



Universidad Complutense de Madrid

---

## Sistemas dinámicos y realimentación

Juan Jiménez  
Héctor García de Marina

20 de septiembre de 2021



El contenido de estos apuntes está bajo licencia Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0  
<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

©Juan Jiménez

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
<b>2. Modelado de sistemas dinámicos</b>	<b>9</b>
2.1. Sistemas en el espacio de estados . . . . .	9
2.2. Ejemplos de sistemas dinámicos . . . . .	11
2.3. Simulación o soluciones numéricas del sistema $\Sigma$ . . . . .	14
2.4. Sistemas autónomos de segundo orden . . . . .	15
2.4.1. Algunos ejemplos . . . . .	16
2.4.2. Ciclos límite . . . . .	18
2.4.3. Sistemas lti <sup>1</sup> . . . . .	20
2.4.4. Bifurcaciones . . . . .	23
<b>3. Comportamiento dinámico y estabilidad</b>	<b>31</b>
3.1. Estabilidad de un sistema dinámico . . . . .	31
3.1.1. Puntos de equilibrio . . . . .	32
3.2. Estabilidad de Lyapunov . . . . .	33
3.2.1. Estabilidad de Lyapunov para sistemas autónomos . . . . .	33
3.2.2. Estabilidad asintótica global. . . . .	38
3.2.3. Interpretación geométrica del teorema de Lyapunov. . . . .	39
3.3. Principio de invarianza de LaSalle . . . . .	40
<b>4. Diseño de controladores para sistemas en el espacio de estados</b>	<b>45</b>
4.1. Seguidor de trayectorias deseadas . . . . .	45
4.1.1. Ejemplo con un sistema cinemático de segundo orden . . . . .	45
4.2. Diseño de ciclos límites para sistemas planos . . . . .	46
<b>5. Sistemas lineales</b>	<b>49</b>
5.1. Mapas lineales . . . . .	49
5.1.1. Ejercicio: Comprueba si los siguientes mapas son lineales . . . . .	49
5.2. Sistemas continuos y lineales en el espacio de estados . . . . .	49
5.2.1. Ejercicio: Escribe un sistema continuo y lineal en el espacio de estados como un diagrama de bloques entrada/salida y comprueba que es un mapa lineal. . . . .	50
5.2.2. Ejercicio: Interconecta sistemas continuos y lineales en el espacio de estados y comprueba que el sistema resultante es otro sistema continuo y lineal en el espacio de estados. . . . .	50
5.3. Solución a sistemas continuos lineales en el espacio de estados . . . . .	50
5.3.1. Ejercicio . . . . .	51

---

<sup>1</sup>Los detalles y demostraciones se incluyen en el capítulo 5.4

5.4. Solución a sistemas invariantes en el tiempo, continuos y lineales en el espacio de estados . . . . .	51
5.5. Linearización de sistemas en el espacio de estados . . . . .	53
5.5.1. Ejercicio. Linearización del péndulo invertido . . . . .	54
5.6. (Internal or Lyapunov) Stability . . . . .	55
5.6.1. Estabilidad local de sistemas linearizados . . . . .	56
5.7. Controlabilidad . . . . .	57
5.7.1. Subespacios alcanzables y controlables . . . . .	57
5.7.2. Matriz de controlabilidad para un sistema lti . . . . .	59
5.7.3. Tests de controlabilidad . . . . .	60
5.8. Estabilización de un sistema lti por realimentación de estados . . . . .	61
5.8.1. Test de Lyapunov para la estabilización de un sistema lti . . . . .	61
5.8.2. Controlador por realimentación de estados . . . . .	62
5.9. Observabilidad en sistemas lti . . . . .	62
5.9.1. Subespacio inobservable y el Gramiano de observabilidad . . . . .	62
5.9.2. Tests de observabilidad . . . . .	63
5.10. Estimación de estados en sistemas lti . . . . .	64
5.11. Estabilización de sistemas lti con realimentación a través de su salida . . . . .	65
5.12. Regulador cuadrático lineal o LQR . . . . .	65
5.13. Resumen para la estabilización de un punto en un sistema no lineal . . . . .	66
5.14. Seguimiento por parte de la salida de una consigna constante . . . . .	67
<b>6. Realimentación para el control de sistemas lineales</b>	<b>71</b>
6.1. (Internal or Lyapunov) Stability . . . . .	71
6.1.1. Estabilidad local de sistemas linearizados . . . . .	72
6.2. Controlabilidad . . . . .	73
6.2.1. Subespacios alcanzables y controlables . . . . .	73
6.2.2. Matriz de controlabilidad para un sistema lti . . . . .	75
6.2.3. Tests de controlabilidad . . . . .	76
6.3. Estabilización de un sistema lti por realimentación de estados . . . . .	77
6.3.1. Test de Lyapunov para la estabilización de un sistema lti . . . . .	77
6.3.2. Controlador por realimentación de estados . . . . .	78
6.4. Observabilidad en sistemas lti . . . . .	78
6.4.1. Subespacio inobservable y el Gramiano de observabilidad . . . . .	78
6.4.2. Tests de observabilidad . . . . .	79
6.5. Estimación de estados en sistemas lti . . . . .	80
6.6. Estabilización de sistemas lti con realimentación a través de su salida . . . . .	81
6.7. Regulador cuadrático lineal o LQR . . . . .	81
6.8. Resumen para la estabilización de un punto en un sistema no lineal . . . . .	82
6.9. Seguimiento por parte de la salida de una consigna constante . . . . .	83
<b>A. Ejemplos de código de simulación</b>	<b>87</b>
A.1. Código para el péndulo invertido . . . . .	87
A.2. diagramas de fase para sistemas 2D . . . . .	89
<b>B. Cálculo simbólico</b>	<b>91</b>

# Índice de figuras

2.1. Diagrama de bloque entrada/salida del sistema $\Sigma$ .	9
2.2. Péndulo Invertido.	11
2.3. Circuito eléctrico no lineal.	12
2.4. Esquema de un vehículo terrestre de 4 ruedas.	14
2.5. Evolución temporal y trayectoria en el plano de fases para el péndulo invertido. La condición inicial, $x_0 = [\pi/3, 0]^T$ , aparece representada con un aspa en el espacio de fases.	16
2.6. Campo vectorial definido sobre la región $\theta \in [-3\pi/2, 3\pi/2], \dot{\theta} \in [-3, 3]$ del plano de fases para el péndulo invertido.	17
2.7. diagrama de fase para el péndulo invertido, cada aspa representa una condición inicial distinta.	18
2.8. Evolución temporal y trayectoria en el plano de fases para el Oscilador de Van der Pol. La condición inicial, $x(0) = [3, -1]^T$ , aparece representada con un aspa en el espacio de fases.	19
2.9. Diagrama de Fases para el oscilador de Van der Pol. Las trayectorias obtenidas desde distintas condiciones iniciales, convergen a un ciclo límite.	19
2.10. Diagrama de fases para sistemas lineales con autovalores distintos no nulos, reales o complejos conjugados.	20
2.11. Diagrama de fases para sistemas lineales con autovalores iguales y autovalores nulos. En este último caso, figuras (c), (d) y (e) se ha marcado con un aspa el final de las simulaciones para mostrar la recta de equilibrio y el sentido del movimiento de las trayectorias.	22
2.12. Ejemplos de bifurcaciones silla-nodo y transcítica.	24
2.13. Ejemplo de bifurcación en horquilla y un caso en que no hay bifurcación.	25
2.14. Ejemplo de bifurcación de Hopf.	27
3.1. Esquema general de un sistema realimentado.	33
3.2. Curvas de nivel de $V(x) = \frac{x_1^2}{x_2^2+1} + x_2^2$ .	38
3.3. Interpretación geométrica de las condiciones de Lyapunov.	39
5.1. Conexión en serie de dos sistemas lineales y continuos en el espacio de estados.	50



# Capítulo 1

## Introducción





## Capítulo 2

# Modelado de sistemas dinámicos

### 2.1. Sistemas en el espacio de estados

Nos vamos a centrar en sistemas que puedan ser descritos por características cuantificables. A estas características las vamos a llamar **estados**, como por ejemplo, una temperatura, una velocidad, o un voltaje. Si estos estados dependen del tiempo, entonces, llamamos **señal** a la sucesión de valores de los estados en el tiempo. Uno podría interaccionar con el sistema a través de una **entrada** cuantificable, y a su vez medir información del sistema a través de una **salida** cuantificable.

Vamos a definir  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^m$  y  $u(t) \in \mathbb{R}^k$  como el vector apilado de estados, la salida, y la entrada a un sistema  $\Sigma$  respectivamente. En particular, son señales, e.g.,  $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

El sistema  $\Sigma$  es un modelo que predice el valor de los estados y la salida a lo largo del tiempo. Esta predicción incorpora la interacción de la entrada con los estados y la salida. En particular, vamos a emplear ecuaciones diferenciales como herramienta para predecir la evolución en el tiempo de los estados del sistema  $\Sigma$  como se muestra a continuación

$$\Sigma := \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ y(t) = g(t, x(t), u(t)) \end{cases}, \quad (2.1)$$

en donde  $\dot{x} := \frac{d}{dt}(x(t))$  es la notación para la derivada total con respecto del tiempo, y  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  son funciones.

Podemos representar el sistema  $\Sigma$  como un bloque con puertos de entrada y de salida como se muestra en la figura 2.1.

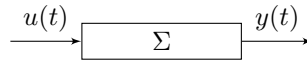


Figura 2.1: Diagrama de bloque entrada/salida del sistema  $\Sigma$ .

Dado que el sistema viene descrito por las variables de estado, con frecuencia es posible prescindir de la salida y centrar el estudio en la primera de las dos ecuaciones anteriores.

En ocasiones podemos emplear para describir un sistema ecuaciones de estado en las que no aparece explícitamente la entrada,

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (2.2)$$

En este caso, se habla de una ecuación de estado no forzada. Esto no quiere decir necesariamente que la entrada al sistema sea cero. Puede aparecer representada directamente como una función del

tiempo,  $u = \rho(t)$ , como una función (*realimentación*) de los estados  $u = \rho(x)$  o como una función de ambos  $u = \rho(t, x)$ . Un caso especialmente interesante de (2.1) se obtiene cuando  $f$  no depende explícitamente del tiempo,

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.3)$$

Se trata entonces de un sistema *autónomo* o *invariante en el tiempo*. Es decir, el comportamiento del sistema es invariante bajo traslaciones del origen de tiempos; si cambiamos la variable tiempo de  $t$  a  $t - a$ , la parte derecha de la ecuación de estado no experimenta cambio.

Para un sistema dinámico, descrito mediante variable de estados, un punto de equilibrio  $\bar{x}$  tiene la propiedad de que si el sistema se encuentra en  $\bar{x}$  en un instante de tiempo  $t_0$ , permanecerá en ese mismo punto para todo instante de tiempo posterior  $t > t_0$ . En el caso de un sistema autónomo, los puntos de equilibrio son las raíces reales de la ecuación,

$$f(x) = 0 \quad (2.4)$$

Los puntos de equilibrio juegan un papel muy importante en el estudio de los sistemas dinámicos, como tendremos ocasión de ver más adelante.

Un caso particular de sistema dinámicos los constituyen los sistemas lineales. Para ellos la ecuación 2.1 toma la forma,

$$\Sigma := \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases} \quad (2.5)$$

En el capítulo 5 se estudiarán en detalle los sistemas lineales, cuyas propiedades permiten emplear herramientas de análisis precisas y potentes para su estudio y caracterización. En el caso del resto de los sistemas, es decir todos aquellos que son no-lineales, el análisis resulta más complejo.

Una primera aproximación al estudio de los sistemas no-lineales es linealizarlos en torno a punto de trabajo y estudiar el sistema lineal resultante. Esta aproximación es muy valiosa, como veremos en la sección (5.5), sin embargo, solo es válida en las proximidades del punto de trabajo, por tanto no es posible predecir a partir de ella el comportamiento del sistema cuando nos alejamos de dicho punto. Por otro lado, los sistemas no-lineales presentan una dinámica mucho mas rica, con fenómenos que no se dan en los sistemas lineales y, por tanto no pueden describirse con un modelo linealizado del sistema no-lineal. Algunos de éstos fenómenos son:

**Múltiples puntos de equilibrio aislados.** Para un sistema lineal solo es posible encontrar un punto de equilibrio. Un sistema lineal es asintóticamente estable cuando, partiendo de valores iniciales arbitrarios, sus variables de estado se aproximan al punto de equilibrio con el tiempo.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x \rightarrow \bar{x} \quad (2.6)$$

Un sistema no lineal puede presentar más de un punto de equilibrio y aproximarse a uno u otro dependiendo de las condiciones iniciales.

**Tiempo de escape finito (*Finite escape time*).** Un sistema lineal es inestable cuando, partiendo de valores arbitrarios, sus variables de estado divergen –se van a infinito– con el tiempo.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x \rightarrow \infty \quad (2.7)$$

Es posible encontrar sistemas no-lineales inestables que se comportan de modo análogo a los lineales pero además, algunos sistemas lineales divergen, se van a infinito, en un tiempo finito.

$$\lim_{t \rightarrow t_e} x \rightarrow \infty \quad (2.8)$$

**ciclos límite.** Un sistema lineal se dice que es marginalmente estable, cuando sus variables de estado oscilan periódicamente. Sin embargo, como veremos más adelante, las circunstancias para que se de una oscilación mantenida en un sistema lineal, constituyen una condición no robusta, por lo que es en la práctica imposible que se dé en condiciones reales. Además, la amplitud de las oscilaciones depende de las condiciones iniciales del sistema.

Hay sistemas no lineales que pueden oscilar de modo estable con una amplitud y frecuencia independiente de las condiciones iniciales. A este tipo de oscilaciones se les conoce con el nombre de ciclos límite.

**Caos.** Algunos sistemas no-lineales exhiben comportamientos aún más complicados. No alcanzan un punto de equilibrio, no presentan oscilaciones periódicas, ni tampoco son inestable. A este comportamiento se le denomina caótico. Algunos sistemas presentan incluso un comportamiento aleatorio, a pesar de la naturaleza determinista de las ecuaciones diferenciales que lo definen.

Resulta por tanto necesario, buscar herramientas específicas para el análisis de los sistemas no-lineales.

## 2.2. Ejemplos de sistemas dinámicos

A continuación se presentan algunos ejemplos clásicos de sistemas dinámicos.

**Ejemplo 2.2.1** (Péndulo invertido). Vamos a derivar las funciones  $f$  y  $g$  en (2.1) para el sistema del péndulo invertido.

Primero, vamos a hallar la ecuación diferencial que describe la dinámica de una masa  $m \in \mathbb{R}_+$  en el extremo de un péndulo de longitud  $l \in \mathbb{R}_+$  tal y como se muestra en la figura 2.2. Vamos a considerar que podemos interactuar con el sistema por medio de un torque  $T \in \mathbb{R}$  en el otro extremo del péndulo, que la masa sufre un rozamiento proporcional  $b \in \mathbb{R}_+$  a su celeridad, y que podemos medir el ángulo  $\theta \in \mathbb{R}$  que forma el péndulo con la vertical.

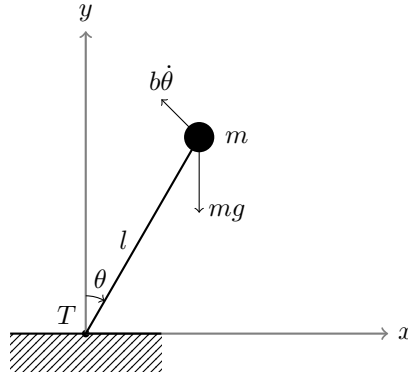


Figura 2.2: Péndulo Invertido

Define  $g = 9,8$  e  $I \in \mathbb{R}_+$  como la aceleración gravitatoria y el momento de inercia del péndulo respectivamente. Es sencillo comprobar que  $I = ml^2$ , y explotaremos que  $I\ddot{\theta}$  = suma de torques. De hecho, tenemos que considerar tres torques: 1. Torque  $T$  ejercido por nosotros en la base del péndulo; 2. Torque  $-b\dot{\theta}$  ejercido por la fricción en la masa; 3. Torque  $mgl \sin \theta$  ejercido por la atracción gravitatoria. Por lo que la ecuación diferencial que modela el comportamiento del péndulo invertido es

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{ml^2} (mgl \sin \theta - b\dot{\theta} + T). \quad (2.9)$$

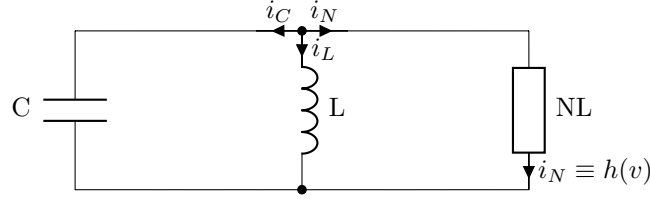


Figura 2.3: Circuito eléctrico no lineal

Parece razonable escoger  $\theta$  como uno de los estados para construir  $x(t)$  en (2.1). De hecho, la ecuación (2.9) es de segundo orden en  $\theta$ , por lo que es conveniente escoger  $\dot{\theta}$  como un estado también. Por lo tanto, definamos nuestro vector de estados como

$$x := \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

y dado que mediante el torque  $T$  es como interactuamos con el sistema, escogemos como entrada  $u(t) = T(t)$ .

Ahora estamos listos para construir las funciones  $f$  and  $g$  en (2.1) para el péndulo invertido. Atención a que  $f$  y  $g$  solo toma como argumentos los vectores de estados  $x$  y de entradas  $u$ . En el lado izquierdo de (2.1) tenemos la derivada temporal de  $x(t)$ , por lo que

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = f(x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} f_1(x(t), u(t)) \\ f_2(x(t), u(t)) \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

donde automáticamente obtenemos que  $f_1 = \dot{\theta}$ . Fijarse que la primera fila de  $f$  en (2.11), a la izquierda tenemos que  $\frac{d}{dt}\theta$ , y a la derecha tenemos que  $f_1 = \dot{\theta}$  porque  $\dot{\theta}$  es un estado o elemento de  $x$ . Desafortunadamente, no podemos decir que  $f_2 = \ddot{\theta}(t)$  porque  $\ddot{\theta}$  no es un estado o elemento de  $x$ . No obstante, tenemos que la segunda fila  $f_2$  viene dada por la ecuación (2.9). Por lo que podemos escribir  $f$  como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = f(x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \frac{1}{ml^2} (mgl \sin \theta - bl\dot{\theta} + T) \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

El cálculo de  $g$  es más sencillo en este caso. Hemos establecido al comienzo que solo podemos medir el ángulo  $\theta$ . Por lo que  $y(t) = \theta(t)$ , i.e.,

$$g(x(t), u(t)) = \theta(t). \quad (2.13)$$

✂

**Ejemplo 2.2.2** (El oscilador de Van der Pol). Se trata de un oscilador, propuesto por primera vez por Balthasar Van der Pol, cuando trabajaba en Philips, para explicar las oscilaciones observadas en tubos de vacío. Podemos obtener la ecuación del oscilador, empleando el circuito de la figura 2.3.

Donde el elemento no lineal NL, presenta una relación entre voltaje e intensidad caracterizada por la función  $h(v)$ .

El voltaje  $v$  en los tres componentes del circuito debe ser igual; además,

$$v = L \frac{di_L}{dt} \quad (2.14)$$

$$i_C = C \frac{dv}{dt} \quad (2.15)$$

$$i_N = h(v) \quad (2.16)$$

Si aplicamos la primera ley de Kirchoff al nodo superior del circuito,

$$i_C + i_L + i_N = 0 \quad (2.17)$$

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(s) ds + h(v) = 0 \quad (2.18)$$

Si derivamos (2.18) con respecto al tiempo, dividimos por  $C$  y reordenamos,

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{C} \frac{dh(v)}{dv} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot v = 0 \quad (2.19)$$

Se trata de un caso particular de la ecuación de Liénard,

$$\ddot{v} + f(v)\dot{v} + g(v) = 0 \quad (2.20)$$

Si definimos ahora,  $h(v)$ ,

$$h(v) = m\left(\frac{1}{3}v^3 - v\right) \quad (2.21)$$

$$\frac{dh}{dv} = m(v^2 - 1) \quad (2.22)$$

y sustituimos en (2.19),

$$\ddot{v} + m\frac{1}{C}(v^2 - 1)\dot{v} + \frac{1}{LC}v = 0 \quad (2.23)$$

Podemos representarla finalmente en variables de estado, tomando  $x_1 = v$  y  $x_2 = \dot{v}$ ,

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.24)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{LC}x_1 - m\frac{1}{C}(x_1^2 - 1)x_2 \quad (2.25)$$

Podemos ahora hacer un primer análisis cualitativo. El primer término a la derecha del igual en la ecuación (2.25) representa una fuerza recuperadora proporcional al desplazamiento, el segundo término, crecerá con la velocidad para  $x_1 < 1$ , alejando así al sistema del origen y representará un término disipativo para  $x_1 > 1$  acercándolo por tanto de nuevo al origen. Es por tanto esperable, que se alcance algún tipo de situación de equilibrio. Más adelante definiremos esta situación rigurosamente como un ciclo límite.  $\blacklozenge$

**Ejemplo 2.2.3** (Un vehículo de cuatro ruedas.). La figura 2.4 muestra un esquema de un vehículo terrestre de cuatro ruedas, visto desde arriba. Si consideramos que se mueve en el plano  $x, y$ , y que su velocidad instantánea  $\vec{V}$  está siempre orientada en la dirección de avance del vehículo  $\psi$  –asumimos que no derrapa, ni se mueve lateralmente–, podemos entonces definir la velocidad, en el sistema de referencia  $x, y$  como,

$$\dot{x} = V_x(t) = V \cos(\psi(t)) \quad (2.26)$$

$$\dot{y} = V_y(t) = V \sin(\psi(t)). \quad (2.27)$$

Además el vehículo girará, siempre que las ruedas delanteras no estén alineadas con las ruedas traseras, cambiando así su dirección de avance. Podemos relacionar la velocidad de giro del vehículo  $\dot{\psi}$  con el ángulo de orientación de las ruedas delanteras  $\phi$ , y la velocidad a la que avanzan  $\vec{v}'$ . podemos obtener las componentes de dicha velocidad en ejes cuerpo (paralela y perpendicular a la dirección de avance del vehículo),

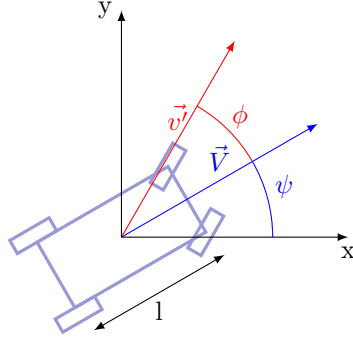


Figura 2.4: Esquema de un vehículo terrestre de 4 ruedas

$$v_P = v' \cos(\phi(t)) \quad (2.28)$$

$$v_T = v' \sin(\phi(t)) \quad (2.29)$$

Pero la rueda esta unida al vehículo así que su velocidad en la dirección de avance debe ser la misma que la del vehículo:  $v_P \equiv V$ . A partir de esta relación podemos obtener la velocidad tangencial de las ruedas como,

$$v_T = V \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} = V \tan(\phi) \quad (2.30)$$

Si tomamos como centro de giro del vehículo el centro de su eje trasero, y la batalla (distancia entre ejes) es  $l$ , obtenemos una expresión para su velocidad de giro,

$$\dot{\psi} = \frac{V}{l} \tan(\phi) \quad (2.31)$$

En resumen, podemos describir el sistema mediante tres ecuaciones de estado  $x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv \psi$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= V \cos(x_3) \\ \dot{x}_2 &= V \sin(x_3) \\ \dot{x}_3 &= \frac{V}{l} \tan(\phi) \end{cases} \quad (2.32)$$

Si consideramos  $V = cte$ , la única entrada al sistema sería el ángulo de giro de las ruedas  $u(t) = \phi(t)$ , controlando su valor, podemos hacer girar al vehículo en la dirección deseada.  $\boxtimes$

### 2.3. Simulación o soluciones numéricas del sistema $\Sigma$

Dado un punto inicial  $x(0)$ , podemos predecir o calcular numéricamente  $x(t)$ . El método de *integración de Euler* es un método numérico sencillo que puede darnos información sobre la evolución temporal de los estados y salidas de  $\Sigma$ . El siguiente algoritmo describe la integración numérica por Euler:

#### Algoritmo 2.3.1.

1. Define el paso de tiempo  $\Delta T$

2. Define  $x = x(0)$
3. Define  $y = g(x, u)$
4. Registra  $x$  and  $y$ , para poder procesarlos después si fuera necesario
5. Define  $t = 0$
6. Define un tiempo final  $t^*$
7. Mientras  $t \leq t^*$  entonces:
  - a)  $x_{nuevo} = x_{viejo} + f(x_{viejo}, u)\Delta T$
  - b)  $y_{nuevo} = g(x_{nuevo}, u)$
  - c) Representa  $x$  gráficamente
  - d) Registra  $x$  e  $y$ , para poder procesarlos más adelante si fuera necesario
  - e)  $t = t + \Delta t$
8. Representa  $x$  e  $y$  a lo largo de  $t$

Este algoritmo rinde bien cuando  $\Delta T$  es suficientemente pequeño en función de como de rápido varíe  $f$  en el tiempo. Por ahora hemos considerado  $u = 0$ , es decir, no hay control o interacción alguna con el sistema.

Existen, métodos más robustos para obtener la solución numérica de un sistema. Entre ellos, destacan los métodos de Runge-Kutta, y en particular, el uso de los llamados 'pares encajados' de dichos métodos. Describir los detalles de cálculo de dichos métodos queda fuera del alcance de estas notas. Hay muchos paquetes de software como Matlab o Python que incluyen funciones que implementan dichos métodos. En el apéndice A. Se incluyen códigos de Matlab con ejemplos y explicaciones de como construirlos.

## 2.4. Sistemas autónomos de segundo orden

Los sistema autónomos de segundo orden, son especialmente atractivos para el estudio de los fenómenos no lineales porque sus soluciones se pueden representar fácilmente en el llamado plano de fases. En general, podemos definir un sistema autónomo de segundo orden a partir de dos ecuaciones escalares, una para la derivada temporal de cada estado,

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \quad (2.33)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \quad (2.34)$$

Supongamos que conocemos una solución al sistema  $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T$ , que pasa por el punto  $x(0) = x_0$ . La solución describe una curva sobre el plano  $x_1 - x_2$  que pasa por el punto  $x_0$ . Esta curva recibe el nombre de trayectoria u órbita, desde  $x_0$ , del sistema. El plano  $x_1 - x_2$  recibe el nombre de plano de fases. Las ecuaciones (2.33) - (2.34) representan un vector tangente  $\dot{x}(t) = [\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)]$  a la trayectoria en el punto  $x(t)$ .

Además podemos considerar  $f(x) = [f_1(x), f_2(x)]$  como un campo vectorial definido sobre el plano de fases., es decir asignamos a cada punto  $x$  en el espacio de fases el vector  $f(x)$ . Es posible obtener una representación aproximada del campo vectorial asociado a un sistema si definimos una región de interés del plano de fase, por ejemplo, una región que contenga sus puntos de equilibrio. Seleccionamos un conjunto de puntos  $x$  en posiciones equiespaciadas dentro de la región de interés,

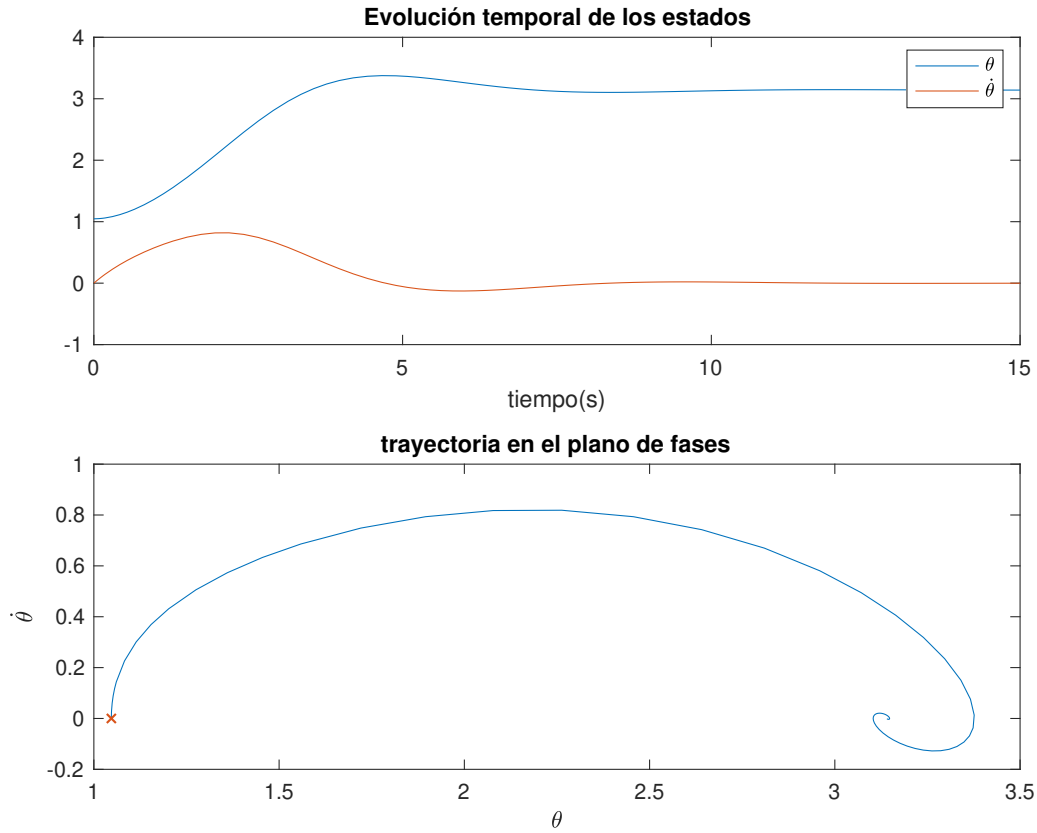


Figura 2.5: Evolución temporal y trayectoria en el plano de fases para el péndulo invertido. La condición inicial,  $x_0 = [\pi/3, 0]^T$ , aparece representada con un aspa en el espacio de fases.

y representamos en cada punto  $x$  el campo asociado  $f(x)$  mediante una flecha que apunte en la dirección de  $f(x)$  y cuya longitud sea proporcional al módulo de  $f(x)$ .

