```
> restart;
```

Einführung

Betrachtet wird ein ruhender Körper. An diesem Körper greifen Kräfte an. Weil der Körper ruht müssen die Kräfte im Gleichgewicht sein. Vereinfachend wird vorausgesetzt, dass alle Kräfte in einer Ebene liegen. In dieser Ebene wird ein kartesisches Koordinatensystem mit den Achsen x und y eingeführt.
An den Körper greifen n Kräfte an: F_1 bis F_n. Die Komponenten der Kräfte im Koordinatensystem sind $F_{1,x}$ und $F_{1,y}$ bis $F_{n,x}$ und $F_{n,y}$.
Die Kräfte sind Einzelkräfte, die an einzelnen Punkten angreifen. Die Stellen haben die Koordinaten X_1, Y_1 bis X_n, Y_n.

Das Drehmoment Mi,a einer Kraft Fi um einen Punkt a=(Ax,Ay) berechnet sich

```
> M[i,A] = (A[y]-Y[i])*F[i,x] - (A[x]-X[i])*F[i,y];
```

$$M_{i,A} = (A_y - Y_i)\,F_{i,x} - (A_x - X_i)\,F_{i,y} \tag{1}$$

Die Gleichgewichtsbedingung in Formulierung I.

```
> sum(F[i,x],i=1..n) = 0;
```

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = 0 \tag{2}$$

```
> sum(F[i,y],i=1..n) = 0;
```

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,y} = 0 \tag{3}$$

```
> sum(M[i,0],i=1..n) = 0;
```

$$\sum_{i=1}^{n} M_{i,0} = 0 \tag{4}$$

Zur Vereinfachung der Schreibarbeit ist hier der Punkt gleich dem Ursprung des Koordinatensystem gewählt. Mit einem allgemeinen Punkt bleibt der folgende Rechenweg gleich, nur die Ausdrücke werden länger.

Die Gleichgewichtsbedingungen in Formulierung III.

```
> sum(M[i,0],i=1..n) = 0;
```

$$\sum_{i=1}^{n} M_{i,0} = 0 \tag{5}$$

```
> sum(M[i,A],i=1..n) = 0;
```

$$\sum_{i=1}^{n} M_{i,A} = 0 \tag{6}$$

```
> sum(M[i,B],i=1..n) = 0;
```

$$\sum_{i=1}^{n} M_{i,B} = 0 \tag{7}$$

Für den ersten Punkt ist der Ursprung des Koordinatensystems gewählt, dass vereinfacht die Schreibarbeit.
Der Ursprung, die Punkte A und B dürfen nicht auf einer Geraden liegen. Anders formuliert: Die

Punkte A und B dürfen nicht auf einer Ursprungsgerade liegen. Es darf kein reelles λ existieren mit A = λB. Die Punkte A und B müssen linear unabhängig sein.

Zu zeigen ist, dass die beiden Bedingungen I und III äquivalent sind.

Die Äquivalenz wird in zwei Schritten gezeigt. Im ersten Schritt wird gezeigt, dass aus der Bedingung I die Bedingung III folgt. Im zweiten Schritt wird gezeigt, dass aus der Bedinung III die Bedingung I folgt.

Erster Schritt.
Die Kräfte erfüllen die Bedingung I.
Es gelten die Gleichungen **(2)**, **(3)** und **(4)**.

Gleichung **(5)** ist identisch mit Gleichung **(4)**.
Es bleiben die Gleichung **(6)** und **(7)** zu zeigen.

Die Gleichung **(4)** umformen. Die Definition des Drehmoments einsetzen.

```
> sum( F[i,y]*X[i] - F[i,x]*Y[i], i=1..n) = 0;
```

$$\sum_{i=1}^{n} \left(F_{i,y} X_i - F_{i,x} Y_i\right) = 0 \quad \textbf{(8)}$$

Diese Gleichung merken für die Umformung der Summe:

```
> sum(M[i,A],i=1..n);
```

$$\sum_{i=1}^{n} M_{i,A} \quad \textbf{(9)}$$

Definition des Drehmoments um Punkt A einsetzen.

```
> subs(M[i,A] = (A[y]-Y[i])*F[i,x] - (A[x]-X[i])*F[i,y],(9));
```

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\left(A_y - Y_i\right) F_{i,x} - \left(A_x - X_i\right) F_{i,y}\right) \quad \textbf{(10)}$$

Klammer ausmultiplizieren.

```
> expand((10));
```

$$\sum_{i=1}^{n} \left(F_{i,x} A_y - F_{i,x} Y_i - F_{i,y} A_x + F_{i,y} X_i\right) \quad \textbf{(11)}$$

Neu zusammenfassen.

```
> sum(X[i]*F[i,y]-Y[i]*F[i,x],i=1..n)+A[y]*sum(F[i,x],i=1..n)-A[x]*
  sum(F[i,y],i=1..n);
```

$$\sum_{i=1}^{n} \left(F_{i,y} X_i - F_{i,x} Y_i\right) + A_y \left(\sum_{i=1}^{n} F_{i,x}\right) - A_x \left(\sum_{i=1}^{n} F_{i,y}\right) \quad \textbf{(12)}$$

Gleichung **(2)**, **(3)** und **(8)** einsetzen.

```
> subs((2),(3),(8),(12));
```

$$0 \quad \textbf{(13)}$$

Die Rechenschritte zusammengefasst:

```
> sum(M[i,A],i=1..n) = 0;
```

$$\sum_{i=1}^{n} M_{i,A} = 0 \quad \textbf{(14)}$$

Das ist die Gleichung **(6)**.

