阶跃函数与阶跃响应

阶跃函数

1、阶跃函数的定义

在理解阶跃函数前，我们可以先将其当作一种特殊的函数。单位阶跃函数可以定义为：

$$\varepsilon(t) \equiv \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

我们可以用单位阶跃函数来表示$1V$或者$1A$的直流电源在$t=0$时刻接入电路的情况，也可以其来表示$t=0$时刻某一状态的变化。

如果不是$1V$或者$1A$而是kV或者kA呢？很简单，只要在单位阶跃函数前面乘以相应的系数就可以了。

$$k\varepsilon(t) \equiv \begin{cases} 0, & t < 0 \\ k, & t > 0 \end{cases}$$

如果不是在$t=0$时刻产生变化而是在$t=t_0$时刻呢？

延迟阶跃函数

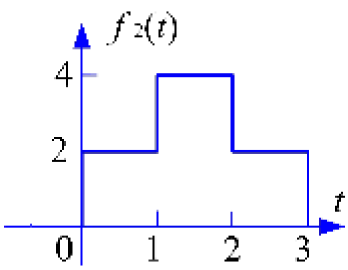
若单位直流电源在$t=t_0$时刻接入，我们可以用`延迟阶跃函数`表示。其表达式如下：

$$\varepsilon(t-t_0) \equiv \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t > t_0 \end{cases}$$

2、阶跃函数的应用

阶跃函数的应用是多样的，就比如在信号分析中的应用，利用阶跃信号可以方便地表示某些信号或者截取某些信号；或者是在积分变换中的应用，在处理分段函数时，利用阶跃函数可以方便地将分段函数化做成统一的形式，方便进行统一处理。

举个例子，在信号分析中，我们有一个信号：（此图建议重画）



利用分段函数我们可以写出其表达式：

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2, & 0 < t < 1 \\ 4, & 1 < t < 2 \\ 2, & 2 < t < 3 \\ 0, & 3 < t \end{cases}$$

表达式十分冗长并且很不漂亮，而且分段过多很不利于后面的分析（在分析时要时刻注意分段界限），而如果我们利用阶跃函数重写这一表达式，如下：

$$f(t) = 2\varepsilon(t) + 2\varepsilon(t-1) - 2\varepsilon(t-2) - 2\varepsilon(t-3) \tag{1}$$

我们只需要一个式子就可以写出来（不需要分段！），十分简洁（起码我们获得了形式上的统一）。而且最重要的是，这里面实质上只出现了一个函数$\epsilon(t)$。这样的好处是如果我们要求解函数$f(t)$对于某一问题的贡献，我们或许可以从函数$\epsilon(t)$ 的贡献中得到启发。

阶跃响应

前提

首先必须要说明的是，我们下面的分析是针对于**线性时不变电路所进行的。**这种电路有两个很好的性质。

- **齐次性和叠加性**（或者称为**零状态线性**）
  用符号语言描述如下：如果激励源$f_1(t)$作用于电路产生的**零状态响应**为$y_{zs1}(t)$，$f_2(t)$作用于电路产生的**零状态响应**为$y_{zs2}(t)$，简记为

  $$f_1(t) \rightarrow y_{zs1}(t) \tag{2}$$

  $$f_2(t) \rightarrow y_{zs2}(t) \tag{3}$$

  线性性质表明，如果有常数a_1、a_2，则

  $$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \rightarrow a_1 y_{zs1}(t) + a_2 y_{zs2}(t) \tag{4}$$