El conjunto de todas las trayectorias en el plano de fases de un sistema se denomina su diagrama de fases. de modo análogo al caso de campo vectorial, podemos obtener una representación aproximada del diagrama de fases obteniendo las trayectorias del sistemas para un conjunto suficientemente grande de condiciones iniciales en una región de interés y dibujándolas en el plano de fases.

### 2.4.1. Algunos ejemplos

Las representaciones en el plano de fases, nos ofrecen un camino sencillo para observar algunos de los fenómenos propios de los sistemas no lineales. A continuación, vamos a emplearlas con algunos de los ejemplos de la sección 2.2

**Ejemplo 2.4.1** (Diagrama de fases para el péndulo invertido A.1). Podemos obtener un sistema autónomo para el péndulo invertido, eliminando la tensión  $T$  de las ecuaciones 2.12,



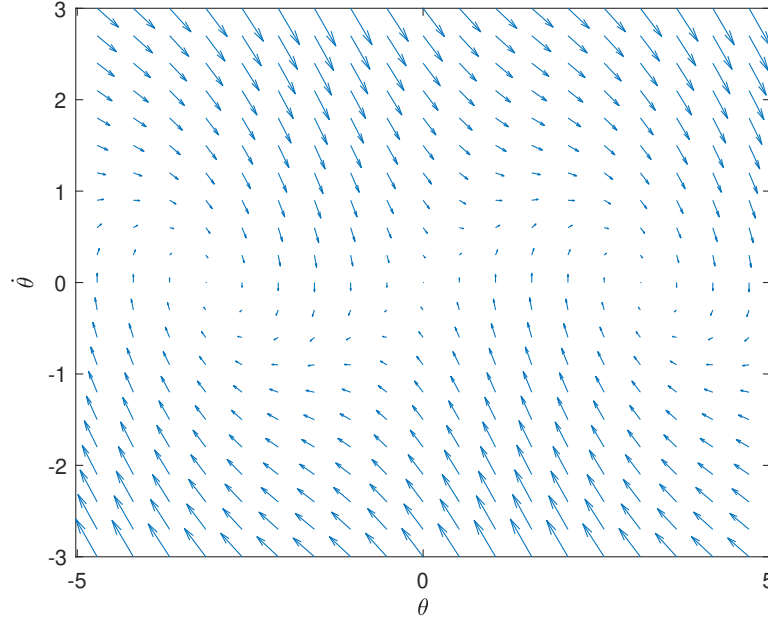


Figura 2.6: Campo vectorial definido sobre la región  $\theta \in [-3\pi/2, 3\pi/2]$ ,  $\dot{\theta} \in [-3, 3]$  del plano de fases para el péndulo invertido.

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.35)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{b}{ml} x_2 \quad (2.36)$$

donde  $x_1 = \theta$  y  $x_2 = \dot{\theta}$ . Una primera característica del sistema la obtenemos calculando los puntos de equilibrio,  $\bar{x} = [n\pi, 0]^T$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Tenemos un conjunto infinito de posibles puntos de equilibrio, correspondiente a las posiciones verticales del péndulo.

La figura 2.5 muestra una trayectoria del péndulo invertido para una realización particular;  $l = g, ml = b$  y una condición inicial  $x_0 = [\pi/3, 0]$ .

En ese caso, es fácil analizar lo que sucede, de un modo cualitativo. Las condiciones iniciales sitúan el péndulo cerca de la vertical, formando un ángulo  $\theta_0 = \pi/3$  y en reposo. El péndulo caerá y oscilará con una amplitud y velocidad cada vez menor acercándose al punto de equilibrio  $\bar{\theta} = \pi$ .

Podemos obtener más información si dibujamos aproximadamente el campo vectorial definido por las ecuaciones (2.35)-(2.36). La figura 2.6 muestra un ejemplo. La región del plano de fases  $\theta \in [-3\pi/2, 3\pi/2]$ ,  $\dot{\theta} \in [-3, 3]$ . Si consideramos el origen de cada vector como una condición inicial del problema, la flecha indicaría la dirección y magnitud del cambio en el plano de fases. Es fácil intuir, si seguimos el eje de coordenadas  $\theta$ , la presencia de tres puntos de equilibrio en la región mostrada y como el central es un puntos de equilibrio inestable, mientras que los dos laterales corresponden a puntos de equilibrio estables.

Por último podemos obtener una información aún más completa si cabe, si representamos un diagramas de fases del sistema. La figura 2.7 muestra un ejemplo en el que es posible ver los dos puntos de equilibrios estables (focos) y el punto de silla correspondiente al punto  $(0, 0)$ .

✂

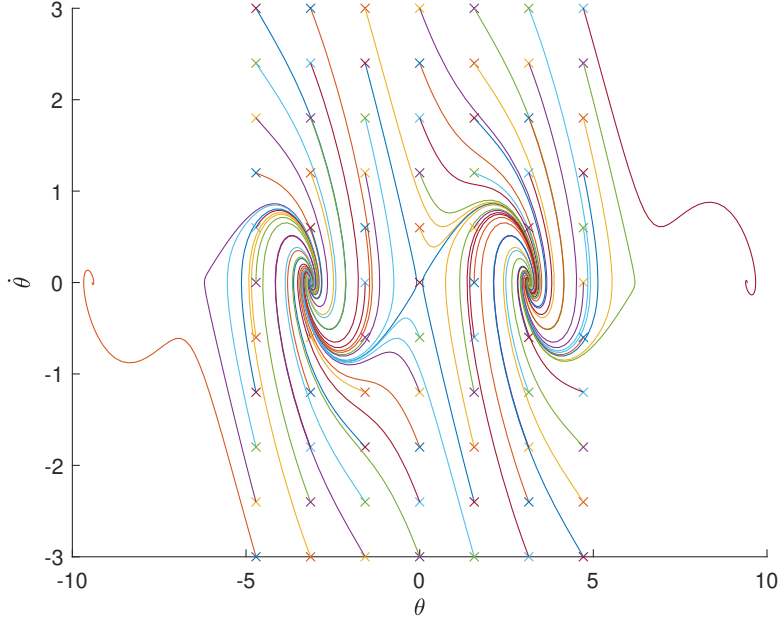


Figura 2.7: diagrama de fase para el péndulo invertido, cada aspa representa una condición inicial distinta

**Ejemplo 2.4.2** (Ciclo límite del oscilador de Van der Pol A.2.). De modo análogo a lo que hemos hecho en el ejemplo anterior, empezamos por determinar los puntos de equilibrio del sistema. Para ello igualamos a cero las ecuaciones del sistema (2.25, 2.25) y resolvemos el sistema resultante,

$$0 = x_2 \quad (2.37)$$

$$0 = -\frac{1}{LC}x_1 - m\frac{1}{C}(x_1^2 - 1)x_2 \quad (2.38)$$

La única solución es el origen  $x^* = [0, 0]^T$ . La figura 2.8, muestra la evolución temporal de las soluciones y su trayectoria en el espacio de fases para una realización particular:  $m = 0,5, L = 1, C = 1$ . Un aspecto destacable es el carácter periódico de las soluciones alcanzadas. Ambas variables presentan una oscilación mantenida, tras un primer periodo de respuesta transitoria. Si observamos la trayectoria en el espacio de fases, vemos como ésta converge desde la posición inicial  $x(0)$  a una trayectoria cerrada y estable. Se trata de un ciclo límite.

✂

### 2.4.2. Ciclos límite

Los ciclos límites son un tipo de solución específica de algunos sistemas no lineales. Se trata de una solución periódica  $x(t + T) = x(t), \forall t > 0$  para un determinado periodo  $T > 0$ .

Tienen dos características fundamentales, la primera es que corresponde a soluciones de sistemas estructuralmente estables, es decir, el sistema no cambia su comportamiento bajo pequeñas perturbaciones. La segunda es que la amplitud de la oscilación no depende de las condiciones iniciales, o dicho de otra manera, todas las condiciones iniciales convergen al o divergen del mismo ciclo límite. Podemos, por tanto, encontrar ciclos límites estables o inestables. En el caso de los

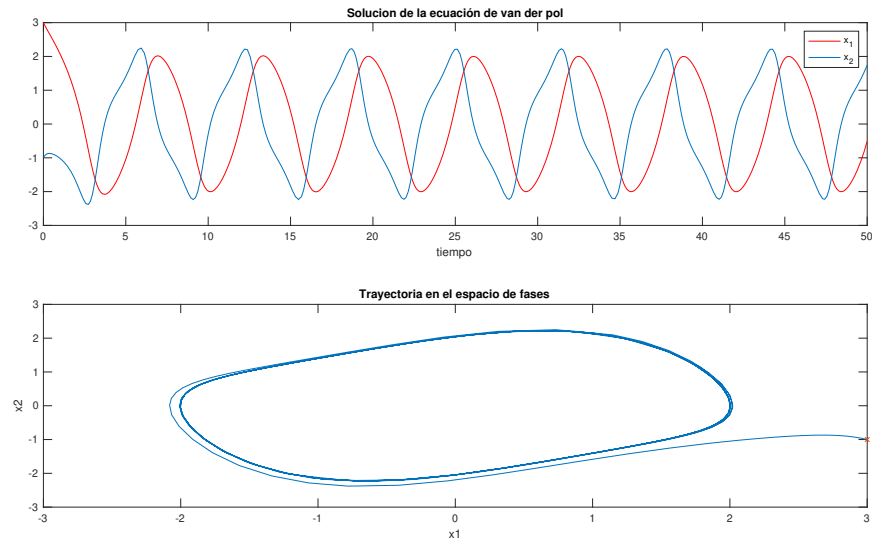


Figura 2.8: Evolución temporal y trayectoria en el plano de fases para el Oscilador de Van der Pol. La condición inicial,  $x(0) = [3, -1]^T$ , aparece representada con un aspa en el espacio de fases.

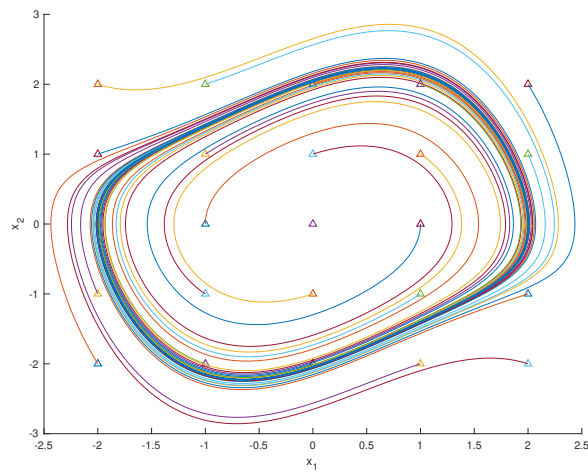


Figura 2.9: Diagrama de Fases para el oscilador de Van der Pol. Las trayectorias obtenidas desde distintas condiciones iniciales, convergen a un ciclo límite.

inestable, solo permanecen en el ciclo límite las soluciones que empiezan en él, mientras que toda solución que cuyas condiciones iniciales estén próximas al ciclo límite se alejarán de él. . Una manera sencilla de observar un ciclo límite inestable, se obtiene integrando el oscilador del Van der Pol, con el tiempo invertido  $t \rightarrow -\infty$ .

### 2.4.3. Sistemas lti<sup>1</sup>.

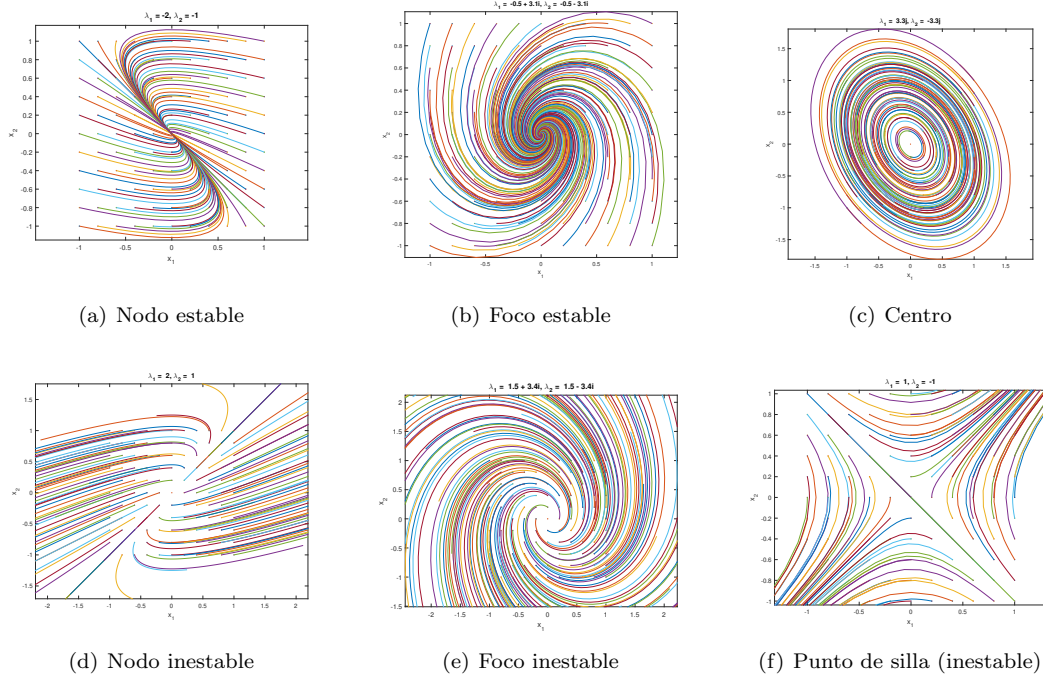


Figura 2.10: Diagrama de fases para sistemas lineales con autovalores distintos no nulos, reales o complejos conjugados

Como se ha indicado anteriormente, una primera aproximación al estudio de los sistemas dinámicos es obtener sus puntos de equilibrio, linealizar el sistema en torno a ellos, y estudiar el comportamiento del sistema linealizado. Aunque todo esto, se explicará en detalle en el tema 5.4, vamos a adelantar aquí algunos resultados, especialmente útiles para el estudio del plano de fases de sistemas no lineales. Tomando como partida las ecuaciones (2.33) - (2.34), y suponiendo que el sistema tiene un punto de equilibrio  $x^* = [x_1^*, x_2^*]$ . Podemos linealizar el sistema en torno al punto de equilibrio,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \bigg|_{x \approx x^*} \approx \begin{cases} x_1(t) = x^* + \delta x_1(t) \\ x_2(t) = x^* + \delta x_2(t) \\ \delta \dot{x}(t) = A(t) \delta x(t) \end{cases}, \quad (2.39)$$

<sup>1</sup>Los detalles y demostraciones se incluyen en el capítulo 5.4

$$A = D_x f(x^*) = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{array} \right] \bigg|_{x=x^*} \quad (2.40)$$

El comportamiento del sistema original, en la proximidades del punto de equilibrio  $x^*$ , es comparable al del sistema  $\delta \dot{x}(t) = A\delta x(t)$  en torno al origen. Se trata de un sistema autónomo lineal e invariante en el tiempo (lti), cuya solución es,

$$\delta x(t) = P \exp(J_r t) P^{-1} \delta x_0 \quad (2.41)$$

donde  $J_r$  es la forma de Jordan *real* de la matriz  $A$  y  $P = [v_1, v_2]$ ,  $J_r = P^{-1}AP$  es una matriz formada por los autovectores de  $A$ . La matriz de Jordan, en este caso bidimensional, puede tomar una de las siguientes formas,

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & k \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

donde  $k$  es 0 ó 1. Comencemos por analizar el primer caso, donde  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$ . En este caso, las soluciones del sistema corresponde a la combinación de dos exponenciales,

$$\exp \begin{bmatrix} \lambda_1 t & 0 \\ 0 & \lambda_2 t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Tenemos entonces tres posibilidades distintas. Si los dos autovalores son negativos, ambas exponenciales tienden a cero cuando el tiempos tiende a infinito. Se dice entonces que el sistema es asintóticamente (exponencialmente) estable y el origen es un nodo estable. Si ambos autovalores son positivos, las soluciones tienden a infinito, el sistema es inestable y el origen es inestable. Si uno de los autovalores es positivo y el otro negativo, es sistema resulta igualmente inestable, una solución tiende a cero y la otra a infinito. El origen es en este caso un punto de silla.

El tercer caso mostrado en la ecuación 2.42 corresponde a un par de autovalores complejos conjugados,  $\lambda_1 = \alpha + j\beta$ ,  $\lambda_2 = \alpha - j\beta$ . Las soluciones tomarían la forma,

$$\exp \begin{bmatrix} \alpha t & -\beta t \\ \beta t & \alpha t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\alpha t} \cos(\beta t) & e^{\alpha t} \sin(\beta t) \\ -e^{\alpha t} \sin(\beta t) & e^{\alpha t} \cos(\beta t) \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

De nuevo. Podemos distinguir varios casos atendiendo a la forma que tome la parte real del autovalor. Si  $\alpha < 0$ , el sistema tenderá asintóticamente a 0, describiendo una espiral. Se dice entonces que el origen es un foco atractivo. Si  $\alpha > 0$  las soluciones divergen, y se alejan del origen describiendo una espiral. Se dice entonces que el origen es un foco repulsivo. Por último, si  $\alpha = 0$ , los autovalores son números imaginarios. Las soluciones son trayectorias elípticas cerradas en torno al origen que se denomina centro. La figura 2.10 muestra diagramas de fases correspondientes a ejemplos de los casos descritos hasta ahora.

En cuanto al segundo caso, si  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ , las soluciones tomarán la forma,

$$\exp \begin{bmatrix} \lambda t & kt \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & e^{\lambda t} kt \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Cualitativamente las soluciones son parecidas a la de los nodos descritos en el caso en el que ambos autovalores son distintos: dependiendo del signo de  $\lambda$  tendremos un nodo repulsivo o un nodo atractivo. Las figuras 2.11(a) y 2.11(b) muestran un ejemplo de cada caso.

Quedan por analizar los casos en que los autovalores son nulos. Así, por ejemplo, para  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ ,

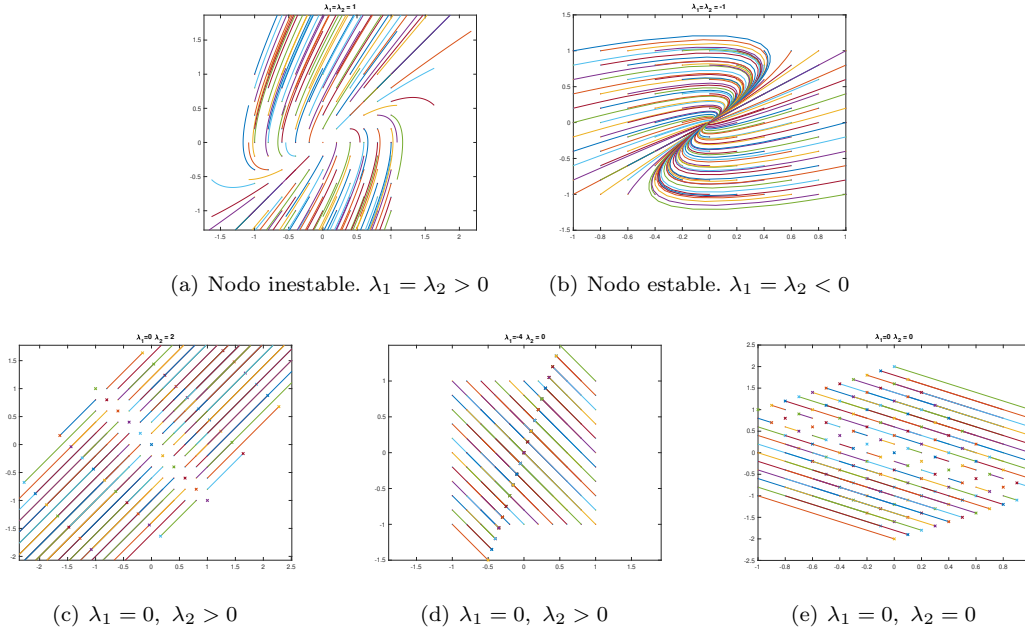


Figura 2.11: Diagrama de fases para sistemas lineales con autovalores iguales y autovalores nulos. En este último caso, figuras (c), (d) y (e) se ha marcado con un aspa el final de las simulaciones para mostrar la recta de equilibrio y el sentido del movimiento de las trayectorias.

$$\exp \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

En este caso tenemos que el autovector  $v_1$  correspondiente al autovalor  $\lambda_1 = 0$  pertenece al kernel de la matriz  $A$ ,  $Av_1 = 0 \cdot v_1 = 0$ . Tenemos por tanto, que todos puntos de la recta, definida por el vector  $v_1$  son puntos de equilibrio. Si  $\lambda_2 > 0$  todas las trayectorias serán perpendiculares a dicha recta y tenderán alejarse de ella, El sistema será inestable. Si por el contrario  $\lambda_2 < 0$  el sistema será estable y las trayectorias serán perpendiculares y terminarán en la recta definida por  $v_1$ . Las figuras 2.11(c) y 2.11(d) muestran un ejemplo de cada caso en el que es fácil observar la recta de equilibrio, señalada mediante aspás.

Por último, para el caso en que ambos autovalores son nulos. Si la matriz del sistema es la matriz cero, estamos ante un caso trivial en que todos los puntos del plano son puntos de equilibrio, En otro caso, las soluciones tomarían la forma,

$$\exp \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

De nuevo, la recta definida por el autovector  $v_1$  define los puntos de equilibrio del sistema. Las trayectorias en el espacio de las fases serán líneas rectas paralelas a dicha línea. La dirección del movimiento dependerá de las condiciones iniciales. La figura 2.11(e) muestra un ejemplo.

Como se decía al principio de esta sección, estudiar el comportamiento de los sistemas lineales cerca de su punto de equilibrio  $x = 0$ , tiene interés para los sistemas no lineales, ya que en muchos casos es posible conocer cual sera el comportamiento *local* de un sistema no lineal cerca de un punto de equilibrio, linealizando el sistema en torno a dicho punto de equilibrio. Hasta qué punto

los resultados de la linealización son válidos, va a depender en cómo de robustos son los sistemas lineales obtenidos frente a pequeñas perturbaciones.

En general, para sistemas lineales cuyos autovalores tiene parte real distinta de cero, Pequeñas perturbaciones en la estructura del sistema no cambiarán significativamente el valor de la parte real de los autovalores, por tanto conservarán su signo positivo o negativo y el sistema seguirá siendo inestable o estable. De estos sistemas se dice que son estructuralmente inestables o estructuralmente estables, y su punto de equilibrio  $x = 0$  se dice que es hiperbólico.

Si el sistema resultante de linealizar un sistema no lineal da como resultado un sistema lineal estructuralmente estable o inestable, el sistema no lineal será también inestable o estable en las proximidades del punto de equilibrio. Este resultado es generalizable a sistemas de dimensiones mayores que 2.

Para sistemas lineales cuyos autovalores tienen parte real nula, cualquier perturbación, por pequeña que sea, modificará el valor de la parte real de los autovalores, haciéndolos positivos o negativos. Como resultado, si al linealizar un sistema no lineal se obtiene como resultado un sistema autovalores con parte real negativa y/o autovalores con parte real nula, no es posible concluir nada sobre el comportamiento del sistema no lineal en las proximidades del punto de equilibrio.

#### 2.4.4. Bifurcaciones

Como hemos visto, en las secciones anteriores, el comportamiento de un sistema de segundo orden podría determinarse por las características de sus puntos de equilibrio, la existencia de ciclos límites o, en general, órbitas periódicas y por su estabilidad. Un aspecto interesante que ha salido de pasada, es el estudio de la estabilidad estructural, es decir, cuando un sistema mantiene el mismo comportamiento bajo pequeñas perturbaciones.

Supongamos que tenemos un sistema dinámico que depende de un parámetro  $\lambda$ ,

$$\dot{x} = g(x, \lambda), x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}^p, \quad (2.48)$$

donde  $g$  es una función diferenciable  $C^r$  en algún conjunto abierto en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ .

supongamos además que el sistema tiene un punto de equilibrio  $x^*$  para un determinado valor del parámetro  $\lambda = \lambda^*$ ,

$$g(x^*, \lambda^*) = 0. \quad (2.49)$$

En primer lugar, podemos estudiar la estabilidad del punto de equilibrio, linealizando el sistema en torno al punto de equilibrio y estudiando la estabilidad del sistema linealizado. En segundo lugar, podríamos plantearnos cómo afectan a la estabilidad del sistema pequeñas variaciones en el valor del parámetro  $\lambda^*$ .

Si linealizamos,

$$\delta \dot{x} = A \delta x, \quad (2.50)$$

donde ahora, el jacobiano en el punto de equilibrio depende también del parámetro  $\lambda$ ,

$$A = D_x g(x^*, \lambda^*). \quad (2.51)$$

Tendremos que si el punto de equilibrio es hiperbólico –no hay ningún autovalor de  $A$  sobre el eje imaginario– El sistema será estable o inestable según el signo de la parte real de los autovalores de  $A$ . Esto nos resuelve también la cuestión del efecto de las pequeñas variaciones de  $\lambda$ . En principio, éstas variaciones no cambiarán la naturaleza del punto de equilibrio.

Sin embargo, si la matriz  $A$  tiene autovalores en el eje imaginario, pequeños variaciones de  $\lambda$  pueden cambiar completamente el comportamiento del sistema. Dando lugar a la creación y/o

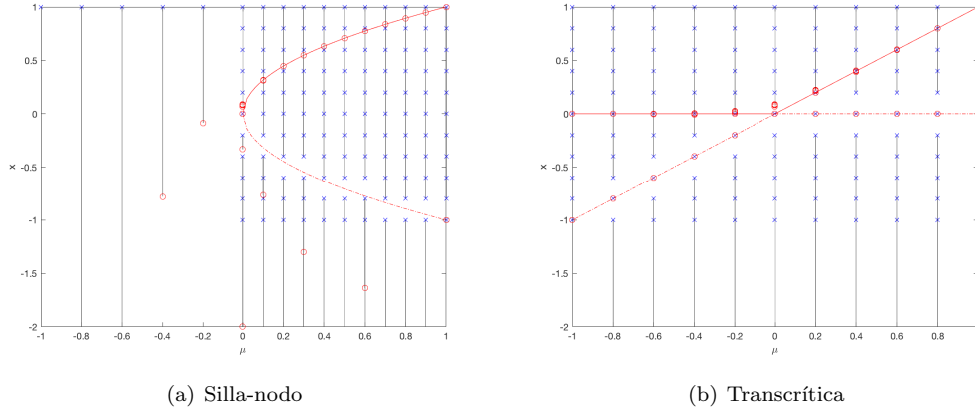


Figura 2.12: Ejemplos de bifurcaciones silla-nodo y transcrítica

destrucción de puntos de equilibrio, a la aparición de ciclos límite e incluso de comportamiento caótico.

El tema es bastante complejo, y nos vamos a limitar a ilustrarlo con algunos casos y ejemplos. Empecemos con sistemas en una dimensión en los que el sistema linealizado tiene un autovalor cero, cuando el parámetro toma el valor cero.

**Ejemplo 2.4.3** (Bifurcación silla-nodo). Consideremos el sistema,

$$\dot{x} = \mu - x^2, \quad x, \mu \in \mathbb{R},$$

Es fácil comprobar, que para  $\mu = 0$  el punto  $(x = 0)$  es el único punto de equilibrio. Si linealizamos en torno a cero, obtenemos que el autovalor correspondiente sería cero. No podemos por tanto determinar la estabilidad del sistema no lineal. Supongamos que tomamos ahora  $\mu > 0$ . Para cada valor de  $\mu$ , tendremos que los puntos de equilibrio toman valores  $x^* = (\pm\sqrt{\mu})$ . Es decir, el sistema pasaría de tener un punto de equilibrio a tener dos. Si linealizamos el sistema en torno a los puntos de equilibrio, tendremos, que para uno de los puntos  $x^* = +\sqrt{\mu}$  el sistema linealizado es asintóticamente estable:  $\delta\dot{x} = -2\sqrt{\mu}\delta x$ . Para el otro punto,  $x^* = -\sqrt{\mu}$ , el sistema es asintóticamente inestable  $\delta\dot{x} = +2\sqrt{\mu}\delta x$ . Para el caso en que  $\mu < 0$  no existen en el sistema puntos de equilibrio.

