \cdot x^{-2} - 2\ln x \cdot x^{-3} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3},$$

$$y'' = -2x^{-1}x^{-3} - 3(1 - 2\ln x)x^{-4} = \frac{6\ln x - 5}{x^4}。$$

(5) $y' = \cos x^3 \cdot (3x^2) = 3x^2 \cos x^3$，

$$y'' = 6x\cos x^3 + 3x^2(-\sin x^3)(3x^2) = 6x\cos x^3 - 9x^4 \sin x^3,$$

$$y''' = 6\cos x^3 - 6x\sin x^3 \cdot (3x^2) - 36x^3 \sin x^3 - 9x^4 \cos x^3 \cdot (3x^2)$$

$$= -54x^3 \sin x^3 - (27x^6 - 6)\cos x^3。$$

(6) $$y' = 3x^2 \cos\sqrt{x} + x^3(-\sin\sqrt{x})(\frac{1}{2\sqrt{x}}) = 3x^2 \cos\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}} \sin\sqrt{x},$$

$$y''=6x\cos\sqrt{x}+3x^2(-\sin\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{5}{4}x^{\frac{3}{2}}\sin\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}}(\cos\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$=(6x-\frac{1}{4}x^2)\cos\sqrt{x}-\frac{11}{4}x^{\frac{3}{2}}\sin\sqrt{x},$$

$$y'''=(6-\frac{x}{2})\cos\sqrt{x}+(6x-\frac{x^2}{4})(-\sin\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{33}{8}x^{\frac{1}{2}}\sin\sqrt{x}-\frac{11}{4}x^{\frac{3}{2}}\cos\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$=(6-\frac{15}{8}x)\cos\sqrt{x}+(\frac{1}{8}x^{\frac{3}{2}}-\frac{57}{8}x^{\frac{1}{2}})\sin\sqrt{x}\text{。}$$

（7） $y'=2xe^{3x}+x^2e^{3x}(3x)'=(2x+3x^2)e^{3x}$，

$$y''=(2+6x)e^{3x}+(2x+3x^2)e^{3x}(3x)'=(9x^2+12x+2)e^{3x},$$

$$y'''=(18x+12)e^{3x}+(9x^2+12x+2)e^{3x}(3x)'=(27x^2+54x+18)e^{3x}\text{。}$$

（8） $y'=(-x^2)'e^{-x^2}\arcsin x+e^{-x^2}(\arcsin x)'=(-2x\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})e^{-x^2}$，

$$y''=(-x^2)'(-2x\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})e^{-x^2}+(-2x\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})'e^{-x^2}$$

$$=(-2x)(-2x\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})e^{-x^2}+\left[-2\arcsin x-\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}+(-\frac{1}{2})\frac{(-2x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]e^{-x^2}$$

$$=\left[2(2x^2-1)\arcsin x+\frac{x(4x^2-3)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]e^{-x^2};$$

（9） $y^{(80)}=x^3\cos^{(80)}2x+C_{80}^1 3x^2\cos^{(79)}2x+C_{80}^2 6x\cos^{(78)}2x+C_{80}^3 6\cos^{(77)}2x$

$$=2^{80}x^3\cos 2x+80\cdot 2^{79}\cdot 3x^2\sin 2x-3160\cdot 2^{78}\cdot 6x\cos 2x-82160\cdot 2^{77}\cdot 6\sin 2x$$

$$=2^{80}\left[x(x^2-4740)\cos 2x+(120x^2-61620)\sin 2x\right]\text{。}$$

（10） $y^{(99)}=(2x^2+1)\mathrm{sh}^{(99)}x+C_{99}^1 4x\,\mathrm{sh}^{(98)}x+C_{99}^2 4\,\mathrm{sh}^{(97)}x$

$$=(2x^2+1)\mathrm{ch}\,x+99\cdot 4x\,\mathrm{sh}\,x+4851\cdot 4\mathrm{ch}\,x$$

$$=(2x^2+19405)\mathrm{ch}x+396x\mathrm{sh}x\text{。}$$

2． 求下列函数的n阶导数$y^{(n)}$：

(1) $y=\sin^2 \omega x$；　　(2) $y=2^x \ln x$；

(3) $y=\dfrac{e^x}{x}$；　　(4) $y=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$；

(5) $y=e^{\alpha x}\cos\beta x$；　　(6) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

解　(1) $y^{(n)}=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2\omega x)^{(n)}=-2^{n-1}\omega^n\cos(2\omega x+\dfrac{n}{2}\pi)$

$=2^{n-1}\omega^n\sin(2\omega x+\dfrac{n-1}{2}\pi)$。

(2) $y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(2^x)^{(n-k)}(\ln x)^{(k)}=\ln^n 2\cdot 2^x\ln x+\sum_{k=1}^{n}C_n^k 2^x\ln^{n-k}2\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(k-1)}$

$=2^x\left[\ln^n 2\cdot\ln x+\sum_{k=1}^{n}C_n^k\ln^{n-k}2\cdot\dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}\right]$。

(3) $y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(e^x)^{(n-k)}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(k)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k e^x\dfrac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}=e^x\sum_{k=0}^{n}C_n^k\dfrac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$。

(4) 由于 $y=\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-2}$，

$y^{(n)}=\left(\dfrac{1}{x-3}\right)^{(n)}-\left(\dfrac{1}{x-2}\right)^{(n)}=(-1)^n n!\left[\dfrac{1}{(x-3)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x-2)^{n+1}}\right]$

$=(-1)^n n!\dfrac{\sum_{k=0}^{n}(x-2)^k(x-3)^{n-k}}{(x-3)^{n+1}(x-2)^{n+1}}=(-1)^n n!\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{(x-2)^{n-k+1}(x-3)^{k+1}}$。

(5) $y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(e^{\alpha x})^{(n-k)}[\cos(\beta x)]^{(k)}=e^{\alpha x}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\alpha^{n-k}\beta^k\cos(\beta x+\dfrac{k\pi}{2})$。

(6) $y=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$

$=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x=1-\dfrac{1}{4}(1-\cos 4x)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{\cos 4x}{4}$，

所以

$$y^{(n)}=4^{n-1}\cos(4x+\dfrac{n\pi}{2})$$。

3. 研究函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\ge 0,\\ -x^2, & x<0\end{cases}$$

的各阶导数。

解 当$x>0$时，$f'(x)=2x$；当$x<0$时，$f'(x)=-2x$。由

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{(\Delta x)^2-0}{\Delta x}=0,$$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{-(\Delta x)^2-0}{\Delta x}=0,$$

可知$f'(x)=2|x|$。

由此得到$f''(x)=\begin{cases}2, & x>0,\\ -2, & x<0,\\ \text{不存在}, & x=0。\end{cases}$

于是当$n>2$时，$f^{(n)}(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ \text{不存在}, & x=0。\end{cases}$

4．设$f(x)$任意次可微，求

（1）$[f(x^2)]'''$；　　（2）$\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]'''$；

（3）$[f(\ln x)]''$；　　（4）$[\ln f(x)]''$；

（5）$[f(e^{-x})]'''$；　　（6）$[f(\arctan x)]''$.

解 （1）$[f(x^2)]'=f'(x^2)(x^2)'=2xf'(x^2)$，

$[f(x^2)]''=2xf''(x^2)(x^2)'+(2x)'f'(x^2)=4x^2f''(x^2)+2f'(x^2)$，

$[f(x^2)]'''=4x^2f'''(x^2)(x^2)'+(4x^2)'f''(x^2)+2f''(x^2)(x^2)'=8x^3f'''(x^2)+12xf''(x^2)$。

（2）$\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]'=f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$，

$\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]''=-\frac{1}{x^2}f''\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)'-\left(\frac{1}{x^2}\right)'f'\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^4}f''\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{2}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right)$，

$\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]'''=-\frac{1}{x^6}f'''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{4}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right)$

$$=-\frac{1}{x^6}\left[f'''\left(\frac{1}{x}\right)+6xf''\left(\frac{1}{x}\right)+6x^2f'\left(\frac{1}{x}\right)\right]。$$

（3） $[f(\ln x)]'=f'(\ln x)(\ln x)'=\frac{f'(\ln x)}{x}$，

$$[f(\ln x)]''=\frac{f''(\ln x)(\ln x)'\cdot x-f'(\ln x)(x)'}{x^2}=\frac{f''(\ln x)-f'(\ln x)}{x^2}。$$

（4） $[\ln f(x)]'=\frac{f'(x)}{f(x)}$，

$$[\ln f(x)]''=\frac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}。$$

（5） $[f(e^{-x})]'=f'(e^{-x})(e^{-x})'=-e^{-x}f'(e^{-x})$

$$[f(e^{-x})]''=-e^{-x}f''(e^{-x})(e^{-x})'-(e^{-x})'f'(e^{-x})=e^{-2x}f''(e^{-x})+e^{-x}f'(e^{-x}),$$

$$[f(e^{-x})]'''=e^{-2x}f'''(e^{-x})(e^{-x})'+(e^{-2x})'f''(e^{-x})+e^{-x}f''(e^{-x})(e^{-x})'+(e^{-x})'f'(e^{-x})$$

$$=-e^{-3x}f'''(e^{-x})-3e^{-2x}f''(e^{-x})-e^{-x}f'(e^{-x})。$$

（6） $[f(\arctan x)]'=f'(\arctan x)(\arctan x)'=\frac{f'(\arctan x)}{1+x^2}$，

$$[f(\arctan x)]''=\frac{(1+x^2)f''(\arctan x)(\arctan x)'-(1+x^2)'f'(\arctan x)}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{f''(\arctan x)-2xf'(\arctan x)}{(1+x^2)^2}。$$

5．利用 Leibniz 公式计算 $y^{(n)}(0)$：

（1） $y=\arctan x$；

（2） $y=\arcsin x$。

解（1）由 $y'=\frac{1}{1+x^2},\ y''=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$，令 $x=0$，可得 $y'(0)=1,\ y''(0)=0$。在等式 $y'(1+x^2)=1$ 两边对 x 求 n 阶导数（$n>1$），得到

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k y^{(n-k+1)}(1+x^2)^{(k)}=0,$$

注意到 $(1+x^2)'''=0$，上式简化为

$$y^{(n+1)}(1+x^2)+ny^{(n)}\cdot 2x+\frac{n(n-1)}{2}y^{(n-1)}\cdot 2=0,$$

以 $x=0$ 代入，得到递推公式

$$y^{(n+1)}(0)=-n(n-1)y^{(n-1)}(0),$$

从而得到

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!, & n\text{为奇数;}\\ 0, & n\text{为偶数。}\end{cases}$$

（2）由 $y'=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}, y''=(-\frac{1}{2})(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(1-x^2)'=x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}=\frac{xy'}{1-x^2}$，令 $x=0$，可得 $y'(0)=1, y''(0)=0$，且 $xy'=(1-x^2)y''$。在等式 $xy'=(1-x^2)y''$ 两边对 x 求 n 阶导数（$n\ge 1$），得到

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k y^{(n-k+1)}(x)^{(k)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k y^{(n-k+2)}(1-x^2)^{(k)},$$

即

$$xy^{(n+1)}+ny^{(n)}=y^{(n+2)}(1-x^2)^{(k)}-2xny^{(n+1)}-n(n-1)y^{(n)}$$

$$xy^{(n+1)}+ny^{(n)}=y^{(n+2)}(1-x^2)-2xny^{(n+1)}-n(n-1)y^{(n)},$$

以 $x=0$ 代入，得到递推公式

$$y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0),$$

从而得到

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases}[(n-2)!!]^2, & n\text{为奇数；}\\ 0, & n\text{为偶数。}\end{cases}$$

6. 对下列隐函数求 $\frac{d^2y}{dx^2}$：

(1) $e^{x^2+y}-x^2y=0$；　　(2) $\tan(x+y)-xy=0$；

(3) $2y\sin x+x\ln y=0$；　　(4) $x^3+y^3-3axy=0$.

解 （1）在等式两边对 x 求导，有

$$e^{x^2+y}(x^2+y)'-(x^2y)'=e^{x^2+y}(2x+y')-2xy-x^2y'=0,$$

再对x求导，得到

$$e^{x^2+y}(x^2+y)'(2x+y')+e^{x^2+y}(2x+y')'-(2xy+x^2y')'$$

$$=e^{x^2+y}(2x+y')^2+e^{x^2+y}(2+y'')-2y-4xy'-x^2y''=0,$$

从而解出

$$y''=\frac{4xy'+2y-e^{x^2+y}[2+4x^2+4xy'+(y')^2]}{e^{x^2+y}-x^2},$$

其中$y'=\dfrac{2x(y-e^{x^2+y})}{e^{x^2+y}-x^2}$。

（2）在等式两边对x求导，有

$$\sec^2(x+y)(x+y)'-(xy)'=\sec^2(x+y)(1+y')-y-xy'=0,$$

再对x求导，得到

$$2\sec^2(x+y)\tan(x+y)(x+y)'(1+y')+\sec^2(x+y)(1+y')'-y'-(xy')'$$

$$=2\sec^2(x+y)\tan(x+y)(1+y')^2+\sec^2(x+y)y''-2y'-xy''=0,$$

从而解出

$$y''=\frac{2\sec(x+y)\tan(x+y)(1+y')^2-2y'}{x-\sec^2(x+y)},$$

其中$y'=\dfrac{\sec^2(x+y)-y}{x-\sec^2(x+y)}$。

（3）在等式两边对x求导，有

$$2y'\sin x+2y\cos x+\ln y+\frac{x}{y}\cdot y'=0,$$

再对x求导，得到

$$2y''\sin x+4y'\cos x-2y\sin x+2\frac{y'}{y}-\frac{x}{y^2}\cdot(y')^2+\frac{x}{y}\cdot y''=0,$$

从而解出

$$y''=\frac{2y^3\sin x-4y^2y'\cos x-2yy'+x(y')^2}{xy+2y^2\sin x},$$

其中 $y'=-\dfrac{2y^2\cos x+y\ln y}{x+2y\sin x}$。

（4）在等式两边对 x 求导，有

$$3x^2+3y^2y'-3ay-3axy'=0,$$

再对 x 求导，得到

$$6x+6y(y')^2+3y^2y''-6ay'-3axy''=0,$$

从而解出

$$y''=\frac{2x+2y(y')^2-2ay'}{ax-y^2},$$

其中 $y'=\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$。

7． 对下列参数形式的函数求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$：

(1) $\begin{cases} x=at^2, \\ y=bt^3, \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=at\cos t, \\ y=at\sin t, \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=t(1-\sin t), \\ y=t\cos t, \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x=a\,\mathrm{e}^{-t}, \\ y=b\,\mathrm{e}^{t}, \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x=\sqrt{1+t}, \\ y=\sqrt{1-t}, \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x=\sin at, \\ y=\cos bt. \end{cases}$

解 （1） $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(bt^3)''(at^2)'-(bt^3)'(at^2)''}{[(at^2)']^3}=\dfrac{(6bt)(2at)-(3bt^2)(2a)}{(2at)^3}=\dfrac{3b}{4a^2t}$。

（2） $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(at\sin t)''(at\cos t)'-(at\sin t)'(at\cos t)''}{[(at\cos t)']^3}$

$$=\frac{(2a\cos t-at\sin t)(a\cos t-at\sin t)+(a\sin t+at\cos t)(2a\sin t+at\cos t)}{a^3(\cos t-t\sin t)^3}$$

$$=\frac{(t^2+2)(\sin^2 t+\cos^2 t)}{a(\cos t-t\sin t)^3}=\frac{t^2+2}{a(\cos t-t\sin t)^3}。$$

(3) $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(t\cos t)''[(t(1-\sin t)]'-(t\cos t)'[t(1-\sin t)]''}{[t(1-\sin t)]'^3}$$

$$=\frac{(-2\sin t-t\cos t)(1-\sin t-t\cos t)-(\cos t-t\sin t)(-2\cos t+t\sin t)}{(1-\sin t-t\cos t)^3}$$

$$=\frac{t^2+2-2\sin t-t\cos t}{(1-\sin t-t\cos t)^3}。$$

(4) $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(be^t)''(ae^{-t})'-(be^t)'(ae^{-t})''}{[(ae^{-t})']^3}=\frac{-be^te^{-t}-be^te^{-t}}{-a^2e^{-3t}}=\frac{2b}{a^2}e^{3t}。$$

(5) $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(\sqrt{1-t})''(\sqrt{1+t})'-(\sqrt{1-t})'(\sqrt{1+t})''}{[(\sqrt{1+t})']^3}$$

$$=\left[\frac{-1}{4(\sqrt{1-t})^3(2\sqrt{1+t})}-\frac{1}{2(\sqrt{1-t})[4(\sqrt{1+t})^3]}\right](2\sqrt{1+t})^3=-2(1-t)^{-\frac{3}{2}}。$$

(6) $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(\cos bt)''(\sin at)'-(\cos bt)'(\sin at)''}{(\sin at)'^3}$$

$$=\frac{b(-a\sin at\sin bt-b\cos at\cos bt)}{a^2\cos^3 at}=-\frac{b(a\sin at\sin bt+b\cos at\cos bt)}{a^2\cos^3 at}。$$

8. 利用反函数的求导公式 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$，证明

(1) $\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{y''}{(y')^3}$； (2) $\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$.

证 (1) $$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y'}\right)$$

$$=-\frac{1}{(y')^2}\frac{dy'}{dy}=-\frac{1}{(y')^2}\frac{dy'}{dx}\frac{dx}{dy}=-\frac{y''}{(y')^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}。$$

y'''

(2) $$\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{d}{dy}\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)=\frac{d}{dy}\left[-\frac{y''}{(y')^3}\right]=-\frac{1}{(y')^3}\frac{dy''}{dy}+3\frac{y''}{(y')^4}\frac{dy'}{dy}$$

$$=-\frac{1}{(y')^3}\frac{dy''}{dx}\frac{dx}{dy}+3\frac{y''}{(y')^4}\frac{dy'}{dx}\frac{dx}{dy}=-\frac{y'''}{(y')^3}\cdot\frac{1}{y'}+\frac{3(y'')^2}{(y')^4}\cdot\frac{1}{y'}=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}。$$

9. 求下列函数的高阶微分：

(1) $y=\sqrt[3]{x-\tan x}$，求 d^2y； (2) $y=x^4 e^{-x}$，求 d^4y；

(3) $y=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$，求 d^2y； (4) $y=\dfrac{\sec x}{\sqrt{x^2-1}}$，求 d^2y；

(5) $y=x\sin 3x$，求 d^3y； (6) $y=x^x$，求 d^2y；

(7) $y=\dfrac{\ln x}{x}$，求 d^ny； (8) $y=x^n\cos 2x$，求 d^ny.

解 (1) $dy=\dfrac{1}{3}(x-\tan x)^{-\frac{2}{3}}(1-\sec^2 x)dx=-\dfrac{1}{3}(x-\tan x)^{-\frac{2}{3}}\tan^2 xdx$，

$$d^2y=[-\frac{2}{9}(x-\tan x)^{-\frac{5}{3}}(1-\sec^2 x)^2-\frac{1}{3}(x-\tan x)^{-\frac{2}{3}}(2\tan x\sec^2 x)]dx^2$$

$$=\frac{2\tan^4 x+6\sec^2 x\tan x(x-\tan x)}{9(\tan x-x)^{\frac{5}{3}}}dx^2。$$

(2) $d^4y=\sum\limits_{k=0}^{4}[C_4^k(x^4)^{(k)}(e^{-x})^{(4-k)}]dx^4=\sum\limits_{k=0}^{4}C_4^k\dfrac{4!}{(4-k)!}x^{4-k}(-1)^{4-k}e^{-x}dx^4$

$=(x^4-16x^3+72x^2-96x+24)e^{-x}dx^4$。

(3) $dy=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot(2x)\cdot x-\sqrt{1+x^2}\cdot 1}{x^2}dx=-\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx$，

$$d^2y=[\frac{2}{x^3\sqrt{1+x^2}}+\frac{2x}{2x^2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}]dx^2=\frac{3x^2+2}{x^3(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx^2。$$

(4) $dy=[\dfrac{\tan x\sec x}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sec x\cdot(2x)}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}]dx=\dfrac{\sec x[(x^2-1)\tan x-x]}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}dx$，

$$d^2y=\left\{\frac{\sec x\tan x[(x^2-1)\tan x-x]+\sec x[2x\tan x+(x^2-1)\sec^2 x-1]}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\right.$$

$$\left.-\frac{3}{2}\cdot\frac{\sec x[(x^2-1)\tan x-x]\cdot(2x)}{(x^2-1)^{\frac{5}{2}}}\right\}dx^2$$

$$=\frac{\sec x[(x^2-1)^2(1+2\tan^2 x)-2x(x^2-1)\tan x+2x^2+1]}{(x^2-1)^{\frac{5}{2}}}dx^2$$ 。

（5） $d^3y=[x(\sin 3x)'''+3x'(\sin 3x)'']dx^3=-27(\sin 3x+x\cos 3x)dx^3$ 。

（6） $dy=de^{x\ln x}=e^{x\ln x}(1+\ln x)dx=x^x(1+\ln x)dx$ ，

$$d^2y=[(x^x)'(1+\ln x)+x^x(1+\ln x)']dx=x^x[(1+\ln x)^2+\frac{1}{x}]dx^2$$ 。

（7） $d^ny=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\ln x)^{(k)}(\frac{1}{x})^{(n-k)}dx^n$

$$=[\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\ln x+\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{x^k}(-1)^{n-k}\frac{(n-k)!}{x^{n-k+1}}]dx^n$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left(\ln x-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)dx^n$$ 。

（8） $d^ny=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x^n)^{(n-k)}(\cos 2x)^{(k)}dx^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}(\frac{n!}{k!}x^k)[2^k\cos(2x+\frac{k\pi}{2})]dx^n$

$$=(n!)^2\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k x^k\cos(2x+\frac{k\pi}{2})}{(k!)^2(n-k)!}dx^n$$ 。

10．求 $d^2(e^x)$ ，其中

（1） x 是自变量; （2） $x=\varphi(t)$ 是中间变量.

解 （1） $d(e^x)=(e^x)'dx=e^xdx$ ，

$$d^2(e^x)=d(e^xdx)=(e^x)'dx^2=e^xdx^2$$ 。

（2） $d(e^x)=(e^x)'dx=e^xdx=e^{\varphi(t)}\varphi'(t)dt$ ，

$$d^2(e^x)=d(e^{\varphi(t)}\varphi'(t)dt)=[e^{\varphi(t)}\varphi'(t)]'dt^2=e^{\varphi(t)}\left\{[\varphi'(t)]^2+\varphi''(t)\right\}dt^2$$ 。

11．设 $f(u)$ ， $g(u)$ 任意次可微，且 $g(u)>0$ 。

（1） 当 $u=\tan x$ 时，求 d^2f ；

（2） 当 $u=\sqrt{v}$ 、 $v=\ln x$ 时，求 d^2g ；

(3) $d^2[f(u)g(u)]$； (4) $d^2[\ln g(u)]$；

(5) $d^2\left[\dfrac{f(u)}{g(u)}\right]$；

解 (1) $df = f'(u)u'(x)dx = f'(\tan x)\sec^2 xdx$，

$$d^2 f = f''(u)[u'(x)]^2 dx^2 + f'(u)u''(x)dx^2$$

$$= [f''(\tan x)\sec^4 x + 2f'(\tan x)\sec^2 x\tan x]dx^2$$ 。

(2) $u = \sqrt{v} = \sqrt{\ln x}$，

$$dg = \frac{dg}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}dx = g'(u)\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\frac{1}{x}dx = g'(\sqrt{\ln x})\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}dx$$，

$$d^2 g = [\frac{g''(u)\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}}{2x\sqrt{\ln x}} - \frac{g'(u)(2x\sqrt{\ln x})'}{(2x\sqrt{\ln x})^2}]dx^2$$

$$= \left\{\frac{g''(u)}{(2x\sqrt{\ln x})^2} - \frac{g'(u)[2\sqrt{\ln x} + 2x\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot(\frac{1}{x})]}{(2x\sqrt{\ln x})^2}\right\}dx^2$$

$$= \frac{g''(\sqrt{\ln x})\sqrt{\ln x} - g'(\sqrt{\ln x})(1+2\ln x)}{4x^2\ln^{\frac{3}{2}}x}dx^2$$ 。

(3) $d[f(u)g(u)] = [f'(u)g(u) + f(u)g'(u)]du$，

$$d^2[f(u)g(u)] = [f'(u)g(u) + f(u)g'(u)]d^2u + [f'(u)g(u) + f(u)g(u)]'du^2$$

$$= [f'(u)g(u) + f(u)g'(u)]d^2u + [f''(u)g(u) + 2f'(u)g'(u) + f(u)g''(u)]du^2$$ 。

(4) $d[\ln g(u)] = \dfrac{g'(u)}{g(u)}du$，

$$d^2[\ln g(u)] = \frac{g'(u)}{g(u)}d^2u + [\frac{g'(u)}{g(u)}]'du^2 = \frac{g'(u)}{g(u)}d^2u + \frac{g''(u)g(u) - (g'(u))^2}{g^2(u)}du^2$$ 。

(5) $d\left[\dfrac{f(u)}{g(u)}\right] = \dfrac{f'(u)g(u) - f(u)g'(u)}{g^2(u)}du$，

$$d^2\left[\frac{f(u)}{g(u)}\right]=\frac{f'(u)g(u)-f(u)g'(u)}{g^2(u)}d^2u+\left[\frac{f'(u)g(u)-f(u)g'(u)}{g^2(u)}\right]'du^2$$

$$=\frac{f'(u)g(u)-f(u)g'(u)}{g^2(u)}d^2u+$$

$$\frac{f''(u)g^2(u)-f(u)g(u)g''(u)-2f'(u)g'(u)g(u)+2f(u)(g'(u))^2}{g^3(u)}du^2\text{。}$$

12.利用数学归纳法证明：

$$\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}\text{。}$$

证　当 $n=1$ 时，$(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)}=(e^{\frac{1}{x}})'=e^{\frac{1}{x}}(\frac{1}{x})'=\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$，命题成立。假设 $n\le k$ 时命题都成立。则当 $n=k+1$ 时，

$$(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)}=\left[(x^ke^{\frac{1}{x}})'\right]^{(k)}=\left[kx^{k-1}e^{\frac{1}{x}}+x^ke^{\frac{1}{x}}(\frac{1}{x})'\right]^{(k)}$$

$$=k\left[x^{k-1}e^{\frac{1}{x}}\right]^{(k)}-\left[(x^{k-2}e^{\frac{1}{x}})^{(k-1)}\right]'=k\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}-\left[\frac{(-1)^{k-1}}{x^k}e^{\frac{1}{x}}\right]'$$

$$=k\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}-\left[k\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}+\frac{(-1)^{k-1}}{x^k}e^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})\right]=\frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}},$$

命题也成立。由数学归纳法，可知本命题对所有正整数都成立。

第五章　微分中值定理及其应用

习　题　5.1　微分中值定理

1．设$f'_+(x_0)>0$，$f'_-(x_0)<0$，证明x_0是$f(x)$的极小值点。

证　由$f'_+(x_0)>0$，可知当$\delta>0$足够小时，若$0<x-x_0<\delta$，则$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$，于是$f(x)-f(x_0)>0$；同理，由$f'_-(x_0)<0$，可知当$\delta>0$足够小时，若$-\delta<x-x_0<0$，则$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0$，于是也有$f(x)-f(x_0)>0$。从而命题得证。

2．（Darboux 定理）设$f(x)$在(a,b)上可导，$x_1,x_2\in(a,b)$。如果$f'(x_1)\cdot f'(x_2)<0$，证明在x_1和x_2之间至少存在一点ξ，使得$f'(\xi)=0$。

证　显然$x_1\neq x_2$，不妨设$x_1<x_2$。若$f'(x_1)>0$，则$f'(x_2)<0$，仿照习题 1 可证存在$x_1<x_3<x_4<x_2$，使得$f(x_1)<f(x_3)$，$f(x_2)<f(x_4)$，从而x_1,x_2都不是$f(x)$的最大值点，于是$f(x)$在$[x_1,x_2]$的最大值点$\xi\in(x_1,x_2)$，并且成立$f'(\xi)=0$。若$f'(x_1)<0$，则$f'(x_2)>0$，同样可证$f(x)$在$[x_1,x_2]$的最小值点$\xi\in(x_1,x_2)$，并且成立$f'(\xi)=0$。

3．　举例说明 Lagrange 中值定理的任何一个条件不满足时，定理结论就有可能不成立。

解　$[-1,1]$上的符号函数$\operatorname{sgn}(x)$在$x=0$不连续，所以 Lagrange 中值定理的条件不满足。而$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=1$，不存在$\xi\in(-1,1), f'(\xi)=1$。

$[-1,1]$上的绝对值函数$|x|$连续，但在$x=0$不可微，所以 Lagrange 中值

定理的条件不满足。而$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=0$，但$\forall\xi\in(-1,1),\xi\neq 0, f'(\xi)=\pm 1\neq 0$。

4. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可微。利用辅助函数

$$\psi(x)=\begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \end{vmatrix}$$

证明 Lagrange 中值定理，并说明$\psi(x)$的几何意义。

证 显然$\psi(a)=\psi(b)=0$，并且满足 Rolle 定理条件。由 Rolle 定理，在(a,b)内存在一点ξ，使得

$$\psi'(\xi)=\begin{vmatrix} 1 & f'(\xi) & 0 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \end{vmatrix}=f'(\xi)(b-a)-[f(b)-f(a)]=0,$$

所以 Lagrange 中值定理成立。

几何意义：以$(x,f(x)),(a,f(a)),(b,f(b))$顶点的三角形如果顶点逆时针排列，则$\psi(x)$就是三角形面积的两倍，否则$-\psi(x)$就是三角形面积的两倍。

5. 设函数$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，证明(a,b)内存在一点ξ，使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}。$$

证 令$F(x)=\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}(x-a)-(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f(x) \\ g(a) & g(x) \end{vmatrix}$，则$F(a)=F(b)=0$，由 Rolle 定理，在$(a,b)$内存在一点$\xi$，使得

$$F'(\xi)=\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}-(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}=0。$$

6. 设非线性函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，则在(a,b)上

至少存在一点η，满足

$$|f'(\eta)|>|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}|,$$

并说明它的几何意义。

证 由于$f(x)$是非线性函数，所以在(a,b)内至少存在一点ξ，使得$(\xi,f(\xi))$不在$(a,f(a)),(b,f(b))$的连线上。

假设$(\xi,f(\xi))$在$(a,f(a)),(b,f(b))$的连线的上方，则

$$\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>\frac{f(b)-f(\xi)}{b-\xi},$$

利用 Lagrange 中值定理，存在$\xi_1\in(a,\xi),\xi_2\in(\xi,b),$ 使得

$$f'(\xi_1)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>f'(\xi_2),$$

所以$\max\{|f'(\xi_1)|,|f'(\xi_2)|\}>|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}|$。当$(\xi,f(\xi))$在$(a,f(a)),(b,f(b))$的连线下方时同理可证。

几何意义：在$[a,b]$上连续、在(a,b)上可导的非线性函数，必定在某点切线斜率的绝对值大于$[a,b]$间割线斜率的绝对值。

7．求极限$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)$，其中$a\neq 0$为常数。

解 由 Lagrange 中值定理，$\dfrac{\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}}{\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1}}=\dfrac{1}{1+\xi^2}$，其中$\xi$位于$\dfrac{a}{n+1}$与$\dfrac{a}{n}$之间。当$n\to\infty$时，$\dfrac{1}{1+\xi^2}$趋于$1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{na}{n+1}\cdot\frac{\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)}{\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{na}{n+1}\cdot\frac{1}{1+\xi^2}\right)=a。$$

8． 用 Lagrange 公式证明不等式：

（1） $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$；

（2） $ny^{n-1}(x-y)<x^n-y^n<nx^{n-1}(x-y)\quad(n>1,\ x>y>0)$；

（3） $\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}\quad(b>a>0)$；

（4） $\mathrm{e}^x>1+x\quad(x>0)$.

证（1） $|\sin x-\sin y|=|\cos\xi\cdot(x-y)|\le|x-y|$。

（2） $x^n-y^n=n\xi^{n-1}(x-y)$, 其中 $x>\xi>y>0$。由 $x^{n-1}>\xi^{n-1}>y^{n-1}>0$ 得到

$$ny^{n-1}(x-y)<x^n-y^n<nx^{n-1}(x-y)\quad(n>1,\ x>y>0)。$$

（3） $\ln\dfrac{b}{a}=\ln b-\ln a=\dfrac{1}{\xi}(b-a)$，其中 $b>\xi>a>0$。由于 $\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{a}$，所以

$$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}。$$

（4） $\mathrm{e}^x-1=e^x-e^0=e^{\xi}(x-0)>x,\quad x>\xi>0$。

9． 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上定义，且对任何实数 x_1 和 x_2，满足

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le(x_1-x_2)^2,$$

证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为常数。

证 首先由 $|f(x_1)-f(x_2)|\le(x_1-x_2)^2$ 可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。对任意固定的 $x_2\in(a,b)$，$\lim\limits_{x_1\to x_2}\left|\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|\le\lim\limits_{x_1\to x_2}|x_1-x_2|=0$，故 $f'(x_2)=0$，再由 x_2 的任意性，得到 $f'(x)$ 在 (a,b) 上恒等于 0。所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为常数。

10． 证明恒等式

（1） $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2},\quad x\in[0,1]$；

（2） $3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi,\quad x\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$；

(3)　$2\arctan x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\pi$，　$x\in[1,+\infty)$.

证（1）令 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$，则

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\equiv 0,\forall x\in(0,1)\text{ 。}$$

由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，所以 $f(x)\equiv f(0)=\dfrac{\pi}{2}$。

（2）令 $f(x)=3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)$，注意到 $1-4x^2\ge 0,\forall x\in(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$，所以

$$f'(x)=-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3-12x^2}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}\equiv 0,\forall x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\text{ 。}$$

由于 $f(x)$ 在 $[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}]$ 连续，所以 $f(x)\equiv f(0)=3\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}=\pi$ 。

(3) 令 $f(x)=2\arctan x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$，注意到 $x^2-1>0,\forall x>1$，所以

$$f'(x)=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}}\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}\equiv 0,\forall x>1\text{ 。}$$

由于 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 连续，所以 $f(x)\equiv f(1)=2\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}=\pi$ 。

11．设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导。证明：若 (a,b) 中除至多有限个点有 $f'(x)=0$ 之外，都有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增加；同时举例说明，其逆命题不成立。

证 设 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 是 $f'(x)$ 全部的零点。则 $f(x)$ 在 $[x_i,x_{i+1}]$　$(i=0,1,\cdots,n-1)$ 上严格单调增加。从而，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增加。

构造函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0;\\ 3\cdot 2^{-(n+2)}+2^{-(n+2)}\cos(\dfrac{1}{x}-n)\pi, & \dfrac{1}{n+1}<x\le\dfrac{1}{n},n=1,2,\cdots.\end{cases}$$

由于$f(\frac{1}{n})=2^{-n}=f(\frac{1}{n}+)$， $f(x)$在$[0,1]$上连续。因为当$\frac{1}{n+1}<x<\frac{1}{n}$时，

$f'(x)=\frac{2^{-(n+2)}}{x^2}\sin(\frac{1}{x}-n)\pi>0$，所以$f(x)$在$[0,1]$严格单调增加。但$f'(\frac{1}{n})=0$，

所以$f'(x)$在$(0,1)$上有无限多个零点。

12． 证明不等式：

(1) $\frac{2}{\pi}x<\sin x<x, x\in(0,\frac{\pi}{2})$；　　(2) $3-\frac{1}{x}<2\sqrt{x},\quad x>1$；

(3) $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x,\quad x>0$;　　(4) $\tan x+2\sin x>3x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

(5) $\frac{1}{2^{p-1}}\leq x^p+(1-x)^p\leq 1,\quad x\in[0,1], (p>1)$；

(6) $\frac{\tan x}{x}>\frac{x}{\sin x},\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

证（1）令$f(x)=\frac{\sin x}{x}$， $x\in(0,\frac{\pi}{2})$，由于

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}<0,$$

可知$f(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$严格单调减少，所以$\frac{2}{\pi}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}<\frac{\sin x}{x}<\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，从而得到

$$\frac{2}{\pi}x<\sin x<x,\quad x\in(0,\frac{\pi}{2})。$$

（2）令$f(x)=2\sqrt{x}-(3-\frac{1}{x})$，则$f(1)=0$，

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}>0,\ x>1,$$

所以$f(x)$在$[1,+\infty)$严格单调增加，故$f(x)>0$，从而

$$3-\frac{1}{x}<2\sqrt{x},\quad x>1。$$

（3）令$f(x)=\ln(1+x)-(x-\frac{x^2}{2})$，则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}>0,\quad x>0\text{，}$$

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$严格单调增加，由$f(0)=0$知$f(x)>0,\forall x>0$，从而

$$\ln(1+x)>(x-\frac{x^2}{2}),\quad x>0\text{。}$$

令$g(x)=x-\ln(1+x)$，则

$$g'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0,\quad x>0\text{，}$$

所以$g(x)$在$(0,+\infty)$严格单调增加，由$g(0)=0$知$g(x)>0,\forall x>0$，从而

$$x>\ln(1+x),\quad x>0\text{。}$$

（4）令$f(x)=\tan x+2\sin x-3x$，则$\forall x\in[0,\frac{\pi}{2})$，

$$f'(x)=\sec^2 x+2\cos x-3\geq 3\sqrt[3]{\sec^2 x\cos x\cos x}-3=0\text{，}$$

等号仅在$x=0$成立，所以$f(x)$严格单调增加，从而$f(x)>0$，即

$$\tan x+2\sin x>3x\text{，}\quad x\in(0,\frac{\pi}{2})\text{。}$$

（5）令$f(x)=x^p+(1-x)^p$，则$f'(x)=p(x^{p-1}-(1-x)^{p-1})$在$(0,\frac{1}{2})$取负值，在$(\frac{1}{2},1)$取正值，即$f(x)$在$[0,\frac{1}{2}]$严格单调减少，在$[\frac{1}{2},1]$严格单调增加，所以$f(x)$在$x=\frac{1}{2}$取到最小值$\frac{1}{2^{p-1}}$。又$f(0)=f(1)=1$，所以$f(x)$在$x=0,1$取到最大值$1$，因而成立

$$\frac{1}{2^{p-1}}\leq x^p+(1-x)^p\leq 1\text{，}\quad x\in[0,1]\text{。}$$

（6）令$f(x)=\sin x\tan x-x^2$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$。则

$$f'(x)=\sin x+\sin x\sec^2 x-2x\text{，}\qquad f''(x)=\cos x+\frac{1}{\cos x}+\frac{2\sin^2 x}{\cos^3 x}-2\text{。}$$

显然$f''(x)>0$，由$f'(0)=0$，可知$f'(x)>0$。再由$f(0)=0$，得到$f(x)>0$，从而

$$\frac{\tan x}{x} > \frac{x}{\sin x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)。$$

13. 证明：在$(0,1)$上成立

（1）$(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$；

（2）$\frac{1}{\ln 2} - 1 < \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$。

证 （1）令$f(x) = x^2 - (1+x)\ln^2(1+x)$，则

$$f'(x) = 2x - \ln^2(1+x) - 2\ln(1+x),$$

$$f''(x) = 2 - 2\frac{\ln(1+x)}{1+x} - \frac{2}{1+x} = \frac{2(x - \ln(1+x))}{1+x} > 0, \quad x \in (0,1)。$$

由$f'(0) = 0$，可知$f'(x) > 0$，再由$f(0) = 0$，得到$f(x) > 0$，即

$$(1+x)\ln^2(1+x) < x^2, x \in (0,1)。$$

（2）令$f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$，由（1），

$$f'(x) = \frac{(1+x)\ln^2(1+x) - x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)} < 0, \quad x \in (0,1),$$

即$f(x)$在$(0,1)$上严格单调减少。再由$f(1) = \frac{1}{\ln 2} - 1$与

$f(0+) = \lim\limits_{x \to 0+} \frac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)} = \lim\limits_{x \to 0+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$，得到

$$\frac{1}{\ln 2} - 1 < \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{1}{2}, \quad x \in (0,1)。$$

14. 对于每个正整数n（$n \ge 2$），证明方程

$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x = 1$$

在$(0,1)$内必有唯一的实根x_n，并求极限$\lim\limits_{n \to \infty} x_n$。

证 设$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1$，则当$x \in (0,1)$时，

$$f_n'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 2x + 1 > 0,$$

所以$f_n(x)$在$(0,1)$严格单调增加，且当$n\ge 2$时，$f_n(0)=-1, f_n(1)=n-1>0$，所以$f_n(x)$在$(0,1)$内必有唯一的实根x_n。显然$\{x_n\}$单调减少有下界，所以必定收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$0\le a<1$，且当$n\ge 2$时，$0<x_n\le x_2<1$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^n=0$。于是有

$$1=\lim_{n\to\infty}(x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n^2+x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n}=\frac{a}{1-a},$$

解得$a=\dfrac{1}{2}$，即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}。$$

15．设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$上可导，且$f(0)=f(1)=0$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$。证明：

（1）存在$\xi\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得$f(\xi)=\xi$；

（2）对于任意实数λ，必存在$\eta\in(0,\xi)$，使得

$$f'(\eta)-\lambda[f(\eta)-\eta]=1。$$

证（1）令$F(x)=f(x)-x$，则$F(x)$在$[0,1]$上连续，且有

$$F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}>0, F(1)=-1<0,$$

所以存在$\xi\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得$F(\xi)=0$，即$f(\xi)=\xi$。

（2）令$G(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$，则$G(0)=G(\xi)=0$，应用 Rolle 定理，必存在$\eta\in(0,\xi)$，使得

$$G'(\eta)=e^{-\lambda\eta}[f'(\eta)-1]-\lambda e^{-\lambda\eta}[f(\eta)-\eta]=0,$$

于是成立$f'(\eta)-\lambda[f(\eta)-\eta]=1$。

16．设函数$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，且$g'(x)\ne 0\ (x\in(a,b))$。分别利用辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]$$

和

$$\psi(x)=\begin{vmatrix} g(x) & f(x) & 1 \\ g(a) & f(a) & 1 \\ g(b) & f(b) & 1 \end{vmatrix},$$

证明 Cauchy 中值定理，并说明$\varphi(x)$和$\psi(x)$的几何意义。

证 由于$\varphi(a)=\varphi(b)=0$，应用 Rolle 定理，必存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$\varphi'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0,$$

于是 Cauchy 中值定理成立。

$\varphi(t)$的几何意义：参数方程$\begin{cases}x=g(t)\\ y=f(t)\end{cases}$所表示的曲线上点的纵坐标与连接点$(g(a),f(a))$和点$(g(b),f(b))$的直线段上点的纵坐标之差。

由于$\psi(a)=\psi(b)=0$，应用 Rolle 定理，必存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$\psi'(\xi)=\begin{vmatrix}g'(\xi) & f'(\xi) & 0\\ g(a) & f(a) & 1\\ g(b) & f(b) & 1\end{vmatrix}=g'(\xi)[f(a)-f(b)]-f'(\xi)[g(a)-g(b)]=0,$$

于是 Cauchy 中值定理成立。

$\psi(x)$的几何意义：其绝对值等于由$(g(x),f(x)),(g(a),f(a)),(g(b),f(b))$为顶点的三角形面积的两倍，如果三顶点按照逆时针方向排列，则$\psi(x)$的符号为正，否则为负。

17． 设$a,b>0$，$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，证明存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)\text{。}$$

证 令$g(x)=x^2$，对$f(x),g(x)$应用 Cauchy 中值定理，可知必存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\xi)}{2\xi},$$

从而

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)\text{。}$$

18． 设$a,b>0$，证明存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$ae^b-be^a=(1-\xi)e^{\xi}(a-b)\text{。}$$

证 对于$f(x)=\dfrac{e^x}{x},g(x)=\dfrac{1}{x}$应用 Cauchy 中值定理，可知必存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{\dfrac{e^b}{b}-\dfrac{e^a}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=\frac{\dfrac{e^{\xi}(\xi-1)}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}}=(1-\xi)e^{\xi},$$

整理后即得到

$$ae^b-be^a=(1-\xi)e^{\xi}(a-b)\text{。}$$

19． 设$f(x)$在$[a,b]$上连续（$ab>0$），在(a,b)上可导，证明存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix}=\xi f'(\xi)-f(\xi)\text{。}$$

证 对$\frac{f(x)}{x}$与$\frac{1}{x}$应用 Cauchy 中值定理，可知必定存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\frac{\frac{f'(\xi)\xi-f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}=-[f'(\xi)\xi-f(\xi)],$$

于是成立

$$\frac{af(b)-bf(a)}{b-a}=f'(\xi)\xi-f(\xi),$$

整理后即可得命题成立。

20．设$f(x)$在$[1,+\infty)$上连续，在$(1,+\infty)$上可导，已知函数$e^{-x}f'(x)$在$(1,+\infty)$上有界，证明函数$e^{-x}f(x)$在$(1,+\infty)$上也有界。

证 首先$e^{-x}f(x)$在$[1,2]$上连续，所以有界。当$x>2$时，由 Cauchy 中值定理，

$$|e^{-x}f(x)|<\frac{|f(x)-f(1)|}{e^x}+\frac{|f(1)|}{e^2}<\frac{|f(x)-f(1)|}{e^x-e^1}+\frac{|f(1)|}{e^2}=\left|e^{-\xi}f'(\xi)\right|+\frac{|f(1)|}{e^2}$$

也是有界的，所以$e^{-x}f(x)$在$(1,+\infty)$上有界。

21． 设$f'(x)$在$(0,a]$上连续，且存在有限极限$\lim\limits_{x\to0+}\sqrt{x}f'(x)$，证明$f(x)$在$(0,a]$上一致连续。

证 由于

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{2\sqrt{\xi}}}=2\sqrt{\xi}f'(\xi),$$

所以只要证明$\sqrt{x}f'(x)$在$(0,a]$上有界就可以了。显然$\sqrt{x}f'(x)$在$(0,a]$连续，且极限$\lim\limits_{x\to0+}\sqrt{x}f'(x)$存在而且有限，所以$\sqrt{x}f'(x)$在$(0,a]$上有界。

22. 设$f(x)$在$x=0$的某邻域内有n阶导数，且$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$，用 Cauchy 中值定理证明

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}\quad(0<\theta<1)\text{。}$$

证 反复使用 Cauchy 中值定理，

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f(x)-f(0)}{x^n-0^n}=\frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{\,n-1}}=\frac{f'(\xi_1)-f'(0)}{n\xi_1^{\,n-1}-n0^{n-1}}=\frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)\xi_2^{\,n-2}}$$

$$=\cdots=\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n!\xi_{n-1}}=\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})-f^{(n-1)}(0)}{n!(\xi_{n-1}-0)}=\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!},\quad \xi_n\in(0,x),$$

所以存在$\theta\in(0,1)$，使得$\xi_n=\theta x$，命题成立。

23． 证明不等式：

(1) $\dfrac{x^n+y^n}{2}\ge\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n,\ x,y>0,n>1$；　　(2) $\dfrac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}},\quad x\ne y$.

