



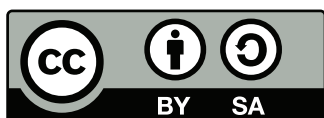
Universidad Complutense de Madrid

---

## Sistemas dinámicos y realimentación

Juan Jiménez  
Héctor García de Marina

5 de abril de 2021



El contenido de estos apuntes está bajo licencia Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0  
<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

©Juan Jiménez

# Índice general

<b>1. Prefacio</b>	<b>9</b>
<b>2. Modelado de sistemas dinámicos</b>	<b>11</b>
2.1. Sistemas en el espacio de estados . . . . .	11
2.2. Ejemplos . . . . .	11
2.2.1. Péndulo invertido . . . . .	11
2.2.2. El oscilador de Van der Pol . . . . .	13
2.2.3. Un vehículo de cuatro ruedas. . . . .	14
2.3. Simulación o soluciones numéricas del sistema $\Sigma$ . . . . .	15
<b>3. Comportamiento dinámico y estabilidad</b>	<b>17</b>
3.1. Sistemas autónomos . . . . .	17
3.1.1. Puntos de equilibrio . . . . .	17
3.2. Lyapunov . . . . .	18
3.3. Principio de invarianza de LaSalle . . . . .	18
<b>4. Diseño de controladores para sistemas en el espacio de estados</b>	<b>19</b>
4.1. Seguidor de trayectorias deseadas . . . . .	19
4.1.1. Ejemplo con un sistema cinemático de segundo orden . . . . .	19
4.2. Diseño de ciclos límites para sistemas planos . . . . .	20
4.2.1. Ejercicio . . . . .	21
<b>5. Sistemas lineales</b>	<b>23</b>
5.1. Mapas lineales . . . . .	23
5.1.1. Ejercicio: Comprueba si los siguientes mapas son lineales . . . . .	23
5.2. Sistemas continuos y lineales en el espacio de estados . . . . .	23
5.2.1. Ejercicio: Escribe un sistema continuo y lineal en el espacio de estados como un diagrama de bloques entrada/salida y comprueba que es un mapa lineal. . . . .	24
5.2.2. Ejercicio: Interconecta sistemas continuos y lineales en el espacio de estados y comprueba que el sistema resultante es otro sistema continuo y lineal en el espacio de estados. . . . .	24
5.3. Solución a sistemas continuos lineales en el espacio de estados . . . . .	24
5.3.1. Ejercicio . . . . .	25
5.4. Solución a sistemas invariantes en el tiempo, continuos y lineales en el espacio de estados . . . . .	25
5.5. Linearización de sistemas en el espacio de estados . . . . .	27
5.5.1. Ejercicio. Linearización del péndulo invertido . . . . .	28
5.6. (Internal or Lyapunov) Stability . . . . .	29

5.6.1. Estabilidad local de sistemas linearizados . . . . .	30
5.7. Controlabilidad . . . . .	31
5.7.1. Subespacios alcanzables y controlables . . . . .	31
5.7.2. Matriz de controlabilidad para un sistema lti . . . . .	33
5.7.3. Tests de controlabilidad . . . . .	34
5.8. Estabilización de un sistema lti por realimentación basado en el test de Lyapunov . . . . .	35
5.8.1. Test de Lyapunov para la estabilización de un sistema lti . . . . .	35
5.8.2. Controlador por realimentación de estados . . . . .	36
5.9. Observabilidad en sistemas lti . . . . .	36
5.9.1. Unobservable subspace and the observability Gramian . . . . .	37
5.9.2. Observability tests . . . . .	37
5.10. State estimation for linear time invariant systems . . . . .	38
5.11. Stabilization of linear time invariant systems through output feedback . . . . .	39
<b>6. Control por realimentación de estados . . . . .</b>	<b>41</b>
6.1. Guideline to design a linear controller for the inverted pendulum . . . . .	41
6.2. Controller for the inverted pendulum . . . . .	43

# Índice de figuras

2.1. Diagrama de bloque entrada/salida del sistema $\Sigma$ .	11
2.2. Inverted pendulum	12
2.3. Circuito eléctrico no lineal	13
2.4. Esquema de un vehículo terrestre de 4 ruedas	14
3.1. Esquema general de un sistema realimentado	18
5.1. Conexión en serie de dos sistemas lineales y continuos en el espacio de estados.	24



# Índice de cuadros





# Capítulo 1

## Prefacio



## Capítulo 2

# Modelado de sistemas dinámicos

### 2.1. Sistemas en el espacio de estados

Nos vamos a centrar en sistemas que puedan ser descritos por características cuantificables. A estas características las vamos a llamar **estados**, como por ejemplo, una temperatura, una velocidad, o un voltaje. Si estos estados dependen del tiempo, entonces, llamamos **señal** a la sucesión de valores de los estados en el tiempo. Uno podría interaccionar con el sistema a través de una **entrada** cuantificable, y a su vez medir información del sistema a través de una **salida** cuantificable.

Vamos a definir  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^m$  y  $u(t) \in \mathbb{R}^k$  como el vector apilado de estados, la salida, y la entrada a un sistema  $\Sigma$  respectivamente. En particular, son señales, e.g.,  $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

El sistema  $\Sigma$  es un modelo que predice el valor de los estados y la salida a lo largo del tiempo. Esta predicción incorpora la interacción de la entrada en los estados y la salida. En particular, vamos a emplear ecuaciones diferenciales como herramienta para predecir la evolución en el tiempo de los estados del sistema  $\Sigma$  como se muestra a continuación

$$\Sigma := \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}, \quad (2.1)$$

en donde  $\dot{x} := \frac{d}{dt}(x(t))$  es la notación para la derivada total con respecto del tiempo, y  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  son funciones.

Podemos representar el sistema  $\Sigma$  como un bloque con puertos de entrada y de salida como se muestra en la figura 2.1.

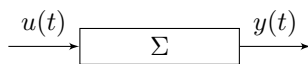


Figura 2.1: Diagrama de bloque entrada/salida del sistema  $\Sigma$ .

### 2.2. Ejemplos

#### 2.2.1. Péndulo invertido

Vamos a derivar las funciones  $f$  y  $g$  en (2.1) para el sistema del péndulo invertido.

Primero, vamos a hallar la ecuación diferencial que describe la dinámica de una masa  $m \in \mathbb{R}_+$  en el extremo de un péndulo de longitud  $l \in \mathbb{R}_+$  tal y como se muestra en la figura 2.2. Vamos a considerar que podemos interactuar con el sistema por medio de un torque  $T \in \mathbb{R}$  en el otro extremo del péndulo, que la masa sufre un rozamiento proporcional  $b \in \mathbb{R}_+$  a su celeridad, y que podemos medir el ángulo  $\theta \in \mathbb{R}$  que forma el péndulo con la vertical.

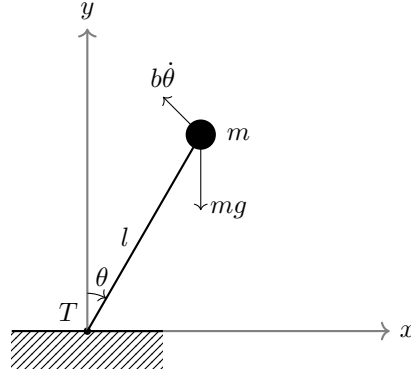


Figura 2.2: Inverted pendulum

Define  $g = 9,8$  y  $I \in \mathbb{R}_+$  como la aceleración gravitatoria y el momento de inercia del péndulo respectivamente. Es sencillo comprobar que  $I = ml^2$ , y explotaremos que  $I\ddot{\theta}$  = suma de torques. De hecho, tenemos que considerar tres torques: 1. Torque  $T$  ejercido por nosotros en la base del péndulo; 2. Torque  $-bl\dot{\theta}$  ejercido por la fricción en la masa; 3. Torque  $mgl \sin \theta$  ejercido por la atracción gravitatoria. Por lo que la ecuación diferencial que modela el comportamiento del péndulo invertido es

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{ml^2} (mgl \sin \theta - bl\dot{\theta} + T). \quad (2.2)$$

Parece razonable escoger  $\theta$  como uno de los estados para construir  $x(t)$  en (2.1). De hecho, la ecuación (2.2) es de segundo orden en  $\theta$ , por lo que es conveniente escoger  $\dot{\theta}$  como un estado también. Por lo tanto, definamos nuestro vector de estados como

$$x := \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

y como el torque  $T$  es como interactuamos con el sistema, escogemos como entrada  $u(t) = T(t)$ .

Ahora estamos listos para construir las funciones  $f$  and  $g$  en (2.1) para el péndulo invertido. Atención a que  $f$  y  $g$  solo toma como argumentos los vectores de estados  $x$  y de entradas  $u$ . En el lado izquierdo de (2.1) tenemos la derivada temporal de  $x(t)$ , por lo que

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = f(x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} f_1(x(t), u(t)) \\ f_2(x(t), u(t)) \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

donde automáticamente obtenemos que  $f_1 = \dot{\theta}$ . Fijarse que la primera fila de  $f$  en (2.4), a la izquierda tenemos que  $\frac{d}{dt}\theta$ , y a la derecha tenemos que  $f_1 = \dot{\theta}$  porque  $\dot{\theta}$  es un estado o elemento de  $x$ . Desafortunadamente, no podemos decir que  $f_2 = \ddot{\theta}(t)$  porque  $\ddot{\theta}$  no es un estado o elemento de  $x$ . No obstante, tenemos que la segunda fila  $f_2$  viene dada por la ecuación (2.2). Por lo que podemos escribir  $f$  como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = f(x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \frac{1}{ml^2} (mgl \sin \theta - bl\dot{\theta} + T) \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

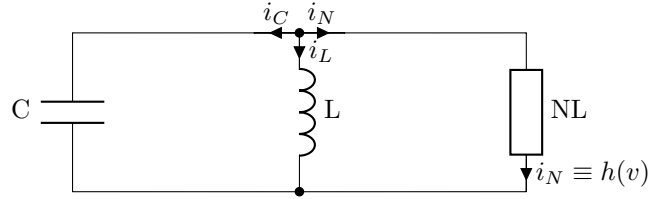


Figura 2.3: Circuito eléctrico no lineal

El cálculo de  $g$  es más sencillo en este caso. Hemos establecido al comienzo que solo podemos medir el ángulo  $\theta$ . Por lo que  $y(t) = \theta(t)$ , i.e.,

$$g(x(t), u(t)) = \theta(t). \quad (2.6)$$

### 2.2.2. El oscilador de Van der Pol

Se trata de un oscilador, propuesto por primera vez por Balthasar Van der Pol, cuando trabajaba en Philips, para explicar las oscilaciones observadas en tubos de vacío. Podemos obtener la ecuación del oscilador, empleando el circuito de la figura 2.3.