El sistema descrito muestra un ejemplo de *bifurcación*. El punto  $(x, \mu) = (0, 0)$  recibe el nombre de punto de bifurcación y el valor del parámetro  $\mu = 0$  es un valor de bifurcación. Por último la figura 2.4.3 muestra el *diagrama de bifurcación* de este sistema. En él, se ha representado la parábola  $x = \pm\sqrt{\mu}$  correspondiente a la posición de los puntos de equilibrio del sistema en función de  $\mu$ . La rama representada con línea continua, corresponde a los nodos estables, mientras que la rama representada con una línea discontinua, corresponde a los nodos inestable. Sobre el diagrama, se han representado también las trayectorias que seguiría el sistema para diferentes valores iniciales de la variable  $x$ , las aspas representan posiciones iniciales y los círculos las posiciones finales para el tiempo de simulación empleado. Es fácil ver cómo, para valores positivos de  $\mu$  las trayectorias se alejan de la rama negativa de la parábola y, en su caso, tienden a converger en la positiva que contiene los puntos de equilibrio estables. Para  $\mu = 0$  los dos nodos colapsan en un único punto de equilibrio; condiciones iniciales negativas produce trayectorias que se alejan del origen, mientras que para condiciones iniciales positivas, las trayectorias convergen al origen. Para valores de  $\mu < 0$  no hay puntos de equilibrio y  $x \rightarrow -\infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .



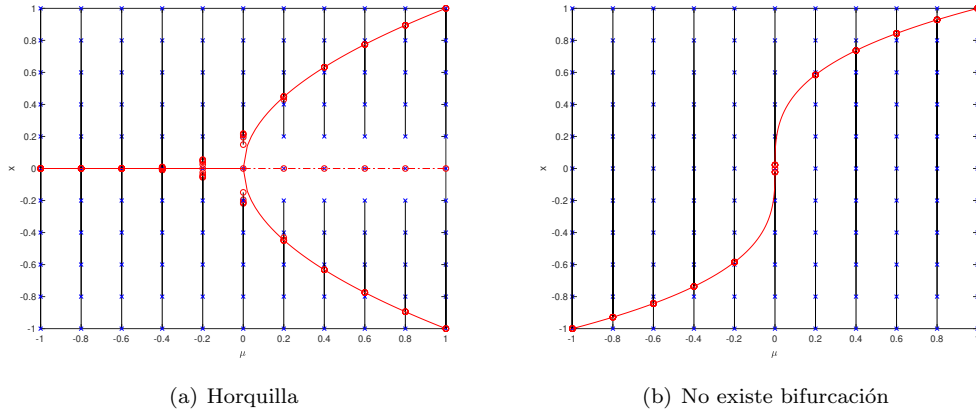


Figura 2.13: Ejemplo de bifurcación en horquilla y un caso en que no hay bifurcación

Este tipo de bifurcaciones en las que a un lado de un valor del parámetro ( $\mu$ ) no hay puntos de equilibrio y en el otro lado hay dos puntos de equilibrio, se conocen con el nombre de bifurcación silla-nodo (*saddle-node*).

✂

**Ejemplo 2.4.4** (Bifurcación transcítica). Consideremos ahora el sistema,

$$\dot{x} = \mu x - x^2, \quad x, \mu \in \mathbb{R},$$

Al igual que en el ejemplo anterior, si hacemos  $\mu = 0$ , el único punto de equilibrio es  $x = 0$  y de nuevo en este caso, el autovalor del sistema lineal vale cero. Si dejamos que  $\mu$  tome valores distintos de cero, el sistema tiene dos puntos críticos para cada valor de  $\mu$ ,  $x^* = 0$  y  $x^* = \mu$ . No es difícil comprobar que para el sistema linealizado tendremos dos situaciones distintas. Si  $\mu > 0$ , el punto de equilibrio  $x^* = \mu$  es estable y el punto de equilibrio  $x^* = 0$  es inestable. Para  $\mu < 0$  el carácter de los puntos críticos se invierte. La figura 2.4.3 muestra el diagrama de bifurcación para este sistema. Es fácil ver cómo para  $\mu < 0$  las trayectorias divergen de la recta  $x = \mu$  y convergen, en su caso, a la recta  $x = 0$ . Para  $\mu > 0$  la situación se invierte y ahora las trayectorias convergen a  $x = \mu$  y divergen de  $x = 0$ . Para  $\mu = 0$  los puntos de equilibrio colapsan en  $x = 0$ . Este tipo de bifurcación se conoce con el nombre de bifurcación transcítica

✂

**Ejemplo 2.4.5** (Bifurcación en horquilla<sup>2</sup>). Para el sistema,

$$\dot{x} = \mu x - x^3, \quad x, \mu \in \mathbb{R},$$

Se cumple de nuevo la condición de los ejemplos anteriores para  $\mu = 0$ . Para  $\mu > 0$ , se obtienen tres puntos críticos  $x^* = 0$  inestable, y  $x^* = \pm\sqrt{\mu}$ , ambos estables (compruébalo). Para  $\mu < 0$  solo tenemos un punto crítico  $x^* = 0$  que resulta ser estable. La figura 2.4.5 muestra el diagrama de bifurcación para este sistema. La interpretación es similar a la de los dos ejemplos anteriores.

✂

**Ejemplo 2.4.6** (No bifurcación). Para el sistema,

$$\dot{x} = \mu - x^3, \quad x, \mu \in \mathbb{R},$$

<sup>2</sup>en inglés: *pitchfork*, la traducción es nuestra.

Se cumple la misma condición que en los casos anteriores para  $\mu = 0$ . Es fácil comprobar que para  $\mu \neq 0$ , el sistema sigue teniendo un único punto crítico  $x^* = \sqrt[3]{\mu}$ . No hay cambio por tanto, en el número de puntos críticos, ni tampoco en el carácter del único punto crítico, que es siempre un nodo estable. Podemos afirmar que en este caso no se da una bifurcación.



Veamos por último un ejemplo del caso en que un sistema de segundo orden tiene dos autovalores imaginarios puros.

El término bifurcación no es fácil de definir. Una definición cualitativa e informal sería decir que una bifurcación para un punto de equilibrio de un sistema dinámico se produce cuando el cambio de un parámetro modifica el comportamiento del sistema en las proximidades del punto crítico.

**Ejemplo 2.4.7** (Bifurcación de Hopf). Consideremos el sistema,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2) - x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2) + x_1\end{aligned}$$

El único punto de equilibrio del sistema es  $x^* = (0, 0)$ . Si linealizamos el sistema obtenemos en torno a dicho punto, obtenemos que el jacobiano vale,

$$A = D_x f(x^*) = \begin{bmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix}$$

Que tiene autovalores  $\mu \pm j$ . Estos autovalores son imaginarios puros para  $\mu = 0$  y cruzan el eje imaginario cuando  $\mu$  pasa de negativo a positivo. Para  $\mu < 0$  el origen es un foco atractivo, para  $\mu > 0$  se convierte en un foco repulsivo. Podemos analizarlo más fácilmente si transformamos el sistema a coordenadas polares,  $x_1 = r \cos(\theta)$ ,  $x_2 = r \sin(\theta)$ ,

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \mu r - r^3 \\ \dot{\theta} &= 1\end{aligned}$$

En esta representación las variables aparecen desacopladas. El valor  $r = 0$ , corresponde con el punto crítico del sistema. Para el caso en que  $\mu > 0$ , tenemos que  $r = \sqrt{\mu}$  hace nula la ecuación  $\dot{r} = \mu r - r^3$ . Esta curva corresponde a un ciclo límite; en torno al origen de radio  $\sqrt{\mu}$ . Por tanto, para este caso, aunque el origen sea un punto inestable, el sistema converge al ciclo límite y es estable. La figura 2.14 Muestra el diagrama de bifurcación de este sistema. En este caso, el punto de equilibrio,  $x^* = (0, 0)$  coincide con el eje  $\mu$ . Para  $\mu$  negativo es atractivo y el sistema converge para cualquier condición inicial. Para  $\mu$  positivo se ha representado —junto al eje  $\mu$  que ahora representa un punto de equilibrio inestable— la forma del ciclo límite como un paraboloide. En este caso, el sistema converge, para cualquier condición inicial, a la sección del paraboloide correspondiente al valor de  $\mu$  del sistema.



Para terminar, reiterar que aquí solo se muestran algunos ejemplos de bifurcaciones. Un estudio completa del tema queda fuera de los objetivos de estos apuntes.



(a) Diagrama de bifurcación

(b)  $\mu < 0$ .(c)  $\mu > 0$ 

Figura 2.14: Ejemplo de bifurcación de Hopf

## Ejercicios

1. El modelo de Volterra-Lotka estudia la evolución de un sistema formado por dos poblaciones una de depredadores y otra de presas que conforman un ecosistema cerrado.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1 - cx_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= -bx_2 + dx_1x_2 \\ a, b, c, d &\in \mathbb{R}^+, \end{aligned}$$

donde  $x_1$  representa la población de presas;  $x_2$  la de depredadores;  $a$  la tasa de nacimiento de las presas, que es función de la cantidad de alimento que reciben;  $b$  es la tasa de defunción de los depredadores;  $c$  y  $d$  modelan la interacción entre los depredadores y las presas.

- a) Simular el modelo de Volterra-Lotka para parámetros fijos, por ejemplo  $a = b = c = d = 1$ . Emplear para ello tanto Matlab como Simulink. Emplear distintas condiciones iniciales. Obtener tanto un gráfico de la evolución temporal de los estados como el diagrama de fases.
  - b) Modificar el modelo, de modo que el parámetro  $a$  pase a ser una función periódica  $a = \frac{a_0}{2} \sin(\omega t) + \frac{a_0}{2}$ . Estudiar el efecto de la frecuencia en el modelo.
2. El modelo de Lorenz, fue propuesto en 1963 por Edward Lorenz como un modelo simplificado de convección atmosférica.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= x_1(\rho - x_3) - x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - \beta x_3 \\ \sigma, \rho, \beta &\in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Para los valores  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$ ,  $\rho = 28$  el sistema exhibe soluciones caóticas; para casi todas las condiciones iniciales el sistema converge a un conjunto invariante conocido con el nombre de Atractor de Lorentz.

- a) Utilizar tanto Matlab como Simulink para simular el modelo de Lorenz. Emplear para ello los parámetros indicados más arriba.
  - b) Comprobar mediante simulación, que para  $\sigma < 1$ , el sistema converge a su único punto de equilibrio. Para  $\sigma = 1$  el sistema sufre una bifurcación de horquilla, Obtener los puntos de equilibrio del sistema y comprobarlo.
3. La siguiente ecuación diferencial, define un modelo lineal, conocido a veces como el modelo Masa-Muelle-Amortiguador,

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F(t),$$

donde  $y$  es la posición del sistema,  $m$  representa la masa,  $c$  es un coeficiente de amortiguamiento, y  $k$  es una constante recuperadora,  $F(t)$  representa una fuerza externa. El modelo es genérico en el sentido de que reproduce el símil mecánico de sistemas de muy diverso tipo.

- a) Obtener el modelo equivalente en variable de estados, de modo que una variable de estado sea la posición del sistema  $y$  y la otra la velocidad  $\dot{y}$
- b) Simular el modelo para valores  $m = 2,5Kg$ ,  $c = 0,6Ns/m$  y  $k = 0,4N/m$ , empelando Matlab. Considerar los siguientes casos,

- c) La señal de entrada  $F$  es nula. Probar para distintos valores de las condiciones iniciales:  $y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$ ;  $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1$ ;  $y(0) = 1, \dot{y}(0) = 1$ . Representar la evolución temporal de los estado durante un intervalo de  $50s$ .
  - d) La señal de entrada es una fuerza constante de  $1N$ .
  - e) La señal de entrada es una senoide de frecuencia  $0,1rad/s$ . Representar en un mismo gráfico la evolución temporal de la señal de entrada y de la señal de salida en un intervalo de  $200s$ . ¿Qué desfase se observa entre la entrada y la salida para un tiempo mayor a  $50s$ ? ¿Está estabilizada la señal de salida?
  - f) repetir el apartado 3e), para señales sinusoidales de frecuencias,  $0,4rad/s$  y  $1rad/s$  ¿Cuánto tarda en estabilizarse la señal en estos casos? ¿Qué conclusión se puede extraer del análisis de los resultados de estos dos últimos ejercicios?
4. Empleando las ecuaciones 2.35 y 2.36 para el modelo de un péndulo invertido sin par externo,
- a) Linealizar el sistema en torno al punto de equilibrio  $\theta = \pi$ .
  - b) simular mediante matlab tanto el sistema original como el linealizado. Emplear para ello  $m = g = l = b = 1$ . Considerar como condiciones iniciales para  $X_1$  distintos ángulos cada vez más alejados de  $\pi$  y  $x_2 = 0$  en todos los casos. Representar en un mismo gráfico la evolución temporal de  $x_1$  para el sistema original y el linealizado. Discutir la validez de la aproximación lineal en función de las condiciones iniciales empleadas.
5. Dado el sistema,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) - x_1\end{aligned}$$

- a) Obtener un diagrama de fases del sistema, empleando para ello Matlab. Comprobar gráficamente que el círculo  $x_1^2 + x_2^2 = 1$  marca el límite de la región de estabilidad del punto de equilibrio del sistema  $(0,0)$ . Pista: una manera clara de obtener el resultado es integrar para un intervalo de tiempo negativo, en ese caso, el límite de estabilidad se convierte en un ciclo límite.
- b) Comprobar que el resultado de integrar el sistema para un tiempo negativo es idéntico a obtener las soluciones del sistema presentado en el ejemplo 2.4.7, tomando  $\mu = 1$ .



## Capítulo 3

# Comportamiento dinámico y estabilidad

El concepto de estabilidad y su análisis constituye unos de los aspectos claves para el estudio de los sistemas dinámicos. La estabilidad de un sistema esta estrechamente relacionada con su comportamiento dinámico y puede definirse de diversas maneras. En este capítulo nos centraremos en el análisis de los llamados puntos de equilibrio de un sistema y los estudiaremos de acuerdo con el concepto de estabilidad de Lyapunov. Además, incidiremos en otros aspectos de la estabilidad de los sistemas tales como la existencia de ciclos límite o el movimiento nominal. Empecemos pues por enunciar algunas definiciones de estabilidad.

### 3.1. Estabilidad de un sistema dinámico

Dado un sistema dinámico no forzado,

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (3.1)$$

$$y = g(t, x) \quad (3.2)$$

**Definición 3.1.1** (Estabilidad de las soluciones de un sistema dinámico). Una solución  $x(t; x_0)$  para la condición inicial  $x(0) = x_0$  se dice que es estable si  $\exists R > 0$  y  $\exists r > 0$  tal que, dada otra condición inicial  $\hat{x}_0$  se verifica,

$$\|\hat{x}_0 - x_0\| < r \Rightarrow \|x(t; \hat{x}_0) - x(t; x_0)\| < R, \forall t \geq 0 \quad (3.3)$$

En otro caso se dice que la solución es inestable ▽

**Definición 3.1.2** (Estabilidad asintótica). Una solución  $x(t; x_0)$  para el sistema 3.1 se dice que es asintóticamente estable si es estable y además  $\exists r > 0$ , tal que dada otra condición inicial  $\hat{x}_0$  se verifica,

$$\|\hat{x}_0 - x_0\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t; \hat{x}_0) - x(t; x_0)\| = 0 \quad (3.4)$$

es decir, cualquier solución con condición inicial próxima a  $x(t; x_0)$  converge a  $x(t; x_0)$  ▽

**Definición 3.1.3** (Estabilidad marginal). Una solución que es estable, pero no asintóticamente estable, se denomina marginalmente estable ▽

**Definición 3.1.4** (Estabilidad exponencial). Una solución  $x(t; x_0)$  para el sistema 3.1 se dice que es exponencialmente estable si es estable y además  $\exists r > 0$ , tal que dada otra condición inicial  $\hat{x}_0$  se verifica que existen  $\alpha > 0, \sigma > 0$ , tales que,

$$\|\hat{x}_0 - x_0\| < r \Rightarrow \|x(t; \hat{x}_0) - x(t; x_0)\| \leq \|\hat{x}_0 - x_0\| \alpha e^{-\sigma t} \quad (3.5)$$

▽

Por último indicar que cuando la estabilidad se cumple para cualquier condición inicial,  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  la solución  $x(t; x_0)$  se denomina *globalmente* estable.

### 3.1.1. Puntos de equilibrio

**Definición 3.1.5** (Punto de equilibrio). Dados un sistema dinámico definido por las ecuaciones,

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (3.6)$$

$$y = g(x, u) \quad (3.7)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  e  $y \in \mathbb{R}^l$ . Se definen como puntos de equilibrio o puntos estacionarios los valores del vector de estados  $\bar{x}$  y del vector de entradas  $\bar{u}$  para los cuales el estado y, consecuentemente, la salida del sistema permanecen constantes,

$$\dot{\bar{x}} \equiv 0 = f(\bar{x}, \bar{u}) \quad (3.8)$$

$$\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u}) \quad (3.9)$$

▽

Si el vector de estados no cambia, su derivada será cero. Por tanto, mientras no se altere el valor de la entrada, el sistema permanecerá en el mismo estado y el valor del vector de salidas permanecerá también constante.

Podemos, a partir de esta definición, obtener algunas propiedades importantes de los puntos de equilibrio:

1. Una vez que un sistema alcanza un punto de equilibrio, permanece en él indefinidamente. (Todas las derivadas temporales de las componentes del vector de estado son cero.
2. Desde el punto de vista del control de sistemas, los puntos de equilibrio juegan un papel importante ya que representan condiciones de operación constante.
3. Un sistema dinámico puede tener uno o más puntos de equilibrio, o no tener ninguno.

**Sistemas autónomos.** Para simplificar el estudio de la estabilidad, podemos empezar por considerar el casos de sistemas autónomos con entrada nula  $u = 0$ ,  $\forall t$ . La salida evoluciona a partir de un estado inicial  $x_0 \equiv x(t_0)$ ,

$$\dot{x} = f(x) \quad (3.10)$$

$$y = g(x) \quad (3.11)$$



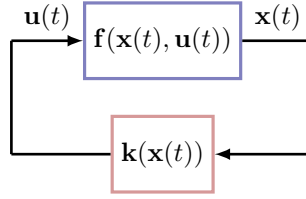


Figura 3.1: Esquema general de un sistema realimentado

**Sistemas realimentados.** Del mismo modo, podemos considerar sistemas en los que la entrada es una función directa del valor de los estados;  $\mathbf{u} = \mathbf{k}(\mathbf{x})$ . Hablaremos entonces de un *sistema realimentado*. A efectos de análisis de la estabilidad del sistema, no hay diferencia entre un sistema realimentado y un sistema autónomo,

$$\dot{x} = f(x, k(x)) = \bar{f}(x) \quad (3.12)$$

$$y = g(x, k(x)) = \bar{g}(x) \quad (3.13)$$

El nombre de sistema realimentado, proviene de considerar que se están *realimentando* los estados en la entrada del sistema. El concepto de realimentación constituye uno de los pilares de los sistemas de control. La figura 3.1, muestra esquemáticamente este concepto.

## 3.2. Estabilidad de Lyapunov

En esta sección vamos a centrarnos en el estudio de la estabilidad de los puntos de equilibrio.

Habitualmente, cuando se trata de la estabilidad de los puntos de equilibrio se suele hablar de estabilidad en el *sentido* de Lyapunov. Aleksandr Mikhailovich Lyapunov fue un matemático ruso, de finales del siglo XIX, que estableció los fundamentos de la teoría de la estabilidad que ahora lleva su nombre.

Un punto de equilibrio de un sistema dinámico es *estable* si toda solución que comienzan cerca del punto de equilibrio permanece cercana al punto de equilibrio; en otro caso, el punto de equilibrio es inestable. Es *asintóticamente estable* si toda solución que empieza próxima al punto de equilibrio no solo permanecen cerca del punto de equilibrio sino que tienden a él cuando el tiempo tiende a infinito.

Podemos relacionar directamente la estabilidad de un punto de equilibrio, con la estabilidad de las trayectorias de un sistema lineal definida en (3.1.1), si consideramos un punto de equilibrio como una solución del sistema dinámico, cuya condición inicial es el propio punto de equilibrio:  $x(t; \bar{x}) = \bar{x}$ .

### 3.2.1. Estabilidad de Lyapunov para sistemas autónomos

Consideremos un sistema autónomo genérico,

$$\dot{x} = f(x), \quad (3.14)$$

donde  $f(x) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función (localmente) lipschitziana desde un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^n$ . Supongamos además que  $\bar{x} \in D$  es un punto de equilibrio; es decir,  $f(\bar{x}) = 0$ . Lo que buscamos es un método para caracterizar el tipo de estabilidad de  $\bar{x}$ . En lo que sigue, y sin pérdida de generalidad, consideramos que el punto de equilibrio es el origen de coordenadas  $\bar{x} = 0$ <sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Siempre es posible hacer un cambio de coordenadas de modo que si  $\bar{x} \neq 0$ ,  $z = x - \bar{x}$ ;  $\dot{z} = \dot{x} = f(x + \bar{x}) := g(z)$ , donde  $g(0) = 0$ .

**Definición 3.2.1** (Definición). (Estabilidad de Lyapunov, para un punto de equilibrio) El punto de equilibrio  $x = 0$  del sistema 3.14 es:

- estable  $\forall \epsilon > 0$  que cumpla:

$$\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0$$

- Es inestable si no es estable.
- Es asintóticamente estable si es estable y además se puede elegir  $\delta$  de modo que,

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

▽

En 1892 Lyapunov propuso un método para analizar la estabilidad de un punto de equilibrio, basado en el análisis una función  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ , continua y diferenciable en un entorno  $D \subset \mathbb{R}^n$ . En concreto, el método analiza la variación de la función  $V$  a lo largo de las *trayectorias* del sistema cuya estabilidad se quiere analizar, Podemos representar dicha variación empleando la derivada temporal de la función  $V$

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=0}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) \quad (3.15)$$

Es interesante hacer notar que, lógicamente,  $\dot{V}$  depende del sistema que se desea analizar y que si  $\phi(t; x)$  es una solución del sistema 3.14, que empieza en el estado inicial  $x$ , para  $t = 0$  Entonces,

$$\dot{V}(x) = \left. \frac{d}{dt} V(\phi(t; x)) \right|_{t=0}, \quad (3.16)$$

Por tanto, si  $\dot{V}(x)$  es negativa,  $V$  decrecerá a lo largo de la solución del sistema 3.14.

**Teorema 3.2.1.** Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio para el sistema 3.14 y  $D \subset \mathbb{R}^n$  un dominio que contiene a  $x = 0$ . Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y diferenciable tal que,

$$V(0) = 0 \text{ y } V(x) > 0 \text{ en } D - \{0\}, \quad (3.17)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ en } D, \quad (3.18)$$

entonces  $x = 0$  es estable de forma local. Además, si

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ en } D - \{0\}, \quad (3.19)$$

Entonces  $x(0)$  es asintóticamente estable de forma local.

*Demostración.* Dado  $\epsilon > 0$ , elegimos  $r \in (0, \epsilon]$  tal que,

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\} \subset D.$$

Sea  $\alpha = \min_{\|x\|=r} V(x)$ . Donde,  $\alpha > 0$  de acuerdo con 3.17. Tomamos ahora  $\beta \in (0, \alpha)$  y construimos un nuevo dominio de modo que,

$$\Omega_\beta = \{x \in B_r \mid V(x) \leq \beta\}$$

Pero entonces  $\Omega_\beta$  está en el interior de  $B_r$ . Si no fuera así, sería posible encontrar un  $p \in \Omega_\alpha$  que estaría situado en la frontera  $B_r$ . Pero en este punto  $V(p) \geq \alpha > \beta$ , lo que estaría en contradicción con la definición de  $\Omega_\beta$ .

El conjunto  $\Omega_\beta$  tiene la propiedad, de que cualquier trayectoria del sistema que empiece en  $\Omega_\beta$  en  $t = 0$  permanecerá en  $\Omega_\beta, \forall t \geq 0$ ; ya que, de acuerdo con 3.18

$$\dot{V} \leq 0 \Rightarrow V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \beta, \forall t \geq 0.$$

Como  $V(x)$  es continua y  $V(0) = 0$ ,

$$\exists \delta > 0 \mid \|x\| \leq \delta \Rightarrow V(x) < \beta$$

lo que implica que,

$$B_\delta \subset \Omega_\beta \subset B_r$$

y

$$x \in B_\delta \Rightarrow x(0) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in B_r,$$

por tanto,

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < r \leq \epsilon, \quad t \geq 0$$

Lo cual demuestra que el punto  $x = 0$  es estable (ver definición: 3.2.1).

Si además suponemos que se cumple 3.19, para demostrar que el sistema es asintóticamente estable, debemos probar que  $x \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ ; Condición que podemos reformular como,  $\forall a > 0, \exists T > 0 \mid \|x\| < a \quad \forall t > T$ . Pero, si repetimos nuestro razonamiento anterior, dato un valor  $a > 0$  siempre podremos encontrar un  $b > 0$  para el que se cumpla que  $\Omega_b \subset B_a$ . Por tanto, es suficiente probar que  $V$  alcanza el valor 0 si nos movemos a lo largo de las trayectorias del sistema,  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = 0$ . Sabemos que  $V(x(t))$  es monótona decreciente a lo largo de las trayectorias, y que está acotada inferiormente por cero.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = c \geq 0 \quad (3.20)$$

Debemos demostrar que, si se cumple 3.19,  $c = 0$ . Vamos a demostrarlo por contradicción. Supongamos que  $c > 0$ . Por continuidad de la función  $V(x)$ ,  $\exists d > 0 \mid B_d \subset \Omega_c$  pero entonces el límite  $V(x(t)) \rightarrow c > 0$  implica que las trayectorias  $x(t)$  se quedan fuera de la bola  $B_d, \forall t \geq 0$ . Si fijamos un entorno  $d \leq \|x\| \leq r$  exterior a  $B_b$ ,  $\dot{V}(x)$  deberá alcanzar un valor máximo,  $-\gamma = \max_{d \leq \|x\| \leq r} \dot{V}(x)$ . Además, por 3.19  $-\gamma < 0$ . Si integramos  $\dot{V}$ ,

$$V(x(t)) = V(x(0)) + \int_0^t \dot{V}(x(\tau)) d\tau \leq V(x(0)) - \gamma t$$

Pero la expresión a la derecha del menor o igual, terminará por hacerse negativa, por lo que  $c$  no puede ser mayor que 0.  $\square$

Algunas observaciones:

- Una función continua y diferenciable  $V(x)$  que cumple las condiciones 3.17 y 3.18 recibe el nombre de función de Lyapunov.
- La derivada  $\dot{V}$ , definida en la ecuación (3.15) recibe el nombre de derivada de Lyapunov o derivada de Lie.
- Una función  $V(x)$  que satisface  $V(0) = 0$  y  $V(x) > 0$  para  $x \neq 0$  en  $D$ , (3.17), se dice que es definida positiva en  $D$ . Si la solo satisface  $V(x) \geq 0$  para  $x \neq 0$  en  $D$ , se dice que es semidefinida positiva en  $D$ .

- Una función que cumple que  $-V(x)$  es definida positiva/semidefinida positiva en  $D$ , se dice que es definida negativa/semidefinida negativa en  $D$ . Podríamos por tanto reescribir el teorema 3.2.1 diciendo que el origen es un punto de equilibrio estable, para un sistema dinámico si existe una función diferenciable definida positiva  $V(x)$  tal que  $\dot{V}(x)$  es semidefinida negativa, y es asintóticamente estable si  $\dot{V}(x)$  es definida negativa.
- El teorema de Lyapunov puede aplicarse a un sistema siempre que encontremos una función  $V(x)$  que satisfaga las condiciones del teorema con independencia de que conozcamos o no la solución del sistema.
- El teorema 3.2.1 aporta condiciones suficientes para la estabilidad de un sistema; el hecho de no ser capaz de encontrar una función de Lyapunov para un sistema dado, no implica necesariamente que este sea inestable. Solo muestra que no se puede establecer la estabilidad del sistema mediante la función elegida.
- Además, no es constructivo; indica que si existe una función de Lyapunov para el sistema, éste es estable, pero no indica cómo construir dicha función.

El hecho de que no exista un método sistemático de determinar una función de Lyapunov para un sistema, hace que sea preciso en muchos casos probar con funciones 'candidatas' y comprobar si cumplen las condiciones del teorema. Como idea general, en sistemas mecánicos y eléctricos una buena función candidata suele ser la energía del sistema. Una clase general de funciones para las que es fácil comprobar si son definidas positivas o no, lo constituyen las funciones cuadráticas,

$$V(x) = x^T P x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} x_i x_j \quad (3.21)$$

Donde  $P$  es una matriz simétrica.  $V(x)$  es entonces definida (semidefinida) positiva si todos los autovalores de  $P$  son positivos (no negativos) o, lo que es equivalente, si todos los menores principales de  $P$  son positivos.