证（1）设 $f(x)=x^n$，则当 $n>1$ 时

$$f'(x)=nx^{n-1}$$
$$f''(x)=n(n-1)x^{n-2}>0,\quad \forall x>0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格下凸，因而

$$\frac{x^n+y^n}{2}\ge\left(\frac{x+y}{2}\right)^n,\ x,y>0\text{。}$$

（2）设 $f(x)=e^x$，则

$$f'(x)=f''(x)=e^x>0,\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格下凸，因而

$$\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}},\quad x\ne y\text{。}$$

24. （Jensen 不等式）设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续下凸函数，证明对于任意 $x_i\in[a,b]$ 和 $\lambda_i>0$ （$i=1,2,\cdots,n$），$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，成立

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)\text{。}$$

证 应用数学归纳法。当 $k=2$ 时，由下凸函数定义知 Jensen 不等式成立。现假设当 $k=n-1$ 时 Jensen 不等式成立，则当 $k=n$ 时，

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)=f\left((\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i)\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i}+\lambda_n x_n\right)$$

$$\le\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\right)f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i}\right)+\lambda_n f(x_n)$$

$$\le\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\right)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i}f(x_i)+\lambda_n f(x_n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)\text{。}$$

所以 Jensen 不等式对一切 n 成立。

25. 利用上题结论证明：对于正数 a,b,c 成立

$$(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}\le a^a b^b c^c\text{。}$$

证 设 $f(x)=x\ln x$，则

$$f'(x)=1+\ln x,$$
$$f''(x)=\frac{1}{x}>0,\quad \forall x>0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格下凸，因而

$$\frac{a+b+c}{3}\ln\frac{a+b+c}{3}\le\frac{a\ln a+b\ln b+c\ln c}{3},\quad \forall a,c,b>0.$$

利用平均值不等式$\sqrt[3]{abc}\le\frac{a+b+c}{3}$, $\forall a,b,c>0$，得到

$$\frac{a+b+c}{3}\ln\sqrt[3]{abc}\le\frac{a+b+c}{3}\ln\frac{a+b+c}{3}\le\frac{a\ln a+b\ln b+c\ln c}{3},$$

即

$$(a+b+c)\ln\sqrt[3]{abc}=\ln(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}\le a\ln a+b\ln b+c\ln c=\ln(a^a b^b c^c),$$

命题得证。

26. 设$f(x)$在$(a,+\infty)$上可导，并且$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$，证明$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$。

证 由$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$，可知$\forall\varepsilon>0,\exists X'>0,\forall x>X'$，成立$|f'(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$。取定$x_0\ge X'$，则$\exists X>x_0,\forall x>X$，成立$\left|\frac{f(x_0)}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$，应用 Lagrange 中值定理，则有

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\left|\frac{f(x_0)}{x}+\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\frac{x-x_0}{x}\right|\le\left|\frac{f(x_0)}{x}\right|+\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\cdot\left|\frac{x-x_0}{x}\right|$$

$$=\left|\frac{f(x_0)}{x}\right|+\left|f'(\xi)\right|\cdot\left|\frac{x-x_0}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

所以$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$成立。

27. 设$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)二阶可导，证明存在$\eta\in(a,b)$，成立

$$f(b)+f(a)-2f(\frac{a+b}{2})=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 f''(\eta)。$$

证 设$g(x)=f(x)-f(x-\frac{b-a}{2})$。由于

$$g(\frac{a+b}{2})=f(\frac{a+b}{2})-f(a),\quad g(b)=f(b)-f(\frac{a+b}{2}),$$

在区间$\left[\frac{a+b}{2},b\right]$上对$g(x)$应用 Lagrange 中值定理，即得到

$$f(b)+f(a)-2f(\frac{a+b}{2})=g(b)-g(\frac{a+b}{2})=g'(\xi)(\frac{b-a}{2})$$

$$=[f'(\xi)-f'(\xi-\frac{b-a}{2})](\frac{b-a}{2})=f''(\eta)(\frac{b-a}{2})^2。$$

习　题　5.2　L'Hospital 法则

1．对于

$$\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty \text{ 或 } -\infty$$

的情况证明 L'Hospital 法则。

证　设 $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$，则 $\forall G>0,\exists\delta>0,\forall x\in(a,a+\delta),\frac{f'(x)}{g'(x)}>G+1$。

首先考虑 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a+}g(x)=0$ 的情况，补充定义 $f(0)=g(0)=0$，则 $f(x),g(x)$ 在 $[a,d]$ 连续，满足 Cauchy 中值定理条件。当 $x\in(a,a+\delta)$ 时

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}>G,\quad a<\xi<x<a+\delta,$$

所以

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty。$$

再考虑 $\lim\limits_{x\to a+}g(x)=\infty$ 的情况，任取 $x_0\in(a,a+\delta)$，再取 $0<\delta_1<x_0-a$，使得当 $x\in(a,a+\delta_1)$ 时，$\max\{|\frac{g(x_0)}{g(x)}|,|\frac{f(x_0)}{g(x)}|\}\le\frac{1}{2}$，于是由

$$\frac{f(x)}{g(x)}=[1-\frac{g(x_0)}{g(x)}]\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}+\frac{f(x_0)}{g(x)}=[1-\frac{g(x_0)}{g(x)}]\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}+\frac{f(x_0)}{g(x)},$$

可得当 $x\in(a,a+\delta_1)$ 时

$$|\frac{f(x)}{g(x)}|\ge\frac{1}{2}(G+1)-\frac{1}{2}=\frac{G}{2},$$

所以

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty。$$

$\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=-\infty$ 的情况即为 $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{-f'(x)}{g'(x)}=+\infty$，所以 L'Hospital 法则也成立。

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}$；

(4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln(\tan 7x)}{\ln(\tan 2x)}$；

(6) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan 3x}{\tan x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\operatorname{arccot} x}$；

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}$；

(9) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$；

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$；

(11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}$；

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan x-\sin^2 x}{x^4}$；

(13) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x$；

(14) $\lim\limits_{x\to 0}x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$；

(15) $\lim\limits_{x\to \pi}(\pi-x)\tan\dfrac{x}{2}$；

(16) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$；

(17) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$；

(18) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$；

(19) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$；

(20) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-(-e^{-x})}{\cos x}=\dfrac{2}{1}=2$。

(2) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{3\cos 3x}{5\sec^2 5x}=\dfrac{-3}{5}=-\dfrac{3}{5}$。

(3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cot x}{2(\pi-2x)(-2)}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{-\csc^2 x}{-4(-2)}=-\dfrac{1}{8}$。

(4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{m}{n}x^{m-n}=\dfrac{m}{n}a^{m-n}$ 。

(5) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln(\tan 7x)}{\ln(\tan 2x)}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\cot 7x\sec^2 7x\cdot 7}{\cot 2x\sec^2 2x\cdot 2}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{7\sin 2x\cos 2x}{2\sin 7x\cos 7x}$

$=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{7\sin 4x}{2\sin 14x}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{28\cos 4x}{28\cos 14x}=1$ 。

(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan 3x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 3x}{\sin x}\cdot\dfrac{\cos x}{\cos 3x}=\dfrac{\sin\frac{3\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\sin x}{-3\sin 3x}=\dfrac{1}{3}$ 。

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\operatorname{arc}\cot x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{[\ln(1+x)]'-(\ln x)'}{-\dfrac{1}{1+x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}(-1-x^2)[\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x^2}{x(1+x)}=1$ 。

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{2x}{1+x^2}}{\sec x\tan x+\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\dfrac{2}{1+x^2}\cdot\dfrac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x}=1\cdot 2\cdot\dfrac{1}{2}=1$ 。

(9) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x\ln x+x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\ln x+1+1}=\dfrac{1}{2}$ 。

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-\sin x}{x^2}\right)\cdot\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos x}{2x}\right)\cdot 1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2}=0$ 。

(11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}}=1$ 。

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan x-\sin^2 x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x\cos x}{x^3}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x+\sin^2 x}{3x^2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 x}{3x^2}\cdot 1=\frac{2}{3}\text{。}$$

(13) $\lim\limits_{x\to0} x\cot 2x=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin 2x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\cos 2x=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2\cos 2x}\cdot 1=\dfrac{1}{2}$。

(14) $\lim\limits_{x\to0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{e^y}{y}=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{e^y}{1}=+\infty$。

(15) $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)\tan\dfrac{x}{2}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{(\pi-x)}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to\pi}\sin\dfrac{x}{2}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{-1}{-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}\cdot 1=2$。

(16) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{1+x^2}=-\frac{2}{\pi},$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x=e^{-\frac{2}{\pi}}\text{。}$$

(17) $\lim\limits_{x\to0+}\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{-\ln x}{\cot x}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{(-\frac{1}{x})}{(-\csc^2 x)}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\sin^2 x}{x}=0$，

所以

$$\lim_{x\to0+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}=1\text{。}$$

(18) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}$，

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}\text{。}$$

(19) $\lim\limits_{x\to0+}\ln\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\ln(-\ln x)}{\csc x}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\frac{1}{(-\ln x)(-x)}}{(-\csc x)(\cot x)}$

$$=\lim_{x\to 0+}(-\frac{\sin x}{x})(\frac{\tan x}{\ln x})=0,\quad (\lim_{x\to 0+}\frac{\tan x}{\ln x}=\lim_{x\to 0+}\frac{(\tan x)'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{\cos^2 x}=0)$$

所以

$$\lim_{x\to 0+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=e^0=1\text{。}$$

（20）$\lim_{x\to 1}\ln(x^{\frac{1}{1-x}})=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{(-1)}=-1$，

所以

$$\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=e^{-1}\text{。}$$

3. 说明不能用 L'Hospital 法则求下列极限：

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$；

(2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$；

(3) $\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+1)\sin x}{\ln(1+\sin\frac{\pi}{2}x)}$；

(4) $\lim_{x\to 1}\frac{\sin\frac{\pi}{2}x+\mathrm{e}^{2x}}{x}$.

解（1）因为当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{\frac{d}{dx}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{\frac{d}{dx}\sin x}=\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ 极限不存在，所以

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ 不能用 L'Hospital 法则求极限。

事实上，$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}(\frac{x}{\sin x})\cdot\lim_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x})=1\cdot 0=0$，极限存在。

（2）因为当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{(x+\sin x)'}{(x-\sin x)'}=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$ 极限不存在，所以 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$ 不能用 L'Hospital 法则求极限。

事实上，$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\sin x}{x}}=1$，极限存在。

（3）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^2+1)\sin x}{\ln(1+\sin\frac{\pi}{2}x)}$不是$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{*}{\infty}$型的待定型，所以不能用 L'Hospital 法则求极限。事实上，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^2+1)\sin x}{\ln(1+\sin\frac{\pi}{2}x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}(x^2+1)\sin x}{\lim\limits_{x\to1}\ln(1+\sin\frac{\pi}{2}x)}=\dfrac{2\sin1}{\ln2}$。

（4）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}x+e^{2x}}{x}$不是$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{*}{\infty}$型的待定型，所以不能用 L'Hospital 法则求极限。事实上，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}x+e^{2x}}{x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}(\sin\frac{\pi}{2}x+e^{2x})}{\lim\limits_{x\to1}x}=\dfrac{1+e^2}{1}=1+e^2$。

4. 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

其中$g(0)=0$，$g'(0)=0$，$g''(0)=10$。求$f'(0)$。

解 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g'(x)-g'(0)}{2(x-0)}=\dfrac{1}{2}g''(0)=5$。

5. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0,\\ e^{-\frac{1}{2}}, & x\le0,\end{cases}$$

在$x=0$处的连续性。

解 显然函数$f(x)$在$x=0$处左连续。下面考虑$f(x)$在$x=0$处的右连续性。当$x>0$时，

$$\ln f(x)=\frac{1}{x}\ln\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}=\frac{1}{x}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-\ln e\right]=\frac{\ln(1+x)-x}{x^2},$$

于是

$$\lim_{x\to0+}\ln f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim_{x\to0+}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\lim_{x\to0+}\frac{1}{2(1+x)}=-\frac{1}{2},$$

由对数函数的连续性，$\lim_{x\to0+}f(x)=e^{-\frac{1}{2}}=f(0)$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右连续。

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

6．设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$，且 $f'(0)$ 存在，证明 $\lim_{x\to0+}x^{f(x)}=1$。

证 $\lim_{x\to0+}\ln x^{f(x)}=\lim_{x\to0+}[f(x)\ln x]=\lim_{x\to0+}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\cdot(x\ln x)\right]=f'(0)\cdot0=0$，

所以

$$\lim_{x\to0+}x^{f(x)}=e^0=1。$$

7．设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导，且 $\lim_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=k$，证明 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=k$。

证 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^xf(x)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^xf(x)+e^xf'(x)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=k$。

习　题　5.3　Taylor 公式和插值多项式

1．由 Lagrange 中值定理知

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\theta(x)x}，\quad 0<\theta(x)<1，$$

证明：$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=1/2$。

证　由$\theta(x)=\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$，取极限即得到

$$\lim_{x\to 0}\theta(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\cdot\frac{x}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{1+x}}=(\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)})\cdot 1=\frac{1}{2}。$$

2．设$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\dfrac{1}{2!}f''(x)h^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)h^n$，$(0<\theta<1)$，

且$f^{(n+1)}(x)\neq 0$，证明：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$。

证　$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\dfrac{1}{2!}f''(x)h^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)h^n$

$$=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2!}f''(x)h^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)h^{n+1}+\circ(h^{n+1})，$$

于是

$$\theta\cdot\frac{f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)}{\theta h}=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x)+\circ(1)。$$

令$h\to 0$，得到

$$\lim_{h\to 0}\theta\cdot f^{(n+1)}(x)=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x)，$$

再由$f^{(n+1)}(x)\neq 0$，两边消去$f^{(n+1)}(x)$，即得到$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$。

3．设$f(x)=\sqrt[3]{x}$，取结点为$x=1$、1.728、2.744，求$f(x)$的二次插值多项式$p_2(x)$及其余项的表达式，并计算$p_2(2)$（$\sqrt[3]{2}=1.2599210\cdots$）。

解 $f(1)=1, f(1.728)=1.2, f(2.744)=1.4$，由 Lagrange 插值公式

$$
\begin{aligned}
f(x) &\approx p_2(x) \\
&= 1\cdot\frac{(x-1.728)(x-2.744)}{(1-1.728)(1-2.744)} + 1.2\cdot\frac{(x-1)(x-2.744)}{(1.728-1)(1.728-2.744)} + 1.4\cdot\frac{(x-1)(x-1.728)}{(2.744-1)(2.744-1.728)} \\
&\approx 0.7876(x-1.728)(x-2.744) - 1.6224(x-1)(x-2.744) + 0.7901(x-1)(x-1.728) \\
&= -0.04465x^2+0.3965x+0.6481。
\end{aligned}
$$

$f'''(x)=\frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}$， 余项 $r_2(x)=\frac{5}{81\xi^{\frac{8}{3}}}(x-1)(x-1.728)(x-2.744)$。

$p_2(2)\approx 1.2626$。

4．设 $f(x)=2^x$，取结点为 $x=-1$、0、1，求 $f(x)$ 的二次插值多项式 $p_2(x)$ 及其余项的表达式，并计算 $p_2\left(\frac{1}{3}\right)$。请与上题的计算结果相比较并分析产生差异的原因。

解 $f(-1)=0.5, f(0)=1, f(1)=2$，由 Lagrange 插值公式

$$
\begin{aligned}
f(x) &\approx p_2(x) \\
&= 0.5\cdot\frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} + 1\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} + 2\cdot\frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} \\
&= 0.25x(x-1)-(x-1)(x+1)+(x+1)x \\
&= 0.25x^2+0.75x+1。
\end{aligned}
$$

$f'''(x)=\ln^3 2\cdot 2^x$， 余项 $r_n(x)=\frac{\ln^3 2}{6}2^{\xi}(x+1)x(x-1)$。

$p_2(\frac{1}{3})\approx 1.2778$。

与上题相比，本题误差较大的原因是 2 不在所取的三点 $x=-1$、0、1 之间，而上题 2 在所取的三点 $x=1$、1.728、2.744 之间，因而误差较小。

5．设 $f(x)$ 在若干个测量点处的函数值如下：

x	1.4	1.7	2.3	3.1

$f(x)$	65	58	44	36

试求 $f(2.8)$ 的近似值。

解　由 Lagrange 插值公式

$$
\begin{aligned}
& f(x) \approx p_3(x) \\
& = 65 \cdot \frac{(x-1.7)(x-2.3)(x-3.1)}{(1.4-1.7)(1.4-2.3)(1.4-3.1)} + 58 \cdot \frac{(x-1.4)(x-2.3)(x-3.1)}{(1.7-1.4)(1.7-2.3)(1.7-3.1)} \\
& +44 \cdot \frac{(x-1.4)(x-1.7)(x-3.1)}{(2.3-1.4)(2.3-1.7)(2.3-3.1)} + 3.6 \cdot \frac{(x-1.4)(x-1.7)(x-2.3)}{(3.1-1.4)(3.1-1.7)(3.1-2.3)},
\end{aligned}
$$

$f(2.8) \approx p_3(2.8) \approx 36.647$ 。

6．若 h 是小量，问如何选取常数 a、b、c，才能使得

$af(x+h)+bf(x)+cf(x-h)$ 与 $f''(x)$ 近似的阶最高?

解 $af(x+h)+bf(x)+cf(x-h)$

$$
\begin{aligned}
& = a[f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2]+bf(x)+c[f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2]+o(h^2) \\
& = (a+b+c)f(x)+(a-c)f'(x)h+\frac{1}{2}(a+c)f''(x)h^2+o(h^2),
\end{aligned}
$$

得到方程组 $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a-c=0 \\ a+c=2 \end{cases}$ ，解之得到 $a=c=1, b=-2$ 。

7．将插值条件取为 $n+1$ 个结点上的函数值和一阶导数值，即

$p_n(x)$ 满足

$$
\begin{cases} p_n(x_i)=f(x_i) \\ p_n'(x_i)=f'(x_i) \end{cases}, \qquad i=0,1,2,\cdots,n
$$

的插值多项式称为 **Hermite** 插值多项式, 在微分方程数值求解等研究领域中具有重要作用。它可以取为

$$
p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[f(x_k)q_k^{(0)}(x)+f'(x_k)\,q_k^{(1)}(x)\right],
$$

这里，$\{q_k^{(0)}(x), q_k^{(1)}(x)\}_{k=0}^{n}$ 是满足条件

$$q_k^{(0)}(x_i)=\delta_{ik},\quad [q_k^{(0)}]'(x_i)=0,\qquad i,\ k=0,1,2,\cdots,n$$

和

$$q_k^{(1)}(x_i)=0,\quad [q_k^{(1)}]'(x_i)=\delta_{ik},\qquad i,\ k=0,1,2,\cdots,n$$

的基函数。试仿照 Lagrange 插值多项式的情况构造$\{q_k^{(0)}(x),q_k^{(1)}(x)\}_{k=0}^n$。

解　显然当$i\neq k$时，$q_k^{(0)}(x_i)=[q_k^{(0)}]'(x_i)=0,\ q_k^{(0)}(x_k)=1,[q_k^{(0)}]'(x_k)=0$，设 $q_k^{(0)}(x)=\left[\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(\frac{x-x_i}{x_k-x_i})^2\right][1-c(x-x_k)]$，由$[q_k^{(0)}]'(x_k)=\sum\limits_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}\frac{2}{x_k-x_i}-c=0$解出$c$，得到

$$q_k^{(0)}(x)=\left[\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(\frac{x-x_i}{x_k-x_i})^2\right][1-(\sum_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}\frac{2}{x_k-x_i})(x-x_k)],\quad k=0,1,2,\cdots,n；$$

同理可得到

$$q_k^{(1)}(x)=\left[\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(\frac{x-x_i}{x_k-x_i})^2\right](x-x_k)\qquad k=0,1,2,\cdots,n 。$$

习　题　5.4　函数的 Taylor 公式及其应用

1．求下列函数在$x=0$处的 Taylor 公式（展开到指定的n次）：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$，$n=4$；　　(2) $f(x)=\cos(x+\alpha)$，$n=4$；

(3) $f(x)=\sqrt{2+\sin x}$，$n=3$；　　(4) $f(x)=\mathrm{e}^{\sin x}$，$n=4$；

(5) $f(x)=\tan x$，$n=5$；　　(6) $f(x)=\ln(\cos x)$，$n=6$；

(7) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，$n=4$　　(8) $f(x)=\begin{cases}\ln\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，$n=4$

(9) $f(x)=\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}$，$n=3$.

解（1）$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$

$$=1+\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}(-x)+\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\2\end{pmatrix}(-x)^2+\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\3\end{pmatrix}(-x)^3+\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\4\end{pmatrix}(-x)^4+\circ(x^4)$$

$$=1+\frac{1}{3}x+\frac{4}{2\cdot 9}x^2+\frac{28}{6\cdot 27}x^3+\frac{280}{24\cdot 81}x^4+\circ(x^4)$$
$$=1+\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2+\frac{14}{81}x^3+\frac{35}{243}x^4+\circ(x^4)\text{。}$$

（2）$f(x)=\cos(x+\alpha)=\cos x\cos\alpha-\sin x\sin\alpha$

$$=(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4))\cos\alpha-(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4))\sin\alpha$$

$$=\cos\alpha-\sin\alpha\cdot x-\frac{\cos\alpha}{2!}x^2+\frac{\sin\alpha}{3!}x^3+\frac{\cos\alpha}{4!}x^4+o(x^4)\text{。}$$

（3）$f(x)=\sqrt{2+\sin x}=\sqrt{2(1+\dfrac{\sin x}{2})}=\sqrt{2}[1+\dfrac{1}{2}(x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3))]^{\frac{1}{2}}$

$$=\sqrt{2}[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))^2+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{8}(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))^3]$$

$$=\sqrt{2}[1+\frac{x}{4}-\frac{x^3}{24}-\frac{x^2}{32}+\frac{x^3}{128}+o(x^3)]=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{\sqrt{2}}{32}x^2-\frac{13\sqrt{2}}{384}x^3+o(x^3)\text{。}$$

(4) $f(x)=\mathrm{e}^{\sin x}=\mathrm{e}^{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}$

$$=1+(x-\frac{x^3}{6})+\frac{1}{2}(x-\frac{x^3}{6})^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$$

$$=1+(x-\frac{x^3}{6})+\frac{1}{2}(x^2-\frac{x^4}{3})+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$$

$$=1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\text{。}$$

$-\frac{1}{24}+\frac{1}{4}x$

(5) $f(x)=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$=(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5))(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5))^{-1}$$

$$=(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5))(1+(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24})+(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24})^2+o(x^5))$$

$$=(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120})+(x-\frac{x^3}{6})\frac{x^2}{2}+x\cdot\frac{5x^4}{24}+o(x^5)$$

$$=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)\text{。}$$

(6) $f(x)=\ln(\cos x)=\ln(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^6))$

$$=(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720})-\frac{1}{2}(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24})^2+\frac{1}{3}(-\frac{x^2}{2})^3+o(x^6)$$

$$=(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720})-\frac{1}{2}(\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{24})-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^6}{8}+o(x^6)$$

$$=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o(x^6)\text{。}$$

$\frac{1}{720}+\frac{1}{48}-\frac{1}{24}$

(7) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

$$=[1+(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}+o(x^4))]^{-1}$$

$$=1-(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120})+(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24})^2-(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6})^3+(\frac{x}{2})^4+o(x^4)$$

$$=1-(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120})+(\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{6}+\frac{5x^4}{72})-(\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{8})+\frac{x^4}{16}+o(x^4)$$

$=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{720}x^4+o(x^4)$。

（8） $f(x)=\ln(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4))=(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120})-\frac{1}{2}(-\frac{x^2}{6})^2+o(x^4)$

$=-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}+o(x^4)$。

（9） $f(x)=\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}=[1+(-2x+x^3)]^{\frac{1}{2}}-[1+(-3x+x^2)]^{\frac{1}{3}}$

$=[1+\frac{1}{2}(-2x+x^3)-\frac{1}{8}(-2x)^2+\frac{1}{16}(-2x)^3+o(x^3)]$

$-[1+\frac{1}{3}(-3x+x^2)-\frac{1}{9}(-3x+x^2)^2+\frac{5}{81}(-3x)^3+o(x^3)]$

$=(1-x-\frac{1}{2}x^2)-(1-x-\frac{2}{3}x^2-x^3)+o(x^3)$

$=\frac{1}{6}x^2+x^3+o(x^3)$。

2． 求下列函数在指定点处的 Taylor 公式：

（1） $f(x)=-2x^3+3x^2-2$， $x_0=1$ （2） $f(x)=\ln x$， $x_0=\mathrm{e}$；

（3） $f(x)=\ln x$；$x_0=1$ （4） $f(x)=\sin x$， $x_0=\frac{\pi}{6}$；

（5） $f(x)=\sqrt{x}$，$x_0=2$．

解（1） $f(x)=-2x^3+3x^2-2=-2[(x-1)+1]^3+3[(x-1)+1]^2-2$

$=[-2(x-1)^3-6(x-1)^2-6(x-1)-2]+[3(x-1)^2+6(x-1)+3]-2$

$=-1-3(x-1)^2-2(x-1)^3$。

（2） $f(x)=\ln x=\ln[(x-e)+e]=\ln e+\ln(1+\frac{x-e}{e})$

$=1+\frac{1}{e}(x-e)-\frac{1}{2e^2}(x-e)^2+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{ne^n}(x-e)^n+\circ\left((x-e)^n\right)$。

（3） $f(x)=\ln x=\ln(1+(x-1))$

$=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n+\circ\left((x-1)^n\right)$。

千

(4) $f(x)=\sin x$， $f^{(n)}(x_0)=\sin(x_0+\dfrac{n\pi}{2})$，

$$f(x)=f(\frac{\pi}{6})+f'(\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{6})+\frac{f''(\frac{\pi}{6})}{2!}(x-\frac{\pi}{6})^2+\frac{f'''(\frac{\pi}{6})}{3!}(x-\frac{\pi}{6})^3+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(\frac{\pi}{6})}{n!}(x-\frac{\pi}{6})^n+o\left((x-\frac{\pi}{6})^n\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{4}(x-\frac{\pi}{6})^2-\frac{\sqrt{3}}{12}(x-\frac{\pi}{6})^3+\cdots+\frac{1}{n!}\sin(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{6})^n$$

$$+o\left((x-\frac{\pi}{6})^n\right)。$$

(5) $f(x)=\sqrt{x}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\dfrac{x-2}{2}}$

$$=\sqrt{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}(x-2)-\frac{1}{16\sqrt{2}}(x-2)^2+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^{2n-\frac{1}{2}}n!}(x-2)^n$$

$$+\circ\left((x-2)^n\right)。$$

3. 通过对展开式及其余项的分析，说明用

$$\ln 2=\ln\frac{1+x}{1-x}\bigg|_{x=\frac{1}{3}}\approx 2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)\bigg|_{x=\frac{1}{3}}$$

比用

$$\ln 2=\ln(1+x)\big|_{x=1}\approx\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)\bigg|_{x=1}$$

效果好得多的两个原因。

解 利用第一个展开式计算时是用 $x=\dfrac{1}{3}$ 代入，利用第二个展开式计算时是用 $x=1$ 代入，显然第一个展开式的通项（或余项）趋于零的速度快，而第二个展开式的通项（或余项）趋于零的速度相对较慢，所以在指定精度的条件下，利用第一个展开式计算 $\ln 2$ 的值比利用第二个展开式计算量小，效果好。

另外可以通过比较两者的误差来说明两种方法的优劣：

由

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi_1)^{2n+1}},$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{k=1}^{2n}\frac{x^k}{k}-\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1-\xi_2)^{2n+1}},$$

可知利用第一个展开式计算前n项之和，余项为

$$r_{2n}(x)=\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}\left[\frac{1}{(1+\xi_1)^{2n+1}}+\frac{1}{(1-\xi_2)^{2n+1}}\right]，$$ 其中ξ_1,ξ_2位于0与x之间。

取$x=\frac{1}{3}$，$\left|r_{2n}(\frac{1}{3})\right|\le\frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}}\left[1+\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^{2n+1}}\right]<\frac{1}{(2n+1)2^{2n}}$。

而利用第二个展开式计算前n项之和，余项为

$$r_n(x)=\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}，$$ 其中ξ位于0与x之间，

取$x=1$，$|r_n(1)|>\frac{1^{n+1}}{(n+1)(1+1)^{n+1}}=\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$。

显然$\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}>\frac{1}{(2n+1)2^{2n}}$，所以利用第一个展开式计算$\ln 2$的值比利用第二个展开式误差小，精度高。

4．利用上题的讨论结果，不加计算，判别用哪个公式计算π的近似值效果更好，为什么？

（1） $$\frac{\pi}{4}=\arctan 1\approx\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]\Bigg|_{x=1}$$

（2） $$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$$ （Machin 公式）

$$\approx 4\left[x-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]\Bigg|_{x=\frac{1}{5}}-\left[x-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]\Bigg|_{x=\frac{1}{239}}$$

解　两个计算π的公式都是利用了$\arctan x$的 Taylor 公式，但第一个公

式是用$x=1$代入，而第二个公式是用$x=\frac{1}{5}$与$x=\frac{1}{239}$代入。由于$\frac{1}{5}$与$\frac{1}{239}$比1小得多，因此第二个公式的通项（或余项）比第一个公式的通项（或余项）趋于零的速度快得多，所以用第二个公式计算π的近似值效果更好。

5. 利用 Taylor 公式求近似值（精确到10^{-4}）：

(1) $\lg 11$； (2) $\sqrt[3]{\mathrm{e}}$； (3) $\sin 31^{\circ}$；

(4) $\cos 89^{\circ}$； (5) $\sqrt[5]{250}$； (6) $(1.1)^{1.2}$.

解（1） $\lg(10+x)=\frac{\ln(10+x)}{\ln 10}=1+\frac{1}{\ln 10}\ln(1+\frac{x}{10})=1+\frac{1}{\ln 10}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k10^k}+r_n(x)$，

其中$r_n(x)=\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(\ln 10)10^{n+1}(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$，$\xi$位于0与$\frac{x}{10}$之间。

由$|r_n(1)|=\frac{1}{(\ln 10)10^{n+1}(n+1)(1+\xi)^{n+1}}<\frac{1}{(\ln 10)10^{n+1}(n+1)}$，得到$|r_4(1)|<0.89\times 10^{-6}$，满足精度要求，所以

$$\lg 11\approx 1+\frac{1}{\ln 10}(\frac{1}{10}-\frac{1}{2\cdot 10^2}+\frac{1}{3\cdot 10^3}-\frac{1}{4\cdot 10^4})\approx 1.04139\text{。}$$

（2） $e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k+r_n(x)$，其中$r_n(x)=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$，$\xi$位于0与$x$之间。

令$x=\frac{1}{3}$，$n=4$，$|r_4(\frac{1}{3})|\le\frac{e^{\frac{1}{3}}}{5!3^5}\approx 0.27\times 10^{-5}$，满足精度要求，所以

$$\sqrt[3]{e}\approx 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 9}+\frac{1}{6\cdot 27}+\frac{1}{24\cdot 81}\approx 1.39561\text{。}$$

（3） $\sin(\frac{\pi}{6}+x)=\sin(\frac{\pi}{6})+\cos(\frac{\pi}{6})x-\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{6})x^2+r_2(x)$，

其中$r_2(x)=-\frac{x^3}{3!}\cos(\frac{\pi}{6}+\xi)$，$\xi$位于0与$x$之间。

由于$|r_2(\frac{\pi}{180})|\le\frac{\pi^3}{3!180^3}\approx 0.88\times 10^{-6}$，满足精度要求，所以

$$\sin 31^\circ=\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180})=\sin(\frac{\pi}{6})+\cos(\frac{\pi}{6})\frac{\pi}{180}-\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{180})^2\approx 0.51504\text{。}$$

（4） $\sin x=x+r_2(x)$，其中$r_2(x)=-\frac{x^3}{3!}\cos\xi$，$\xi$位于$0$与$x$之间。

由于$|r_2(\frac{\pi}{180})|\le 10^{-5}$，满足精度要求，所以

$$\cos 89^\circ=\sin 1^\circ=\sin(\frac{\pi}{180})\approx\frac{\pi}{180}\approx 0.01745\text{。}$$

（5） $f(x)=3(1+x)^{\frac{1}{5}}=3(1+\frac{1}{5}x-\frac{4}{25\cdot 2}x^2)+r_2(x)$，

其中$r_2(x)=\frac{18}{125(1+\xi)^{\frac{14}{5}}}x^3$，$\xi$位于$0$与$x$之间。

由于$|r_2(\frac{7}{243})|<\frac{18}{125}(\frac{7}{243})^3\approx 0.34\times 10^{-5}$，满足精度要求，所以

$$f(\frac{7}{243})=3(1+\frac{7}{243})^{\frac{1}{5}}=250^{\frac{1}{5}}\approx 3(1+\frac{7}{5\cdot 243}-\frac{4\cdot 7^2}{25\cdot 2\cdot 243^2})\approx 3.01708\text{。}$$

（6） $f(x)=(1+x)^{1.2}=1+1.2x+\frac{1.2\cdot 0.2}{2}x^2-\frac{1.2\cdot 0.2\cdot 0.8}{6}x^3+r_3(x)$，

其中$r_3(x)=\frac{1.2\cdot 0.2\cdot 0.8\cdot 1.8}{24(1+\xi)^{2.8}}x^4$，$\xi$位于$0$与$x$之间。

由于$|r_3(0.1)|\le 0.0144(0.1)^4=0.144\times 10^{-5}$，满足精度要求，所以

$$f(0.1)=(1.1)^{1.2}=1+1.2\cdot 0.1+\frac{1.2\cdot 0.2}{2}0.1^2-\frac{1.2\cdot 0.2\cdot 0.8}{6}0.1^3\approx 1.12117\text{。}$$

6． 利用函数的 Taylor 公式求极限：

（1） $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$；　　（2） $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}\ (a>0)$；

（3） $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\csc x\right)$；　　（4） $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt[5]{x^5+x^4}-\sqrt[5]{x^5-x^4})$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$;　　(6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}\right)$;

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$;　　(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6-1}\right]$.

解（1） $e^x\sin x-x(1+x)=(1+x+\frac{x^2}{2})(x-\frac{x^3}{6})+o(x^3)-(x+x^2)=\frac{x^3}{3}+o(x^3)$，

所以

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\frac{1}{3}。$$

（2） $a^x+a^{-x}-2=(e^{x\ln a}-1)+(e^{-x\ln a}-1)$

$=(\ln a\cdot x+\frac{\ln^2 a}{2}x^2+o(x^2))+(-\ln a\cdot x+\frac{\ln^2 a}{2}x^2+o(x^2))=\ln^2 a\cdot x^2+o(x^2)$，

所以

$$\lim_{x\to0+}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}=\ln^2 a。$$

（3）由于 $\sin x=x+o(x^2)$，所以

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\csc x\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{o(x^2)}{x^2}=0。$$

（4）令 $u=\frac{1}{x}$，由于

$(1+u)^{\frac{1}{5}}-(1-u)^{\frac{1}{5}}=(1+\frac{1}{5}u-\frac{2}{25}u^2+o(u^2))-(1-\frac{1}{5}u-\frac{2}{25}u^2+o(u^2))=\frac{2}{5}u+o(u^2)$，

所以

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[5]{x^5+x^4}-\sqrt[5]{x^5-x^4})=\lim_{u\to0+}\frac{(1+u)^{\frac{1}{5}}-(1-u)^{\frac{1}{5}}}{u}=\frac{2}{5}。$$

（5）令 $u=\frac{1}{x}$，由于 $\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+o(u^2)$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{u\to0}\frac{u-\ln(1+u)}{u^2}=\lim_{u\to0}\frac{\frac{1}{2}u^2+o(u^2)}{u^2}=\frac{1}{2}。$$

（6）由于 $\tan x=x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}。$$

（7）令 $u=\dfrac{1}{x}$，由于

$$\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}-2=(\sqrt{1+u}-1)+(\sqrt{1-u}-1)$$

$$=(\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+o(u^2))+(-\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+o(u^2))=-\frac{u^2}{4}+o(u^2),$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})=\lim_{u\to0+}\frac{\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}-2}{u^2}=-\frac{1}{4}。$$

（8）令 $u=\dfrac{1}{x}$，由于

$$e^u(1-u+\frac{u^2}{2})-\sqrt{1-u^6}=(1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6})(1-u+\frac{u^2}{2})-1+o(u^3)=\frac{u^3}{6}+o(u^3),$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6-1}\right]=\lim_{u\to0+}\frac{e^u(1-u+\frac{u^2}{2})-\sqrt{1-u^6}}{u^3}=\frac{1}{6}。$$

7． 利用 Taylor 公式证明不等式：

（1） $x-\dfrac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$， $x>0$；

（2） $(1+x)^\alpha<1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2$， $1<\alpha<2,\ x>0$。

证（1）利用带 Lagrange 余项的 Taylor 公式，

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3(1+\xi)^3}>x-\frac{x^2}{2},\quad 0<\xi<x,$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4(1+\xi)^4}<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3},\quad 0<\xi<x。$$

（2） $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6(1+\xi)^{3-\alpha}}x^3$， $0<\xi<x$ 。

由于$1<\alpha<2$ ，所以$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)<0$，从而 Lagrange 余项$\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6(1+\xi)^{3-\alpha}}x^3$ 小于零，于是得到

$$(1+x)^{\alpha}<1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2。$$

8．判断下列函数所表示的曲线是否存在渐近线，若存在的话求出渐近线方程：

（1） $y=\dfrac{x^2}{1+x}$；　　（2） $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$；

（3） $y=\sqrt{6x^2-8x+3}$；　　（4） $y=(2+x)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$；

（5） $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$；　　（6） $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$；

（7） $y=x+\operatorname{arccot}x$；　　（8） $y=\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}$；

（9） $y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；　　（10） $y=x^5\left(\cos\dfrac{1}{x}-e^{-\frac{1}{2x^2}}\right)$；

（11） $y=x^2\left(xe^{\frac{1}{3x}}-\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)$；　　（12） $y=x^2\left(xe^{\frac{1}{2x}}-\sqrt{x^2+x}\right)$.