Donde el elemento no lineal NL, presenta una relación entre voltaje e intensidad caracterizada por la función  $h(v)$ .

El voltaje  $v$  en los tres componentes del circuito debe ser igual; además,

$$v = L \frac{di_L}{dt} \quad (2.7)$$

$$i_C = C \frac{dv}{dt} \quad (2.8)$$

Si aplicamos la primera ley de Kirchoff al nodo superior del circuito,

$$i_C + i_L + i_N = 0 \quad (2.9)$$

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(s) ds + h(v) = 0 \quad (2.10)$$

Si derivamos (2.10) con respecto al tiempo, dividimos por  $C$  y reordenamos,

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{C} \frac{dh(v)}{dv} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot v = 0 \quad (2.11)$$

Se trata de un caso particular de la ecuación de Liénard,

$$\ddot{v} + f(v)\dot{v} + g(v) = 0 \quad (2.12)$$

Si definimos ahora,  $h(v)$ ,

$$h(v) = m\left(\frac{1}{3}v^3 - 1\right) \quad (2.13)$$

$$\frac{dh}{dv} = m(v^2 - 1) \quad (2.14)$$

y sustituyendo en (2.11),

$$\ddot{v} + m\frac{1}{C}(v^2 - 1)\dot{v} + \frac{1}{LC}v = 0 \quad (2.15)$$



Figura 2.4: Esquema de un vehículo terrestre de 4 ruedas

Podemos representarla finalmente en variables de estado, tomando  $x_1 = v$  y  $x_2 = \dot{v}$ ,

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.16)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{LC}x_1 - m\frac{1}{C}(x_1^2 - 1)x_2 \quad (2.17)$$

Podemos ahora hacer un primer análisis cualitativo. El primer término a la derecha del igual en la ecuación (2.17) representa una fuerza recuperadora proporcional al desplazamiento, el segundo término, crecerá con la velocidad para  $x_1 < 1$ , alejando así al sistema del origen y representará un término disipativo para  $x_1 > 1$  acercándolo por tanto de nuevo al origen. Es por tanto esperable, que se alcance algún tipo de situación de equilibrio. Más adelante definiremos esta situación rigurosamente como un ciclo límite.

### 2.2.3. Un vehículo de cuatro ruedas.

La figura 2.4 muestra un esquema de un vehículo terrestre de cuatro ruedas, visto desde arriba. Si consideramos que se mueve en el plano  $x, y$ , y que su velocidad instantánea  $\vec{V}$  está siempre orientada en la dirección de avance del vehículo  $\psi$  –asumimos que no derrapa, ni se mueve lateralmente–, podemos entonces definir la velocidad, en el sistema de referencia  $x, y$  como,

$$\dot{x} = V_x(t) = V \cos(\psi(t)) \quad (2.18)$$

$$\dot{y} = V_y(t) = V \sin(\psi(t)) \quad (2.19)$$

$$(2.20)$$

Además el vehículo girará, siempre que las ruedas delanteras no estén alineadas con las ruedas traseras, cambiando así su dirección de avance. Podemos relacionar la velocidad de giro del vehículo  $\dot{\psi}$  con el ángulo de orientación de las ruedas delanteras  $\phi$ , y la velocidad a la que avanzan  $\vec{v}'$ . podemos obtener las componentes de dicha velocidad en ejes cuerpo (paralela y perpendicular a la dirección de avance del vehículo),

$$v_P = v' \cos(\phi(t)) \quad (2.21)$$

$$v_T = v' \sin(\phi(t)) \quad (2.22)$$

Pero la rueda está unida al vehículo así que su velocidad en la dirección de avance debe ser la misma que la del vehículo:  $v_P \equiv V$ . A partir de esta relación podemos obtener la velocidad

tangencial de las ruedas como,

$$v_T = V \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} = V \tan(\phi) \quad (2.23)$$

Si tomamos como centro de giro del vehículo el centro de su eje trasero, y la batalla (distancia entre ejes) es  $l$ , obtenemos una expresión para su velocidad de giro,

$$\dot{\psi} = \frac{V}{l} \tan(\phi) \quad (2.24)$$

En resumen, podemos describir el sistema mediante tres ecuaciones de estado  $x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv \psi$ : «“HEAD:manual/modelado.tex

$$\dot{x}_1 = V \cos(x_3) \quad (2.25)$$

$$\dot{x}_2 = V \sin(x_3) \quad (2.26)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{V}{l} \tan(\phi) \quad (2.27)$$

=====

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= V \cos(x_3) \\ \dot{x}_2 &= V \sin(x_3) \\ \dot{x}_3 &= \frac{V}{l} \tan(\phi) \end{cases} \quad (2.28)$$

”»i2aa5508cddde52e40909a7c802b24529eb27dd55:modelado.tex

Si consideramos  $V = cte$ , la única entrada al sistema sería el ángulo de giro de las ruedas  $u(t) = \phi(t)$ , controlando su valor, podemos hacer girar al vehículo en la dirección deseada.

## 2.3. Simulación o soluciones numéricas del sistema $\Sigma$

Dado un punto inicial  $x(0)$ , podemos predecir o calcular numéricamente  $x(t)$ . El método de *integración de Euler* es un método numérico sencillo que puede darnos información sobre la evolución temporal de los estados y salidas de  $\Sigma$ . El siguiente algoritmo describe la integración numérica por Euler:

**Algoritmo 1.** 1. Define el paso de tiempo  $\Delta T$

2. Define  $x = x(0)$

3. Define  $y = g(x, u)$

4. Registra  $x$  and  $y$ , para poder procesarlos después si fuera necesario

5. Define  $t = 0$

6. Define un tiempo final  $t^*$

7. Mientras  $t \leq t^*$  entonces:

a)  $x_{nuevo} = x_{viejo} + f(x_{viejo}, u)\Delta T$

b)  $y_{nuevo} = g(x_{nuevo}, u)$

c) Representa  $x$  gráficamente

d) Registra  $x$  e  $y$ , para poder procesarlos más adelante si fuera necesario

e)  $t = t + \Delta t$

8. *Representa  $x$  e  $y$  a lo largo de  $t$*

Este algoritmo rinde bien cuando  $\Delta T$  es suficientemente pequeño en función de como de rápido varíe  $f$  en el tiempo. Por ahora hemos considerado  $u = 0$ , es decir, no hay control o interacción alguna con el sistema.



## Capítulo 3

# Comportamiento dinámico y estabilidad

El concepto de estabilidad y su análisis constituye unos de los aspectos claves para el estudio de los sistemas dinámicos. La estabilidad de un sistema esta estrechamente relacionada con su comportamiento dinámico y puede definirse de diversas maneras. En este capítulo nos centraremos en el análisis de los llamados puntos de equilibrio de un sistema y los estudiaremos de acuerdo con el concepto de estabilidad de Lyapunov. Además, incidiremos en otros aspectos de la estabilidad de los sistemas tales como la existencia de ciclos límite o el movimiento nominal. Empecemos pues por el estudio de los puntos de equilibrio.

### 3.1. Sistemas autónomos

#### 3.1.1. Puntos de equilibrio

**Definición 1** (Punto de equilibrio). *Dados un sistema dinámico general definido por las ecuaciones,*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (3.2)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  e  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$ . Se definen como puntos de equilibrio o puntos estacionarios los valores del vector de estados  $\mathbf{x}_e$  y del vector de entradas  $\mathbf{u}_e$  para los cuales el estado y, consecuentemente, la salida del sistema permanecen constantes,

$$\dot{\mathbf{x}}_e \equiv 0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e) \quad (3.3)$$

$$\mathbf{y}_e = \mathbf{g}(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e) \quad (3.4)$$

Si el vector de estados no cambia, su derivada será cero. Por tanto, mientras no se altere el valor de la entrada, el sistema permanecerá en el mismo estado y el valor del vector de salidas permanecerá también constante.

Podemos, a partir de esta definición, obtener algunas propiedades importantes de los puntos de equilibrio:

1. Una vez que un sistema alcanza un punto de equilibrio, permanece en él indefinidamente. (Todas las derivadas temporales de las componentes del vector de estado son cero.)

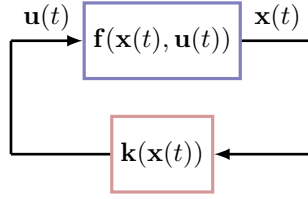


Figura 3.1: Esquema general de un sistema realimentado

2. Desde el punto de vista del control de sistemas, los puntos de equilibrio juegan un papel importante ya que representan condiciones de operación constante.
3. Un sistema dinámico puede tener uno o más puntos de equilibrio, o no tener ninguno.

**Sistemas autónomos.** Para simplificar el estudio de la estabilidad, podemos empezar por considerar el caso de sistemas que tienen entrada nula  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ,  $\forall t$ . En los que la entrada es una función directa de los estados del sistema. Hablaremos entonces de un *sistema autónomo*; la salida evoluciona a partir de un estado inicial  $\mathbf{x}_0 \equiv \mathbf{x}(\mathbf{t}_0)$ ,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (3.5)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (3.6)$$

**Sistemas realimentados.** Del mismo modo, podemos considerar sistemas en los que la entrada es una función directa del valor de los estados;  $\mathbf{u} = \mathbf{c}(\mathbf{x})$ . Hablaremos entonces de un *sistema realimentado*. A efectos de análisis de la estabilidad del sistema, no hay diferencia entre un sistema realimentado y un sistema autónomo,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{c}(\mathbf{x})) = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \quad (3.7)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{c}(\mathbf{x})) = \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) \quad (3.8)$$

El nombre de sistema realimentado, proviene de considerar que se están *realimentando* los estados en la entrada del sistema. El concepto de realimentación constituye uno de los pilares de los sistemas de control. La figura 3.1, muestra esquemáticamente este concepto.

