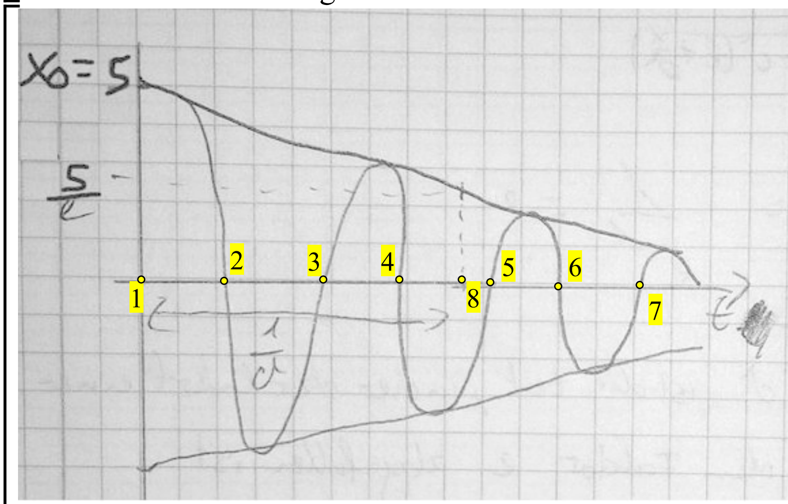
```
> restart;
> Digits := 40: interface( displayprecision = 8 ):
```

Aufgabe

Ein harmonischer Oszillator der Grundfequenz ω_0 erfährt eine Dämpfung δ.

1. Berechnen Sie aus den der Zeichnung zu entnehmenden Daten, um welchen Anteil die Resonanzfrequenz durch die Dämpfung geändert wurde.
2. Berechnen Sie das logarithmische Dekrement Λ.



In der Zeichnung sind Stellen 1-8 für die folgende Bearbeitung markiert.

Bearbeitung

Annahme: Die Dämpfung erfolgt mit einer viskosen Reibung; einer Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit $F_r \sim dx/dt$.

In der Zeichnung ist die Auslenkung x als Funktion der Zeit t aufgetragen, x = x(t).
Als Linienpaar ist die Einhüllende der gedämpften Schwingung eingezeichnet.
Auf der X-Achse ist der Wert 5 eingezeichnet. Bei der t-Achse wird vermutlich der Wert x=0 liegen.

Auf der Zeitachse ist der Zeitabschnitt $1/\delta$ eingezeichnet. Vermutlich soll bei der x-Achse der Wert t=0 liegen. Damit kann die Zeit nicht in der Einheit Sekunden (o.ä.) abgelesen werden, aber die Zeit kann relativ zur Zeit $1/\delta$ abgelesen werden.

Aus der Zeichnung kann die Periodendauer T der gedämpften Schwingung relativ zu $1/\delta$ abgelesen werden.

Die Stellen 1 und 8 sind die Grenzen des Zeitintervalls 1/δ. Die Stellen 2-7 sind Nulldurchgänge der gedämpften Schwingung. Die Pixelkoordinaten (nur horizontale Koordinate) für alle interessanten Stellen [2]:

```
> H = convert(<<1|0|36|36|36|90|201>,<2|0|71|71|71|152|201>,
  <3|0|64|64|64|225|201>,<4|0|100|100|100|280|202>,
  <5|0|74|74|74|348|202>,<6|0|82|82|82|398|204>,
  <7|0|129|129|129|458|205>,<8|0|87|87|87|326|200>>[..,6]*Pixel,
  list);
```

$$H = [90\ Pixel, 152\ Pixel, 225\ Pixel, 280\ Pixel, 348\ Pixel, 398\ Pixel, 458\ Pixel, 326\ Pixel] \tag{1}$$

Zwischen der Stelle 1 und 8 liegt der Zeitraum 1/δ.

```
> 1/delta = H[8] - H[1];
```

$$\frac{1}{\delta} = H_8 - H_1 \tag{2}$$

Die abgelesen Pixelkoordinaten einsetzen gibt den Umrechnungsfaktor.

```
> subs( (1), (2) ): simplify(%);
```

$$\frac{1}{\delta} = 236\ Pixel \tag{3}$$

Aus den Stellen 2-7 kann die Periodendauer T berechnet werden. Verschiedene Methoden können verwendet werden.