解 （1）由于$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2}{1+x}=\infty$，所以$x=-1$是垂直渐近线；由于

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(1+x)}=1,\quad b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-ax\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-x\right)=-1,$$

所以斜渐近线为$y=x-1$。

（2）由于$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{1+x^2}=0$，所以$y=0$是水平渐近线。

（3）解法一：由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{6x^2-8x+3}}{x}=\sqrt{6},$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{6x^2-8x+3}-\sqrt{6}x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-8x+3}{\sqrt{6x^2-8x+3}+\sqrt{6}x}=-\frac{2\sqrt{6}}{3},$$

所以当 $x\to+\infty$ 时，渐近线为 $y=\sqrt{6}x-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$；

由于

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{6x^2-8x+3}}{x}=-\sqrt{6},$$

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{6x^2-8x+3}+\sqrt{6}x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-8x+3}{\sqrt{6x^2-8x+3}-\sqrt{6}x}=\frac{2\sqrt{6}}{3},$$

所以当 $x\to-\infty$ 时，渐近线为 $y=-\sqrt{6}x+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$。

解法二：

$$\sqrt{6x^2-8x+3}-ax-b=\frac{6x^2-8x+3-(ax+b)^2}{\sqrt{6x^2-8x+3}+ax+b}=\frac{(6-a^2)x^2-(8+2ab)x+3-b^2}{\sqrt{6x^2-8x+3}+ax+b},$$

由 $\lim\limits_{x\to\infty}(y-ax-b)=0$，解得 $a=\pm\sqrt{6}, b=-\dfrac{4}{a}$。所以当 $x\to+\infty$ 时，渐近线为 $y=\sqrt{6}x-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，当 $x\to-\infty$ 时，渐近线为 $y=-\sqrt{6}x+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$。

（4）由于 $\lim\limits_{x\to0+}(2+x)e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，所以 $x=0$ 是垂直渐近线；令 $u=\dfrac{1}{x}$，由

$$\lim_{x\to\infty}[(2+x)e^{\frac{1}{x}}-ax-b]=\lim_{u\to0}\frac{(2u+1)\,\mathrm{e}^u-a-bu}{u}=\lim_{u\to0}\frac{(1-a)+(3-b)u+o(u)}{u}=0,$$

解得 $a=1, b=3$，所以斜渐近线为 $y=x+3$。

（5）由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{2x}=\infty$，所以曲线无渐近线。

（6）函数定义域为 $(-1,1)$，且 $\lim\limits_{x\to1-}\ln\dfrac{1+x}{1-x}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-1+}\ln\dfrac{1+x}{1-x}=-\infty$，所以 $x=\pm1$ 为两条垂直渐近线。

（7）由于

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arccot}x=0,$$

所以当$x\to+\infty$时，渐近线为$y=x$；

由于

$$\lim_{x\to-\infty}(y-x)=\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arccot}x=\pi,$$

所以当$x\to-\infty$时，渐近线为$y=x+\pi$。

（8）令$u=\dfrac{1}{x}$，

$$\lim_{x\to\infty}[\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}-ax-b]=\lim_{u\to0}\frac{(1-2u)^{\frac{1}{3}}(1+u)^{\frac{2}{3}}-a-bu}{u}$$

$$=\lim_{u\to0}\frac{(1-\frac{2}{3}u)(1+\frac{2}{3}u)-a-bu+o(u)}{u}=\lim_{u\to0}\frac{1-a-bu+o(u)}{u}=0,$$

解出$a=1,b=0$，所以曲线有渐近线$y=x$。

（9）由于

$$\lim_{x\to\infty}\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}=\arccos(-1)=\pi,$$

所以曲线有水平渐近线$y=\pi$。

（10）令$u=\dfrac{1}{x}$，

$$\lim_{x\to\infty}\left[x^5\left(\cos\frac{1}{x}-e^{-\frac{1}{2x^2}}\right)-ax-b\right]=\lim_{u\to0}\frac{\cos u-e^{-\frac{u^2}{2}}-au^4-bu^5}{u^5}$$

$$=\lim_{u\to0}\frac{(1-\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{24})-(1-\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{2\cdot4})-au^4-bu^5+o(u^5)}{u^5}=0,$$

解出$a=-\dfrac{1}{12},b=0$，所以曲线有渐近线$y=-\dfrac{1}{12}x$。

（11）由于

$$\lim_{x\to0+}x^2\left(xe^{\frac{1}{3x}}-\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)=+\infty,$$

所以 $x=0$ 是一条垂直渐近线。

令 $u=\frac{1}{x}$，

$$\lim_{x\to\infty}\left[x^2\left(xe^{\frac{1}{3x}}-\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)-ax-b\right]=\lim_{u\to 0}\frac{e^{\frac{u}{3}}-(1+u)^{\frac{1}{3}}-au^2-bu^3}{u^3}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{(1+\frac{u}{3}+\frac{u^2}{2\cdot 9}+\frac{u^3}{6\cdot 27})-(1+\frac{u}{3}-\frac{2u^2}{2\cdot 9}+\frac{10u^3}{6\cdot 27})-au^2-bu^3+o(u^3)}{u^3}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{(\frac{1}{6}-a)u^2+(-\frac{1}{18}-b)u^3+o(u^3)}{u^3}=0,$$

解出 $a=\frac{1}{6},b=-\frac{1}{18}$，所以斜渐近线为 $y=\frac{1}{6}x-\frac{1}{18}$。

（12）由于

$$\lim_{x\to 0+}x^2\left(xe^{\frac{1}{2x}}-\sqrt{x^2+x}\right)=+\infty,$$

所以 $x=0$ 是一条垂直渐近线。

令 $u=\frac{1}{x}$，

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(xe^{\frac{1}{2x}}-\sqrt{x^2+x}\right)-ax-b\right]==\lim_{u\to 0+}\frac{e^{\frac{u}{2}}-\sqrt{1+u}-au^2-bu^3}{u^3}$$

$$=\lim_{u\to 0+}\frac{(1+\frac{u}{2}+\frac{u^2}{2\cdot 4}+\frac{u^3}{6\cdot 8})-(1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{2\cdot 4}+\frac{3u^3}{6\cdot 8})-au^2-bu^3+o(u^3)}{u^3}$$

$$=\lim_{u\to 0+}\frac{(\frac{1}{4}-a)u^2-(\frac{1}{24}+b)u^3+o(u^3)}{u^3}=0,$$

解出 $a=\frac{1}{4},b=-\frac{1}{24}$，所以当 $x\to+\infty$ 时，渐近线为 $y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{24}$。

由于

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}x^2\left(e^{\frac{1}{2x}}+\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}\right)=\infty,$$

所以当 $x\to-\infty$ 时，没有渐近线。

9．（1） 设 $0<x_1<\frac{\pi}{2}$， $x_{n+1}=\sin x_n$ （$n=1,2,\cdots$），证明：

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$； (ii) $x_n^2 \sim \dfrac{3}{n} \quad (n\to\infty)$ 。

(2) 设 $y_1 > 0$， $y_{n+1} = \ln(1+y_n)$ （$n = 1, 2, \cdots$），证明：

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$； (ii) $y_n \sim \dfrac{2}{n} \quad (n\to\infty)$ 。

证（1）易知数列 $\{x_n\}$ 单调减少且有下界。设其极限为 a，对 $x_{n+1} = \sin x_n$ 两端取极限，有 $a = \sin a \quad (0 \le a < \dfrac{\pi}{2})$，所以 $a = 0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ 。

利用 Stolz 定理，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{\frac{1}{x_n^2}-\frac{1}{x_{n-1}^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^2\sin^2 x_{n-1}}{x_{n-1}^2-\sin^2 x_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^4}{x_{n-1}^2-[x_{n-1}^2-\frac{1}{3}x_{n-1}^4+o(x_{n-1}^4)]} = 3,$$

所以

$$x_n^2 \sim \frac{3}{n} \quad (n\to\infty)。$$

(2) 易知数列 $\{y_n\}$ 单调减少且有下界。设其极限为 b，对 $y_{n+1} = \ln(1+y_n)$ 两端取极限，有 $b = \ln(1+b) \quad (0 \le b < y_1)$，所以 $b = 0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ 。

利用 Stolz 定理，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{y_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{\frac{1}{y_n}-\frac{1}{y_{n-1}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{y_{n-1}\ln(1+y_{n-1})}{y_{n-1}-\ln(1+y_{n-1})} = \lim_{n\to\infty}\frac{y_{n-1}^2}{y_{n-1}-[y_{n-1}-\frac{1}{2}y_{n-1}^2+o(y_{n-1}^2)]} = 2,$$

所以

$$y_n \sim \frac{2}{n} \quad (n\to\infty)。$$

10．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且满足 $|f''(x)| \le 1$， $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内取到最大值 $\dfrac{1}{4}$ 。证明： $|f(0)| + |f(1)| \le 1$ 。

证 设 $x_0 \in (0,1)$ 为函数的最大值点，则 $f(x_0) = \dfrac{1}{4}$， $f'(x_0) = 0$ 。以 $x = 0, x = 1$ 代入 $f(x)$ 在点 x_0 的带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

$$f(0) = f(x_0) + f'(x_0)(0-x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(0-x_0)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}f''(\xi)x_0^2, \quad \xi \in (0, x_0),$$

$$f(1) = f(x_0) + f'(x_0)(1-x_0) + \frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2, \quad \eta \in (x_0, 1),$$

得到

$$|f(0)| + |f(1)| \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[x_0^2 + (1-x_0)^2] \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1。$$

11．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且在 $[0,1]$ 上成立

$$|f(x)|\le 1，\quad |f''(x)|\le 2。$$

证明在 $[0,1]$ 上成立 $|f'(x)|\le 3$。

证 利用例 5.4.13，由于 $A=1, B=2$，所以在 $[0,1]$ 上成立

$$|f'(x)|\le 2A+\frac{1}{2}B=3。$$

12．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$\min\limits_{0\le x\le 1} f(x)=-1$。证明：

$$\max_{0\le x\le 1} f''(x)\ge 8。$$

证 设 $x_0\in(0,1)$ 为函数的最小值点，则 $f(x_0)=-1$，$f'(x_0)=0$。以 $x=0, x=1$ 代入 $f(x)$ 在点 x_0 的带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

$$f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(0-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(0-x_0)^2=-1+\frac{1}{2}f''(\xi){x_0}^2=0,\quad \xi\in(0,x_0)，$$

$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2=-1+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2=0,\ \eta\in(x_0,1)，$$

得到

$$\frac{1}{2}f''(\xi){x_0}^2=\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2=1。$$

当 $x_0\le\frac{1}{2}$ 时，$f''(\xi)=\frac{2}{{x_0}^2}\ge 8$；当 $x_0>\frac{1}{2}$ 时，$f''(\eta)=\frac{2}{(1-x_0)^2}>8$。所以

$$\max_{0\le x\le 1} f''(x)\ge 8。$$

13．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，证明

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\le x\le b}|f''(x)|。$$

证 设 $|f(x_0)|=\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|$，若 $x_0=a$ 或 b，则结论自然成立。设 $a<x_0<b$，以 $x=a$ 和 $x=b$ 代入 $f(x)$ 在点 x_0 的带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

$$f(a)=f(x_0)+f'(x_0)(a-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(a-x_0)^2\quad \xi\in(a,x_0)，$$

$$f(b)=f(x_0)+f'(x_0)(b-x_0)+\frac{1}{2}f''(\eta)(b-x_0)^2\quad \eta\in(x_0,b)，$$

将 $f(a)=f(b)=0$， $f'(x_0)=0$ 代入上面两式，得到

$$|f(x_0)|\le\frac{1}{2}(a-x_0)^2\max_{a\le x\le b}|f''(x)|,\quad |f(x_0)|\le\frac{1}{2}(b-x_0)^2\max_{a\le x\le b}|f''(x)|\text{。}$$

当 $x_0\in(a,\dfrac{a+b}{2})$ 时， $(a-x_0)^2<\dfrac{1}{4}(b-a)^2$；

当 $x_0\in[\dfrac{a+b}{2},b)$ 时， $(b-x_0)^2\le\dfrac{1}{4}(b-a)^2$ 。

综合上述两种情况，得到

$$\left|f(x_0)\right|=\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\le x\le b}|f''(x)|\text{。}$$

习　题　5.5　应用举例

1．求下列函数的极值点，并确定它们的单调区间：

(1) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$；　　(2) $y = x + \sin x$；

(3) $y = \sqrt{x}\ln x$；　　(4) $y = x^n \mathrm{e}^{-x}$　（$n \in \mathrm{N}^+$）；

(5) $y = \sqrt[3]{\dfrac{(x+1)^2}{x-2}}$；　　(6) $y = \dfrac{1-x}{1+x^2}$；

(7) $y = 3x + \dfrac{4}{x}$；　　(8) $y = x - \ln(1+x)$；

(9) $y = \cos^3 x + \sin^3 x$；　　(10) $y = \arctan x - x$；

(11) $y = 2\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$；　　(12) $y = 2 - \sqrt[3]{(x-1)^2}$；

(13) $y = \dfrac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$；　　(14) $y = x^{\frac{1}{x}}$.

解（1）因为$y'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$有两个零点$-1, 2$，根据一阶导数的符号，可知函数在$(-\infty,-1]$和$[2,+\infty)$单调增加，在$[-1,2]$单调减少，所以$x=-1$是极大值点，$x=2$是极小值点。

（2）因为$y'(x) = 1 + \cos x \ge 0$，函数在$(-\infty,+\infty)$严格单调增加，无极值点。

（3）$y'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(2+\ln x)$有零点$e^{-2}$，根据一阶导数的符号可知函数在$(0,e^{-2}]$单调减少，在$[e^{-2},+\infty)$单调增加，所以$x = e^{-2}$是极小值点。

（4）$y'(x) = (n-x)x^{n-1}e^{-x}$有零点$0$和$n$，

当n是偶数时，函数在$(-\infty,0]$和$[n,+\infty)$单调减少，在$[0,n]$单调增加，所以$x=0$是极小值点，$x=n$是极大值点；

当n是奇数时，函数在$(-\infty,n]$单调增加，在$[n,+\infty)$单调减少，所以$x=n$是极大值点。

（5） y 和 y^3 具有相同的单调性， $\frac{d(y^3)}{dx}=\frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}$ 有零点 $x=-1, 5$，$x=-1$ 是不可导点。根据一阶导数的符号，可知函数在 $(-\infty,-1]$ 和 $[5,+\infty)$ 单调增加，在 $[-1,2)$ 和 $(2,5]$ 单调减少，所以 $x=-1$ 是极大值点， $x=5$ 是极小值点。

（6） $y'(x)=\frac{x^2-2x-1}{(1+x^2)^2}$ 有零点 $x=1\pm\sqrt{2}$，根据一阶导数的符号，可知函数在 $(-\infty,1-\sqrt{2}]$ 和 $[1+\sqrt{2},+\infty)$ 单调增加，在 $[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}]$ 单调减少，所以 $x=1-\sqrt{2}$ 是极大值点， $x=1+\sqrt{2}$ 是极小值点。

（7） $y'(x)=3-\frac{4}{x^2}$ 有零点 $x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$，根据一阶导数的符号，可知函数在 $(-\infty,-\frac{2}{\sqrt{3}}]$ 和 $[\frac{2}{\sqrt{3}},+\infty)$ 单调增加，在 $[-\frac{2}{\sqrt{3}},0)$ 和 $(0,\frac{2}{\sqrt{3}}]$ 单调减少，所以 $x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ 是极大值点， $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ 是极小值点。

（8） $y'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$ 有零点 $x=0$，函数在 $x=-1$ 不可导，根据一阶导数的符号，可知函数在 $[0,+\infty)$ 单调增加，在 $(-1,0]$ 单调减少，所以 $x=0$ 是极小值点。

（9） $y'(x)=3\sin x\cos x(\sin x-\cos x)$ 有零点 $x=\frac{k\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{4}$，根据一阶导数的符号，可知函数在 $[2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{2}]$， $[2k\pi+\pi,2k\pi+\frac{5\pi}{4}]$ 和 $[2k\pi+\frac{3\pi}{2},2k\pi+2\pi]$ 单调增加，在 $[2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{4}]$， $[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\pi]$ 和 $[2k\pi+\frac{5\pi}{4},2k\pi+\frac{3\pi}{2}]$ 单调减少，所以 $x=2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2},(2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}$， $k\in\mathrm{Z}$ 是极大值点， $x=2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\pi,(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}$， $k\in\mathrm{Z}$ 是极小值点。

（10） $y'(x)=\frac{1}{1+x^2}-1=-\frac{x^2}{1+x^2}\le 0$，函数在 $(-\infty,+\infty)$ 严格单调减少，所以

没有极值点。

（11）$y'(x)=2e^{x}-e^{-x}=(2e^{2x}-1)e^{-x}$有零点$x=-\frac{1}{2}\ln 2$，根据一阶导数的符号，可知函数在$[-\frac{1}{2}\ln 2,+\infty)$单调增加，在 $(-\infty,-\frac{1}{2}\ln 2]$单调减少，所以$x=-\frac{1}{2}\ln 2$是极小值点。

（12）$y'(x)=-\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}$，$x=1$是不可导点，根据一阶导数的符号，可知函数在$(-\infty,1]$单调增加，在$[1,+\infty)$单调减少，所以$x=1$是极大值点。

（13）$y'(x)=\frac{12-5x}{(4+5x^2)^{\frac{3}{2}}}$有零点$x=\frac{12}{5}$，根据一阶导数的符号，可知函数在$(-\infty,\frac{12}{5}]$单调增加，在$[\frac{12}{5},+\infty)$单调减少，所以$x=\frac{12}{5}$是极大值点。

（14）$y'(x)=x^{\frac{1}{x}}\frac{1-\ln x}{x^2}$有零点$x=e$，根据一阶导数的符号，可知函数在$(0,e]$单调增加，在$[e,+\infty)$单调减少，所以$x=e$是极大值点。

2．求下列曲线的拐点，并确定函数的保凸区间：

(1) $y=-x^3+3x^2$；　(2) $y=x+\sin x$；

(3) $y=\sqrt{1+x^2}$；　(4) $y=x\,\mathrm{e}^{-x}$；

(5) $y=\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{x-2}}$；　(6) $y=\frac{1-x}{1+x^2}$；

(7) $y=x-\ln(1+x)$；　(8) $y=\arctan x-x$；

(9) $y=(x+1)^4+\mathrm{e}^x$；　(10) $y=\ln(1+x^2)$；

(11) $y=\mathrm{e}^{\arctan x}$；　(12) $y=x+\sqrt{x-1}$.

解　(1) $y'(x)=-3x^2+6x, y''(x)=-6x+6$，二阶导数有零点$x=1$，根据二阶导数的符号，可知点$(1,2)$是曲线的拐点；

函数的保凸区间：$(-\infty,1]$下凸，$[1,+\infty)$上凸。

（2） $y'(x)=1+\cos x, y''(x)=-\sin x$，二阶导数有零点 $x=k\pi, k\in Z$，根据二阶导数的符号，可知点 $(k\pi,k\pi),\ k\in Z$ 是曲线的拐点；

函数的保凸区间：$[2k\pi,2k\pi+\pi]$ 上凸，$[2k\pi-\pi,2k\pi]$ 下凸。

（3） $y'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}, y''(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\dfrac{x^2}{(\sqrt{1+x^2})^3}=\dfrac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3}>0$，所以曲线没有拐点；

函数的保凸区间：$(-\infty,+\infty)$ 下凸。

（4） $y'(x)=(1-x)e^{-x}, y''(x)=(x-2)e^{-x}$，二阶导数有零点 $x=2$，根据二阶导数的符号，可知点 $(2,\dfrac{2}{e^2})$ 是曲线的拐点；

函数的保凸区间：$(-\infty,2]$ 上凸，$[2,+\infty)$ 下凸。

（5） $y'(x)=\dfrac{(x-5)}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}(x-2)^{-\frac{4}{3}}$，$y''(x)=\dfrac{-2(x^2-10x-2)}{9(x+1)^{\frac{4}{3}}(x-2)^{\frac{7}{3}}}$，二阶导数有零点 $x=5\pm3\sqrt{3}$，根据二阶导数的符号，可知点 $\left(5\pm3\sqrt{3},\dfrac{\sqrt[3]{6}}{2}(1\pm\sqrt{3})\right)$ 是曲线的拐点；

函数的保凸区间：$(-\infty,5-3\sqrt{3}]$ 和 $(2,5+3\sqrt{3}]$ 下凸，$[5-3\sqrt{3},2)$ 和 $[5+3\sqrt{3},+\infty)$ 上凸。

（6） $y'(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}, y''(x)=\dfrac{-2(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3}$，二阶导数有零点 $x=-1, 2\pm\sqrt{3}$，根据二阶导数的符号，可知点 $(-1,1),\ \left(2\pm\sqrt{3},\dfrac{1}{4}(1\mp\sqrt{3})\right)$ 是曲线的拐点；

函数的保凸区间：$(-\infty,-1]$ 和 $[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}]$ 下凸，$[2+\sqrt{3},+\infty)$ 和 $[-1,2-\sqrt{3}]$ 上凸。

（7） $y'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}, y''(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}>0$，曲线没有拐点；

函数的保凸区间：$(-1,+\infty)$ 下凸。

（8） $y'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-1, y''(x)=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$，二阶导数有零点 $x=0$，根据二阶导数的符号，可知点 $(0,0)$ 是曲线的拐点；

函数的保凸区间：$(-\infty,0]$ 下凸，$[0,+\infty)$ 上凸。

（9） $y''(x)=12(x+1)^2+e^x>0$，曲线没有拐点；

函数的保凸区间：$(-\infty,+\infty)$ 下凸。

（10） $y'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}, y''(x)=\dfrac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$，二阶导数有零点 $x=\pm 1$，根据二阶导数的符号，可知点 $(\pm 1,\ln 2)$ 是曲线的拐点；

函数的保凸区间：$(-\infty,-1]$ 和 $[1,+\infty)$ 上凸，$[-1,1]$ 下凸。

（11） $y'(x)=e^{\arctan x}\dfrac{1}{1+x^2}, y''(x)=e^{\arctan x}\dfrac{1-2x}{(1+x^2)^2}$，二阶导数有零点 $x=\dfrac{1}{2}$，根据二阶导数的符号，可知点 $\left(\dfrac{1}{2},e^{\arctan\frac{1}{2}}\right)$ 是曲线的拐点；

函数的保凸区间：$(-\infty,\dfrac{1}{2}]$ 下凸，$[\dfrac{1}{2},+\infty)$ 上凸。

（12） $y'(x)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}, y''(x)=-\dfrac{1}{4(x-1)^{\frac{3}{2}}}<0$，曲线没有拐点；

函数的保凸区间：$[1,+\infty)$ 上凸。

3. 设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导，证明：$f(x)$ 在 x_0 处取到极大值（极小值）的必要条件是 $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)\le 0$ （$f''(x_0)\ge 0$）。

证 先设 $f(x)$ 在 x_0 处取到极大值，则由于 $f(x)$ 在 x_0 处可导，所以 $f'(x_0)=0$。若 $f''(x_0)>0$，则由

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$$
$$=f(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2),$$

可知当 $x\neq x_0$ 充分接近 x_0 时，有 $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}>0$，与 $f(x)$ 在 x_0 处取到极大值矛盾，所以 $f''(x_0)\le 0$。

$f(x)$ 在 x_0 处取到极小值的情况可同样证明。

4. 设 $f(x)=(x-a)^n\varphi(x)$，$\varphi(x)$ 在 $x=a$ 连续且 $\varphi(a)\neq 0$，讨论 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的极值情况。

解 首先有 $f(a)=0$。

当 n 为偶数时 $(x-a)^n\ge 0$，当 $\varphi(a)>0$ 时，$f(x)=(x-a)^n\varphi(x)$ 在 $x=a$ 附近非负，所以 $x=a$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点；而当 $\varphi(a)<0$ 时，函数 $f(x)=(x-a)^n\varphi(x)$ 在 $x=a$ 附近非正，所以 $x=a$ 为函数的极大值点。

当 n 为奇数时 $(x-a)^n$ 在 $x=a$ 附近变号，$\varphi(a)\neq 0$，$f(x)=(x-a)^n\varphi(x)$ 在 $x=a$ 附近也变号，所以 $x=a$ 非极值点。

5. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有 n 阶连续导数，且 $f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$，$f^{(n)}(a)\neq 0$，讨论 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的极值情况。

解 $f(x)=f(a)+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n$，$\xi$ 位于 0 与 x 之间。由于 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有 n 阶连续导数，$f^{(n)}(a)\neq 0$，所以当 x 位于 $x=a$ 附近，$f^{(n)}(\xi)$ 不变号，利用上题的结果可知：

当 n 为偶数时，若 $f^{(n)}(a)>0$，则 $x=a$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点；若 $f^{(n)}(a)<0$，则 $x=a$ 为函数 $f(x)$ 的极大值点。

当 n 为奇数时，$x=a$ 不是函数 $f(x)$ 的极值点。

6．如何选择参数$h>0$，使得

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$$

在$x=\pm\sigma$（$\sigma>0$为给定的常数）处有拐点?

解 $y'(x)=\frac{-2h^3x}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}, y''(x)=\frac{-2h^3(1-2h^2x^2)}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$，可知曲线在$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}h}$处有拐点，所以取$h=\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$即可。

7．求$y=\frac{x^2}{x^2+1}$在拐点处的切线方程。

解 $y'(x)=\frac{2x}{(1+x^2)^2}, y''(x)=\frac{2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}$，可知$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4}\right)$是曲线的拐点，由于$y'\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\pm\frac{3\sqrt{3}}{8}$，得到在拐点处曲线的切线方程为

$$y-\frac{1}{4}=\pm\frac{3\sqrt{3}}{8}(x\mp\frac{1}{\sqrt{3}}),$$

即：$3\sqrt{3}x-8y-1=0$和$3\sqrt{3}x+8y-5=0$。

8．作出下列函数的图象（渐近线方程可利用上一节习题 8 的结果）：

（1）$y=\frac{x^2}{1+x}$；（2）$y=\frac{2x}{1+x^2}$；

（3）$y=\sqrt{6x^2-8x+3}$；（4）$y=(2+x)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$；

（5）$y=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$；（6）$y=\ln\frac{1+x}{1-x}$；

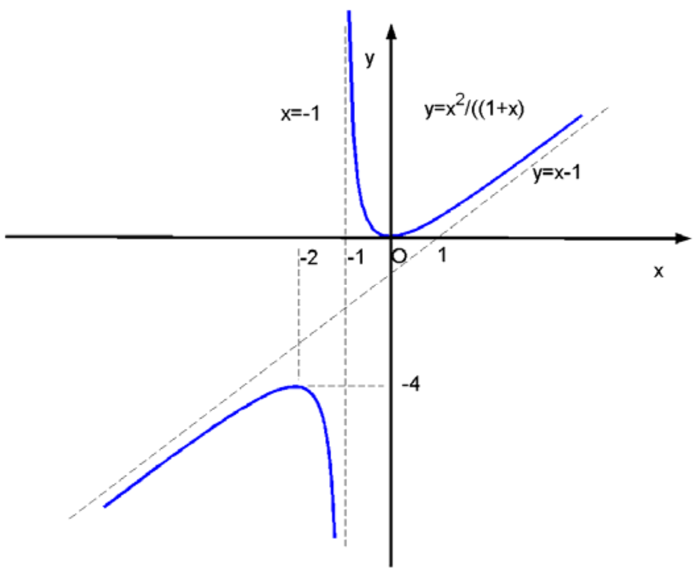
（7）$y=x+\operatorname{arc\,cot}x$；（8）$y=\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}$；

（9）$y=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

解 （1）$y=\frac{x^2}{1+x}$，$y'=\frac{x(x+2)}{(1+x)^2}$，$y''=\frac{2}{(1+x)^3}$。

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	无定义	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	无定义	$+$	$+$	$+$
y	↗	极大值 -4	↘	无定义	↘	极小值 0	↗

渐近线为 $y=x-1$ 和 $x=-1$。

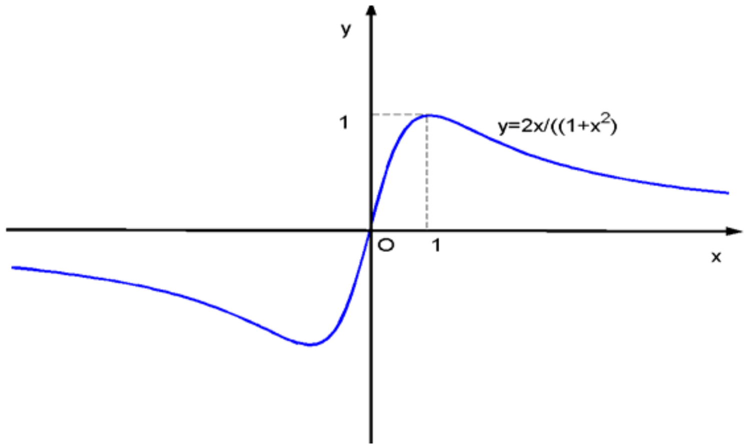


(2) 因为 y 为奇函数,只要考虑 $x\geq 0$ 的情况。

$$y=\frac{2x}{1+x^2}，\quad y'=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2},\quad y''=\frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}。$$

x	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y'	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	$-$	-1	$-$	0	$+$
y	0	↗	极大值 1	↘	拐点 $(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$	↘

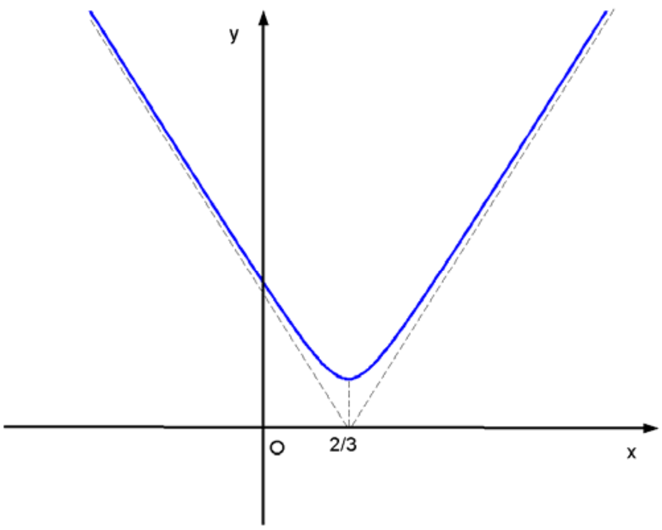
渐近线是 $y=0$。



(3) $y=\sqrt{6x^2-8x+3}$， $y'=\dfrac{6x-4}{\sqrt{6x^2-8x+3}}$， $y''=\dfrac{2}{\sqrt{(6x^2-8x+3)^3}}$。

x	$(-\infty,\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3},+\infty)$
y'	$-$	0	+
y''	+	+	+
y	↘	极小值 $\frac{1}{\sqrt{3}}$	↗

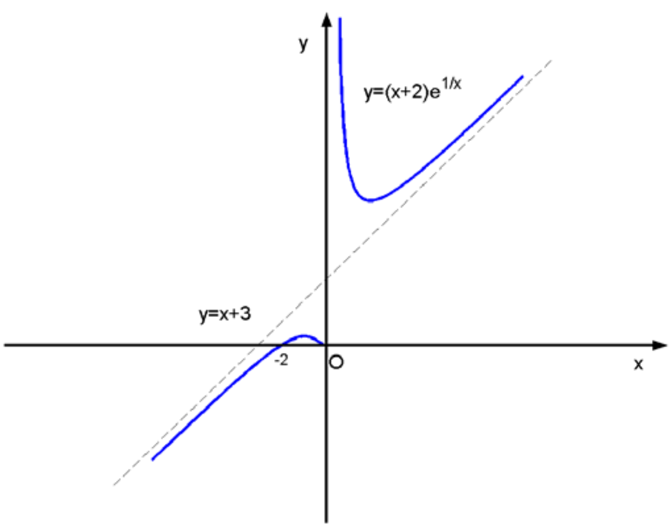
渐近线为 $y=\sqrt{6}x-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ 和 $y=-\sqrt{6}x+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$。



(4) $y=(2+x)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$， $y'=\dfrac{x^2-x-2}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$， $y''=\dfrac{5x+2}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 。

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,-\frac{2}{5})$	$-\frac{2}{5}$	$(-\frac{2}{5},0)$	0	$(0,2)$	2	$(0,+\infty)$
y'	+	0	−	−	−	无定义	−	0	+
y''	−	−	−	0	+	无定义	+	+	+
y	↗	极大值 e^{-1}	↘	拐点 $(-\frac{2}{5},\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}})$	↘	无定义	↘	极小值 $4e^{\frac{1}{4}}$	↗

渐近线为 $y=x+3$ 和 $x=0$ 。

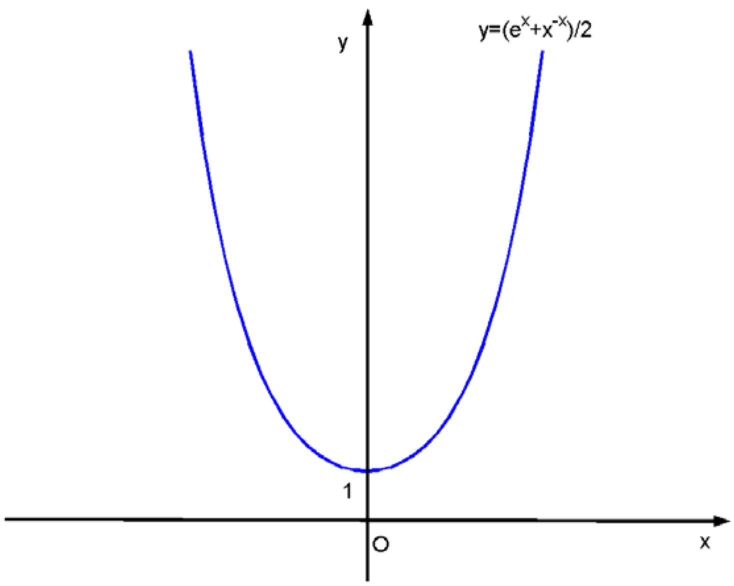


（5）由于 y 为偶函数，只要考虑 x>0 情况。

$$y=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2},\quad y'=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2},\quad y''=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	−	1	+
y''	+	+	+
y	↘	极小值 1	↗

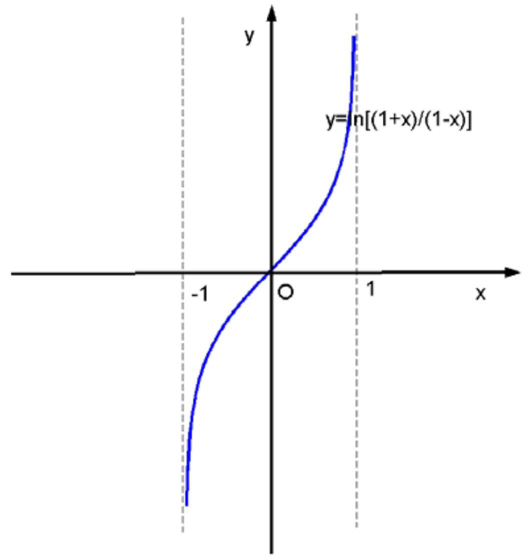
无渐近线。



(6) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$，$y'=\dfrac{2}{1-x^{2}}$，$y''=\dfrac{4x}{(1-x^{2})^{2}}$。

x	$(-1,0)$	0	$(0,1)$
y'	+	2	+
y''	−	0	+
y	↗	拐点（0,0）	↗

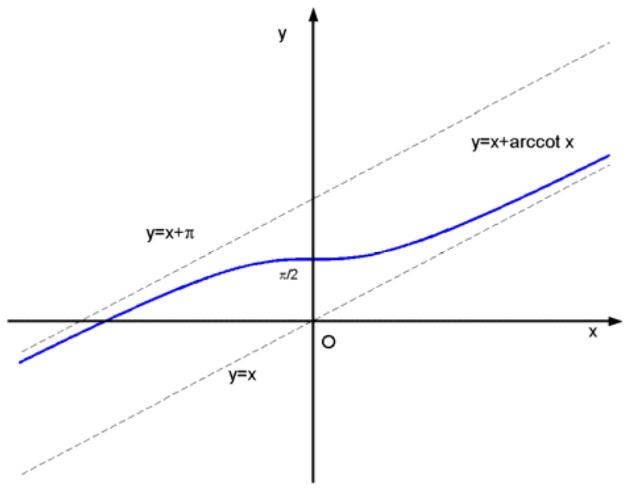
$x=\pm1$ 为两条垂直渐近线。



（7） $y = x + \operatorname{arc}\cot x$， $y' = \dfrac{x^2}{1+x^2}$， $y'' = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ 。

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y'	+	0	+
y''	−	+	+
y	↗	拐点 $(0, \frac{\pi}{2})$	↗

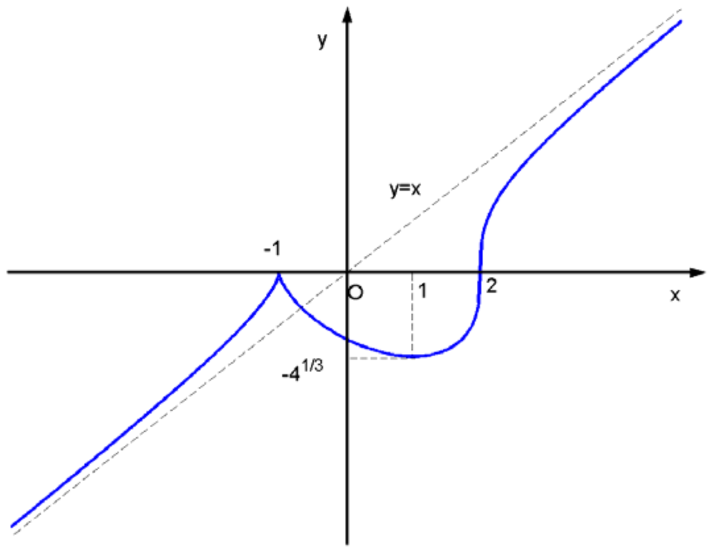
渐近线为 $y = x$ 和 $y = x + \pi$ 。



(8) $y=\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}$，$y'=\dfrac{x-1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{1}{3}}}$，$y''=\dfrac{-2}{(x-2)^{\frac{5}{3}}(x+1)^{\frac{4}{3}}}$。

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	+	无定义	−	0	+	无定义	+
y''	+	无定义	+	无定义	+	无定义	−
y	↗	极大值 0	↘	极小值 $-\sqrt[3]{4}$	↗	拐点 (2,0)	↗

渐近线为 $y=x$。

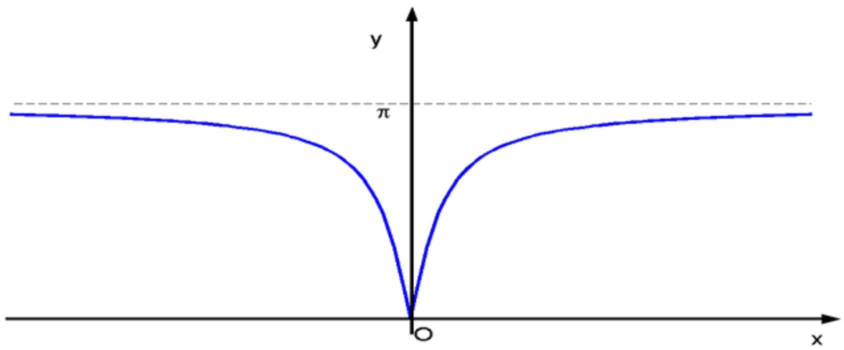


(9) $y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ 是偶函数。$y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$，

$$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)'=\frac{2\,\mathrm{sgn}(x)}{1+x^2}，\quad y''=-\frac{4x\,\mathrm{sgn}(x)}{(1+x^2)^2}。$$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y'	$-$	无定义	$+$
y''	$-$	无定义	$-$
y	↘	极小值 0	↗

渐近线为 $y=\pi$。



9．求下列数列的最大项：

（1）$\left\{\dfrac{n^{10}}{2^n}\right\}$；　　　　（2）$\{\sqrt[n]{n}\}$.

解（1）令 $f(x)=\dfrac{x^{10}}{2^x}$，则 $f'(x)=\dfrac{x^9}{2^x}(10-\ln 2\cdot x)$，$f(x)$ 的极大值点为 $\dfrac{10}{\ln 2}\approx 14.4$，且 $f(14)-f(15)\approx 56730>0$，所以最大项对应 $n=14$；

（2）令 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$，则 $f'(x)=x^{\frac{1}{x}}\dfrac{(1-\ln x)}{x^2}$，极大值点为 $x=e$，而 $f(2)-f(3)<0$，所以最大项对应 $n=3$。

10．设 a,b 为实数，证明

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}。$$

证 对于函数 $y=\frac{x}{1+x}$，$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(1+x)^2}>0$，函数 y 单调增加，所以

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}。$$

11．设 $a>\ln 2-1$ 为常数，证明当 $x>0$ 时，

$$x^2-2ax+1<e^x。$$

证 令 $f(x)=e^x-(x^2-2ax+1)$，则

$$f'(x)=e^x-2x+2a，\quad f''(x)=e^x-2。$$

由于在 $(0,\ln 2)$ 上 $f''(x)<0$，$f'(x)$ 在 $[0,\ln 2]$ 严格单调减少；在 $(\ln 2,+\infty)$ 上 $f''(x)>0$，$f'(x)$ 在 $[\ln 2,+\infty)$ 严格单调增加。所以 $x=\ln 2$ 为 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值点。由于 $f'(\ln 2)=2-2\ln 2+2a>0$，所以 $f'(x)>0,\ \forall x>0$。再由 $f(0)=0$，得到 $f(x)>0,\ \forall x>0$，证毕。

12．设 $k>0$，试问当 k 为何值时，方程 $\arctan x-kx=0$ 有正实根?

解 令 $f(x)=\arctan x-kx$，则

$$f(0)=0, f(+\infty)=-\infty, f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-k。$$

当 $k\ge 1$ 时，$f'(x)<0\ (x\ne 0)$，所以 $f(x)$ 严格单调减少，由 $f(0)=0$ 可知方程无正实根；当 $0<k<1$ 时，$f'(0)>0$，所以当 $x>0$ 很小时 $f(x)>0$，由连续函数的零点存在定理，可知方程必有正实根。

13．对 a 作了 n 次测量后获得了 n 个近似值 $\{a_k\}_{k=1}^n$，现在要取使得

$$s=\sum_{k=1}^{n}(a_k-\xi)^2$$

达到最小的 ξ 作为 a 的近似值，ξ 应如何取?

