1 第六次作业

问题 1. 设X为非空集合，d_1, d_2是其上两个度量，求证：d_1诱导的度量拓扑比d_2诱导的度量拓扑细$\iff \forall x \in X, r > 0$, 存在$s > 0$使得$B_{d_1}(x,s) \subseteq B_{d_2}(x,r)$.

证明. 由引理3.2.7和度量拓扑的定义, d_1诱导的度量拓扑比d_2诱导的度量拓扑细当且仅当：任给$y \in B_{d_2}(x,r)$, 存在度量球$B_{d_1}(z,s)$满足：$y \in B_{d_1}(z,s) \subseteq B_{d_2}(x,r)$.

$\Longleftarrow$: 若$y \in B_{d_2}(x,r)$, 取$t = r - d_2(x,y)$, 则$B_{d_2}(y,t) \subseteq B_{d_2}(x,r)$. 由条件存在$s > 0$使得$B_{d_1}(y,s) \subseteq B_{d_2}(y,t)$, 从而$y \in B_{d_1}(y,s) \subseteq B_{d_2}(x,r)$.

$\Longrightarrow$: $x \in B_{d_2}(x,r)$, 由条件知存在度量球$B_{d_1}(z,s)$满足：$x \in B_{d_1}(z,s) \subseteq B_{d_2}(x,r)$. 取$s = r - d_1(x,z)$, 则$B_{d_1}(x,s) \subseteq B_{d_2}(x,r)$.

□

问题 2. 设(X,d)为度量空间，A是X的非空子集，记d在$A \times A$上的限制为d_A. 求证：d_A诱导的拓扑等于A上的相对拓扑。

证明. 首先对于A中的度量球$B_{d_A}(a,r)$, 其中$a \in A, r > 0$, 则$B_d(a,r) \bigcap A = B_{d_A}(a,r)$, 从而$d_A$诱导的拓扑比$A$上的相对拓扑粗。反过来，任取子拓扑的基元素$B_d(x,r) \bigcap A$, 需证$B_d(x,r) \bigcap A$是$d_A$诱导的度量拓扑中的开集。这可由下式看出：

$$B_d(x,r) \bigcap A = \bigcup_{a \in B_d(x,r) \bigcap A} B_{d_A}(a, r_a),$$

其中$r_a = r - d(x,a)$.

□

问题 3. 设$X = X_1 \bigcup X_2$, $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$分别是$X_1, X_2$上的拓扑，问何时存在$X$上的拓扑$\mathcal{T}$满足$\mathcal{T}_{X_i} = \mathcal{T}_i, i = 1,2$?

解. 充要条件是$\mathcal{T}_1|_{X_1 \bigcap X_2} = \mathcal{T}_2|_{X_1 \bigcap X_2}$. 首先如果存在$X$上的拓扑$\mathcal{T}$满足$\mathcal{T}_{X_i} = \mathcal{T}_i, i = 1,2$, 则$\mathcal{T}_1|_{X_1 \bigcap X_2} = \mathcal{T}|_{X_1 \bigcap X_2}, \mathcal{T}_2|_{X_1 \bigcap X_2}|_{X_1 \bigcap X_2}$. 反过来，令$\mathcal{T} = \{U \subseteq X | U \bigcap X_1 \in \mathcal{T}_1, U \bigcap X_2 \in \mathcal{T}_2\}$, 则$\mathcal{T}$是拓扑：易知$\emptyset, X \in \mathcal{T}$；若$U_\alpha \in \mathcal{T}$, 则由$\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \bigcap X_i = \bigcup_{\alpha \in J}(U_\alpha \bigcap X_i)$, 可知$\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \in \mathcal{T}$; 若$U, V \in \mathcal{T}$, 则由$(U \bigcap V) \bigcap X_i = (U \bigcap X_i) \bigcap (V \bigcap X_i)$知$U \bigcap Y \in \mathcal{T}$. 这里还没有用到条件$\mathcal{T}_1|_{X_1 \bigcap X_2} = \mathcal{T}_2|_{X_1 \bigcap X_2}$.

下面证明$\mathcal{T}|_{X_1} = \mathcal{T}_1$, 同理可证$\mathcal{T}|_{X_2} = \mathcal{T}_2$. 任取$U \in \mathcal{T}$, 由定义$U \bigcap X_1 \in \mathcal{T}_1$. 反过来，任取$W \in \mathcal{T}_1$, 需证存在$U \in \mathcal{T}$满足$U \bigcap X_1 = W$. $W \bigcap X_2 \in \mathcal{T}_1|_{X_1 \bigcap X_2}$, 从而存在$V \in \mathcal{T}_2$使得$W \bigcap X_2 = V \bigcap X_1$. 令$U = W \bigcup V$, 则$U \bigcap X_1 = W, U \bigcap X_2 = V$, 从而$U \in \mathcal{T}$. □

问题 4. 拓扑空间之间的映射f如果把开集映成开集(对任意开集U，$f(U)$是开集)，则称f为开映射。X_1, X_2是两个拓扑空间，在$X_1 \times X_2$上赋予乘积拓扑。定义$\pi_i : X_1 \times X_2 \to X_i (i = 1,2)$为$\pi_i(x_1, x_2) = x_i$, 称为向第$i$个分量的投射。证明$\pi_i : X_1 \times X_2 \to X_i (i = 1,2)$是开映射。

证明. 首先f为开映射，当且仅当对于基元素V, $f(V)$为开集，这是因为任意开集U可写成$\bigcup_{\alpha \in J} V_\alpha$的形式，其中$V_\alpha$是基元素，而且$f(\bigcup_{\alpha \in J} V_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in J} f(V_\alpha)$. 积拓扑的基元素为$U_1 \times U_2$, 其中$U_1, U_2$分别为$X_1, X_2$中开集。而$\pi_i(U_1 \times U_2) = U_i (i = 1,2)$, 从而$\pi_i$为开映射。 □