Tanto para un sistema autónomo como para uno realimentado los puntos de equilibrio deberán satisfacer la condición de que las derivadas temporales de los estados sean todas nulas,

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_e) \quad (3.9)$$

## 3.2. Lyapunov

## 3.3. Principio de invarianza de LaSalle

## Capítulo 4

# Diseño de controladores para sistemas en el espacio de estados

### 4.1. Seguidor de trayectorias deseadas

Considera el sistema  $\Sigma$  en (2.1). Dada una señal deseada o trayectoria  $x^*(t) \in \mathbb{R}^n$ , nuestro objetivo es diseñar  $u(t) \in \mathbb{R}^k$  tal que  $x(t) \rightarrow x^*(t)$  para  $t \rightarrow \infty$ .

Para ello vamos a construir la función de error

$$e(t) := x(t) - x^*(t), \quad (4.1)$$

junto con la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(t) = \frac{1}{2} \|e(t)\|^2, \quad (4.2)$$

cuya derivada temporal satisface

$$\frac{dV}{dt} = e^T \dot{e} = e^T (\dot{x}(t) - \dot{x}^*(t)) = e^T f(x, u) - e^T \dot{x}^*(t). \quad (4.3)$$

Podemos garantizar que  $e(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  si para un conjunto compacto  $\mathcal{B} := \{e : \|e\| \leq \rho, \rho \in \mathbb{R}_+\}$  tenemos que  $\frac{dV}{dt} < 0$  si  $e \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$  y  $\frac{dV}{dt} = 0$  si  $e = 0$ .

#### 4.1.1. Ejemplo con un sistema cinemático de segundo orden

Considera el siguiente sistema cinemático de segundo orden

$$\ddot{p}(t) = u, \quad (4.4)$$

donde  $p, u \in \mathbb{R}^n$  son las *posiciones* y las *aceleraciones* respectivamente en un espacio  $l \in \mathbb{N}$ -dimensional. Vamos a particularizar para  $l = 2$ . Apilamos las posiciones y velocidades  $p_x, p_y, \dot{p}_x$  y  $\dot{p}_y$  en  $x \in \mathbb{R}^4$ , consideramos que podemos medir  $x$ , y apilamos las aceleraciones  $\ddot{p}_x$  y  $\ddot{p}_y$  en  $u \in \mathbb{R}^2$ . Por lo que las funciones  $f$  y  $g$  del sistema  $\Sigma$  (2.1) son

$$\begin{cases} f &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \\ g &= x. \end{cases} \quad (4.5)$$

Definimos como trayectorias deseadas para seguir

$$p^*(t) = f(t), \quad \dot{p}^*(t) = f'(t), \quad (4.6)$$

donde  $f(t) \in C^2$ . Vamos a construir las siguientes señales de error

$$e_1(t) = p(t) - p^*(t), \quad e_2(t) = \dot{p}(t) - \dot{p}^*(t), \quad (4.7)$$

para definir la siguiente función candidata de Lyapunov al estilo de (4.2).

$$V(e(t)) = \frac{1}{2} \|e(t)\|^2, \quad (4.8)$$

en donde  $e(t) \in \mathbb{R}^4$  hemos apilado  $e_1$  y  $e_2$ . La derivada temporal de (4.8) satisface

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= e^T \dot{e} = e_1^T \dot{e}_1 + e_2^T \dot{e}_2 = e_1^T (\dot{p} - f'(t)) + e_2^T (u - f''(t)) \\ &= e_1^T e_2 + e_2^T (u - f''(t)) \end{aligned} \quad (4.9)$$

por lo que si uno escoge

$$u = f''(t) - e_1 - e_2 = f''(t) - p(t) + f(t) - \dot{p}(t) + f'(t), \quad (4.10)$$

nos lleva a

$$\frac{dV}{dt} = -\|e_2\|^2 \leq 0. \quad (4.11)$$

De hecho, la derivada temporal de  $V(t)$  es cero sí y solo sí  $e_2 = 0$ . Por lo que para invocar al principio de invariance de LaSalle, debemos comprobar cual es el conjunto invariante más grande del sistema (autónomo) error  $\dot{e}$  cuando  $e_2 = 0$ , esto es,

$$\begin{cases} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= -e_1 - e_2 \end{cases}, \quad (4.12)$$

donde se puede ver que cuando  $e_2 = 0$ , el conjunto invariante más grande es  $e_1 = e_2 = 0$ . Consecuentemente, podemos concluir que  $e(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  para cualquier  $e(0)$  empezando en  $\mathcal{B}$  con un  $\rho$  arbitrario, esto es, tenemos convergencia global.

## 4.2. Diseño de ciclos límites para sistemas planos

Consideremos de nuevo el sistema (4.4) para  $l = 2$ , es decir, seguimos en 2D, o un sistema en el plano. En vez de querer seguir una trayectoria  $p^*(t)$ , queremos que la posición converja a un *camino* cerrado que además sea un ciclo límite. El camino cerrado lo podemos definir como una curva  $\phi(p_x, p_y) = 0$ , es decir, todos los puntos con curva de nivel igual a cero definen *el camino*. Por ejemplo, un círculo de radio  $r \in \mathbb{R}_+$  satisface

$$\phi(p) := p_x^2 + p_y^2 - r^2 = 0. \quad (4.13)$$

Atención a que podemos considerar  $\phi(p)$  como una señal de error, i.e.,  $e(t) := \phi(p(t))$ . Consecuentemente, podemos definir la siguiente función candidata de Lyapunov.

$$V(e(t)) = \frac{1}{2} e(t)^2 + \frac{1}{2} \|\dot{p}(t) - \dot{p}^*(t)\|^2, \quad (4.14)$$

cuya derivada temporal satisface (por ahora considera  $\dot{p}^*(t) = 0$ ).

$$\frac{dV}{dt} = e\dot{e} + \dot{p}^T \ddot{p} = e\nabla\phi(p)\dot{p} + \dot{p}^T u, \quad (4.15)$$

entonces, si uno escoge  $u = -e\nabla\phi(p)^T - \dot{p}$ , entonces tenemos que

$$\frac{dV}{dt} = -\|\dot{p}\|^2 \leq 0, \quad (4.16)$$

y, similarmente a como hemos hecho en la sección anterior, por el principio de invarianza de LaSalle's concluimos que  $e(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

#### 4.2.1. Ejercicio

Para que  $\phi(p)$  sea un ciclo límite, la posición no solo ha de converger a ese camino, sino que ha de evolucionar en él en el tiempo. Para ello considera  $\dot{p}^*(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \nabla\phi(p)^T$ , y concluye que ahora  $\phi(p)$  sí es un ciclo límite.



## Capítulo 5

# Sistemas lineales

### 5.1. Mapas lineales

En este capítulo nos vamos a centrar en una clase de sistema llamado *sistema lineal en el espacio de estados*. Primero, necesitamos la noción de que es un *mapa lineal*.

**Definición 2.** Considera un mapeado  $H : V \rightarrow W$ . Si  $H$  preserva la operación suma y la multiplicación por un escalar, i.e.,

$$\begin{aligned} H(v_1 + v_2) &= H(v_1) + H(v_2), \quad v_1, v_2 \in V \\ H(\alpha v_1) &= \alpha H(v_1), \quad \alpha \in \mathbb{K}, \end{aligned}$$

entonces  $H$  es un mapa lineal.

#### 5.1.1. Ejercicio: Comprueba si los siguientes mapas son lineales

1.  $H_1(v) := Av, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad v \in \mathbb{R}^n$
2.  $H_2(v) := \frac{d}{dt}(v(t)), \quad v \in \mathcal{C}^1$
3.  $H_3(v) := \int_0^T v(t)dt, \quad v \in \mathcal{C}^1, T \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
4.  $H_4(v) := D(v) := v(t - T), \quad v \in \mathcal{C}^1, T \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
5.  $H_5(v) := Av + b, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, v, b \in \mathbb{R}^n$

### 5.2. Sistemas continuos y lineales en el espacio de estados

El siguiente sistema define un sistema continuo y lineal en el espacio de estados.

$$\Sigma := \begin{cases} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), & x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^k \\ \dot{y}(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t), & y \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (5.1)$$

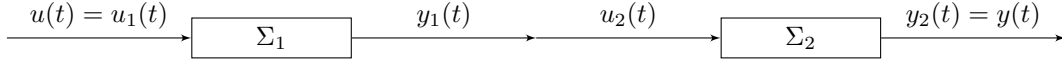


Figura 5.1: Conexión en serie de dos sistemas lineales y continuos en el espacio de estados.

**5.2.1. Ejercicio:** Escribe un sistema continuo y lineal en el espacio de estados como un diagrama de bloques entrada/salida y comprueba que es un mapa lineal.

**5.2.2. Ejercicio:** Interconecta sistemas continuos y lineales en el espacio de estados y comprueba que el sistema resultante es otro sistema continuo y lineal en el espacio de estados.

Reescribe como un único sistema lineal<sup>1</sup> como en (5.1):

1. La conexión en serie (o en cascada) de dos sistemas lineales, i.e.,  $y_1(t) = u_2(t)$ .
2. La conexión en paralelo de dos sistemas lineales, i.e.,  $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ .
3. La conexión realimentada, i.e.,  $u_1(t) = u(t) - y(t)$ , asumiendo que  $u, y, \in \mathbb{R}^k$ .