解 由

$$\frac{ds}{d\xi}=\sum_{k=1}^{n}-2(a_k-\xi)=-2(\sum_{k=1}^{n}a_k-n\xi)=0,$$

可得$\xi=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$，这就是使$s$达到最小的$a$的近似值。

14．证明：对于给定了体积的圆柱形，当它的高与底面的直径相等的时候表面积最小。

证 设圆柱体的底面半径为r，高为h，则圆柱体的体积$V=\pi r^2 h$。其表面积为

$$S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi(r^2+\frac{V}{\pi r}),$$

$$\frac{dS}{dr}=2\pi(2r-\frac{V}{\pi r^2})=0\text{。}$$

求解上述方程，得到

$$r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}},\quad h=\frac{V}{\pi r^2}=2r,$$

此时圆柱体的表面积最小，证毕。

15. 在底为a高为h的三角形中作内接矩形，矩形的一条边与三角形的底边重合，求此矩形的最大面积?

解 设矩形的底边（与三角形底边重合者）长为x，高为y，由

$$\frac{x}{a}=\frac{h-y}{h},$$

可知矩形面积为

$$S=xy=\frac{a}{h}(h-y)y,$$

$$\frac{dS}{dy}=\frac{a}{h}(h-2y)=0,$$

解得

$$y=\frac{h}{2},x=\frac{a}{2},$$

所以当$y=\frac{h}{2}, x=\frac{a}{2}$时，矩形面积最大，最大面积为$S=\frac{ah}{4}$。

16．求内接于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，边与椭圆的轴平行的面积最大的矩形。

解 设矩形的长与宽分别为$2x$与$2y$，则$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，矩形的面积为

$$S=4xy=\frac{4bx\sqrt{a^2-x^2}}{a},$$

$$\frac{dS}{dx}=\frac{4b}{a}\left(\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)=0,$$

解得$x=\frac{a}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{b}{\sqrt{2}}$，所以当矩形的边长分别为$\sqrt{2}a$与$\sqrt{2}b$时，内接矩形的面积最大。

17．将一块半径为r的圆铁片剪去一个圆心角为θ的扇形后做成一个漏斗，问θ为何值时漏斗的容积最大?

解 可以求得漏斗的底面半径为$\frac{(2\pi-\theta)r}{2\pi}$，高度为

$$\sqrt{r^2-\left[\frac{(2\pi-\theta)r}{2\pi}\right]^2}=\frac{r}{2\pi}\sqrt{4\pi\theta-\theta^2},$$

所以漏斗的容积为

$$V=\frac{1}{3}\pi\left[\frac{(2\pi-\theta)r}{2\pi}\right]^2\cdot\frac{r}{2\pi}\sqrt{4\pi\theta-\theta^2}=\frac{r^3}{24\pi^2}(2\pi-\theta)^2\sqrt{4\pi\theta-\theta^2},$$

$$\frac{dV}{d\theta}=\frac{r^3(2\pi-\theta)}{24\pi^2\sqrt{4\pi\theta-\theta^2}}(3\theta^2-12\pi\theta+4\pi^2)=0,$$

上式关于θ在$(0,2\pi)$中有唯一解

$$\theta=2\pi\left(1-\frac{\sqrt{6}}{3}\right),$$

这就是使漏斗容积最大的角度θ。

18. 要做一个容积为V的有盖的圆柱形容器，上下两个底面的材料价格为每单位面积a元，侧面的材料价格为每单位面积b元，问直径与

高的比例为多少时造价最省?

解 设圆柱形容器的底面直径为 D，高为 H。则容积$V=\frac{1}{4}\pi D^2 H$，造价为

$$P=\frac{2}{4}\pi D^2 a+\pi DHb=\frac{1}{2}\pi D^2 a+\frac{4Vb}{D},$$
$$\frac{dP}{dD}=\pi Da-\frac{4Vb}{D^2}=0,$$

解得

$$D=\sqrt[3]{\frac{4Vb}{\pi a}},\quad H=\frac{4V}{\pi D^2},$$

这时$\frac{D}{H}=\frac{\pi D^3}{4V}=\frac{b}{a}$，所以，当直径与高的比例为$\frac{b}{a}$时造价最省。

19. 要建造一个变电站 M 向 A、B 两地送电（图 5.5.6)，M 与 A 之间的电缆每千米a元，与 B 之间的电缆每千米b元，为使总投资最小，问变电站 M 的位置应满足什么性质?

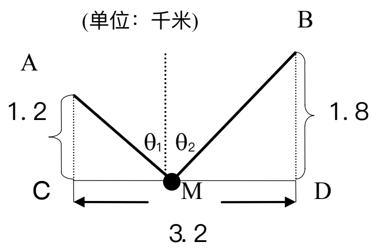


图 5.5.6

解 设 C 与 M 之间距离为 x，则

$$|AM|=\sqrt{x^2+1.2^2},\quad |BM|=\sqrt{(3.2-x)^2+1.8^2},$$

变电站的总投资为

$$\begin{aligned}P&=a|AM|+b|BM|\\&=a\sqrt{1.44+x^2}+b\sqrt{3.24+(3.2-x)^2},\end{aligned}$$

由

$$\frac{dP}{dx}=\frac{ax}{|AM|}-\frac{b(3.2-x)}{|BM|}=0,$$

得到

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{\frac{|CM|}{|AM|}}{\frac{|DM|}{|BM|}}=\frac{b}{a},$$

这就是变电站 M 的位置应满足的性质。

习　题　6.1

1．求下列不定积分：

(1) $\int (x^3+2x^2-5\sqrt{x})dx$；　　(2) $\int (\sin x+3\mathrm{e}^x)dx$；

(3) $\int (x^a+a^x)dx$；　　(4) $\int (2+\cot^2 x)dx$；

(5) $\int (2\csc^2 x-\sec x\tan x)dx$；　　(6) $\int (x^2-2)^3 dx$；

(7) $\int (x+\dfrac{1}{x})^2 dx$；　　(8) $\int \left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+1\right)dx$；

(9) $\int \left(2^x+\dfrac{1}{3^x}\right)^2 dx$；　　(10) $\int \dfrac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x}dx$；

(11) $\int \dfrac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$；　　(12) $\int \left(\dfrac{2}{1+x^2}-\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$；

(13) $\int (1-x^2)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$；　　(14) $\int \dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$.

解 (1) $\int (x^3+2x^2-5\sqrt{x})dx=\int x^3dx+2\int x^2dx-5\int \sqrt{x}dx=\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$。

(2) $\int (\sin x+3\mathrm{e}^x)dx=\int \sin xdx+3\int e^xdx=-\cos x+3e^x+C$。

(3) $\int (x^a+a^x)dx=\int x^adx+\int a^xdx=\dfrac{1}{a+1}x^{a+1}+\dfrac{a^x}{\ln a}+C\ (a\neq 1)$。

(4) $\int (2+\cot^2 x)dx=\int (1+\csc^2 x)dx=x-\cot x+C$。

(5) $\int (2\csc^2 x-\sec x\tan x)dx=2\int \csc^2 xdx-\int \sec x\tan xdx=-2\cot x-\sec x+C$。

(6) $\int (x^2-2)^3 dx=\int (x^6-6x^4+12x^2-8)dx=\dfrac{1}{7}x^7-\dfrac{6}{5}x^5+4x^3-8x+C$。

(7) $\int (x+\dfrac{1}{x})^2 dx=\int (x^2+2+\dfrac{1}{x^2})dx=\dfrac{1}{3}x^3+2x-\dfrac{1}{x}+C$。

(8) $\int \left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+1\right)dx$

$$=\int (2+\frac{1}{\sqrt[6]{x^7}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x})dx=2x-\frac{6}{\sqrt[6]{x}}+3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C。$$

(9) $\int\left(2^x+\frac{1}{3^x}\right)^2 dx=\int\left(4^x+2\cdot(\frac{2}{3})^x+\frac{1}{9^x}\right)dx$

$=\frac{1}{\ln 4}4^x+\frac{2}{\ln 2-\ln 3}(\frac{2}{3})^x-\frac{1}{\ln 9}\frac{1}{9^x}+C$。

(10) $\int\frac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x}dx=\int 2dx-5\int(\frac{2}{3})^x dx=2x-\frac{5}{\ln 2-\ln 3}\cdot(\frac{2}{3})^x+C$。

(11) $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx=\int(\cos x+\sin x)dx=\sin x-\cos x+C$。

(12) $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=2\int\frac{dx}{1+x^2}-3\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=2\arctan x-3\arcsin x+C$。

(13) $\int(1-x^2)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx=\int(x^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{11}{4}})dx=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}-\frac{4}{15}x^{\frac{15}{4}}+C$。

(14) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int\csc^2 xdx-\int\sec^2 xdx$

$=-\cot x-\tan x+C=-2\csc 2x+C$。

2. 曲线 $y=f(x)$ 经过点 $(\mathrm{e},-1)$，且在任一点处的切线斜率为该点横坐标的倒数，求该曲线的方程。

解 由题意，曲线 $y=f(x)$ 在点 (x,y) 处的切线斜率为 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$，于是 $y=\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$，将点 $(\mathrm{e},-1)$ 代入，得 $C=-2$，所以曲线的方程为 $y=\ln|x|-2$。

3. 已知曲线 $y=f(x)$ 在任意一点 $(x,f(x))$ 处的切线斜率都比该点横坐标的立方根少 1，

(1) 求出该曲线方程的所有可能形式，并在直角坐标系中画出示意图；

(2) 若已知该曲线经过 $(1,1)$ 点，求该曲线的方程。

解 (1) 由题意可得 $\frac{dy}{dx}=\sqrt[3]{x}-1$，所以 $y=\int(\sqrt[3]{x}-1)dx=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-x+C$，这

就是所求曲线方程的所有可能形式。

（2）将点$(1,1)$代入上述方程，可得$C=\frac{5}{4}$，所以过点$(1,1)$的曲线方程为$y=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-x+\frac{5}{4}$。

习　题　6.2　换元积分法和分部积分法

1．求下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{4x-3}$；　　(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}}$；

(3) $\int \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$；　　(4) $\int e^{3x+2}\,dx$；

(5) $\int (2^x+3^x)^2\,dx$；　　(6) $\int \frac{1}{2+5x^2}\,dx$；

(7) $\int \sin^5 x dx$；　　(8) $\int \tan^{10} x \sec^2 x dx$；

(9) $\int \sin 5x \cos 3x dx$；　　(10) $\int \cos^2 5x dx$；

(11) $\int \frac{(2x+4)dx}{(x^2+4x+5)^2}$；　　(12) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$；

(13) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{1-2x^3}}$；　　(14) $\int \frac{1}{1-\sin x}\,dx$；

(15) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\,dx$；　　(16) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$；

(17) $\int \frac{dx}{x^2-2x+2}$；　　(18) $\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx$；

(19) $\int \tan\sqrt{1+x^2}\,\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$；　　(20) $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\,dx$.

解　(1) $\int \frac{dx}{4x-3}=\frac{1}{4}\int \frac{d(4x-3)}{4x-3}=\frac{1}{4}\ln|4x-3|+C$ 。

(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\sqrt{2}x)}{\sqrt{1-2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{2}x)+C$ 。

(3) $\int \frac{dx}{e^x-e^{-x}}=\int \frac{d\,e^x}{e^{2x}-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C$ 。

(4) $\int e^{3x+2}\,dx=\frac{1}{3}\int e^{3x+2}\,d(3x+2)=\frac{1}{3}e^{3x+2}+C$ 。

(5) $\int(2^x+3^x)^2dx=\int(2^{2x}+2\cdot 6^x+3^{2x})dx=\dfrac{1}{2\ln 2}2^{2x}+\dfrac{2}{\ln 6}6^x+\dfrac{1}{2\ln 3}3^{2x}+C$ 。

(6) $\int\dfrac{1}{2+5x^2}dx=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\int\dfrac{1}{2+5x^2}d(\sqrt{5}x)=\dfrac{1}{\sqrt{10}}\arctan\sqrt{\dfrac{5}{2}}x+C$ 。

(7) $\int\sin^5 xdx=\int(1-\cos^2 x)^2\sin xdx=-\int(1-2\cos^2 x+\cos^4 x)d\cos x$

$=-\cos x+\dfrac{2}{3}\cos^3 x-\dfrac{1}{5}\cos^5 x+C$ 。

(8) $\int\tan^{10}x\sec^2 xdx=\int\tan^{10}xd\tan x=\dfrac{1}{11}\tan^{11}x+C$ 。

(9) $\int\sin 5x\cos 3xdx=\dfrac{1}{2}\int(\sin 8x+\sin 2x)dx=-\dfrac{1}{16}\cos 8x-\dfrac{1}{4}\cos 2x+C$ 。

(10) $\int\cos^2 5xdx=\dfrac{1}{2}\int(1+\cos 10x)dx=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{20}\sin 10x+C$ 。

(11) $\int\dfrac{(2x+4)dx}{(x^2+4x+5)^2}=\int\dfrac{d(x^2+4x+5)}{(x^2+4x+5)^2}=-\dfrac{1}{x^2+4x+5}+C$ 。

(12) $\int\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=2\int\sin\sqrt{x}d\sqrt{x}=-2\cos\sqrt{x}+C$ 。

(13) $\int\dfrac{x^2dx}{\sqrt[4]{1-2x^3}}=-\dfrac{1}{6}\int\dfrac{d(1-2x^3)}{\sqrt[4]{1-2x^3}}=-\dfrac{2}{9}(1-2x^3)^{\frac{3}{4}}+C$ 。

(14) $\int\dfrac{1}{1-\sin x}dx=\int\dfrac{1}{\sin^2(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4})}d(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4})=-\cot(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4})+C$ 。

(15) $\int\dfrac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx=\int\dfrac{d(\sin x-\cos x)}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}=\dfrac{3}{2}(\sin x-\cos x)^{\frac{2}{3}}+C$ 。

(16) $\int\dfrac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}=\int\dfrac{d\arcsin x}{(\arcsin x)^2}=-\dfrac{1}{\arcsin x}+C$ 。

(17) $\int\dfrac{dx}{x^2-2x+2}=\int\dfrac{d(x-1)}{1+(x-1)^2}=\arctan(x-1)+C$ 。

(18) $\int\dfrac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}dx=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{d(2x)}{\sqrt{9-4x^2}}+\dfrac{1}{8}\int\dfrac{d(9-4x^2)}{\sqrt{9-4x^2}}$ 。

$=\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{4}\sqrt{9-4x^2}+C$ 。

(19) $\int\tan\sqrt{1+x^2}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int\tan\sqrt{1+x^2}d\sqrt{1+x^2}=-\ln\left|\cos\sqrt{1+x^2}\right|+C$ 。

(20) $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x} dx = \frac{1}{2}\int \frac{d\sin^2 x}{1+\sin^4 x} = \frac{1}{2}\arctan(\sin^2 x) + C$。

2. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$；

(2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$；

(3) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx$；

(4) $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2} dx$.

(5) $\int (x-1)(x+2)^{20} dx$；

(6) $\int x^2 (x+1)^n dx$；

(7) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$；

(8) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx$；

(9) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$；

(10) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$；

(11) $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx$；

(12) $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx$；

(13) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x}}$；

(14) $\int x^2 \sqrt[3]{1-x}\, dx$；

(15) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$；

(16) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$；

(17) $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4} dx$；

(18) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}$；

(19) $\int \frac{x^{15}}{(x^4-1)^3} dx$；

(20) $\int \frac{1}{x(x^n+1)} dx$；

解 (1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = -\int \frac{de^{-x}}{\sqrt{e^{-2x}+1}} = -\ln(e^{-x}+\sqrt{e^{-2x}+1}) + C$

$= \ln(\sqrt{1+e^{2x}}-1) - x + C$。

(2) 当$x>0$时，

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^{-2}+1}} = -\int \frac{dx^{-1}}{\sqrt{1+x^{-2}}} = \ln\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{|x|} + C；$$

当$x<0$时，也有相同结果。

(3) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx = 2\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{1+x}d\sqrt{x} = 2\int \arctan\sqrt{x}d\arctan\sqrt{x}$

$=\arctan^2\sqrt{x}+C$。

(4) $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx = \int \frac{d(x\ln x)}{(x\ln x)^2} = -\frac{1}{x\ln x}+C$。

(5) $\int (x-1)(x+2)^{20}dx = \int [(x+2)^{21}-3(x+2)^{20}]dx$

$=\frac{1}{22}(x+2)^{22}-\frac{1}{7}(x+2)^{21}+C$。

(6) $\int x^2(x+1)^n dx = \int [(x+1)^{n+2}-2(x+1)^{n+1}+(x+1)^n]dx$

$=\frac{1}{n+3}(x+1)^{n+3}-\frac{2}{n+2}(x+1)^{n+2}+\frac{1}{n+1}(x+1)^{n+1}+C$。

(7) 当$x>0$时，

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{dx}{x^5\sqrt{1+x^{-2}}} = -\frac{1}{2}\int \frac{(x^{-2}+1-1)dx^{-2}}{\sqrt{1+x^{-2}}}$$

$$=-\frac{1}{3}\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C\ ;$$

当$x<0$时，也有相同结果。

注：本题也可令$x=\tan t$化简后解得。

(8) 当$x>0$时，

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx = \int \frac{x^2-9}{x\sqrt{x^2-9}}dx = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-9}}+3\int \frac{d(3x^{-1})}{\sqrt{1-9x^{-2}}}$$

$$=\sqrt{x^2-9}+3\arcsin\frac{3}{x}+C\ ;$$

当$x<0$时，也有相同结果。

注：本题也可令$x=3\sec t$化简后解得。

(9) 令$x=\sin t$，则

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}=\int\frac{\cos tdt}{\cos^3 t}=\int\sec^2 tdt=\tan t+c=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C\text{。}$$

（10） 令 $x=a\tan t$，则

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}=\int\frac{\cos t}{a^2}dt=\frac{1}{a^2}\sin t+c=\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C\text{。}$$

（11） $\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx=\int\frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\sqrt{x^2-a^2}-a\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$。

（12） $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx=\int\frac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}}dx=-\int\sqrt{2ax-x^2}dx+\int\frac{2ax}{\sqrt{2ax-x^2}}dx$

$$=-\int\sqrt{2ax-x^2}dx-a\int\frac{d(2ax-x^2)}{\sqrt{2ax-x^2}}+2a^2\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

$$=-\frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2}+\frac{3}{2}a^2\arcsin\frac{x-a}{a}-2a\sqrt{2ax-x^2}+C$$

$$=-\frac{x+3a}{2}\sqrt{2ax-x^2}+\frac{3}{2}a^2\arcsin\frac{x-a}{a}+C\text{。}$$

注：本题答案也可写成 $-\frac{x+3a}{2}\sqrt{2ax-x^2}+3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}+C$。

（13） 令 $t=\sqrt{2x}$，则 $x=\frac{1}{2}t^2,dx=tdt$， 于是

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{2x}}=\int\frac{tdt}{1+t}=t-\ln|1+t|+c=\sqrt{2x}-\ln(1+\sqrt{2x})+C\text{。}$$

（14） 令 $t=\sqrt[3]{1-x}$，则 $x=1-t^3,dx=-3t^2dt$， 于是

$$\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,dx=-3\int(1-t^3)^2t^3dt=-3\int(t^3-2t^6+t^9)dt$$

$$=-\frac{3}{4}(1-x)^{\frac{4}{3}}+\frac{6}{7}(1-x)^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{10}(1-x)^{\frac{10}{3}}+C\text{。}$$

（15） $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^{-2}}}=-\int\frac{dx^{-1}}{\sqrt{1-x^{-2}}}=\arccos\frac{1}{x}+C$。

（16） 令 $x=a\sin t$，则

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int a^2\sin^2 tdt=\frac{a^2}{2}\int(1-\cos 2t)dt$$

$$=\frac{a^2}{2}t-\frac{a^2}{4}\sin 2t+c=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C。$$

（17）令 $x=a\cos t$，则

$$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx=-\frac{1}{a^2}\int\frac{\sin^2 t}{\cos^4 t}dt=-\frac{1}{a^2}\int\tan^2 t d\tan x$$

$$=-\frac{1}{3a^2}\tan^3 t+c=-\frac{1}{3a^2}\cdot\frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{x^3}+C。$$

（18）$\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{(1-\sqrt{1-x^2})dx}{x^2}=-\frac{1}{x}-\int\frac{1-x^2}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx^{-2}}{\sqrt{x^{-2}-1}}+\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}+\arcsin x+C。$$

注：本题也可令 $x=\sin t$ 后，解得

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x-\tan(\frac{1}{2}\arcsin x)+C。$$

（19）令 $t=x^4-1$，则

$$\int\frac{x^{15}}{(x^4-1)^3}dx=\frac{1}{4}\int\frac{x^{12}}{(x^4-1)^3}dx^4=\frac{1}{4}\int\frac{(t+1)^3}{t^3}dt$$

$$=\frac{1}{4}\int(1+\frac{3}{t}+\frac{3}{t^2}+\frac{1}{t^3})dt=\frac{1}{4}t+\frac{3}{4}\ln|t|-\frac{3}{4t}-\frac{1}{8t^2}+C$$

$$=\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{4}\ln|x^4-1|-\frac{3}{4(x^4-1)}-\frac{1}{8(x^4-1)^2}+C。$$

（20）$\int\frac{1}{x(x^n+1)}dx=\int\frac{1}{x^{n+1}(1+x^{-n})}dx=-\frac{1}{n}\int\frac{dx^{-n}}{1+x^{-n}}$

$$=-\frac{1}{n}\ln|1+x^{-n}|+c=\frac{1}{n}\ln\left|\frac{x^n}{1+x^n}\right|+C。$$

3. 求下列不定积分：

（1）$\int x\,e^{2x}\,dx$；　　（2）$\int x\ln(x-1)dx$；

（3）$\int x^2\sin 3xdx$；　　（4）$\int\frac{x}{\sin^2 x}dx$；

(5) $\int x\cos^2 xdx$；　　(6) $\int \arcsin x\,dx$；

(7) $\int \arctan xdx$；　　(8) $\int x^2 \arctan xdx$；

(9) $\int x\tan^2 xdx$；　　(10) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}dx$；

(11) $\int \ln^2 x\,dx$；　　(12) $\int x^2 \ln x\,dx$；

(13) $\int e^{-x}\sin 5xdx$；　　(14) $\int e^x \sin^2 x\,dx$；

(15) $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}dx$；　　(16) $\int \cos(\ln x)\,dx$；

(17) $\int (\arcsin x)^2 dx$；　　(18) $\int \sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}\,dx$；

(19) $\int e^{\sqrt{x+1}}\,dx$；　　(20) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$.

解（1）$\int x e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{4}e^{2x}(2x-1)+C$。

(2) $\int x\ln(x-1)\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x-1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x-1}dx = \frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x-1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + C$。

（3）$\int x^2\sin 3xdx = -\frac{1}{3}x^2\cos 3x + \frac{2}{3}\int x\cos 3xdx$

$= \frac{1}{9}(2x\sin 3x - 3x^2\cos 3x) - \frac{2}{9}\int \sin 3xdx$

$= \frac{2}{9}x\sin 3x - (\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{27})\cos 3x + C$。

（4）$\int \frac{x}{\sin^2 x}dx = -x\cot x + \int \cot xdx = -x\cot x + \ln|\sin x| + C$。

（5）$\int x\cos^2 xdx = \frac{1}{2}\int x(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{4}(x^2 + x\sin 2x) - \frac{1}{4}\int \sin 2xdx$

$= \frac{1}{4}(x^2 + x\sin 2x) + \frac{1}{8}\cos 2x + C$。

（6）$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$。

（7）$\int \arctan xdx = x\arctan x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$。

（8）$\int x^2\arctan xdx = \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2}dx = \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}\int \frac{xdx}{1+x^2}$

$= \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + C$。

（9） $\int x\tan^2 xdx = \int x(\sec^2 x-1)dx = x\tan x-\frac{1}{2}x^2-\int\tan xdx$

$=x\tan x-\frac{1}{2}x^2+\ln|\cos x|+C$ 。

（10） $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}dx = -2\int\arcsin xd\sqrt{1-x} = -2\sqrt{1-x}\arcsin x+2\int\frac{dx}{\sqrt{1+x}}$

$=-2\sqrt{1-x}\arcsin x+4\sqrt{1+x}+C$ 。

（11） $\int\ln^2 x\,dx = x\ln^2 x-2\int\ln xdx = x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C$ 。

（12） $\int x^2\ln x\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$ 。

（13） $\int \mathrm{e}^{-x}\sin 5xdx = -e^{-x}\sin 5x+5\int e^{-x}\cos 5xdx$

$=-e^{-x}(\sin 5x+5\cos 5x)-25\int e^{-x}\sin 5xdx$，

所以

$$\int \mathrm{e}^{-x}\sin 5xdx = -\frac{1}{26}e^{-x}(\sin 5x+5\cos 5x)+C\text{。}$$

（14） $\int \mathrm{e}^{x}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int e^x dx-\frac{1}{2}\int e^x\cos 2xdx = \frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}\int e^x\cos 2xdx$ 。

$\int e^x\cos 2xdx = e^x\cos 2x+2\int e^x\sin 2xdx = e^x(\cos 2x+2\sin 2x)-4\int e^x\cos 2xdx$，

从而

$$\int e^x\cos 2xdx = \frac{1}{5}e^x(\cos 2x+2\sin 2x)+C\text{，}$$

所以

$$\int \mathrm{e}^{x}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}e^x-\frac{1}{10}e^x(\cos 2x+2\sin 2x)+C\text{。}$$

（15） $\int\frac{\ln^3 x}{x^2}dx = -\frac{\ln^3 x}{x}+3\int\frac{\ln^2 x}{x^2}dx = -\frac{\ln^3 x+3\ln^2 x}{x}+6\int\frac{\ln x}{x^2}dx$

$=-\frac{\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x}{x}+6\int\frac{1}{x^2}dx = -\frac{\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6}{x}+C$ 。

（16） $\int\cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x)+\int x\sin(\ln x)\frac{1}{x}dx$

$=x[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]-\int\cos(\ln x)dx$，

所以

$$\int \cos(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}x[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]+C \text{。}$$

注：若令 $t=\ln x$，则可看出本题与第（13）题本质上是同一种类型题。

（17）$\int (\arcsin x)^2 dx = x(\arcsin x)^2 - 2\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x dx$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\int \arcsin x d\sqrt{1-x^2}$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C \text{。}$$

（18）令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，于是

$$\int \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,dx = 2\int te^t t dt = 2e^t t^2 - 4\int te^t dt = 2e^t(t^2-2t) + 4\int e^t dt$$

$$= 2e^t(t^2-2t+2)+c = 2e^{\sqrt{x}}(x-2\sqrt{x}+2)+C \text{。}$$

（19）令 $t=\sqrt{x+1}$，则 $x=t^2-1$，于是

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x+1}}\,dx = 2\int \mathrm{e}^t t dt = 2te^t - 2\int e^t dt = 2e^t(t-1)+c = 2e^{\sqrt{x+1}}(\sqrt{x+1}-1)+C \text{。}$$

（20）$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C \text{。}$$

4． 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\frac{\sin x}{1+x\sin x}$，求 $\int f(x)f'(x)dx$ 。

解 由题意

$$f(x) = \left(\frac{\sin x}{1+x\sin x}\right)' = \frac{\cos x - \sin^2 x}{(1+x\sin x)^2},$$

于是

$$\int f(x)f'(x)dx = \int f(x)df(x) = \frac{1}{2}f^2(x)+C = \frac{(\cos x-\sin^2 x)^2}{2(1+x\sin x)^4}+C \text{。}$$

5．设 $f'(\sin^2 x) = \cos 2x + \tan^2 x$，求 $f(x)$ 。

解 设 $t=\sin^2 x$，则

$$f'(t) = 1-2\sin^2 x + \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} = 1-2t+\frac{t}{1-t} = \frac{1}{1-t}-2t,$$

从而

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(\frac{1}{1-x}-2x)dx=-\ln|1-x|-x^2+C\text{。}$$

6．设 $f(\ln x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$，求 $\int f(x)dx$。

解 令 $t=\ln x$，则 $x=e^t, f(t)=\frac{\ln(1+e^t)}{e^t}$，于是

$$\int f(x)dx=\int\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}dx=-\int\ln(1+e^x)de^{-x}=-\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}+\int e^{-x}\frac{e^x}{1+e^x}dx$$

$$=-\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}-\int\frac{1}{e^{-x}+1}de^{-x}=-\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}-\ln(e^{-x}+1)+C$$

$$=-(e^{-x}+1)\ln(1+e^x)+x+C\text{。}$$

7. 求不定积分 $\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ 与 $\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$。

解 记 $I_1=\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$，$I_2=\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$，则

$$I_1+I_2=\int dx=x+C_1,\quad I_1-I_2=\int\frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=\ln|\sin x+\cos x|+C_2,$$

于是

$$I_1=\frac{1}{2}(x+\ln|\sin x+\cos x|)+C,\quad I_2=\frac{1}{2}(x-\ln|\sin x+\cos x|)+C\text{。}$$

8．求下列不定积分的递推表达式（n 为非负整数）：

（1）$\mathrm{I}_n=\int\sin^n xdx$；　　（2）$\mathrm{I}_n=\int\tan^n xdx$；

（3）$\mathrm{I}_n=\int\frac{dx}{\cos^n x}$；　　（4）$\mathrm{I}_n=\int x^n\sin x\,dx$；

（5）$\mathrm{I}_n=\int \mathrm{e}^x\sin^n x\,dx$；　　（6）$\mathrm{I}_n=\int x^\alpha\ln^n xdx$；

（7）$\mathrm{I}_n=\int\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx$；　　（8）$\mathrm{I}_n=\int\frac{dx}{x^n\sqrt{1+x}}$.

解（1）

$$\mathrm{I}_n=\int\sin^n xdx=-\int\sin^{n-1}xd\cos x=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x\cos^2 xdx$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)(\mathrm{I}_{n-2}-\mathrm{I}_n),$$

于是

$$\mathrm{I}_n=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}\mathrm{I}_{n-2}\,(n=2,3,4,\cdots),$$

其中$\mathrm{I}_0=x+C,\mathrm{I}_1=-\cos x+C$。

（2） $\mathrm{I}_n=\int\tan^n xdx=\int\tan^{n-2}x(\sec^2 x-1)dx=\int\tan^{n-2}xd\tan x-\mathrm{I}_{n-2}$

$$=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-\mathrm{I}_{n-2}\ (n=2,3,4,\cdots),$$

其中$I_0=x+C,I_1=-\ln|\cos x|+C$。

（3） $\mathrm{I}_n=\int\frac{dx}{\cos^n x}=\int\frac{d\tan x}{\cos^{n-2}x}=\frac{\tan x}{\cos^{n-2}x}-(n-2)\int\frac{\tan x}{\cos^{n-1}x}\sin xdx$

$$=\frac{\tan x}{\cos^{n-2}x}-(n-2)\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^n x}dx=\frac{\tan x}{\cos^{n-2}x}-(n-2)(\mathrm{I}_\mathrm{n}-\mathrm{I}_{n-2}),$$

于是

$$\mathrm{I}_n=\frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\mathrm{I}_{n-2}\ (n=2,3,4,\cdots),$$

其中$I_0=x+C,I_1=\ln|\sec x+\tan x|+C$。

（4） $\mathrm{I}_n=\int x^n\sin x\,dx=-\int x^n d\cos x=-x^n\cos x+n\int x^{n-1}\cos xdx$

$$=-x^n\cos x+nx^{n-1}\sin x-n(n-1)\int x^{n-2}\sin xdx$$

$$=-x^n\cos x+nx^{n-1}\sin x-n(n-1)\mathrm{I}_{n-2}\ (n=2,3,4,\cdots),$$

其中$I_0=-\cos x+C,I_1=-x\cos x+\sin x+C$。

（5） $\mathrm{I}_n=\int\mathrm{e}^x\sin^n x\,dx=e^x\sin^n x-n\int\mathrm{e}^x\sin^{n-1}x\cos xdx$

$$=e^x\sin^n x-ne^x\sin^{n-1}x\cos x+n\int\mathrm{e}^x[(n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x-\sin^n x]dx$$

$$=e^x\sin^n x-ne^x\sin^{n-1}x\cos x+n[(n-1)\mathrm{I}_{n-2}-n\mathrm{I}_n],$$

于是

$$\mathrm{I}_n=\frac{1}{1+n^2}e^x(\sin^n x-n\sin^{n-1}x\cos x)+\frac{n(n-1)}{1+n^2}\mathrm{I}_{n-2}\ (n=2,3,4,\cdots),$$

其中$I_0=e^x+C,I_1=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$。

（6）当$\alpha=-1$时，

$$\mathrm{I}_n=\int x^{-1}\ln^n x dx=\int \ln^n x\, d\ln x=\frac{1}{n+1}\ln^{n+1} x+C；$$

当$\alpha\neq -1$时，

$$\mathrm{I}_n=\int x^{\alpha}\ln^n x dx=\frac{1}{1+\alpha}\left(x^{1+\alpha}\ln^n x-n\int x^{1+\alpha}\ln^{n-1}x\cdot\frac{1}{x}dx\right)$$

$$=\frac{1}{1+\alpha}x^{1+\alpha}\ln^n x-\frac{n}{1+\alpha}\mathrm{I}_{n-1}\ (n=1,2,3,\cdots),$$

其中$I_0=\dfrac{1}{1+\alpha}x^{1+\alpha}+C$。

（7）$\mathrm{I}_n=\int\dfrac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\int x^{n-1}d\sqrt{1-x^2}=-x^{n-1}\sqrt{1-x^2}+(n-1)\int x^{n-2}\sqrt{1-x^2}dx$

$$=-x^{n-1}\sqrt{1-x^2}+(n-1)\int\frac{x^{n-2}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx=-x^{n-1}\sqrt{1-x^2}+(n-1)(\mathrm{I}_{n-2}-\mathrm{I}_n),$$

于是

$$\mathrm{I}_n=-\frac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{1-x^2}+\frac{n-1}{n}\mathrm{I}_{n-2}\ (n=2,3,4,\cdots),$$

其中$I_0=\arcsin x+C, I_1=-\sqrt{1-x^2}+C$。

（8）$\mathrm{I}_n=\int\dfrac{dx}{x^n\sqrt{1+x}}=2\int\dfrac{d\sqrt{1+x}}{x^n}=2\dfrac{\sqrt{1+x}}{x^n}+2n\int\dfrac{\sqrt{1+x}}{x^{n+1}}dx$

$$=2\frac{\sqrt{1+x}}{x^n}+2n\int\frac{1+x}{x^{n+1}\sqrt{1+x}}dx=2\frac{\sqrt{1+x}}{x^n}+2n(\mathrm{I}_{n+1}+\mathrm{I}_n),$$

于是

$$\mathrm{I}_n=-\frac{1}{n-1}\frac{\sqrt{1+x}}{x^{n-1}}-\frac{2n-3}{2n-2}\mathrm{I}_{n-1}\ (\mathrm{n}=2,3,4,\cdots)。$$

其中$I_0=2\sqrt{1+x}+C,\quad I_1=\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right|+C$。

9. 导出求$\int\dfrac{(ax+b)dx}{x^2+2\xi x+\eta^2}$，$\int\dfrac{(ax+b)dx}{\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}}$和$\int(ax+b)\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}dx$型不定积分的公式。

解 $\int\dfrac{(ax+b)dx}{x^2+2\xi x+\eta^2}=\dfrac{a}{2}\int\dfrac{d(x^2+2\xi x+\eta^2)}{x^2+2\xi x+\eta^2}+(b-a\xi)\int\dfrac{dx}{(x+\xi)^2+\eta^2-\xi^2}$

$$=\begin{cases} a\ln|x+\xi|-\dfrac{b-a\xi}{x+\xi}+C, \quad |\xi|=|\eta|\text{；} \\ \dfrac{a}{2}\ln\left|x^2+2\xi x+\eta^2\right|+\dfrac{b-a\xi}{\sqrt{\eta^2-\xi^2}}\arctan\dfrac{x+\xi}{\sqrt{\eta^2-\xi^2}}+C, \quad |\xi|\langle|\eta|\text{；} \\ \dfrac{a}{2}\ln\left|x^2+2\xi x+\eta^2\right|+\dfrac{b-a\xi}{2\sqrt{\xi^2-\eta^2}}\ln\left|\dfrac{x+\xi-\sqrt{\xi^2-\eta^2}}{x+\xi+\sqrt{\xi^2-\eta^2}}\right|+C, \quad |\xi|\rangle|\eta|\text{。} \end{cases}$$

$$\int\frac{(ax+b)dx}{\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}}=\frac{a}{2}\int\frac{d(x^2+2\xi x+\eta^2)}{\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}}+(b-a\xi)\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}}$$

$$=a\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}+(b-a\xi)\ln\left|x+\xi+\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}\right|+C\text{。}$$

$$\int(ax+b)\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}\,dx$$

$$=\frac{a}{2}\int\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}\,d(x^2+2\xi x+\eta^2)+(b-a\xi)\int\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}\,dx$$

$$=\frac{a}{3}(x^2+2\xi x+\eta^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{b-a\xi}{2}\left[(x+\xi)\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}+(\eta^2-\xi^2)\ln\left|(x+\xi)+\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}\right|\right]\text{。}$$

10. 求下列不定积分:

（1） $\int(5x+3)\sqrt{x^2+x+2}\,dx$；　　（2） $\int(x-1)\sqrt{x^2+2x-5}\,dx$；

（3） $\int\dfrac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$；　　（4） $\int\dfrac{(x+2)dx}{\sqrt{5+x-x^2}}$.

