可测集由开集和闭集来逼近

luojunxun

2023 年 4 月 13 日

Theorem 2.5.1:*(1):*E 可测 $\iff$ $(2):\forall\epsilon>0,\exists G\overset{open}{\supset}E\ s.t.m^*(G-E)<\epsilon$ $\iff$ $(3):\forall\epsilon>0,\exists F\overset{closed}{\subset}E\ s.t.m^*(E-F)<\epsilon$

Corollary 2.5.1:$1.E$可测 $\iff$ $2.\forall\epsilon>0,\exists F,G$可测且:$F\subset E\subset G:m(G-F)<\epsilon$ $\iff$ $3/\exists G_\delta$集$G\supset E\ s.t.m^*(G-E)=0$ $\iff$ $4.\exists F_\sigma$集$F\subset E\ s.t.m^*(E-F)=0$

Theorem 2.5.2: 设 E 可测并且测度有限, 那么 $\forall\epsilon>0$, 存在有限个端点为有理数的开区间 $I_k,1\le k\le n,s.t.m(E\Delta G)<\epsilon$ 其中 $G=\bigcup\limits_{k=1}^{n}I_k$

代数,σ 代数与 Borel 集

*summary:*X 是非空集合,$\mathcal{F}$ 是 X 的一个非空集族

(代数): 说 $\mathcal{F}$ 是一个代数 $\iff$ $1.X\in\mathcal{F}$ $2.\forall F\in\mathcal{F},F^c\in\mathcal{F}$ $3.\forall F_1,F_2\in\mathcal{F},F_1\cup F_2\in\mathcal{F}$

这里实际上是有限并.

(sigma 代数): 拥有代数的一, 二条性质, 但第三条改成可数并封闭

Theorem 2.6.1 设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的一个代数:$1.X,\emptyset\in\mathcal{F}$ $2.forall F_1,F_2\in\mathcal{F},F_1-F_2\in\mathcal{F},F_1\cap F_2\in\mathcal{F}$ 此时: 若 $\mathcal{F}$ 是 σ 代数, 那么 $\forall\{F_n\}\subset\mathcal{F},\bigcap\limits_n F_n\in\mathcal{F}$

($\mathcal{F}\subset\mathcal{P}(X)$):$1.A(\mathcal{F})=\bigcap\{$包含$\mathcal{F}$的所有代数$\}$ $2.B(\mathcal{F})=\bigcap\{$包含$\mathcal{F}$的所有$\sigma$代数$\}$

实轴上的开区间产生的 σ 代数称为 *Borel* σ 代数, 记为 $\mathcal{B}$, 其中的元称为 Borel 集. 开集和闭集都是 Borel 集, 粗略的说 Borel 集是有开集和闭集通过至多可数次并交差补生成的集合

Theorem 2.6.2:$Borel$ 集是可测的

Proof:[2.6.3] 可测集全体 Ω 是一个包含所有开区间的 σ 代数, 但 $\mathcal{B}$ 是包含开区间的最小 σ 代数, 所以 $\mathcal{B} \subset \Omega$, 从而 Borel 集是可测集

Theorem 2.6.3: 设 h 是 R 上的严格单增连续函数, 那么 h 把 $Borel$ 集映射为 $Borel$ 集