### 5.3. Solución a sistemas continuos lineales en el espacio de estados

La solución a una ecuación diferencial ordinaria viene dada por la suma de dos soluciones: la solución a la parte homogénea, y la solución a la parte no homogénea.

$$\dot{x}(t) = \underbrace{A(t)x(t)}_{\text{homogénea}} + \underbrace{B(t)u(t)}_{\text{no homogénea}} \quad (5.2)$$

**Teorema 1.** *Serie de Peano-Barker.* La solución única al sistema homogéneo  $\dot{x} = Ax$  viene dada por

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0), \quad x(t_0) \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, \quad (5.3)$$

donde

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_0) := & I + \int_{t_0}^t A(s_1)ds_1 + \int_{t_0}^t A(s_1) \int_{t_0}^{s_1} A(s_2)ds_2ds_1 \\ & + \int_{t_0}^t A(s_1) \int_{t_0}^{s_1} A(s_2) \int_{t_0}^{s_2} A(s_3)ds_3ds_2ds_1 + \dots \end{aligned} \quad (5.4)$$

Esbozo de la prueba:

---

<sup>1</sup>Por abreviar, cuando no exista ambigüedad, llamaremos sistema lineal al sistema continuo y lineal en el espacio de estados



#### 5.4. SOLUCIÓN A SISTEMAS INVARIANTES EN EL TIEMPO, CONTINUOS Y LINEALES EN EL ESPACIO

Primero calculamos la siguiente derivada

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) &= A(t) + A(t) \int_{t_0}^t A(s_2) ds_2 \\ &\quad + A(t) \int_{t_0}^t A(s_2) \int_{t_0}^{s_2} A(s_3) ds_3 ds_2 + \dots \\ &= A(t)\Phi(t, t_0).\end{aligned}\tag{5.5}$$

Afirmamos que la solución a la parte homogénea de (5.2) es  $x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$  cuya derivada con respecto al tiempo es

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x &= \frac{d}{dt}\Phi(t, t_0)x_0 \\ &= A(t)\Phi(t, t_0)x_0 \\ &= A(t)x(t),\end{aligned}\tag{5.6}$$

lo cual prueba la identidad  $\dot{x} = A(t)x(t)$  dado que  $x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$ . Para terminar la prueba, necesitaríamos probar que la serie (5.4) converge para todo  $t \geq t_0$ .

La matriz  $\Phi(t, t_0)$  es llamada **matriz de transición de estados**. Dada una condición inicial  $x_0$ , podemos predecir  $x(t)$  en (5.2) iterando  $\Phi(t, t_0)$  en el caso de que no existiera ninguna interacción con el sistema, i.e.,  $u(t) = 0, t \geq t_0$ .

##### 5.3.1. Ejercicio

Comprobar que

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\tag{5.7}$$

$$y(t) = C(t)\phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t),\tag{5.8}$$

son las soluciones a

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ \dot{y}(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t).\end{aligned}$$

#### 5.4. Solución a sistemas invariantes en el tiempo, continuos y lineales en el espacio de estados

Comunmente conocidos como sistemas *lti* (linear time invariant), son los sistemas en los que nos centraremos principalmente en el resto del curso. La matriz  $\Phi(t, t_0)$  puede ser hallada analíticamente cuando  $A$  es una matriz de coeficientes constantes. Si  $A$  es constante, entonces podemos sacarla de las integrales en (5.4), quedando

$$\begin{aligned}\Phi(t, t_0) &:= I + A \int_{t_0}^t ds_1 + A^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{s_1} ds_2 ds_1 \\ &\quad + A^3 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{s_1} \int_{t_0}^{s_2} ds_3 ds_2 ds_1 + \dots,\end{aligned}\tag{5.9}$$

y observando que las siguientes integrales tienen solución analítica

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t ds_1 &= (t - t_0) \\ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{s_1} ds_2 ds_1 &= \frac{(t - t_0)^2}{2} \\ &\vdots \\ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{s_1} \cdots \int_{t_0}^{s_{k-2}} \int_{t_0}^{s_{k-1}} ds_k ds_{k-1} \cdots ds_2 ds_1 &= \frac{(t - t_0)^k}{k!}, \end{aligned}$$

entonces tenemos que (5.9) es calculada como

$$\Phi(t, t_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^k}{k!} A^k, \quad (5.10)$$

lo cual es familiar a la serie de Taylor de una función exponencial. Por ejemplo, para un escalar  $x$ , tenemos que  $e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ . De hecho, la definición de la *exponencial de una matriz* es

$$\exp(A) = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots \quad (5.11)$$

Fijemos  $t_0 = 0$  por conveniencia, entonces

$$\begin{aligned} \Phi(t, 0) &= I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots \\ &= \exp(At), \end{aligned} \quad (5.12)$$

por lo tanto, la solución a la parte homogénea (5.2) teniendo  $A$  con coeficientes constantes y fijando  $t_0 = 0$  es

$$x(t) = \exp(At)x_0, \quad t \geq 0. \quad (5.13)$$

Para continuar, necesitamos el siguiente resultado de álgebra lineal.

**Teorema 2. Forma de Jordan.** Para una matriz cuadrada  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , existe un cambio de base no singular  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$  que transforma  $A$  en

$$J = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_l \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

donde  $J_i$  es el bloque de Jordan con forma

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}, \quad (5.15)$$

en donde cada  $\lambda_i$  es un autovalor de  $A$ , y el número  $l$  de bloques de Jordan es igual al número total de autovectores independientes de  $A$ . La matrix  $J$  es única (descontando reordenación de filas/columnas) y es llamada la **forma normal de Jordan** de  $A$ .

Partiendo de la observación que  $A = P^{-1}JP$  también, entonces es fácil probar que

$$A^k = P^{-1}J^kP, \quad (5.16)$$

de tal manera que podamos calcular que

$$\begin{aligned} \exp(At) &= P^{-1} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{bmatrix} J_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_l^k \end{bmatrix} \right) P \\ &= P^{-1} \begin{bmatrix} \exp(J_1 t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp(J_2 t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \exp(J_l t) \end{bmatrix} P \end{aligned} \quad (5.17)$$

Observa que si  $J$  es simplemente una matriz diagonal con los autovalores de  $A$ , i.e.,  $J_l = \lambda_l \in \mathbb{C}$ , entonces  $\exp(J_l t) = e^{\lambda_l t} \in \mathbb{C}$  es un cálculo trivial.

Now, let us check the consequences on the following two conditions. Ahora, veamos las consecuencias de las siguientes dos suposiciones

1.  $J$  es diagonal.
2. Todos los autovalores de  $A$  tienen parte real negativa.

Sabiendo que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t} \rightarrow 0$  si  $\lambda \in \mathbb{R}_{<0}$ , entonces tenemos que  $\exp(At) \rightarrow 0$  según  $t \rightarrow \infty$  si las dos previas suposiciones se dan. Si echamos un vistazo a (5.13), podemos concluir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow 0, \quad (5.18)$$

por tanto, podemos predecir la evolución de  $x(t)$  con sólo mirar los autovalores de  $A$ . Si  $J$  no es diagonal, podremos concluir más resultados. Lo veremos en la sección siguiente a la linearización de sistemas en el espacio de estados.

## 5.5. Linearización de sistemas en el espacio de estados

Desafortunadamente, es realmente difícil (cuando no imposible) calcular una solución analítica para  $x(t)$  e  $y(t)$  para un sistema arbitrario  $\Sigma$  como en (2.1). No obstante, hemos visto que sí se puede calcular una solución analítica para  $x(t)$  e  $y(t)$  cuando  $\Sigma$  es un sistema invariante en el tiempo, continuo y lineal en el espacio de estados.

Será de gran utilidad encontrar una relación entre ambos sistemas.

Si  $f(x, t)$  y  $g(x, t)$  son reales analíticas en un entorno a un punto específico  $(x^*, u^*)$ , entonces podemos trabajar con aproximaciones de Taylor de  $f(x, t)$  y  $g(x, t)$  en ese mismo entorno. Cuando nos quedamos en orden uno en la aproximación es lo que se conoce como *linearización*.

$$\Sigma := \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{array} \right\} \Big|_{x \approx x^*, u \approx u^*} \approx \left\{ \begin{array}{l} x(t) = x^* + \delta x(t) \\ u(t) = u^* + \delta u(t) \\ \delta \dot{x}(t) = A(t)\delta x(t) + B(t)\delta u(t) \\ \delta y(t) = C(t)\delta x(t) + D(t)\delta u(t) \end{array} \right.,$$

donde

$$\begin{aligned}
 A(t) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \Big|_{x=x^*, u=u^*} \\
 B(t) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial u_k} \end{bmatrix} \Big|_{x=x^*, u=u^*} \\
 C(t) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \Big|_{x=x^*, u=u^*} \\
 D(t) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial u_k} \end{bmatrix} \Big|_{x=x^*, u=u^*}.
 \end{aligned}$$

Informalmente, estamos calculando la sensibilidad (hasta primer orden) de  $f$  y  $g$  cuando hacemos una variación pequeña de  $x$  y  $u$  alrededor de  $(x^*, u^*)$ . Como de pequeña ha de ser esa variación depende del sistema  $\Sigma$ . En particular, cuando diseñemos controladores basados en linearizar alrededor de un punto, daremos cotas para  $\delta x$  y  $\delta u$  de tal manera que el controlador pueda garantizar estabilidad.

### 5.5.1. Ejercicio. Linearización del péndulo invertido

Más adelante, veremos que podemos diseñar una entrada de control  $u(t)$ , i.e., una señal que ha de seguir el torque  $T$  en (2.5) de tal manera que  $\theta$  y  $\dot{\theta}$  converjan a unos valores constantes o trayectorias deseadas.

Por ejemplo, vamos a fijar un punto constante de interés  $x^* = \begin{bmatrix} \theta^* \\ 0 \end{bmatrix}$ , por lo que la velocidad angular se marca a cero. Esta situación corresponde a una situación de equilibrio para el ángulo  $\theta$ . Para hallar el  $u^*(t)$  en (2.5) necesario para tal equilibrio necesitamos que  $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Una inspección a la dinámica (2.2) nos responde que

$$u^* = T^* = -\frac{g}{l} \sin \theta^*, \quad (5.19)$$

por ejemplo, para una posición totalmente vertical correspondiente a  $\theta^* = 0$  tenemos que  $T^* = 0$ , i.e.,  $x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  y  $u^* = 0$ .

