西安電子科技大學
XIDIAN UNIVERSITY

阶跃函数和阶跃响应

演讲：陈德创　PPT制作：冯瑞森
蒋思媛
问好

目录
CONTENTS

PART ONE

阶跃函数

阶跃函数

单位阶跃函数：

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

可以用来表示$1V$或者$1A$的直流电源在$t = 0$时刻接入电路的情况，也可以其来表示$t = 0$时刻某一状态的变化

如果不是$1V$或者$1A$而是kV或者kA呢？

$$f(t) = K\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ K, & t > 0 \end{cases}$$

很简单，只要在单位阶跃函数前面乘以相应的系数就可以了。

如果不是在$t = 0$时刻产生变化而是在$t = t_0$时刻呢？

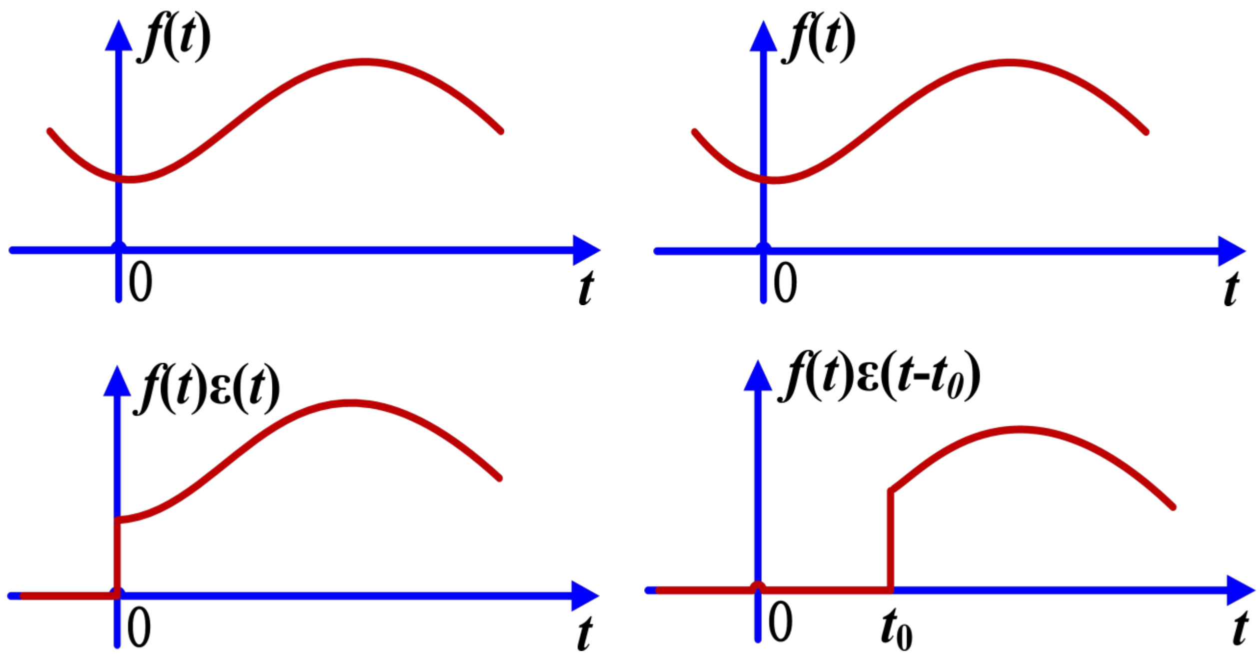
$$\varepsilon(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t > t_0 \end{cases}$$

