Exámen de Sistemas Dinámicos y Realimentación[1].

La reputada multinacional de alimentación infantil *Bebé Gordito y Feliz* (BG&F) ha montado un sistema nuevo de depósitos de almacenamiento para la línea de envasado de su producto estrella: la papilla BG&F de pescado y brócoli.

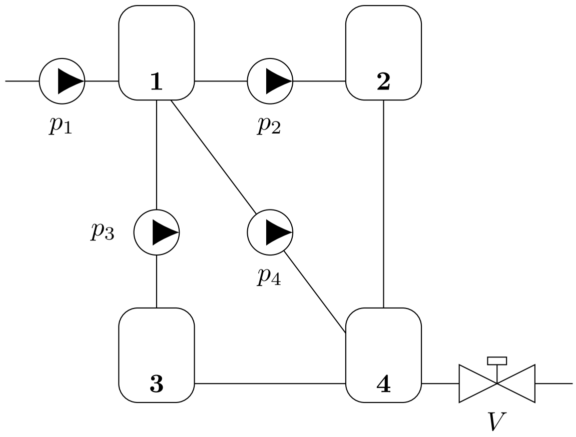

Figura 1: Sistema de depósitos de BG&F para la línea de envasado de papillas de pescado y brócoli.

El sistema está formado por cuatro depósitos iguales, conectados entre sí mediante tuberías situadas en sus bases (figura 1). Los depósitos 1, 3 y 4 cuentan con un sensor que permite conocer el nivel de papilla en su interior. Las tuberías que unen el depósito 1 con los depósitos 2, 3 y 4 cuentan además con una bomba cada una, $p_{\{2,3,4\}}$, que permite impulsar la papilla en ambas direcciones.

La papilla recién fabricada es introducida en el depósito 1 empleando la bomba de alimentación p_1; ésta puede impulsar papilla en los dos sentidos pero, cuando está parada, una válvula anti-retorno bloquea la entrada, no permitiendo el retroceso de papilla a la línea de alimentación. El hecho de que p_1 pueda bombear en los dos sentidos, permite vaciar el sistema a una línea de residuos tanto para mantenimiento del sistema como en caso de avería.

Se puede estimar la variación de nivel de los depósitos de acuerdo con la siguiente ley lineal:

$$\dot{h}_i = \sum_{j \in N_i} k(h_j - h_i) + \sum_{l \in C_i} b_l u_l, \tag{1}$$

donde h_i representa el nivel actual del depósito i, N_i es el conjunto de depósitos conectados a i y k es una constante que representa la resistencia al paso de caudal de papilla por las tuberías que unen los depósitos.

Además, u_l representa el caudal de papilla bombeado por la bomba P_l, C_i representa el conjunto de bombas conectadas al depósito i y la constante $b_l \in \{1, -1\}$ fija el sentido del caudal, positivo para el depósito situado en un extremo de una tubería y negativo para el depósito situado en el otro extremo.

El depósito 4 tiene, además, una salida a la línea de envasado, provista de una válvula todo o nada. En operación normal dicha válvula permanece abierta. Su efecto se puede modelar añadiendo un término extra a la ecuación (1) correspondiente al depósito 4,

[1] Las respuestas pueden subirse al Campus Virtual en un *live script*, pdf o similar, incluyendo los códigos utilizados. Si alguien prefiere entregar las explicaciones y deducciones en papel, también puede hacerlo.

$$\dot{h}_4 = -K_v h_4 + \sum_{j \in N_i} k(h_j - h_4) + \sum_{l \in C_4} b_l u_l, \tag{2}$$

donde $K_v \in \{0, k\}$, según la válvula esté cerrada, 0, o abierta, k.

1. (**1 punto**) Construye las matrices $A,\ B,\ C$ de un sistema lineal,

$$\begin{aligned} \dot{h} &= Ah + Bu,\ h, u \in \mathbb{R}^4 \\ y &= Ch,\ y \in \mathbb{R}^3 \end{aligned},$$

   que modele el sistema de depósitos de BG&F. Considera $k = 1$. Crea dos matrices A distintas, una para modelar la válvula V abierta y otra para la válvula V cerrada. (**Nota:** Si no sabes cómo hacerlo, pide las ecuaciones para poder realizar el resto del examen).

2. (**2 puntos**) Estudia análiticamente la estabilidad del sistema y saca conclusiones sobre el estado final de los depósitos para las dos situaciones: V abierta y V cerrada. Calcula numéricamente y representa gráficamente la evolución de la altura de los depósitos en ambas situaciones, para la condición inicial $h(0) = [3; 0; 0; 0]$. Confirma las conclusiones obtenidas analíticamente.

A partir de aquí todas las preguntas se refieren al sistema con la válvula V abierta.[2]

---

3. (**2 puntos**) Estudia la controlabilidad y observabilidad del sistema y diseña, si es posible, un sistema de control por realimentación de estados estimados mediante el método de Lyapunov, con todos los autovalores con parte real $\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq -5$.

   Obtén gráficamente la evolución de los estados a partir de unas condiciones iniciales en las que no haya ningún depósito vacío. Emplea el nivel inicial real de los estados para los que hay medida, como valor inicial del correspondiente estado estimado. Emplea un valor cero para el valor inicial del estado desconocido. ¿Qué problema presenta el método de control diseñado?¿Sabrías relacionar dicho problema con los autovalores que has obtenido mediante el método de Lyapunov?

4. (**2 puntos**) Repite el ejercicio anterior, pero emplea ahora el método de Ackerman (place) para colocar los autovalores en la posición que quieras. ¿Dónde deberías colocarlos si quieres que la bombas retengan la papilla y la descarga sea más lenta?¿Dónde si, por el contrario, quieres acelerar la descarga?

5. (**2 puntos**) Diseña un sistema de control integral que permita mantener los niveles de los cuatro depósitos en valores de consigna prefijados. Comprueba que el sistema resultante es controlable y obtén numérica y gráficamente su funcionamiento. Usa como valores de consigna: $h = [1; 2; 3; 4]$ y toma como condiciones iniciales las empleadas en los ejercicios anteriores.

6. (**1 puntos**) ¿Sería posible controlar el sistema si solo se dispusiera de dos sensores de nivel? En caso afirmativo indica en qué depósitos podrías colocarlos.

[2] Colaborar a hacer tragar a los pobres críos este tipo de porquerías, puede constituir un delito contra la infancia penado por la ley.

A_A **válvula** V **abierta,** A_C **Válvula** V **cerrada**

$$A_A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\mathbf{4} \end{pmatrix}, A_C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\mathbf{3} \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$