

```
[> restart;
[> Digits:=20: interface( displayprecision=5 ):
```

Aufgabe

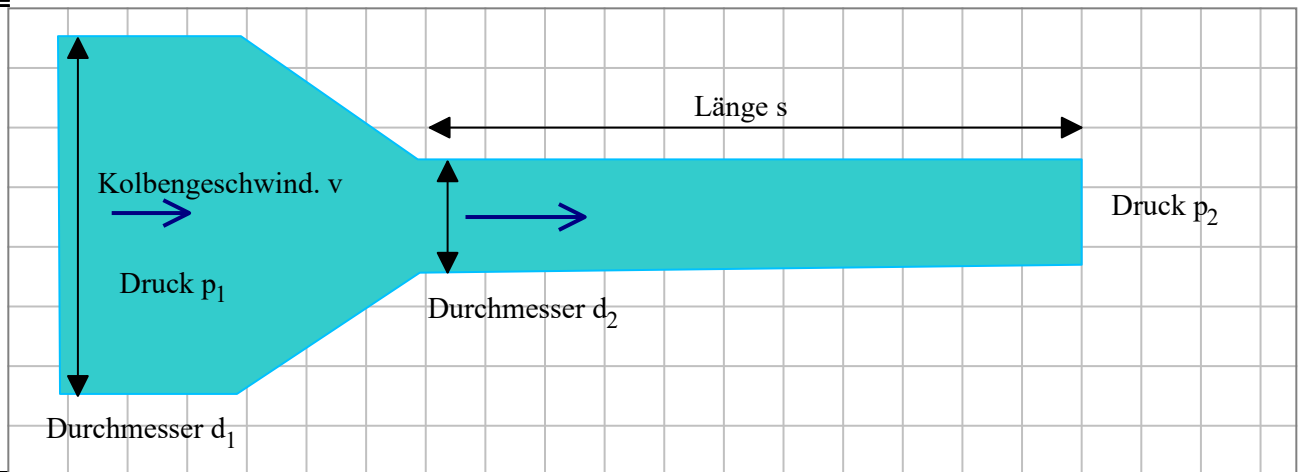
Druck in einer Spritze.

Gegeben ist der Durchmesser des Kolbens (d_1) und die Geschwindigkeit (v) mit der er sich bewegt. Der Kolben schiebt eine Flüssigkeit mit der dynamischen Viskosität (η). Die Verengung mit dem Durchmesser (d_2 , Querschnitt Kreis) hat eine Länge von s . Hinter der Verengung befindet sich Raumluft.

Gesucht ist der Druck (p) der Flüssigkeit.

Formel aufstellen

Skizze.



Annahmen:

- Inkompressible Flüssigkeit.
- Laminare Strömung in der Kapillaren.
- Stationäre Strömung.
- Schwerkraft vernachlässigbar.
- Übergangsbereiche der Strömung am Anfang und Ende der Kapillaren vernachlässigbar.

Der Volumenstrom \dot{V} in einem Rohr mit Länge s und Radius R getrieben von einem Druckgefälle $p_1 - p_2$ wird mit dem Hagen-Poiseuilleschen Gesetz beschrieben. Dabei ist η die dynamische Viskosität der laminar strömenden Flüssigkeit. [1]

```
> Vdot := `#mover(mi("V"),mo("&period;"))`:
Vdot = Pi*R^4*(p[1]-p[2])/(8*eta*s);
```

$$\dot{V} = \frac{1}{8} \frac{\pi R^4 (p_1 - p_2)}{\eta s} \quad (1)$$

Der Radius R ist hier über den Durchmesser d_2 gegeben.

```
> R = d[2]/2;
```

$$R = \frac{1}{2} d_2 \quad (2)$$

Der Volumenstrom ist hier über die Geschwindigkeit v des Kolbens mit der Querschnittsfläche π

$d_1^2/4$ gegeben.

```
> Vdot = v * Pi * d[1]^2/4: sort(%);
```

$$\dot{V} = \frac{1}{4} \pi v d_1^2 \quad (3)$$

Einsetzen.

```
> subs( (2),(3), (1) );
```

$$\frac{1}{4} \pi v d_1^2 = \frac{1}{128} \frac{\pi d_2^4 (p_1 - p_2)}{\eta s} \quad (4)$$

Auflösen nach dem gesuchten Druck p_1 vor der Kapillaren.

```
> isolate( (4), p[1] );
```

$$p_1 = \frac{32 v d_1^2 \eta s}{d_2^4} + p_2 \quad (5)$$

Zahlenwerte

Die Zahlenwerte aus der Aufgabe.

Durchmesser des Kolbens

```
> d[1]=15.0*Unit(mm); simplify(%); param:={%}:
```

$$d_1 = 15.00000 \text{ [mm]}$$

$$d_1 = 0.01500 \text{ [m]}$$

(6)

Geschwindigkeit des Kolbens

```
> v='1.0*Unit(cm/s)'; simplify(%); param:=param union {%}:
```

$$v = 1.00000 \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}} \right]$$

$$v = 0.01000 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

(7)

Dynamische Viskosität der Flüssigkeit

```
> eta='1.19*Unit(mPa*s)'; simplify(%); param:=param union {%}:
```

$$\eta = 1.19000 \text{ [mPa s]}$$

$$\eta = 0.00119 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m s}} \right]$$

(8)

Durchmesser der Kapillare

```
> d[2]=0.3*Unit(mm); simplify(%); param:=param union {%}:
```

$$d_2 = 0.30000 \text{ [mm]}$$

$$d_2 = 0.00030 \text{ [m]}$$

(9)

Länge der Kapillare

```
> s=35.0*Unit(mm); simplify(%); param:=param union {%}:
```

$$s = 35.00000 \text{ [mm]}$$

$$s = 0.03500 \text{ [m]}$$

(10)

Der Normdruck für den äußeren Luftdruck [1]

```
> p[2] = 101325*Unit(Pa); param:=param union {%}:
```

$$p_2 = 101325 \text{ [Pa]}$$

(11)

Die Zahlenwerte in Formel (5) einsetzen und ausrechnen.

```
> subs( param, (5) ): simplify(%);
```

$$p_1 = 4.71547 \cdot 10^5 \text{ [[Pa]]}$$

(12)

```
> lhs((12))=convert( rhs((12)), units, 'bar' );
```

$$p_1 = 4.71547 \text{ [[bar]]}$$

(13)

Der Druck in der Spritze beträgt 4,7 bar.

Rechner für andere Werte

Durchmesser des Kolbens	d_1		mm
Geschwindigkeit des Kolbens	v		cm/s
Dyn. Viskosität der Flüssigkeit	η		mPa·s
Durchmesser der Kapillare	d_2		mm
Länge der Kapillaren	s		mm
Der äußere Luftdruck	p_2		Pa
Druck in der Spritze	p_1		Pa

Hilfsmittel

[1] Hering, Martin, Stohrer: Physikalisch-Technisches Taschenbuch, VDI Verlag

[2] Maple 17, <http://www.maplesoft.com/products/Maple/>