解（1） $\int(5x+3)\sqrt{x^2+x+2}\,dx=\dfrac{5}{2}\int\sqrt{x^2+x+2}\,d(x^2+x+2)+\dfrac{1}{2}\int\sqrt{x^2+x+2}\,dx$

$$=\frac{5}{3}(x^2+x+2)^{\frac{3}{2}}+\frac{2x+1}{8}\sqrt{x^2+x+2}+\frac{7}{16}\ln(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+2})+C\text{。}$$

(2) $\int(x-1)\sqrt{x^2+2x-5}\,dx=\dfrac{1}{2}\int\sqrt{x^2+2x-5}\,d(x^2+2x-5)-2\int\sqrt{x^2+2x-5}\,dx$

$$=\frac{1}{3}(x^2+2x-5)^{\frac{3}{2}}-(x+1)\sqrt{x^2+2x-5}+6\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-5}\right|+C\text{。}$$

(3) $\int\dfrac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{d(x^2+x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}}-\dfrac{3}{2}\int\dfrac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}$

$=\sqrt{x^2+x+1}-\frac{3}{2}\ln(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1})+C$。

(4) $\int\frac{(x+2)dx}{\sqrt{5+x-x^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(5+x-x^2)}{\sqrt{5+x-x^2}}+\frac{5}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{5+x-x^2}}$

$=-\sqrt{5+x-x^2}+\frac{5}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{21}}+C$。

11． 设n次多项式$p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$,系数满足关系$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(i-1)!}=0$，证明不定积分$\int p\left(\frac{1}{x}\right)e^xdx$是初等函数。

证 设$I_k=\int\frac{1}{x^k}e^xdx$，则

$$I_k=-\frac{1}{k-1}\int e^xd\frac{1}{x^{k-1}}=-\frac{1}{k-1}\frac{e^x}{x^{k-1}}+\frac{1}{k-1}\int\frac{1}{x^{k-1}}e^xdx,$$

$$=-\frac{1}{k-1}\frac{e^x}{x^{k-1}}+\frac{1}{k-1}I_{k-1}\quad(k=2,3,\cdots,n),$$

由此得到

$$I_k=q_{k-1}(\frac{1}{x})e^x+\frac{1}{(k-1)!}\int\frac{e^x}{x}dx\ (k=2,3,\cdots,n),$$

其中$q_{k-1}(t)$是t的$k-1$次多项式。当$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(i-1)!}=0$时，积分

$$\int p\left(\frac{1}{x}\right)e^xdx=a_0e^x+\sum_{i=1}^{n}a_i\int\frac{e^x}{x^i}dx=a_0e^x+\sum_{i=2}^{n}a_iq_{i-1}(\frac{1}{x})e^x+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(i-1)!}\int\frac{e^x}{x}dx$$

$$=a_0e^x+\sum_{i=2}^{n}a_iq_{i-1}(\frac{1}{x})e^x+C$$

为初等函数。

习　题　6.3

1. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)^2}$；　(2) $\int \frac{2x+3}{(x^2-1)(x^2+1)}dx$；

(3) $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$；　(4) $\int \frac{dx}{(x^2+4x+4)(x^2+4x+5)^2}$；

(5) $\int \frac{3}{x^3+1}dx$；　(6) $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$；

(7) $\int \frac{x^4+5x+4}{x^2+5x+4}dx$；　(8) $\int \frac{x^3+1}{x^3+5x-6}dx$；

(9) $\int \frac{x^2}{1-x^4}dx$；　(10) $\int \frac{dx}{x^4+1}$；

(11) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$；　(12) $\int \frac{x^2+1}{x(x^3-1)}dx$；

(13) $\int \frac{x^2+2}{(x^2+x+1)^2}dx$；　(14) $\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}dx$；

(15) $\int \frac{x^9}{(x^{10}+2x^5+2)^2}dx$；　(16) $\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx$。

解（1） $\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{(x-1)(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$

$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{2(x+1)} + C$。

（2） $\int \frac{2x+3}{(x^2-1)(x^2+1)}dx$

设 $\frac{2x+3}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$，则

$(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1) \equiv 2x+3$，于是

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ A-C=2 \\ B-D=3 \end{cases},$$

解得 $A=1, C=-1, B=\dfrac{3}{2}, D=-\dfrac{3}{2}$。所以

$$\int \frac{2x+3}{(x^2-1)(x^2+1)}dx = \int\left(\frac{x}{x^2-1}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx+\frac{3}{2}\int\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|+\frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{3}{2}\arctan x+C。$$

（3）$\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$

设 $\dfrac{x}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$

$$=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{D}{x+3}+\frac{E}{(x+3)^2}+\frac{F}{(x+3)^3}，\text{则}$$

$$A(x+2)^2(x+3)^3+B(x+1)(x+2)(x+3)^3+C(x+1)(x+3)^3$$

$$+D(x+1)(x+2)^2(x+3)^2+E(x+1)(x+2)^2(x+3)+F(x+1)(x+2)^2\equiv x。$$

令 $x=-1$，得到 $A=-\dfrac{1}{8}$；令 $x=-2$，得到 $C=2$；令 $x=-3$，得到 $F=\dfrac{3}{2}$；再比较等式两边 x^5、x^4 的系数与常数项，得到

$$\begin{cases} A+B+D=0 \\ 13A+12B+C+11D+E=0 \\ 108A+54B+27C+36D+12E+4F=0 \end{cases}。$$

于是解得 $A=-\dfrac{1}{8}, B=-5, C=2, D=\dfrac{41}{8}, E=\dfrac{13}{4}, F=\dfrac{3}{2}$，即

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$$

$$=-\frac{1}{8(x+1)}-\frac{5}{x+2}+\frac{41}{8(x+3)}+\frac{2}{(x+2)^2}+\frac{13}{4(x+3)^2}+\frac{3}{2(x+3)^3}。$$

所以

$$\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$$

$$=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+3)^{41}}{(x+1)(x+2)^{40}}\right|-\frac{2}{x+2}-\frac{13}{4(x+3)}-\frac{3}{4(x+3)^2}+C \text{。}$$

（4） $\int \frac{dx}{(x^2+4x+4)(x^2+4x+5)^2}$

$$\frac{1}{(x^2+4x+4)(x^2+4x+5)^2}=\frac{1}{(x^2+4x+4)(x^2+4x+5)}-\frac{1}{(x^2+4x+5)^2}$$

$$=\frac{1}{x^2+4x+4}-\frac{1}{x^2+4x+5}-\frac{1}{(x^2+4x+5)^2}\text{，}$$

所以

$$\int \frac{dx}{(x^2+4x+4)(x^2+4x+5)^2}=-\frac{1}{x+2}-\arctan(x+2)-\int \frac{d(x+2)}{[1+(x+2)^2]^2}$$

$$=-\frac{1}{x+2}-\frac{x+2}{2(x^2+4x+5)}-\frac{3}{2}\arctan(x+2)+C \text{。}$$

（5） $\int \frac{3}{x^3+1}dx$

$$=\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)dx=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1}+\frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C \text{。}$$

（6）解一： $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\int \frac{(x^3+1)-(x^3-1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}dx$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{(x+1)dx}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\int \frac{(x-1)dx}{x^2-x+1}$$

$$=\frac{1}{4}\int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}+\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+x+1}-\frac{1}{4}\int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1}+\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}[\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}]+C \text{。}$$

解二：$\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{(1+x^2)dx}{x^4+x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{(1-x^2)dx}{x^4+x^2+1}$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{x-x^{-1}}{\sqrt{3}}+\frac{1}{4}\ln\frac{x+x^{-1}+1}{x+x^{-1}-1}+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}+C\text{。}$$

注：本题的答案也可以写成 $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{3}x}{1-x^2}+C$。

（7）$\int\frac{x^4+5x+4}{x^2+5x+4}dx$

$$\frac{x^4+5x+4}{x^2+5x+4}=x^2-5x+21-\frac{80}{x+4},$$

所以

$$\int\frac{x^4+5x+4}{x^2+5x+4}dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+21x-80\ln|x+4|+C\text{。}$$

（8）$\int\frac{x^3+1}{x^3+5x-6}dx$

$$\frac{x^3+1}{x^3+5x-6}=1-\frac{5x-7}{(x-1)(x^2+x+6)}=1+\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4}\frac{x+22}{x^2+x+6},$$

所以

$$\int\frac{x^3+1}{x^3+5x-6}dx=x+\frac{1}{8}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+6}-\frac{43}{4\sqrt{23}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{23}}+C\text{。}$$

（9）$\int\frac{x^2}{1-x^4}dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}\arctan x+C$。

(10) $\int\frac{dx}{x^4+1}\int\frac{dx}{x^4+1}=\int\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)dx$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}(\arctan(\sqrt{2}x+1)+\arctan(\sqrt{2}x-1))+C\text{。}$$

(11) $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}=\int\left(\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C\text{。}$$

(12) $\int\frac{x^2+1}{x(x^3-1)}dx=\int\frac{x^2+x^3-(x^3-1)}{x(x^3-1)}dx=\int\frac{x+x^2}{x^3-1}dx-\int\frac{dx}{x}$

$$=\int\frac{x}{x^3-1}dx+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3}\right|=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x-1}{x^2+x+1}\right)dx+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3}\right|$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3}\right|$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3}\right|+C$$

$$=\frac{2}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\ln|x|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C\text{。}$$

(13) $\int\frac{x^2+2}{(x^2+x+1)^2}dx=\int\frac{x^2+x+1-x+1}{(x^2+x+1)^2}dx$

$$=\int\left(\frac{1}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}+\frac{3}{2}\frac{1}{(x^2+x+1)^2}\right)dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2(x^2+x+1)}+\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{x+1}{x^2+x+1}+C\text{。}$$

(14) $\int\frac{1-x^7}{x(1+x^7)}dx=\int\frac{1+x^7}{x(1+x^7)}dx-\int\frac{2x^6}{1+x^7}dx=\int\frac{1}{x}dx-\frac{2}{7}\int\frac{dx^7}{1+x^7}$

$$=\ln|x|-\frac{2}{7}\ln\left|1+x^7\right|+C\text{。}$$

(15) $\int\frac{x^9}{(x^{10}+2x^5+2)^2}dx=\frac{1}{10}\int\frac{d(x^{10}+2x^5+2)}{(x^{10}+2x^5+2)^2}-\frac{1}{5}\int\frac{d(x^5+1)}{[1+(x^5+1)^2]^2}$

$$=-\frac{1}{10(x^{10}+2x^5+2)}-\frac{x^5+1}{10(x^{10}+2x^5+2)}-\frac{1}{10}\arctan(x^5+1)+C$$

$$=-\frac{x^5+2}{10(x^{10}+2x^5+2)}-\frac{1}{10}\arctan(x^5+1)+C\text{。}$$

(16) $\int\frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx=\frac{1}{2n}\int\frac{x^n}{(x^{2n}+1)^2}dx^{2n}=-\frac{1}{2n}\int x^n d\frac{1}{x^{2n}+1}$

$$=-\frac{1}{2n}\frac{x^n}{x^{2n}+1}+\frac{1}{2n}\int\frac{dx^n}{1+x^{2n}}=-\frac{1}{2n}\frac{x^n}{x^{2n}+1}+\frac{1}{2n}\arctan x^n+C\text{。}$$

2. 在什么条件下，$f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x(x+1)^2}$的原函数仍是有理函数?

解 $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x(x+1)^2}$可化为部分分式 $\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$，于是

$$A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx\equiv ax^2+bx+c,$$

要使$f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x(x+1)^2}$的原函数为有理函数，必须$A=0,B=0$，由此可得 $a=0,c=0$。

3. 设$p_n(x)$是一个n次多项式，求

$$\int\frac{p_n(x)}{(x-a)^{n+1}}dx\text{。}$$

解 由于$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{p_n^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$，所以

$$\int\frac{p_n(x)}{(x-a)^{n+1}}dx=\sum_{k=0}^{n}\frac{p_n^{(k)}(a)}{k!}\int\frac{dx}{(x-a)^{n-k+1}}$$

$$=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{p_n^{(k)}(a)}{k!(n-k)}\frac{1}{(x-a)^{n-k}}+\frac{p_n^{(n)}(a)}{n!}\ln|x-a|+C\text{。}$$

4. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{x}{\sqrt{2+4x}}dx$；

(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$；

(3) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$；

(4) $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx$；

(5) $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$；

(6) $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx$；

(7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$；

(8) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$；

(9) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$；

(10) $\int \sqrt[3]{\frac{(x-4)^2}{(x+1)^8}}dx$。

(11) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}}$；

(12) $\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^4}}$；

解（1）$\int \frac{x}{\sqrt{2+4x}}dx = \frac{1}{2}\int xd\sqrt{2+4x} = \frac{x}{2}\sqrt{2+4x} - \frac{1}{2}\int \sqrt{2+4x}dx$

$= \frac{x}{2}\sqrt{2+4x} - \frac{1}{12}\sqrt{(2+4x)^3} + C$

$= \frac{1}{6}(x-1)\sqrt{2+4x} + C$。

（2）不妨设 $a<b$，

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\frac{b-a}{2})^2-(x-\frac{a+b}{2})^2}} = \arcsin\frac{2x-a-b}{b-a} + C。$$

注：本题也可令 $x = a\cos^2 t + b\sin^2 t$，解得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + C。$$

（3）$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx = -\int \frac{1+x-x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x-x^2)}{\sqrt{1+x-x^2}} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$

$= -\frac{1}{4}(2x+3)\sqrt{1+x-x^2} + \frac{7}{8}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C$。

(4) $\int\frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx=\int\frac{x^2+1}{x^2\sqrt{x^2+x^{-2}}}dx=\int\frac{d(x-x^{-1})}{\sqrt{(x-x^{-1})^2+2}}$

$=\ln\left|\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x}\right|+C$ 。

注：这里假设$x>0$，当$x<0$时可得到相同的答案。

(5) $\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx=\int\frac{2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2}dx=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}}$

$=\int(x-\sqrt{x^2-1})dx=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$ 。

注：本题也可通过作变换$t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$来求解。

(6) $\int\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx=\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}dx=\sqrt{x^2-1}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$ 。

注：本题也可通过作变换$t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$来求解。

(7) $\int\frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}}=\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x(1+x)}\right|+c$

$=2\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})+C$ 。

(8) 设 $x=\tan t$，则

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{\sec^2 tdt}{\tan^4 t\sec t}=\int\frac{\cos^3 tdt}{\sin^4 t}=\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin^4 t}d\sin t$$

$$=-\frac{1}{3\sin^3 t}+\frac{1}{\sin t}+c=\frac{2x^2-1}{3x^3}\sqrt{1+x^2}+C\text{ 。}$$

(9) 设$t=\sqrt[4]{x}$, 则 $x=t^4$, $dx=4t^3dt$，于是

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}=\int\frac{4t^3dt}{t^2+t}=4\int(t-1+\frac{1}{t+1})\ dt$$

$$=2t^2-4t+4\ln|t+1|+c=2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(\sqrt[4]{x}+1)+C\text{ 。}$$

（10）设$t=\sqrt[3]{\dfrac{x-4}{x+1}}$，则$x=\dfrac{4+t^3}{1-t^3}$，$dx=\dfrac{15t^2}{(1-t^3)^2}dt$，于是

$$\int\sqrt[3]{\frac{(x-4)^2}{(x+1)^8}}dx=\int t^2\frac{(1-t^3)^2}{25}\frac{15t^2}{(1-t^3)^2}dx=\frac{3}{5}\int t^4dt$$

$$=\frac{3}{25}t^5+c=\frac{3}{25}\sqrt[3]{\left(\frac{x-4}{x+1}\right)^5}+C\text{。}$$

（11）设$t=\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x+1}}$，则$x=\dfrac{2+t^3}{1-t^3}$，$dx=\dfrac{9t^2}{(1-t^3)^2}dt$，于是

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}}=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{1-t^3}{3}\cdot\frac{9t^2}{(1-t^3)^2}dt=3\int\frac{tdt}{1-t^3}$$

$$=-\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{t-1}{t^2+t+1}\right)dt=-\ln|t-1|+\frac{1}{2}\ln(t^2+t+1)-\sqrt{3}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+c$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\frac{\left(\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x+1}}-1\right)^2}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2}+\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x+1}}+1}-\sqrt{3}\arctan\frac{2\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x+1}}+1}{\sqrt{3}}+c$$

$$=-\frac{3}{2}\ln(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-2})-\sqrt{3}\arctan\frac{\sqrt[3]{x+1}+2\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x+1}}+C\text{。}$$

（12）设$t=\sqrt[4]{1+x^4},x^4=t^4-1$，于是

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^4}}=\int\frac{t^3dt}{(t^4-1)t}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2-1}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+\frac{1}{2}\arctan t+c=\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}-1}{\sqrt[4]{1+x^4}+1}+\frac{1}{2}\arctan\sqrt[4]{1+x^4}+C\text{。}$$

5. 设$R(u,v,w)$是u,v,w的有理函数，给出

$$\int R(x,\sqrt{a+x},\sqrt{b+x})\,dx$$

的求法。

解　设$t=\sqrt{a+x}$，则

$$\int R(x,\sqrt{a+x},\sqrt{b+x})\,dx = 2\int R(t^2-a,t,\sqrt{t^2-a+b})tdt$$

再令$\sqrt{t^2-a+b}=t+u$，则$t=\dfrac{b-a-u^2}{2u}$，从而

$$\int R(x,\sqrt{a+x},\sqrt{b+x})\,dx$$

$$=\int R((\frac{b-a-u^2}{2u})^2-a,\frac{b-a-u^2}{2u},\frac{b-a+u^2}{2u})\frac{b-a-u^2}{2u}\cdot\frac{a-b-2u^2}{2u^2}du$$

为有理函数的积分。

6．求下列不定积分：

(1) $\displaystyle\int\frac{dx}{4+5\cos x}$；

(2) $\displaystyle\int\frac{dx}{2+\sin x}$；

(3) $\displaystyle\int\frac{dx}{3+\sin^2 x}$；

(4) $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$；

(5) $\displaystyle\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$；

(6) $\displaystyle\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$；

(7) $\displaystyle\int\frac{dx}{\tan x+\sin x}$；

(8) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$；

(9) $\displaystyle\int\tan x\tan(x+a)dx$；

(10) $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$；

(11) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$；

(12) $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx$。

解（1）设$u=\tan\dfrac{x}{2}$,则 $\cos x=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}, x=2\arctan u, dx=\dfrac{2du}{1+u^2}$，于是

$$\int\frac{dx}{4+5\cos x}=\int\frac{2du}{9-u^2}=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3+u}{3-u}\right|+c=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3+\tan\frac{x}{2}}{3-\tan\frac{x}{2}}\right|+C\text{。}$$

（2）设$u=\tan\dfrac{x}{2}$,则 $\sin x=\dfrac{2u}{1+u^2}, x=2\arctan u, dx=\dfrac{2du}{1+u^2}$，于是

$$\int\frac{dx}{2+\sin x}=\int\frac{du}{1+u+u^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+c$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C\text{。}$$

(3) $\int\frac{dx}{3+\sin^2 x}=\int\frac{\csc^2 x dx}{3\csc^2 x+1}=-\int\frac{d\cot x}{4+3\cot^2 x}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}\cot x+C$。

注：本题也可通过作变换$t=\tan\frac{x}{2}$，解得

$$\int\frac{dx}{3+\sin^2 x}=\frac{\sqrt{3}}{6}\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2})+\frac{\sqrt{3}}{6}\arctan(\sqrt{3}\tan\frac{x}{2})+C\text{。}$$

(4) $\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}}=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2(\tan\frac{x}{2}+1)}dx$

$$=\int\frac{1}{\tan\frac{x}{2}+1}d\tan\frac{x}{2}=\ln\left|\tan\frac{x}{2}+1\right|+C\text{。}$$

(5) 设$u=\tan\frac{x}{2}$,则$\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},x=2\arctan u,dx=\frac{2du}{1+u^2}$，

于是

$$\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}=\int\frac{du}{3u^2+2u+2}=\frac{1}{3}\int\frac{du}{(u+\frac{1}{3})^2+\frac{5}{9}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3u+1}{\sqrt{5}}+c=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C\text{。}$$

(6) $\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}=\int\frac{\sin x dx}{(2+\cos x)\sin^2 x}=-\int\frac{d\cos x}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)}$

$$=-\frac{1}{3}\int\frac{2+\cos x+1-\cos x}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)}d\cos x$$

$$=-\frac{1}{3}\int\frac{d\cos x}{1-\cos^2 x}-\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{1+\cos x}-\frac{1}{2+\cos x}\right)d\cos x$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{1+\cos x}{2+\cos x}\right|+c=\frac{1}{6}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}+C\text{。}$$

(7) $\int\frac{dx}{\tan x+\sin x}=\int\frac{\cos x dx}{\sin x(1+\cos x)}=-\int\frac{\cos x d\cos x}{(1-\cos^2 x)(1+\cos x)}$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{(1+\cos x)-(1-\cos x)}{(1-\cos^2 x)(1+\cos x)}d\cos x=-\frac{1}{2}\int\frac{d\cos x}{1-\cos^2 x}+\frac{1}{2}\int\frac{d\cos x}{(1+\cos x)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|-\frac{1}{2(1+\cos x)}+C=\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+C\text{。}$$

（8） $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}=\frac{1}{\cos(a-b)}\int\frac{\cos[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\cos(x+b)}dx$

$$=\frac{1}{\cos(a-b)}\int\left(\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}+\frac{\sin(x+b)}{\cos(x+b)}\right)dx=\frac{1}{\cos(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)}\right|+C\text{。}$$

（9） $\displaystyle\int\tan x\tan(x+a)dx$

当 $a=\frac{k\pi}{2}$ 时， 原积分容易求得。

当 $a\neq\frac{k\pi}{2}$ 时，

$$\int\tan x\tan(x+a)dx=\int\left(\frac{\tan(x+a)-\tan x}{\tan a}-1\right)dx$$

$$=\frac{1}{\tan a}\ln\left|\frac{\cos x}{\cos(x+a)}\right|-x+C\text{。}$$

（10） $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{\sin x+\cos x}dx$

$$=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\csc(x+\frac{\pi}{4})d(x+\frac{\pi}{4})$$

$$=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8})\right|+C\text{。}$$

（11） $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}$

$$=\tan x-\cot x+C=-2\cot 2x+C\text{。}$$

（12） $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx=\int\frac{1+\sin^2 x-1}{1+\sin^2 x}dx=x-\int\frac{d\tan x}{1+2\tan^2 x}$

$$=x-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+C\text{。}$$

7. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{x\,\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}dx$；　(2) $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}dx$；

(3) $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx$；　(4) $\int \sqrt{x}\,\ln^2 x\,dx$；

(5) $\int x^2\,\mathrm{e}^x \sin x dx$；　(6) $\int \ln(1+x^2)dx$

(7) $\int \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$；　(8) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2x-3}}dx$；

(9) $\int \arctan\sqrt{x}dx$；　(10) $\int \sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,dx$

(11) $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$；　(12) $\int \frac{\sqrt{1+\sin x}}{\cos x}dx$；

(13) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx$；　(14) $\int \mathrm{e}^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx$；

(15) $\int \frac{dx}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$；　(16) $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$　（$ab\neq 0$）；

(17) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx$；　(18) $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$；

(19) $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x dx$；　(20) $\int \frac{dx}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$。

解 (1) $\int \frac{x\,\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}dx = -\int x\,\mathrm{e}^x\, d\frac{1}{1+x} = -\frac{x\,\mathrm{e}^x}{1+x} + \int \frac{1}{1+x}(e^x + xe^x)dx = \frac{e^x}{1+x} + C$。

(2) $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}dx = \int \ln x d\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}} = \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}\ln x - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln x - \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C$。

(3) $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + 2\int \sqrt{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + 2x + C$。

(4) $\int\sqrt{x}\,\ln^2 x\,dx = \frac{2}{3}\int \ln^2 x dx^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x - \frac{4}{3}\int x^{\frac{1}{2}}\ln x dx$

$$= \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln^2 x - 4\ln x) + \frac{8}{9}\int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{27}x^{\frac{3}{2}}(9\ln^2 x - 12\ln x + 8) + C\ 。$$

(5) $\int x^2\,\mathrm{e}^x\sin x dx = \int x^2\sin x d\,\mathrm{e}^x = x^2\,\mathrm{e}^x\sin x - \int e^x(2x\sin x + x^2\cos x)dx$

$$= \mathrm{e}^x(x^2\sin x - 2x\sin x - x^2\cos x) + \int \mathrm{e}^x(2\sin x + 4x\cos x - x^2\sin x)dx\,,$$

于是

$$\int x^2\,\mathrm{e}^x\sin x dx = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(x^2\sin x - 2x\sin x - x^2\cos x) + \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^x(2\sin x + 4x\cos x)dx\ 。$$

由于

$$\int e^x\sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C\,,$$

$$\int e^x x\cos x dx = \int x\cos x de^x = e^x x\cos x - \int e^x(\cos x - x\sin x)dx$$

$$= e^x x\cos x - \int e^x\cos x dx + \int x\sin x de^x$$

$$= e^x x(\cos x + \sin x) - \int e^x\cos x dx - \int e^x(\sin x + x\cos x)dx\,,$$

从而

$$\int e^x x\cos x dx = \frac{1}{2}e^x x(\cos x + \sin x) - \frac{1}{2}\int e^x(\cos x + \sin x)dx$$

$$= \frac{1}{2}e^x x(\cos x + \sin x) - \frac{1}{2}e^x\sin x + C\,,$$

所以

$$\int x^2\,\mathrm{e}^x\sin x dx = \frac{1}{2}e^x[(x^2-1)\sin x - (x-1)^2\cos x] + C\ 。$$

(6) $\int \ln(1+x^2)dx = x\ln(1+x^2) - \int\frac{2x^2}{1+x^2}dx = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x + C$ 。

(7) $\int\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int x\arcsin x d\sqrt{1-x^2}$

$$= -x\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int\sqrt{1-x^2}(\arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}})dx$$

$$=-x\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\frac{1}{2}x^2+\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin xdx$$

$$=-x\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\frac{1}{2}x^2+\int\arcsin xd\arcsin x-\int\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx\text{，}$$

所以

$$\int\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}(\arcsin x)^2+C\text{。}$$

（8） $\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-2x-3}}dx=-\int\frac{1}{\sqrt{1-2x^{-1}-3x^{-2}}}dx^{-1}$

$$=-\int\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{\frac{4}{9}-(x^{-1}+\frac{1}{3})^2}}d(x^{-1}+\frac{1}{3})=-\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{3+x}{2x}+C\text{。}$$

注：本题也可通过作变换$t=\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$，解得

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-3}}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\sqrt{\frac{3x+3}{x-3}}+C\text{。}$$

（9） $\int\arctan\sqrt{x}dx=x\arctan\sqrt{x}-\int\frac{x}{1+x}d\sqrt{x}=x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\int\frac{d\sqrt{x}}{1+x}$

$$=(x+1)\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+C\text{。}$$

（10）令$t=\sqrt{x}$，则$x=t^2$，于是

$$\int\sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,dx=2\int t^2\sin tdt=-2t^2\cos t+4\int t\cos tdt$$

$$=-2t^2\cos t+4t\sin t-4\int\sin tdt=(4-2t^2)\cos t+4t\sin t+c$$

$$=(4-2x)\cos\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+C\text{。}$$

（11） $\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx=\int\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx-\int\frac{d(1+\cos x)}{1+\cos x}$

$$=x\tan\frac{x}{2}-\int\tan\frac{x}{2}dx-\ln(1+\cos x)=x\tan\frac{x}{2}+C\text{。}$$

（12） $\int\frac{\sqrt{1+\sin x}}{\cos x}dx=\int\frac{\sqrt{1+\sin x}}{1-\sin^2 x}d\sin x=\frac{1}{2}\int\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}}{1-\sin x}+\frac{\sqrt{1+\sin x}}{1+\sin x}\right)d\sin x$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{1+\sin x}}{1-\sin x}d\sin x+\sqrt{1+\sin x}\,,$$

在等式右边的积分中，令 $t=\sqrt{1+\sin x}$，则

$$\int\frac{\sqrt{1+\sin x}}{1-\sin x}d\sin x=\int\frac{2t^2dt}{2-t^2}=-2t+4\int\frac{dt}{2-t^2}=-2t+\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}\right|+C\,,$$

所以

$$\int\frac{\sqrt{1+\sin x}}{\cos x}dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\sin x}}+C\text{。}$$

（13） $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}d\tan x=\tan^2 x\sin x-\int\tan x(\sin x+\tan x\sec x)dx\,,$

所以

$$\int\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx=\frac{1}{2}\tan^2 x\sin x-\frac{1}{2}\int\tan x\sin xdx$$

$$=\frac{1}{2}\tan^2 x\sin x-\frac{1}{2}\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\tan^2 x\sin x-\frac{1}{2}\ln\left|\tan x+\sec x\right|+\frac{1}{2}\sin x+C$$

$$=\frac{1}{2}\sec x\tan x-\frac{1}{2}\ln\left|\tan x+\sec x\right|+C\text{。}$$

（14） $\int \mathrm{e}^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx=\int\mathrm{e}^{\sin x}xd\sin x-\int\mathrm{e}^{\sin x}d\sec x$

$$=e^{\sin x}(x-\sec x)-\int\mathrm{e}^{\sin x}dx+\int\sec x\,\mathrm{e}^{\sin x}\cos xdx$$

$$=e^{\sin x}(x-\sec x)+C\text{。}$$

（15） $\int\frac{dx}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}=\int\frac{de^x}{\mathrm{e}^{2x}-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C$ 。

（16） $\int\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}=\int\frac{d\tan x}{a^2\tan^2 x+b^2}=\frac{1}{ab}\arctan(\frac{a}{b}\tan x)+C$ 。

（17） 令 $t=\sqrt[6]{x}$，则 $x=t^6$，于是

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx = \int \frac{6}{t(t+1)}dx = 6\ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + c = 6\ln\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}+1} + C \text{。}$$

（18）$\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx = \frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x} - \int x^2\frac{1}{1-x^2}dx$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x} + x - \int\frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}(x^2-1)\ln\frac{1+x}{1-x} + x + C \text{。}$$

（19）$\int\sqrt{1-x^2}\arcsin xdx = x\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \int x\left(1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\right)dx$

$$= x\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \frac{1}{2}x^2 - \int\frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin xdx$$

$$= x\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \frac{1}{2}x^2 - \int\sqrt{1-x^2}\arcsin xdx + \int\arcsin xd\arcsin x \text{，}$$

所以

$$\int\sqrt{1-x^2}\arcsin xdx = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\int\arcsin xd\arcsin x$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}(\arcsin x)^2 + C \text{。}$$

（20）令$t=e^x$，则

$$\int\frac{dx}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = \int\frac{dt}{t(1+t)^2} = \int\left(\frac{1}{t(1+t)} - \frac{1}{(1+t)^2}\right)dt$$

$$= \ln\left|\frac{t}{1+t}\right| + \frac{1}{1+t} + c = \ln\frac{e^x}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^x} + C \text{。}$$

第七章　定积分

习　题　7.1　定积分的概念和可积条件

1. 用定义计算下列定积分：

（1）$\int_0^1 (ax+b)\,dx$；　　　　（2）$\int_0^1 a^x\,dx$　（$a>0$）.

解　（1）取划分：$0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\cdots<\frac{n-1}{n}<1$，及 $\xi_i=\frac{i}{n}(i=1,2,\cdots,n)$，则

$\Delta x_i=\frac{1}{n}$，于是 $\sum_{i=1}^{n}(a\frac{i}{n}+b)\frac{1}{n}=\frac{a}{2}(1+\frac{1}{n})+b\to\frac{a}{2}+b\ (n\to\infty)$，即

$$\int_0^1(ax+b)dx=\frac{a}{2}+b\ 。$$

(2) 取划分：$0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\cdots<\frac{n-1}{n}<1$，及 $\xi_i=\frac{i}{n}(i=1,2,\cdots,n)$，则 $\Delta x_i=\frac{1}{n}$，

于是 $\sum_{i=1}^{n}a^{\frac{i}{n}}\frac{1}{n}=\frac{a^{\frac{1}{n}}(1-a)}{n(1-a^{\frac{1}{n}})}$。因为 $\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\to\ln a\ (n\to\infty)$，$a^{\frac{1}{n}}\to 1\ (n\to\infty)$，

所以 $\sum_{i=1}^{n}a^{\frac{i}{n}}\frac{1}{n}=\frac{a^{\frac{1}{n}}(1-a)}{n(1-a^{\frac{1}{n}})}\to\frac{a-1}{\ln a}$，　即

$$\int_0^1 a^x\,dx=\frac{a-1}{\ln a}\ 。$$

2.　证明，若对 $[a,b]$ 的任意划分和任意 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 都存在，则 $f(x)$ 必是 $[a,b]$ 上的有界函数。

证　用反证法。设 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=I$，则取 $\varepsilon=1,\exists\delta>0$，对任意的划分 P 与任意 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，只要 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}(\Delta x_i)<\delta$，　就有 $\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\right|<|I|+1$。

取定了划分后，n 与 $\Delta x_i\,(i=1,2,\cdots n)$ 也就确定，如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界，则必定存在小区间 $[x_{i-1},x_i]$，$f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上无界。取定

$\xi_1,\cdots,\xi_{i-1},\xi_{i+1},\cdots,\xi_n$，必可取到$\xi_i$，使 $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| < |I|+1$ 不成立，从而产生矛盾，所以$f(x)$必是$[a,b]$上的有界函数。

3．证明 Darboux 定理的后半部分：对任意有界函数$f(x)$，恒有

$$\lim_{\lambda\to 0}\underline{S}(P)=l\text{。}$$

证 $\forall\varepsilon>0$，因为l是$\underline{\mathbf{S}}$的上确界，所以 $\exists\underline{S}(P')\in\underline{\mathbf{S}}$，使得

$$0\le l-\underline{S}(P')<\frac{\varepsilon}{2}\text{。}$$

设划分$P': a=x_0'<x_1'<x_2'<\cdots<x_p'=b$，$M,m$是$f(x)$的上、下确界，取

$$\delta=\min\left(\Delta x_1',\Delta x_2',\cdots,\Delta x_p',\frac{\varepsilon}{2(p-1)(M-m)}\right),$$

对任意一个满足$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}(\Delta x_i)<\delta$的划分

$$P: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

记与其相应的小和为$\underline{S}(P)$，现将P',P的分点合在一起组成新的划分P''，则由引理 7.1.1，$\underline{S}(P')-\underline{S}(P'')\le 0$。

下面来估计$\underline{S}(P'')-\underline{S}(P)$：

（1）若在(x_{i-1},x_i)中没有P'的分点，则$\underline{S}(P''),\underline{S}(P)$中的相应项相同，它们的差为零；

（2）若在(x_{i-1},x_i)中含有P'的分点，由于两种划分的端点重合，所以这样的区间至多只有$p-1$个。由δ的取法，可知

$$\Delta x_i\le\delta\le\Delta x_j',\ i=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,p,$$

所以在(x_{i-1},x_i)中只有一个新插入的分点x_j'，这时$\underline{S}(P''),\underline{S}(P)$中的相应项的差为

$$[m_i'(x_j'-x_{i-1})+m_i''(x_i-x_j')]-m_i(x_i-x_{i-1})\le(M-m)(x_i-x_{i-1})<(M-m)\delta,$$

从而 $0 \le \underline{S}(P'') - \underline{S}(P) < (p-1)(M-m)\delta \le \frac{\varepsilon}{2}$。

综合上面的结论，就有

$$0 \le l - \underline{S}(P) = [l - \underline{S}(P')] + [\underline{S}(P') - \underline{S}(P'')] + [\underline{S}(P'') - \underline{S}(P)] < \frac{\varepsilon}{2} + 0 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

即

$$\lim_{\lambda \to 0} \underline{S}(P) = l。$$

4. 证明定理 7.1.3。

证 必要性是显然的，下面证充分性。

设 $\forall \varepsilon > 0$，存在一种划分 P'，使得相应的振幅满足 $\sum_{i=1}^{p} \omega_i' \Delta x_i' < \frac{\varepsilon}{3}$，即 $\overline{S}(P') - \underline{S}(P') < \frac{\varepsilon}{3}$。取 $\delta = \min\left(\Delta x_1', \Delta x_2', \cdots, \Delta x_p', \frac{\varepsilon}{3(p-1)(M-m)}\right)$，对任意一个满足 $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n}(\Delta x_i) < \delta$ 的划分

$$P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

现将 P', P 的分点合在一起组成新的划分 P''，则由 Darboux 定理的证明过程，可得

$$\begin{aligned} 0 \le \overline{S}(P) - \underline{S}(P) &= [\overline{S}(P) - \overline{S}(P'')] + [\overline{S}(P'') - \overline{S}(P')] + \\ &\quad [\overline{S}(P') - \underline{S}(P')] + [\underline{S}(P') - \underline{S}(P'')] + [\underline{S}(P'') - \underline{S}(P)] \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + 0 + \frac{\varepsilon}{3} + 0 + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

由定理 7.1.1，可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。

5. 讨论下列函数在 [0,1] 的可积性：

(1) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}], & x \ne 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$ (2) $f(x) = \begin{cases} -1, & x\text{为有理数}, \\ 1, & x\text{为无理数}; \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} 0, & x\text{为有理数}, \\ x, & x\text{为无理数}; \end{cases}$ (4) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\sin\frac{\pi}{x}), & x \ne 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

解：（1）$0\le f(x)<1$，且$f(x)$在[0,1]上的不连续点为$x=\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$与$x=0$。$\forall\varepsilon>0$，取定$m>\frac{2}{\varepsilon}$，$f(x)$在区间$[\frac{1}{m},1]$上只有有限个不连续点，所以$f(x)$在$[\frac{1}{m},1]$上可积，即存在$[\frac{1}{m},1]$的一个划分$P$，使得$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}$，将$P$的分点和 0 合在一起，作为[0,1]的划分$P'$，则

$$\sum_{i=1}^{n+1}\omega_i'\Delta x_i'=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i+\omega_1'\Delta x_1'<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

由定理 7.1.3，$f(x)$在[0,1]上可积。

（2）因为对[0,1]的任意划分P，总有 $\omega_i=2$，所以 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=2$，由定理 7.1.2 可知$f(x)$在[0,1]上不可积。

（3）因为对[0,1]的任意划分P，$f(x)$在$[x_{i-1},x_i]$上的振幅为x_i，于是

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}x_i(x_i-x_{i-1})\ge\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i+x_{i-1}}{2}(x_i-x_{i-1})=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}({x_i}^2-{x_{i-1}}^2)$$

$$=\frac{1}{2}({x_n}^2-{x_0}^2)=\frac{1}{2},$$

所以$f(x)$在[0,1]上不可积。

（4）$-1\le f(x)\le 1$，且$f(x)$在[0,1]上的不连续点为$x=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$与$x=0$。$\forall\varepsilon>0$，取定$m>\frac{4}{\varepsilon}$，则$f(x)$在$[\frac{1}{m},1]$ 上只有有限个不连续点，所以$f(x)$在$[\frac{1}{m},1]$上可积，即存在$[\frac{1}{m},1]$的划分P，使得$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}$。将$P$的分点与 0 合在一起作为[0,1]的划分$P'$，则

$$\sum_{i=1}^{n+1}\omega_i'\Delta x_i'=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i+\omega_1'\Delta x_1'<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

所以$f(x)$在[0,1]上可积。

6. 设$f(x)$在$[a,b]$上可积，且在$[a,b]$上满足$|f(x)|\ge m>0$（m为常数），

证明$\dfrac{1}{f(x)}$在$[a, b]$上也可积。

证 任取$[a, b]$的一个划分：$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$，则

$$\omega_i(\frac{1}{f}) = \sup_{x_{i-1}\le x', x''\le x_i}\left(\frac{1}{f(x')} - \frac{1}{f(x'')}\right) \le \frac{1}{m^2}\sup_{x_{i-1}\le x', x''\le x_i}(f(x') - f(x'')) = \frac{1}{m^2}\omega_i(f),$$

由于$f(x)$在$[a, b]$上可积，$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当$\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}(\Delta x_i) < \delta$时，$\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i < m^2\varepsilon$，从而$\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(\frac{1}{f})\Delta x_i < \varepsilon$，所以$\dfrac{1}{f(x)}$在$[a, b]$上可积。

7. 有界函数$f(x)$在$[a, b]$上的不连续点为$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，证明$f(x)$在$[a, b]$上可积。

证 不妨设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$，且$c \in (a, b)$，并设$|f(x)| \le M$。$\forall \varepsilon > 0$，取$\delta = \min\left\{\dfrac{\varepsilon}{12M}, c-a, b-c\right\}$，则$\exists N > 0$，当$n > N$时，$|x_n - c| < \delta$。

由于$f(x)$在$[a, c-\delta]$和$[c+\delta, b]$上只有有限个不连续点，所以$f(x)$在$[a, c-\delta]$和$[c+\delta, b]$上都可积，即存在$[a, c-\delta]$的一个划分$P^{(1)}$和$[c+\delta, b]$的一个划分$P^{(2)}$，使得$\sum\limits_{i}\omega_i^{(1)}\Delta x_i^{(1)} < \dfrac{\varepsilon}{3}, \sum\limits_{i}\omega_i^{(2)}\Delta x_i^{(2)} < \dfrac{\varepsilon}{3}$。将$P^{(1)}$、$P^{(2)}$的分点合并在一起组成$[a, b]$的一个划分$P$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i \le \sum_{i}\omega_i^{(1)}\Delta x_i^{(1)} + \sum_{i}\omega_i^{(2)}\Delta x_i^{(2)} + 4M\delta < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

所以$f(x)$在$[a, b]$上可积。

$c = a$或$c = b$的情况可类似证明。

8．设$f(x)$是区间$[a,b]$上的有界函数。证明$f(x)$在$[a,b]$上可积的充分必要条件是对任意给定的$\varepsilon > 0$与$\sigma > 0$，存在划分P，使得振幅$\omega_i \ge \varepsilon$的那些小区间$[x_{i-1}, x_i]$的长度之和$\sum\limits_{\omega_i\ge\varepsilon}\Delta x_i < \sigma$（即振幅不能任意小的那些小

区间的长度之和可以任意小）。

证　充分性：设$|f(x)|\le M$。 $\forall\varepsilon=\sigma>0$，存在划分$P$，使得振幅$\omega_i\ge\varepsilon$的那些小区间的长度之和$\sum\limits_{\omega_i\ge\varepsilon}\Delta x_i<\varepsilon$，于是

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{\omega_i<\varepsilon}\omega_i\Delta x_i+\sum_{\omega_i\ge\varepsilon}\omega_i\Delta x_i<[(b-a)+2M]\varepsilon,$$

即$f(x)$在$[a,b]$上可积。

必要性：用反证法，如果存在$\varepsilon_0>0$与$\sigma_0>0$，对任意划分P，振幅$\omega_i\ge\varepsilon_0$的小区间的长度之和不小于σ_0，于是

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{\omega_i<\varepsilon_0}\omega_i\Delta x_i+\sum_{\omega_i\ge\varepsilon_0}\omega_i\Delta x_i\ge\varepsilon_0\sum_{\omega_i\ge\varepsilon_0}\Delta x_i\ge\sigma_0\varepsilon_0,$$

则当$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}(\Delta x_i)\to 0$时，$\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i$不趋于零，与$f(x)$在$[a,b]$上可积矛盾。

9. 设$f(x)$在$[a,b]$上可积，$A\le f(x)\le B$，$g(u)$在$[A,B]$上连续，证明复合函数$g(f(x))$ 在$[a,b]$上可积。

证　由于$g(u)$在$[A,B]$连续，所以可设$|g(u)|\le M$，且$g(u)$一致连续，于是$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall u',u''\in[A,B]$，只要$|u'-u''|<\delta$，就成立

$$|g(u')-g(u'')|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}。$$

由于$f(x)$在$[a,b]$可积，由习题 8，对上述$\varepsilon>0$与$\delta>0$，存在划分P,使得振幅$\omega_i(f)\ge\delta$的小区间的长度之和小于$\frac{\varepsilon}{4M}$，于是

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(g\circ f)\Delta x_i=\sum_{\omega_i(f)<\delta}\omega_i(g\circ f)\Delta x_i+\sum_{\omega_i(f)\ge\delta}\omega_i(g\circ f)\Delta x_i$$

$$<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{\omega_i(f)<\delta}\Delta x_i+2M\sum_{\omega_i(f)\ge\delta}\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)+2M\cdot\frac{\varepsilon}{4M}=\varepsilon,$$

即复合函数$g(f(x))$在$[a,b]$上可积。

习　题　7.2　定积分的基本性质

1．　设$f(x)$在$[a, b]$上可积，$g(x)$在$[a, b]$上定义，且在$[a, b]$中除了有限个点之外，都有$f(x)=g(x)$，证明$g(x)$在$[a, b]$上也可积，并且有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx \text{。}$$

证　设仅在$x=c_i\ (i=1,2,\cdots,p)$处$f(x)\neq g(x)$。对区间$[a,b]$作划分：$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，任取$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，则

$$\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum{}'(g(\xi_i)-f(\xi_i))\Delta x_i\text{，}$$

其中$\sum{}'$表示仅对含有$\{c_i\}$中点的小区间（至多$2p$个）求和。

记$M_1=\sup\limits_{a\le x\le b}|g(x)|, M_2=\sup\limits_{a\le x\le b}|f(x)|$，$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2p(M_1+M_2)}$，则当$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}<\delta$时,

$$\left|\sum{}'(g(\xi_i)-f(\xi_i))\Delta x_i\right|<\varepsilon\text{，}$$

所以由$f(x)$可积，可知$g(x)$也可积，且成立$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$。

2．设$f(x)$和$g(x)$在$[a, b]$上都可积，请举例说明一般有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx\neq\left(\int_a^b f(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b g(x)dx\right)\text{。}$$

解　例如$f(x)=g(x)=1, x\in[0,2]$，则$\int_0^2 f(x)dx=2, \int_0^2 g(x)dx=2$，$\int_0^2 f(x)g(x)dx=2$，所以$\int_a^b f(x)g(x)dx\neq\left(\int_a^b f(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b g(x)dx\right)$。

3．　证明：对任意实数a,b,c，只要$\int_a^b f(x)dx$，$\int_a^c f(x)dx$和$\int_c^b f(x)dx$都存在，就成立

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx\text{。}$$

证　如设$a<b<c$，则 $\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$，于是

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx-\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx。$$

其他情形可类推。

4．判断下列积分的大小：

（1）$\int_0^1 xdx$ 和 $\int_0^1 x^2dx$；　　（2）$\int_1^2 xdx$ 和 $\int_1^2 x^2dx$；

（3）$\int_{-2}^{-1}(\frac{1}{2})^x dx$ 和 $\int_0^1 2^x dx$；　　（4）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx$ 。

解（1）当$x\in(0,1)$时，$x>x^2$，所以 $\int_0^1 xdx>\int_0^1 x^2dx$。

（2）当$x\in(1,2)$时，$x<x^2$，所以 $\int_0^1 xdx<\int_0^1 x^2dx$。

（3）当$x\in(-2,-1)$时，$(\frac{1}{2})^x>2$，而当$x\in(0,1)$时，$2^x<2$，

由积分第一中值定理，可得 $\int_{-2}^{-1}(\frac{1}{2})^x dx>\int_0^1 2^x dx$。

（4）当$x>0$时，$\sin x<x$，所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx<\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx$。

5．设$f(x)$在$[a,b]$上连续，$f(x)\ge 0$但不恒为 0，证明

$$\int_a^b f(x)dx>0。$$

证　证明一：不妨设$f(x_0)>0, x_0\in(a,b)$。由$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)>0$，存在$c>0$与$\delta>0(\delta<\min\{a-x_0,b-x_0\})$，使得当$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$时，成立$f(x)>c$。于是

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{x_0-\delta}f(x)dx+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)dx+\int_{x_0+\delta}^b f(x)dx\ge\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)dx\ge 2c\delta>0 。$$