若单位直流电源在$t = t_0$时刻接入，我们可以用**延迟阶跃函数**表示。

阶跃函数的应用

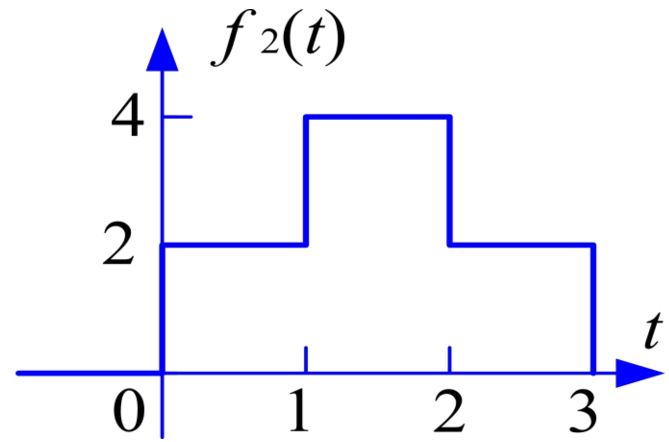
阶跃函数的应用是多样的

- **在信号分析中**
  - 表示门电路
  - 信号截取
- **在积分变换中**
  - 处理分段函数
  - 形式上统一
- **等等**



举个例子

在信号分析中，我们有一个信号



利用分段函数我们可以写出其表达式：

$$f_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2, & 0 < t < 1 \\ 4, & 1 < t < 2 \\ 2, & 2 < t < 3 \\ 0, & 3 < t \end{cases}$$

如果我们利用阶跃函数重写这一表达式：

$$f_2(t) = 2\varepsilon(t) + 2\varepsilon(t-1) - 2\varepsilon(t-2) - 2\varepsilon(t-3)$$

问题：

- 表达式冗长且不漂亮
- 分段过多很不利于后面的分析

优点：

- 简洁优雅，无需分段
- 实质上只用到了一个函数，便于后续分解问题

PART TWO

阶跃响应

线性时不变电路

齐次性和叠加性(零状态线性)

如果激励源$f_1(t)$作用于电路产生的**零状态响应**为$y_{zs1}(t)$，$f_2(t)$作用于电路产生的**零状态响应**为$y_{zs2}(t)$，简记为：

$$f_1(t) \to y_{zs1}(t),\ f_2(t) \to y_{zs2}(t)$$

线性性质表明，如果有常数a_1、a_2，则

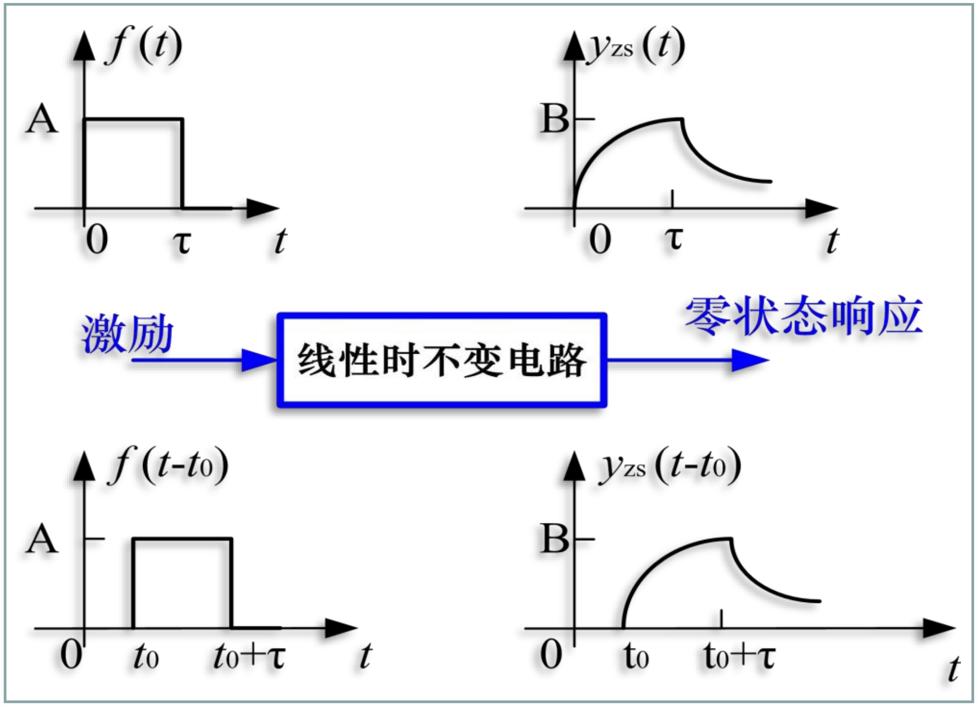
$$a\,f_1(t) + bf_2(t) \to ay_{zs1}(t) + by_{zs2}(t)$$

