Nombre:

Exámen de Sistemas Dinámicos y Realimentación[1].

Hace poco apareció el tema $\mathcal{X}$ que es un tanto polémico. Cómo no todo es blanco o negro, vamos a representar una opinión sobre el tema $\mathcal{X}$ cómo un número real, en donde la indiferencia se representa como un cero, a favor seria un número positivo, y en contra un número negativo. Cuanto mayor sea la norma de la opinión, más te alejas de la indiferencia.

Existe un grupo de cinco personas que interacciona en una red social, y por supuesto, todos tienen una opinión $x_i \in \mathbb{R}$ sobre el tema $\mathcal{X}$. Cada vez que alguien del grupo publica algo en la red social, se registran la cantidad de *likes* y *dislikes* que se han dado unos a otros. En la figura 1, en la última página, tienes una base de datos *normalizada* de la red social; por ejemplo, tenemos que el señor 2 ha dado dos *likes* al señor 1 y dos *dislikes* al señor 4.

Los sociólogos nos dicen que una persona varía su opinión al interaccionar con otras personas. En particular, vamos a considerar que el señor i varía su postura dependiendo de *cómo de lejos* está del señor j y en función de los *likes*/*dislikes* que se dan entre ellos. En consecuencia podemos modelar que el señor i varía su opinión con la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{x}_i = a_i x_i + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_j - x_i), \tag{1}$$

en dónde a_i son los *autolikes* (personas que se reafirman en su opinión), $\mathcal{N}_i$ es el conjunto de personas con las que interactúa el señor i, y a_{ij} es el número de *likes*(positivo) o *dislikes*(negativo) entre las personas i y j. Por ejemplo, mirando la base de datos en la figura 1 para el señor 2 tenemos que

$$\dot{x}_2 = 2(x_1 - x_2) - 2(x_4 - x_2), \tag{2}$$

y en este caso, tendríamos que el señor 2 *quiere y odia* a los señores 1 y 4 por igual.

Vamos a estudiar el comportamiento de estas personas:

1. (**0.5 puntos**) Escribe las cinco ecuaciones diferenciales que modela la dinámica de la opinión de las cinco personas en la red social de la figura 1.

2. (**1 punto**) Halla la matriz A del sistema lineal $\dot{x} = Ax$, en dónde $x \in \mathbb{R}^5$ es el vector columna con las opiniones apiladas, es decir, $x = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_5 \end{bmatrix}^T$.

3. (**1.5 puntos**) Asume que todo el mundo empieza con una opinión arbitraria. Responde de manera analítica:

   - ¿Podrías decir qué señores van a terminar siempre con la misma opinión?
   - ¿Podrías decir si todo el mundo terminará opinando positiva o negativamente?
   - ¿Podrías decir qué señor terminará siempre con una opinión más radical?

[1] Las respuestas pueden subirse al Campus Virtual en un *live script*, pdf o similar, incluyendo los códigos utilizados. Si alguien prefiere entregar las explicaciones y deducciones en papel, también puede hacerlo.

4. (**0.5 punto**) Considera que todas las personas empiezan con una opinión arbitraria $x_i(0) \in [-1, 1]$. Comprueba en simulación numérica la predicción analítica del apartado anterior.

Considera que tienes un especial interés en controlar lo que el personal opine sobre $\mathcal{X}$, y tienes que estudiar una campaña de publicidad para llevar a todas las opiniones a cualquier valor arbitrario que sirva a tu interés. Esta campaña la podemos considerar como una señal de control $u(t) \in \mathbb{R}$, en donde $|u(t)|$ puede significar la frecuencia con la que le enseñas la publicidad, $u(t) > 0$ es hablar positivamente, y $u(t) < 0$ es hablar negativamente. Cuanta mayor sea la frecuencia, más rápido cambia de opinión una persona; por ejemplo, para una persona que no interaccione con nadie tendríamos $\dot{x}_i = u$.

5. (**1.5 puntos**) Tienes la oportunidad de mostrar tu campaña $u(t)$ **por igual a dos personas** de la red social.

   - ¿A qué dos personas **NO** escogerías?
   - ¿A qué dos personas **SÍ** escogerías?

   No existe una única respuesta a cada pregunta, pero has de razonarlas convincentemente.

6. (**1.5 puntos**) Empezando con todo el mundo indiferente, es decir, $x(0) = 0$ y para las dos personas que has escogido enseñar la publicidad, diseña una campaña $u(t)$ de tal manera que en 10 días[2] todo el mundo opine lo mismo $x_i(10) = 10, i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

   - Comprueba en simulación que se alcanza el objetivo.
   - Comenta si ves algo contraintuitivo en $u(t)$, por ejemplo en los primeros días, para que todo el mundo opine positivamente finalmente con un valor de 10.