$f(x_0)>0$，$x_0=a$或$x_0=b$的情况可类似证明。

证明二：用反证法。若$\int_a^b f(x)dx=0$，则$\forall t\in[a,b], \int_a^t f(x)dx=0$。由于$F(t)=\int_a^t f(x)dx$在$[a,b]$上可导，且$F'(t)=f(t), t\in[a,b]$，所以有$f(t)\equiv 0$，与题设矛盾，从而必定成立$\int_a^b f(x)dx>0$。

6．设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$\int_a^b f^2(x)dx=0$，证明$f(x)$在$[a,b]$上恒为 0。

证 由$f(x)$在$[a,b]$上连续，可知$f^2(x)$在$[a,b]$上连续，且$f^2(x)\ge 0$。由上题即可得到结论。

7．设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且满足

$$\frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx = f(b)。$$

证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$。

证 由积分第一中值定理，$\exists\eta\in[a,\frac{a+b}{2}]$，使得

$$f(\eta)=\frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx = f(b),$$

再对$f(x)$在$[\eta,b]$上应用 Rolle 定理，$\exists\xi\in(\eta,b)\subset(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$。

8．设$\varphi(t)$在$[0,a]$上连续，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上二阶可导，且$f''(x)\ge 0$。证明

$$f\left(\frac{1}{a}\int_0^a \varphi(t)dt\right)\le \frac{1}{a}\int_0^a f(\varphi(t))dt。$$

证 将区间$[0,a]$作划分：$0=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=a$，记$\Delta t_i=t_i-t_{i-1},\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta t_i\},\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$。由于$f$下凸，由 Jensen 不等式（第 5.1 节习题 24），得到

$$f\left(\sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i)\frac{\Delta t_i}{a}\right)\le \sum_{i=1}^n f(\varphi(\xi_i))\frac{\Delta t_i}{a},$$

令$\lambda\to 0$，上述不等式就转化为

$$f\left(\frac{1}{a}\int_0^a \varphi(t)dt\right)\le \frac{1}{a}\int_0^a f(\varphi(t))dt。$$

9．设$f(x)$在$[0,1]$上连续，且单调减少，证明对任意$\alpha\in[0,1]$，成立

$$\int_0^\alpha f(x)dx \ge \alpha\int_0^1 f(x)dx。$$

证 证明一：问题等价于证明对任意$\alpha\in[0,1]$，成立

$$(1-\alpha)\int_0^\alpha f(x)dx \ge \alpha\int_\alpha^1 f(x)dx \text{。}$$

对不等式两端应用积分第一中值定理，则存在 $x_1 \in [0,\alpha]$ 及 $x_2 \in [\alpha,1]$，使得 $(1-\alpha)\int_0^\alpha f(x)dx = \alpha(1-\alpha)f(x_1)$ 及 $\alpha\int_\alpha^1 f(x)dx = \alpha(1-\alpha)f(x_2)$ 。由于显然有 $f(x_1) \ge f(x_2)$，所以得到 $(1-\alpha)\int_0^\alpha f(x)dx \ge \alpha\int_\alpha^1 f(x)dx$ 。

证明二：设 $F(\alpha) = \int_0^\alpha f(x)dx - \alpha\int_0^1 f(x)dx$，则 $F'(\alpha) = f(\alpha) - \int_0^1 f(x)dx$ 。由积分第一中值定理，$\exists \xi \in [0,1]$, 使得 $f(\xi) = \int_0^1 f(x)dx$，即 $F'(\alpha) = f(\alpha) - f(\xi)$ 。

由于 f 单调减少，所以当 $0 < \alpha < \xi$ 时，$F'(\alpha) \ge 0$，即 $F(\alpha)$ 单调增加；当 $\xi < \alpha < 1$ 时，$F'(\alpha) \le 0$，即 $F(\alpha)$ 单调减少。由 $F(0) = F(1) = 0$，即可得到 $\forall \alpha \in [0,1]$, 成立 $F(\alpha) \ge 0$ 。

证明三：当 $\alpha = 0$ 时，不等式显然成立。当 $\alpha \in (0,1]$ 时，令 $x = \alpha t$，利用 f 单调减少，就得到 $\int_0^\alpha f(x)dx = \alpha\int_0^1 f(\alpha t)dt \ge \alpha\int_0^1 f(t)dt$ 。

10.（Young 不等式）设 $y = f(x)$ 是 $[0,\infty)$ 上严格单调增加的连续函数，且 $f(0) = 0$，记它的反函数为 $x = f^{-1}(y)$ 。证明

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy \ge ab \quad (a>0,\ b>0) \text{。}$$

证　先证当 $b = f(a)$ 时等号成立。

将区间 $[0,a]$ 作划分： $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = a$，记 $y_i = f(x_i)(i = 0,1,2,\cdots,n)$，则 $0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = b$，再记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_i = y_i - y_{i-1}$，于是

$$\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x_i + \sum_{i=1}^n f^{-1}(y_i)\Delta y_i = \sum_{i=1}^n y_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n x_i(y_i - y_{i-1})$$

$$= x_n y_n - x_0 y_0 = ab,$$

记 $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$，当 $\lambda \to 0$ 时，$\sum\limits_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x_i + \sum\limits_{i=1}^n f^{-1}(y_i)\Delta y_i$ 的极限为

$$\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy,$$

这就证明了当$b=f(a)$时， $\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy=ab$。

在一般情况下，设$F(a)=\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy-ab$，则

$F'(a)=f(a)-b$。记$f(T)=b$，可知当$0<a<T$时，$F(a)$单调减少，当$a>T$时，$F(a)$单调增加，所以$F(a)$在$a=T$处取到最小值。由上面的讨论，可知最小值$F(T)=0$，从而$F(a)\ge 0$，这就是所要证明的。

注 当$b=f(a)$时，$\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy=ab$的结论也可直接从几何图形上看出。

11． 证明定积分的连续性：设函数$f(x)$和$f_h(x)=f(x+h)$在$[a,b]$上可积，则有

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f_h(x)-f(x)|dx=0。$$

证 由于$f_h(x)=f(x+h)$在$[a,b]$上可积，可知存在$\delta>0$，使得$f(x)$在$[a-\delta,b+\delta]$上可积。设$|f(x)|\le M$ ($x\in[a-\delta,b+\delta]$)。

由于$f(x)$在$[a,b]$上可积，$\forall\varepsilon>0$，存在对区间$[a,b]$ n等分的划分P，使得当$\frac{b-a}{n}<\frac{\varepsilon}{8M}$时，成立

$$\sum_{i=1}^n \omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{6}，其中\Delta x_i=\frac{b-a}{n}(i=1,2,\cdots,n)。$$

另外，当$\frac{b-a}{n}<\delta$时，记ω_0,ω_{n+1}分别是$f(x)$在区间$[a-\frac{b-a}{n},a]$和$[b,b+\frac{b-a}{n}]$上的振幅，则$\omega_0\le 2M$， $\omega_{n+1}\le 2M$。

因为

$$\int_a^b |f_h(x)-f(x)|dx=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f_h(x)-f(x)|dx=\sum_{i=1}^n\left|f(\xi_i+h)-f(\xi_i)\right|\Delta x_i,$$

且当$|h|<\frac{b-a}{n}<\min\left\{\frac{\varepsilon}{8M},\delta\right\}$时，由$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，可知

$\xi_i+h\in[x_{i-2},x_{i-1}]\cup[x_{i-1},x_i]\cup[x_i,x_{i+1}]$，其中$x_{-1}=a-\frac{b-a}{n},x_{n+1}=b+\frac{b-a}{n}$，从而

有$|f(\xi_i+h)-f(\xi_i)|\le\omega_{i-1}+\omega_i+\omega_{i+1}$，于是

$\int_a^b|f_h(x)-f(x)|\,dx\le\sum_{i=1}^n(\omega_{i-1}+\omega_i+\omega_{i+1})\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}+(\omega_0+\omega_{n+1})\frac{b-a}{n}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$，

所以

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b|f_h(x)-f(x)|\,dx=0\text{。}$$

12．设$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上都可积，证明不等式

(1) （Schwarz 不等式）$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2\le\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$；

(2) （Minkowski 不等式）

$$\left\{\int_a^b[f(x)+g(x)]^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}\le\left\{\int_a^b f^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}+\left\{\int_a^b g^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}\text{。}$$

证（1）由于对任意的t，积分$\int_a^b[tf(x)+g(x)]^2dx\ge 0$，即

$$t^2\int_a^b f^2(x)dx+2t\int_a^b f(x)g(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx\ge 0$$

所以其判别式恒为非正的，也就是成立

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2\le\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx\text{；}$$

（2）由$\int_a^b f(x)g(x)dx\le\left\{\int_a^b f^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_a^b g^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}$，得到

$$\int_a^b f^2(x)dx+2\int_a^b f(x)g(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx$$

$$\le\int_a^b f^2(x)dx+2\left\{\int_a^b f^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_a^b g^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}+\int_a^b g^2(x)dx\text{，}$$

即

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx \le \left[\left\{\int_a^b f^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\int_a^b g^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}\right]^2，$$

两边开平方，即得到

$$\left\{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \le \left\{\int_a^b f^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\int_a^b g^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}。$$

13．设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x) \ge 0$， $g(x) > 0$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b [f(x)]^n g(x)dx\right\}^{\frac{1}{n}} = \max_{a\le x\le b} f(x)。$$

证　因为在 $[a,b]$ 上 $g(x)>0$，所以有 $0 < m \le g(x) \le M < +\infty$。记 $A = f(\xi) = \max\limits_{a\le x\le b} f(x)$，不妨设 $A>0$ （因为 $A=0$ 时等式显然成立）。 由 $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$，可知 $\forall 0<\varepsilon<A$， $\exists[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，使得 $\xi\in[\alpha,\beta]$，且当 $x\in[\alpha,\beta]$ 时，成立 $0<A-\varepsilon<f(x)\le A$，于是

$$(A-\varepsilon)[m(\beta-\alpha)]^{\frac{1}{n}} \le \left\{\int_a^b f^n(x)g(x)dx\right\}^{\frac{1}{n}} \le A[M(b-a)]^{\frac{1}{n}}。$$

由于当 $n\to\infty$ 时 $[m(\beta-\alpha)]^{\frac{1}{n}}\to 1$，$[M(b-a)]^{\frac{1}{n}}\to 1$，所以 $\exists N>0$，当 $n.>N$ 时，成立 $[m(\beta-\alpha)]^{\frac{1}{n}} > 1-\dfrac{\varepsilon}{A}$ 与 $[M(b-a)]^{\frac{1}{n}} < 1+\dfrac{2\varepsilon}{A}$， 从而当 $n.>N$ 时，成立 $A-2\varepsilon < \left\{\int_a^b f^n(x)g(x)dx\right\}^{\frac{1}{n}} < A+2\varepsilon$，即 $\left|\left\{\int_a^b f^n(x)g(x)dx\right\}^{\frac{1}{n}} - A\right| < 2\varepsilon$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b [f(x)]^n g(x)dx\right\}^{\frac{1}{n}} = A = \max_{a\le x\le b} f(x)。$$

习　　题　7.3

1．　设函数$f(x)$连续，求下列函数$F(x)$的导数：

(1) $F(x)=\int_x^b f(t)dt$；　　(2) $F(x)=\int_a^{\ln x} f(t)dt$；

(3) $F(x)=\int_a^{\left(\int_0^x \sin^2 tdt\right)} \dfrac{1}{1+t^2}dt$．

解（1）$F(x)=-\int_b^x f(t)dt$，所以 $F'(x)=-f(x)$。

（2）$F'(x)=f(\ln x)\cdot(\ln x)'=\dfrac{1}{x}f(\ln x)$。

（3）$F'(x)=\dfrac{1}{1+\left(\int_0^x \sin^2 tdt\right)^2}\cdot\sin^2 x=\dfrac{4\sin^2 x}{4+(x-\sin x\cos x)^2}$。

2．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\int_{\cos x}^1 \mathrm{e}^{-w^2}dw}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x (\arctan v)^2 dv}{\sqrt{1+x^2}}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{u^2}du\right)^2}{\int_0^x e^{2u^2}du}$　。

解（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\cos x^2=1$。

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\int_{\cos x}^1 \mathrm{e}^{-w^2}dw}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{-e^{-\cos^2 x}(-\sin x)}=2e$。

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x (\arctan v)^2 dv}{\sqrt{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\arctan x)^2}{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}(\arctan x)^2=\dfrac{\pi^2}{4}$。

（4）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{u^2}du\right)^2}{\int_0^x e^{2u^2}du}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{x^2}\int_0^x e^{u^2}du}{e^{2x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=0$。

3．设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的连续函数且恒有 $f(x)>0$，证明 $g(x)=\dfrac{\int_0^x t\,f(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt}$

是定义在 $[0,+\infty)$ 上的单调增加函数。

证　因为

$$g'(x)=\frac{f(x)\left(x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt\right)}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}=\frac{f(x)\int_0^x (x-t)f(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}\ge 0,$$

所以 $g(x)=\dfrac{\int_0^x t\,f(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt}$ 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的单调增加函数。

4．求函数 $f(x)=\int_0^x (t-1)(t-2)^2\,dt$ 的极值。

解　$f'(x)=(x-1)(x-2)^2$，令 $f'(x)=0$，得到 $x=1,2$。因为当 $x<1$ 时，$f'(x)<0$，当 $1<x<2$ 或 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，所以 $x=1$ 是极小值点，$x=2$ 不是极值点。由

$$f(1)=\int_0^1[(t-2)^3+(t-2)^2]dt=-\frac{17}{12},$$

可知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有极小值 $f(1)=-\dfrac{17}{12}$。

5 利用中值定理求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x}\,dt$；　　　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\dfrac{\sin x}{x}\,dt$　（$p\in\mathbf{N}$）。

解（1）由积分第一中值定理，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dt=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\xi}\int_0^1 x^n dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n+1}=0\quad(0\le\xi\le 1)。$$

(2) 由积分第一中值定理，$\exists\xi\in[n,n+p]$，使得 $\left|\int_n^{n+p}\dfrac{\sin x}{x}dx\right|=\left|\dfrac{\sin\xi}{\xi}p\right|\le\dfrac{p}{n}$，

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dt=0。$$

6. 求下列定积分：

(1) $\int_0^1 x^2(2-x^2)^2 dx$； (2) $\int_1^2 \frac{(x-1)(x^2-x+1)}{2x^2}dx$；

(3) $\int_0^2 (2^x+3^x)^2 dx$； (4) $\int_0^{\frac{1}{2}} x(1-4x^2)^{10} dx$；

(5) $\int_{-1}^1 \frac{(x+1)dx}{(x^2+2x+5)^2}$； (6) $\int_0^1 \arcsin x dx$；

(7) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$； (8) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 x dx$；

(9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin^2 x\, dx$； (10) $\int_1^{\mathrm{e}} \sin(\ln x)\, dx$；

(11) $\int_0^1 x^2 \arctan x dx$； (12) $\int_1^{\mathrm{e}+1} x^2 \ln(x-1)dx$。

(13) $\int_0^{\sqrt{\ln 2}} x^3 \mathrm{e}^{-x^2} dx$； (14) $\int_0^1 \mathrm{e}^{2\sqrt{x+1}} dx$；

(15) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}$； (16) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$；

(17) $\int_0^1 \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 dx$； (18) $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$；

(19) $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$； (20) $\int_0^1 x\sqrt{\frac{x}{2-x}}dx$；

解 (1) $\int_0^1 x^2(2-x^2)^2 dx = \int_0^1 (4x^2-4x^4+x^6)dx = \frac{4}{3}-\frac{4}{5}+\frac{1}{7}=\frac{71}{105}$。

(2) $\int_1^2 \frac{(x-1)(x^2-x+1)}{2x^2}dx = \int_1^2 (\frac{x}{2}-1+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2})dx = \ln 2-\frac{1}{2}$。

(3) $\int_0^2 (2^x+3^x)^2 dx = \int_0^2 (4^x+2\cdot 6^x+9^x)dx = \frac{15}{\ln 4}+\frac{70}{\ln 6}+\frac{40}{\ln 3}$。

(4) $\int_0^{\frac{1}{2}} x(1-4x^2)^{10} dx = -\frac{1}{8}\int_0^{\frac{1}{2}} (1-4x^2)^{10} d(1-4x^2) = -\frac{1}{88}(1-4x^2)^{11}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{88}$。

(5) $\int_{-1}^1 \frac{(x+1)dx}{(x^2+2x+5)^2} = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{d(x+1)^2}{[(x+1)^2+4]^2} = -\frac{1}{2(x^2+2x+5)}\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{16}$。

(6) $\int_0^1 \arcsin x dx = x\arcsin x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2}-1$。

（7）$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx = 0$。（奇函数在对称区间上的积分为零）

（8）$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sec^2 xdx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} xdx = x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan xdx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} xdx$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi^2}{32}\text{。}$$

（9）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin^2 xdx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(1-\cos 2x)dx$，由

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2xdx = e^x\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin 2xdx = -e^{\frac{\pi}{2}} - 1 + 2e^x \sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos 2xdx,$$

得到$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2xdx = -\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{5}$，所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin^2 xdx = \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1) + \frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{10} = \frac{3e^{\frac{\pi}{2}}-2}{5}\text{。}$$

（10）$\int_1^{\mathrm{e}} \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x)\Big|_1^e - \int_1^e \cos(\ln x)dx$

$$= e(\sin 1 - \cos 1) + 1 - \int_1^{\mathrm{e}} \sin(\ln x)dx,$$

所以

$$\int_1^{\mathrm{e}} \sin(\ln x)dx = \frac{e}{2}(\sin 1 - \cos 1) + \frac{1}{2}\text{。}$$

（11）$\int_0^1 x^2\arctan xdx = \frac{1}{3}x^3\arctan x\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\int_0^1 (x - \frac{x}{1+x^2})dx$

$$= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2) = \frac{\pi}{12} + \frac{\ln 2 - 1}{6}\text{。}$$

（12）$\int x^2\ln(x-1)dx = \frac{1}{3}x^3\ln(x-1) - \frac{1}{3}\int (x^2+x+1+\frac{1}{x-1})dx$

$$= \frac{1}{3}(x^3-1)\ln(x-1) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right) + c,$$

所以

$$\int_1^{\mathrm{e}+1} x^2\ln(x-1)dx = \frac{1}{3}(x^3-1)\ln(x-1)\Big|_1^{e+1} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right)\Big|_1^{e+1} = \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{2}e^2\text{。}$$

（13）$\int_0^{\sqrt{\ln 2}} x^3\mathrm{e}^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}\Big|_0^{\sqrt{\ln 2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\ln 2}} \mathrm{e}^{-x^2}dx^2$

$$= -\frac{\ln 2}{4} - \frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^{\sqrt{\ln 2}} = \frac{1-\ln 2}{4}\text{。}$$

（14）令$t=\sqrt{x+1}$,则$x=t^2-1$，于是

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{2\sqrt{x+1}}dx=2\int_1^{\sqrt{2}}e^{2t}tdt=te^{2t}\Big|_1^{\sqrt{2}}-\int_1^{\sqrt{2}}e^{2t}dt=e^{2\sqrt{2}}(\sqrt{2}-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}e^2 \text{。}$$

（15）$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}=-\int_0^1\frac{de^{-x}}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{-2x}}}=-\ln(e^{-x}+\sqrt{1+\mathrm{e}^{-2x}})\Big|_0^1=\ln\frac{e(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{1+\mathrm{e}^2}}$

$$=\ln(\sqrt{1+e^2}-1)+\ln(\sqrt{2}+1)-1 \text{。}$$

（16）　令　$x=\sin t$，则

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{dt}{\cos^2 t}=2\tan t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{2}{3}\sqrt{3}\text{。}$$

（17）令$t=\frac{x-1}{x+1}$，则　$x=\frac{1+t}{1-t},dx=\frac{2dt}{(1-t)^2}$，于是

$$\int_0^1\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4dx=\int_{-1}^0\frac{2t^4}{(1-t)^2}dt=2\int_{-1}^0\left(t^2+2t+3-\frac{4}{1-t}+\frac{1}{(1-t)^2}\right)dt$$

$$=2\left(\frac{1}{3}t^3+t^2+3t+4\ln(1-t)+\frac{1}{1-t}\right)\Bigg|_{-1}^0=\frac{17}{3}-8\ln 2\text{。}$$

注：本题也可令$t=x+1$，得到

$$\int_0^1\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4dx=\int_1^2\frac{(t-2)^4}{t^4}dt=\frac{17}{3}-8\ln 2\text{。}$$

（18）　$\int_0^1\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\int_0^1\frac{d(x-x^{-1})}{(x-x^{-1})^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\Big|_0^1=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$ 。

（19）$\int_1^{\sqrt{2}}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}=-\int_1^{\sqrt{2}}\frac{dx^{-1}}{\sqrt{1+x^{-2}}}=-\ln(x^{-1}+\sqrt{1+x^{-2}})\Big|_1^{\sqrt{2}}=\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$ 。

（20）　$\int_0^1 x\sqrt{\frac{x}{2-x}}dx=\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}dx$

$$=-\int_0^1\frac{2x-x^2}{\sqrt{2x-x^2}}dx-\int_0^1\frac{d(2x-x^2)}{\sqrt{2x-x^2}}+2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$=-\int_{-1}^0\sqrt{1-t^2}dt-2\sqrt{2x-x^2}\Big|_0^1+2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$

$$=-\frac{\pi}{4}-2+2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}\pi-2\text{。}$$

注：本题也可令 $x=1+\sin t$，得到

$$\int_0^1 x\sqrt{\frac{x}{2-x}}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(1+\sin t)^2\,dt=\frac{3}{4}\pi-2\text{。}$$

7. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\quad(p>0)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$。

解 (1) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$。

(2) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x^p dx=\frac{1}{p+1}$。

(3) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1}\sin\frac{i}{n}\pi\right)\frac{1}{n}=\int_0^1\sin\pi x dx=\frac{2}{\pi}$。

8. 求下列定积分：

(1) $\int_0^{\pi}\cos^n xdx$;　　(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^n x\,dx$;

(3) $\int_0^a(a^2-x^2)^n\,dx$;　　(4) $\int_0^{\frac{1}{2}}x^2(1-4x^2)^{10}dx$;

(5) $\int_0^1 x^n\ln^m xdx$;　　(6) $\int_1^e x\ln^n xdx$.

解 (1) $\int_0^{\pi}\cos^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^n xdx$,

在第二个积分中，令 $t=\pi-x$，则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^n xdx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^n(\pi-t)dt=(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n tdt\text{,}$$

所以当 n 为奇数时，$\int_0^{\pi}\cos^n xdx=0$;

当n为偶数时，$\int_0^{\pi}\cos^n xdx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx = \dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{n(n-2)\cdots 2}\pi$。

（2）当n为奇数时，显然$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^n xdx = 0$；

当n为偶数时，

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^n xdx = 2\int_0^{\pi}\sin^n xdx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n xdx,$$

在积分$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n xdx$中，令$t = \pi - x$，则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n xdx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^n(\pi - t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n tdt,$$

所以

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^n xdx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n tdt = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{n(n-2)\cdots 2}2\pi 。$$

（3）令$x = a\sin t$，则

$$\int_0^a (a^2 - x^2)^n dx = a^{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1} tdt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}a^{2n+!} 。$$

（4）令$x = \dfrac{1}{2}\sin t$，则

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^2(1-4x^2)^{10}dx = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^{21} tdt = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^{21} t - \cos^{23} t)dt$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{20!!}{21!!} - \frac{22!!}{23!!}\right) = \frac{1}{184}\frac{20!!}{21!!} 。$$

（5）$\int_0^1 x^n \ln^m xdx = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\ln^m x\Big|_0^1 - \dfrac{m}{n+1}\int_0^1 x^n \ln^{m-1} xdx$

$$= -\frac{m}{n+1}\int_0^1 x^n \ln^{m-1} xdx = \cdots = (-1)^m \frac{m!}{(n+1)^m}\int_0^1 x^n dx = (-1)^m \frac{m!}{(n+1)^{m+1}} 。$$

（6）$\int_1^e x\ln^n x\,dx = \dfrac{1}{2}x^2\ln^n x\Big|_1^e - \dfrac{n}{2}\int_1^e x\ln^{n-1} x\,dx = \dfrac{1}{2}e^2 - \dfrac{n}{2}\int_1^e x\ln^{n-1} x\,dx$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{n-1}{2}\int_1^e x\ln^{n-2} x\,dx\right) = \cdots$$

$$=\frac{e^2}{2}[1-\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{2^2}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n!}{2^{n-1}}]+(-1)^n\frac{n!}{2^n}\int_1^e xdx$$

$$=\frac{e^2}{2}[1-\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{2^2}-\cdots+(-1)^n\frac{n!}{2^{n+1}}]+(-1)^{n+1}\frac{n!}{2^{n+1}}\text{。}$$

9. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，证明：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$；

(2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$。

证（1）令$t=\frac{\pi}{2}-x$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx\text{。}$$

（2）令$t=\pi-x$，则

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)dt=\pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx-\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx\text{，}$$

所以

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx\text{。}$$

10. 利用上题结果计算：

(1) $\int_0^{\pi} x\sin^4 x\,dx$；　　(2) $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$；

(3) $\int_0^{\pi}\frac{x}{1+\sin^2 x}dx$。

解（1）$\int_0^{\pi} x\sin^4 xdx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^4 xdx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 xdx=\frac{3}{16}\pi^2$。

（2）$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\frac{\pi}{2}\arctan\cos x\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{4}\pi^2$。

（3）$\int_0^{\pi}\frac{x}{1+\sin^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\sin^2 x}=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin^2 x}=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tan x}{1+2\tan^2 x}$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi^2\text{。}$$

11. 求下列定积分：

(1) $\int_0^{6} x^2[x]\,dx$；　　(2) $\int_0^{2}\mathrm{sgn}(x-x^3)\,dx$；

(3) $\int_0^1 x|x-a|dx$;　　　　　　(4) $\int_0^2 [e^x]dx$.

解 (1) $\int_0^6 x^2[x]dx=\int_1^2 x^2dx+2\int_2^3 x^2dx+3\int_3^4 x^2dx+4\int_4^5 x^2dx+5\int_5^6 x^2dx=285$。

(2) $\int_0^2 \operatorname{sgn}(x-x^3)dx=\int_0^1 1dx+\int_1^2(-1)dx=0$。

(3) 当 $a\le 0$ 时，

$$\int_0^1 x\,|\,x-a\,|\,dx=\int_0^1 x(x-a)dx=\frac{1}{3}-\frac{a}{2};$$

当 $0<a<1$ 时，

$$\int_0^1 x\,|\,x-a\,|\,dx=\int_0^a x(a-x)dx+\int_a^1 x(x-a)dx=\frac{1}{3}a^3-\frac{a}{2}+\frac{1}{3};$$

当 $a\ge 1$ 时，

$$\int_0^1 x\,|\,x-a\,|\,dx=\int_0^1 x(a-x)dx=\frac{a}{2}-\frac{1}{3}。$$

(4) $\int_0^2\ [e^x]dx=\int_0^{\ln 2}\ 1dx+\int_{\ln 2}^{\ln 3}\ 2dx+\int_{\ln 3}^{\ln 4}\ 3dx+\int_{\ln 4}^{\ln 5}\ 4dx$

$+\int_{\ln 5}^{\ln 6}\ 5dx+\int_{\ln 6}^{\ln 7}\ 6dx+\int_{\ln 7}^{2}\ 7dx$

$=14-\ln(7!)$。

12. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且关于 $x=T$ 对称，这里 $a<T<b$。则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{2T-b} f(x)dx+2\int_T^b f(x)dx。$$

并给出它的几何解释。

证 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^{2T-b} f(x)dx+\int_{2T-b}^{T} f(x)dx+\int_T^b f(x)dx$,

由于 $f(x)$ 关于 $x=T$ 对称，所以 $f(2T-x)=f(x)$，于是，令 $x=2T-t$，则

$$\int_{2T-b}^{T} f(x)dx=-\int_b^T f(2T-t)dt=\int_T^b f(2T-t)dt=\int_T^b f(t)dt=\int_T^b f(x)dx,$$

所以

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{2T-b} f(x)dx+2\int_T^b f(x)dx。$$

从几何上说，由于 $f(x)$ 关于 $x=T$ 对称，所以积分 $\int_{2T-b}^{T} f(x)dx$ 与积分 $\int_T^b f(x)dx$ 表示的是相同的面积，从而上述等式成立。

13. 设$f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2}, & x\ge 0, \\ \dfrac{1}{1+e^x}, & x<0. \end{cases}$ 计算$I=\int_1^4 f(x-2)dx$。

解　令$t=x-2$，则

$$I=\int_{-1}^2 f(t)dt=\int_{-1}^0 f(t)dt+\int_0^2 f(t)dt=\int_{-1}^0\frac{1}{1+e^t}dt+\int_0^2 te^{-t^2}dt$$

$$=-\int_{-1}^0\frac{d(e^{-t}+1)}{e^{-t}+1}+\frac{1}{2}\int_0^2 e^{-t^2}dt^2=\ln\frac{e+1}{2}+\frac{1}{2}(1-e^{-4})\text{。}$$

14. 设函数$f(x)=\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 g(t)dt$，其中函数$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且$g(1)=5$，$\int_0^1 g(t)dt=2$，证明$f'(x)=x\int_0^x g(t)dt-\int_0^x tg(t)dt$，并计算$f''(1)$和$f'''(1)$。

解　$f(x)=\frac{1}{2}\int_0^x (x^2-2xt+t^2)g(t)dt=\frac{1}{2}x^2\int_0^x g(t)dt-x\int_0^x tg(t)dt+\frac{1}{2}\int_0^x t^2 g(t)dt$，

等式两边求导，得到

$$f'(x)=x\int_0^x g(t)dt+\frac{1}{2}x^2 g(x)-(\int_0^x tg(t)dt+x^2 g(x))+\frac{1}{2}x^2 g(x)$$

$$=x\int_0^x g(t)dt-\int_0^x tg(t)dt\text{。}$$

再求导，得到$f''(x)=\int_0^x g(t)dt,\ f'''(x)=g(x)$，所以

$$f''(1)=2\text{，}\quad f'''(1)=5\text{。}$$

15. 设$(0,+\infty)$上的连续函数$f(x)$满足$f(x)=\ln x-\int_1^e f(x)dx$，求$\int_1^e f(x)dx$。

解　记$\int_1^e f(x)dx=a$，则　$f(x)=\ln x-a$，于是

$$a=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e \ln xdx-a(e-1),$$

所以

$$a=\frac{1}{e}\int_1^e \ln xdx=\frac{1}{e}\left(x\ln x-x\right)\Big|_1^e=\frac{1}{e}\text{。}$$

16. 设函数$f(x)$连续，且$\int_0^1 tf(2x-t)dt=\frac{1}{2}\arctan(x^2)$，$f(1)=1$。求$\int_1^2 f(x)dx$。

解 在$\int_0^1 tf(2x-t)dt$中，令$u=2x-t$，则

$$\int_0^1 tf(2x-t)dt = -\int_{2x}^{2x-1}(2x-u)f(u)du \text{ ,}$$

于是

$$2x\int_{2x-1}^{2x} f(u)du - \int_{2x-1}^{2x} uf(u)du = \frac{1}{2}\arctan(x^2) \text{ ,}$$

两边求导，得到

$$2\int_{2x-1}^{2x} f(u)du + 4x(f(2x) - f(2x-1)) - 2(2xf(2x) - (2x-1)f(2x-1)) = \frac{x}{1+x^4} \text{ ,}$$

将 $x=1, f(1)=1$ 代入上式，得到

$$\int_1^2 f(x)dx = \frac{5}{4} \text{。}$$

17. 求 $\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx$，其中 n 为正整数。

解　首先有

$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x|\sin x|dx = \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x\sin x dx = (4k+1)\pi \text{ ,}$$

$$\int_{)2k-1)\pi}^{2k\pi} x|\sin x|dx = -\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} x\sin x dx = (4k-1)\pi \text{ 。}$$

当 $n=2m$ 时，

$$\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx = \sum_{k=0}^{m-1}\left(\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x|\sin x|dx + \int_{(2k+1)\pi}^{2(k+1)\pi} x|\sin x|dx\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1}[(4k+1)+(4k+3)\pi] = 4m^2\pi \text{ ；}$$

当 $n=2m+1$ 时，

$$\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx = \sum_{k=0}^{m-1}\left(\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x|\sin x|dx + \int_{(2k+1)\pi}^{2(k+1)\pi} x|\sin x|dx\right) + \int_{2m\pi}^{(2m+1)\pi} x|\sin x|dx$$

$$= 4m^2\pi + (4m+1)\pi = (2m+1)^2\pi \text{ 。}$$

所以

$$\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx = n^2\pi \text{ 。}$$

18. 设函数 $S(x) = \int_0^x |\cos t|dt$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}$。

解　设$n\pi < x \le (n+1)\pi$，n为正整数，则 $\frac{x}{n} \to \pi \ (x \to +\infty)$。由于

$$\int_0^{n\pi} |\cos x| dx = n\int_0^{\pi} |\cos x| dx = 2n ,\quad 0 \le \int_{n\pi}^{x} |\cos x| dx \le \pi ,$$

可知

$$\frac{2n}{x} \le \frac{S(x)}{x} \le \frac{2n+\pi}{x} ,$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{S(x)}{x} = \frac{2}{\pi} 。$$

19. 设$f(x)$在$(0,+\infty)$上连续，且对于任何$a>0$有

$$g(x) = \int_x^{ax} f(t)dt \equiv \text{常数},\quad x \in (0,+\infty) 。$$

证明：$f(x) = \frac{c}{x}$，$x \in (0,+\infty)$，其中c为常数。

证　在$g(x) = \int_x^{ax} f(t)dt$两边关于$x$求导，得到

$$g'(x) = af(ax) - f(x) \equiv 0 。$$

取$x=1$，则$f(a) = \frac{f(1)}{a}$，此式对任何$a>0$都成立。记$c = f(1)$，就得到

$$f(x) = \frac{c}{x},\quad x \in (0,+\infty) 。$$

20. 设$f(x)$在$(0,+\infty)$上连续，证明

$$\int_1^4 f\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)\frac{\ln x}{x} dx = (\ln 2)\int_1^4 f\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)\frac{1}{x} dx 。$$

证　令$t = \frac{4}{x}$，则 $x = \frac{4}{t}, dx = -\frac{4}{t^2}dt$，于是

$$\int_1^4 f\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)\frac{\ln x}{x} dx = \int_4^1 f\left(\frac{t}{2}+\frac{2}{t}\right)\frac{t(\ln 4 - \ln t)}{4}(-\frac{4}{t^2})dt$$

$$= \int_1^4 f\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)\frac{\ln 4 - \ln x}{x} dx ,$$

所以

$$\int_1^4 f\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)\frac{\ln x}{x} dx = (\ln 2)\int_1^4 f\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)\frac{1}{x} dx 。$$

21．设$f'(x)$在$[a,b]$上连续。证明

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|+\int_a^b|f'(x)|dx 。$$

证　由于$f(x)$在$[a,b]$上连续，可设 $|f(\xi)|=\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|,\xi\in[a,b]$及

$|f(\eta)|=\min\limits_{a\le x\le b}|f(x)|$， $\eta\in[a,b]$。于是

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|-\min_{a\le x\le b}|f(x)|=|f(\xi)|-|f(\eta)|\le|f(\xi)-f(\eta)|=\left|\int_\eta^\xi f'(x)dx\right|\le\int_a^b|f'(x)|dx 。$$

另一方面，由积分中值定理，$\exists\varsigma\in[a,b]$，使$f(\varsigma)=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$，于是

$$\min_{a\le x\le b}|f(x)|\le|f(\varsigma)|=\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| 。$$

所以

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|=\min_{a\le x\le b}|f(x)|+(\max_{a\le x\le b}|f(x)|-\min_{a\le x\le b}|f(x)|)\le\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|+\int_a^b|f'(x)|dx 。$$

22．设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，证明

$$\int_0^x f(u)(x-u)\,du=\int_0^x\left\{\int_0^u f(x)dx\right\}du 。$$

证　利用分部积分法，

$$\int_0^x\left\{\int_0^u f(x)dx\right\}du=\left(u\int_0^u f(x)dx\right)\Big|_0^x-\int_0^x uf(u)du=\int_0^x f(u)(x-u)\,du 。$$

注：本题也可令$F(x)=\displaystyle\int_0^x f(u)(x-u)du-\int_0^x\left\{\int_0^u f(x)dx\right\}du$，证明$F'(x)\equiv 0$。

23. 设$f(x)$在$[0,a]$上二阶可导（$a>0$），且$f''(x)\ge 0$，证明：

$$\int_0^a f(x)dx\ge af\left(\frac{a}{2}\right)。$$

证　将$f(x)$在$x=\dfrac{a}{2}$展开成 1 阶的 Taylor 公式，有

$$f(x)=f(\frac{a}{2})+f'(\frac{a}{2})(x-\frac{a}{2})+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{a}{2})^2，\quad(0<\xi<a)。$$

由 $f''(x)\ge 0$，得到

$$f(x) \ge f(\frac{a}{2}) + f'(\frac{a}{2})(x - \frac{a}{2}) 。$$

对上述不等式两边从0到a积分，由于$\int_0^a (x - \frac{a}{2})dx = 0$，就得到

$$\int_0^a f(x)dx \ge af\left(\frac{a}{2}\right) 。$$

24. 设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且$f''(x) \le 0$， $x \in [0,1]$，证明：

$$\int_0^1 f(x^2)dx \le f\left(\frac{1}{3}\right) 。$$

证 将$f(x)$在$x = \frac{1}{3}$展开成 1 阶的 Taylor 公式，有

$$f(x) = f(\frac{1}{3}) + f'(\frac{1}{3})(x - \frac{1}{3}) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - \frac{1}{3})^2, \quad (0 < \xi < 1) 。$$

由 $f''(x) \le 0$，得到$f(x) \le f(\frac{1}{3}) + f'(\frac{1}{3})(x - \frac{1}{3})$， $x \in [0,1]$，再用x^2替换x，即得到

$$f(x^2) \le f(\frac{1}{3}) + f'(\frac{1}{3})(x^2 - \frac{1}{3}) 。$$

对上述不等式两边从0到1积分，由于$\int_0^1 (x^2 - \frac{1}{3})dx = 0$，就得到

$$\int_0^1 f(x^2)dx \le f\left(\frac{1}{3}\right) 。$$

25．设$f(x)$为$[0,2\pi]$上的单调减少函数，证明：对任何正整数n成立

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx \ge 0 。$$

证 $$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} f(x)\sin nx dx + \int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}} f(x)\sin nx dx \right),$$

在$\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} f(x)\sin nx dx$与$\int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}} f(x)\sin nx dx$中，分别令$x = \frac{2k\pi + t}{n}$与$x = \frac{(2k+1)\pi + t}{n}$，得到

$$\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{n}\int_0^{\pi} f(\frac{2k\pi + t}{n})\sin t dt,$$

$$\int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}} f(x)\sin nx dx = -\frac{1}{n}\int_0^{\pi} f(\frac{(2k+1)\pi + t}{n})\sin t dt 。$$

由于$f(x)$在$[0,2\pi]$上单调减少， $\sin t$在$[0,\pi]$上非负，所以

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\left(f\left(\frac{2k\pi+t}{n}\right)-f\left(\frac{(2k+1)\pi+t}{n}\right)\right)\sin tdt \geq 0\text{。}$$

26. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^{\pi} f(x)dx = 0$，$\int_0^{\pi} f(x)\cos xdx = 0$。证明：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1，ξ_2，使得 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$。

证 证明一： 设 $g(x) = \int_0^x f(t)dt,$， $h(x) = \int_0^x g(x)\sin xdx$，则

$$g(0) = g(\pi) = 0\text{，}$$

$$h(0) = 0\text{，}\quad h(\pi) = \int_0^{\pi} g(x)\sin xdx = -\int_0^{\pi} g(x)d\cos x$$

$$= -g(x)\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f(x)\cos xdx = \int_0^{\pi} f(x)\cos xdx = 0\text{，}$$

对 $h(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上应用 Rolle 定理，可知存在 $\eta \in (0,\pi)$，使得 $h'(\eta) = g(\eta)\sin\eta = 0$，即 $g(\eta) = 0$， 再在 $[0,\eta]$ 和 $[\eta,\pi]$ 上对 $g(x)$ 分别运用 Rolle 定理，可知 $\exists \xi_1,\xi_2 \in (0,\pi)$，使得

$$f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0\text{。}$$

证明二：用反证法。若不然，只有一个点 $\xi \in (0,\pi)$，使得 $f(\xi) = 0$，由于 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $(0,\xi)$ 和 (ξ,π) 上异号，不妨设在 $(0,\xi)$ 中 $f(x) < 0$，在 (ξ,π) 中 $f(x) > 0$。

设 $g(x) = \int_0^x f(t)dt$，则 $g(0) = g(\pi) = 0,\ g'(x) = f(x)$，可知 $g(x)$ 在 $(0,\xi)$ 中单调减少，而在 (ξ,π) 中单调增加，从而 $g(x) \leq 0, x \in [0,\pi]$。

另一方面，$g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上不恒等于零（否则 $f(x)$ 恒为零与反证法假设矛盾），于是

$$\int_0^{\pi} f(x)\cos xdx = \int_0^{\pi}\cos xdg(x) = g(x)\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} g(x)\sin xdx = \int_0^{\pi} g(x)\sin xdx < 0\text{，}$$

与题设矛盾。

习　题　7.4

1. 求下列曲线所围的图形面积：

(1) $y=\dfrac{1}{x}$， $y=x$ ， $x=2$；

(2) $y^2=4(x+1)$， $y^2=4(1-x)$；

(3) $y=x$ ， $y=x+\sin^2 x$， $x=0$， $x=\pi$；

(4) $y=\mathrm{e}^x$， $y=\mathrm{e}^{-x}$， $x=1$；

(5) $y=|\ln x|$， $y=0$， $x=0.1$， $x=10$；

(6) 叶形线$\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=2t^2-t^3, \end{cases}$ $0\le t\le 2$；

(7) 星形线$\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t, \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$；

(8) 阿基米德螺线$r=a\theta, \theta=0, \theta=2\pi$；

(9) 对数螺线$r=a\,\mathrm{e}^{\theta}, \theta=0, \theta=2\pi$；

(10) 蚌线$r=a\cos\theta+b$ （$b\ge a>0$）；

(11) $r=3\cos\theta$， $r=1+\cos\theta$ $(-\dfrac{\pi}{3}\le\theta\le\dfrac{\pi}{3})$；

(12) 双纽线$r^2=a^2\cos 2\theta$；

(13) 四叶玫瑰线$r=a\cos 2\theta$。

(14) Descartes 叶形线$x^3+y^3=3axy$；

(15) $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$.