时延不变性

对于时不变电路，其元件参数不随时间变化，因而电路零状态响应与激励接入的时间无关，即：

$$若f(t) \to y_{zs}(t)，则f(t-t_0) \to y_{zs}(t-t_0)$$

也就是说，若激励$f(t)$延迟了t_0的时间接入，那么其零状态响应也延迟t_0时间，且波形保持不变



时延不变性

对于时不变电路，其元件参数不随时间变化，因而电路零状态响应与激励接入的时间无关，即：

$$若f(t) \rightarrow y_{zs}(t)，则f(t-t_0) \rightarrow y_{zs}(t-t_0)$$

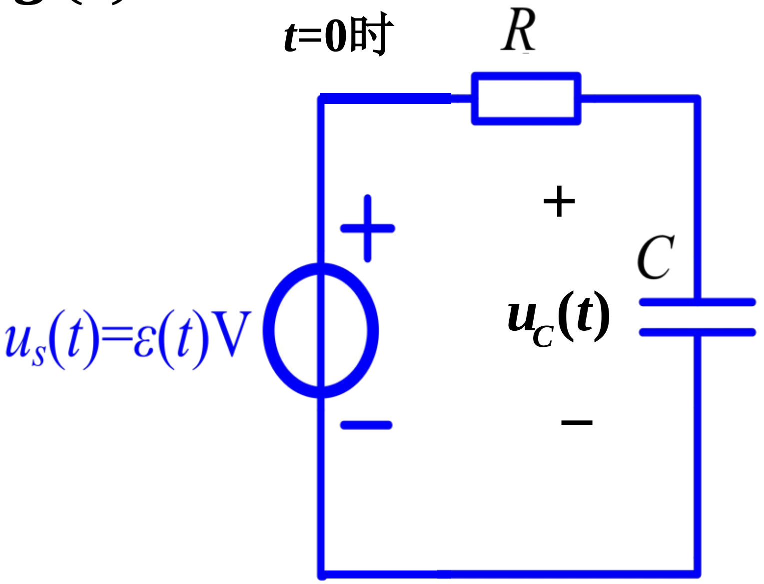
也就是说，若激励$f(t)$延迟了t_0的时间接入，那么其零状态响应也延迟t_0时间，且波形保持不变

阶跃响应

单位阶跃响应

当激励为**单位阶跃函数**$\boldsymbol{\varepsilon(t)}$时，电路的**零状态响应**称为单位阶跃响应，简称阶跃响应，常用$\boldsymbol{g(t)}$表示。

比如右图电路，我们想求电容的激励电压$u_{Czs}(t)$。



阶跃响应

单位阶跃响应

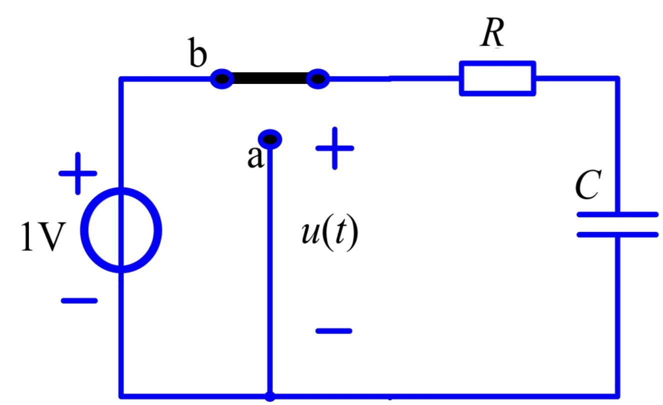
当激励为单位阶跃函数$\boldsymbol{\varepsilon(t)}$时，电路的零状态响应称为单位阶跃响应，简称阶跃响应，常用$\boldsymbol{g(t)}$表示。

相当于右图。

一阶电路，可以用三要素法求得。

三要素公式：

$$y(t)=y(\infty)+[y(0_+)-y(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$