**Ejemplo 3.2.1** (El péndulo invertido). Volvamos de nuevo al ejemplo del péndulo invertido. Tomamos como punto de partida las ecuaciones (2.35), (2.36) propuestas en el capítulo anterior,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{b}{ml} x_2 \end{aligned}$$

No tiene demasiado sentido estudiar la estabilidad del punto  $(0, 0)$ , sabemos que no es estable y por tanto será imposible encontrar para él una función de Lyapunov válida. Podemos probar con el punto  $(\pi, 0)$  que sabemos que sí es estable. Para poder aplicar el método de Lyapunov necesitamos desplazar el punto de equilibrio al origen;  $z_1 = x_1 - \pi$ ,  $z_2 = x_2$ . Con lo que las ecuaciones del sistema quedan,

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\frac{g}{l} \sin z_1 - \frac{b}{ml} z_2 \end{aligned}$$

Podemos emplear como función tentativa de Lyapunov la "energía" del sistema,

$$V(x) = \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{g}{l} (1 - \cos(z_1))$$

Donde el término correspondiente a la “energía potencial” se ha obtenido integrando el par de fuerza debido a la gravedad,

$$-\int_0^{z_1} -\frac{g}{l} \sin(\zeta_1) d\zeta_1 = \frac{g}{l} (1 - \cos(z_1))$$

Calculamos ahora la derivada de Lee para el péndulo invertido y la función elegida  $V$ ,

$$\dot{V} = \nabla V(x) \cdot f(x) = \begin{bmatrix} \frac{g}{l} \sin(z_1) & z_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{g}{l} \sin(z_1) - \frac{b}{ml} z_2 \end{bmatrix} = -\frac{b}{lm} z_2^2$$

Es fácil comprobar que  $\dot{V}(z)$  es una función semidefinida negativa,  $\dot{V}(z) = 0$  a lo largo de todo el eje  $z_2 = 0$ , con independencia del valor que tome  $x_1$ , por tanto solo podemos afirmar que el punto de equilibrio  $z = (0, 0) \rightarrow x = (\pi, 0)$  es estable. Sin embargo, si miramos el diagrama de fase de la figura 2.7 observamos que el sistema es asintóticamente estable. La función de Lyapunov elegida, no nos permite comprobarlo.

Podemos probar a modificar nuestra función de Lyapunov, sustituyendo la expresión de la energía cinética, por una forma cuadrática sobre ambas variables de estado:

$$V(z) = \frac{1}{2} z^T P z + \frac{g}{l} (1 - \cos(z_1))$$

Donde,

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix},$$

es una matriz simétrica definida positiva. Si calculamos ahora la derivada de Lee,

$$\dot{V} = \left( p_{12} - \frac{b}{lm} p_{22} \right) z_2^2 + \left( p_{11} - \frac{b}{lm} p_{12} \right) z_1 z_2 + (1 - p_{22}) \frac{g}{l} z_2 \sin(z_1) + p_{12} \frac{g}{l} z_1 \sin(z_1)$$

Podemos aprovechar la libertad que nos da poder elegir los elementos de  $P$  para eliminar los términos cruzados de la derivada de Lee, que contribuyen a que quede indefinido el signo. Si hacemos  $p_{11} = \frac{b}{lm} p_{12}$  y  $p_{22} = 1$ ,

$$\dot{V} = \left( p_{12} - \frac{b}{lm} \right) z_2^2 - p_{12} \frac{g}{l} z_1 \sin(z_1)$$

Necesitamos imponer condiciones adicionales para asegurar que la matriz  $P$  es definida positiva. Necesitamos que  $p_{11} > 0$  y que  $\det(P) > 0$ , si sustituimos por los valores que ya hemos elegido,

$$P = \begin{bmatrix} \frac{b}{lm} p_{12} & p_{12} \\ p_{12} & 1 \end{bmatrix}, \quad \det(p) = p_{12} \frac{b - lm p_{12}}{lm}$$

Debemos, por tanto, tomar  $p_{12}$  en el intervalo,  $0 < p_{12} < \frac{b}{lm}$ . Si elegimos por ejemplo  $p_{12} = \frac{b}{2lm}$ , obtenemos para la derivada de Lee,

$$\dot{V} = -\frac{b}{2lm} z_2^2 - \frac{bg}{2l^2 m} z_1 \sin(z_1)$$

Si tomamos un intervalo  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| < \pi\}$ , la derivada de Lee es siempre negativa y, por tanto, podemos concluir que el origen es asintóticamente estable. Es interesante remarcar en este punto, que el teorema nos asegura la estabilidad asintótica del origen, pero no nos dice nada de su dominio de atracción.

✱

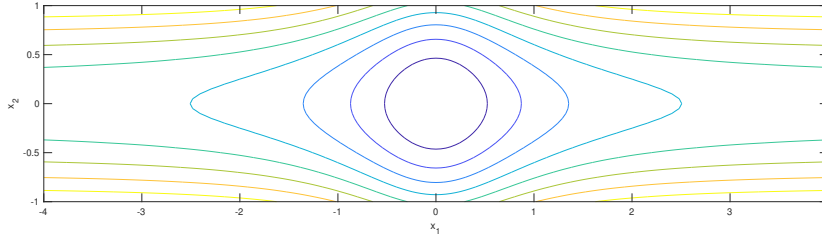


Figura 3.2: Curvas de nivel de  $V(x) = \frac{x_1^2}{x_2^2+1} + x_2^2$

### 3.2.2. Estabilidad asintótica global.

El teorema 3.2.1, establece la estabilidad asintótica del origen de coordenadas, para un sistema, en un entorno local incluido en  $D$ , si  $\dot{V}(x) < 0$ . Una pregunta inmediata que podemos plantearnos es, a qué distancia puede estar del origen una trayectoria sin dejar de ser asintóticamente estable. Es decir, que la trayectoria se aproxime al origen cuando  $t$  tiende a  $\infty$ . Esto nos lleva a la definición de la región de atracción de un punto fijo, en particular, del origen.

**Definición 3.2.2** (Dominio de atracción.). Sea  $\phi(t; x)$  la solución de el sistema (3.14) con condición inicial  $x$  en el instante  $t = 0$  y supongamos además que el sistema tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable,  $\bar{x}$ . Se define como región de estabilidad asintótica, dominio de atracción o cuenca de atracción de dicho punto al conjunto de todos los puntos  $\{x\}$  tales que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t; x) = \bar{x} \quad (3.22)$$

▽

Determinar con exactitud la cuenca de atracción de un sistema puede resultar una tarea muy difícil o incluso imposible. Sin embargo el teorema de Lyapunov nos permite obtener una aproximación de la región de estabilidad asintótica; si tenemos una función de Lyapunov que cumple con las condiciones de estabilidad asintótica en un dominio  $D$ , y si  $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n | V(x) \leq C\}$  Esta acotada e incluida en  $D$ , Entonces toda trayectoria que empieza en  $\Omega_c$  permanece en  $\Omega_c$  y, además se acerca al origen asintóticamente. Por tanto, podemos considerar  $\Omega_c$  como una estima de la cuenca de atracción. Por supuesto, dicha estima puede resultar muy conservadora y, por tanto, puede ser mucho menor que la cuenca de atracción real.

Una segunda pregunta interesante sería determinar bajo qué condiciones un punto de equilibrio es *asintóticamente estable de forma global*. Es decir: cuándo la cuenca de atracción de un punto de equilibrio asintóticamente estable es todo  $\mathbb{R}^n$ . Para ello necesitamos imponer en primer lugar que el dominio en que se cumplen las condiciones de la función  $V(x)$  sea  $D = \mathbb{R}^n$ . Además, hay que imponer que  $V(x)$  sea una función no acotada radialmente:  $V(x) \rightarrow \infty$  cuando  $\|x\| \rightarrow \infty$ .

**Teorema 3.2.2.** Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio para el sistema 3.17. Sea  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y diferenciable tal que:

$$V(0) = 0 \text{ y } V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \quad (3.23)$$

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty \quad (3.24)$$

$$\dot{V} < 0, \forall x \neq 0 \quad (3.25)$$

Entonces  $x = 0$  es asintóticamente estable de forma global.

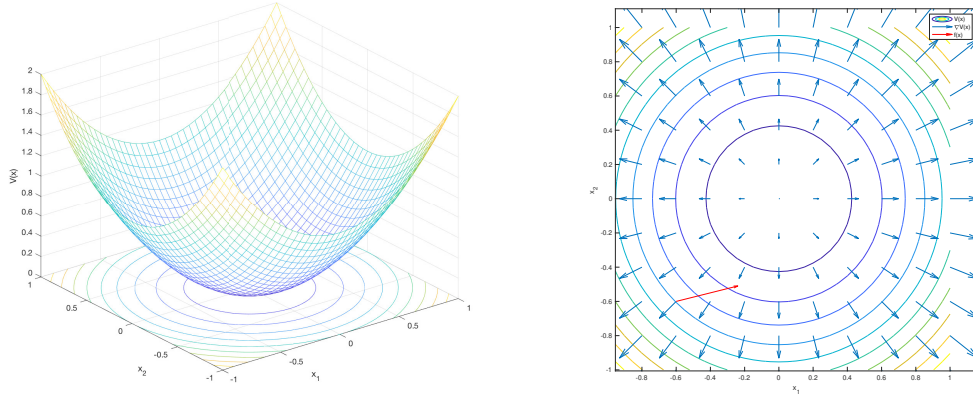
(a) Función  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ .(b) Curvas de nivel de  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ , gradiente  $\nabla V(x)$  (flechas azules) y valor de  $\dot{x} = f(x)$  en un punto (flecha roja).

Figura 3.3: Interpretación geométrica de las condiciones de Lyapunov.

*Demostración.* Dado un punto cualquiera  $p \in \mathbb{R}^n$ , sea  $c = V(p)$ . La condición 3.24 implica que  $\forall c > 0, \exists r > 0, |V(x) > c$  siempre que  $\|x\| > r$ . Por tanto  $\Omega_c \subset B_r$ , y por tanto está acotado. El resto de la prueba es igual que la del teorema 3.2.1.  $\square$

El teorema 3.2.2 se conoce con el nombre de teorema de Barbashin-Krasovskii. Es fácil observar que si un sistema posee un punto de equilibrio  $\bar{x}_1$  asintóticamente estable de forma global, dicho punto de equilibrio es único. Efectivamente si el sistema tuviera un segundo punto de equilibrio  $\bar{x}_2$  cualquier trayectoria que empezara en  $\bar{x}_2$  permanecería en dicho punto  $\forall t \geq 0$ , contradiciendo por tanto la definición de equilibrio global para  $\bar{x}_1$ .

Es importante remarcar la importancia de que  $V(x)$  sea una función no acotada radialmente. La razón está en que para probar tanto el teorema de Lyapunov como el de Barbashin-Krasovskii necesitamos poder construir un entorno acotado, incluido en una bola  $B_r$  en torno al origen,  $\Omega_e$  en el que la función  $V(x) \leq e$ . El problema es que ahora necesitamos encontrar dicho entorno, cualquiera que sea  $x$ . Eso supone que  $V(x)$  debe crecer en cualquier dirección que escojamos para alejarnos del origen  $\|x\| \rightarrow \infty$ . Veamos un ejemplo de una función que no lo hace,

$$V(x) = \frac{x_1^2}{x_1^2 + 1} + x_2^2$$

La función cumple que  $V(0) = 0$  y  $V(x) > 0 \forall x > 0$ . Sin embargo, es fácil ver que, si nos alejamos del origen a lo largo del eje  $(x_1, 0)$ ,

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty, x_2 = 0} \frac{x_1^2}{x_1^2 + 1} + x_2^2 = 1 \quad (3.26)$$

Por tanto, como muestra la figura 3.2, es imposible encontrar una curva de nivel cerrada, para la que  $V(x) > 1$ , y por tanto no podemos emplear la función fuera de la bola  $B_r(x) \mid \|x\| \leq 1$ .

### 3.2.3. Interpretación geométrica del teorema de Lyapunov.

La figura 3.3 muestra un caso sencillo de las condiciones de Lyapunov. Supongamos que elegimos la función, definida positiva,  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$  como candidata de Lyapunov para un sistema genérico

$\dot{x} = f(x)$ . Para que el sistema sea estable, debe cumplirse que la derivada de Lie, ecuación (3.15), sea menor o igual que cero. Pero esta derivada es en cada punto del espacio de fases el producto escalar del gradiente de  $V$  por el valor de campo vectorial  $f$  en dicho punto. Si dicho producto es negativo supone que el ángulo entre el gradiente y el valor del campo en dicho punto es mayor de 90, tal y como se muestra en la figura. Por tanto, la dirección del campo, lleva al sistema a acercarse al origen. Si el valor del producto es cero, indica que la dirección del campo es tangente a la curva de nivel de  $V(x)$  en el punto. Si en una región cerrada en torno al origen  $\dot{V} \leq 0$  el sistema, una vez que entra en dicha región, no volverá a salir nunca más. Podríamos generalizar el resultado a sistemas de más dimensiones. Las curvas de nivel  $V(x) = c, c \in \mathbb{R}$ , pasan a ser superficies de nivel, la condición de Lypianuv impone, por tanto, que una vez cruzada una superficie de nivel de  $V(x)$  el sistema no sale de la región limitada por dicha superficie.

### 3.3. Principio de invarianza de LaSalle

**Definición 3.3.1** (Conjunto límite positivo). Sea  $x(t)$  una solución del sistema 3.1. Un punto  $p$  se dice que es un punto límite positivo de  $x(t)$  si existe una secuencia  $\{t_n\}$ , con  $t_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$  tal que  $x(t_n) \rightarrow p$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Al conjunto de todos los puntos límite positivos se le denomina el conjunto límite positivo,  $L^+$  de  $x(t)$

▽

**Definición 3.3.2** (Conjunto invariante). Un conjunto  $M$  se dice que es invariante respecto al sistema 3.1 si,

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Si cumple al menos,

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \forall t \geq 0,$$

entonces se dice que el conjunto  $M$  es *positivamente* invariante.

▽

Por tanto para un conjunto invariante  $M$ , si una solución pertenece a  $M$  en un instante de tiempo, entonces también pertenece a  $M$  en todo instante pasado o futuro. Además para el caso de invarianza positiva, podemos decir que  $x(t)$  se aproxima al conjunto  $M$  cuando  $t$  tiende a infinito si para cada  $\epsilon > 0$ , hay un  $T > 0$  de modo que se cumple,

$$\text{dist}(x(t), M) < \epsilon, \forall t > T,$$

donde  $\text{dist}(p, M)$  representa la distancia desde el punto  $P$  al conjunto  $M$ , es decir, la distancia más corta desde  $P$  a un punto cualquiera de  $M$ ,

$$\text{dist}(p, M) = \inf_{x \in M} \|p - x\| \quad (3.27)$$

Estos conceptos nos permiten describir un punto de equilibrio asintóticamente estable como el conjunto límite positivo de cualquier solución suficientemente cercana a dicho punto. Un ciclo límite estable, sería el conjunto límite positivo de cualquier solución que comienza suficientemente cerca del ciclo límite. Además, el punto de equilibrio y el ciclo límite son conjuntos invariantes, ya que toda solución que empieza en ellos, permanece en ellos  $\forall t \in \mathbb{R}$ . El conjunto  $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq c\}$  para el que se cumple  $\dot{V} \leq c \forall x \in \Omega_c$  es un conjunto invariante positivo puesto que (ver teorema 3.2.1) cualquier solución que empieza en  $\Omega_c$  permanece en  $\Omega_c$ ,  $\forall t \leq 0$ .

**Lema 3.3.1** (Sin demostración). Si una solución  $x(t)$  de 3.14 está acotada, y pertenece a  $D$  para  $t \geq 0$  entonces su conjunto límite positivo  $L^+ \neq \emptyset$  es un conjunto invariante compacto. Además,  $x(t)$  se aproxima a  $L^+$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

◇



**Teorema 3.3.1.** Sea  $\Omega \subset D$  un conjunto compacto positivamente invariante con respecto al sistema 3.14. Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y diferenciable tal que  $\dot{V} \leq 0$  en  $\Omega$ . Sea  $E$  el conjunto de todos los puntos de  $\Omega$  para los cuales  $\dot{V} = 0$ . Sea  $M$  el mayor conjunto invariante en  $E$ . Entonces, toda solución que empieza en  $\Omega$  se aproxima a  $M$  cuando  $t \rightarrow \infty$

*Demostración.* Sea  $x(t)$  una solución de 3.14 que comienza en  $\Omega$ . Puesto que  $\dot{V} \leq 0$  en  $\Omega$ ,  $V(x(t))$  es una función decreciente de  $t$ . Además, dado que  $V(x)$  es una función continua en el conjunto compacto  $\Omega$ , la función está acotada inferiormente en  $\Omega$ . Por tanto,  $V(x(t))$  tienen un límite  $a$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Por último el conjunto límite positivo de  $x(t)$ :  $L^+ \subset \Omega$ , puesto que  $\Omega$  es un conjunto cerrado. Para cualquier  $p \in L^+$ ,  $\exists \{t_n\}$  con  $n \rightarrow \infty \mid x(t_n) \rightarrow p$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Pero, por continuidad de  $V(x)$ ,  $V(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(x(t_n)) = a$ . Por tanto  $V(x) = a$  en  $L^+$ . Puesto que (por el lema 3.3.1)  $L^+$  es un conjunto invariante,  $\dot{V}(x) = 0$  en  $L^+$ . Así que,

$$L^+ \subset M \subset E \subset \Omega$$

Como  $x(t)$  está acotada,  $x(t)$  se aproxima a  $L^+$  cuando  $t \rightarrow \infty$  (lema 3.3.1), y por tanto,  $x(t)$  se aproxima a  $M$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .  $\square$

El teorema 3.3.1 se conoce con el nombre de Teorema de LaSalle. Es interesante hacer notar que el teorema no exige, como en el caso del teorema de Lyapunov que la función  $V(x)$  sea definida positiva. Si imponemos esta condición, podemos obtener dos modificaciones del teorema de LaSalle que nos permiten determinar la estabilidad asintótica de un sistema.

**Corolario 3.3.1** (Teorema de Barbashin-Krasovskii I<sup>2</sup>). Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio asintóticamente estable para el sistema 3.14. Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, diferenciable, definida positiva en el dominio  $D$ , que contiene al origen  $x = 0$ , tal que  $\dot{V}(x) \leq 0$  en  $D$ . Sea el conjunto  $S = \{x \in D \mid \dot{V}(x) = 0\}$  y supongamos que no hay ninguna solución que pueda permanecer en  $S$ , excepto la solución trivial  $x(t) \equiv 0$ . Entonces el origen es asintóticamente estable.  $\square$

**Corolario 3.3.2** (Teorema de Barbashin-Krasovskii II). Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio para el sistema 3.14. Sea  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, diferenciable, no acotada radialmente y definida positiva, tal que  $\dot{V}(x) \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$ . Sea el conjunto  $S = \{x \in D \mid \dot{V}(x) = 0\}$  y supongamos que no hay ninguna solución que pueda permanecer en  $S$ , excepto la solución trivial  $x(t) \equiv 0$ . Entonces el origen es asintóticamente estable de modo global.  $\square$

## Ejercicios

1. Encontrar los puntos singulares de los siguientes sistemas. Linealizar las ecuaciones en su entorno y determinar la naturaleza de dichos puntos singulares.

a)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2(1 - x_2^2)\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1|x_1| \\ \dot{x}_2 &= 1 - x_1\end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Hay tres teoremas debidos a los mismos autores, todos ellos relacionados con estabilidad asintótica. Los dos que se definen aquí, fueron demostrados por sus autores con anterioridad al teorema de LaSalle. Después de la demostración de éste último, quedaron como simples corolarios

c)

$$\dot{x}_1 = x_1(1 - x_2)\dot{x}_2 = x_2(x_1 - 1)$$

2. El modelo de Volterra-Lotka puede alterarse de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - x_1x_2 - \mu x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= x_1x_2 - x_2 - \tau x_2\dot{x}_1\end{aligned}$$

Donde  $\mu > 0$  representa el efecto de las enfermedades y de la superpoblación de las presas y el término  $\tau > 0$  modela el efecto que tiene la alimentación sobre los depredadores. Encontrar los puntos de equilibrio, linealizar en torno a aquel cuyas dos variables de estado son distintas de cero y mostrar como su estabilidad o inestabilidad dependen de  $\mu$  y  $\tau$ . Discutir la posibilidad de la existencia de un ciclo límite.

3. El modelo caótico de Rössler viene descrito por las siguientes ecuaciones,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - x_1x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 - ax_2 \\ \dot{x}_3 &= bx_1 - cx_3\end{aligned}$$

Encontrar sus puntos de equilibrio, linealizar en torno a ellos. Para  $a = 0,1$ ,  $b = 0,1$ ,  $c = 14$  discutir la estabilidad o inestabilidad de los puntos de equilibrio. Simular el comportamiento del sistema para distintas condiciones iniciales. Representar la evolución de las variables de estado en el tiempo y el diagrama de fases.

4. Dado el sistema,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2(x_1^2 - 1)\end{aligned}$$

Encontrar el dominio de atracción de su punto de equilibrio

5. Demostrar la estabilidad asintótica global del sistema,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 - \gamma x_2, \gamma > 0\end{aligned}$$

(Usar  $\frac{x_1^4}{4} + \frac{x_2^2}{2}$  como función candidata de Liapunov)

6. Dado el sistema,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + 2x_1^2 + x_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + x_1x_2 + 3x_2^2\end{aligned}$$

7. Emplear la función<sup>3</sup>  $V(x) = \frac{3x_1^2}{2} + x_1x_2 + x_2^2$  Como función candidata de Lyapunov para estudiar el tipo de estabilidad del sistema. Encontrar el dominio de atracción determinado por  $V(x)$ .

---

<sup>3</sup>Esta función de Lyapunov puede obtenerse a partir de la ecuación de Lyapunov, para el sistema linealizado en torno al punto de equilibrio. ver sección 6.1.1

8. Dado el sistema,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\sin(x_1) - \epsilon x_2, \quad \epsilon > 0\end{aligned}$$

y la función candidata de Lyapunov  $V(x) = 1 - \cos(x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$ . Encontrar el mayor valor ( $V_0$ ) de  $V(x)$  de modo que la región conexas  $V(x) < V_0$  sea un dominio de atracción del punto de equilibrio (0,0).

9. Encontrar un dominio de atracción para el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2^2\end{aligned}$$

Probar para ello las funciones de Lyapunov,

$$\begin{aligned}V_1(x) &= x_1^2 + x_2^2 \\ V_2(x) &= x_1^2 - x_1x_2 + \frac{3x_2^2}{2}\end{aligned}$$

10. Dado el sistema,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + x_1x_2\end{aligned}$$

- a) Linealizar el sistema en torno al punto de equilibrio y estudiar su estabilidad.
- b) Empleando la función<sup>4</sup>  $V(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$  como función candidata de Lyapunov, estudiar la estabilidad del punto de equilibrio y su dominio de atracción.

---

<sup>4</sup>Esta función de Lyapunov puede obtenerse a partir de la ecuación de Lyapunov, para el sistema linealizado en torno al punto de equilibrio. ver sección 6.1.1



## Capítulo 4

# Diseño de controladores para sistemas en el espacio de estados

### 4.1. Seguidor de trayectorias deseadas

Considera el sistema  $\Sigma$  en (2.1). Dada una señal deseada o trayectoria  $x^*(t) \in \mathbb{R}^n$ , nuestro objetivo es diseñar  $u(t) \in \mathbb{R}^k$  tal que  $x(t) \rightarrow x^*(t)$  para  $t \rightarrow \infty$ .

Para ello vamos a construir la función de error

$$e(t) := x(t) - x^*(t), \quad (4.1)$$

junto con la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(t) = \frac{1}{2} \|e(t)\|^2, \quad (4.2)$$

cuya derivada temporal satisface

$$\frac{dV}{dt} = e^T \dot{e} = e^T (\dot{x}(t) - \dot{x}^*(t)) = e^T f(x, u) - e^T \dot{x}^*(t). \quad (4.3)$$

Podemos garantizar que  $e(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  si para un conjunto compacto  $\mathcal{B} := \{e : \|e\| \leq \rho, \rho \in \mathbb{R}_+\}$  tenemos que  $\frac{dV}{dt} < 0$  si  $e \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$  y  $\frac{dV}{dt} = 0$  si  $e = 0$ .

#### 4.1.1. Ejemplo con un sistema cinemático de segundo orden

Considera el siguiente sistema cinemático de segundo orden

$$\ddot{p}(t) = u, \quad (4.4)$$

donde  $p, u \in \mathbb{R}^n$  son las *posiciones* y las *aceleraciones* respectivamente en un espacio  $l \in \mathbb{N}$ -dimensional. Vamos a particularizar para  $l = 2$ . Apilamos las posiciones y velocidades  $p_x, p_y, \dot{p}_x$  y  $\dot{p}_y$  en  $x \in \mathbb{R}^4$ , consideramos que podemos medir  $x$ , y apilamos las aceleraciones  $\ddot{p}_x$  y  $\ddot{p}_y$  en  $u \in \mathbb{R}^2$ . Por lo que las funciones  $f$  y  $g$  del sistema  $\Sigma$  (2.1) son

$$\begin{cases} f &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \\ g &= x. \end{cases} \quad (4.5)$$

Definimos como trayectorias deseadas para seguir

$$p^*(t) = f(t), \quad \dot{p}^*(t) = f'(t), \quad (4.6)$$

donde  $f(t) \in C^2$ . Vamos a construir las siguientes señales de error

$$e_1(t) = p(t) - p^*(t), \quad e_2(t) = \dot{p}(t) - \dot{p}^*(t), \quad (4.7)$$

para definir la siguiente función candidata de Lyapunov al estilo de (4.2).

$$V(e(t)) = \frac{1}{2} \|e(t)\|^2, \quad (4.8)$$

en donde  $e(t) \in \mathbb{R}^4$  hemos apilado  $e_1$  y  $e_2$ . La derivada temporal de (4.8) satisface

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= e^T \dot{e} = e_1^T \dot{e}_1 + e_2^T \dot{e}_2 = e_1^T (\dot{p} - f'(t)) + e_2^T (u - f''(t)) \\ &= e_1^T e_2 + e_2^T (u - f''(t)) \end{aligned} \quad (4.9)$$

por lo que si uno escoge

$$u = f''(t) - e_1 - e_2 = f''(t) - p(t) + f(t) - \dot{p}(t) + f'(t), \quad (4.10)$$

nos lleva a

$$\frac{dV}{dt} = -\|e_2\|^2 \leq 0. \quad (4.11)$$

De hecho, la derivada temporal de  $V(t)$  es cero sí y solo sí  $e_2 = 0$ . Por lo que para invocar al principio de invariance de LaSalle, debemos comprobar cual es el conjunto invariante más grande del sistema (autónomo) error  $\dot{e}$  cuando  $e_2 = 0$ , esto es,

$$\begin{cases} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= -e_1 - e_2 \end{cases}, \quad (4.12)$$

donde se puede ver que cuando  $e_2 = 0$ , el conjunto invariante más grande es  $e_1 = e_2 = 0$ . Consecuentemente, podemos concluir que  $e(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  para cualquier  $e(0)$  empezando en  $\mathcal{B}$  con un  $\rho$  arbitrario, esto es, tenemos convergencia global.

## 4.2. Diseño de ciclos límites para sistemas planos

Consideremos de nuevo el sistema (4.4) para  $l = 2$ , es decir, seguimos en 2D, o un sistema en el plano. En vez de querer seguir una trayectoria  $p^*(t)$ , queremos que la posición converja a un *camino* cerrado que además sea un ciclo límite. El camino cerrado lo podemos definir como una curva  $\phi(p_x, p_y) = 0$ , es decir, todos los puntos con curva de nivel igual a cero definen *el camino*. Por ejemplo, un círculo de radio  $r \in \mathbb{R}_+$  satisface

$$\phi(p) := p_x^2 + p_y^2 - r^2 = 0. \quad (4.13)$$

Atención a que podemos considerar  $\phi(p)$  como una señal de error, i.e.,  $e(t) := \phi(p(t))$ . Consecuentemente, podemos definir la siguiente función candidata de Lyapunov.

$$V(e(t)) = \frac{1}{2} e(t)^2 + \frac{1}{2} \|\dot{p}(t) - \dot{p}^*(t)\|^2, \quad (4.14)$$

cuya derivada temporal satisface (por ahora considera  $\dot{p}^*(t) = 0$ ).

$$\frac{dV}{dt} = e\dot{e} + \dot{p}^T \ddot{p} = e\nabla\phi(p)\dot{p} + \dot{p}^T u, \quad (4.15)$$

entonces, si uno escoge  $u = -e\nabla\phi(p)^T - \dot{p}$ , entonces tenemos que

$$\frac{dV}{dt} = -\|\dot{p}\|^2 \leq 0, \quad (4.16)$$

y, similarmente a como hemos hecho en la sección anterior, por el principio de invarianza de LaSalle's concluimos que  $e(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

## Ejercicios

1. Para que  $\phi(p)$  sea un ciclo límite, la posición no solo ha de converger a ese camino, sino que ha de evolucionar en él en el tiempo. Para ello considera  $\dot{p}^*(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \nabla\phi(p)^T$ , y concluye que ahora  $\phi(p)$  sí es un ciclo límite.





## Capítulo 5

# Sistemas lineales

### 5.1. Mapas lineales

En este capítulo nos vamos a centrar en una clase de sistema llamado *sistema lineal en el espacio de estados*. Primero, necesitamos la noción de que es un *mapa lineal*.