解（1）面积$A=\int_1^2(x-\dfrac{1}{x})dx=(\dfrac{1}{2}x^2-\ln x)\Big|_1^2=\dfrac{3}{2}-\ln 2$。

（2）面积$A=2\int_0^2\left((1-\dfrac{y^2}{4})-(\dfrac{y^2}{4}-1)\right)dy=2\int_0^2(2-\dfrac{y^2}{2})dy=\dfrac{16}{3}$。

（3）面积$A=\int_0^\pi\sin^2 xdx=\dfrac{1}{2}\int_0^\pi(1-\cos 2x)dx=\dfrac{\pi}{2}$。

（4）面积 $A=\int_0^1(e^x-e^{-x})dx=e+\frac{1}{e}-2$。

（5）面积 $A=\int_{0.1}^{10}|\ln x|dx=\int_1^{10}\ln xdx-\int_{0.1}^{1}\ln xdx=x(\ln x-1)\Big|_1^{10}-x(\ln x-1)\Big|_{0.1}^{1}$

$=\frac{99}{10}\ln 10-\frac{81}{10}$。

（6）面积 $A=\left|\int_0^2(2t^2-t^3)(2-2t)dt\right|=2\left|\int_0^2(2t^2-3t^3+t^4)dt\right|=\frac{8}{15}$。

（7）面积 $A=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos^3 t\cdot 3a\sin^2 t\cos tdt=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4 t-\cos^6 t)dt$

$=12a^2\left(\frac{3}{16}\pi-\frac{15}{96}\pi\right)=\frac{3}{8}\pi a^2$。

（8）面积 $A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2\theta^2 d\theta=\frac{4}{3}\pi^3 a^2$。

（9）面积 $A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2 e^{2\theta}d\theta=\frac{1}{4}\left(e^{4\pi}-1\right)a^2$。

（10）面积 $A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos\theta+b)^2 d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2\theta+2ab\cos\theta+b^2)d\theta$

$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta+b^2\pi=\frac{1}{2}\pi a^2+\pi b^2$。

（11）面积

$$A=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}[(3\cos\theta)^2-(1+\cos\theta)^2]d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(3+4\cos 2\theta-2\cos\theta)d\theta=\pi\text{。}$$

（12）面积 $A=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos 2\theta d\theta=a^2$。

（13）面积 $A=8\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos^2 2\theta d\theta=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 4\theta)d\theta=\frac{1}{2}\pi a^2$。

（14）解一：令 $y=tx$，则 $x=\frac{3at}{1+t^3}$， $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$， $t:0\to+\infty$。

于是面积

$$A=\left|\int_0^{+\infty}\frac{3at^2}{1+t^3}\left(\frac{3at}{1+t^3}\right)'dt\right|=9a^2\left|\int_0^{+\infty}\frac{(1-2t^3)t^2}{(1+t^3)^3}dt\right|,$$

令 $u=t^3$，则

$$A = 3a^2\left|\int_0^{+\infty}\frac{(1-2u)}{(1+u)^3}du\right| = 3a^2\int_0^{+\infty}\left(\frac{2}{(1+u)^2}-\frac{3}{(1+u)^3}\right)du = \frac{3}{2}a^2\text{。}$$

解二：　将 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 代入 $x^3 + y^3 = 3axy$ 中，得到

$$r = \frac{3a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}，\quad \theta\in[0,\frac{\pi}{2}],$$

于是面积

$$A = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin^3\theta+\cos^3\theta)^2}d\theta = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^2\theta}{(\tan^3\theta+1)^2}d\tan\theta$$

$$= -\frac{3a^2}{2}\cdot\frac{1}{\tan^3\theta+1}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}a^2\text{。}$$

（15）将 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 代入 $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$ 中，得到

$$r^2 = \frac{a^2}{\sin^4\theta+\cos^4\theta},$$

于是面积

$$A = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}d\theta = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^2\theta+1}{\tan^4\theta+1}d\tan\theta,$$

令 $t=\tan\theta$，则

$$A = 2a^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2+1}{t^4+1}dt = 2a^2\int_0^{+\infty}\frac{d(t-t^{-1})}{(t-t^{-1})^2+2} = \sqrt{2}a^2\arctan\frac{t-t^{-1}}{\sqrt{2}}\Bigg|_0^{+\infty} = \sqrt{2}\pi a^2\text{。}$$

2．求由抛物线 $y^2 = 4ax$ 与过其焦点的弦所围的图形面积的最小值。

解　选取焦点 $(a,0)$ 为极点，x 轴为极轴，建立极坐标。则由 $x = r\cos\theta + a, y = r\sin\theta$ 代入抛物线的方程 $y^2 = 4ax$ 中，可得抛物线的极坐标方程为

$$r = \frac{2a}{1-\cos\theta}\text{。}$$

设过焦点的弦的极角为 α，则它与抛物线所围的面积为

$$A(\alpha) = \frac{1}{2}\int_\alpha^{\alpha+\pi}\frac{4a^2}{(1-\cos\theta)^2}d\theta\text{。}$$

由

$$A'(\alpha)=2a^2\left(\frac{1}{(1+\cos\alpha)^2}-\frac{1}{(1-\cos\alpha)^2}\right)=-\frac{8a^2\cos\alpha}{\sin^4\alpha},$$

令$A'(\alpha)=0$，得到$\alpha=\frac{\pi}{2}$。由于当$\alpha<\frac{\pi}{2}$时，$A'(\alpha)<0$；当$\alpha>\frac{\pi}{2}$时，$A'(\alpha)>0$，所以$A(\alpha)$在$\alpha=\frac{\pi}{2}$取到极小值，也就是最小值$A(\frac{\pi}{2})$：

$$A(\frac{\pi}{2})=2a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{1}{(1-\cos\theta)^2}d\theta=-a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}(1+\cot^2\frac{\theta}{2})d\cot\frac{\theta}{2}=\frac{10}{3}\sqrt{2}a^2。$$

3. 求下列曲线的弧长：

(1) $y=x^{3/2}$，$0\le x\le 4$；

(2) $x=\frac{y^2}{4}-\frac{\ln y}{2}$，$1\le y\le \mathrm{e}$；

(3) $y=\ln\cos x$，$0\le x\le a<\frac{\pi}{2}$；

(4) 星形线$\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$；

(5) 圆的渐开线$\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t),\\ y=a(\sin t-t\cos t),\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$；

(6) 心脏线$r=a(1-\cos\theta)$，$0\le\theta\le 2\pi$；

(7) 阿基米德螺线$r=a\theta, 0\le\theta\le 2\pi$；

(8) $r=a\sin^3\frac{\theta}{3}$，$0\le\theta\le 3\pi$。

解 (1) $L=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx=\frac{80\sqrt{10}-8}{27}$。

(2) $L=\int_1^e\sqrt{1+\frac{1}{4}(y-y^{-1})^2}dy=\int_1^e\frac{1}{2}(y+y^{-1})dy=\frac{e^2+1}{4}$。

(3) $L=\int_0^a\sqrt{1+\tan^2 x}dx=\int_0^a\sec xdx=\ln(\tan a+\sec a)$。

(4) $L=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\sin t\cos tdx=6a$。

(5) 由 $x'(t)=at\cos t, y'(t)=at\sin t$，可得

$$L=\int_0^{2\pi} atdt=2\pi^2 a\text{。}$$

（6） $L=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+r'^2}d\theta=\int_0^{2\pi}2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta=8a$。

（7） $L=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+r'^2}d\theta=a\int_0^{2\pi}\sqrt{\theta^2+1}d\theta=\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)$。

（8） $L=\int_0^{3\pi}\sqrt{r^2+r'^2}d\theta=\int_0^{3\pi}a\sin^2\frac{\theta}{3}d\theta=\frac{3}{2}\pi a$。

4. 在旋轮线的第一拱上，求分该拱的长度为 $1:3$ 的点的坐标。

解　设所求点所对应的参数为 α，则

$$L_1=\int_0^{\alpha}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}dt=4a(1-\cos\frac{\alpha}{2}),$$

$$L_2=\int_{\alpha}^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}dt=4a(1+\cos\frac{\alpha}{2}),$$

由 $L_2=3L_1$，得 $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$，即 $\alpha=\frac{2}{3}\pi$，所以该点的坐标为 $((\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2})a,\frac{3a}{2})$。

5. 求下列几何体的体积：

⑴　正椭圆台：上底是长半轴为 a、短半轴为 b 的椭圆，下底是长半轴为 A、短半轴为 B 的椭圆（$A>a,B>b$），高为 h；

⑵　椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$；

⑶　直圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 和 $x^2+z^2=a^2$ 所围的几何体；

⑷　球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和直圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 所围的几何体。

解（1） $V=\int_0^h\pi(a+\frac{A-a}{h}x)(b+\frac{B-b}{h}x)dx=\frac{\pi h}{6}(2AB+2ab+Ab+aB)$。

（2） $V=\int_{-c}^{c}\pi ab(1-\frac{z^2}{c^2})dz=\frac{4}{3}\pi abc$。

（3）用平行于 $0yz$ 平面的平面去截这立体的第一卦限的部分，截面为正方形，于是

$$V=8\int_0^a(a^2-x^2)dx=\frac{16}{3}a^3\text{。}$$

（4）用平行于 $0yz$ 平面的平面去截这立体，则截面积为

$$A(x)=2\int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}dy=2\sqrt{ax-x^2}\sqrt{a^2-ax}+2(a^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\text{。}$$

由

$$\int_0^a(a^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}dx=\int_0^a\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}d(a^2x-\frac{1}{3}x^3)$$

$$=(a^2x-\frac{1}{3}x^3)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\Bigg|_0^a-\int_0^a(a^2x-\frac{1}{3}x^3)\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}(a+x)}dx=(\frac{\pi}{3}-\frac{32}{45})a^3\text{，}$$

及

$$\int_0^a\sqrt{ax-x^2}\sqrt{a^2-ax}dx=\sqrt{a}\int_0^a\sqrt{x}(a-x)dx=\frac{4}{15}a^3\text{，}$$

得到

$$V=(\frac{2\pi}{3}-\frac{8}{9})a^3\text{。}$$

6. 证明以下旋转体的体积公式：

(1) 设 $f(x)\ge 0$ 是连续函数，由 $0\le a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)$ 所表示的区域绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)dx\text{；}$$

(2) 在极坐标下，由 $0\le\alpha\le\theta\le\beta\le\pi,\ 0\le r\le r(\theta)$ 所表示的区域绕极轴旋转一周所成的旋转体的体积为

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta d\theta\text{。}$$

证（1）作区间 $[a,b]$ 的划分 $P:a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，则关于小区域 $\{(x,y)|x_{i-1}\le x\le x_i,\ 0\le y\le f(x)\}$ 绕 y 轴旋转所得的体积有

$$\Delta V_i\approx\pi(x_i^2-x_{i-1}^2)f(x_i)\approx 2\pi x_i f(x_i)\Delta x_i\text{。}$$

设 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}(\Delta x_i)$，令 $\lambda\to 0$，就有

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)dx\text{。}$$

(2) 解一： 设$x=r(\theta)\cos\theta$，$y=r(\theta)\sin\theta$，$a=r(\alpha)\cos\alpha$，$b=r(\beta)\cos\beta$，则

$$
\begin{aligned}
V &= \int_b^a \pi y^2 dx - \frac{1}{3}\pi a r^2(\alpha)\sin^2\alpha + \frac{1}{3}\pi b r^2(\beta)\sin^2\beta \\
&= \int_b^a \pi y^2 dx + \frac{1}{3}\pi\int_a^b d(y^2 x) = \int_\beta^\alpha \pi r^2\sin^2\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&+ \frac{1}{3}\pi\int_\alpha^\beta\left(3r^2 r'\sin^2\theta\cos\theta + 2r^3\sin\theta\cos^2\theta - r^3\sin^3\theta\right)d\theta \\
&= \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta d\theta \text{。}
\end{aligned}
$$

解二： 首先，由$0\le\theta\le\beta\le\pi, 0\le r\le a$所表示的扇形区域绕极轴旋转一周所成的旋转体的体积为

$$V = \frac{\pi}{3}a^2\sin^2\beta a\cos\beta + \pi\int_{a\cos\beta}^a (a^2 - x^2)dx = \frac{2\pi}{3}(1-\cos\beta)a^3 \text{。}$$

然后作$[\alpha,\beta]$的划分：$\alpha=\theta_0<\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_n=\beta$，考察由$\theta_{i-1}\le\theta\le\theta_i, 0\le r\le r(\theta)$所表示的小曲边扇形区域绕极轴旋转一周所成的旋转体的体积，这小区域可近似看作扇形，于是这小块的体积应近似等于

$$\Delta V_i \approx \frac{2\pi}{3}r^3(\theta_i)(1-\cos\theta_i) - \frac{2\pi}{3}r^3(\theta_i)(1-\cos\theta_{i-1}) \approx \frac{2\pi}{3}r^3(\theta_i)\cdot\sin\theta_i\Delta\theta_i \text{，}$$

从而

$$V \approx \sum_{i=1}^n \frac{2\pi}{3}r^3(\theta_i)\sin\theta_i\Delta\theta_i \text{。}$$

令$\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}(\Delta\theta_i)\to 0$，就有

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta d\theta \text{。}$$

7． 求下列曲线绕指定轴旋转一周所围成的旋转体的体积：

（1） $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，绕$x$轴；

（2） $y=\sin x$，$y=0$，$0\le x\le\pi$，

① 绕x轴， ② 绕y轴；

（3） 星形线$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$，绕x轴；

（4） 旋轮线$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$， $y = 0$，

① 绕y轴， ② 绕直线$y = 2a$；

（5） $x^2 + (y-b)^2 = a^2$，（$0 < a \le b$），绕x轴；

（6） 心脏线$r = a(1-\cos\theta)$，绕极轴；

（7） 对数螺线$r = a\,\mathrm{e}^{\theta}, 0 \le \theta \le \pi$，绕极轴；

（8） $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$，绕$x$轴。

解（1） $V = \pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx = \frac{4}{3}\pi ab^2$。

（2）①$V = \pi\int_0^{\pi}\sin^2 x dx = \frac{1}{2}\pi^2$；

②$V = 2\pi\int_0^{\pi} x\sin x dx = 2\pi^2$。

（3） $V = \pi\int_{-a}^{a} y^2 dx = 3\pi a^3\int_0^{\pi}\sin^7 t\cos^2 t dt$

$= 6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^7 t - \sin^9 t)dt = \frac{32}{105}\pi a^3$。

（4）①$V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx = 2\pi a^3\int_0^{2\pi}(t - \sin t)(1-\cos t)^2 dt = 6\pi^2 a^3$；

②$V = \pi(2a)^3 - \pi\int_0^{2\pi}[2a - a(1-\cos t)]^2 a(1-\cos t)dt = 7\pi^2 a^3$。

（5） $V = \pi\int_{-a}^{a}\left((b + \sqrt{a^2 - x^2})^2 - (b - \sqrt{a^2 - x^2})^2\right)dx = 4\pi b\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx = 2\pi^2 a^2 b$。

（6）由第6题（2），得

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} a^3(1-\cos\theta)^3\sin\theta d\theta = \frac{8}{3}\pi a^3。$$

（7） $V = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} a^3 e^{3\theta}\sin\theta d\theta = \frac{\pi}{15}(e^{3\pi} + 1)a^3$。

（8） $V = \frac{4\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^3(\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}}\sin\theta d\theta$，令$t = \cos\theta$，则

$$V=\frac{4\pi}{3}a^3\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(2t^2-1)^{\frac{3}{2}}dt\ 。$$

由

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(2t^2-1)^{\frac{3}{2}}dt=t(2t^2-1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}-6\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}t^2(2t^2-1)^{\frac{1}{2}}dt$$

$$=1-3\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(2t^2-1)^{\frac{3}{2}}dt-3\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(2t^2-1)^{\frac{1}{2}}dt\ ,$$

得到

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(2t^2-1)^{\frac{3}{2}}dt=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(2t^2-1)^{\frac{1}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{3}{8\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}t\sqrt{2t^2-1}-\ln\left|\sqrt{2}t+\sqrt{2t^2-1}\right|\right)\Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}=\frac{3\sqrt{2}}{16}\ln(1+\sqrt{2})-\frac{1}{8}\ ,$$

所以

$$V=\frac{4\pi}{3}a^3\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(2t^2-1)^{\frac{3}{2}}dt=\frac{\pi}{4}\left[\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)-\frac{2}{3}\right]a^3\ 。$$

8. 将抛物线 $y=x(x-a)$ 在 $x\in[0,a]$ 和 $x\in[a,c]$ 的弧段分别绕 x 轴旋转一周后，所得到旋转体的体积相等，求 c 与 a 的关系。

解
$$\pi\int_0^a x^2(x-a)^2dx=\pi\int_a^c x^2(x-a)^2dx\ ,$$

积分后化简，得到

$$2a^5-10a^2c^3+15ac^4-6c^5=0\ 。$$

9. 记 $V(\xi)$ 是曲线 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ 在 $x\in[0,\xi]$ 的弧段绕 x 轴旋转一周所围成的旋转体的体积，求常数 a 使得满足

$$V(a)=\frac{1}{2}\lim_{\xi\to+\infty}V(\xi)\ 。$$

解　由

$$V(a)=\pi\int_0^a \frac{x}{(1+x^2)^2}dx=\frac{\pi a^2}{2(1+a^2)},$$

可知 $\lim\limits_{\xi\to+\infty} V(\xi)=\frac{\pi}{2}$，于是得到 $\frac{a^2}{1+a^2}=\frac{1}{2}$，解得 $a=1$。

10. 将椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕 x 轴旋转一周围成一个旋转椭球体，再沿 x 轴方向用半径为 r（$r<b$）的钻头打一个穿心的圆孔，剩下的体积恰为原来椭球体体积的一半，求 r 的值。

解　椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕 x 轴旋转一周所围成的旋转椭球体的体积为

$$V_1=2\pi\int_0^a\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2dx=\frac{4}{3}\pi ab^2。$$

割下部分的体积为

$$V_2=2\pi r^2\cdot\frac{a}{b}\sqrt{b^2-r^2}+2\pi\int_{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-r^2}}^{a} b^2(1-\frac{x^2}{a^2})dx=\frac{4\pi}{3}\left(ab^2-\frac{a}{b}(b^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right)。$$

由 $V_1=2V_2$，解得 $r=b\sqrt{1-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}}$。

11. 设直线 $y=ax$（$0<a<1$）与抛物线 $y=x^2$ 所围成的图形的面积为 S_1，且它们与直线 $x=1$ 所围成图形的面积为 S_2。

（1）确定 a 的值，使得 S_1+S_2 达到最小，并求出最小值；

（2）该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

解（1）$S_1+S_2=\int_0^a(ax-x^2)dx+\int_a^1(x^2-ax)dx=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}$。

记 $f(a)=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}$，则 $f'(a)=a^2-\frac{1}{2}, f''(a)=2a$。令 $f'(a)=0$，得到 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$，且 $f''(\frac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}>0$。所以 S_1+S_2 在 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 处取到最小值：

$$\min\{S_1+S_2\}=f(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{3}(1-\frac{1}{\sqrt{2}})。$$

（2）旋转体体积

$$V=\pi\int_0^a[(ax)^2-x^4]dx+\pi\int_a^1[x^4-(ax)^2]dx=(\frac{4}{15}a^5-\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{5})\pi。$$

将 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 代入，就得到

$$V=\frac{\sqrt{2}+1}{30}\pi。$$

12. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 上大于零，并满足

$$xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2 \quad（a\text{为常数}）。$$

进一步，假设曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=1$ 和 $y=0$ 所围的图形 S 的面积为 2。

（1） 求函数 $f(x)$；

（2）当 a 为何值时，图形 S 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积最小?

解（1）由 $xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$，可得 $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{3a}{2}$，所以 $\frac{f(x)}{x}=\frac{3a}{2}x+c$，即

$$f(x)=\frac{3a}{2}x^2+cx。$$

对 $xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$ 两边关于 x 积分，有 $\int_0^1 xdf(x)=\int_0^1 f(x)dx+\frac{a}{2}$，由此可得 $f(1)=4+\frac{a}{2}$，从而 $c=4-a$，于是

$$f(x)=\frac{3a}{2}x^2+(4-a)x。$$

（2） $$V=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\frac{\pi}{30}(a^2+10a+160)。$$

令 $V'=0$，得 $a=-5$，且这时 $V''=\frac{\pi}{15}>0$，所以在 $a=-5$ 时旋转体的体积取到最小值。

13. 求下列旋转曲面的面积：

⑴ $y^2=2px$， $0\le x\le a$，绕 x 轴；

⑵ $y=\sin x$， $0\le x\le \pi$，绕 x 轴；

⑶ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，绕 x 轴；

⑷ 星形线 $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}$ $0\le t\le \pi$，绕 x 轴；

⑸ 心脏线 $r=a(1-\cos\theta)$，绕极轴；

⑹ 双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta$，

(i)绕极轴，(ii) 绕射线 $\theta=\frac{\pi}{2}$。

解（1）面积 $A=2\pi\int_0^a\sqrt{2px}\sqrt{1+\dfrac{p}{2x}}dx=2\pi\sqrt{p}\int_0^a\sqrt{2x+p}dx$

$$=\frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\left[(2a+p)^{\frac{3}{2}}-p^{\frac{3}{2}}\right]。$$

（2）面积 $A=2\pi\int_0^\pi\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}dx$

$$=-\pi\left(\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}+\ln(\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x}\right)\Big|_0^\pi=2\sqrt{2}\pi+2\pi\ln(\sqrt{2}+1)。$$

（3）面积

$$A=2\pi\int_{-a}^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1+(\frac{b}{a}\cdot\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}})^2}dx=\frac{4b}{a^2}\pi\int_0^a\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}dx$$

$$=\begin{cases}2\pi b^2+\dfrac{2\pi a^2 b}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\dfrac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a} & a<b\\ 4\pi ab & a=b\\ 2\pi b^2+\dfrac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} & a>b\end{cases}。$$

（4）面积 $A=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\sin^3 t\cdot 3a\sin t\cos tdt=12a^2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 td\sin t=\dfrac{12}{5}\pi a^2$。

（5）面积 $A=2\pi\int_0^\pi r\sin\theta\sqrt{r^2+r'^2}d\theta=4a^2\pi\int_0^\pi(1-\cos\theta)\sin\theta\sin\dfrac{\theta}{2}d\theta$

$$=16a^2\pi\int_0^\pi\sin^4\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta=\frac{32}{5}\pi a^2。$$

（6）(i) 面积 $A=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}r\sin\theta\sqrt{r^2+r'^2}d\theta=4\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta d\theta=(4-2\sqrt{2})\pi a^2$；

(ii) 面积 $A=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}r\cos\theta\sqrt{r^2+r'^2}d\theta=4\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta d\theta=2\sqrt{2}\pi a^2$。

14．设曲线 $y=\sqrt{x-1}$，过原点作其切线，求由该曲线、所作切线及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的表面积。

解　由 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$，可设曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 过点 (x_0,y_0) 的切线方程为

$$y-y_0=\frac{1}{2y_0}(x-x_0)，$$

而此切线过原点，由此可得 $x_0=2,y_0=1$，于是切线方程为

$$y=\frac{1}{2}x。$$

旋转体的表面积

$$A=2\pi\int_0^2\frac{x}{2}\sqrt{1+\frac{1}{4}}dx+2\pi\int_1^2\sqrt{x-1}\sqrt{1+\frac{1}{4(x-1)}}dx$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}\pi\int_0^2 xdx+\pi\int_1^2\sqrt{4x-3}dx=\frac{\pi}{6}(11\sqrt{5}-1)。$$

15. 证明由空间曲线

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t), \quad t\in[T_1,T_2]\\ z=z(t),\end{cases}$$

垂直投影到 Oxy 平面所形成的柱面的面积公式为

$$S=\int_{T_1}^{T_2}z(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt\ ,$$

这里假设 $x'(t)$， $y'(t)$， $z'(t)$ 在 $[T_1,T_2]$ 上连续，且 $z(t)\ge 0$ 。

证 作 $[T_1,T_2]$ 的划分： $T_1=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=T_2$，设空间曲线对应于小区间 $[t_{i-1},t_i]$ 的小弧段在 Oxy 平面的投影的长度为 Δs_i，则

$$\Delta s_i=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt=\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}\Delta t_i\ ,$$

其中 $\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$ 。于是这段小弧段垂直投影到 Oxy 平面所形成的柱面的面积为

$$\Delta S_i\approx z(\xi_i)\Delta s_i=z(\xi_i)\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}\Delta t_i\ 。$$

令 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}(\Delta t_i)$， 就得到

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\ z(\xi_i)\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}\Delta t_i=\int_{T_1}^{T_2}z(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt\ 。$$

16. 求下列曲线在指定点的曲率和曲率半径。

（1） $xy=4$， 在点 $(2,2)$；

（2） $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ （$a>0$），在 $t=\pi/2$ 对应的点。

解（1） $y'=-\dfrac{4}{x^2},y''=\dfrac{8}{x^3}$， 于是

$$K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{4}, R=2\sqrt{2}\text{。}$$

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\cot\frac{t}{2},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{4a}\csc^4\frac{t}{2}$，于是

$$K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{4a}, R=2\sqrt{2}a\text{。}$$

17. 求下列曲线的曲率和曲率半径。

(1) 抛物线 $y^2=2px$ （$p>0$）；

(2) 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$；

(3) 星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ （$a>0$）；

(4) 圆的渐开线 $x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t)$ （$a>0$）。

解 (1) $\frac{dx}{dy}=\frac{y}{p}, \frac{d^2x}{dy^2}=\frac{1}{p}$，于是

$$K=\frac{\frac{1}{p}}{[1+(\frac{y}{p})^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{p^2}{(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{p}}{(p+2x)^{\frac{3}{2}}},\quad R=\frac{(p+2x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}}\text{。}$$

(2) 令 $x=a\sec t, y=b\tan t$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a}\frac{\sec^2 t}{\tan t\sec t}=\frac{b}{a}\csc t,\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{b}{a^2}\cdot\frac{-\cot t\csc t}{\tan t\sec t}=-\frac{b}{a^2}\cot^3 t,$$

于是

$$K=\frac{\frac{b}{a^2}|\cot t|^3}{[1+(\frac{b}{a}\csc t)^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{ab|\cot t|^3}{(a^2+b^2\csc^2 t)^{\frac{3}{2}}}=\frac{a^4b}{[(a^2+b^2)x^2-a^4]^{\frac{3}{2}}},$$

$$R=\frac{[(a^2+b^2)x^2-a^4]^{\frac{3}{2}}}{a^4b}\text{。}$$

(3) 令 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}=-\tan t,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{3a}\cdot\frac{1}{\sin t\cos^4 t},$$

于是

$$K=\frac{\frac{1}{3a}\left|\frac{1}{\sin t\cos^4 t}\right|}{(1+\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{3a}\frac{1}{|\sin t\cos t|}=\frac{1}{3\sqrt[3]{|axy|}},\quad R=3\sqrt[3]{|axy|}\text{。}$$

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{a(\cos t-\cos t+t\sin t)}{a(-\sin t+\sin t+t\cos t)}=\tan t,\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\sec^2 t}{at\cos t}=\frac{1}{at\cos^3 t}$,

于是

$$K=\frac{\left|\frac{1}{at\cos^3 t}\right|}{(1+\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{at},\quad R=at\text{。}$$

18. 求曲线 $y=\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的曲率圆方程。

解 $y'=\frac{1}{x},y''=-\frac{1}{x^2}$，所以曲线在点 $(1,0)$ 处的曲率为

$K=\frac{\frac{1}{x^2}}{(1+\frac{1}{x^2})^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$, 曲率半径为 $R=2\sqrt{2}$。

由于曲线 $y=\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线斜率为 $y'=1$，所以法线方程为 $y=-x+1$，设 (a,b) 为曲率圆的圆心，则 $b=-a+1$。

再由 $(a-1)^2+(b-0)^2=8$，解得 $a=3,b=-2$，所以曲率圆的方程为

$$(x-3)^2+(y+2)^2=8\text{。}$$

19. 设曲线的极坐标方程为 $r=r(\theta)$，$\theta\in[\alpha,\beta]\ (\subset[0,2\pi])$，且 $r(\theta)$ 二阶可导。证明它在点 (r,θ) 处的曲率为

$$K=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{3/2}}.$$

证 设曲线的参数方程为 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$，则其曲率为

$$K=\frac{|y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)|}{[(x'(t))^2+(y'(t))^2]^{\frac{3}{2}}}。$$

由 $x=r(\theta)\cos\theta, y=r(\theta)\sin\theta$，可得

$$x'=r'\cos\theta-r\sin\theta, y'=r'\sin\theta+r\cos\theta,$$

$$x''=r''\cos\theta-2r'\sin\theta-r\cos\theta, y''=r''\sin\theta+2r'\cos\theta-r\sin\theta,$$

于是

$$(x')^2+(y')^2=r^2+r'^2，\quad y''x'-y'x''=r^2+2r'^2-rr'',$$

所以

$$K=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{3/2}}。$$

习　　题　7.5

1．一根 10m 长的轴，密度分布为 $\rho(x)=(0.3x+6)$ kg/m（$0\le x\le 10$），求轴的质量。

解　$m=\int_0^{10}(0.3x+6)dx=75$ （kg），即轴的质量为 75kg。

2．已知抛物线状电缆 $y=x^2$ （$-1\le x\le 1$）上的任一点处的电荷线密度与该点到 y 轴的距离成正比，在 $(1,1)$ 处的密度为 q，求此电缆上的总电量。

解　$Q=q\int_{-1}^{1}|x|\sqrt{1+4x^2}dx=q\frac{1}{6}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)q$，即此电缆上的总电量为 $\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)q$ 。

3．水库的闸门是一个等腰梯形，上底 36m，下底 24m，高 16m，水平面距上底 4m，求闸门所受到的水压力（水的密度为 1000kg/m^3）。

解　以梯形的上底为 y 轴，从上底的中点垂直向下为 x 轴正向，则水下离水面距离为 x 处，高度为 dx 的一段闸门一侧所受的水压力为

$$dF=1000g(4+x)\left[24+\frac{3}{4}(16-x)\right]dx,$$

于是闸门所受的总的水压力为

$$F=1000g\int_0^{16}(4+x)\left[24+\frac{3}{4}(16-x)\right]dx\approx 5.4\times 10^7\ (\text{N})。$$

4．一个弹簧满足圆柱螺线方程

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, \quad t>0 \quad (a>0,b>0), \\ z=bt, \end{cases}$$

其上任一点处的密度与它到 Oxy 平面的距离成正比，试求其第一

圈的质量。

解　质量$m=\int_0^{2\pi}kbt\sqrt{a^2+b^2}dt=2kb\sqrt{a^2+b^2}\pi^2$。

5.　一个圆柱形水池半径 10m，高 30m，内有一半的水，求将水全部抽干所要做的功。

解　$W=\int_{15}^{30}x\cdot 10^3 g\cdot\pi 10^2 dx=1.04\times 10^9\,(\mathrm{J})$。

6.　半径为r的球恰好没于水中，球的密度为ρ，现在要将球吊出水面，最少要做多少功?

解　考虑对水下离水面距离为x处，厚度为dx的圆形薄片的做功情况：半径为r的球恰好离开水面，则圆形薄片的位移恰为$2r$，其在水中移动的距离为x，在水上移动的距离为$2r-x$。薄片的面积为$(2rx-x^2)\pi$，设ρ_0为水的密度，则将球恰好吊出水面至少要做的功为

$$W=\rho g\pi\int_0^{2r}(2r-x)(2rx-x^2)dx+(\rho-\rho_0)g\pi\int_0^{2r}x(2rx-x^2)dx$$

$$=\frac{4}{3}\pi r^4 g(2\rho-\rho_0)\text{。}$$

7.　半径为r密度为ρ的球壳以角速度ω绕其直径旋转，求它的动能。

解　$$W=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{\omega^2}{2}\int_0^{2r}\rho(2rx-x^2)2\pi\sqrt{2rx-x^2}\sqrt{1+y'^2}dx$$

$$=\frac{\omega^2}{2}\int_0^{2r}\rho(2rx-x^2)2\pi\sqrt{2rx-x^2}\frac{r}{\sqrt{2rx-x^2}}dx$$

$$=\rho\omega^2 r\pi\int_0^{2r}(2rx-x^2)dx=\frac{4}{3}\pi\rho\omega^2 r^4\text{。}$$

8.　使某个自由长度为 1m 的弹簧伸长 2. 5cm 需费力 15N，现将它从 1. 1m 拉至 1. 2m，问要做多少功?

解　由$F=kx$，当$x=0.025$m 时，$F=15$N，代入得 $k=600$。于是所做的功为

$$W=\int_{0.1}^{0.2}kxdx=9\ \mathrm{J}。$$

9. 一物体的运动规律为$s=3t^3-t$，介质的阻力与速度的平方成正比，求物体从$t=1$运动至$t=T$时阻力所做的功。

解 设介质的阻力为F，速度$v=s'=9t^2-1$，则 $F=k(9t^2-1)^2$。于是

$$W=\int_1^T Fs'dt=\int_1^T(9t^2-1)^3dt=\frac{729}{7}T^7-\frac{243}{5}T^5+9T^3-T-\frac{2224}{35}。$$

10. 半径为 1m，高为 2m 的直立的圆柱形容器中充满水，拔去底部的一个半径为 1cm 的塞子后水开始流出，试导出水面高度h随时间变化的规律，并求水完全流空所需的时间。（水面比出水口高h时，出水速度$v=0.6\times\sqrt{2gh}$。）

解 设t时刻水面的高度为h，过了dt时间后水面的高度降低了dh，则

$$\pi 1^2 dh=-\pi(0.01)^2 vdt=-\pi(0.01)^2\times 0.6\sqrt{2gh}dt,$$

即

$$\frac{dh}{\sqrt{h}}=-6\times 10^{-5}\sqrt{2g}dt。$$

对上式两边积分，注意$t=0$时，$h=2$，得到

$$h=2(1-3\times 10^{-5}\sqrt{g}t)^2,$$

以$h=0$代入，解得

$$t=\frac{10^5}{3\sqrt{g}}=1.06\times 10^4\ \text{(s)}。$$

11. 上题中的圆柱形容器改为何种旋转体容器，才能使水流出时水面高度下降是匀速的。

解 根据题意，只要在上题的第一个等式的左边含有因子$\sqrt{h}$即可，也即在时刻t水面的半径r须满足$r^2=k\sqrt{h}$，其中k为常数。所以可选用

曲线$y=cx^4$绕y轴旋转一周后所得旋转曲面作为容器，从而使得水流出时水面高度下降是匀速的。

12. 镭的衰变速度与它的现存量成正比，设t_0时有镭Q_0 g，经 1600 年它的量减少了一半，求镭的衰变规律。

解 设在时刻t镭的现存量为$Q=Q(t)$，则

$$\frac{dQ}{dt}=-kQ,$$

对等式两边积分，注意在时刻t_0有镭Q_0 g，得到

$$Q(t)=Q_0e^{-k(t-t_0)}。$$

由题意，当$t-t_0=1600$时，$Q(t)=\frac{Q_0}{2}$，代入上式，得到$k=\frac{\ln 2}{1600}$，所以

$$Q=Q_0 2^{-\frac{t-t_0}{1600}}。$$

13. 将 A 物质转化为 B 物质的化学反应速度与 B 物质的浓度成反比，设反应开始时有 B 物质 20%，半小时后有 B 物质 25%，求 B 物质的浓度的变化规律。

解 设在时刻t，B物质的浓度为$y(t)$，则

$$\frac{dy}{dt}=\frac{k}{y},$$

解得

$$y=\sqrt{2kt+c}。$$

因为$y(0)=\frac{1}{5}$，$y(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$，所以$c=\frac{1}{25},k=\frac{9}{400}$，于是得到

$$y=\frac{\sqrt{18t+16}}{20}。$$

14. 设$[t,t+dt]$中的人口增长量与$p_{\max}-p(t)$成正比，试导出相应的人口模型，画出人口变化情况的草图并与 Malthus 和 Verhulst 人口模

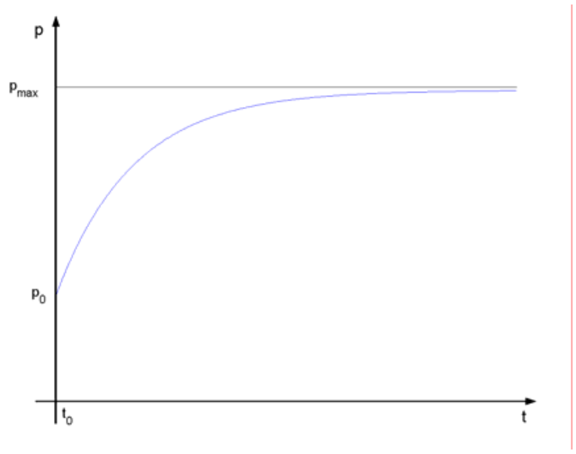
型加以比较。

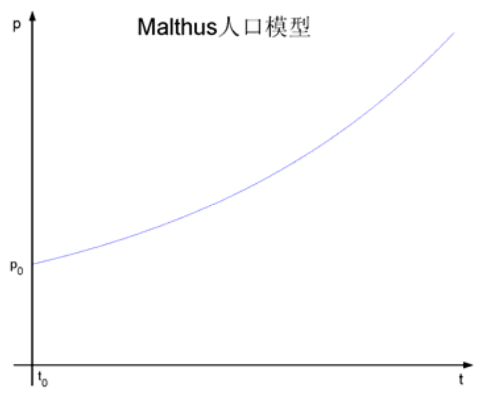
解　由题意可知

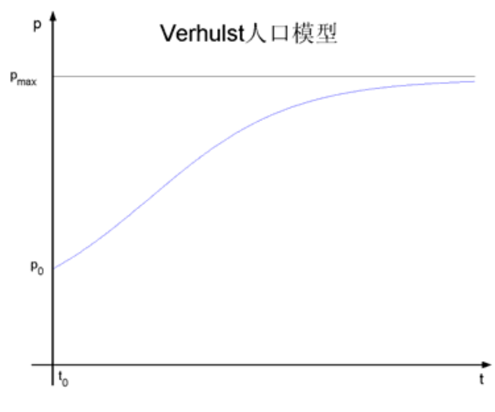
$$\frac{dp(t)}{dt}=k(p_{\max}-p(t))，\quad p(t_0)=p_0，$$

由此可解得

$$p(t)=p_{\max}-(p_{\max}-p_0)e^{-k(t-t_0)}。$$







15.　核反应堆中，t 时刻中子的增加速度与当时的数量 $N(t)$ 成正比。

设 $N(0)=N_0$，证明

$$\left[\frac{N(t_2)}{N_0}\right]^{t_1}=\left[\frac{N(t_1)}{N_0}\right]^{t_2}。$$

证　由题意可知

$$\frac{dN}{dt}=kN，$$

对等式两边积分，再注意 $N(0)=N_0$，可解得

$$N(t)=N_0e^{kt},$$

由此即可得到

$$\left(\frac{N(t_2)}{N_0}\right)^{t_1}=e^{kt_1t_2}=\left(\frac{N(t_1)}{N_0}\right)^{t_2}。$$

16. 一个 $1000\mathrm{m}^3$的大厅中的空气内含有a %的废气，现以 $1\mathrm{m}^3$ / min 注入新鲜空气，混合后的空气又以同样的速率排出，求t时刻空气内含有的废气浓度，并求使废气浓度减少一半所需的时间。

解　设在时刻t空气内含有的废气浓度为$y(t)$，则

$$dy=-\frac{1}{1000}y(t)dt,\quad y(0)=\frac{a}{100},$$

解此方程，即得到

$$y(t)=\frac{a}{100}e^{-\frac{t}{1000}}。$$

当$y(t)=\dfrac{a}{200}$时，有 $e^{\frac{t}{1000}}=2$，从而得到 $t=1000\ln 2$ （min），即废气浓度减少一半所需的时间为 $1000\ln 2$ （min）。

第八章　反常积分

习　题　8.1 反常积分的概念和计算

1．　物理学中称电场力将单位正电荷从电场中某点移至无穷远处所做的功为电场在该点处的电位。一个带电量$+q$的点电荷产生的电场对距离r处的单位正电荷的电场力为$F=k\dfrac{q}{r^2}$ （k为常数），求距电场中心x处的电位。

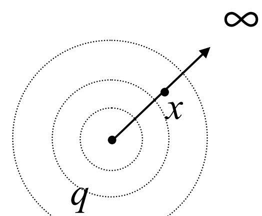


图 8.1.4

解　$U=\int\limits_x^{+\infty}k\dfrac{q}{r^2}dr=\dfrac{kq}{x}$ 。

2．　证明：若$\int_a^{+\infty}f(x)dx$和$\int_a^{+\infty}g(x)dx$收敛，k_1和k_2为常数，则$\int_a^{+\infty}[k_1f(x)+k_2g(x)]dx$也收敛，且

$$\int_a^{+\infty}[k_1f(x)+k_2g(x)]dx=k_1\int_a^{+\infty}f(x)dx+k_2\int_a^{+\infty}g(x)dx\text{ 。}$$

证　设$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^{A}f(x)dx$， $\int_a^{+\infty}g(x)dx=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^{A}g(x)dx$， 则

$$\int_a^{+\infty}\left[k_1f(x)+k_2g(x)\right]dx=\lim_{A\to+\infty}\int_a^{A}\left[k_1f(x)+k_2g(x)\right]dx$$

$$=k_1\lim_{A\to+\infty}\int_a^{A}f(x)dx+k_2\lim_{A\to+\infty}\int_a^{A}g(x)dx=k_1\int_a^{+\infty}f(x)dx+k_2\int_a^{+\infty}g(x)dx\text{ 。}$$

3．　计算下列无穷区间的反常积分（发散也是一种计算结果）：

（1） $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\sin 5xdx$；　　（2） $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-3x}\cos 2xdx$；

（3） $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{x^2+x+1}dx$；　　（4） $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx$ $(a>0,b>0)$；

（5） $\int_0^{+\infty}x\,\mathrm{e}^{ax^2}\,dx$ $(a\in\mathbf{R})$；　　（6） $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^p x}dx$ $(p\in\mathbf{R})$；

（7）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}dx$； （8）$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(e^x+e^{-x})^2}dx$；

（9）$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}dx$； （10）$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx$。

解（1）$\int_0^{+\infty}e^{-2x}\sin 5xdx=-\frac{1}{5}\int_0^{+\infty}e^{-2x}\,d\cos 5x=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\int_0^{+\infty}e^{-2x}\cos 5xdx$

