



Exámen de Sistemas Dinámicos y Realimentación¹.

Cuatro grandes empresas tecnológicas cotizan en la bolsa de Ghotam. Un conocido inversor (Lex Luthor) ha desarrollado un modelo lineal que permite conocer la evolución del precio en bolsa de las acciones de dichas empresas a lo largo de una sesión (12 horas). Acabada la sesión, es necesario retocar el modelo para que tenga validez en la sesión siguiente.

El modelo toma como valor cero el precio de cierre de la acción en la sesión anterior y calcula el incremento o decremento de dicho precio en función del tiempo a lo largo de la sesión actual. Es decir, se obtiene el precio de la acción relativo a su valor final en la sesión anterior.

Para construir el modelo se emplean dos matrices. Una matriz de influencias I que refleja el efecto que tienen sobre el valor de las acciones de las empresas, su propio prestigio y la competencia/colaboración entre ellas. La segunda matriz es una matriz diagonal V , cuyos valores v_{ii} corresponden al valor en bolsa de cada una de las empresas al cierre de cada sesión. Dichos valores actúan como pesos, de modo que el modelo toma la forma general:

$$\dot{x} = (I \cdot V)x \quad (1)$$

donde $x = [x_1(t) \cdots x_4(t)]^T$, $x \in \mathbb{R}^4$ es un vector columna que contiene los valores relativos, incrementos $x_i > 0$ ó decrementos $x_i < 0$, del precio de las acciones de las empresas con respecto al valor de cierre de la sesión anterior. El tiempo se mide en horas.

La siguiente tabla representa las entradas de la matriz de influencias I y el valor en bolsa de cada una de la empresas, calculados a final de la sesión de ayer.

	E1	E2	E3	E4	Valor mill. €
E1	-2	0	0	2	2
E2	-1/2	-4	0	-3/2	1
E3	-1	-4	-3/2	-1	4
E4	1/2	-2	-1/2	-3/2	2

1. **(1 punto)** Halla la matriz $A = I \cdot V$ del sistema lineal $\dot{x} = Ax$, correspondiente a la ecuación (1)

Suponiendo un valor relativo de precios al principio de la sesión de hoy $x(0) \neq 0$ arbitrario y que se deja evolucionar al sistema, estudia de forma analítica la estabilidad de los precios y las posibles pérdidas o ganancias en el valor las acciones de las empresas al final de la sesión.

2. **(1 punto)** Integra numéricamente el sistema durante la duración de la sesión de hoy (12h). Elige para ello los valores iniciales distintos de 0 que quieras. Representa el resultado gráficamente e indica si confirma los resultados del análisis realizado en la anterior pregunta.
3. **(1 punto)** Si consideramos el capital invertido por Lex Luthor en la compra/venta de acciones como una entrada al sistema, donde $u > 0$ representa compra y $u < 0$ venta, comprueba que es posible controlar la variación de precios de todas las acciones invirtiendo todo el dinero en una sola empresa. Ten en cuenta que esto equivale a emplear para el sistema una matriz columna $B \in \mathbb{R}^4$

¹Las respuestas pueden subirse al Campus Virtual en un *live script*, pdf o similar, incluyendo los códigos utilizados. Si alguien prefiere entregar las explicaciones y deducciones en papel, también puede hacerlo.

en la que todos los elementos son cero excepto $b_i = 1$, donde el índice i corresponde a la única empresa en la que se va a invertir. Indica si hay alguna empresa con la que sería imposible controlar la variación del precio de las acciones.

4. **(1 punto)** Para saber qué está pasando, es preciso recibir información fiable. Sin embargo, las empresas suelen tratar de distribuir desinformación cuando cae el valor de sus acciones. Comprueba que es posible estimar la variación de precios de todas las acciones $\hat{x}(t)$, si se recibe información completamente fiable de al menos una empresa. Puedes modelar la información como una salida del sistema $y = Cx$, donde $C \in \mathbb{R}^4$ es una matriz fila en la que todos los elementos son cero excepto $c_i = 1$. El índice i corresponde a la única empresa de la que se recibe información fiable. Indica si hay alguna empresa con la que sería imposible estimar la variación de precios.
5. **(2 puntos)** Asumiendo que el valor inicial de las acciones es el valor de cierre de la sesión anterior $x(0) = 0$, elige una empresa en la que invertir y consigue que, a mitad de la sesión, la variación del precio de las acciones valga $x_i = 10$ para la empresa escogida y $x_j = -10, j \neq i$ para el resto de las empresas. Emplea para ello el sistema de control en lazo abierto de energía mínima. Asegúrate de que la empresa que eliges permite también obtener información fiable. Integra el modelo, representa los resultados obtenidos y comprueba que efectivamente se alcanzas los valores deseados en la variación del precio de las acciones a mitad de la sesión.

La operación realizada, a desatado la alarma entre los inversores debido a las grandes oscilaciones de las cotizaciones y a las pérdidas provocadas. Para evitar un contraataque coordinado del sector en la sesión de mañana, Lex Luthor decide modificar su estrategia y emplear un sistema de control que tienda a estabilizar los valores de las acciones.

6. **(2 punto)** Empleando la empresa elegida en la pregunta 5, diseña un control por realimentación de estados estimados que vuelva a estabilizar los precios de las acciones a su valor inicial. Integra el modelo para la segunda mitad de la sesión, partiendo de los valores finales alcanzados en la primera mitad (pregunta 5). Comprueba que los valores se estabilizan².
7. **(2 punto)** Añade al sistema control Integral, de modo que al final de la sesión la empresa elegida alcance un incremento del valor de sus acciones $x_i = 15$. Integra el modelo en las mismas condiciones de la pregunta anterior y representa gráficamente la evolución de los precios de las acciones. Comprueba que se ha alcanzado el objetivo previsto para la empresa seleccionada y que los valores del resto de las empresas alcanzan un valor estable. Valora los resultados alcanzados por cada una de ellas al final de la sesión.

¡No se os ocurra invertir en bolsa con este modelo! ;).

²Basta con colocar los autovalores en el intervalo $-1 \geq \lambda \geq -5$