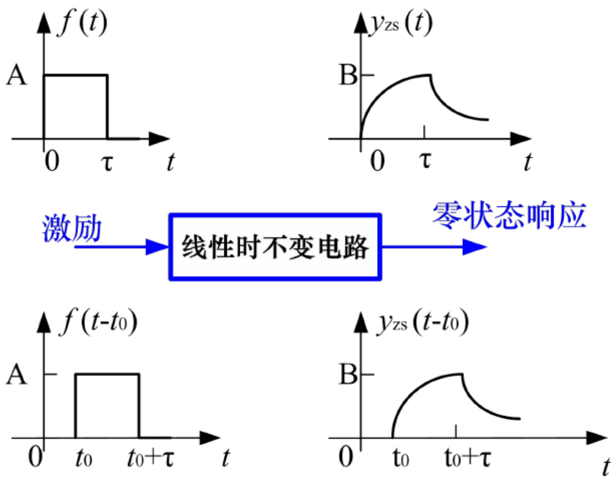
- **延时不变性**
  对于时不变电路，其元件参数不随时间变化，因而电路的零状态响应与激励接入的时间无关，即若

  $$f(t) \rightarrow y_{zs}(t) \tag{5}$$

  则

  $$f(t-t_0) \rightarrow y_{zs}(t-t_0) \tag{6}$$

  也就是说，若激励$f(t)$延迟了t_0的时间接入，那么其零状态响应也延迟t_0时间，且**波形保持不变**。如下图：

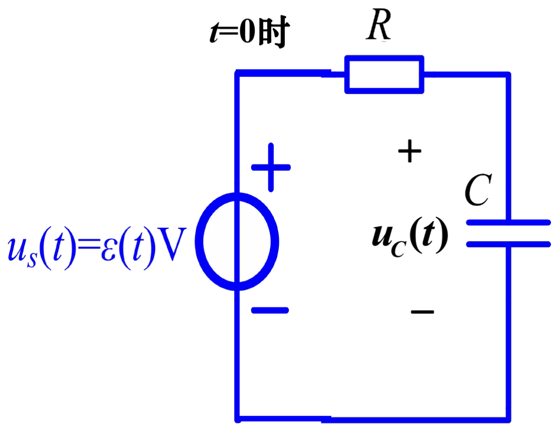


单位阶跃响应

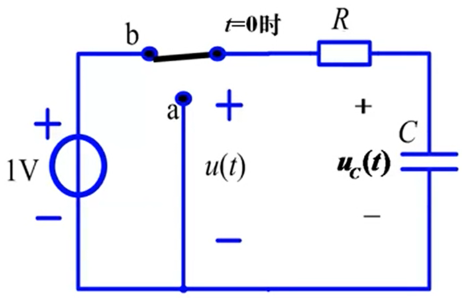
定义： 当激励为**单位阶跃函数**$\varepsilon(t)$时，电路的**零状态响应**称为单位阶跃响应，简称`阶跃响应`，常用$g(t)$表示。

注意：$g(t)$这个函数在我们后面的讲解中还会出现，最好记住它的意义。

如下图：



即相当于，在$t=0$时，单位直流电源接入电路。



如图所示的电路是一个典型的**一阶电路**，可以用**三要素法**求得。也就是说一阶电路的**阶跃响应**可以用**三要素法**快速求得。

比如，我们想求电容的激励电压$u_{Czs}(t)$。

$$\text{三要素公式：} y(t)=y(\infty)+[y(0_+)-y(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{7}$$

则当$t>0$时，

$$u_{Czs}(t) = u_{Czs}(\infty) + [u_{Czs}(0_+) - u_{Czs}(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{8}$$

显然易得，$u_{Czs}(\infty) = 1V$，$u_{Czs}(0_+) = 0$，则我们可以得到：

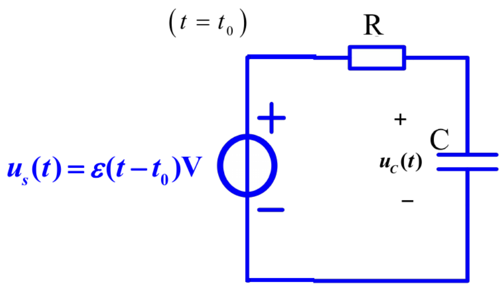
$$u_{Czs}(t) = 1 + (0-1)e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{9}$$

