Examen de *Sistemas dinámicos y realimentación*[1].

Problema 1: Dado el sistema,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 + x_1 - x_2 \end{cases}, \tag{1}$$

1. (**2 puntos**) Determinar sus puntos de equilibrio. Linearizar el sistema en torno a cada punto de equilibrio y estudiar su estabilidad.

2. (**2 puntos**) Comprueba la estabilidad de los puntos $x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}^T$ y $x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ con la siguiente función candidata de Lyapunov $V = \frac{1}{4}x_1^4 - \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{4}$. Si la estabilidad es positiva, ¿podrías estimar una región de convergencia para cada uno de los dos puntos?

3. (**1 punto**) Representa el mapa de fases del sistema y comprueba los resultados obtenidos en los dos apartados previos.

Problema 2:

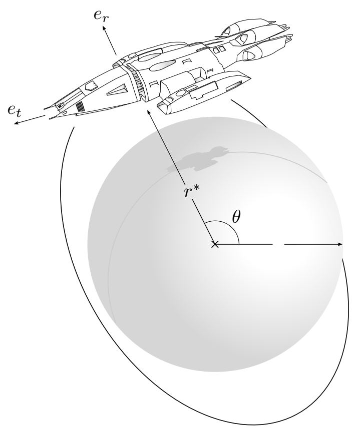

Figura 1: Estrella de combate Valkyrie en una órbita.... ¿estable?

La armada colonial envía a la estrella de combate *Valkyrie* en busca de actividad enemiga *cylon* en un recóndito planeta. En un primer acercamiento se alcanza una altitud deseada $r^* = 450$ km con una velocidad angular deseada $\omega^* = 8 \times 10^{-4}$ rad/s. En ese momento se apagan motores. El ordenador de guiado abordo evalúa que las desviaciones a la órbita actual pueden aproximarse a

$$\frac{\mathrm{d}\,\delta x(t)}{\mathrm{dt}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3(\omega^*)^2 & 0 & 0 & 2\omega^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega^* & 0 & 1 \end{bmatrix} \delta x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t), \tag{2}$$

en donde $\delta x \in \mathbb{R}^4$ y sus componentes $\delta x_{\{1,2,3,4\}}$ son las pequeñas desviaciones en el radio orbital (en km), en la velocidad radial orbital (en km/sec), en el ángulo orbital (en 10^{-6} rads) y la velocidad angular orbital (en 10^{-6} rads/sec) respectivamente. La *Valkyrie* emplea pequeños

[1]**Si tienes/quieres hacer el problema 1, la nota notal será ajustada con un factor de** 10/15 **para que salga sobre** 10**.**
Las respuestas pueden subirse al Campus Virtual en un *live script*, pdf o similar, incluyendo los códigos utilizados. Si alguien prefiere entregar las explicaciones y deducciones en papel, también puede hacerlo.

propulsores tangentes y normales (radiales) a la órbita para mantener el curso estable. En la señal $u(t) = \begin{bmatrix} u_t(t) & u_r(t) \end{bmatrix}^T$ están codificadas las señales a los pequeños propulsores tangentes y normales a la órbita respectivamente.

1. (**0.5 puntos**) ¿Es la órbita actual estable ante las pequeñas perturbaciones ocasionadas por el rozamiento de la nave con la atmósfera?

Un saboteador cylon ha borrado del ordenador el piloto automático para estabilizar la *Valkyrie* en la órbita. Además, ha conseguido dañar la lectura de algunos sensores. La estabilización de la nave no es algo que pueda conseguirse de manera manual; hay que reconstruir el controlador que lo haga posible en automático. Después de la evaluación de daños, la *Valkyrie* cuenta con instrumentación a bordo para medir los tres estados $\delta x_{\{1,3,4\}}$.

2. (**0.5 puntos**) ¿Ha tenido el saboteador éxito? Con los actuadores y sensores disponibles, ¿es posible rediseñar un sistema que estabilice la nave? O ¿empezamos a evacuar la *Valkyrie*?

3. (**2 puntos**) La tripulación agradece que no huyas, y además diseñes un sistema que calcule las señales de control a los motores a partir de los sensores disponibles.

   a) Sobre el controlador, diséñalo con la metodología *LQR*. Los ingenieros te comentan que los valores máximos admisibles en valor absoluto para las señales a los propulsores de la *Valkyrie* no deberían sobrepasar el valor de 100 (demanda en porcentaje). Además, ten en cuenta que el modelo (2) empieza a ser poco fiable si $||\delta x(t)|| > 10$.

   b) Sobre el estimador (porque necesitas uno, ya tenemos suficiente con un saboteador abordo), justifica su diseño a la hora de escoger los autovalores de $(A - LC)$.

