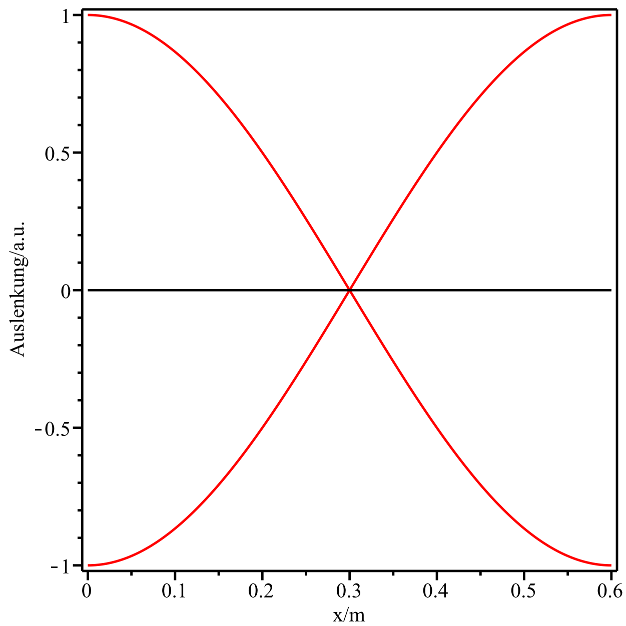
```
> restart;
> Digits:=30: interface( displayprecision=3 ):
```

Aufgaben zur transversalen Eigenschwingung von Stäben und Seiten lassen sich gut durch einfache Skizzen lösen.

Gegeben ist ein Stab mit Länge L = 60 cm.
Der Stab ist in der Mitte fest eingespannt. Die Einspannung in der Mitte ist die einzige Befestigung des Stabes.
Durch die Befestigung kann der Stab in der Mitte durch transversale Schwingungen nicht ausgelenkt werden.
Bei der Eigenschwingung bildet sich längs des Stabs eine stehende Welle aus. Ein Knoten dieser stehenden Welle muss in der Mitte des Stabs liegen, weil nur in den Knoten die Auslenkung zu jedem Zeitpunkt Null ist.
Damit kann die Einhüllende der Grundschwingung skizziert werden:

```
> plot([sin((x-0.3)*(2*Pi)/1.2),-sin((x-0.3)*(2*Pi)/1.2),0],x=0..0.6,colour=["Red","Red","Black"],labels=["x/m","Auslenkung/a.u."],labeldirections=[horizontal,vertical],axes=boxed);
```



An der Skizze ist zu sehen: von links bis zur Mitte: 1/4 Wellenlänge, der Abstand von Bauch zum Knoten. Als Formel geschrieben:

```
> lambda[0]/4=L/2;
```

(1)

$$\frac{1}{4}\lambda_0 = \frac{1}{2}L \qquad (1)$$

```
> isolate((1),lambda[0]);
```

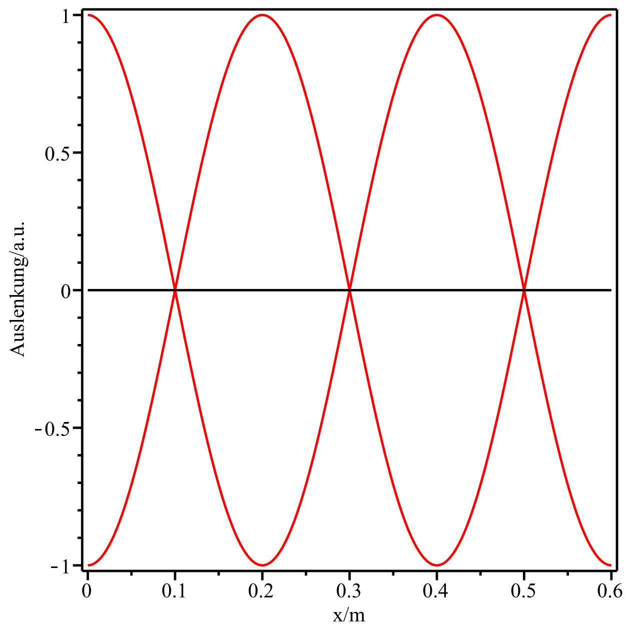
$$\lambda_0 = 2L \qquad (2)$$

```
> eval((2),L=0.6*Unit(m));
```