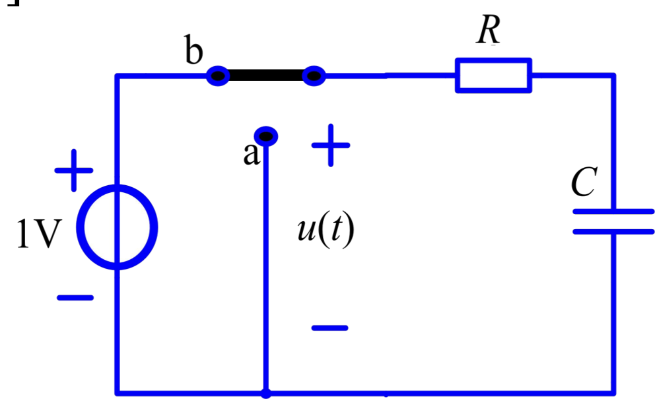
三要素公式：

$$y(t) = y(\infty) + [y(0_+) - y(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

则当$t > 0$时，

$$u_{Czs}(t) = u_{Czs}(\infty) + [u_{Czs}(0_+) - u_{Czs}(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

显然易得，$u_{Czs}(\infty) = 1V$，$u_{Czs}(0_+) = 0$，



则我们可以得到：

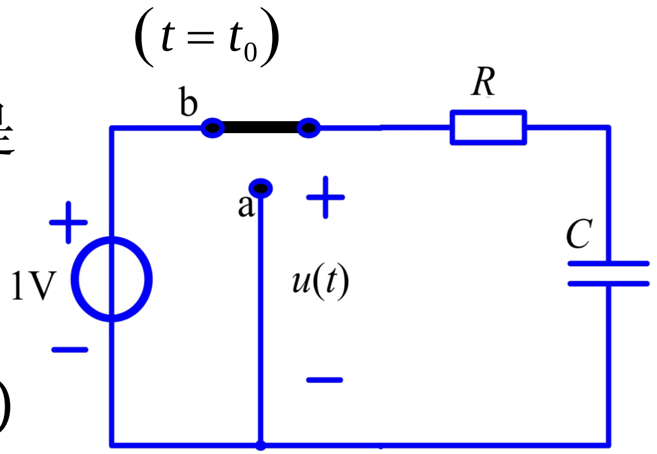
$$u_{Czs}(t) = 1 + (0 - 1)e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

而显然，当$t < 0$时，$u_{Czs}(t) = 0$

所以我们可以得到：$g(t) = u_{Czs}(t) = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\varepsilon(t)$

延迟的阶跃响应

如果单位阶跃并不是在$t=0$时刻而是在$t=t_0$时刻发生，那么根据前面的**时延不变性**，我们容易得到：



$$u_{Czs}(t-t_0)=(1-e^{-\frac{t-t_0}{\tau}})\varepsilon(t-t_0)$$

K倍的阶跃响应

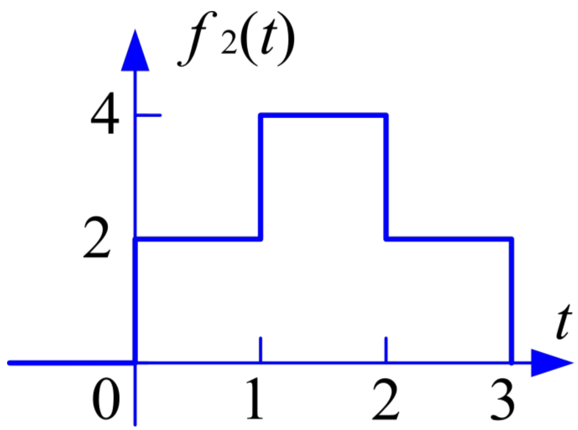
若激励$u_s(t)=K\varepsilon(t)$，那么我们根据前面提到的**线性**，线路中的零状态响应都应该扩大**K**倍。则对于我们所求的电容迪纳电压，我们有

$$u_{Czs}(t)=K(1-e^{-\frac{t}{\tau}})\varepsilon(t)$$

更一般的阶跃响应

在前面的基础上，我们现在可以对更一般的阶跃响应进行求解。

我们假设直流电源的激励函数如右图。



那么我们可以求得

$$u_s(t) = 2\varepsilon(t) + 2\varepsilon(t-1) - 2\varepsilon(t-2) - 2\varepsilon(t-3)$$