而显然，当$t < 0$时，$u_{Czs}(t) = 0$。所以我们可以得到：

$$g(t) = u_{Czs}(t) = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\varepsilon(t) \tag{10}$$

延迟的阶跃响应

如果单位阶跃并不是在$t = 0$时刻而是在$t = t_0$时刻发生，那么根据前面的**时延不变性**，我们容易得到：



$$u_{Czs}(t - t_0) = (1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}})\varepsilon(t - t_0) \tag{11}$$

K倍的阶跃响应

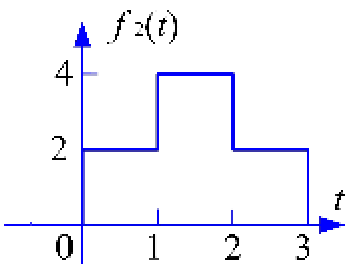
若激励$u_s(t) = K\varepsilon(t)$，那么我们根据前面提到的**线性**，线路中的零状态响应都应该扩大**K**倍。则对于我们所求的电容，我们有

$$u_{Czs}(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\varepsilon(t) \tag{12}$$

更一般的阶跃响应

在前面的基础上，我们现在可以对更一般的阶跃响应进行求解。

对于上面的电路图，我们假设直流电源的激励函数如下：



那么我们可以求得

$$u_s(t) = 2\varepsilon(t) + 2\varepsilon(t-1) - 2\varepsilon(t-2) - 2\varepsilon(t-3) \tag{13}$$

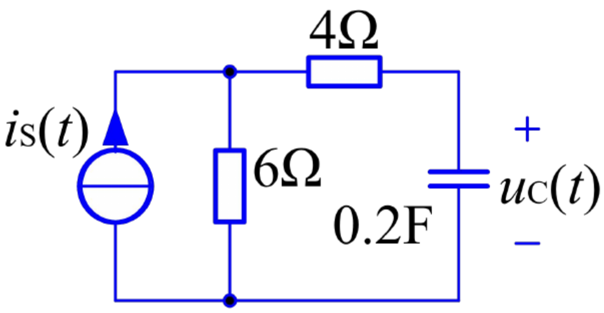
在求出单位阶跃函数$\varepsilon(t)$的阶跃响应之后，其他各项的阶跃响应也迎刃而解。我们假设$\varepsilon(t)$的阶跃响应为$g(t)$，那么整体的阶跃响应应该为：

$$2g(t) + 2g(t-1) - 2g(t-2) - 2g(t-3) \tag{14}$$

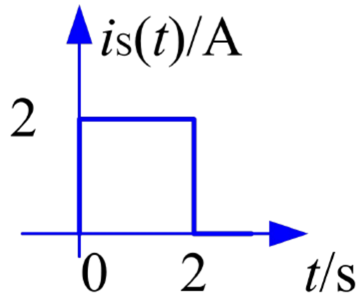
例题

如图所示电路，求：

1. 以$u_C(t)$为输出，求电路的**阶跃响应**$g(t)$；
2. 若激励i_S的波形如`图(b)`所示，求电路的**零状态响应**$u_C(t)$。



(a)



(b)

解：

1. 用**三要素法**。注意题目点明了**阶跃响应**，这句话暗示了激励$i_S(t) = \varepsilon(t)A$。

   易得：$u_C(0_+) = 0$，$u_C(\infty) = 1A \times 6\Omega = 6V$。
   等效为戴维南电路易得$R_0 = 10\Omega$，则$\tau = R_0C = 10 \times 0.2 = 2s$。
   综上，可得：

$$g(t) = 6(1 - e^{-\frac{t}{2}})\varepsilon(t) \tag{15}$$

2. 易得，$i_S = 2\varepsilon(t) - 2\varepsilon(t-2)A$，根据线性时不变性质，可得**零状态响应**如下：

$$u_C(t) = 2g(t) - 2g(t-2) = 12(1 - e^{-\frac{t}{2}})\varepsilon(t) - 12(1 - e^{-\frac{t-2}{2}})\varepsilon(t-2) \tag{16}$$