4. (**1 punto**) Un resto de asteroide ha impactado en la *Valkyrie* y la ha desviado de su curso, dejándola en $\delta x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}3 & 2 & 0{,}4 \end{bmatrix}^T$. Para inicializar el estimador, recuerda que no puedes medir δx_2; aunque la última lectura fiable dada por el ordenador antes del sabotaje fue de $\delta x_2(0) = 0$. Con el controlador *LQR* propuesto, comprueba gráficamente lo siguiente:

   a) Comprueba que la *Valkyrie* se mantiene en la órbita deseada, y que $||\delta x(t)|| \leq 10$.

   b) Comprueba que los errores de estimación $e_i(t) = \delta x_i(t) - \hat{\delta x_i}(t), i \in \{1, 2, 3, 4\}$ convergen a cero según $t \to \infty$.

   c) Comprueba que las señales a los propulsores no sobrepasan 100 en valor absoluto.

5. (**0.5 puntos**) El saboteador cylon aún anda suelto, y la seguridad abordo es limitada. El comandante de la nave solo puede mandar un equipo a proteger o el propulsor radial o el tangencial. ¿Cuál protegerías tú a toda costa?

6. (**1 punto**) El saboteador cylon ha dirigido entonces su atención al resto de los sensores de la nave. De los tres que aún funcionan, ¿hay algún sensor totalmente imprescindible?

Problema 3:

En un contenedor aislado adiabáticamente tenemos $i = 3$ habitaciones conectadas en serie a través de muros conductores. Cada habitación tiene una temperatura inicial $x_i(0) \in \mathbb{R}^+$ en grados Kelvin, y su variación con el tiempo sigue la siguiente ley

$$\dot{x}_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (x_j - x_i), \tag{3}$$

donde $\mathcal{N}_i$ es el conjunto de habitaciones contiguas a la habitación i.

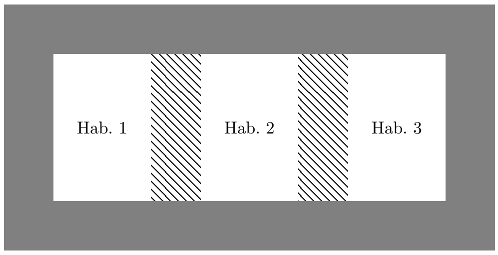

Figura 2: Tres habitaciones separadas por muros conductores y conectadas en serie dentro de un contenedor adiabático.

1. (**1.5 puntos**) Considera $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$ y formula un modelo lineal del tipo $\dot{x} = Ax + Bu$ para predecir el comportamiento en el tiempo de las temperaturas de las tres habitaciones. Para ello encuentra explícitamente la solución analítica para $x(t)$. Verifica el resultado simulando el sistema (3) para una condición inicial arbitraria que cumpla $x_1(0) \neq x_2(0) \neq x_3(0)$.

2. (**1 punto**) Verifica que el *principio cero* de la Termodinámica se cumple para las habitaciones cuando $t \to \infty$. Esto es, encuentra la solución analítica para $z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) & z_2(t) \end{bmatrix}^T$, en donde $z_1 = x_1 - x_2$ y $z_2 = x_2 - x_3$. Te podría ayudar el encontrar y analizar el sistema $\dot{z} = A_z z + B_z u_z$. ¿Es coherente con el resultado del apartado anterior?

3. (**2 puntos**) Cuentas con bombas de calor/frío que se comportan de manera lineal: aumenta/disminuye la temperatura de una habitación a un grado por segundo cuando le comandas unas señal de control igual a 1 o -1 respectivamente. El sistema empieza con unas temperaturas $x(t_0) = x_{t_0} = \begin{bmatrix} a & a & a \end{bmatrix}^T$, con $a \in \mathbb{R}^+$. Quisiéramos alcanzar un vector de temperaturas genérico $x(t_1) = x_{t_1}$ para $t_1 > t_0$. Entonces:

   a) Explica cuantas bombas necesitarías como mínimo y en qué habitaciones las colocarías.

   b) Una vez colocadas las bombas, describe como diseñarías una señal $u(t)$ de mínima energía para llevar las temperaturas desde x_{t_0} a x_{t_1} en un tiempo finito $(t_1 - t_0)$. No tienes por qué hacer los cálculos de manera analítica o numérica. Puedes dejar los cálculos en función de expresiones que dependan de x_{t_0} y x_{t_1}.