El cálculo de las matrices  $A, B, C$ , y  $D$  son los Jacobianos de (2.5) y (2.6), i.e.,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= 0 \\
\frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= 1 \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= \frac{g}{l} \cos \theta \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= -\frac{b}{ml^2} \\
\frac{\partial f_1}{\partial u_1} &= 0 \\
\frac{\partial f_2}{\partial u_1} &= 1 \\
\frac{\partial g_1}{\partial x_1} &= 1 \\
\frac{\partial g_1}{\partial x_2} &= 0 \\
\frac{\partial g_1}{\partial u_1} &= 0,
\end{aligned}$$

por lo que podemos llegar a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta\theta \\ \dot{\delta\theta} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} \cos \theta & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}_{\theta=\theta^*} \begin{pmatrix} \delta\theta \\ \dot{\delta\theta} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta T \\
\delta y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta\theta \\ \dot{\delta\theta} \end{pmatrix} + 0 \delta T,
\end{aligned} \tag{5.20}$$

para modelar una aproximación a la dinámica de  $x(t)$  y la salida  $y(t)$  alrededor de los puntos  $x^*$  y  $u^*$ .

## 5.6. (Internal or Lyapunov) Stability

Decimos que el sistema lineal (5.1) *en el sentido de Lyapunov*

1. es *(marginamente) estable* si para cada condición inicial  $x_0$ , entonces  $x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$  está acotada uniformemente para todo  $t > t_0$ .
2. es *asintóticamente estable* si además  $x(t) \rightarrow 0$  según  $t \rightarrow \infty$ .
3. es *exponencialmente estable* si además  $\|x(t)\| \leq ce^{\lambda(t-t_0)}\|x(t_0)\|$  para algunas constantes  $c, \lambda > 0$ .
4. es *inestable* si no es marginalmente estable.

Centrémonos en sistemas *lti*, es decir, cuando  $A$  tiene coeficientes constantes o  $\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$ . Entonces, podemos establecer una clara relación entre los autovalores de  $A$  y las definiciones de estabilidad en el sentido de Lyapunov únicamente inspeccionando la solución a  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  dada por (5.7).

El sistema  $\dot{x}(t) = Ax(t)$

1. es marginalmente estable si y solo si todos los autovalores de  $A$  tienen parte real negativa. Si algún autovalor tiene parte real nula, entonces su bloque de Jordan ha de ser  $1 \times 1$ .
2. es asintóticamente estable si y solo si todos los autovalores de  $A$  tienen estrictamente parte real negativa.
3. es exponencialmente estable si es asintóticamente estable.
4. es inestable si y solo si al menos un autovalor de  $A$  tiene parte real positiva, o al menos uno de los autovalores con parte real nula tiene un bloque de Jordan mayor de  $1 \times 1$ .

Comprobando las soluciones (5.7)-(5.8), podemos decir que si  $A$  tiene coeficientes constantes y  $\dot{x} = Ax$  es asintóticamente estable, entonces  $x(t) \rightarrow \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B(\tau) u(\tau) d\tau$  según  $t \rightarrow \infty$ .

### 5.6.1. Estabilidad local de sistemas linearizados

Si  $x(t)$  es asintóticamente (exponencialmente) estable en  $\dot{x}(t) = Ax(t)$ , entonces, existe una única  $P$  que satisface la *ecuación de Lyapunov*

$$A^T P + P A = -Q, \quad \forall Q \succ 0. \quad (5.21)$$

Uno puede probar (5.21) si considera

$$P := \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{A t} dt. \quad (5.22)$$

Pista: Primero, sustituye  $P$  en (5.21), y después verifica el cálculo  $\frac{d}{dt} (e^{A^T t} Q e^{A t})$ . Si uno prueba que  $P$  es única, entonces  $P$  ha de ser positiva definida acorde a su definición (5.22).

Ahora vamos a considerar un sistema continuo, autónomo y no lineal en general

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (5.23)$$

con un punto de equilibrio  $x^* \in \mathbb{R}^n$ , i.e.,  $f(x^*) = 0$ . La dinámica de  $x(t)$  puede ser aproximada considerando  $x(t) = x^* + \delta x(t)$  donde

$$\delta \dot{x}(t) = A \delta x(t), \quad A := \frac{\partial f(x)}{\partial x}. \quad (5.24)$$

¿Cómo de buena es esta aproximación?

**Teorema 3.** *Asume que  $f(x)$  es dos veces diferenciable. Si (5.24) es exponencialmente estable, entonces, existe un entorno  $\mathcal{B}$  alrededor de  $x^*$  y constantes  $c, \lambda > 0$  tal que para cada solución  $x(t)$  del sistema (5.23) que empiece con  $x(t_0) \in \mathcal{B}$ , tenemos que*

$$\|x(t) - x^*\| \leq c e^{\lambda(t-t_0)} \|x(t_0) - x^*\|, \quad \forall t \geq t_0. \quad (5.25)$$

**¿Cómo de grande es  $\mathcal{B}$ ? ¿Podemos estimarlo? Esbozo de la prueba del Teorema 3**

Como  $f$  es dos veces diferenciable, de su desarrollo de Taylor tenemos que

$$r(x) := f(x) - (f(x^*) + A(x - x^*)) = f(x) - A \delta x = O(\|\delta x\|^2), \quad (5.26)$$

lo cual significa que existe una constante  $c$  y una bola  $\bar{B}$  alrededor de  $x^*$  tal que

$$\|r(x)\| \leq c \|\delta x\|^2, \quad x \in \bar{B}. \quad (5.27)$$

Si el sistema linealizado es exponencialmente estable, tenemos que

$$A^T P + P A = -I. \quad (5.28)$$

Ahora considera la siguiente señal escalar

$$v(t) := (\delta x)^T P \delta x, \quad \forall t \geq 0. \quad (5.29)$$

Observa que  $\delta x(t) = x(t) - x^*$ , entonces  $\dot{\delta x}(t) = \dot{x}(t) = f(t)$ . Por lo tanto, la derivada con respecto del tiempo de  $v(t)$  satisface

$$\begin{aligned} \dot{v} &= f(x)^T P \delta x + (\delta x)^T P f(x) \\ &= (A \delta x + r(x))^T P \delta x + (\delta x)^T P (A \delta x + r(x)) \\ &= (\delta x)^T (A^T P + P A) \delta x + 2(\delta x)^T P r(x) \\ &= -\|\delta x\|^2 + 2(\delta x)^T P r(x) \\ &\leq -\|\delta x\|^2 + 2\|P\| \|\delta x\| \|r(x)\|. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Sabemos que  $v(t)$  es positiva excepto cuando  $\delta x = 0$ . Si podemos garantizar que  $\dot{v}(t) < 0$  y que  $\dot{v}(t) = 0$  solo cuando  $\delta x = 0$ , entonces  $v(t) \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow \infty$ , lo cual implica que  $\delta x(t) \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow \infty$ .

Ahora, si  $x \in \bar{\mathcal{B}}$ , entonces

$$\dot{v} \leq -\left(1 - 2c\|P\|\|\delta x\|\right)\|\delta x\|^2, \quad (5.31)$$

Por lo tanto, si la desviación  $\delta x$  es suficientemente pequeña, i.e.,

$$\|\delta x\| < \frac{1}{2c\|P\|}, \quad (5.32)$$

entonces  $\dot{v}(t) < 0$  si  $\delta x(0) \neq 0$  y  $\delta x(0) < \frac{1}{2c\|P\|}$ .

Podemos concluir que una estimación de  $\mathcal{B}$  es

$$\mathcal{B} := \{\delta x : \|\delta x\| < \frac{1}{2c\|P\|}\}. \quad (5.33)$$

## 5.7. Controlabilidad

### 5.7.1. Subespacios alcanzables y controlables

Recordemos que cuando aplicamos una entrada genérica  $u(\cdot)$  a (5.1), transferimos el sistema de un estado  $x(t_0) := x_0$  a un estado  $x(t_1) := x_1$ , que además podemos calcular con la expresión

$$x_1 = \Phi(t_1, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau, \quad (5.34)$$

donde recordemos que  $\Phi(\cdot)$  es la matriz de transición de estados del sistema.

Preguntas:

1. ¿Qué estados puedo alcanzar desde  $x_0$ ?
2. ¿Existe siempre una entrada  $u(\cdot)$  que transfiera un estado arbitrario  $x_0$  a otro  $x_1$ ?

Estas dos preguntas llevan a acuñar las definiciones de (sub)espacios alcanzables y controlables.

**Definición 3** (Subespacio alcanzable). *Dados dos instantes de tiempo  $t_1 > t_0 \geq 0$ , el subespacio alcanzable (o controlable desde el origen)  $\mathcal{R}[t_0, t_1]$  consiste en todos los estados  $x_1$  por los que existe una entrada  $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^k$  que transfiera el estado  $x_0 = 0$  a  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ ; i.e.,*

$$\mathcal{R}[t_0, t_1] := \left\{ x_1 \in \mathbb{R}^n : \exists u(\cdot), x_1 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \right\}. \quad (5.35)$$

**Definición 4** (Subespacio controlable). *Dados dos instantes de tiempo  $t_1 > t_0 \geq 0$ , el subespacio controlable (o controlable hacia el origen)  $\mathcal{C}[t_0, t_1]$  consiste en todos los estados  $x_0$  por los que existe una entrada  $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^k$  que transfiera un estado  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  a  $x_1 = 0$ ; i.e.,*

$$\mathcal{C}[t_0, t_1] := \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n : \exists u(\cdot), 0 = \Phi(t_1, t_0) x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \right\}. \quad (5.36)$$

¿Cómo podemos calcular  $\mathcal{R}[t_0, t_1]$  y  $\mathcal{C}[t_0, t_1]$ ? Para ello vamos a introducir y explotar las siguientes dos matrices llamadas *Gramianos*.