Für die Summe der Drehmomente um den Punkt B können die Gleichungen **(9)** bis **(14)** analog aufgeschrieben werden. Es muss nur der Buchstabe 'A' durch den Buchstaben 'B' ersetzt werden. Also gilt

```
> sum(M[i,B],i=1..n) = 0;
```

$$\sum_{i=1}^{n} M_{i, B} = 0 \tag{15}$$

Das ist die Gleichung **(7)**. Damit sind alle Gleichungen der Gleichgewichtsbedingung III aus den Gleichungen der Gleichgewichtsbedingung I hergeleitet.

Zweiter Schritt.
Die Kräfte erfüllen die Bedingung III.
Es gelten die Gleichungen **(5)**, **(6)** und **(7)**.

Gleichung **(5)** ist identisch mit Gleichung **(4)**.
Es bleiben die Gleichung **(2)** und **(3)** zu zeigen.

Die Gleichung **(6)** umformen wie oben durch Einsetzen der Formel für das Drehmoment.

```
> sum(X[i]*F[i,y]-Y[i]*F[i,x],i=1..n) = 0;
```

$$\sum_{i=1}^{n} \left(F_{i, y} X_i - F_{i, x} Y_i\right) = 0 \tag{16}$$

Die Gleichung **(7)** umformen durch Einsetzen der Formel für das Drehmoment und geschickt zusammenfassen.

```
> sum(X[i]*F[i,y]-Y[i]*F[i,x],i=1..n)+A[y]*sum(F[i,x],i=1..n)-A[x]*
  sum(F[i,y],i=1..n) = 0;
```

$$\sum_{i=1}^{n} \left(F_{i, y} X_i - F_{i, x} Y_i\right) + A_y \left(\sum_{i=1}^{n} F_{i, x}\right) - A_x \left(\sum_{i=1}^{n} F_{i, y}\right) = 0 \tag{17}$$

Die Gleichung **(16)** einsetzen.

```
> subs((16),(17));
```

$$A_y \left(\sum_{i=1}^{n} F_{i, x}\right) - A_x \left(\sum_{i=1}^{n} F_{i, y}\right) = 0 \tag{18}$$

Die Gleichung **(8)** umformen durch Einsetzen der Formel für das Drehmoment und geschickt zusammenfassen.

```
> sum(X[i]*F[i,y]-Y[i]*F[i,x],i=1..n)+B[y]*sum(F[i,x],i=1..n)-B[x]*
  sum(F[i,y],i=1..n) = 0;
```

$$\sum_{i=1}^{n} \left(F_{i, y} X_i - F_{i, x} Y_i\right) + B_y \left(\sum_{i=1}^{n} F_{i, x}\right) - B_x \left(\sum_{i=1}^{n} F_{i, y}\right) = 0 \tag{19}$$

Die Gleichung **(16)** einsetzen.

```
> subs((16),(19));
```

$$B_y \left(\sum_{i=1}^{n} F_{i, x}\right) - B_x \left(\sum_{i=1}^{n} F_{i, y}\right) = 0 \tag{20}$$

Die Gleichungen **(18)** und **(20)** in eine Vektorgleichung zusammenfassen.

```
> <<A[y],B[y]>|<A[x],B[x]>> . <sum(F[i,x],i=1..n),-sum(F[i,y],i=1..
```

```
n)> = <0,0>;
```

$$\begin{bmatrix} A_y\left(\sum_{i=1}^{n} F_{i,x}\right) - A_x\left(\sum_{i=1}^{n} F_{i,y}\right) \\ B_y\left(\sum_{i=1}^{n} F_{i,x}\right) - B_x\left(\sum_{i=1}^{n} F_{i,y}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\begin{bmatrix} A_y & A_x \\ B_y & B_x \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} F_{i,x} \\ -\left(\sum_{i=1}^{n} F_{i,y}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die beiden Punkte A und B dürfen nicht auf einer Geraden liegen.
Anders formuliert: Die beiden Punkte sind linear unabhängig.
Damit sind die beiden Zeilen in der Matrix linear unabhängig.
Also ist die Matrix invertierbar, der Kern der Matrix ist 0.
Der Vektor, in dem die Summen der Kräfte stehen, muss 0 sein.

```
> <sum(F[i,x],i=1..n),-sum(F[i,y],i=1..n)> = <0,0>;
```

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} F_{i,x} \\ -\left(\sum_{i=1}^{n} F_{i,y}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

Das ist die Gleichung **(1)** und **(2)**.
Damit sind alle Gleichungen der Bedingung I aus den Gleichungen der Bedingung III hergeleitet.

Es wurde gezeigt, dass Bedingung I $\Rightarrow$ Bedingung III und Bedingung III $\Rightarrow$ Bedingung I. Also sind die Bedingungen äquivalent.