7. (**1.5 puntos**) Ponemos en marcha la campaña y queremos saber si realmente está funcionando. Para ello hemos de conocer/medir todas las opiniones. No tenemos suficientes recursos para encuestar a todo el mundo, y muy seguramente algunos no cooperarían por *privacidad*[3].

   - ¿Cuál es el mínimo número de personas a las que habría que encuestar?
   - Diseña un sistema estimador/observador Σ_{obs} tal que a partir de encuestar al número de personas que has decidido, podamos estimar las opiniones $\hat{x}(t)$ de todo el mundo.

   Comprueba que el estimador funciona con la simulación de la campaña anterior. Considera un valor arbitrario para $\hat{x}(0)$ con opiniones entre -10 y 10.

8. (**2 puntos**) Se nos ha ido de las manos, queremos volver desde el estado $x_1(10) = x_2(10) = x_3(10) = x_4(10) = x_5(10) = 10$ a la indiferencia, pero no queremos que se *note mucho*. Para ello diseña una campaña $u(t) = -K\hat{x}(t)$ siguiendo la metodología LQR sabiendo que:

[2] Considera que $\dot{x}$ se mide en *opinión/día*.

[3] Cómo si eso sirviera de algo en este tema xD

(a) Solo puedes encuestar/medir a quien(es) hayas decidido en el apartado anterior.

(b) La campaña se la muestras a las dos personas que escogiste en el apartado 5.

(c) Como no queremos que se *note mucho* la campaña, vamos a imponer que $|u(t)| < 2, \forall t$. Nos da un poco igual el valor de las opiniones en el transitorio, así que selecciona que $|x_i(t)| < 300, \forall t$.

Comprueba con una simulación la efectividad de tu campaña. ¿Cuántos días estimas que se tarda en llegar a la indiferencia sin que se note tu influencia?

Todo parecido de este ejercicio con la realidad es pura coincidencia ;).

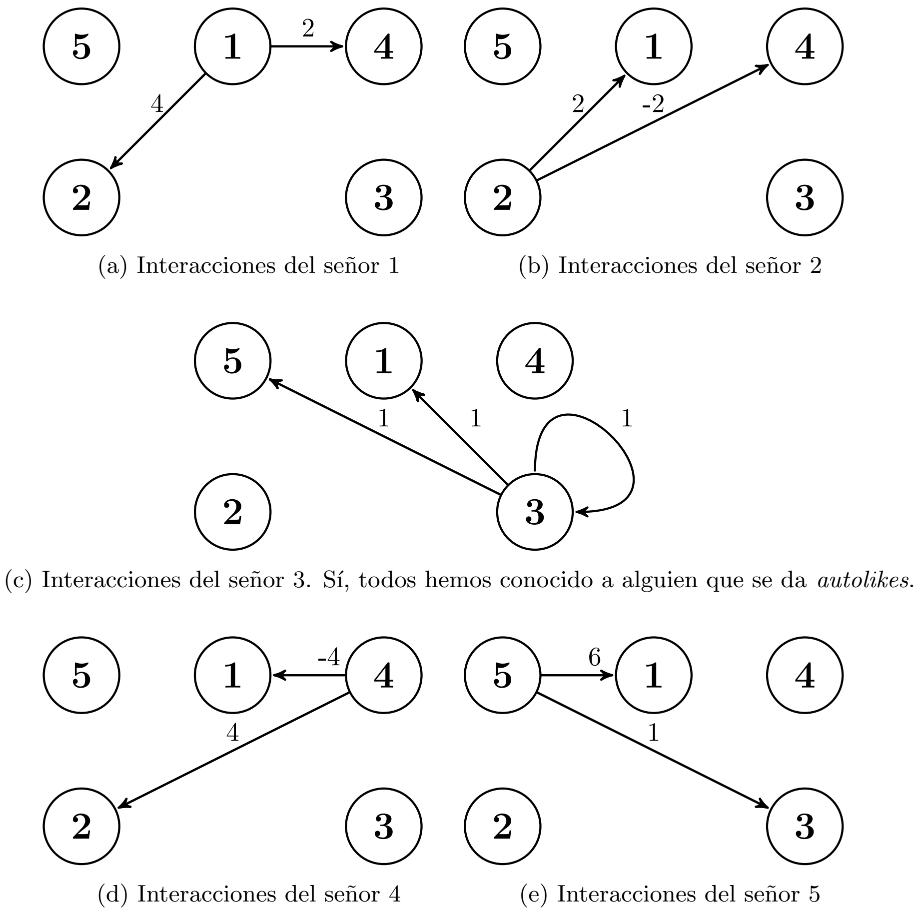

Figure 1: Registro *normalizado* de *likes* y *dislikes* entre un grupo de personas de una red social.