**Definición 5** (Gramianos de alcanzabilidad y controlabilidad).

$$W_R(t_0, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) B(\tau)^T \Phi(t_1, \tau)^T d\tau \quad (5.37)$$

$$W_C(t_0, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau) B(\tau) B(\tau)^T \Phi(t_0, \tau)^T d\tau \quad (5.38)$$

**Teorema 4.** *Dados dos instantes de tiempo  $t_1 > t_0 \geq 0$ ,*

$$\mathcal{R}[t_0, t_1] = \text{Im}\{W_R(t_0, t_1)\} \quad (5.39)$$

$$\mathcal{C}[t_0, t_1] = \text{Im}\{W_C(t_0, t_1)\}, \quad (5.40)$$

donde  $\text{Im}\{A\} := \left\{ y \in \mathbb{R}^m : \exists x \in \mathbb{R}^n, y = Ax \right\}$  para una matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

*Demostración.* Solo vamos a probar (5.39) porque (5.40) tiene una prueba similar. Necesitamos mostrar ambas implicaciones: primero, si  $x_1 \in \text{Im}\{W_R(t_0, t_1)\}$ , entonces  $x_1 \in \mathcal{R}[t_0, t_1]$ ; segundo, si  $x_1 \in \mathcal{R}[t_0, t_1]$  entonces  $x_1 \in \text{Im}\{W_R(t_0, t_1)\}$ .

Cuando  $x_1 \in \text{Im}\{W_R(t_0, t_1)\}$ , existe un vector  $\mu_1 \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$x_1 = W_R(t_0, t_1) \eta_1. \quad (5.41)$$

Escoge  $u(\tau) = B(\tau)^T \Phi(t_1, \tau)^T \eta_1$ , y sustitúyelo en (5.35), entonces tenemos que

$$x_1 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) B(\tau)^T \Phi(t_1, \tau)^T \eta_1 d\tau = W_R(t_0, t_1) \eta_1. \quad (5.42)$$

Cuando  $x_1 \in \mathcal{R}[t_0, t_1]$ , existe una entrada  $u(\cdot)$  para la cual

$$x_1 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau. \quad (5.43)$$

Si (5.43) es en  $\text{Im}\{W_R(t_0, t_1)\}$ , entonces  $x_1^T \mu = 0$ ,  $\mu \in \text{Ker}\{W_R(t_0, t_1)\}$ <sup>2</sup> Vamos a calcular

$$x_1^T \mu = \int_{t_0}^{t_1} u(\tau)^T B(\tau)^T \Phi(t_1, \tau)^T \mu d\tau. \quad (5.44)$$

<sup>2</sup>If  $x \in \text{Ker}\{A^T\}$ , por lo que  $A^T x = 0$ . Si  $y \in \text{Im}\{A\}$ , entonces  $y = A\eta$ . Por lo tanto,  $x^T y = x^T A\eta = \eta^T A^T x = \eta^T 0 = 0$ . Observa que  $W_R^T = W_R$  por definición.



Y observando que

$$\begin{aligned} \mu \in \text{Ker}\{W_R(t_0, t_1)\} &\implies \mu^T W_R(t_0, t_1) \mu = 0 \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \mu^T \Phi(t_1, \tau) B(\tau) B(\tau)^T \Phi(t_1, \tau)^T \mu d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \|B(\tau)^T \Phi(t_1, \tau)^T \mu\|^2 d\tau, \end{aligned} \quad (5.45)$$

obtenemos que  $B(\tau)^T \Phi(t_1, \tau)^T \mu = 0$ , llevando a (5.44) ser igual a cero.  $\square$

**Atención 1.** *Observa que hemos probado que  $u(\tau) = B(\tau)^T \Phi(t_1, \tau)^T \eta_1$  puede ser como una entrada de control para transferir  $x_0 = 0$  a  $x_1 \in \mathbb{R}^n$  en un tiempo finito  $(t_1 - t_0)$ . De hecho, esta es la señal de control en lazo abierto de mínima energía.*

Vamos a ver este hecho en más detalle. Considera otra señal de control  $\bar{u}(t)$  tal que

$$x_1 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) \bar{u}(\tau) d\tau. \quad (5.46)$$

Para que sea cierto, debemos tener For this to hold, we must have

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) v(\tau) d\tau = 0, \quad (5.47)$$

donde  $v(\tau) = u(\tau) - \bar{u}(\tau)$ . Vamos a ver la energía asociada a  $\bar{u}$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \|\bar{u}(\tau)\|^2 d\tau &= \int_{t_0}^{t_1} \|B(\tau)^T \Phi(t_1, \tau)^T \eta_1 + v(\tau)\|^2 d\tau \\ &= \eta_1^T W_R(t_0, t_1) \eta_1 + \int_{t_0}^{t_1} \|v(\tau)\|^2 d\tau + 2\eta_1^T \int_{t_0}^{t_1} B(\tau) \Phi(t_1, \tau) v(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (5.48)$$

donde el tercer término es cero por (5.47). Por lo tanto, si  $\bar{u}(t)$  difiere  $v(t)$  de  $u(t)$ , gastará  $\int_{t_0}^{t_1} \|v(\tau)\|^2 d\tau$  más energía que  $u(t)$ .

### 5.7.2. Matriz de controlabilidad para un sistema lti

Consideremos un sistema lineal (5.1) con  $A$  y  $B$  con coeficientes constantes.

El teorema de Cayley-Hamilton nos permite escribir

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) A^i, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (5.49)$$

para algunas funciones escalares apropiadas  $\alpha_i(t)$ . Tenemos también que si  $A$  y  $B$  tienen coeficientes constantes, entonces

$$\begin{aligned} x_1 &= \int_0^{t_0-t_1} e^{At} B u(t) dt \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} A^i B \left( \int_0^{t_1-t_0} \alpha_i(t) u(t) dt \right) \\ &= \mathcal{C} \begin{bmatrix} \int_0^{t_1-t_0} \alpha_0(t) u(t) dt \\ \vdots \\ \int_0^{t_1-t_0} \alpha_{n-1}(t) u(t) dt \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.50)$$

donde

$$\mathcal{C} := \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}_{n \times (kn)}, \quad (5.51)$$

es la llamada matrix de controlabilidad del sistema lti.

**Atención 2.** Observa que  $\mathcal{C}[t_0, t_1]$  y  $\mathcal{C}$  son diferentes objetos. El primero es un (sub)espacio, mientras que el segundo es una matriz.

Observa que acabamos de probar que la imagen de  $\mathcal{C}$  es la misma que la imagen de  $W_R(t_0, t_1)$ . La siguiente afirmación más general puede probarse también:

**Teorema 5.** Dados dos instantes de tiempo  $t_0, t_1$ , con  $t_1 > t_0$ , tenemos que

$$\mathcal{R}[t_0, t_1] = \text{Im}\{W_R(t_0, t_1)\} = \text{Im}\{\mathcal{C}\} = \text{Im}\{W_C(t_0, t_1)\} = \mathcal{C}[t_0, t_1], \quad (5.52)$$

Podemos extraer dos importantes consecuencias del Teorema 5 para sistemas lti. ¡Observa que  $\text{Im}\{\mathcal{C}\}$  no depende de ninguna variable tiempo!

1. *Reversibilidad temporal:* Si uno puede alcanzar  $x_1$  desde el origen, entonces uno puede alcanzar el origen desde  $x_1$ . Es decir, los subespacios de alcanzabilidad y controlabilidad son el mismo subespacio.
2. *Escalado de tiempo:* La alcanzabilidad y la controlabilidad no dependen del tiempo. Si uno puede transferir el estado de  $x_0$  and  $x_1$  en  $t$  segundos, entonces también puedes hacerlo en  $\bar{t} \neq t$  segundos.

**Definición 6.** Dados dos instantes de tiempo  $t_1 > t_0 \geq 0$ , el par  $(A, B)$  del sistema (5.1) se dice alcanzable en  $[t_0, t_1]$  si  $\mathcal{R}[t_0, t_1] = \mathbb{R}^n$ . Es decir, si podemos alcanzar cualquier estado en tiempo finito partiendo desde el origen.

**Definición 7.** Dados dos instantes de tiempo  $t_1 > t_0$ , el par del sistema (5.1) se dice controlable en  $[t_0, t_1]$  si  $\mathcal{C}[t_0, t_1] = \mathbb{R}^n$ . Es decir, si podemos alcanzar el origen partiendo desde cualquier estado en tiempo finito.

### 5.7.3. Tests de controlabilidad

El siguiente teorema es el resultado de combinar la Definición 7 con el Teorema 5:

**Teorema 6.** El par (constante)  $(A, B)$  es controlable si y solo si el rango de  $\mathcal{C}$  es  $n$ .

El siguiente teorema se puede comprobar numéricamente a partir de los siguientes resultados.

**Teorema 7.** El par (constante)  $(A, B)$  es controlable si y solo si no existe ningún autovector de  $A^T$  en el kernel de  $B^T$ .

El siguiente teorema es una reescritura del anterior.

**Teorema 8.** El par (constante)  $(A, B)$  es controlable si y solo si el rango de  $[A - \lambda I \quad B]$  es  $n$ .

**Atención 3.** Observa que el tener un sistema asintóticamente estable no implica el tener un sistema lti controlable. Por ejemplo,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}. \quad (5.53)$$

El kernel de  $B^T$  es generado por  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , el cual es proporcional a un autovector de  $A = A^T$ . Entonces, el sistema no es controlable acorde al teorema 7. Observa, que no tenemos autoridad ninguna sobre  $x_1$  a través de  $u$ . Sin embargo, es asintóticamente estable. Uno puede ver que  $x_{\{1,2\}}(t) \rightarrow 0$  según  $t \rightarrow \infty$  cuando  $u = 0$ . Recuerda que la controlabilidad trata de transferir estados en **tiempo finito**.

## 5.8. Estabilización de un sistema lti por realimentación basado en el test de Lyapunov

### 5.8.1. Test de Lyapunov para la estabilización de un sistema lti

**Definición 8.** Si el sistema (5.1) es lti, entonces es estabilizable si existe una entrada  $u(t)$  para cualquier  $x(0)$  tal que  $x(t) \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow \infty$ .

Esta definición es una versión de *sistema controlable* pero para tiempo infinito. En el siguiente teorema veremos que *estabilizable* es menos restrictivo que *controlable*.