我们假设$\varepsilon(t)$的阶跃响应为$g(t)$，那么整体的阶跃响应应该为：

$$2g(t) + 2g(t-1) - 2g(t-2) - 2g(t-3)$$

PART THREE

例题

例： 如图所示电路

1. 以$u_C(t)$为输出，求电路的**阶跃响应**$g(t)$
2. 若激励i_S的波形如图(b)所示，求电路的**零状态响应**$u_C(t)$。

解:

(1)用三要素法。

激励： $i_S(t)=\varepsilon(t)A$。

易得：

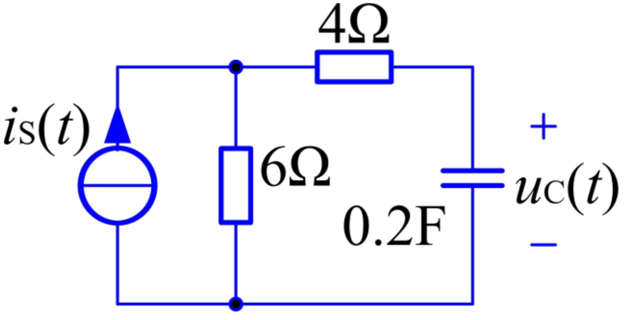
$$u_C(0_+)=0，u_C(\infty)=1A\times 6\Omega=6V$$

等效为戴维南电路易得, $R_0=10\Omega$，

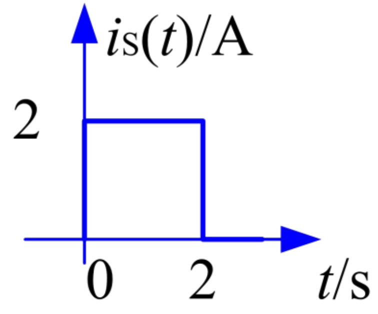
则，$\tau=R_0C=10\times 0.2=2s$

综上，可得：

$$g(t)=6(1-e^{-\frac{t}{2}})\varepsilon(t)$$



(a)



(b)

例：如图所示电路

1. 以$u_C(t)$为输出，求电路的**阶跃响应**$g(t)$
2. 若激励i_S的波形如图(b)所示，求电路的**零状态响应**$u_C(t)$。

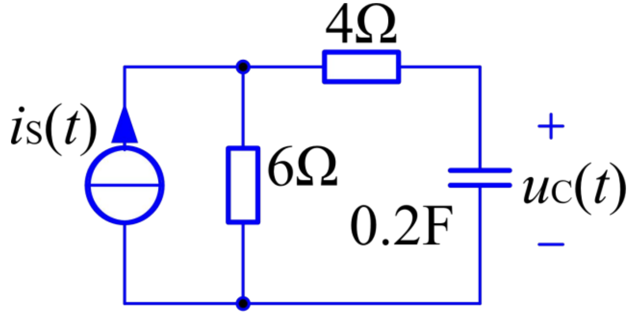
(1) $g(t)=6(1-e^{-\frac{t}{2}})\varepsilon(t)$

(2) 易得，

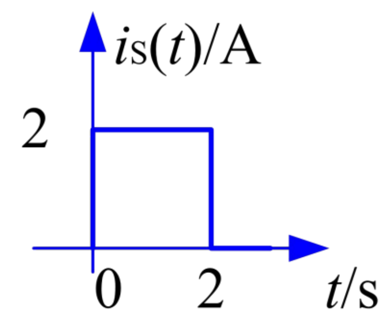
$$i_S=2\varepsilon(t)-2\varepsilon(t-2)A$$

根据线性时不变性质，可得**零状态响应**如下：

$$u_C(t)=2g(t)-2g(t-2)$$
$$=12(1-e^{-\frac{t}{2}})\varepsilon(t)-12(1-e^{-\frac{t-2}{2}})\varepsilon(t-2)$$



(a)



(b)

感谢聆听