**Definición 5.1.1** (Definición). Considera un mapeado  $H : V \rightarrow W$ . Si  $H$  preserva la operación suma y la multiplicación por un escalar, i.e.,

$$\begin{aligned} H(v_1 + v_2) &= H(v_1) + H(v_2), \quad v_1, v_2 \in V \\ H(\alpha v_1) &= \alpha H(v_1), \quad \alpha \in \mathbb{K}, \end{aligned}$$

entonces  $H$  es un *mapa lineal*.

#### 5.1.1. Ejercicio: Comprueba si los siguientes mapas son lineales

1.  $H_1(v) := Av, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad v \in \mathbb{R}^n$
2.  $H_2(v) := \frac{d}{dt}(v(t)), \quad v \in \mathcal{C}^1$
3.  $H_3(v) := \int_0^T v(t)dt, \quad v \in \mathcal{C}^1, T \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
4.  $H_4(v) := D(v) := v(t - T), \quad v \in \mathcal{C}^1, T \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
5.  $H_5(v) := Av + b, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, v, b \in \mathbb{R}^n$

### 5.2. Sistemas continuos y lineales en el espacio de estados

El siguiente sistema define un sistema continuo y lineal en el espacio de estados.

$$\Sigma := \begin{cases} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), & x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^k \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t), & y \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (5.1)$$

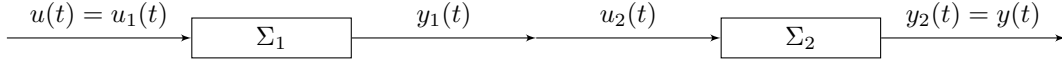


Figura 5.1: Conexión en serie de dos sistemas lineales y continuos en el espacio de estados.

**5.2.1. Ejercicio:** Escribe un sistema continuo y lineal en el espacio de estados como un diagrama de bloques entrada/salida y comprueba que es un mapa lineal.

**5.2.2. Ejercicio:** Interconecta sistemas continuos y lineales en el espacio de estados y comprueba que el sistema resultante es otro sistema continuo y lineal en el espacio de estados.

Reescribe como un único sistema lineal<sup>1</sup> como en (5.1):

1. La conexión en serie (o en cascada) de dos sistemas lineales, i.e.,  $y_1(t) = u_2(t)$ .
2. La conexión en paralelo de dos sistemas lineales, i.e.,  $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ .
3. La conexión realimentada, i.e.,  $u_1(t) = u(t) - y(t)$ , asumiendo que  $u, y, \in \mathbb{R}^k$ .

### 5.3. Solución a sistemas continuos lineales en el espacio de estados

La solución a una ecuación diferencial ordinaria viene dada por la suma de dos soluciones: la solución a la parte homogénea, y la solución a la parte no homogénea.

$$\dot{x}(t) = \underbrace{A(t)x(t)}_{\text{homogénea}} + \underbrace{B(t)u(t)}_{\text{no homogénea}} \quad (5.2)$$

**Teorema 5.3.1.** *Serie de Peano-Barker.* La solución única al sistema homogéneo  $\dot{x} = Ax$  viene dada por

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0), \quad x(t_0) \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, \quad (5.3)$$

donde

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_0) := & I + \int_{t_0}^t A(s_1)ds_1 + \int_{t_0}^t A(s_1) \int_{t_0}^{s_1} A(s_2)ds_2ds_1 \\ & + \int_{t_0}^t A(s_1) \int_{t_0}^{s_1} A(s_2) \int_{t_0}^{s_2} A(s_3)ds_3ds_2ds_1 + \dots \end{aligned} \quad (5.4)$$

Esbozo de la prueba:

---

<sup>1</sup>Por abreviar, cuando no exista ambigüedad, llamaremos sistema lineal al sistema continuo y lineal en el espacio de estados

#### 5.4. SOLUCIÓN A SISTEMAS INVARIANTES EN EL TIEMPO, CONTINUOS Y LINEALES EN EL ESPACIO

Primero calculamos la siguiente derivada

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) &= A(t) + A(t) \int_{t_0}^t A(s_2) ds_2 \\ &\quad + A(t) \int_{t_0}^t A(s_2) \int_{t_0}^{s_2} A(s_3) ds_3 ds_2 + \dots \\ &= A(t)\Phi(t, t_0).\end{aligned}\tag{5.5}$$

Afirmamos que la solución a la parte homogénea de (5.2) es  $x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$  cuya derivada con respecto al tiempo es

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x &= \frac{d}{dt}\Phi(t, t_0)x_0 \\ &= A(t)\Phi(t, t_0)x_0 \\ &= A(t)x(t),\end{aligned}\tag{5.6}$$

lo cual prueba la identidad  $\dot{x} = A(t)x(t)$  dado que  $x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$ . Para terminar la prueba, necesitaríamos probar que la serie (5.4) converge para todo  $t \geq t_0$ .

La matriz  $\Phi(t, t_0)$  es llamada **matriz de transición de estados**. Dada una condición inicial  $x_0$ , podemos predecir  $x(t)$  en (5.2) iterando  $\Phi(t, t_0)$  en el caso de que no existiera ninguna interacción con el sistema, i.e.,  $u(t) = 0, t \geq t_0$ .

##### 5.3.1. Ejercicio

Comprobar que

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\tag{5.7}$$

$$y(t) = C(t)\phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t),\tag{5.8}$$

son las soluciones a

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ \dot{y}(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t).\end{aligned}$$

#### 5.4. Solución a sistemas invariantes en el tiempo, continuos y lineales en el espacio de estados

Comunmente conocidos como sistemas *lti* (linear time invariant), son los sistemas en los que nos centraremos principalmente en el resto del curso. La matriz  $\Phi(t, t_0)$  puede ser hallada analíticamente cuando  $A$  es una matriz de coeficientes constantes. Si  $A$  es constante, entonces podemos sacarla de las integrales en (5.4), quedando

$$\begin{aligned}\Phi(t, t_0) &:= I + A \int_{t_0}^t ds_1 + A^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{s_1} ds_2 ds_1 \\ &\quad + A^3 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{s_1} \int_{t_0}^{s_2} ds_3 ds_2 ds_1 + \dots,\end{aligned}\tag{5.9}$$

y observando que las siguientes integrales tienen solución analítica

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t ds_1 &= (t - t_0) \\ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{s_1} ds_2 ds_1 &= \frac{(t - t_0)^2}{2} \\ &\vdots \\ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{s_1} \cdots \int_{t_0}^{s_{k-2}} \int_{t_0}^{s_{k-1}} ds_k ds_{k-1} \cdots ds_2 ds_1 &= \frac{(t - t_0)^k}{k!}, \end{aligned}$$

entonces tenemos que (5.9) es calculada como

$$\Phi(t, t_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^k}{k!} A^k, \quad (5.10)$$

lo cual es familiar a la serie de Taylor de una función exponencial. Por ejemplo, para un escalar  $x$ , tenemos que  $e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ . De hecho, la definición de la *exponencial de una matriz* es

$$\exp(A) = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots \quad (5.11)$$

Fijemos  $t_0 = 0$  por conveniencia, entonces

$$\begin{aligned} \Phi(t, 0) &= I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots \\ &= \exp(At), \end{aligned} \quad (5.12)$$

por lo tanto, la solución a la parte homogénea (5.2) teniendo  $A$  con coeficientes constantes y fijando  $t_0 = 0$  es

$$x(t) = \exp(At)x_0, \quad t \geq 0. \quad (5.13)$$

Para continuar, necesitamos el siguiente resultado de álgebra lineal.

**Teorema 5.4.1. Forma de Jordan.** Para una matriz cuadrada  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , existe un cambio de base no singular  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$  que transforma  $A$  en

$$J = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_l \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

donde  $J_i$  es el bloque de Jordan con forma

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}, \quad (5.15)$$

en donde cada  $\lambda_i$  es un autovalor de  $A$ , y el número  $l$  de bloques de Jordan es igual al número total de autovectores independientes de  $A$ . La matrix  $J$  es única (descontando reordenación de filas/columnas) y es llamada la **forma normal de Jordan** de  $A$ .

Partiendo de la observación que  $A = P^{-1}JP$  también, entonces es fácil probar que

$$A^k = P^{-1}J^kP, \quad (5.16)$$

de tal manera que podamos calcular que

$$\begin{aligned} \exp(At) &= P^{-1} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{bmatrix} J_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_l^k \end{bmatrix} \right) P \\ &= P^{-1} \begin{bmatrix} \exp(J_1 t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp(J_2 t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \exp(J_l t) \end{bmatrix} P \end{aligned} \quad (5.17)$$

Observa que si  $J$  es simplemente una matriz diagonal con los autovalores de  $A$ , i.e.,  $J_l = \lambda_l \in \mathbb{C}$ , entonces  $\exp(J_l t) = e^{\lambda_l t} \in \mathbb{C}$  es un cálculo trivial.

Now, let us check the consequences on the following two conditions. Ahora, veamos las consecuencias de las siguientes dos suposiciones

1.  $J$  es diagonal.
2. Todos los autovalores de  $A$  tienen parte real negativa.

Sabiendo que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t} \rightarrow 0$  si  $\lambda \in \mathbb{R}_{<0}$ , entonces tenemos que  $\exp(At) \rightarrow 0$  según  $t \rightarrow \infty$  si las dos previas suposiciones se dan. Si echamos un vistazo a (5.13), podemos concluir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow 0, \quad (5.18)$$

por tanto, podemos predecir la evolución de  $x(t)$  con sólo mirar los autovalores de  $A$ . Si  $J$  no es diagonal, podremos concluir más resultados. Lo veremos en la sección siguiente a la linearización de sistemas en el espacio de estados.

## 5.5. Linearización de sistemas en el espacio de estados

Desafortunadamente, es realmente difícil (cuando no imposible) calcular una solución analítica para  $x(t)$  e  $y(t)$  para un sistema arbitrario  $\Sigma$  como en (2.1). No obstante, hemos visto que sí se puede calcular una solución analítica para  $x(t)$  e  $y(t)$  cuando  $\Sigma$  es un sistema invariante en el tiempo, continuo y lineal en el espacio de estados.

Será de gran utilidad encontrar una relación entre ambos sistemas.

Si  $f(x, t)$  y  $g(x, t)$  son reales analíticas en un entorno a un punto específico  $(x^*, u^*)$ , entonces podemos trabajar con aproximaciones de Taylor de  $f(x, t)$  y  $g(x, t)$  en ese mismo entorno. Cuando nos quedamos en orden uno en la aproximación es lo que se conoce como *linearización*.

$$\Sigma := \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{array} \right\} \Big|_{x \approx x^*, u \approx u^*} \approx \left\{ \begin{array}{l} x(t) = x^* + \delta x(t) \\ u(t) = u^* + \delta u(t) \\ \delta \dot{x}(t) = A(t)\delta x(t) + B(t)\delta u(t) \\ \delta y(t) = C(t)\delta x(t) + D(t)\delta u(t) \end{array} \right.,$$

donde

$$\begin{aligned}
 A(t) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \Big|_{x=x^*, u=u^*} \\
 B(t) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial u_k} \end{bmatrix} \Big|_{x=x^*, u=u^*} \\
 C(t) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \Big|_{x=x^*, u=u^*} \\
 D(t) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial u_k} \end{bmatrix} \Big|_{x=x^*, u=u^*}.
 \end{aligned}$$

Informalmente, estamos calculando la sensibilidad (hasta primer orden) de  $f$  y  $g$  cuando hacemos una variación pequeña de  $x$  y  $u$  alrededor de  $(x^*, u^*)$ . Como de pequeña ha de ser esa variación depende del sistema  $\Sigma$ . En particular, cuando diseñemos controladores basados en linearizar alrededor de un punto, daremos cotas para  $\delta x$  y  $\delta u$  de tal manera que el controlador pueda garantizar estabilidad.

### 5.5.1. Ejercicio. Linearización del péndulo invertido

Más adelante, veremos que podemos diseñar una entrada de control  $u(t)$ , i.e., una señal que ha de seguir el torque  $T$  en (2.12) de tal manera que  $\theta$  y  $\dot{\theta}$  converjan a unos valores constantes o trayectorias deseadas.

Por ejemplo, vamos a fijar un punto constante de interés  $x^* = \begin{bmatrix} \theta^* \\ 0 \end{bmatrix}$ , por lo que la velocidad angular se marca a cero. Esta situación corresponde a una situación de equilibrio para el ángulo  $\theta$ . Para hallar el  $u^*(t)$  en (2.12) necesario para tal equilibrio necesitamos que  $\frac{d}{dt} \left( \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Una inspección a la dinámica (2.9) nos responde que

$$u^* = T^* = -\frac{g}{l} \sin \theta^*, \quad (5.19)$$

por ejemplo, para una posición totalmente vertical correspondiente a  $\theta^* = 0$  tenemos que  $T^* = 0$ , i.e.,  $x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  y  $u^* = 0$ .

El cálculo de las matrices  $A, B, C$ , y  $D$  son los Jacobianos de (2.12) y (2.13), i.e.,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= 0 \\
\frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= 1 \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= \frac{g}{l} \cos \theta \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= -\frac{b}{ml^2} \\
\frac{\partial f_1}{\partial u_1} &= 0 \\
\frac{\partial f_2}{\partial u_1} &= 1 \\
\frac{\partial g_1}{\partial x_1} &= 1 \\
\frac{\partial g_1}{\partial x_2} &= 0 \\
\frac{\partial g_1}{\partial u_1} &= 0,
\end{aligned}$$

por lo que podemos llegar a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta\theta \\ \dot{\delta\theta} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} \cos \theta & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}_{|\theta=\theta^*} \begin{pmatrix} \delta\theta \\ \dot{\delta\theta} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta T \\
\delta y &= [1 \quad 0] \begin{pmatrix} \delta\theta \\ \dot{\delta\theta} \end{pmatrix} + 0 \delta T,
\end{aligned} \tag{5.20}$$

para modelar una aproximación a la dinámica de  $x(t)$  y la salida  $y(t)$  alrededor de los puntos  $x^*$  y  $u^*$ .

## 5.6. (Internal or Lyapunov) Stability

Decimos que el sistema lineal (5.1) en el sentido de Lyapunov

1. es *(marginamente) estable* si para cada condición inicial  $x_0$ , entonces  $x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$  está acotada uniformemente para todo  $t > t_0$ .
2. es *asintóticamente estable* si además  $x(t) \rightarrow 0$  según  $t \rightarrow \infty$ .
3. es *exponencialmente estable* si además  $\|x(t)\| \leq ce^{\lambda(t-t_0)}\|x(t_0)\|$  para algunas constantes  $c, \lambda > 0$ .
4. es *inestable* si no es marginalmente estable.

Centrémonos en sistemas *lti*, es decir, cuando  $A$  tiene coeficientes constantes o  $\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$ . Entonces, podemos establecer una clara relación entre los autovalores de  $A$  y las definiciones de estabilidad en el sentido de Lyapunov únicamente inspeccionando la solución a  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  dada por (5.7).

El sistema  $\dot{x}(t) = Ax(t)$

1. es marginalmente estable si y solo si todos los autovalores de  $A$  tienen parte real negativa. Si algún autovalor tiene parte real nula, entonces su bloque de Jordan ha de ser  $1 \times 1$ .
2. es asintóticamente estable si y solo si todos los autovalores de  $A$  tienen estrictamente parte real negativa.
3. es exponencialmente estable si es asintóticamente estable.
4. es inestable si y solo si al menos un autovalor de  $A$  tiene parte real positiva, o al menos uno de los autovalores con parte real nula tiene un bloque de Jordan mayor de  $1 \times 1$ .

Comprobando las soluciones (5.7)-(5.8), podemos decir que si  $A$  tiene coeficientes constantes y  $\dot{x} = Ax$  es asintóticamente estable, entonces  $x(t) \rightarrow \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B(\tau) u(\tau) d\tau$  según  $t \rightarrow \infty$ .

### 5.6.1. Estabilidad local de sistemas linearizados

Si  $x(t)$  es asintóticamente (exponencialmente) estable en  $\dot{x}(t) = Ax(t)$ , entonces, existe una única  $P$  que satisface la *ecuación de Lyapunov*

$$A^T P + P A = -Q, \quad \forall Q \succ 0. \quad (5.21)$$

Uno puede probar (6.1) si considera

$$P := \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{A t} dt. \quad (5.22)$$

Pista: Primero, sustituye  $P$  en (6.1), y después verifica el cálculo  $\frac{d}{dt} (e^{A^T t} Q e^{A t})$ . Si uno prueba que  $P$  es única, entonces  $P$  ha de ser positiva definida acorde a su definición (6.2).

Ahora vamos a considerar un sistema continuo, autónomo y no lineal en general

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (5.23)$$

con un punto de equilibrio  $x^* \in \mathbb{R}^n$ , i.e.,  $f(x^*) = 0$ . La dinámica de  $x(t)$  puede ser aproximada considerando  $x(t) = x^* + \delta x(t)$  donde

$$\delta \dot{x}(t) = A \delta x(t), \quad A := \frac{\partial f(x)}{\partial x}. \quad (5.24)$$

¿Cómo de buena es esta aproximación?

**Teorema 5.6.1.** *Asume que  $f(x)$  es dos veces diferenciable. Si (6.4) es exponencialmente estable, entonces, existe un entorno  $\mathcal{B}$  alrededor de  $x^*$  y constantes  $c, \lambda > 0$  tal que para cada solución  $x(t)$  del sistema (6.3) que empiece con  $x(t_0) \in \mathcal{B}$ , tenemos que*

$$\|x(t) - x^*\| \leq c e^{\lambda(t-t_0)} \|x(t_0) - x^*\|, \quad \forall t \geq t_0. \quad (5.25)$$

**¿Cómo de grande es  $\mathcal{B}$ ? ¿Podemos estimarlo? Esbozo de la prueba del Teorema 6.1.1**

Como  $f$  es dos veces diferenciable, de su desarrollo de Taylor tenemos que

$$r(x) := f(x) - (f(x^*) + A(x - x^*)) = f(x) - A \delta x = O(\|\delta x\|^2), \quad (5.26)$$

lo cual significa que existe una constante  $c$  y una bola  $\bar{B}$  alrededor de  $x^*$  tal que

$$\|r(x)\| \leq c \|\delta x\|^2, \quad x \in \bar{B}. \quad (5.27)$$



Si el sistema linealizado es exponencialmente estable, tenemos que

$$A^T P + P A = -I. \quad (5.28)$$

Ahora considera la siguiente señal escalar

$$v(t) := (\delta x)^T P \delta x, \quad \forall t \geq 0. \quad (5.29)$$

Observa que  $\delta x(t) = x(t) - x^*$ , entonces  $\dot{\delta x}(t) = \dot{x}(t) = f(t)$ . Por lo tanto, la derivada con respecto del tiempo de  $v(t)$  satisface

$$\begin{aligned} \dot{v} &= f(x)^T P \delta x + (\delta x)^T P f(x) \\ &= (A \delta x + r(x))^T P \delta x + (\delta x)^T P (A \delta x + r(x)) \\ &= (\delta x)^T (A^T P + P A) \delta x + 2(\delta x)^T P r(x) \\ &= -\|\delta x\|^2 + 2(\delta x)^T P r(x) \\ &\leq -\|\delta x\|^2 + 2\|P\| \|\delta x\| \|r(x)\|. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Sabemos que  $v(t)$  es positiva excepto cuando  $\delta x = 0$ . Si podemos garantizar que  $\dot{v}(t) < 0$  y que  $\dot{v}(t) = 0$  solo cuando  $\delta x = 0$ , entonces  $v(t) \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow \infty$ , lo cual implica que  $\delta x(t) \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow \infty$ .

Ahora, si  $x \in \bar{\mathcal{B}}$ , entonces

$$\dot{v} \leq -\left(1 - 2c\|P\|\|\delta x\|\right)\|\delta x\|^2, \quad (5.31)$$

Por lo tanto, si la desviación  $\delta x$  es suficientemente pequeña, i.e.,

$$\|\delta x\| < \frac{1}{2c\|P\|}, \quad (5.32)$$

entonces  $\dot{v}(t) < 0$  si  $\delta x(0) \neq 0$  y  $\delta x(0) < \frac{1}{2c\|P\|}$ .

Podemos concluir que una estimación de  $\mathcal{B}$  es

$$\mathcal{B} := \{\delta x : \|\delta x\| < \frac{1}{2c\|P\|}\}. \quad (5.33)$$

## 5.7. Controlabilidad

### 5.7.1. Subespacios alcanzables y controlables

Recordemos que cuando aplicamos una entrada genérica  $u(\cdot)$  a (5.1), transferimos el sistema de un estado  $x(t_0) := x_0$  a un estado  $x(t_1) := x_1$ , que además podemos calcular con la expresión

$$x_1 = \Phi(t_1, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau, \quad (5.34)$$

donde recordemos que  $\Phi(\cdot)$  es la matriz de transición de estados del sistema.

Preguntas:

1. ¿Qué estados puedo alcanzar desde  $x_0$ ?
2. ¿Existe siempre una entrada  $u(\cdot)$  que transfiera un estado arbitrario  $x_0$  a otro  $x_1$ ?

Estas dos preguntas llevan a acuñar las definiciones de (sub)espacios alcanzables y controlables.

**Definición 5.7.1** (Subespacio alcanzable). Dados dos instantes de tiempo  $t_1 > t_0 \geq 0$ , el subespacio alcanzable (o controlable desde el origen)  $\mathcal{R}[t_0, t_1]$  consiste en todos los estados  $x_1$  por los que existe una entrada  $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^k$  que transfiera el estado  $x_0 = 0$  a  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ ; i.e.,

$$\mathcal{R}[t_0, t_1] := \left\{ x_1 \in \mathbb{R}^n : \exists u(\cdot), x_1 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \right\}. \quad (5.35)$$

**Definición 5.7.2** (Subespacio controlable). Dados dos instantes de tiempo  $t_1 > t_0 \geq 0$ , el subespacio controlable (o controlable hacia el origen)  $\mathcal{C}[t_0, t_1]$  consiste en todos los estados  $x_0$  por los que existe una entrada  $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^k$  que transfiera un estado  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  a  $x_1 = 0$ ; i.e.,

$$\mathcal{C}[t_0, t_1] := \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n : \exists u(\cdot), 0 = \Phi(t_1, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \right\}. \quad (5.36)$$

¿Cómo podemos calcular  $\mathcal{R}[t_0, t_1]$  y  $\mathcal{C}[t_0, t_1]$ ? Para ello vamos a introducir y explotar las siguientes dos matrices llamadas *Gramianos*.

**Definición 5.7.3** (Gramianos de alcanzabilidad y controlabilidad).

$$W_R(t_0, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) B(\tau)^T \Phi(t_1, \tau)^T d\tau \quad (5.37)$$

$$W_C(t_0, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau) B(\tau) B(\tau)^T \Phi(t_0, \tau)^T d\tau \quad (5.38)$$

**Teorema 5.7.1.** *Dados dos instantes de tiempo  $t_1 > t_0 \geq 0$ ,*

$$\mathcal{R}[t_0, t_1] = \text{Im}\{W_R(t_0, t_1)\} \quad (5.39)$$

$$\mathcal{C}[t_0, t_1] = \text{Im}\{W_C(t_0, t_1)\}, \quad (5.40)$$

donde  $\text{Im}\{A\} := \{y \in \mathbb{R}^m : \exists x \in \mathbb{R}^n, y = Ax\}$  para una matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

*Demostración.* Solo vamos a probar (6.19) porque (6.20) tiene una prueba similar. Necesitamos mostrar ambas implicaciones: primero, si  $x_1 \in \text{Im}\{W_R(t_0, t_1)\}$ , entonces  $x_1 \in \mathcal{R}[t_0, t_1]$ ; segundo, si  $x_1 \in \mathcal{R}[t_0, t_1]$  entonces  $x_1 \in \text{Im}\{W_R(t_0, t_1)\}$ .

Cuando  $x_1 \in \text{Im}\{W_R(t_0, t_1)\}$ , existe un vector  $\mu_1 \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$x_1 = W_R(t_0, t_1) \eta_1. \quad (5.41)$$

Escoge  $u(\tau) = B(\tau)^T \Phi(t_1, \tau)^T \eta_1$ , y sustitúyelo en (6.15), entonces tenemos que

$$x_1 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) B(\tau)^T \Phi(t_1, \tau)^T \eta_1 d\tau = W_R(t_0, t_1) \eta_1. \quad (5.42)$$

Cuando  $x_1 \in \mathcal{R}[t_0, t_1]$ , existe una entrada  $u(\cdot)$  para la cual

$$x_1 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau. \quad (5.43)$$

Si (6.23) es en  $\text{Im}\{W_R(t_0, t_1)\}$ , entonces  $x_1^T \mu = 0$ ,  $\mu \in \text{Ker}\{W_R(t_0, t_1)\}$ <sup>2</sup> Vamos a calcular

$$x_1^T \mu = \int_{t_0}^{t_1} u(\tau)^T B(\tau)^T \Phi(t_1, \tau)^T \mu d\tau. \quad (5.44)$$

<sup>2</sup>If  $x \in \text{Ker}\{A^T\}$ , por lo que  $A^T x = 0$ . Si  $y \in \text{Im}\{A\}$ , entonces  $y = A\eta$ . Por lo tanto,  $x^T y = x^T A\eta = \eta^T A^T x = \eta^T \cdot 0 = 0$ . Observa que  $W_R^T = W_R$  por definición.

Y observando que

$$\begin{aligned} \mu \in \text{Ker}\{W_R(t_0, t_1)\} &\implies \mu^T W_R(t_0, t_1) \mu = 0 \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \mu^T \Phi(t_1, \tau) B(\tau) B(\tau)^T \Phi(t_1, \tau)^T \mu d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \|B(\tau)^T \Phi(t_1, \tau)^T \mu\|^2 d\tau, \end{aligned} \quad (5.45)$$

obtenemos que  $B(\tau)^T \Phi(t_1, \tau)^T \mu = 0$ , llevando a (6.24) ser igual a cero.  $\square$

*Atención 5.7.1.* Observa que hemos probado que  $u(\tau) = B(\tau)^T \Phi(t_1, \tau)^T \eta_1$  puede ser como una entrada de control para transferir  $x_0 = 0$  a  $x_1 \in \mathbb{R}^n$  en un tiempo finito  $(t_1 - t_0)$ . De hecho, esta es la señal de control *en lazo abierto de mínima energía*.

Vamos a ver este hecho en más detalle. Considera otra señal de control  $\bar{u}(t)$  tal que

$$x_1 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) \bar{u}(\tau) d\tau. \quad (5.46)$$

Para que sea cierto, debemos tener For this to hold, we must have

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) v(\tau) d\tau = 0, \quad (5.47)$$

donde  $v(\tau) = u(\tau) - \bar{u}(\tau)$ . Vamos a ver la energía asociada a  $\bar{u}$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \|\bar{u}(\tau)\|^2 d\tau &= \int_{t_0}^{t_1} \|B(\tau)^T \Phi(t_1, \tau)^T \eta_1 + v(\tau)\|^2 d\tau \\ &= \eta_1^T W_R(t_0, t_1) \eta_1 + \int_{t_0}^{t_1} \|v(\tau)\|^2 d\tau + 2\eta_1^T \int_{t_0}^{t_1} B(\tau) \Phi(t_1, \tau) v(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (5.48)$$

donde el tercer término es cero por (6.27). Por lo tanto, si  $\bar{u}(t)$  difiere  $v(t)$  de  $u(t)$ , gastará  $\int_{t_0}^{t_1} \|v(\tau)\|^2 d\tau$  más energía que  $u(t)$ .

### 5.7.2. Matriz de controlabilidad para un sistema lti

Consideremos un sistema lineal (5.1) con  $A$  y  $B$  con coeficientes constantes.

El teorema de Cayley-Hamilton nos permite escribir

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) A^i, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (5.49)$$

para algunas funciones escalares apropiadas  $\alpha_i(t)$ . Tenemos también que si  $A$  y  $B$  tienen coeficientes constantes, entonces

$$\begin{aligned} x_1 &= \int_0^{t_0-t_1} e^{At} B u(t) dt \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} A^i B \left( \int_0^{t_1-t_0} \alpha_i(t) u(t) dt \right) \\ &= \mathcal{C} \begin{bmatrix} \int_0^{t_1-t_0} \alpha_0(t) u(t) dt \\ \vdots \\ \int_0^{t_1-t_0} \alpha_{n-1}(t) u(t) dt \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.50)$$

donde

$$\mathcal{C} := \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}_{n \times (kn)}, \quad (5.51)$$

es la llamada matrix de controlabilidad del sistema lti.

*Atención 5.7.2.* Observa que  $\mathcal{C}[t_0, t_1]$  y  $\mathcal{C}$  son diferentes objetos. El primero es un (sub)espacio, mientras que el segundo es una matriz.

Observa que acabamos de probar que la imagen de  $\mathcal{C}$  es la misma que la imagen de  $W_R(t_0, t_1)$ . La siguiente afirmación más general puede probarse también:

**Teorema 5.7.2.** *Dados dos instantes de tiempo  $t_0, t_1$ , con  $t_1 > t_0$ , tenemos que*

$$\mathcal{R}[t_0, t_1] = \text{Im}\{W_R(t_0, t_1)\} = \text{Im}\{\mathcal{C}\} = \text{Im}\{W_C(t_0, t_1)\} = \mathcal{C}[t_0, t_1], \quad (5.52)$$

Podemos extraer dos importantes consecuencias del Teorema 6.2.2 para sistemas lti. ¡Observa que  $\text{Im}\{\mathcal{C}\}$  no depende de ninguna variable tiempo!