$$\lambda_0 = 1.200 \,[\![m]\!] \qquad (3)$$

Die 1. Oberschwingung hat eine kürzere Wellenlänge. Auf der Strecke zwischen Knoten und Bauch muss genau ein Knoten eingefügt werden.
Die Skizze der Einhüllenden zur 1. Oberschwingung:

```
> plot([sin((x-0.3)*(2*Pi)*3/1.2),-sin((x-0.3)*(2*Pi)*3/1.2),0],x=0..0.6,colour=["Red","Red","Black"],labels=["x/m","Auslenkung/a.u."],labeldirections=[horizontal,vertical],axes=boxed);
```



Aus der Skizze kann die Wellenlänge abgelesen werden. Von links bis zur Mitte: 1/4 Wellenlänge von Bauch bis Knoten. 1/2 Wellenlänge zum Knoten in der Mitte. Zusammen:

```
> (1/4+1/2)*lambda[1] = L/2;
```

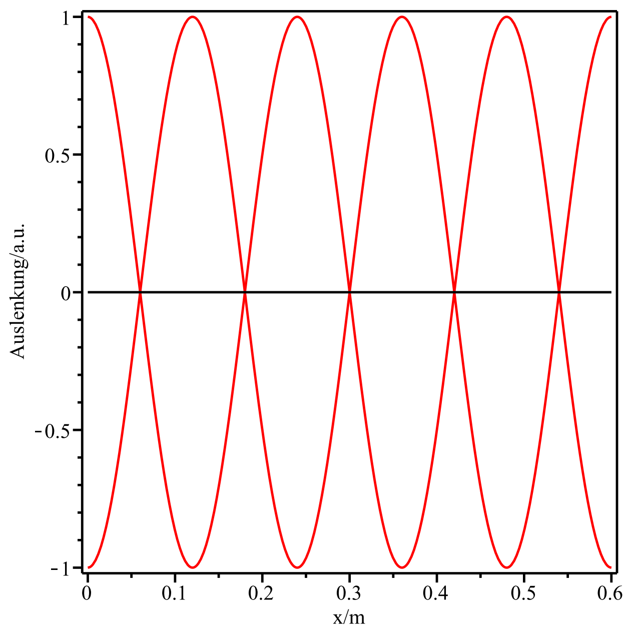
$$\frac{3}{4}\lambda_1 = \frac{1}{2}L \qquad (4)$$

```
> isolate((4),lambda[1]);
```

$$\lambda_1 = \frac{2}{3}\, L \tag{5}$$

Für die 2. Oberschwingung müssen zwischen dem Bauch un den Knoten der Grundschwingung genau 2 Knoten liegen.
Die Skizze der Einhüllenden:

```
> Typesetting:-RuleAssistant();
> plot([sin((x-0.3)*(2*Pi)*5/1.2),-sin((x-0.3)*(2*Pi)*5/1.2),0],x=0..0.6,colour=["Red","Red","Black"],labels=["x/m","Auslenkung/a.u."],labeldirections=[horizontal,vertical],axes=boxed);
```



Aus der Skizze kann wieder die Wellenlänge nach dem geübten Verfahren abgelesen werden:

```
> 5/4*lambda[2] = L/2;
```

$$\frac{5}{4}\, \lambda_2 = \frac{1}{2}\, L \tag{6}$$

```
> isolate((6),lambda[2]);
```

$$\lambda_2 = \frac{2}{5}\, L \tag{7}$$

```
> eval((7),L=0.6*Unit(m));
```

$$\lambda_2 = 0.240\ [\![m]\!] \tag{8}$$

Eine allgemeine Formel kann aus den gemachten Skizzen ebenfalls abgeleitet werden: 1/2 Wellenlänge wird pro Oberschwingung auf jeder Hälfte des Stabs addiert. Für die n. Oberschwingung gilt:

```
> n/2 * lambda[n] + 1/4 * lambda[n] = L/2;
```

$$\frac{1}{2} n \lambda_n + \frac{1}{4} \lambda_n = \frac{1}{2} L \qquad \textbf{(9)}$$

```
> solve((9),{lambda[n]})[1];
```

$$\lambda_n = \frac{2 L}{2 n + 1} \qquad \textbf{(10)}$$