$=\frac{1}{5}-\frac{2}{25}\int_0^{+\infty}e^{-2x}\,d\sin 5x=\frac{1}{5}-\frac{4}{25}\int_0^{+\infty}e^{-2x}\sin 5xdx$，

所以

$$\int_0^{+\infty}e^{-2x}\sin 5xdx=\frac{5}{29}。$$

（2）$\int_0^{+\infty}e^{-3x}\cos 2xdx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-3x}\,d\sin 2x=\frac{3}{2}\int_0^{+\infty}e^{-3x}\sin 2xdx$

$=-\frac{3}{4}\int_0^{+\infty}e^{-3x}\,d\cos 2x=\frac{3}{4}-\frac{9}{4}\int_0^{+\infty}e^{-3x}\cos 2xdx$，

所以

$$\int_0^{+\infty}e^{-3x}\cos 2xdx=\frac{3}{13}。$$

（3）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+x+1}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}d\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$

$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$。

（4）当$a\neq b$时，

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx=\frac{1}{b^2-a^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2+a^2}-\frac{1}{x^2+b^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{\pi}{2a}-\frac{\pi}{2b}\right)=\frac{\pi}{2ab(a+b)}；$$

当$a=b$时，

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2+a^2}-\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{2a^3}+\frac{1}{2a^2}\int_0^{+\infty}xd\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)=\frac{\pi}{2a^3}-\frac{1}{2a^2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{2a^3}-\frac{\pi}{4a^3}=\frac{\pi}{4a^3}，$$

此结果等于在$a \neq b$时的结果中以$b=a$代入后的结果。

（5）当$a \geq 0$时积分发散；当$a<0$时，

$$\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{ax^2}\,dx = \frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{ax^2}\,d(ax^2) = -\frac{1}{2a}。$$

（6）当$p \leq 1$时积分发散；当$p>1$时，

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^p x}dx = \frac{1}{-p+1}(\ln x)^{-p+1}\Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{p-1}(\ln 2)^{-p+1}。$$

（7）令$x=\tan t$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t dt = 2。$$

（8）令$e^x = t$，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2}dx = \int_1^{+\infty}\frac{tdt}{(1+t^2)^2} = -\frac{1}{2(1+t^2)}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{4}。$$

（9）利用第六章第 3 节习题 1(10)的结果

$$\int\frac{1}{x^4+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x+1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x-1) + C,$$

即可得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}。$$

（10）$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx = \int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}dx + \int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx$，

对等式右端任一积分（例如第二个积分）作变量代换$x=\dfrac{1}{t}$，则

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx = -\int_0^1\frac{\ln t}{1+t^2}dt,$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx = 0。$$

4. 计算下列无界函数的反常积分（发散也是一种计算结果）:

(1) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$；　　(2) $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$；

(3) $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$；　　(4) $\int_0^1 \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}dx$；

(5) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx$；　　(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\tan x}}dx$；

解（1）$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = (-\sqrt{1-x^2})\Big|_0^1 = 1$。

（2）$\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}d(\ln x) = \arcsin(\ln x)\Big|_1^e = \frac{\pi}{2}$。

（3）令 $\sqrt{x-1} = t$，则

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx = 2\int_0^1 (1+t^2)dt = \frac{8}{3}。$$

（4）令 $\sqrt{1-x} = t$，则

$$\int_0^1 \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}dx = 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}。$$

（5）$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx + \int_0^1 \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx$。

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \sin\frac{1}{x^2}d(\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{2}(\cos\frac{1}{x^2})\Big|_{0+}^1，$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{2}(\cos\frac{1}{x^2})$ 极限不存在，所以积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx$ 发散；同理积分 $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx$ 也发散。

（6）令 $\sqrt{\tan x} = t$，再利用上面习题 3（9），得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\tan x}}dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}。$$

5．求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$。

解 $$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}=\int_0^1\ln xdx=-1,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}。$$

6．计算下列反常积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos xdx$；　　(2) $\int_0^{\pi}x\ln\sin xdx$。

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cot xdx$；　　(4) $\int_0^1\frac{\arcsin x}{x}dx$；

(5) $\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx$。

解 (1) 令$x=\frac{\pi}{2}-t$，再利用例 8.1.11，得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin tdt=-\frac{\pi}{2}\ln 2。$$

(2) 令$x=\pi-t$，由

$$\int_0^{\pi}x\ln\sin xdx=\int_0^{\pi}\pi\ln\sin tdt-\int_0^{\pi}t\ln\sin tdt,$$

得到

$$\int_0^{\pi}x\ln\sin xdx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin xdx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx=-\frac{\pi^2}{2}\ln 2。$$

(3) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cot xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}xd\ln\sin x=(x\ln\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx=\frac{\pi}{2}\ln 2。$$

(4) 令$t=\arcsin x$，得到

$$\int_0^1\frac{\arcsin x}{x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cot tdt=\frac{\pi}{2}\ln 2。$$

(5) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^1 \ln x d\arcsin x = (\ln x \arcsin x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$。

7. 求下列反常积分的 Cauchy 主值：

(1) $(\text{cpv})\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}dx$；　　(2) $(\text{cpv})\int_1^4 \frac{1}{x-2}dx$；

(3) $(\text{cpv})\int_{1/2}^2 \frac{1}{x\ln x}dx$。

解 (1) $(\text{cpv})\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}dx = \lim_{A\to+\infty}[\arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)]\Big|_{-A}^{+A} = \pi$。

(2) $(\text{cpv})\int_1^4 \frac{1}{x-2}dx = \lim_{\eta\to 0+}[(\ln|x-2|)\Big|_{2+\eta}^4 + (\ln|x-2|)\Big|_1^{2-\eta}] = \ln 2$。

(3) $(\text{cpv})\int_{1/2}^2 \frac{1}{x\ln x}dx = \lim_{\eta\to 0+}[(\ln|\ln x|)\Big|_{1+\eta}^2 + (\ln|\ln x|)\Big|_{1/2}^{1-\eta}] = 0$。

8. 说明一个无界函数的反常积分可以化为无穷区间的反常积分。

证　设$\int_a^b f(x)dx$是一个无界函数反常积分，$x=b$是$f(x)$的唯一奇点（即$f(x)$在$x=b$的左领域无界）。令$t=\frac{b-a}{b-x}$，则

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_1^{+\infty} f\left(b-\frac{b-a}{t}\right)\frac{dt}{t^2},$$

等式右端就是一个无穷区间的反常积分。

9.(1) 以$\int_a^{+\infty} f(x)dx$为例，叙述并证明反常积分的保序性和区间可加性；

(2) 举例说明，对于反常积分不再成立乘积可积性。

解 (1) 保序性：

设$\int_a^{+\infty} f(x)dx$与$\int_a^{+\infty} g(x)dx$收敛，且在$[a,+\infty)$成立$f(x)\ge g(x)$，则

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \ge \int_a^{+\infty} g(x)dx;$$

证明：由定积分的保序性，可知$\int_a^A f(x)dx \ge \int_a^A g(x)dx$，再令$A\to+\infty$。

区间可加性：

设$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，则对任意$c\in[a,+\infty)$，$\int_c^{+\infty} f(x)dx$收敛，且

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^{+\infty} f(x)dx\text{；}$$

证明：由定积分的区间可加性，可知$\int_a^A f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^A f(x)dx$，再令$A\to+\infty$。

(2) 设$f(x)=g(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$，则$\int_1^{+\infty} f(x)dx$与$\int_1^{+\infty} g(x)dx$收敛，但$\int_1^{+\infty} f(x)g(x)dx$不收敛。

10. 证明当$a>0$时，只要下式两边的反常积分有意义，就有

$$\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x}{x}dx=\ln a\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{1}{x}dx\text{。}$$

证 $\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x}{x}dx-\ln a\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{1}{x}dx=\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x-\ln a}{x}dx$

$$=\int_0^a f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x-\ln a}{x}dx+\int_a^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x-\ln a}{x}dx\text{，}$$

对上式右端两积分中任意一个（例如第二个）作变量代换$x=\dfrac{a^2}{t}$，则当$x:a\to+\infty$时，$t:a\to 0$；且$\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{x}=\dfrac{t}{a}+\dfrac{a}{t}$，$\dfrac{\ln x-\ln a}{x}dx=\dfrac{\ln t-\ln a}{t}dt$，于是由

$$\int_a^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x-\ln a}{x}dx=-\int_0^a f\left(\frac{t}{a}+\frac{a}{t}\right)\frac{\ln t-\ln a}{t}dt\text{，}$$

得到

$$\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x}{x}dx-\ln a\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{1}{x}dx$$

$$=\int_0^a f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x-\ln a}{x}dx-\int_0^a f\left(\frac{t}{a}+\frac{a}{t}\right)\frac{\ln t-\ln a}{t}dt=0\text{。}$$

11．设$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$。证明$A=0$。

证 用反证法。不妨设$A>0$，则对$\varepsilon=\frac{1}{2}A>0$，$\exists X>a$，$\forall x>X$：$|f(x)-A|<\frac{1}{2}A$，从而$f(x)>\frac{1}{2}A$。由

$$\int_a^B f(x)dx=\int_a^X f(x)dx+\int_X^B f(x)dx>\int_a^X f(x)dx+\frac{1}{2}A(B-X),$$

可知$\lim\limits_{B\to+\infty}\int_a^B f(x)dx=+\infty$，与$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛发生矛盾。

同理也可证明不可能有$A<0$，所以$A=0$。

12．设$f(x)$在$[a,+\infty)$上可导，且$\int_a^{+\infty} f(x)dx$与$\int_a^{+\infty} f'(x)dx$都收敛，证明$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。

证 $$\int_a^{+\infty} f'(x)dx=\int_a^{+\infty} df(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)-f(a),$$

由$\int_a^{+\infty} f'(x)dx$的收敛性，可知$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在且有限，再利用第11题的结论，得到

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0。$$

习　题　8.2　反常积分的收敛判别法

1．⑴　证明比较判别法（定理 8.2.2）；

⑵　举例说明，当比较判别法的极限形式中 $l=0$ 或 $+\infty$ 时，

$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 和 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 的敛散性可以产生各种不同的的情况。

解（1）定理 8.2.2(比较判别法）　设在 $[a,+\infty)$ 上恒有 $0\le f(x)\le K\varphi(x)$，其中 K 是正常数。则

当 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 收敛时 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也收敛；

当 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散时 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 也发散。

证　当 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 收敛时，应用反常积分的 Cauchy 收敛原理，

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists A_0\ge a,\quad \forall A,A'\ge A_0:\ \left|\int_A^{A'}\varphi(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{K}。$$

于是

$$\left|\int_A^{A'}f(x)dx\right|\le\left|\int_A^{A'}K\varphi(x)dx\right|<\varepsilon,$$

所以 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也收敛；

当 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散时，应用反常积分的 Cauchy 收敛原理，

$$\exists\varepsilon_0>0,\quad \forall A_0\ge a,\quad \exists A,A'\ge A_0:\ \left|\int_A^{A'}f(x)dx\right|\ge K\varepsilon。$$

于是

$$\left|\int_A^{A'}\varphi(x)dx\right|\ge\left|\int_A^{A'}\frac{1}{K}f(x)dx\right|\ge\varepsilon_0,$$

所以 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 也发散。

（2）设在 $[a,+\infty)$ 上有 $f(x)\ge 0,\varphi(x)\ge 0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=0$。则当 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散时，$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 也发散；但当 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛时，$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 可能收敛，

也可能发散。

例如$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$， $\varphi(x)=\dfrac{1}{x^p}(0<p<2)$，则$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=0$。显然有$\int_1^{+\infty}f(x)dx$收敛，而对于$\int_1^{+\infty}\varphi(x)dx$，则当$1<p<2$时收敛，当$0<p\le 1$时发散。

设在$[a,+\infty)$上有$f(x)\ge 0,\varphi(x)\ge 0$，且$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=+\infty$。则当$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛时，$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$也收敛；但当$\int_a^{+\infty}f(x)dx$发散时，$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$可能发散，也可能收敛。

例如$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$， $\varphi(x)=\dfrac{1}{x^p}(p>\dfrac{1}{2})$，则$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=+\infty$。显然有$\int_1^{+\infty}f(x)dx$发散，而对于$\int_1^{+\infty}\varphi(x)dx$，则当$\dfrac{1}{2}<p\le 1$时发散，当$p>1$时收敛。

2. 证明 Cauchy 判别法及其极限形式（定理 8.2.3）。

证 定理 8.2.3（Cauchy 判别法） 设在$[a,+\infty)\subset(0,+\infty)$上恒有$f(x)\ge 0$，$K$是正常数。

(1) 若$f(x)\le\dfrac{K}{x^p}$，且$p>1$，则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛；

(2) 若$f(x)\ge\dfrac{K}{x^p}$，且$p\le 1$，则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$发散。

推论（Cauchy 判别法的极限形式） 设在$[a,+\infty)\subset(0,+\infty)$上恒有$f(x)\ge 0$，且

$$\lim_{x\to+\infty}x^p f(x)=l,$$

则

(1) 若$0\le l<+\infty$，且$p>1$，则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛；

⑵ 若$0<l\le+\infty$，且$p\le 1$，则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$发散。

证 直接应用定理8.2.2（比较判别法）及其推论（比较判别法的极限形式），将函数$\varphi(x)$取为$\dfrac{1}{x^p}$。

3. 讨论下列非负函数反常积分的敛散性：

⑴ $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^3-e^{-2x}+\ln x+1}}dx$； ⑵ $\int_1^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{1+x^3}dx$；

⑶ $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{1+x|\sin x|}dx$； ⑷ $\int_1^{+\infty}\dfrac{x^q}{1+x^p}dx$ （$p,q\in\mathbf{R}^+$）．

解 （1）当$x\to+\infty$时，

$$\frac{1}{\sqrt{x^3-e^{-2x}+\ln x+1}}\sim\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},$$

所以积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^3-e^{-2x}+\ln x+1}}dx$收敛。

（2）当$x\to+\infty$时，

$$\frac{\arctan x}{1+x^3}\sim\frac{\pi}{2x^3},$$

所以积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{1+x^3}dx$收敛。

（3）因为当$x\ge 0$时有

$$\frac{1}{1+x|\sin x|}\ge\frac{1}{1+x},$$

而积分$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{1+x}dx$发散，所以积分$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{1+x|\sin x|}dx$发散。

（4）当$x\to+\infty$时，

$$\frac{x^q}{1+x^p}\sim\frac{1}{x^{p-q}},$$

所以在 $p-q>1$ 时，积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^q}{1+x^p}dx$ 收敛，在其余情况下积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^q}{1+x^p}dx$ 发散。

4. 证明：对非负函数 $f(x)$，(cpv) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛与 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛是等价的。

证 显然，由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛可推出 (cpv) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，现证明当 $f(x)\ge 0$ 时可由 (cpv) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛推出 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛。

由于 (cpv) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，可知极限

$$\lim_{A\to+\infty}F(A)=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}f(x)dx$$

存在而且有限，由 Cauchy 收敛原理，

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists A_0>0,\ \forall A,A'\ge A_0:\ |F(A)-F(A')|<\varepsilon,$$

于是 $\forall A,A'\ge A_0$ 与 $\forall B,B'\ge A_0$，成立

$$\left|\int_A^{A'}f(x)dx\right|\le|F(A)-F(A')|<\varepsilon \quad 与 \quad \left|\int_{-B'}^{-B}f(x)dx\right|\le|F(B)-F(B')|<\varepsilon,$$

这说明积分 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 与 $\int_{-\infty}^{0}f(x)dx$ 都收敛，所以积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛。

5. 讨论下列反常积分的敛散性（包括绝对收敛、条件收敛和发散，下同）：

(1) $\int_2^{+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin xdx$； (2) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ （$p\in\mathbf{R}^+$）；

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x^p}dx$ （$p\in\mathbf{R}^+$）； (4) $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx$；

(5) $\int_a^{+\infty}\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\sin xdx$ （$p_m(x)$ 和 $q_n(x)$ 分别是 m 和 n 次多项式，$q_n(x)$ 在 $x\in[a,+\infty)$ 范围无零点。）

解 (1) 因为 $F(A)=\int_2^{A}\sin xdx$ 有界，$\frac{\ln\ln x}{\ln x}$ 在 $[2,+\infty)$ 单调，且 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}=0$，由 Dirichlet 判别法，积分 $\int_2^{+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin xdx$ 收敛；

由于$\left|\dfrac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x\right| \geq \left|\dfrac{\ln\ln x}{\ln x}\right|\sin^2 x = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{\ln\ln x}{\ln x}\right|(1-\cos 2x)$，而积分$\int_2^{+\infty}\left|\dfrac{\ln\ln x}{\ln x}\right|dx$发散，$\int_2^{+\infty}\left|\dfrac{\ln\ln x}{\ln x}\right|\cos 2xdx$收敛，所以积分$\int_2^{+\infty}\left|\dfrac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x\right|dx$发散，即积分$\int_2^{+\infty}\dfrac{\ln\ln x}{\ln x}\sin xdx$条件收敛。

（2）当$p>1$时，$\dfrac{|\sin x|}{x^p} \leq \dfrac{1}{x^p}$，而$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}dx$收敛，所以当$p>1$时积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^p}dx$绝对收敛；

当$0<p\leq 1$时，因为$F(A)=\int_1^A \sin xdx$有界，$\dfrac{1}{x^p}$在$[1,+\infty)$单调，且$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^p}=0$，由 Dirichlet 判别法，积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^p}dx$收敛；但因为当$0<p\leq 1$时积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{|\sin x|}{x^p}dx$发散，所以当$0<p\leq 1$时积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^p}dx$条件收敛。

（3）当$p>1$时，$\dfrac{|\sin x\arctan x|}{x^p} \leq \dfrac{\pi}{2x^p}$，而$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}dx$收敛，所以当$p>1$时积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x\arctan x}{x^p}dx$绝对收敛；

当$0<p\leq 1$时，因为$F(A)=\int_1^A \sin xdx$有界，$\dfrac{\arctan x}{x^p}$在$[1,+\infty)$单调，且$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan x}{x^p}=0$，由 Dirichlet 判别法，积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x\arctan x}{x^p}dx$收敛；但因为当$0<p\leq 1$时积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{x^p}|\sin x|dx$发散，所以当$0<p\leq 1$时积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x\arctan x}{x^p}dx$条件收敛。

（4）令$t=x^2$，$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx=\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt$，由于$\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt$条件收敛，可知积分$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx$条件收敛。

（5）当$n>m+1$且x充分大时，有$\left|\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\sin x\right|\le\frac{K}{x^2}$，可知当$n>m+1$时积分$\int_a^{+\infty}\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\sin xdx$绝对收敛。

当$n=m+1$时，因为$F(A)=\int_1^A\sin xdx$有界，且当x充分大时，$\frac{p_m(x)}{q_n(x)}$单调且$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{p_m(x)}{q_n(x)}=0$，由 Dirichlet 判别法可知$\int_a^{+\infty}\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\sin xdx$收敛；但由于当$x\to+\infty$时，$\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\sim\frac{a}{x}$，易知$\int_1^{+\infty}\left|\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\sin x\right|dx$发散，所以当$n=m+1$时，积分$\int_a^{+\infty}\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\sin xdx$条件收敛。

当$n<m+1$时，由$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{p_m(x)}{q_n(x)}=A$，$A$为非零常数、$+\infty$或$-\infty$，易知积分$\int_a^{+\infty}\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\sin xdx$发散。

6. 设$f(x)$在$[a,b]$只有一个奇点$x=b$，证明定理 8.2.3′和定理 8.2.5′。

定理 8.2.3′（Cauchy 判别法） 设在$[a,b)$上恒有$f(x)\ge 0$，若当x属于b的某个左邻域$[b-\eta_0,b)$时，存在正常数K，使得

（1）$f(x)\le\frac{K}{(b-x)^p}$，且$p<1$，则$\int_a^b f(x)dx$收敛；

（2）$f(x)\ge\frac{K}{(b-x)^p}$，且$p\ge 1$，则$\int_a^b f(x)dx$发散。

证 （1）当$p<1$时，积分$\int_a^b\frac{1}{(b-x)^p}dx$收敛，由反常积分的 Cauchy 收敛原理，

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall\eta,\eta'\in(0,\delta):\ \left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'}\frac{1}{(b-x)^p}dx\right|<\frac{\varepsilon}{K}。$$

由于$\left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'}f(x)dx\right|\le\left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'}\frac{K}{(b-x)^p}dx\right|<\varepsilon$，所以$\int_a^b f(x)dx$收敛。

（2）当$p\ge1$时，积分$\int_a^b\frac{1}{(b-x)^p}dx$发散，由反常积分的 Cauchy 收敛原理，

$$\exists\varepsilon_0>0,\ \forall\delta>0,\ \exists\eta,\eta'\in(0,\delta):\ \left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'}\frac{1}{(b-x)^p}dx\right|\ge\frac{\varepsilon_0}{K}。$$

由于$\left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'}f(x)dx\right|\ge\left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'}\frac{K}{(b-x)^p}dx\right|\ge\varepsilon_0$，所以$\int_a^b f(x)dx$发散。

推论（Cauchy 判别法的极限形式） 设在$[a,b)$上恒有$f(x)\ge0$，且

$$\lim_{x\to b-}(b-x)^p f(x)=l,$$

则

（1）若$0\le l<+\infty$，且$p<1$，则$\int_a^b f(x)dx$收敛；

（2）若$0<l\le+\infty$，且$p\ge1$，则$\int_a^b f(x)dx$发散。

证 （1）由$\lim_{x\to b-}(b-x)^p f(x)=l$ （$p<1,0\le l<+\infty$），可知

$$\exists\delta>0,\ \forall x\in(b-\delta,b):\ f(x)<\frac{l+1}{(b-x)^p},$$

再应用定理 8.2.3′的（1）。

（2）由$\lim_{x\to b-}(b-x)^p f(x)=l$ （$p\ge1,0<l\le+\infty$），可知

$$\exists\delta>0,\ \forall x\in(b-\delta,b):\ f(x)>\frac{l}{2(b-x)^p},$$

再应用定理 8.2.3′的（2）。

定理 8.2.5′ 若下列两个条件之一满足，则$\int_a^b f(x)g(x)dx$收敛：

(1)(**Abel 判别法**) $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，$g(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调有界；

(2)(**Dirichlet 判别法**) $F(\eta)=\int_a^{b-\eta} f(x)dx$ 在 $(0,b-a]$ 上有界，$g(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调且 $\lim\limits_{x\to b-} g(x)=0$。

证 (1) 设 $|g(x)|\le G$，因为 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，由 Cauchy 收敛原理，

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \forall A,A'\in(b-\delta,b):\ \left|\int_A^{A'} f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2G}。$$

由积分第二中值定理，

$$\begin{aligned}\left|\int_A^{A'} f(x)g(x)dx\right| &\le |g(A)|\cdot\left|\int_A^{\xi} f(x)dx\right|+|g(A')|\cdot\left|\int_\xi^{A'} f(x)dx\right| \\ &\le G\left|\int_A^{\xi} f(x)dx\right|+G\left|\int_\xi^{A'} f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon。\end{aligned}$$

(2) 设 $|F(\eta)|\le M$，于是 $\forall A,A'\in[a,b)$，有 $\left|\int_A^{A'} f(x)dx\right|<2M$。因为 $\lim\limits_{x\to b-} g(x)=0$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x\in(b-\delta,b)$，有 $|g(x)|<\dfrac{\varepsilon}{4M}$。由积分第二中值定理，

$$\begin{aligned}\left|\int_A^{A'} f(x)g(x)dx\right| &\le |g(A)|\cdot\left|\int_A^{\xi} f(x)dx\right|+|g(A')|\cdot\left|\int_\xi^{A'} f(x)dx\right| \\ &\le 2M|g(A)|+2M|g(A')|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon。\end{aligned}$$

所以无论哪个判别法条件满足，由 Cauchy 收敛原理，都有 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛的结论。

7. 讨论下列非负函数反常积分的敛散性：

(1) $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}dx$；

(2) $\int_0^1 \dfrac{\ln x}{x^2-1}dx$；

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$；

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\cos x}{x^p}dx$；

(5) $\int_0^1 |\ln x|^p\, dx$；

(6) $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$；

(7) $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}|\ln x|\,dx$.

解 (1) 因为 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}\sim\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\ (x\to 0+)$，$\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}\sim\dfrac{1}{(1-x)^{\frac{1}{3}}}\ (x\to 1-)$，

所以积分$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}dx$ 收敛。

（2）因为$\lim\limits_{x\to 1-}\frac{\ln x}{x^2-1}=\frac{1}{2}$，且对任意$0<\delta<1$，$\lim\limits_{x\to 0+}\frac{x^\delta \ln x}{x^2-1}=0$，即当$x>0$充分小时，有$\left|\frac{\ln x}{x^2-1}\right|<\frac{1}{x^\delta}$，所以积分$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}dx$收敛。

（3）因为$\frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}\sim\frac{1}{x^2}\ (x\to 0+)$，$\frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}\sim\frac{1}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}\ (x\to\frac{\pi}{2}-)$，所以积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$发散。

（4）因为$\frac{1-\cos x}{x^p}\sim\frac{1}{2x^{p-2}}\ (x\to 0+)$，所以当$p<3$时积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{x^p}dx$收敛，当$p\ge 3$时积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{x^p}dx$发散。

（5）首先对任意的$0<\delta<1$与任意的p，有$\lim\limits_{x\to 0+}[x^\delta |\ln x|^p]=0$，即当$x>0$充分小时，有$|\ln x|^p<\frac{1}{x^\delta}$；且 $|\ln x|^p\sim\frac{1}{(1-x)^{-p}}\ (x\to 1-)$。所以当$p>-1$时，积分$\int_0^1 |\ln x|^p dx$收敛，当$p\le -1$时，积分$\int_0^1 |\ln x|^p dx$发散。

（6） $x^{p-1}(1-x)^{q-1}\sim\frac{1}{x^{1-p}}\ (x\to 0+)$，$x^{p-1}(1-x)^{q-1}\sim\frac{1}{(1-x)^{1-q}}\ (x\to 1-)$，所以在$p>0, q>0$时积分$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 收敛，在其余情况下积分$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 发散。

（7） $x^{p-1}(1-x)^{q-1}|\ln x|\sim\frac{1}{(1-x)^{-q}}\ (x\to 1-)$，且

$\lim\limits_{x\to 0+}[x^{1-\frac{p}{2}}(x^{p-1}(1-x)^{q-1}|\ln x|)]=0$，即当$x>0$充分小时，有

$x^{p-1}(1-x)^{q-1}|\ln x|<\frac{1}{x^{1-\frac{p}{2}}}$，所以当$p>0, q>-1$时积分$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}|\ln x|dx$收敛，在其余情况下积分$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}|\ln x|dx$发散。

8. 讨论下列反常积分的敛散性:

(1) $\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}dx$ ($p,q\in\mathbf{R}^+$); (2) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx$;

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$; (4) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^p}dx$;

(5) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx$; (6) $\int_0^{+\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx$;

(7) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p+x^q}dx$; (8) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^p\ln^q x}dx$.

解 (1) $\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}dx=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{p-1}}{\ln x}dx-\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{q-1}}{\ln x}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}dx$ 。

当 $p>0$, $q>0$ 时积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{p-1}}{\ln x}dx$ 与积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{q-1}}{\ln x}dx$ 显然收敛，且当 $x\to 1-$ 时，

$$\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}=\frac{\left[(1+(x-1))^{p-1}-1\right]-\left[(1+(x-1))^{q-1}-1\right]}{\ln\left(1+(x-1)\right)}\sim\frac{(p-q)(x-1)}{x-1}=p-q,$$

即 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}dx$ 不是反常积分，所以积分 $\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}dx$ 收敛。

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx+\int_1^2\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx$ $+\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx$ 。

因为

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}\sim-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\ (x\to 0+),$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}\sim-\frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}\ (x\to 1-),$$

所以积分 $\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx$ 收敛;

因为

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} \sim -\frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} \ (x \to 1+),$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{3}}} \ (x \to 2-),$$

所以积分$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} dx$收敛；

因为

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{3}}} \ (x \to 2+),$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} \sim \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} \ (x \to +\infty),$$

所以积分$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} dx$收敛。

由此可知积分$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} dx$收敛。

（3）$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$。

由$\frac{\ln(1+x)}{x^p} \sim \frac{1}{x^{p-1}} \ (x \to 0+)$，可知当$p < 2$时，积分$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$收敛，当$p \ge 2$时，积分$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$发散；

当$p > 1$时，$\lim_{x \to +\infty} \left[x^{\frac{3p-1}{2}} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x^p} \right] = 0$，即当$x > 0$充分大时，有$\frac{\ln(1+x)}{x^p} < \frac{1}{x^{\frac{3p-1}{2}}}$，其中$\frac{3p-1}{2} > 1$，可知当$p > 1$时，积分$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$收敛，当$p \le 1$时，积分$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$发散；

综上所述，当$1<p<2$时，积分$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$收敛，在其余情况下积分$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$发散。

（4）$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx=\int_0^1\frac{\arctan x}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx$。

由$\frac{\arctan x}{x^p}\sim\frac{1}{x^{p-1}}\ (x\to 0+)$,可知当$p<2$时积分$\int_0^1\frac{\arctan x}{x^p}dx$收敛；

由$\frac{\arctan x}{x^p}\sim\frac{\pi}{2x^p}\ (x\to+\infty)$，可知当$p>1$时积分$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx$收敛。

所以当$1<p<2$时积分$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx$收敛，在其余情况下积分$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx$发散。

（5）$\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx=\int_0^{\pi/4}\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx+\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx$。

由$\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}\sim\frac{1}{x^{p-\frac{1}{2}}}\ (x\to 0+)$，可知当$p<\frac{3}{2}$时积分$\int_0^{\pi/4}\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx$收敛，当$p\geq\frac{3}{2}$时积分$\int_0^{\pi/4}\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx$发散；

由$\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}\sim\frac{2^p}{\pi^p(\frac{\pi}{2}-x)^{\frac{1}{2}}}\ (x\to\frac{\pi}{2}-)$，可知积分$\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx$收敛。

所以当$p<\frac{3}{2}$时积分$\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx$收敛，当$p\geq\frac{3}{2}$时积分$\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx$发散。

（6）$\int_0^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}dx=\int_0^1x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}dx+\int_1^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}dx$。

由于积分$\int_1^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}dx$收敛，及$x^{p-1}e^{-x}\sim\frac{1}{x^{1-p}}\ (x\to 0+)$，所以当$p>0$时积分$\int_0^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}dx$收敛，当$p\leq 0$时积分$\int_0^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}dx$发散。

（7）$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}dx=\int_0^1\frac{1}{x^p+x^q}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}dx$。

当 $p=q$ 时，显然积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}dx$ 发散；

当 $p\neq q$ 时，由于

$$\frac{1}{x^p+x^q}\sim\frac{1}{x^{\min(p,q)}}\ (x\to 0+)，\quad \frac{1}{x^p+x^q}\sim\frac{1}{x^{\max(p,q)}}\ (x\to +\infty)，$$

所以当 $\min(p,q)<1$，且 $\max(p,q)>1$ 时积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}dx$ 收敛，其余情况下积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}dx$ 发散。

（8）设 $p>1$，则对任意的 q，当 x 充分大时，有 $\frac{1}{x^p\ln^q x}<\frac{1}{x^{\frac{p+1}{2}}}$，因为 $\frac{p+1}{2}>1$，可知积分 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}dx$ 收敛。

设 $p<1$，则对任意的 q，当 x 充分大时，有 $\frac{1}{x^p\ln^q x}>\frac{1}{x^{\frac{p+1}{2}}}$，因为 $\frac{p+1}{2}<1$，可知积分 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}dx$ 发散。

设 $p=1$，令 $\ln x=t$，则 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}dx=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{dt}{t^q}$，由此可知当 $p>1$ 或 $p=1,q>1$ 时积分 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}dx$ 收敛，在其余情况下积分 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}dx$ 发散。

9. 讨论下列反常积分的敛散性：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x^2}dx$；　　(2) $\int_1^{+\infty}\frac{x^q\sin x}{1+x^p}dx$（$p\geq 0$）；

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$；　　(4) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$；

(5) $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\cos\frac{1}{x^2}dx$；　　　　　　(6) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}dx$　（$p>0$）.

解（1）$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x^2}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x^2}dx$ 。

由 $\frac{x^{p-1}}{1+x^2}\sim\frac{1}{x^{1-p}}\ (x\to 0+)$，$\frac{x^{p-1}}{1+x^2}\sim\frac{1}{x^{3-p}}\ (x\to+\infty)$，可知当 $0<p<2$ 时积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x^2}dx$ 收敛，在其余情况下积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x^2}dx$ 发散。

（2）当 $q<p-1$ 时，由 $\frac{x^q|\sin x|}{1+x^p}<\frac{1}{x^{p-q}}$，可知积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^q\sin x}{1+x^p}dx$ 绝对收敛。

当 $p-1\le q<p$ 时，因为 $F(A)=\int_1^A\sin xdx$ 有界，当 x 充分大时 $\frac{x^q}{1+x^p}$ 单调减少，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^q}{1+x^p}=0$，由 Dirichlet 判别法，积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^q\sin x}{1+x^p}dx$ 收敛；但因为积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^q|\sin x|}{1+x^p}dx$ 发散，所以当 $p-1\le q<p$ 时积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 条件收敛。

当 $q\ge p$ 时，由于 $n\to\infty$ 时 $\int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi}\frac{x^q\sin x}{1+x^p}dx$ 不趋于零，可知积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^q\sin x}{1+x^p}dx$ 发散。

（3）$\int_0^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}dx=\int_0^1\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$ 。

由 $\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}\sim\frac{1}{x^p}\ (x\to 0+)$，可知当 $p<1$ 时积分 $\int_0^1\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$ 收敛，在其余情况下积分 $\int_0^1\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$ 发散。

当 $p<1$ 时，易知积分 $\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}|\cos x|}{x^p}dx$ 发散；当 $p\le 0$ 时，易知积分

$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$发散。

当 $0<p<1$ 时，因为 $\left|\int_1^A e^{\sin x}\cos xdx\right|<e-1$，$\frac{1}{x^p}$ 单调减少，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p}=0$，由 Dirichlet 判别法；可知积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$ 收敛。

综上所述，当 $0<p<1$ 时，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$ 条件收敛，在其余情况下积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$ 发散。

（4）$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$。

由 $\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}\sim\frac{2}{x^{p-1}}\ (x\to 0+)$，可知当 $p<2$ 时积分 $\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$ 收敛，在其余情况下积分 $\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$ 发散。

当 $1<p<2$ 时，显然积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\,|\sin 2x\,|}{x^p}dx$ 收敛；当 $p\le 1$ 时，易知积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\,|\sin 2x\,|}{x^p}dx$ 发散；当 $p\le 0$ 时，易知积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$ 发散。

当 $0<p\le 1$ 时，因为 $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{\sin x}\sin 2xdx=0$，可知 $\left|\int_0^A e^{\sin x}\sin 2xdx\right|$ 有界，且 $\frac{1}{x^p}$ 单调减少，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p}=0$，由 Dirichlet 判别法，可知积分

$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$ 收敛。

综上所述，当 $1<p<2$ 时积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$ 绝对收敛，当 $0<p\le 1$ 时积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$ 条件收敛，在其余情况下积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$ 发

散。

（5）令 $t=\frac{1}{x^2}$，则

$$\int_0^1\frac{1}{x^p}\cos\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{\frac{3-p}{2}}}\cos tdt\text{。}$$

于是可知当 $p<1$ 时积分 $\int_0^1\frac{1}{x^p}\cos\frac{1}{x^2}dx$ 绝对收敛；当 $1\le p<3$ 时积分 $\int_0^1\frac{1}{x^p}\cos\frac{1}{x^2}dx$ 条件收敛，当 $p\ge 3$ 时积分 $\int_0^1\frac{1}{x^p}\cos\frac{1}{x^2}dx$ 发散。

（6）当 $p>1$ 时，因为 $\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^p}\le\frac{1}{x^p}$，可知积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}dx$ 绝对收敛。

当 $0<p\le 1$ 时，因为 $\int_{n\pi+\frac{\pi}{6}}^{n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^p}dx>\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}}{\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^p}$，而级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^p}$ 发散，所以积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^p}dx$ 发散；又因为

$\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}dx=\int_1^{+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}\cos x+\cos\frac{1}{x}\sin x}{x^p}dx$，注意到当 x 充分大时，$\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}$ 与 $\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^p}$ 都是单调减少的，由 Dirichlet 判别法可知积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}dx$ 收敛，所以积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}dx$ 条件收敛。

10．证明反常积分 $\int_0^{+\infty}x\sin x^4\sin xdx$ 收敛。

证　对任意 $A''>A'>A$，由分部积分法，

$$\int_{A'}^{A''} x\sin x^4 \sin x dx = -\int_{A'}^{A''} \frac{\sin x}{4x^2} d(\cos x^4)$$

$$=\left(-\frac{\sin x\cos x^4}{4x^2}\right)\Bigg|_{A'}^{A''}+\int_{A'}^{A''}\frac{\cos x^4\cos x}{4x^2}dx-\int_{A'}^{A''}\frac{\cos x^4 \sin x}{2x^3}dx \text{。}$$

显然，当 $A\to+\infty$ 时，等式右端的三项都趋于零，由 Cauchy 收敛原理，可知反常积分 $\int_0^{+\infty} x\sin x^4 \sin x dx$ 收敛。

11．设 $f(x)$ 单调，且当 $x\to 0+$ 时 $f(x)\to+\infty$，证明：$\int_0^1 f(x)dx$ 收敛的必要条件是 $\lim\limits_{x\to 0+} xf(x)=0$。

证　首先由 $f(x)$ 的单调性，对于充分小的 $0<x<1$，有

$$0\le \frac{x}{2}f(x)\le \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt \text{。}$$

由 Cauchy 收敛原理，$\lim\limits_{x\to 0+}\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt=0$，于是得到

$$\lim_{x\to 0+} xf(x)=0 \text{。}$$

12．设 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，且 $xf(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调减少，证明:

$$\lim_{x\to+\infty} x(\ln x)f(x)=0 \text{。}$$

证　首先容易知道当 $x\to+\infty$ 时，$xf(x)$ 单调减少趋于 0，于是有

$xf(x)\ge 0$，且

$$0\le \frac{1}{2}x(\ln x)f(x)\le \int_{\sqrt{x}}^{x} tf(t)\cdot\frac{1}{t}dt=\int_{\sqrt{x}}^{x} f(t)dt \text{。}$$

然后由 Cauchy 收敛原理，$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{\sqrt{x}}^{x} f(t)dt=0$，于是得到

$$\lim_{x\to+\infty} x(\ln x)f(x)=0 \text{。}$$

13．设 $f(x)$ 单调下降，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，证明：若 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，

则反常积分 $\int_0^{+\infty} f'(x)\sin^2 x\, dx$ 收敛。

证 首先由分部积分法，

$$\int_0^{+\infty} f'(x)\sin^2 x dx = \int_0^{+\infty} \sin^2 x df(x) = -\int_0^{+\infty} f(x)\sin 2x dx \text{。}$$

由于 $F(A)=\int_0^A \sin 2x dx$ 有界，$f(x)$ 单调下降，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，由 Dirichlet 判别法，可知积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\sin 2x dx$ 收敛，从而积分 $\int_0^{+\infty} f'(x)\sin^2 x\, dx$ 收敛。

14. 设 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，证明 $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛。

证 首先由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，可知 $\exists A>a$，$\forall x>A$，有 $|f(x)|<1$，即当 $x>A$ 时，成立 $f^2(x)\le|f(x)|$。因为积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛，于是由比较判别法，积分 $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛。

15. 若 $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛，则称 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上平方可积（类似可定义无界函数在 $[a,b]$ 上平方可积的概念）。

⑴ 对两种反常积分分别探讨 $f(x)$ 平方可积与 $f(x)$ 的反常积分收敛之间的关系；

⑵ 对无穷区间的反常积分，举例说明，平方可积与绝对收敛互不包含；

⑶ 对无界函数的反常积分，证明：平方可积必定绝对收敛，但逆命题不成立。

解 （1）$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛不能保证 $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛，例如：$f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$，则 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，但 $\int_1^{+\infty} f^2(x)dx$ 发散；

$\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛不能保证 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，例如：$f(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $\int_1^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛，但 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 发散。

(2) $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛不能保证$\int_a^{+\infty} f(x)dx$绝对收敛，例如：$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，则$\int_1^{+\infty} f^2(x)dx$收敛，但$\int_1^{+\infty} f(x)dx$不是绝对收敛的；

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$绝对收敛不能保证$\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$收敛，例如：

$f(x)=\begin{cases} n & x\in\bigcup\limits_{n=2}^{\infty}[n,n+\dfrac{1}{n^3}] \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，则$\int_1^{+\infty} f(x)dx$绝对收敛，但$\int_1^{+\infty} f^2(x)dx$发散。

(3) 由$|f(x)|\le\dfrac{1}{2}[1+f^2(x)]$，可知$\int_a^b f^2(x)dx$收敛保证$\int_a^b f(x)dx$绝对收敛；但$\int_a^b f(x)dx$绝对收敛不能保证$\int_a^b f^2(x)dx$收敛，例如：$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，则$\int_0^1 f(x)dx$绝对收敛，但$\int_0^1 f^2(x)dx$发散。

16. 证明反常积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$$

当$p\le\dfrac{1}{2}$时发散，当$\dfrac{1}{2}<p\le 1$时条件收敛，当$p>1$时绝对收敛。

证　当$p>1$时，对充分大的x，有$\left|\dfrac{\sin x}{x^p+\sin x}\right|\le\dfrac{2}{x^p}$，由于积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{2}{x^p}dx$收敛，可知积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$绝对收敛。

当$0<p\le 1$时，利用等式

$$\frac{\sin x}{x^p+\sin x}=\frac{\sin x}{x^p}-\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}。$$

这时积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^p}dx$收敛；积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}dx$当$\dfrac{1}{2}<p\le 1$时收敛，当$0<p\le\dfrac{1}{2}$发散。

当$\dfrac{1}{2}<p\le 1$时，由于$\int_{n\pi+\frac{\pi}{4}}^{n\pi+\frac{3\pi}{4}}\left|\dfrac{\sin x}{x^p+\sin x}\right|dx\ge\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{(n+1)^p\pi^p+1}$，因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)^p\pi^p+1}$发散，所以积分$\int_1^{+\infty}\left|\dfrac{\sin x}{x^p+\sin x}\right|dx$发散。

综上所述，当$\frac{1}{2}<p\le 1$时，积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$条件收敛；当$0<p\le\frac{1}{2}$时，积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$发散。

当$p\le 0$时，因为有$\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx>\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{2}dx>\frac{\sqrt{2}}{16}\pi$，由Cauchy 收敛原理，可知积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$发散。