1. *Reversibilidad temporal:* Si uno puede alcanzar  $x_1$  desde el origen, entonces uno puede alcanzar el origen desde  $x_1$ . Es decir, los subespacios de alcanzabilidad y controlabilidad son el mismo subespacio.
2. *Escalado de tiempo:* La alcanzabilidad y la controlabilidad no dependen del tiempo. Si uno puede transferir el estado de  $x_0$  and  $x_1$  en  $t$  segundos, entonces también puedes hacerlo en  $\bar{t} \neq t$  segundos.

**Definición 5.7.4** (Definición). Dados dos instantes de tiempo  $t_1 > t_0 \geq 0$ , el par  $(A, B)$  del sistema (5.1) se dice *alcanzable* en  $[t_0, t_1]$  si  $\mathcal{R}[t_0, t_1] = \mathbb{R}^n$ . Es decir, si podemos alcanzar cualquier estado en tiempo finito partiendo desde el origen.

**Definición 5.7.5** (Definición). Dados dos instantes de tiempo  $t_1 > t_0$ , el par del sistema (5.1) se dice *controlable* en  $[t_0, t_1]$  si  $\mathcal{C}[t_0, t_1] = \mathbb{R}^n$ . Es decir, si podemos alcanzar el origen partiendo desde cualquier estado en tiempo finito.

### 5.7.3. Tests de controlabilidad

El siguiente teorema es el resultado de combinar la Definición 6.2.5 con el Teorema 6.2.2:

**Teorema 5.7.3.** *El par (constante)  $(A, B)$  es controlable si y solo si el rango de  $\mathcal{C}$  es  $n$ .*

El siguiente teorema se puede comprobar numéricamente a partir de los siguientes resultados.

**Teorema 5.7.4.** *El par (constante)  $(A, B)$  es controlable si y solo si no existe ningún autovector de  $A^T$  en el kernel de  $B^T$ .*

El siguiente teorema es una reescritura del anterior.

**Teorema 5.7.5.** *El par (constante)  $(A, B)$  es controlable si y solo si el rango de  $[A - \lambda I \quad B]$  es  $n$ .*

*Atención 5.7.3.* Observa que el tener un sistema asintóticamente estable no implica el tener un sistema lti controlable. Por ejemplo,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}. \quad (5.53)$$

El kernel de  $B^T$  es generado por  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , el cual es proporcional a un autovector de  $A = A^T$ . Entonces, el sistema no es controlable acorde al teorema 6.2.4. Observa, que no tenemos autoridad ninguna sobre  $x_1$  a través de  $u$ . Sin embargo, es asintóticamente estable. Uno puede ver que  $x_{\{1,2\}}(t) \rightarrow 0$  según  $t \rightarrow \infty$  cuando  $u = 0$ . Recuerda que la controlabilidad trata de transferir estados en **tiempo finito**.

## 5.8. Estabilización de un sistema lti por realimentación de estados

### 5.8.1. Test de Lyapunov para la estabilización de un sistema lti

**Definición 5.8.1** (Definición). Si el sistema (5.1) es lti, entonces es estabilizable si existe una entrada  $u(t)$  para cualquier  $x(0)$  tal que  $x(t) \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow \infty$ .

Esta definición es una versión de *sistema controlable* pero para tiempo infinito. En el siguiente teorema veremos que *estabilizable* es menos restrictivo que *controlable*.

**Teorema 5.8.1.** Si el sistema (5.1) es lti, entonces es estabilizable si y solo si todos los autovectores de  $A^T$  correspondientes a autovalores con parte real no negativa pertenecen al kernel de  $B^T$ .

La proyección de  $x(t)$  sobre el espacio generado por los autovectores de  $A^T$  asociados a autovalores con parte real negativa van a cero sin necesidad de la *asistencia* de ninguna entrada. Entonces, la entrada  $u(t)$  debe asistir a las proyecciones de  $x(t)$  en el resto de autovectores de  $A^T$ . Por ejemplo,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}, \quad (5.54)$$

mientras que no tenemos ninguna *autoridad* sobre  $x_1(t)$ , podemos emplear  $u(t)$  para llevar a  $x_2(t)$  a cero de tal manera que  $x(t) \rightarrow 0$  según  $t \rightarrow \infty$ .

**Teorema 5.8.2.** Si el sistema (5.1) es lti, entonces es estabilizable si y solo si hay una matriz positiva definida  $P$  a la siguiente desigualdad

$$AP + PA^T - BB^T \prec 0 \quad (5.55)$$

*Demostración.* Solo vamos a ver una dirección de la prueba. No confundir (6.35) con la ecuación de Lyapunov<sup>3</sup>  $PA + A^TP \prec -I$  en (6.1).

Considera  $x$  como un autovector asociado al autovalor  $\lambda$  de  $A^T$  con parte real no negativa. Entonces,

$$x^*(AP + PA^T)x < x^*BB^Tx = \|B^Tx\|^2, \quad (5.56)$$

donde  $x^*$  es el complejo conjugado de  $x$ . Pero el lado izquierdo de (6.36) es igual a

$$(A^T(x^*)^T)^TPx + x^*PA^Tx = \lambda^*x^*Px + \lambda x^*Px = 2\text{Real}\{\lambda\}x^*Px. \quad (5.57)$$

Como  $P$  es positiva definida, y  $\text{Real}\{\lambda\} \geq 0$ , podemos concluir que

$$0 \leq 2\text{Real}\{\lambda\}x^*Px < \|B^Tx\|^2, \quad (5.58)$$

y por tanto  $x$  debe pertenecer al kernel de  $B$ , si no tendríamos que

$$0 \leq 2\text{Real}\{\lambda\}x^*Px < 0, \quad (5.59)$$

y eso no es posible.  $\square$

<sup>3</sup>Observa el orden de las matrices traspuestas, y observa también el signo opuesto de  $-BB^T$  y  $+I$  en las dos ecuaciones.

### 5.8.2. Controlador por realimentación de estados

Realimentación de estados implica el escoger una señal de entrada que dependa únicamente de los estados del sistema, es decir, diseñar una

$$u(t) = -Kx(t), \quad (5.60)$$

donde  $K \in \mathbb{R}^{n \times k}$ , tal que  $x(t) \rightarrow 0$  en (5.1) exponencialmente rápido según  $t \rightarrow \infty$ .

Define la ganancia matriz de control

$$K := \frac{1}{2}B^T P^{-1}, \quad (5.61)$$

donde  $P$  se calcula en (6.35) si y solo si un sistema lti es estabilizable. Por lo tanto, podemos describir (6.35) como

$$(A - \frac{1}{2}BB^T P^{-1})P + P(A - \frac{1}{2}BB^T P^{-1})^T = (A - BK)P + P(A - BK)^T \prec 0, \quad (5.62)$$

y multiplicando a la izquierda y derecha por  $Q := P^{-1}$  tenemos que

$$Q(A - BK) + (A - BK)^T Q \prec 0, \quad (5.63)$$

la cual es una ecuación de Lyapunov. Por lo tanto, podemos concluir que  $(A - BK)$  tiene todos sus autovalores *estables*, esto es, si uno escoge la entrada

$$u = -Kx = -\frac{1}{2}B^T P^{-1}x, \quad (5.64)$$

en el sistema lti estabilizable, entonces  $x(t) \rightarrow 0$  exponencialmente rápido según  $t \rightarrow \infty$ .

Encontrar la matrix  $P$  en (6.41) requiere resolver la *linear matrix inequality* (LMI) en (6.35). Para ello existen herramientas numéricas *LMI solvers* disponibles en Matlab o Python.

Si el sistema lti es controlable (recordemos que es más restrictivo que estabilizable), la matriz  $K$  en (6.40) puede explotar el Teorema 6.2.4. Es decir, podemos encontrar una matriz  $K$  tal que  $(A - BK)$  tenga sus autovalores donde nosotros queramos por diseño. Por ejemplo, a través del Teorema de Ackermann.

**Teorema 5.8.3.** *Si el sistema lti es controlable, entonces  $(A - BK)$  tiene como autovalores un conjunto deseado  $\Lambda$  si*

$$K = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad 1] C^{-1} \Delta(A), \quad (5.65)$$

en donde  $C$  es la matrix de controlabilidad (6.31) y  $\Delta$  es el polinomio característico que satisface  $\Lambda$ .

Obviamente, al requerir la inversa de la matrix de controlabilidad, se requiere por tanto que  $C$  sea de rango máximo. Es decir, el sistema lti ha de ser controlable para poder aplicar el Teorema 6.3.3.

## 5.9. Observabilidad en sistemas lti

### 5.9.1. Subespacio inobservable y el Gramiano de observabilidad

**Definición 5.9.1** (Definición). El subespacio inobservable  $\mathcal{UO}$  de un sistema lti consiste en todos aquellos estados que satisfacen

$$Ce^A x_0 = 0. \quad (5.66)$$

Esta definición está motivada por los siguientes hechos. Recuerda que en (5.8) podemos derivar que

$$\begin{aligned} y(t) &= Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \\ \tilde{y}(t) &:= y(t) - \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau - Du(t) = Ce^{At}x_0. \end{aligned} \quad (5.67)$$

En el lado izquierdo de (6.47) tenemos un par entrada/salida, y en el lado derecho de (6.47) tenemos el estado inicial  $x_0$ . De (6.47) podemos observar dos propiedades interesantes:

1. Cuando un particular  $x_0$  es compatible con un par entrada/salida, entonces todo estado inicial de la forma  $x_0 + x_u$ ,  $x_u \in \mathcal{UO}$  también es compatible con la misma entrada/salida.
2. Cuando  $\mathcal{UO}$  contiene únicamente el vector cero, entonces existe al menos un estado inicial  $x_0$  compatible con un par entrada/salida.

**Definición 5.9.2** (Definición). Un sistema lti es observable si su  $\mathcal{UO}$  contiene solo el vector cero.

**Definición 5.9.3** (Definición). Dados dos instantes de tiempo  $t_1 > t_0 \geq 0$ , el Gramiano de observabilidad viene definido por

$$W_O(t_0, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} e^{A^T(\tau-t_0)}C^T C e^{A(\tau-t_0)}d\tau \quad (5.68)$$

Partiendo de (6.46), se puede llegar a

$$\text{Ker } W_O(t_0, t_1) = \mathcal{UO}. \quad (5.69)$$

### 5.9.2. Tests de observabilidad

Lo siguiente se puede demostrar formalmente apoyándonos en el teorema de Cayley-Hamilton. Por ejemplo, para ver por qué paramos en  $(n-1)$ . Vamos a ver la sensibilidad con respecto de los estados  $x$  de  $y$  y de sus derivadas con respecto del tiempo <sup>4</sup> cuando  $u(t) = 0$ .

$$\begin{aligned} y(t) = Cx(t) &\implies \dot{y}(t) = C\dot{x}(t) = CAx(t) \implies \ddot{y}(t) = CA^2x(t) \quad \dots \\ &\implies \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} = CA^{n-1}x(t), \end{aligned}$$

Si no queremos perder ninguna información sobre la señal  $x(t)$ , entonces la matriz

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}_{(kn) \times n}, \quad (5.70)$$

debe de ser de rango máximo en sus columnas. Vamos a introducir los siguientes resultados equivalentes

**Teorema 5.9.1.** *Un sistema lti es observable si y solo si el rango de  $\mathcal{O}$  es igual a  $n$ .*

<sup>4</sup>Observa como  $B$  y  $D$  no juegan ningún papel aquí

**Teorema 5.9.2.** *Un sistema lti es observable si y solo si no hay ningún autovector de  $A$  en el kernel de  $C$ .*

Fíjate que de (6.50) podemos derivar un test de controlabilidad

$$\mathcal{O}^T = [C^T \quad A^T C^T \quad \dots \quad (A^{n-1})^T C^T]_{n \times (kn)}, \quad (5.71)$$

que vendría dado por el siguiente sistema lti *dual*

$$\Sigma_{\text{dual}} := \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= A^T \hat{x}(t) + C^T \bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) &= B^T \hat{x}(t) + D^T \bar{u}(t) \end{cases}. \quad (5.72)$$

Por lo tanto, podemos formular el siguiente resultado

**Teorema 5.9.3.** *Un sistema lti es observable si y solo si su sistema dual (6.52) es controlable.*

No haría falta ningún test nuevo para concluir la observabilidad de un sistema lti. Simplemente, construimos su sistema dual y estudiamos su controlabilidad.

## 5.10. Estimación de estados en sistemas lti

El estimador más simple consiste en hacer una copia de la dinámica del sistema lti

$$\Sigma_{\text{estimator}} := \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases}, \quad (5.73)$$

en donde  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  y  $y \in \mathbb{R}^m$  será nuestra estimación de los estados y de la salida del sistema lti respectivamente. Ahora, definamos la señal de error

$$e(t) := \hat{x}(t) - x(t), \quad (5.74)$$

por lo tanto, cuando el error  $e$  sea cero, querrá decir que estamos estimando los estados del sistema lti correctamente. Vamos a ver, la dinámica de la señal de error

$$\dot{e}(t) = \dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t) = A\hat{x} + Bu - Ax - Bu = Ae(t), \quad (5.75)$$

por lo que  $e(t) \rightarrow 0$  según  $t \rightarrow \infty$  exponencialmente rápido si  $A$  es una matriz *estable* para toda entrada  $u(t)$ .

¿Y si  $A$  no es una matriz estable? Entonces considera el siguiente estimador

$$\Sigma_{\text{estimator2}} := \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(\hat{y}(t) - y(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases}, \quad (5.76)$$

en donde tenemos dos entradas  $u$  y  $(\hat{y} - y)$  a la dinámica de  $\hat{x}$ , y  $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$  es una matriz de ganancias. Observa que la señal  $y$  viene del sistema lti original, y es algo que podemos medir al ser su salida. Ahora, veamos la nueva dinámica para la señal de error  $e(t)$ .

$$\dot{e} = A\hat{x} + Bu - L(\hat{y} - y) - (Ax + Bu) = (A - LC)e, \quad (5.77)$$

por lo tanto, si  $(A - LC)$  es una matriz de estabilidad, entonces  $e(t) \rightarrow 0$  según  $t \rightarrow \infty$  exponencialmente rápido para cualquier señal  $u(t)$ .

Para el cálculo de  $L$  bastaría con calcular  $K$  para el sistema dual utilizando los resultados de la sección 6.3. En particular  $L = K_{\text{dual}}^T$ , y  $K = L_{\text{dual}}^T$ .

A continuación, los resultados *dual*es para observabilidad.



**Teorema 5.10.1.** *Un sistema lti es detectable si y solo si los autovectores de  $A$  correspondientes a autovalores inestables no están en el kernel de  $C$ .*

Si un sistema es detectable, entonces su dual es estabilizable, y viceversa.

**Teorema 5.10.2.** *Cuando un par  $(A, C)$  es detectable, entonces es siempre posible encontrar una matriz  $L$  tal que  $(A - LC)$  es una matriz de estabilidad.*

**Teorema 5.10.3.** *Cuando un par  $(A, C)$  es observable, entonces es siempre posible encontrar una matriz  $L$  tal que los autovalores de  $(A - LC)$  puedan estar donde queramos.*

## 5.11. Estabilización de sistemas lti con realimentación a través de su salida

Si  $C$  no es invertible, entonces no tenemos un cálculo directo de los estados  $x$  de un sistema lti; por lo tanto no podemos aplicar la señal de control  $u = -Kx$  como en la sección ??.

¿Qué ocurre si el sistema lti es observable, o al menos detectable? Entonces, vamos a mostrar que podemos utilizar como controlador la señal

$$u = -K\hat{x}, \quad (5.78)$$

donde  $\hat{x}$  son los estados de nuestro estimador (6.56). Vamos a aplicar (6.58) a un sistema lti, por lo que la dinámica será

$$\dot{x} = Ax - BK\hat{x} = Ax - BK(e + x) = (A - BK)x - BKe, \quad (5.79)$$

que junto con (6.57) nos lleva al siguiente sistema autónomo

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & -BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}, \quad (5.80)$$

el cual es un sistema triangular, y será exponencialmente estable porque  $(A - BK)$  y  $(A - LC)$  son matrices diseñadas para tener todos sus autovalores estables.

## 5.12. Regulador cuadrático lineal o LQR

Si el par  $(A, B)$  es controlable, entonces hemos visto que podemos colocar los autovalores de  $(A - BK)$  donde queramos. Entonces uno podría preguntarse ¿cuál es el mejor lugar para los autovalores?

El *mejor* lugar responde al siguiente criterio de diseño. Considera que tenemos la siguiente salida de interés

$$z(t) = Gx(t) + Hu(t). \quad (5.81)$$

Por supuesto  $z(t) \in \mathbb{R}^l$  puede ser la señal de salida  $y(t)$ , pero no tiene por qué. En particular, debemos distinguir que  $y(t)$  la usaremos para alimentar el estimador/controlador, y  $z(t)$  la usaremos para optimizar nuestro criterio sobre el *mejor* lugar para los autovalores de  $(A - BK)$ .

El problema LQR está definido de la siguiente manera:

**Problema 5.12.1.** *Encontrar una entrada  $u(t), t \in [0, \infty)$  que minimice la siguiente función de coste*

$$J := \int_0^\infty z(t)^T \bar{Q} z(t) + \rho u(t)^T \bar{R} u(t) dt, \quad (5.82)$$

donde  $\bar{Q} \in \mathbb{R}^{l \times l}$  y  $\bar{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  son matrices positivas definidas, y  $\rho$  es una constante positiva para relativizar ambos términos en (6.62).

Como  $z = Gx + Hu$ , entonces  $J$  puede ser rescrito como

$$J := \int_0^\infty x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t) + 2x(t)^T N u(t) dt, \quad (5.83)$$

donde  $Q = G^T \bar{Q} G$ ,  $R = H^T \bar{Q} H + \rho \bar{R}$ , y  $N = G^T \bar{Q} H$ .

Observa como  $\bar{Q}$ ,  $\bar{R}$  y  $\rho$  determinan como de importante es el minimizar los elementos de  $z$  y  $u$ .

Si somos capaces de encontrar una matriz positiva definida  $P$  tal que satisface la *ecuación algebraica de Ricatti*

$$A^T P + P A + Q - (P B + N) R^{-1} (B^T P + N^T) = 0, \quad (5.84)$$

entonces

**Teorema 5.12.1.** *Si  $A - B R^{-1} (B^T P + N^T)$  es una matriz de estabilidad. Entonces, la señal de entrada*

$$u(t) = -R^{-1} (B^T P + N^T) x(t), \quad (5.85)$$

*minimiza  $J$ , es más,  $J = x(0)^T P x(0)$ .*

La *regla de Bryson* nos orienta para unos valores razonables de  $\bar{Q}$  y  $\bar{R}$ :

$$\bar{Q}_{ii} = \frac{1}{\text{valor máximo aceptable de } z_i^2}$$

$$\bar{R}_{jj} = \frac{1}{\text{valor máximo aceptable de } u_j^2}.$$

### 5.13. Resumen para la estabilización de un punto en un sistema no lineal

Dado el siguiente sistema no lineal

$$\Sigma := \begin{cases} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= g(x, u) \end{cases}, \quad (5.86)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el estado del sistema,  $u \in \mathbb{R}^k$  es la entrada al sistema,  $y \in \mathbb{R}^m$  es la salida del sistema, y  $f(x, u) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $g(x, u) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  son funciones arbitrarias.

El siguiente algoritmo nos permite estabilizar un punto arbitrario  $x^*$  del sistema (6.66).

1. Escoge un punto de interés  $x^*$ , y entonces calcula  $u^*$  de tal manera que  $f(x^*, u^*) = 0$ .
2. Lineariza (6.66) alrededor de  $x^*$  y  $u^*$ , i.e., calcula sus Jacobianos  $A := \frac{\partial f(x, u)}{\partial x}$  y  $B := \frac{\partial f(x, u)}{\partial u}$  y evalúalos en  $x = x^*$  y  $u = u^*$ . Observa, que si un Jacobiano no existe, e.g.,  $f(x, u)$  no es real analítica, entonces, no podemos continuar.
3. Comprobar si  $(A, B)$  es controlable. Si este test falla, entonces comprueba si es almenos estabilizable. Si ambos tests fallan, no podemos continuar.
4. Calcular el Jacobiano  $C := \frac{\partial g(x, u)}{\partial x}$ . Si  $C$  no es invertible, entonces necesitaremos un observador/estimador. Si  $C$  es invertible, entonces ves al paso 8.

5. Si necesitamos un estimador, entonces comprueba que  $(A, C)$  es observable. Si no, comprueba que  $(A, C)$  es detectable. Si ambos tests fallan, no podemos continuar.
6. Si  $(A, C)$  es observable, entonces contruye el estimador (6.56), con  $D := \frac{\partial g(x, u)}{\partial u}$ , y calcula  $L$  de tal manera que  $(A - LC)$  sea una matriz estable. Por ejemplo, con el Teorema 6.3.3.
7. Si  $(A, C)$  no es observable pero sí detectable, entonces, calcula  $L$  a través del sistema dual con el test de Lyapunov para la estabilización como en (6.41). Recuerda, que entonces  $L = K^T$ .
8. Si el par  $(A, B)$  es controlable, entonces podemos calcular  $K$  de tal manera que  $(A - BK)$  sea una matriz estable. Por ejemplo, con el Teorema 6.3.3.
9. Si  $(A, B)$  no es controlable, pero estabilizable. Entonces calcula  $K$  a través del test de Lyapunov para la estabilización como en (6.41).
10. Felicidades! Escoge<sup>5</sup>  $u(t) = -Kx(t)$  o  $u(t) = -K\hat{x}(t)$  si has necesitado de un estimador.
11. Por último recuerda que el controlador ha sido diseñado para un sistema no lineal. Por lo que existe una región dada en (6.13) que garantiza la convergencia. Fuera de ahí, no podemos decir nada con seguridad.

## 5.14. Seguimiento por parte de la salida de una consigna constante

Considera el siguiente sistema lti con dos señales de salida

$$\Sigma := \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^k \\ y_1(t) &= C_1x(t), \quad y_1 \in \mathbb{R}^m \\ y_2(t) &= C_2x(t), \quad y_2 \in \mathbb{R}^l \end{cases}. \quad (5.87)$$

Hasta ahora nos hemos centrado en hacer el origen del vector de estados en (6.67) estable, y por lo tanto las señales de salida  $y_{1,2}(t) = C_{1,2}x(t)$  convergen a cero si  $x(t) \rightarrow 0$  según  $t \rightarrow \infty$ .

Por mantener esta sección corta, vamos a considerar que  $C_1 = I$ , es decir, que podemos medir todos los estados  $x$  a partir de la salida  $y_1$ . Vamos a utilizar esta señal para después diseñar un controlador de realimentación de estados. Si  $C_1$  fuera una matriz arbitraria, pero el par  $(A, C_1)$  fuera observable, la técnica explicada en esta sección seguiría siendo aplicable con el uso de un estimador.

En esta sección vamos a centrarnos en que dada una consigna constante  $y_d \in \mathbb{R}^l$ , entonces que el objetivo sea  $y_2(t) \rightarrow y_d$  según  $t \rightarrow \infty$ .

*Atención 5.14.1.* Observa que para que  $y_2(t)$  pueda alcanzar un valor arbitrario  $y_d$ , entonces ha de existir un estado  $x_d \in \mathbb{R}^n$  tal que  $y_d = C_2x_d$ . Es decir, necesitamos la condición de que  $C_2$  sea de rango máximo para poder imponer sin problemas un  $y_d$  arbitrario.

Considera el cambio de variable  $\tilde{x}(t) = x(t) - x_d$ , entonces el sistema (6.67) se puede reescribir como

$$\Sigma := \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) &= A\tilde{x}(t) + Bu(t) + Ax_d \\ \tilde{y}_1(t) &= \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}_2(t) &= C_2\tilde{x}(t) \end{cases}, \quad (5.88)$$

<sup>5</sup>Recuerda que nos referimos muchas veces a  $u(t)$  como la entrada al sistema lti, para el sistema lineal no olvides que es  $u(t) = u^*(t) + \delta u(t)$ , i.e., para el sistema no lineal tendríamos que  $u(t) = u^* - K\delta x$ .

y si existe una solución  $u^*$  tal que  $Bu^* = -Ax_d$ , entonces con una entrada  $u = \tilde{u} + u^*$  tenemos que

$$\Sigma := \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) &= A\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}_1(t) &= \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}_2(t) &= C_2\tilde{x}(t) \end{cases}, \quad (5.89)$$

para el cual podemos encontrar una matriz  $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $u(t) = K(x(t) - x_d) + u^*$  haga el origen de (6.69) asintóticamente estable. Observa que si  $\tilde{y}_2 \rightarrow 0$  según  $t \rightarrow \infty$ , entonces  $y_2(t) \rightarrow y_d$  también. También observa que para el diseño de  $K$ , las matrices  $A$  y  $B$  de (6.69) son las mismas que en (6.67). Vamos a resumir este resultado en el siguiente teorema

**Teorema 5.14.1.** *Dado el sistema lti (6.67) con  $C_1 = I$ , entonces  $y_2(t) \rightarrow y_d \in \mathbb{R}^l$  según  $t \rightarrow \infty$  con la siguiente ley de control*

$$u(t) = K(x(t) - x_d) + u^*,$$

donde  $x_d$  y  $u^*$  han de existir como soluciones a

$$\begin{cases} y_d &= C_2 x_d \\ Bu^* &= -Ax_d \end{cases}.$$

### Control integral

El Teorema (6.9.1) se basa fundamentalmente en que hay que conocer con exactitud las matrices  $A$  y  $B$  para poder calcular una señal en *lazo abierto*  $u^*$ . Cualquier error de modelado puede hacernos calcular la  $u^*$  equivocada y consecuentemente  $y_2(t)$  puede no converger al valor deseado  $y_d$ .

Vamos a utilizar la técnica conocida como *control integral* para garantizar que  $y_2(t) \rightarrow y_d$  aún bajo errores de modelado. Definamos la siguiente señal (integral)

$$e_i(t) := \int_0^t (y_2(t) - y_d) dt, \quad (5.90)$$

cuya dinámica viene dada por

$$\dot{e}_i(t) = y_2(t) - y_d + e_i(0), \quad e_i(0) \in \mathbb{R}^l, \quad (5.91)$$

donde  $e_i(0)$  por conveniencia tenemos la libertad de igualarla a cero. Observa que cuando  $y_2 = y_d$ , entonces (6.70) es cero, i.e., la señal  $e_i(t)$  está en equilibrio. Vamos a apilar las señales  $x$  y  $e_i$  y analizar su dinámica.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix} y_d. \quad (5.92)$$

Ahora vamos a proponer la siguiente ley de control  $u = -[K \quad K_I] \begin{bmatrix} x \\ e_i \end{bmatrix} = -Kx - K_I e_i$ , entonces tenemos que

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & -K_I \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix} y_d. \quad (5.93)$$

Si los autovalores de la matriz  $\begin{bmatrix} A - BK & -K_I \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}$  son estables, entonces el sistema (6.73) es exponencialmente estable pero el equilibrio no estará en el origen ya que está forzado por el término

$\begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix} y_d$ . Independientemente del nuevo equilibrio<sup>6</sup> *forzado*, lo que si es cierto es que en el equilibrio tenemos que  $\dot{e}_i = 0$ , por lo que  $y_2 = y_d$ . La salida  $y_2$  ha alcanzado el valor deseado y es tolerante a errores de modelado en  $A$  y  $B$  ya que la dinámica de  $e_i(t)$  no depende de ellos. No obstante, grandes errores de modelado, por ejemplo para  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  podría hacer la matriz  $\begin{bmatrix} \tilde{A} - \tilde{B}K & -K_I \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}$  con autovalores con parte real positiva.

¿Podemos encontrar  $K = \begin{bmatrix} K & K_I \end{bmatrix}$  tal que  $\begin{bmatrix} A - BK & -K_I \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}$  pueda tener los autovalores donde nosotros queramos? Para ello entonces hay que responder a la siguiente pregunta:

¿Es el par  $\left( \begin{bmatrix} A & 0 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \right)$  controlable (o al menos estabilizable)? Si la respuesta es afirmativa,

entonces podemos encontrar una matriz  $K \in \mathbb{R}^{(n+l) \times (n+l)}$  tal que  $u = -K \begin{bmatrix} x \\ e_i \end{bmatrix}$  haga el sistema (6.73) exponencialmente estable.