**Teorema 9.** Si el sistema (5.1) es lti, entonces es estabilizable si y solo si todos los autovectores de  $A^T$  correspondientes a autovalores con parte real no negativa pertenecen al kernel de  $B^T$ .

La proyección de  $x(t)$  sobre el espacio generado por los autovectores de  $A^T$  asociados a autovalores con parte real negativa van a cero sin necesidad de la *asistencia* de ninguna entrada. Entonces, la entrada  $u(t)$  debe asistir a las proyecciones de  $x(t)$  en el resto de autovectores de  $A^T$ . Por ejemplo,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}, \quad (5.54)$$

mientras que no tenemos ninguna *autoridad* sobre  $x_1(t)$ , podemos emplear  $u(t)$  para llevar a  $x_2(t)$  a cero de tal manera que  $x(t) \rightarrow 0$  según  $t \rightarrow \infty$ .

**Teorema 10.** Si el sistema (5.1) es lti, entonces es estabilizable si y solo si hay una matriz positiva definida  $P$  a la siguiente desigualdad

$$AP + PA^T - BB^T \prec 0 \quad (5.55)$$

*Demostración.* Solo vamos a ver una dirección de la prueba. No confundir (5.55) con la ecuación de Lyapunov<sup>3</sup>  $PA + A^TP \prec -I$  en (5.21).

Considera  $x$  como un autovector asociado al autovalor  $\lambda$  de  $A^T$  con parte real no negativa. Entonces,

$$x^*(AP + PA^T)x < x^*BB^Tx = \|B^Tx\|^2, \quad (5.56)$$

donde  $x^*$  es el complejo conjugado de  $x$ . Pero el lado izquierdo de (5.56) es igual a

$$(A^T(x^*)^T)^TPx + x^*PA^Tx = \lambda^*x^*Px + \lambda x^*Px = 2\text{Real}\{\lambda\}x^*Px. \quad (5.57)$$

Como  $P$  es positiva definida, y  $\text{Real}\{\lambda\} \geq 0$ , podemos concluir que

$$0 \leq 2\text{Real}\{\lambda\}x^*Px < \|B^Tx\|^2, \quad (5.58)$$

y por tanto  $x$  debe pertenecer al kernel de  $B$ , si no tendríamos que

$$0 \leq 2\text{Real}\{\lambda\}x^*Px < 0, \quad (5.59)$$

y eso no es posible. □

---

<sup>3</sup>Observa el orden de las matrices traspuestas, y observa también el signo opuesto de  $-BB^T$  y  $+I$  en las dos ecuaciones.

### 5.8.2. Controlador por realimentación de estados

Realimentación de estados implica el escoger una señal de entrada que dependa únicamente de los estados del sistema, es decir, diseñar una

$$u(t) = -Kx(t), \quad (5.60)$$

donde  $K \in \mathbb{R}^{n \times k}$ , tal que  $x(t) \rightarrow 0$  en (5.1) exponencialmente rápido según  $t \rightarrow \infty$ .

Define la ganancia matriz de control

$$K := \frac{1}{2}B^T P^{-1}, \quad (5.61)$$

donde  $P$  se calcula en (5.55) si y solo si un sistema lti es estabilizable. Por lo tanto, podemos describir (5.55) como

$$(A - \frac{1}{2}BB^T P^{-1})P + P(A - \frac{1}{2}BB^T P^{-1})^T = (A - BK)P + P(A - BK)^T \prec 0, \quad (5.62)$$

y multiplicando a la izquierda y derecha por  $Q := P^{-1}$  tenemos que

$$Q(A - BK) + (A - BK)^T Q \prec 0, \quad (5.63)$$

la cual es una ecuación de Lyapunov. Por lo tanto, podemos concluir que  $(A - BK)$  tiene todos sus autovalores *estables*, esto es, si uno escoge la entrada

$$u = -Kx = -\frac{1}{2}B^T P^{-1}x, \quad (5.64)$$

en el sistema lti estabilizable, entonces  $x(t) \rightarrow 0$  exponencialmente rápido según  $t \rightarrow \infty$ .

Encontrar la matriz  $P$  en (5.61) requiere resolver la *linear matrix inequality* (LMI) en (5.55). Para ello existen herramientas numéricas *LMI solvers* disponibles en Matlab o Python.

Si el sistema lti es controlable (recordemos que es más restrictivo que estabilizable), la matriz  $K$  en (5.60) puede explotar el Teorema 7. Es decir, podemos encontrar una matriz  $K$  tal que  $(A - BK)$  tenga sus autovalores donde nosotros queramos por diseño. Por ejemplo, a través del Teorema de Ackermann.

**Teorema 11.** *Si el sistema lti es controlable, entonces  $(A - BK)$  tiene como autovalores un conjunto deseado  $\Lambda$  si*

$$K = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad 1] C^{-1} \Delta(A), \quad (5.65)$$

en donde  $C$  es la matriz de controlabilidad (5.51) y  $\Delta$  es el polinomio característico que satisface  $\Lambda$ .

Obviamente, al requerir la inversa de la matriz de controlabilidad, se requiere por tanto que  $C$  sea de rango máximo. Es decir, el sistema lti ha de ser controlable para poder aplicar el Teorema 11.

## 5.9. Observabilidad en sistemas lti

In this section we will consider only the following linear system

$$\Sigma_{\text{lti}} := \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}. \quad (5.66)$$

### 5.9.1. Unobservable subspace and the observability Gramian

**Definición 9.** The unobservable subspace  $\mathcal{UO}$  of system (5.66) consists of all the states  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  such that

$$Ce^Ax_0 = 0. \quad (5.67)$$

This definition is motivated by the following facts. Recall that from (5.8) we have that

$$\begin{aligned} y(t) &= Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \\ \tilde{y}(t) &:= y(t) - \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau - Du(t) = Ce^{At}x_0. \end{aligned} \quad (5.68)$$

On the left hand side of (5.68) we have a pair input/output, and on the right hand side of (5.68) we have the initial state  $x_0$ . From (5.68) we can observe two interesting properties:

1. When a particular  $x_0$  is compatible with an input/output pair, then every initial state of the form  $x_0 + x_u$ ,  $x_u \in \mathcal{UO}$ , is also compatible with the same input/output pair.
2. When  $\mathcal{UO}$  contains only the zero vector, then there exists at most one initial state  $x_0$  that is compatible with the input/output pair.

**Definición 10.** The system (5.66) is observable if its  $\mathcal{UO}$  contains only the zero vector.

**Definición 11.** Given two times  $t_1 > t_0 \geq 0$ , the observability Gramian is defined by

$$W_O(t_0, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} e^{A^T(\tau-t_0)}C^TCe^{A(\tau-t_0)}d\tau \quad (5.69)$$

There is difference w.r.t. the controllability Gramian, the transposes appear on the left for the observability Gramian, whereas the transposes appear on the right for the controllability Gramian. Starting with (5.67), it can be shown that

$$\text{Ker } W_O(t_0, t_1) = \mathcal{UO}. \quad (5.70)$$

### 5.9.2. Observability tests

The following can be proven formally by applying the theorem of Cayley-Hamilton<sup>4</sup>. Let us now check the sensibility of  $y$  and its time derivatives with respect to  $x$  when<sup>5</sup>  $u(t) = 0$

$$\begin{aligned} y(t) = Cx(t) &\implies \dot{y}(t) = C\dot{x}(t) = CAx(t) \implies \ddot{y}(t) = CA^2x(t) \quad \dots \\ &\implies \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} = CA^{n-1}x(t), \end{aligned}$$

If we do not want to loose any information of the signal  $x(t)$ , then the matrix

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}_{(kn) \times n}, \quad (5.71)$$

must be full column rank. We, then, introduce the following equivalent results.

<sup>4</sup>To see why we stop at  $(n-1)$ .

<sup>5</sup>Note that  $B$  and  $D$  do not play any role for the observability, only  $A$  and  $C$ .

**Teorema 12.** *The system (5.66) is observable if and only if the rank of  $\mathcal{O}$  equals  $n$ .*

**Teorema 13.** *The system (5.66) is observable if and only if no eigenvector of  $A$  is in the kernel of  $C$ .*

Note that from (5.71) we can derive a *controllability* test

$$\mathcal{O}^T = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & (A^{n-1})^T C^T \end{bmatrix}_{n \times (kn)}, \quad (5.72)$$

from which we can derive from the following *dual* system constructed from (5.66)

$$\Sigma_{\text{dual}} := \begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) &= A^T \bar{x}(t) + C^T \bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) &= B^T \bar{x}(t) + D^T \bar{u}(t) \end{cases}, \quad (5.73)$$

then, we have the following result

**Teorema 14.** *The system (5.66) is controllable if and only if (5.73) is observable.*

Therefore, we only need to study the controllability of the dual system (5.66) to conclude about its observability.

## 5.10. State estimation for linear time invariant systems

The simplest estimator consists of a copy of the system (5.66)

$$\Sigma_{\text{estimator}} := \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases}, \quad (5.74)$$

and let us define the error signal  $e(t) := \hat{x}(t) - x(t)$ . Now, let us check the dynamics of the error signal

$$\dot{e}(t) = \dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t) = A\hat{x} + Bu - Ax - Bu = Ae(t), \quad (5.75)$$

therefore  $e(t) \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow \infty$  exponentially fast if  $A$  is a stability matrix for every input signal  $u(t)$ .

What if  $A$  is not a stability matrix? Then, consider the following system

$$\Sigma_{\text{estimator2}} := \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(\hat{y}(t) - y(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases}, \quad (5.76)$$

where we have *two inputs*  $u$  and  $(\hat{y} - y)$ , and  $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$  is a matrix gain. Note that the signal  $y$  comes from (5.66). Now, let us see the dynamics of the error signal

$$\dot{e} = A\hat{x} + Bu - L(\hat{y} - y) - (Ax + Bu) = (A - LC)e, \quad (5.77)$$

thus, if we can make  $(A - LC)$  a stability matrix, then  $e(t) \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow \infty$  exponentially fast for every input signal  $u(t)$ .

