第十二周作业

以下假设$\{B(t);t\geq 0\}$是标准布朗运动.

一. 令$Z(t)=\int_0^t[B(s)]^2ds$, 计算$E[Z(s)Z(t)]$, $s,t>0$.

二. 令$X(t)=e^{\int_0^t B(s)ds}$, $t>0$, 计算$EX(t)$. (提示：考虑$\int_0^t B(s)ds$ 的分布).

三. 对$t>0$, 令$M(t)=\max\limits_{0\leq s\leq t}B(s)$, $X(t)=M(t)-B(t)$. 证明：
$X(t)$和$M(t)$ 同分布.

四. (1)计算$P(B(6)\geq 6|B(1)=1,B(2)=2)$;
(2)计算$P(\max\limits_{2\leq t\leq 6}B(t)\geq 6|B(1)=1,B(2)=2)$.

五. 设$\xi_1,\cdots,\xi_m,\eta_1,\cdots,\eta_m$ 两两不相关, 均值都为0. 对$1\leq i\leq m$, $\mathrm{V}ar(\xi_i)=\mathrm{V}ar(\eta_i)=\sigma_i^2$. 设$\omega_1,\cdots,\omega_m$为正常数. 对$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$, 令

$$X(n)=\sum_{i=0}^m\left(\xi_i\cos(n\omega_i)+\eta_i\sin(n\omega_i)\right).$$

计算$\{X(n);n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$的均值函数和自相关函数, 并证明它是宽平稳过程.

六. 设$X_0,Z_1,Z_2,\cdots$是两两不相关的随机变量序列, $E(X_0)=\mu$, $\mathrm{V}ar(X_0)=\sigma_1^2>0$. 对$n\geq 1$, $E(Z_n)=0$, $\mathrm{V}ar(Z_n)=\sigma^2>0$. 设$\lambda\neq 0$. 对$n\geq 1$, 令$X_n=\lambda X_{n-1}+Z_n$.

1. 计算$\{X_n;n\geq 0\}$的均值函数和自协方差函数;(提示：把X_n表示成$X_0,Z_1,\cdots,Z_n$的线性组合).
2. 给出$\{X_n;n\geq 0\}$是宽平稳过程的充要条件, 并计算此时的均值函数和自协方差函数.