Observa que si  $v_i$  es autovector de  $A^T$  con autovalor  $\lambda_i$ , entonces  $v_i^T A = v_i^T \lambda_i$ , es decir  $\begin{bmatrix} v_i^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_i^T A & 0 \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} v_i^T & 0 \end{bmatrix}$ . Es decir,  $\begin{bmatrix} v_i^T & 0 \end{bmatrix}$  es autovector de  $\begin{bmatrix} A & 0 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}$ . Aplicando el Teorema 6.2.4 podemos comprobar que el par  $\left( \begin{bmatrix} A & 0 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \right)$  sería controlable si

$$\begin{bmatrix} v_i^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = v_i^T B \neq 0, \quad (5.94)$$

y eso es solo posible si el par  $(A, B)$  es controlable. Es decir, el control integral no ha variado las propiedades de controlabilidad del sistema original. Podemos resumir los resultados alcanzados con el siguiente teorema

**Teorema 5.14.2.** *Considera el sistema lti (6.67) con  $C_1 = I$  y  $C_2$  con rango máximo. Considera la señal integral  $e_i(t)$  en (6.70) para un valor deseado  $y_d \in \mathbb{R}^l$  para  $y_2(t)$ . Entonces, existe una matriz  $K \in \mathbb{R}^{(n+l) \times (n+l)}$  tal que la señal de entrada  $u = -K \begin{bmatrix} x \\ e_i \end{bmatrix}$  ocasiona que  $y_2(t) \rightarrow y_d$  asintóticamente según  $t \rightarrow \infty$  si y solo si el par  $(A, B)$  en (6.67) es controlable (estabilizable).*

---

<sup>6</sup>Si  $\begin{bmatrix} A - BK & -K_I \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}$  es una matriz de estabilidad, y  $C_2$  es de rango máximo, el conjunto de equilibrio de (6.73) puede demostrarse como  $\mathcal{E} := \{x, e : C_2 x = y_d, x = (A - BK)^{-1} K_I e, y_d \in \mathbb{R}^l\}$ , es decir  $[x(t), e(t)] \rightarrow \mathcal{E}$  según  $t \rightarrow \infty$ .



## Capítulo 6

# Realimentación para el control de sistemas lineales

### 6.1. (Internal or Lyapunov) Stability

Decimos que el sistema lineal (5.1) en el sentido de Lyapunov

1. es *(marginally) estable* si para cada condición inicial  $x_0$ , entonces  $x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$  está acotada uniformemente para todo  $t > t_0$ .
2. es *asintóticamente estable* si además  $x(t) \rightarrow 0$  según  $t \rightarrow \infty$ .
3. es *exponencialmente estable* si además  $\|x(t)\| \leq ce^{\lambda(t-t_0)}\|x(t_0)\|$  para algunas constantes  $c, \lambda > 0$ .
4. es *inestable* si no es marginalmente estable.

Centrémonos en sistemas *lti*, es decir, cuando  $A$  tiene coeficientes constantes o  $\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$ . Entonces, podemos establecer una clara relación entre los autovalores de  $A$  y las definiciones de estabilidad en el sentido de Lyapunov únicamente inspeccionando la solución a  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  dada por (5.7).

El sistema  $\dot{x}(t) = Ax(t)$

1. es marginalmente estable si y solo si todos los autovalores de  $A$  tienen parte real negativa. Si algún autovalor tiene parte real nula, entonces su bloque de Jordan ha de ser  $1 \times 1$ .
2. es asintóticamente estable si y solo si todos los autovalores de  $A$  tienen estrictamente parte real negativa.
3. es exponencialmente estable si es asintóticamente estable.
4. es inestable si y solo si al menos un autovalor de  $A$  tiene parte real positiva, o al menos uno de los autovalores con parte real nula tiene un bloque de Jordan mayor de  $1 \times 1$ .

Comprobando las soluciones (5.7)-(5.8), podemos decir que si  $A$  tiene coeficientes constantes y  $\dot{x} = Ax$  es asintóticamente estable, entonces  $x(t) \rightarrow \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}B(\tau)u(\tau)d\tau$  según  $t \rightarrow \infty$ .

### 6.1.1. Estabilidad local de sistemas linearizados

Si  $x(t)$  es asintóticamente (exponencialmente) estable en  $\dot{x}(t) = Ax(t)$ , entonces, existe una única  $P$  que satisface la *ecuación de Lyapunov*

$$A^T P + PA = -Q, \quad \forall Q \succ 0. \quad (6.1)$$

Uno puede probar (6.1) si considera

$$P := \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt. \quad (6.2)$$

Pista: Primero, sustituye  $P$  en (6.1), y después verifica el cálculo  $\frac{d}{dt} (e^{A^T t} Q e^{At})$ . Si uno prueba que  $P$  es única, entonces  $P$  ha de ser positiva definida acorde a su definición (6.2).

Ahora vamos a considerar un sistema continuo, autónomo y no lineal en general

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (6.3)$$

con un punto de equilibrio  $x^* \in \mathbb{R}^n$ , i.e.,  $f(x^*) = 0$ . La dinámica de  $x(t)$  puede ser aproximada considerando  $x(t) = x^* + \delta x(t)$  donde

$$\delta \dot{x}(t) = A \delta x(t), \quad A := \frac{\partial f(x)}{\partial x}. \quad (6.4)$$

¿Cómo de buena es esta aproximación?

**Teorema 6.1.1.** *Asume que  $f(x)$  es dos veces diferenciable. Si (6.4) es exponencialmente estable, entonces, existe un entorno  $\mathcal{B}$  alrededor de  $x^*$  y constantes  $c, \lambda > 0$  tal que para cada solución  $x(t)$  del sistema (6.3) que empiece con  $x(t_0) \in \mathcal{B}$ , tenemos que*

$$\|x(t) - x^*\| \leq c e^{\lambda(t-t_0)} \|x(t_0) - x^*\|, \quad \forall t \geq t_0. \quad (6.5)$$

**¿Cómo de grande es  $\mathcal{B}$ ? ¿Podemos estimarlo? Esbozo de la prueba del Teorema 6.1.1**

Como  $f$  es dos veces diferenciable, de su desarrollo de Taylor tenemos que

$$r(x) := f(x) - (f(x^*) + A(x - x^*)) = f(x) - A\delta x = O(\|\delta x\|^2), \quad (6.6)$$

lo cual significa que existe una constante  $c$  y una bola  $\bar{B}$  alrededor de  $x^*$  tal que

$$\|r(x)\| \leq c \|\delta x\|^2, \quad x \in \bar{B}. \quad (6.7)$$

Si el sistema linearizado es exponencialmente estable, tenemos que

$$A^T P + PA = -I. \quad (6.8)$$

Ahora considera la siguiente señal escalar

$$v(t) := (\delta x)^T P \delta x, \quad \forall t \geq 0. \quad (6.9)$$

Observa que  $\delta x(t) = x(t) - x^*$ , entonces  $\delta \dot{x}(t) = \dot{x}(t) = f(t)$ . Por lo tanto, la derivada con respecto del tiempo de  $v(t)$  satisface

$$\begin{aligned} \dot{v} &= f(x)^T P \delta x + (\delta x)^T P f(x) \\ &= (A\delta x + r(x))^T P \delta x + (\delta x)^T P (A\delta x + r(x)) \\ &= (\delta x)^T (A^T P + PA) \delta x + 2(\delta x)^T P r(x) \\ &= -\|\delta x\|^2 + 2(\delta x)^T P r(x) \\ &\leq -\|\delta x\|^2 + 2\|P\| \|\delta x\| \|r(x)\|. \end{aligned} \quad (6.10)$$



Sabemos que  $v(t)$  es positiva excepto cuando  $\delta x = 0$ . Si podemos garantizar que  $\dot{v}(t) < 0$  y que  $\dot{v}(t) = 0$  solo cuando  $\delta x = 0$ , entonces  $v(t) \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow \infty$ , lo cual implica que  $\delta x(t) \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow \infty$ . Ahora, si  $x \in \mathcal{B}$ , entonces

$$\dot{v} \leq -\left(1 - 2c\|P\|\|\delta x\|\right)\|\delta x\|^2, \quad (6.11)$$

Por lo tanto, si la desviación  $\delta x$  es suficientemente pequeña, i.e.,

$$\|\delta x\| < \frac{1}{2c\|P\|}, \quad (6.12)$$

entonces  $\dot{v}(t) < 0$  si  $\delta x(0) \neq 0$  y  $\delta x(0) < \frac{1}{2c\|P\|}$ .

Podemos concluir que una estimación de  $\mathcal{B}$  es

$$\mathcal{B} := \{\delta x : \|\delta x\| < \frac{1}{2c\|P\|}\}. \quad (6.13)$$

## 6.2. Controlabilidad

### 6.2.1. Subespacios alcanzables y controlables

Recordemos que cuando aplicamos una entrada genérica  $u(\cdot)$  a (5.1), transferimos el sistema de un estado  $x(t_0) := x_0$  a un estado  $x(t_1) := x_1$ , que además podemos calcular con la expresión

$$x_1 = \Phi(t_1, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau, \quad (6.14)$$

donde recordemos que  $\Phi(\cdot)$  es la matriz de transición de estados del sistema.

Preguntas:

1. ¿Qué estados puedo alcanzar desde  $x_0$ ?
2. ¿Existe siempre una entrada  $u(\cdot)$  que transfiera un estado arbitrario  $x_0$  a otro  $x_1$ ?

Estas dos preguntas llevan a acuñar las definiciones de (sub)espacios alcanzables y controlables.

**Definición 6.2.1** (Subespacio alcanzable). Dados dos instantes de tiempo  $t_1 > t_0 \geq 0$ , el subespacio alcanzable (o controlable desde el origen)  $\mathcal{R}[t_0, t_1]$  consiste en todos los estados  $x_1$  por los que existe una entrada  $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^k$  que transfiere el estado  $x_0 = 0$  a  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ ; i.e.,

$$\mathcal{R}[t_0, t_1] := \left\{x_1 \in \mathbb{R}^n : \exists u(\cdot), x_1 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\right\}. \quad (6.15)$$

**Definición 6.2.2** (Subespacio controlable). Dados dos instantes de tiempo  $t_1 > t_0 \geq 0$ , el subespacio controlable (o controlable hacia el origen)  $\mathcal{C}[t_0, t_1]$  consiste en todos los estados  $x_0$  por los que existe una entrada  $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^k$  que transfiera un estado  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  a  $x_1 = 0$ ; i.e.,

$$\mathcal{C}[t_0, t_1] := \left\{x_0 \in \mathbb{R}^n : \exists u(\cdot), 0 = \Phi(t_1, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\right\}. \quad (6.16)$$

¿Cómo podemos calcular  $\mathcal{R}[t_0, t_1]$  y  $\mathcal{C}[t_0, t_1]$ ? Para ello vamos a introducir y explotar las siguientes dos matrices llamadas *Gramianos*.

**Definición 6.2.3** (Gramianos de alcanzabilidad y controlabilidad).

$$W_R(t_0, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) B(\tau)^T \Phi(t_1, \tau)^T d\tau \quad (6.17)$$

$$W_C(t_0, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau) B(\tau) B(\tau)^T \Phi(t_0, \tau)^T d\tau \quad (6.18)$$

**Teorema 6.2.1.** *Dados dos instantes de tiempo  $t_1 > t_0 \geq 0$ ,*

$$\mathcal{R}[t_0, t_1] = \text{Im}\{W_R(t_0, t_1)\} \quad (6.19)$$

$$\mathcal{C}[t_0, t_1] = \text{Im}\{W_C(t_0, t_1)\}, \quad (6.20)$$

donde  $\text{Im}\{A\} := \{y \in \mathbb{R}^m : \exists x \in \mathbb{R}^n, y = Ax\}$  para una matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

*Demostración.* Solo vamos a probar (6.19) porque (6.20) tiene una prueba similar. Necesitamos mostrar ambas implicaciones: primero, si  $x_1 \in \text{Im}\{W_R(t_0, t_1)\}$ , entonces  $x_1 \in \mathcal{R}[t_0, t_1]$ ; segundo, si  $x_1 \in \mathcal{R}[t_0, t_1]$  entonces  $x_1 \in \text{Im}\{W_R(t_0, t_1)\}$ .

Cuando  $x_1 \in \text{Im}\{W_R(t_0, t_1)\}$ , existe un vector  $\mu_1 \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$x_1 = W_R(t_0, t_1) \eta_1. \quad (6.21)$$

Escoge  $u(\tau) = B(\tau)^T \Phi(t_1, \tau)^T \eta_1$ , y sustitúyelo en (6.15), entonces tenemos que

$$x_1 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) B(\tau)^T \Phi(t_1, \tau)^T \eta_1 d\tau = W_R(t_0, t_1) \eta_1. \quad (6.22)$$

Cuando  $x_1 \in \mathcal{R}[t_0, t_1]$ , existe una entrada  $u(\cdot)$  para la cual

$$x_1 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau. \quad (6.23)$$

Si (6.23) es en  $\text{Im}\{W_R(t_0, t_1)\}$ , entonces  $x_1^T \mu = 0$ ,  $\mu \in \text{Ker}\{W_R(t_0, t_1)\}$ <sup>1</sup> Vamos a calcular

$$x_1^T \mu = \int_{t_0}^{t_1} u(\tau)^T B(\tau)^T \Phi(t_1, \tau)^T \mu d\tau. \quad (6.24)$$

Y observando que

$$\begin{aligned} \mu \in \text{Ker}\{W_R(t_0, t_1)\} &\implies \mu^T W_R(t_0, t_1) \mu = 0 \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \mu^T \Phi(t_1, \tau) B(\tau) B(\tau)^T \Phi(t_1, \tau)^T \mu d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \|B(\tau)^T \Phi(t_1, \tau)^T \mu\|^2 d\tau, \end{aligned} \quad (6.25)$$

obtenemos que  $B(\tau)^T \Phi(t_1, \tau)^T \mu = 0$ , llevando a (6.24) ser igual a cero.  $\square$

**Atención 6.2.1.** Observa que hemos probado que  $u(\tau) = B(\tau)^T \Phi(t_1, \tau)^T \eta_1$  puede ser como una entrada de control para transferir  $x_0 = 0$  a  $x_1 \in \mathbb{R}^n$  en un tiempo finito  $(t_1 - t_0)$ . De hecho, esta es la señal de control *en lazo abierto de mínima energía*.

<sup>1</sup>If  $x \in \text{Ker}\{A^T\}$ , por lo que  $A^T x = 0$ . Si  $y \in \text{Im}\{A\}$ , entonces  $y = A\eta$ . Por lo tanto,  $x^T y = x^T A\eta = \eta^T A^T x = \eta^T \cdot 0 = 0$ . Observa que  $W_R^T = W_R$  por definición.

Vamos a ver este hecho en más detalle. Considera otra señal de control  $\bar{u}(t)$  tal que

$$x_1 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) \bar{u}(\tau) d\tau. \quad (6.26)$$

Para que sea cierto, debemos tener For this to hold, we must have

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) v(\tau) d\tau = 0, \quad (6.27)$$

donde  $v(\tau) = u(\tau) - \bar{u}(\tau)$ . Vamos a ver la energía asociada a  $\bar{u}$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \|\bar{u}(\tau)\|^2 d\tau &= \int_{t_0}^{t_1} \|B(\tau)^T \Phi(t_1, \tau)^T \eta_1 + v(\tau)\|^2 d\tau \\ &= \eta_1^T W_R(t_0, t_1) \eta_1 + \int_{t_0}^{t_1} \|v(\tau)\|^2 d\tau + 2\eta_1^T \int_{t_0}^{t_1} B(\tau) \Phi(t_1, \tau) v(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (6.28)$$

donde el tercer término es cero por (6.27). Por lo tanto, si  $\bar{u}(t)$  difiere  $v(t)$  de  $u(t)$ , gastará  $\int_{t_0}^{t_1} \|v(\tau)\|^2 d\tau$  más energía que  $u(t)$ .

### 6.2.2. Matriz de controlabilidad para un sistema lti

Consideremos un sistema lineal (5.1) con  $A$  y  $B$  con coeficientes constantes.

El teorema de Cayley-Hamilton nos permite escribir

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) A^i, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (6.29)$$

para algunas funciones escalares apropiadas  $\alpha_i(t)$ . Tenemos también que si  $A$  y  $B$  tienen coeficientes constantes, entonces

$$\begin{aligned} x_1 &= \int_0^{t_0-t_1} e^{At} B u(t) dt \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} A^i B \left( \int_0^{t_1-t_0} \alpha_i(t) u(t) dt \right) \\ &= \mathcal{C} \begin{bmatrix} \int_0^{t_1-t_0} \alpha_0(t) u(t) dt \\ \vdots \\ \int_0^{t_1-t_0} \alpha_{n-1}(t) u(t) dt \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.30)$$

donde

$$\mathcal{C} := [B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B]_{n \times (kn)}, \quad (6.31)$$

es la llamada matrix de controlabilidad del sistema lti.

*Atención 6.2.2.* Observa que  $\mathcal{C}[t_0, t_1]$  y  $\mathcal{C}$  son diferentes objetos. El primero es un (sub)espacio, mientras que el segundo es una matriz.

Observa que acabamos de probar que la imagen de  $\mathcal{C}$  es la misma que la imagen de  $W_R(t_0, t_1)$ . La siguiente afirmación más general puede probarse también:

**Teorema 6.2.2.** *Dados dos instantes de tiempo  $t_0, t_1$ , con  $t_1 > t_0$ , tenemos que*

$$\mathcal{R}[t_0, t_1] = \text{Im}\{W_R(t_0, t_1)\} = \text{Im}\{\mathcal{C}\} = \text{Im}\{W_C(t_0, t_1)\} = \mathcal{C}[t_0, t_1], \quad (6.32)$$

Podemos extraer dos importantes consecuencias del Teorema 6.2.2 para sistemas lti. ¡Observa que  $\text{Im}\{\mathcal{C}\}$  no depende de ninguna variable tiempo!

1. *Reversibilidad temporal:* Si uno puede alcanzar  $x_1$  desde el origen, entonces uno puede alcanzar el origen desde  $x_1$ . Es decir, los subespacios de alcanzabilidad y controlabilidad son el mismo subespacio.
2. *Escalado de tiempo:* La alcanzabilidad y la controlabilidad no dependen del tiempo. Si uno puede transferir el estado de  $x_0$  and  $x_1$  en  $t$  segundos, entonces también puedes hacerlo en  $\bar{t} \neq t$  segundos.

**Definición 6.2.4** (Definición). Dados dos instantes de tiempo  $t_1 > t_0 \geq 0$ , el par  $(A, B)$  del sistema (5.1) se dice *alcanzable* en  $[t_0, t_1]$  si  $\mathcal{R}[t_0, t_1] = \mathbb{R}^n$ . Es decir, si podemos alcanzar cualquier estado en tiempo finito partiendo desde el origen.

**Definición 6.2.5** (Definición). Dados dos instantes de tiempo  $t_1 > t_0$ , el par del sistema (5.1) se dice *controlable* en  $[t_0, t_1]$  si  $\mathcal{C}[t_0, t_1] = \mathbb{R}^n$ . Es decir, si podemos alcanzar el origen partiendo desde cualquier estado en tiempo finito.

### 6.2.3. Tests de controlabilidad

El siguiente teorema es el resultado de combinar la Definición 6.2.5 con el Teorema 6.2.2:

**Teorema 6.2.3.** *El par (constante)  $(A, B)$  es controlable si y solo si el rango de  $\mathcal{C}$  es  $n$ .*

El siguiente teorema se puede comprobar numéricamente a partir de los siguientes resultados.

**Teorema 6.2.4.** *El par (constante)  $(A, B)$  es controlable si y solo si no existe ningún autovector de  $A^T$  en el kernel de  $B^T$ .*

El siguiente teorema es una reescritura del anterior.

**Teorema 6.2.5.** *El par (constante)  $(A, B)$  es controlable si y solo si el rango de  $[A - \lambda I \quad B]$  es  $n$ .*

*Atención 6.2.3.* Observa que el tener un sistema asintóticamente estable no implica el tener un sistema lti controlable. Por ejemplo,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}. \quad (6.33)$$

El kernel de  $B^T$  es generado por  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , el cual es proporcional a un autovector de  $A = A^T$ . Entonces, el sistema no es controlable acorde al teorema 6.2.4. Observa, que no tenemos autoridad ninguna sobre  $x_1$  a través de  $u$ . Sin embargo, es asintóticamente estable. Uno puede ver que  $x_{\{1,2\}}(t) \rightarrow 0$  según  $t \rightarrow \infty$  cuando  $u = 0$ . Recuerda que la controlabilidad trata de transferir estados en **tiempo finito**.

### 6.3. Estabilización de un sistema lti por realimentación de estados

#### 6.3.1. Test de Lyapunov para la estabilización de un sistema lti

**Definición 6.3.1** (Definición). Si el sistema (5.1) es lti, entonces es estabilizable si existe una entrada  $u(t)$  para cualquier  $x(0)$  tal que  $x(t) \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow \infty$ .

Esta definición es una versión de *sistema controlable* pero para tiempo infinito. En el siguiente teorema veremos que *estabilizable* es menos restrictivo que *controlable*.

**Teorema 6.3.1.** Si el sistema (5.1) es lti, entonces es estabilizable si y solo si todos los autovectores de  $A^T$  correspondientes a autovalores con parte real no negativa pertenecen al kernel de  $B^T$ .

La proyección de  $x(t)$  sobre el espacio generado por los autovectores de  $A^T$  asociados a autovalores con parte real negativa van a cero sin necesidad de la *asistencia* de ninguna entrada. Entonces, la entrada  $u(t)$  debe asistir a las proyecciones de  $x(t)$  en el resto de autovectores de  $A^T$ . Por ejemplo,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}, \quad (6.34)$$

mientras que no tenemos ninguna *autoridad* sobre  $x_1(t)$ , podemos emplear  $u(t)$  para llevar a  $x_2(t)$  a cero de tal manera que  $x(t) \rightarrow 0$  según  $t \rightarrow \infty$ .

**Teorema 6.3.2.** Si el sistema (5.1) es lti, entonces es estabilizable si y solo si hay una matriz positiva definida  $P$  a la siguiente desigualdad

$$AP + PA^T - BB^T \prec 0 \quad (6.35)$$

*Demostración.* Solo vamos a ver una dirección de la prueba. No confundir (6.35) con la ecuación de Lyapunov<sup>2</sup>  $PA + A^TP \prec -I$  en (6.1).

Considera  $x$  como un autovector asociado al autovalor  $\lambda$  de  $A^T$  con parte real no negativa. Entonces,

$$x^*(AP + PA^T)x < x^*BB^Tx = \|B^Tx\|^2, \quad (6.36)$$

donde  $x^*$  es el complejo conjugado de  $x$ . Pero el lado izquierdo de (6.36) es igual a

$$(A^T(x^*)^T)^TPx + x^*PA^Tx = \lambda^*x^*Px + \lambda x^*Px = 2\text{Real}\{\lambda\}x^*Px. \quad (6.37)$$

Como  $P$  es positiva definida, y  $\text{Real}\{\lambda\} \geq 0$ , podemos concluir que

$$0 \leq 2\text{Real}\{\lambda\}x^*Px < \|B^Tx\|^2, \quad (6.38)$$

y por tanto  $x$  debe pertenecer al kernel de  $B$ , si no tendríamos que

$$0 \leq 2\text{Real}\{\lambda\}x^*Px < 0, \quad (6.39)$$

y eso no es posible. □

---

<sup>2</sup>Observa el orden de las matrices traspuestas, y observa también el signo opuesto de  $-BB^T$  y  $+I$  en las dos ecuaciones.

### 6.3.2. Controlador por realimentación de estados

Realimentación de estados implica el escoger una señal de entrada que dependa únicamente de los estados del sistema, es decir, diseñar una

$$u(t) = -Kx(t), \quad (6.40)$$

donde  $K \in \mathbb{R}^{n \times k}$ , tal que  $x(t) \rightarrow 0$  en (5.1) exponencialmente rápido según  $t \rightarrow \infty$ .

Define la ganancia matriz de control

$$K := \frac{1}{2}B^T P^{-1}, \quad (6.41)$$

donde  $P$  se calcula en (6.35) si y solo si un sistema lti es estabilizable. Por lo tanto, podemos describir (6.35) como

$$(A - \frac{1}{2}BB^T P^{-1})P + P(A - \frac{1}{2}BB^T P^{-1})^T = (A - BK)P + P(A - BK)^T \prec 0, \quad (6.42)$$

y multiplicando a la izquierda y derecha por  $Q := P^{-1}$  tenemos que

$$Q(A - BK) + (A - BK)^T Q \prec 0, \quad (6.43)$$

la cual es una ecuación de Lyapunov. Por lo tanto, podemos concluir que  $(A - BK)$  tiene todos sus autovalores *estables*, esto es, si uno escoge la entrada

$$u = -Kx = -\frac{1}{2}B^T P^{-1}x, \quad (6.44)$$

en el sistema lti estabilizable, entonces  $x(t) \rightarrow 0$  exponencialmente rápido según  $t \rightarrow \infty$ .

Encontrar la matrix  $P$  en (6.41) requiere resolver la *linear matrix inequality* (LMI) en (6.35). Para ello existen herramientas numéricas *LMI solvers* disponibles en Matlab o Python.

Si el sistema lti es controlable (recordemos que es más restrictivo que estabilizable), la matriz  $K$  en (6.40) puede explotar el Teorema 6.2.4. Es decir, podemos encontrar una matriz  $K$  tal que  $(A - BK)$  tenga sus autovalores donde nosotros queramos por diseño. Por ejemplo, a través del Teorema de Ackermann.

**Teorema 6.3.3.** *Si el sistema lti es controlable, entonces  $(A - BK)$  tiene como autovalores un conjunto deseado  $\Lambda$  si*

$$K = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad 1] C^{-1} \Delta(A), \quad (6.45)$$

en donde  $C$  es la matrix de controlabilidad (6.31) y  $\Delta$  es el polinomio característico que satisface  $\Lambda$ .

Obviamente, al requerir la inversa de la matrix de controlabilidad, se requiere por tanto que  $C$  sea de rango máximo. Es decir, el sistema lti ha de ser controlable para poder aplicar el Teorema 6.3.3.

## 6.4. Observabilidad en sistemas lti

### 6.4.1. Subespacio inobservable y el Gramiano de observabilidad

**Definición 6.4.1** (Definición). El subespacio inobservable  $\mathcal{UO}$  de un sistema lti consiste en todos aquellos estados que satisfacen

$$Ce^A x_0 = 0. \quad (6.46)$$

Esta definición está motivada por los siguientes hechos. Recuerda que en (5.8) podemos derivar que

$$\begin{aligned} y(t) &= Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \\ \tilde{y}(t) &:= y(t) - \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau - Du(t) = Ce^{At}x_0. \end{aligned} \quad (6.47)$$

En el lado izquierdo de (6.47) tenemos un par entrada/salida, y en el lado derecho de (6.47) tenemos el estado inicial  $x_0$ . De (6.47) podemos observar dos propiedades interesantes:

1. Cuando un particular  $x_0$  es compatible con un par entrada/salida, entonces todo estado inicial de la forma  $x_0 + x_u$ ,  $x_u \in \mathcal{UO}$  también es compatible con la misma entrada/salida.
2. Cuando  $\mathcal{UO}$  contiene únicamente el vector cero, entonces existe al menos un estado inicial  $x_0$  compatible con un par entrada/salida.

**Definición 6.4.2** (Definición). Un sistema lti es observable si su  $\mathcal{UO}$  contiene solo el vector cero.

**Definición 6.4.3** (Definición). Dados dos instantes de tiempo  $t_1 > t_0 \geq 0$ , el Gramiano de observabilidad viene definido por

$$W_O(t_0, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} e^{A^T(\tau-t_0)}C^T C e^{A(\tau-t_0)}d\tau \quad (6.48)$$

Partiendo de (6.46), se puede llegar a

$$\text{Ker } W_O(t_0, t_1) = \mathcal{UO}. \quad (6.49)$$

### 6.4.2. Tests de observabilidad

Lo siguiente se puede demostrar formalmente apoyándonos en el teorema de Cayley-Hamilton. Por ejemplo, para ver por qué paramos en  $(n-1)$ . Vamos a ver la sensibilidad con respecto de los estados  $x$  de  $y$  y de sus derivadas con respecto del tiempo <sup>3</sup> cuando  $u(t) = 0$ .

$$\begin{aligned} y(t) = Cx(t) &\implies \dot{y}(t) = C\dot{x}(t) = CAx(t) \implies \ddot{y}(t) = CA^2x(t) \quad \dots \\ &\implies \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} = CA^{n-1}x(t), \end{aligned}$$

Si no queremos perder ninguna información sobre la señal  $x(t)$ , entonces la matriz

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}_{(kn) \times n}, \quad (6.50)$$

debe de ser de rango máximo en sus columnas. Vamos a introducir los siguientes resultados equivalentes

**Teorema 6.4.1.** *Un sistema lti es observable si y solo si el rango de  $\mathcal{O}$  es igual a  $n$ .*

<sup>3</sup>Observa como  $B$  y  $D$  no juegan ningún papel aquí

**Teorema 6.4.2.** *Un sistema lti es observable si y solo si no hay ningún autovector de  $A$  en el kernel de  $C$ .*

Fíjate que de (6.50) podemos derivar un test de controlabilidad

$$\mathcal{O}^T = [C^T \quad A^T C^T \quad \dots \quad (A^{n-1})^T C^T]_{n \times (kn)}, \quad (6.51)$$

que vendría dado por el siguiente sistema lti *dual*

$$\Sigma_{\text{dual}} := \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= A^T \hat{x}(t) + C^T \bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) &= B^T \hat{x}(t) + D^T \bar{u}(t) \end{cases}. \quad (6.52)$$

Por lo tanto, podemos formular el siguiente resultado

**Teorema 6.4.3.** *Un sistema lti es observable si y solo si su sistema dual (6.52) es controlable.*

No haría falta ningún test nuevo para concluir la observabilidad de un sistema lti. Simplemente, construimos su sistema dual y estudiamos su controlabilidad.