Sometimes, it is not possible to find such a  $L$  because of the structure of  $C$  (something similar happened for  $K$  and  $B$  for the stabilizability and controllability of (??)). Then we have a similar result about *detectability*.

**Teorema 15.** *The system (5.66) is detectable if and only if every eigenvector of  $A$  corresponding to a non stable eigenvalue is not in the kernel of  $C$ .*

Remember, a system is detectable if its dual is stabilizable.

**Teorema 16.** *When a pair  $(A, C)$  is detectable, it is always possible to find  $L$  such that  $(A - LC)$  is a stability matrix.*

**Teorema 17.** *When a pair  $(A, C)$  is observable, it is always possible to find  $L$  such that  $(A - LC)$  is a stability matrix with an arbitrary set of stable eigenvalues.*

In such a case, we can always compute  $L$  as we have computed  $K$  as in (5.61) for controllable systems by analyzing the dual system of (5.66). Note that in such a computation, since we are dealing with the dual system, the matrix gain  $K$  will be  $L^T$ .

## 5.11. Stabilization of linear time invariant systems through output feedback

If  $C$  is not invertible, then we do not have *direct access* to the states  $x$  in (5.66); therefore we cannot apply the control input  $u = -Kx$  as in (5.64).

What if (5.66) is observable, or at least detectable? Then, we are going to show that we can employ

$$u = -K\hat{x}, \quad (5.78)$$

where  $\hat{x}$  are the states of our estimator (5.76), as a control action to stabilize (5.66) around the origin. Let us apply (5.78) in (5.66), therefore we have that

$$\dot{x} = Ax - BK\hat{x} = Ax - BK(e + x) = (A - BK)x - BKe, \quad (5.79)$$

that together with (5.77) give us the following autonomous system

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & -BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}, \quad (5.80)$$

which is exponentially stable since  $(A - BK)$  and  $(A - LC)$  are stability matrices (if our system (5.66) is at least stabilizable and detectable) and the triangular structure of the state-transition matrix.





## Capítulo 6

# Control por realimentación de estados

### 6.1. Guideline to design a linear controller for the inverted pendulum

1.

Given the model  $\Sigma$  of a dynamical system

$$\Sigma := \begin{cases} \dot{x}(t) = & f(x(t), u(t)) \\ y(t) = & g(x(t), u(t)) \end{cases},$$

choose an operational/equilibrium point  $x^*$  of interest.

For the pendulum, let us choose when it is in vertical position and at rest, i.e.,  $\theta^* = 0, \dot{\theta}^* = 0$ . So you we have that  $x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

2.

Since  $x^*$  is an equilibrium, find out which  $u^*$  makes  $\dot{x}(t) = 0$ , i.e.,  $f(x^*, u^*) = 0$ .

We have that  $u = T$ , and that  $\ddot{\theta} = \frac{1}{ml^2} (mgl \sin \theta - b\dot{\theta} + T)$ . To keep  $x^*$  fixed, we need to set  $\ddot{\theta} = 0$ , therefore  $u^* = T^* = 0$ . Note that for another  $x^*$ , we would have different  $T^*$ .

3.

Now we want the system around  $x^*$  and  $u^*$  to be an stable equilibrium, i.e., for a small deviation/disturbance  $\delta x$ , we need to calculate the necessary  $\delta u$  to keep the system at  $x^*$ .

We calculate the dynamics of  $\delta x$  and  $\delta u$ , i.e., we linearize  $\Sigma$  around  $x^*$  and  $u^*$ .

$$\Sigma := \begin{cases} \dot{x}(t) = & f(x(t), u(t)) \\ y(t) = & g(x(t), u(t)) \end{cases} \approx \begin{cases} \delta \dot{x}(t) = & A(t)\delta x(t) + B(t)\delta u(t) \\ \delta y(t) = & C(t)\delta x(t) + D(t)\delta u(t) \end{cases} \quad \text{if } x \approx x^* + \delta x, u \approx u^* + \delta u,$$

where the matrices  $A(t), B(t), C(t)$  and  $D(t)$  are the Jacobians from Week 14. Note that it is usual to set the origin of the coordinates  $x$  the system at  $x^*$ , this is why you will find in many places

(including Week 14)  $\delta x = x$  for the linearized version of  $\Sigma$ .

The Jacobians for the inverted pendulum are

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{ml^2}(mgl \cos \theta) & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ D &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Note that  $A$  has to be evaluated at  $x^*$  (check the notes from Week 14). Therefore, for  $\theta = 0$ , we have that  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}$ . We assume that  $C = I$ , i.e., we can measure all the elements from the state vector  $x$ .

4.

Let us calculate the linear controller

$$\delta u = K \delta y, \quad (6.2)$$

such that  $x^*$  is stable. We substitute (6.2) in the linearized  $\Sigma$  resulting in

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}(t) &= A(t) \delta x(t) + B(t) K \delta y \\ &= A(t) \delta x(t) + B(t) K C(t) \delta x(t) + K D(t) \delta u(t) \\ &= (A(t) + B(t) K C(t)) x(t) + K D(t) u(t) \end{aligned} \quad (6.3)$$

Consider that  $D(t) = 0$ , and  $A(t)$  and  $B(t)$  are constant matrices, i.e., their elements do not depend on time. Then, we can write (6.3) as

$$\delta \dot{x}(t) = (A + B K C) x(t) \quad (6.4)$$

$$= M x(t). \quad (6.5)$$

Then, the linearized system  $\Sigma$  is stable around  $x^*$  under small disturbances if and only if  $M$  has all its eigenvalues with negative real part (Week 15). To have the addition  $A + B K C$ , we need  $K$  with the appropriate dimensions. For  $C = I$  we have that  $K = [k_{11} \ k_{12}]$ , so we have that

$$M = A + B K C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} + \frac{k_{11}}{ml^2} & -\frac{b}{ml^2} + \frac{k_{12}}{ml^2} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

5.

A matrix  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  has  $n$  eigenvalues. The eigenvalues of  $M$  can be calculated from the following determinant

$$\det\{M - \lambda_i I\} = 0, \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad (6.7)$$

For example, for a  $2 \times 2$  matrix we have that  $\det\{A\} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ . Therefore we have that (6.7) is

$$(m_{11} - \lambda_i)(m_{22} - \lambda_i) - m_{12}m_{21} = 0, \quad i \in \{1, 2\}. \quad (6.8)$$

The values for the elements of  $K$  are calculated by setting an arbitrary  $\lambda_i < 0$ . This solution is guaranteed for  $C = I$  and  $D = 0$ .

We have that (6.8) from  $M$  in (6.6) is

$$\lambda^2 + \lambda \left( \frac{1}{ml^2}(b - k_{12}) \right) - \frac{g}{l} - \frac{k_{11}}{ml^2},$$

whose solution is given by

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{1}{ml^2}(b - k_{12}) \pm \sqrt{\frac{(b - k_{12})^2}{m^2l^4} + 4(\frac{g}{l} + \frac{k_{11}}{ml^2})}}{2}. \quad (6.9)$$

Let us find some conditions for  $k_{11}$  and  $k_{12}$  such that we can guarantee that  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  are two real negative numbers. For example, if force

$$k_{12} < b, \quad (6.10)$$

then  $-\frac{1}{ml^2}(b - k_{12})$  in (6.9) is a negative number. Note that  $b$  is a coefficient friction in the pendulum equation, therefore if  $b = 1$ , we can have  $-\infty < k_{12} < 1$ , i.e., the gain  $k_{12}$  can be even positive as long as it is smaller than  $b$ . Now we turn our attention at the square root in (6.9). Assume that we take the positive solution  $r > 0$  of the square root in (6.9). Now we need to add or subtract  $r$  to  $-\frac{1}{ml^2}(b - k_{12})$ . We note that for  $\lambda_1$  if  $-\frac{1}{ml^2}(b - k_{12})$  is negative then  $-\frac{1}{ml^2}(b - k_{12}) - r$  is still negative, so  $\lambda_1 < 0$ . For  $\lambda_2$  we need to calculate  $k_{11}$  such that  $-\frac{1}{ml^2}(b - k_{12}) + r < 0$ . If we set  $k_{11} < -gml$  then  $\sqrt{\frac{(b - k_{12})^2}{m^2l^4} + 4(\frac{g}{l} + \frac{k_{11}}{ml^2})} < \sqrt{\frac{(b - k_{12})^2}{m^2l^4}} = \frac{1}{ml^2}(b - k_{12})$ . Therefore we guarantee that  $r < \frac{1}{ml^2}(b - k_{12})$ , thus  $\lambda_2 < 0$ . Note that  $k_{11}$  not only needs to be negative but *negative enough*. Check in the Python script the consequences of playing around these limits for  $k_{11}$  and  $k_{12}$ .

## 6.2. Controller for the inverted pendulum

Design a controller for

$$\begin{aligned} x_1^* &= \begin{cases} \theta^* &= 0 \\ \dot{\theta}^* &= 0 \end{cases} \\ x_2^* &= \begin{cases} \theta^* &= \frac{\pi}{4} \\ \dot{\theta}^* &= 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

We will first assume that we can measure  $\theta$  and  $\dot{\theta}$ , i.e.,  $C = I$ . Note that for  $M = (A - BKC)$  with  $C = I$  the dimensions of  $K$  must be  $1 \times 2$ , i.e.,  $K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \end{bmatrix}$ . Note that in this case we have that  $K\delta y = k_{11}\delta\theta + k_{12}\delta\dot{\theta}$ . Remember that the input  $u = u^* + \delta u$ , and that for the pendulum  $u = T$ , i.e., the applied torque.

**The exercise asks to find the values  $k_{11}$  and  $k_{12}$  for two arbitrary negative real eigenvalues  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  in (6.8).**

Simulate your designed controller in the Python script. Check that your  $x^*$  are stable if you start close to them, and you can further check the robustness by applying small disturbances, e.g., add a small random number to  $x$  at every iteration.

Is it possible to design a stable controller with  $C = [1 \ 0]$ ? and for  $C = [0 \ 1]$ ? Note that for this cases  $K$  will have different dimensions than for  $C = I$  since  $C$  has different dimensions as well.