一、在传染病防控中，通过对大范围人群进行检测，可有效控制传染源。假设某区域内一种传染病的感染率为 $p$，区域内每人是否感染相互独立。对每人提取相关样本进行检测，检测结果有阳性和阴性两种。来自某个人的样本称为个体样本，检测结果为阳性当且仅当该人已被感染。若干份个体样本混合后的样本称为混合样本。对由任意份个体样本混合成的混合样本，检测结果为阳性当且仅当其中至少有一份个体样本检测结果为阳性。

现需找出 $n$ 人中所有的感染者，采用以下减半群试法（halving scheme for pooled testing）。将 $n$ 份个体样本组成混合样本 $\Pi$ 进行检测。若 $\Pi$ 的检测结果为阴性，则 $n$ 人中无感染者。若 $\Pi$ 的检测结果为阳性，则将 $n$ 人随机分成人数分别为 $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ 和 $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ 的两组 A 和 B。对每一组，取该组人的个体样本组成混合样本。记两组的混合样本分别为 $\Pi_A$ 和 $\Pi_B$。先对 $\Pi_A$ 进行检测，若 $\Pi_A$ 的检测结果为阴性，则感染者必在组 B 中。若 $\Pi_A$ 的检测结果为阳性，再对 $\Pi_B$ 进行检测。若 $\Pi_B$ 的检测结果为阴性，则感染者仅在组 A 中。若 $\Pi_B$ 的检测结果为阳性，则 A 和 B 两组中均有感染者。对有感染者的组重复上述操作，直至找出所有感染者为止。

记 $X_n$ 为对 $n$ 人按上述方式进行检测所需的检测次数，$Y_n$ 为对含有感染者的 $n$ 人按上述方式进行检测所需的检测次数。

（1）试给出 $E(X_n)$ 和 $E(Y_n)$ 之间的关系；

（2）试写出 $E(Y_n)$ 所满足的递推关系。

二、$n$ 支球队通过淘汰赛决出冠军。赛程分为 $r$ 轮，第 $l$ 轮共有 $m_l$ 场比赛，$l=1,2,\cdots,r$，$r$ 和 $m_1,m_2,\cdots,m_r$ 的值由赛制规定。每场比赛在两支球队间进行，比赛结果为一支球队获胜，一支球队落败，落败的球队被淘汰。同一轮中的各场比赛同时进行，一支球队不能参加同一轮的两场比赛，不同轮的比赛先后进行。每轮所有比赛的对阵双方在该轮开始前从所有当前未被淘汰的球队中以完全随机的方式选出。只有一支球队未被淘汰时赛程结束，该球队即为冠军。

记队 $i$ 的水平值为 $v_i$，$i=1,\cdots,n$，设队 $i$ 与队 $j$ 比赛时，队 $i$ 获胜的概率为 $\frac{v_i}{v_i+v_j}$，队 $j$ 获胜的概率为 $\frac{v_j}{v_i+v_j}$。记 $n=2^s+k$，其中 $s,k$ 为正整数，$0\le k<2^s$。设 $v_1>v=v_2=\cdots=v_n>0$。

（1）试给出为保证赛制可行 $m_1,m_2,\cdots,m_r$ 应满足的条件；

（2）问 $n=4$ 时共有多少种不同的赛制。采用哪种赛制可使队1获得冠军的概率最大，采用哪种赛制可使队1获得冠军的概率最小；

（3）若 $m_1=k$，求队1在第一轮结束后未被淘汰的概率 $f_1$，若 $m_1=j<k, m_2=k-j$，求队1在第二轮结束后未被淘汰的概率 $f_2$，并证明 $f_1-f_2>0$；

（4）证明：$r=s+1$ 且 $m_1=k, m_l=2^{s-l+1}, l=2,3,\cdots,s+1$ 的赛制对队1最为有利。