(a) eine Ausgleichsgerade durch die Punkte (i, H_i) mit i =2..7.

(b) Den Abstand 2-7 gleich 2,5 Periodendauern setzen.

Methode (a) Periodendauer T über Ausgleichsgerade berechnen.
Die Punkte (i, H_i) in den Rechner geben und die Ausgleichsgeraden berechnen lassen:

```
> y = Statistics[LinearFit]( [1,i], [seq(1..6)], subs((1),Pixel=1,
  H)[2..7],i ) * Pixel;
```

$$y = (98.466667 + 60.485714\ i)\ Pixel \tag{4}$$

Die Nullpunktdurchgänge haben den Abstand T/2. Die Steigung der Ausgleichsgeraden ist also T/2.

```
> T/2 = coeff(rhs((4)),i);
```

$$\frac{T}{2} = 60.485714\ Pixel \tag{5}$$

```
> isolate((5),T);
```

$$T = 120.97143\ Pixel \tag{6}$$

Methode (b) Periodendauer T über den Mittelwert aller abgelesenen Halbperioden berechnen:

```
> 2.5 * T = H[7] - H[2];
```

$$2.5\ T = H_7 - H_2 \tag{7}$$

Die abgelesenen Pixelkoordinaten einsetzen und ausrechnen.

```
> subs( (1), (7) ): solve( %, [T] )[1][1];
```

$$T = 122.40000\ Pixel \tag{8}$$

Die Periodendauer T aus **(6)** mit **(3)** von Einheit Pixel in Einheit 1/δ umrechnen.

```
> subs( isolate( (3), Pixel ), (6) );
```

$$T = \frac{0.51259080}{\delta} \tag{9}$$

Die Kreisfrequenz ω der gedämpften Schwingung aus der Periodendauer T berechnen.

```
> omega = 2*Pi/T;
```

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{10}$$

```
> subs( (9), (10) ): simplify(%);
```

$$\omega = 12.257702\,\delta \tag{11}$$

Für die gedämpfte Schwingung gilt der Zusammenhang [1]:

```
> omega^2 = omega[0]^2 - delta^2;
```

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2 \tag{12}$$

Auflösen nach der unbekannten Kreisfrequenz des ungedämpften Oszillators ω_0.

```
> solve( (12), [omega[0]] )[1][1];
```

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \delta^2} \tag{13}$$

```
> lhs((13)) = subs( (11), rhs((13)) ): simplify(%) assuming delta>0;
```

$$\omega_0 = 12.298425\,\delta \tag{14}$$

Gesucht ist der Anteil der Frequenzabnahme.

```
> Delta = ( omega[0] - omega )/omega[0];
```

$$\Delta = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} \tag{15}$$

```
> subs( (14), (11), (15) ): simplify(%);
```

$$\Delta = 0.0033112397 \tag{16}$$

Antwort 1) Durch die Dämpfung wurde die Frequenz um 0,3% reduziert.

Bei der gedämpften Schwingung kann das logarithmische Dekrement Λ berechnet werden mit [1]:

```
> Lambda = delta * T;
```

$$\Lambda = \delta\, T \tag{17}$$

Die berechnet Periodendauer aus **(9)** einsetzen.

```
> subs( (9), (17) );
```

$$\Lambda = 0.51259080 \tag{18}$$

Antwort 2) Das logarithmische Dekrement beträgt 0,51.

Hilfsmittel

1. Stöcker: Taschenbuch der Physik, Verlag Harri Deutsch
2. ImageJ 1.45s, imagej.nih.gov
3. Maple 14, www.maplesoft.com