## 6.5. Estimación de estados en sistemas lti

El estimador más simple consiste en hacer una copia de la dinámica del sistema lti

$$\Sigma_{\text{estimator}} := \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases}, \quad (6.53)$$

en donde  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  y  $y \in \mathbb{R}^m$  será nuestra estimación de los estados y de la salida del sistema lti respectivamente. Ahora, definamos la señal de error

$$e(t) := \hat{x}(t) - x(t), \quad (6.54)$$

por lo tanto, cuando el error  $e$  sea cero, querrá decir que estamos estimando los estados del sistema lti correctamente. Vamos a ver, la dinámica de la señal de error

$$\dot{e}(t) = \dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t) = A\hat{x} + Bu - Ax - Bu = Ae(t), \quad (6.55)$$

por lo que  $e(t) \rightarrow 0$  según  $t \rightarrow \infty$  exponencialmente rápido si  $A$  es una matriz *estable* para toda entrada  $u(t)$ .

¿Y si  $A$  no es una matriz estable? Entonces considera el siguiente estimador

$$\Sigma_{\text{estimator2}} := \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(\hat{y}(t) - y(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases}, \quad (6.56)$$

en donde tenemos dos entradas  $u$  y  $(\hat{y} - y)$  a la dinámica de  $\hat{x}$ , y  $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$  es una matriz de ganancias. Observa que la señal  $y$  viene del sistema lti original, y es algo que podemos medir al ser su salida. Ahora, veamos la nueva dinámica para la señal de error  $e(t)$ .

$$\dot{e} = A\hat{x} + Bu - L(\hat{y} - y) - (Ax + Bu) = (A - LC)e, \quad (6.57)$$

por lo tanto, si  $(A - LC)$  es una matriz de estabilidad, entonces  $e(t) \rightarrow 0$  según  $t \rightarrow \infty$  exponencialmente rápido para cualquier señal  $u(t)$ .

Para el cálculo de  $L$  bastaría con calcular  $K$  para el sistema dual utilizando los resultados de la sección 6.3. En particular  $L = K_{\text{dual}}^T$ , y  $K = L_{\text{dual}}^T$ .

A continuación, los resultados *duales* para observabilidad.



**Teorema 6.5.1.** *Un sistema lti es detectable si y solo si los autovectores de  $A$  correspondientes a autovalores inestables no están en el kernel de  $C$ .*

Si un sistema es detectable, entonces su dual es estabilizable, y viceversa.

**Teorema 6.5.2.** *Cuando un par  $(A, C)$  es detectable, entonces es siempre posible encontrar una matriz  $L$  tal que  $(A - LC)$  es una matriz de estabilidad.*

**Teorema 6.5.3.** *Cuando un par  $(A, C)$  es observable, entonces es siempre posible encontrar una matriz  $L$  tal que los autovalores de  $(A - LC)$  puedan estar donde queramos.*

## 6.6. Estabilización de sistemas lti con realimentación a través de su salida

Si  $C$  no es invertible, entonces no tenemos un cálculo directo de los estados  $x$  de un sistema lti; por lo tanto no podemos aplicar la señal de control  $u = -Kx$  como en la sección ??.

¿Qué ocurre si el sistema lti es observable, o al menos detectable? Entonces, vamos a mostrar que podemos utilizar como controlador la señal

$$u = -K\hat{x}, \quad (6.58)$$

donde  $\hat{x}$  son los estados de nuestro estimador (6.56). Vamos a aplicar (6.58) a un sistema lti, por lo que la dinámica será

$$\dot{x} = Ax - BK\hat{x} = Ax - BK(e + x) = (A - BK)x - BKe, \quad (6.59)$$

que junto con (6.57) nos lleva al siguiente sistema autónomo

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & -BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ e \end{bmatrix}, \quad (6.60)$$

el cual es un sistema triangular, y será exponencialmente estable porque  $(A - BK)$  y  $(A - LC)$  son matrices diseñadas para tener todos sus autovalores estables.

## 6.7. Regulador cuadrático lineal o LQR

Si el par  $(A, B)$  es controlable, entonces hemos visto que podemos colocar los autovalores de  $(A - BK)$  donde queramos. Entonces uno podría preguntarse ¿cuál es el mejor lugar para los autovalores?

El *mejor* lugar responde al siguiente criterio de diseño. Considera que tenemos la siguiente salida de interés

$$z(t) = Gx(t) + Hu(t). \quad (6.61)$$

Por supuesto  $z(t) \in \mathbb{R}^l$  puede ser la señal de salida  $y(t)$ , pero no tiene por qué. En particular, debemos distinguir que  $y(t)$  la usaremos para alimentar el estimador/controlador, y  $z(t)$  la usaremos para optimizar nuestro criterio sobre el *mejor* lugar para los autovalores de  $(A - BK)$ .

El problema LQR está definido de la siguiente manera:

**Problema 6.7.1.** *Encontrar una entrada  $u(t), t \in [0, \infty)$  que minimice la siguiente función de coste*

$$J := \int_0^\infty z(t)^T \bar{Q} z(t) + \rho u(t)^T \bar{R} u(t) dt, \quad (6.62)$$

donde  $\bar{Q} \in \mathbb{R}^{l \times l}$  y  $\bar{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  son matrices positivas definidas, y  $\rho$  es una constante positiva para relativizar ambos términos en (6.62).

Como  $z = Gx + Hu$ , entonces  $J$  puede ser rescrito como

$$J := \int_0^\infty x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t) + 2x(t)^T N u(t) dt, \quad (6.63)$$

donde  $Q = G^T \bar{Q} G$ ,  $R = H^T \bar{Q} H + \rho \bar{R}$ , y  $N = G^T \bar{Q} H$ .

Observa como  $\bar{Q}$ ,  $\bar{R}$  y  $\rho$  determinan como de importante es el minimizar los elementos de  $z$  y  $u$ .

Si somos capaces de encontrar una matriz positiva definida  $P$  tal que satisface la *ecuación algebraica de Ricatti*

$$A^T P + P A + Q - (P B + N) R^{-1} (B^T P + N^T) = 0, \quad (6.64)$$

entonces

**Teorema 6.7.1.** *Si  $A - B R^{-1} (B^T P + N^T)$  es una matriz de estabilidad. Entonces, la señal de entrada*

$$u(t) = -R^{-1} (B^T P + N^T) x(t), \quad (6.65)$$

*minimiza  $J$ , es más,  $J = x(0)^T P x(0)$ .*

La *regla de Bryson* nos orienta para unos valores razonables de  $\bar{Q}$  y  $\bar{R}$ :

$$\bar{Q}_{ii} = \frac{1}{\text{valor máximo aceptable de } z_i^2}$$

$$\bar{R}_{jj} = \frac{1}{\text{valor máximo aceptable de } u_j^2}.$$

## 6.8. Resumen para la estabilización de un punto en un sistema no lineal

Dado el siguiente sistema no lineal

$$\Sigma := \begin{cases} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= g(x, u) \end{cases}, \quad (6.66)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el estado del sistema,  $u \in \mathbb{R}^k$  es la entrada al sistema,  $y \in \mathbb{R}^m$  es la salida del sistema, y  $f(x, u) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $g(x, u) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  son funciones arbitrarias.

El siguiente algoritmo nos permite estabilizar un punto arbitrario  $x^*$  del sistema (6.66).

1. Escoge un punto de interés  $x^*$ , y entonces calcula  $u^*$  de tal manera que  $f(x^*, u^*) = 0$ .
2. Lineariza (6.66) alrededor de  $x^*$  y  $u^*$ , i.e., calcula sus Jacobianos  $A := \frac{\partial f(x, u)}{\partial x}$  y  $B := \frac{\partial f(x, u)}{\partial u}$  y evalúalos en  $x = x^*$  y  $u = u^*$ . Observa, que si un Jacobiano no existe, e.g.,  $f(x, u)$  no es real analítica, entonces, no podemos continuar.
3. Comprobar si  $(A, B)$  es controlable. Si este test falla, entonces comprueba si es al menos estabilizable. Si ambos tests fallan, no podemos continuar.
4. Calcular el Jacobiano  $C := \frac{\partial g(x, u)}{\partial x}$ . Si  $C$  no es invertible, entonces necesitaremos un observador/estimador. Si  $C$  es invertible, entonces ves al paso 8.

5. Si necesitamos un estimador, entonces comprueba que  $(A, C)$  es observable. Si no, comprueba que  $(A, C)$  es detectable. Si ambos tests fallan, no podemos continuar.
6. Si  $(A, C)$  es observable, entonces contruye el estimador (6.56), con  $D := \frac{\partial g(x, u)}{\partial u}$ , y calcula  $L$  de tal manera que  $(A - LC)$  sea una matriz estable. Por ejemplo, con el Teorema 6.3.3.
7. Si  $(A, C)$  no es observable pero sí detectable, entonces, calcula  $L$  a través del sistema dual con el test de Lyapunov para la estabilización como en (6.41). Recuerda, que entonces  $L = K^T$ .
8. Si el par  $(A, B)$  es controlable, entonces podemos calcular  $K$  de tal manera que  $(A - BK)$  sea una matriz estable. Por ejemplo, con el Teorema 6.3.3.
9. Si  $(A, B)$  no es controlable, pero estabilizable. Entonces calcula  $K$  a través del test de Lyapunov para la estabilización como en (6.41).
10. Felicidades! Escoge<sup>4</sup>  $u(t) = -Kx(t)$  o  $u(t) = -K\hat{x}(t)$  si has necesitado de un estimador.
11. Por último recuerda que el controlador ha sido diseñado para un sistema no lineal. Por lo que existe una región dada en (6.13) que garantiza la convergencia. Fuera de ahí, no podemos decir nada con seguridad.

## 6.9. Seguimiento por parte de la salida de una consigna constante

Considera el siguiente sistema lti con dos señales de salida

$$\Sigma := \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^k \\ y_1(t) &= C_1x(t), & y_1 \in \mathbb{R}^m \\ y_2(t) &= C_2x(t), & y_2 \in \mathbb{R}^l \end{cases}. \quad (6.67)$$

Hasta ahora nos hemos centrado en hacer el origen del vector de estados en (6.67) estable, y por lo tanto las señales de salida  $y_{1,2}(t) = C_{1,2}x(t)$  convergen a cero si  $x(t) \rightarrow 0$  según  $t \rightarrow \infty$ .

Por mantener esta sección corta, vamos a considerar que  $C_1 = I$ , es decir, que podemos medir todos los estados  $x$  a partir de la salida  $y_1$ . Vamos a utilizar esta señal para después diseñar un controlador de realimentación de estados. Si  $C_1$  fuera una matriz arbitraria, pero el par  $(A, C_1)$  fuera observable, la técnica explicada en esta sección seguiría siendo aplicable con el uso de un estimador.

En esta sección vamos a centrarnos en que dada una consigna constante  $y_d \in \mathbb{R}^l$ , entonces que el objetivo sea  $y_2(t) \rightarrow y_d$  según  $t \rightarrow \infty$ .

*Atención 6.9.1.* Observa que para que  $y_2(t)$  pueda alcanzar un valor arbitrario  $y_d$ , entonces ha de existir un estado  $x_d \in \mathbb{R}^n$  tal que  $y_d = C_2x_d$ . Es decir, necesitamos la condición de que  $C_2$  sea de rango máximo para poder imponer sin problemas un  $y_d$  arbitrario.

Considera el cambio de variable  $\tilde{x}(t) = x(t) - x_d$ , entonces el sistema (6.67) se puede reescribir como

$$\Sigma := \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) &= A\tilde{x}(t) + Bu(t) + Ax_d \\ \tilde{y}_1(t) &= \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}_2(t) &= C_2\tilde{x}(t) \end{cases}, \quad (6.68)$$

<sup>4</sup>Recuerda que nos referimos muchas veces a  $u(t)$  como la entrada al sistema lti, para el sistema lineal no olvides que es  $u(t) = u^*(t) + \delta u(t)$ , i.e., para el sistema no lineal tendríamos que  $u(t) = u^* - K\delta x$ .

y si existe una solución  $u^*$  tal que  $Bu^* = -Ax_d$ , entonces con una entrada  $u = \tilde{u} + u^*$  tenemos que

$$\Sigma := \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) &= A\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}_1(t) &= \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}_2(t) &= C_2\tilde{x}(t) \end{cases}, \quad (6.69)$$

para el cual podemos encontrar una matriz  $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $u(t) = K(x(t) - x_d) + u^*$  haga el origen de (6.69) asintóticamente estable. Observa que si  $\tilde{y}_2 \rightarrow 0$  según  $t \rightarrow \infty$ , entonces  $y_2(t) \rightarrow y_d$  también. También observa que para el diseño de  $K$ , las matrices  $A$  y  $B$  de (6.69) son las mismas que en (6.67). Vamos a resumir este resultado en el siguiente teorema

**Teorema 6.9.1.** *Dado el sistema lti (6.67) con  $C_1 = I$ , entonces  $y_2(t) \rightarrow y_d \in \mathbb{R}^l$  según  $t \rightarrow \infty$  con la siguiente ley de control*

$$u(t) = K(x(t) - x_d) + u^*,$$

donde  $x_d$  y  $u^*$  han de existir como soluciones a

$$\begin{cases} y_d &= C_2 x_d \\ Bu^* &= -Ax_d \end{cases}.$$

### Control integral

El Teorema (6.9.1) se basa fundamentalmente en que hay que conocer con exactitud las matrices  $A$  y  $B$  para poder calcular una señal en *lazo abierto*  $u^*$ . Cualquier error de modelado puede hacernos calcular la  $u^*$  equivocada y consecuentemente  $y_2(t)$  puede no converger al valor deseado  $y_d$ .

Vamos a utilizar la técnica conocida como *control integral* para garantizar que  $y_2(t) \rightarrow y_d$  aún bajo errores de modelado. Definamos la siguiente señal (integral)

$$e_i(t) := \int_0^t (y_2(t) - y_d) dt, \quad (6.70)$$

cuya dinámica viene dada por

$$\dot{e}_i(t) = y_2(t) - y_d + e_i(0), \quad e_i(0) \in \mathbb{R}^l, \quad (6.71)$$

donde  $e_i(0)$  por conveniencia tenemos la libertad de igualarla a cero. Observa que cuando  $y_2 = y_d$ , entonces (6.70) es cero, i.e., la señal  $e_i(t)$  está en equilibrio. Vamos a apilar las señales  $x$  y  $e_i$  y analizar su dinámica.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix} y_d. \quad (6.72)$$

Ahora vamos a proponer la siguiente ley de control  $u = -[K \quad K_I] \begin{bmatrix} x \\ e_i \end{bmatrix} = -Kx - K_I e_i$ , entonces tenemos que

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & -K_I \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix} y_d. \quad (6.73)$$

Si los autovalores de la matriz  $\begin{bmatrix} A - BK & -K_I \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}$  son estables, entonces el sistema (6.73) es exponencialmente estable pero el equilibrio no estará en el origen ya que está forzado por el término

$\begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix} y_d$ . Independientemente del nuevo equilibrio<sup>5</sup> *forzado*, lo que si es cierto es que en el equilibrio tenemos que  $\dot{e}_i = 0$ , por lo que  $y_2 = y_d$ . La salida  $y_2$  ha alcanzado el valor deseado y es tolerante a errores de modelado en  $A$  y  $B$  ya que la dinámica de  $e_i(t)$  no depende de ellos. No obstante, grandes errores de modelado, por ejemplo para  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  podría hacer la matriz  $\begin{bmatrix} \tilde{A} - \tilde{B}K & -K_I \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}$  con autovalores con parte real positiva.

¿Podemos encontrar  $K = \begin{bmatrix} K & K_I \end{bmatrix}$  tal que  $\begin{bmatrix} A - BK & -K_I \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}$  pueda tener los autovalores donde nosotros queramos? Para ello entonces hay que responder a la siguiente pregunta:

¿Es el par  $\left( \begin{bmatrix} A & 0 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \right)$  controlable (o al menos estabilizable)? Si la respuesta es afirmativa,

entonces podemos encontrar una matriz  $K \in \mathbb{R}^{(n+l) \times (n+l)}$  tal que  $u = -K \begin{bmatrix} x \\ e_i \end{bmatrix}$  haga el sistema (6.73) exponencialmente estable.

Observa que si  $v_i$  es autovector de  $A^T$  con autovalor  $\lambda_i$ , entonces  $v_i^T A = v_i^T \lambda_i$ , es decir  $\begin{bmatrix} v_i^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_i^T A & 0 \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} v_i^T & 0 \end{bmatrix}$ . Es decir,  $\begin{bmatrix} v_i^T & 0 \end{bmatrix}$  es autovector de  $\begin{bmatrix} A & 0 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}$ . Aplicando el Teorema 6.2.4 podemos comprobar que el par  $\left( \begin{bmatrix} A & 0 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \right)$  sería controlable si

$$\begin{bmatrix} v_i^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = v_i^T B \neq 0, \quad (6.74)$$

y eso es solo posible si el par  $(A, B)$  es controlable. Es decir, el control integral no ha variado las propiedades de controlabilidad del sistema original. Podemos resumir los resultados alcanzados con el siguiente teorema

**Teorema 6.9.2.** *Considera el sistema lti (6.67) con  $C_1 = I$  y  $C_2$  con rango máximo. Considera la señal integral  $e_i(t)$  en (6.70) para un valor deseado  $y_d \in \mathbb{R}^l$  para  $y_2(t)$ . Entonces, existe una matriz  $K \in \mathbb{R}^{(n+l) \times (n+l)}$  tal que la señal de entrada  $u = -K \begin{bmatrix} x \\ e_i \end{bmatrix}$  ocasiona que  $y_2(t) \rightarrow y_d$  asintóticamente según  $t \rightarrow \infty$  si y solo si el par  $(A, B)$  en (6.67) es controlable (estabilizable).*

---

<sup>5</sup>Si  $\begin{bmatrix} A - BK & -K_I \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}$  es una matriz de estabilidad, y  $C_2$  es de rango máximo, el conjunto de equilibrio de (6.73) puede demostrarse como  $\mathcal{E} := \{x, e : C_2 x = y_d, x = (A - BK)^{-1} K_I e, y_d \in \mathbb{R}^l\}$ , es decir  $[x(t), e(t)] \rightarrow \mathcal{E}$  según  $t \rightarrow \infty$ .



## Apéndice A

# Ejemplos de código en Matlab para la simulación de sistemas dinámicos

### A.1. Ejemplo de código para simular el péndulo invertido

Partimos de las ecuaciones del movimiento en variables de estado,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{b}{ml} x_2\end{aligned}$$

En primer lugar creamos una función, que reproduzca las ecuaciones de estado,

```
1 function xdot = pendulo_inv(t,x,m,l,g,b)
2 %VARIABLES DE ENTRADA:
3 %t tiempo (s). Este sistema es autonomo, no depende del tiempo.
4 %Evidentemente luego no se emplea el tiempo para nada.
5 %x Vector (columna) de estados:
6 %x, vector de variables de estado, descrito como un vector columna;
7 %x((1,1) angulo de pendulo con la vertical (semieje positivo) (rad);
8 %x(2,1) velocidad angular radianes por segundo;
9
10 %Las variables t y x deben pasarse en el orden que aparecen en la
    cabecera
11 %de la funcion: primero el tiempo y despues el vector de estados
12 %Este orden es necesario para que el integrador de matlab encuentre
    las variables
13
14 %parametros del sistema
15 %m Masa del pendulo (Kg)
16 %l longitud del pendulo (m)
17 %g Aceleracion de la gravedad (m/s^2)
18 %b coeficiente de friccion (Kg.m/s)
19
```

```

20 %VARIABLES DE SALIDA:
21 %xdot vector de velocidades
22 %xdot(1,1) velocidad angular (derivada temporal del angulo)
23 %xdot(2,1) aceleracion angular (derivada temporal de la velocidad
    angular)
24
25 xdot(1,1) = x(2,1);
26 xdot(2,1) = (g*sin(x(1,1))-b*x(2,1)/m)/l;
27 end

```

A continuación construimos un script (puede ser un livescript) que integre el sistema representado por la función.

```

1 %Definimos y damos valores los parametros del sistema
2 g1 = 10; % gravedad
3 m1 = 10; % masa
4 l1 = 10; % longitud
5 b1 = 100; % resistencia viscosa
6
7 %Definimos un intervalo de tiempo para el que queremos que el
8 %integrador resuelva las ecuaciones
9 tin = [0,15];
10
11 %Definimos unas condiciones iniciales [x_1,x_2]
12 x0 = [pi/3; 0]; %Siempre vector columna.
13
14 %A continuacion llamamos a uno de los integradores de matlab,
15 %En este caso se trata del par encajado
16 %de ordenes 4 y 5 de Dormund and Price (ver ayuda de matlab).
17 %Es el par que emplearemos habitualmente para obtener soluciones
18 %Atencion a la sintaxis: la funcion ode45 toma como primera variable
19 %un handle @ a la funcion que se desea integrar.
20 %Delante de la funcion se indican entre parentesis y, por ese orden,
21 %las variables t y x.
22 %El resto de los parametros se fijan a los valores definidos en el
    script.
23 %ademas se pasa a la funcion ode45 el intervalo de tiempo
24 %de integracion y las condiciones iniciales
25 %pedimos a la funcion que nos devuelva los valores de tiempo (t) para
26 %los que ha calculado las soluciones
27 %y una matriz (x) de dimensiones dim(t) x dim(x)
28 %Cada columna de esta matriz representa los valores del vector
29 %de estados para cada valor del tiempo contenido en el vector t
30 [t,x] = ode45(@(t,x)pendulo_inv(t,x,m1,l1,g1,b1),tin,x0);
31
32 %podemos representar la evolucion temporas de los estados
33 figure(1)
34 subplot(2,1,1)
35 plot(t,x)
36 title('Evolucion temporal de los estados')
37 xlabel('tiempo(s)')

```



```

38 legend( '$\theta$', '$\dot{\theta}$', 'interpreter', 'latex')
39 %y la trayectoria del sistema en el espacio de fases (Solo posible si
40 %la dimension del vector de estados es 3 o menor)
41 subplot(2,1,2)
42 plot(x(:,1),x(:,2))
43 hold on
44 plot(x0(1,1),x0(2,1), 'x')
45 title('trayectoria en el plano de fases')
46 xlabel('$\theta$', 'interpreter', 'latex')
47 ylabel('$\dot{\theta}$', 'interpreter', 'latex')

```

En las versiones modernas de Matlab es posible escribir en el mismo fichero el código correspondiente al script y debajo la función que representa el sistema. En versiones más antiguas, hay que escribirlos en ficheros separados y guardar ambos ficheros en el mismo directorio.

La función `ode45` tiene muchas opciones de ajuste. Veremos algunas en otros ejemplos incluidos en estos apéndices. En cualquier caso, es aconsejable leer la documentación de Matlab para conocer mejor su uso.

## A.2. Ejemplo de código para obtener una representación del diagrama de fases (sistemas 2D)

Este ejemplo se ha construido sobre el código del ejemplo anterior, para el cálculo de la dinámica del péndulo invertido.

```

1 % Representacion del campo vectorial del sistema.
2 % Para este calculo empezamos por obtener un conjunto de puntos
3 % sobre los que obtener los valores del campo. En este caso (pendulo
  invertido),
4
5 % Definimos y damos valores los parametros del sistema
6 g1 = 10; % gravedad
7 m1 = 10; % masa
8 l1 = 10; % longitud
9 b1 = 100; % resistencia viscosa
10
11 % Definimos un intervalo de tiempo para el que queremos que el
12 % integrador resuelva las ecuaciones
13 tin = [0,15];
14
15 % Sabemos la posicion de los puntos de equilibrio,
16 % parece interesante seleccionar una region que que contenga varios,
17 x1 = -3*pi/2:3*pi/18:3*pi/2;
18 x2 = -3:0.3:3;
19
20 % Empleamos la funcion meshgrid de matlab para construir un mallado
21 [x1m,x2m] = meshgrid(x1,x2);
22
23 % Calculamos las componentes de campo en los puntos del mallado
24 xdot1m = x2m;
25 xdot2m = (g1*sin(x1m)-b1*x2m/m1)/l1;

```

```

26
27 % Empleamos quiver para representar en cada punto del mallado
28 % el vector asociado al campo
29 figure(1)
30 quiver(x1m,x2m,xdot1m,xdot2m)
31 axis('equal')
32 xlabel('$\theta$', 'interpreter', 'latex')
33 ylabel('$\dot{\theta}$', 'interpreter', 'latex')
34
35 % Obtencion del diagrama de fases.
36 % Creamos un vector de valores de x1 y otro de x2 en la region de
    interes
37 % (normalmente una region que contenga puntos de equilibrio).
38 % Se trata de crear un conjunto de condiciones iniciales.
39 x1 = -3*pi/2:3*pi/6:3*pi/2;
40 x2 = -3:0.6:3;
41 figure(2)
42 hold on
43 % Resolvemos para todas las condiciones iniciales seleccionadas
44 % y dibujamos los resultados. Esto puede ser muy lento
45 % segun el sistema y la precision que pidamos
46 for i = 1:length(x1)
47     for j = 1:length(x2)
48         [t,x] = ode45(@(t,x)pendulo_inv(t,x,m1,l1,g1,b1),t,[x1(i),x2(j)]')
49         ;
49         plot(x1(i),x2(j),'x') %dibujo condiciones iniciales
50         plot(x(:,1),x(:,2)) %dibujo trayectoria obtenida
51     end
52 end
53 xlabel('$\theta$', 'interpreter', 'latex')
54 ylabel('$\dot{\theta}$', 'interpreter', 'latex')

```

## Apéndice B

# Ejemplo de uso de cálculo simbólico en Matlab para el estudio de la estabilidad

Este ejemplo muestra el uso de los comandos más utilizados de matlab para apoyar el análisis de estabilidad de sistemas.

```
1  %creamos unas variables simbolicas
2
3  syms x1 x2 real %real no es una variable. Sino que define x1 y x2 como
4                  %variable reales.
5  syms s
6
7
8  %definimos las ecuaciones del sistema
9  f(1,1) = x2
10 f(2,1) = -x1 -x2 + x1*x2
11 %la funcion solve obtendra las soluciones de la ecuacion f(x1,x2)
    =(0,0) y
12 %por tanto los puntos de equilibrio del sistema
13 [X01 X02] = solve(f,x1,x2)
14 X0 = [X01, X02]
15
16 %Calculamos el Jacobiano
17 J = jacobian(f,[x1 x2])
18 %sustituimos en los puntos en que se anulan las ecuaciones de estado,
    ya que
19 %dichos puntos son precisamente los puntos de equilibrio.
20
21 %uso un bucle para obtener la matriz del sistema linealizado y los
22 %autovalores en todos los puntos de equilibrio obtenidos. (en realidad
    en
23 %este caso solo esta el x= (0,0)
24 for i = 1:size(X0,1)
```

```

25     Je = subs(J,{x1,x2},[X01(i),X02(i)])
26     E = double(eig(Je))
27     %En algunos casos, sobre todo si el sistema depende de parametros,
        es
28     %mas facil analizar la estabilidad a partir del polinomio
        carateristico
29     %de la matriz del sistema (Je) y emplear el metodo de Routh-
        Hurwitz
30     %para estudiar la estabilidad a partir de los coeficientes del
        %polinomio caracteristico.
31     C = det(Je - s*eye(size(Je)))
32 end
33
34
35 %funcion de liapunov para el linealizado,
36 %en este caso, solo hay un punto de equilibrio que es el origen.
    Podemos
37 %obtener una funcion de Lyapunov para el sistema lineal,resolviendo la
38 %ecuacion de lyapunov, obtenemos una funcion cuadratica  $V(x) = x' * P * x$ .
39 %Despues empleamos dicha funcion como candidata de Lyapunov para
        estudiar
40 %el sistema no lineal
41 P =lyap(double(Je'),[1 0;0 1])
42 V = [x1 x2]*P*[x1;x2]
43 %calculamos el gradiente de la funcion de liapunov y multiplicamos por
        f de
44 %este modo obtenemos la derivada de Lee, El comando simplify,
        simplifica el
45 %resultado.
46 grV = gradient(V)
47 dotV = simplify(grV'*f)
48
49 %por supuesto, estudiar si la derivada de Lee, cumple las condiciones
        del
50 %teorema de Lyapunov o encontrar el dominio de atraccion es algo que
        matlab
51 %no puede hacer por nosotros. Hay que usar la cabeza, normal, de
        pensar ;)
52
53 %Empleo los metodos ya vistos en otros ejemplos para resolver el
        sistema
54 %numericamente y representar el diagrama de fases.
55
56 %ode45 va a mostrar un warning por pantalla, debido a que hay
        soluciones
57 %que divergen. Para evitarlo, anulo los warning
58 warning('off')
59 for i =-3:0.5:3
60     for j = -3:0.2:3
61         [t,x] = ode45(@ej11,[0 10],[i;j]);
62         plot(x(:,1),x(:,2))

```

```
63         hold on
64         plot(i,j,'or')
65     end
66 end
67 axis([-5 5 -5 5])
68 % recupero los warnings
69 warning('on')
70 % funcion f para emplear con ode45
71 function dotx = ej11(t,x)
72 dotx(1,1) = x(2,1);
73 dotx(2,1) = -x(1,1) - x(2,1) + x(1,1)*x(2,1);
74 end
```