

```
> restart;
> coeffsides := (gleichung,base) -> coeff(lhs(gleichung),base) =
coeff(rhs(gleichung),base) :
```

Aufgabe

aus Techniker-Forum.de

Geben ist eine Funktion H von z mit drei Parametern A₁, B₁ und B₂.

```
> H(z) = (1+z**(-1))*(1+B[1]*z**(-1)+B[2]*z**(-2))/(1+A[1]*z**
(-1));
```

$$H(z) = \frac{\left(1 + \frac{1}{z}\right) \left(1 + \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2}\right)}{1 + \frac{A_1}{z}} \quad (1)$$

Die Parameter sind zu bestimmen, dass die Funktion H(z) identisch wird zur Funktion

```
> H(z) = 1-z**(-2);
```

$$H(z) = 1 - \frac{1}{z^2} \quad (2)$$

Rechenweg

Die beiden gegebenen Funktionen gleich setzen.

```
> subs((1),(2));
```

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{z}\right) \left(1 + \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2}\right)}{1 + \frac{A_1}{z}} = 1 - \frac{1}{z^2} \quad (3)$$

Mit dem Zähler der linken Seite multiplizieren, damit der Bruch verschwindet.

```
> (3)*(1+A[1]/z);
```

$$\left(1 + \frac{1}{z}\right) \left(1 + \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2}\right) = \left(1 + \frac{A_1}{z}\right) \left(1 - \frac{1}{z^2}\right) \quad (4)$$

Die beiden Klammern auflösen.

```
> expand((4));
```

$$1 + \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{B_1}{z^2} + \frac{B_2}{z^3} = 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{A_1}{z} - \frac{A_1}{z^3} \quad (5)$$

Die Summanden nach Potenzen der z sortieren und Summanden mit gleichen Potenzen von z zusammenfassen.

```
> collect((5),z): sort(%);
```

$$\frac{B_1 + 1}{z} + \frac{B_1 + B_2}{z^2} + \frac{B_2}{z^3} + 1 = \frac{A_1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{A_1}{z^3} + 1 \quad (6)$$

Koeffizientenvergleich

Die Gleichung muss für z erfüllt sein, dass ist nur möglich wenn für jeden Koeffizienten die Gleichheit gilt.

Die Koeffizienten von z^0 .

> 1 = 1;

$$1 = 1 \quad (7)$$

Die Koeffizienten von z^{-1}

> coeffsides((6),1/z) ;

$$B_1 + 1 = A_1 \quad (8)$$

Die Koeffizienten von z^{-2}

> coeffsides((6),1/z2) ;**

$$B_1 + B_2 = -1 \quad (9)$$

Die Koeffizienten von z^{-3}

> coeffsides((6),1/z3) ;**

$$B_2 = -A_1 \quad (10)$$

Die Gleichungen (8), (9) und (10) bilden ein Gleichungssystem für die drei Parameter.

Gleichung (10) nach A_1 auflösen.

> isolate((10),A[1]) ;

$$A_1 = -B_2 \quad (11)$$

Einsetzen in Gleichung (8).

> subs((11),(8)) ;

$$B_1 + 1 = -B_2 \quad (12)$$

Auflösen nach B_1 .

> isolate((12),B[1]) ;

$$B_1 = -B_2 - 1 \quad (13)$$

Einsetzen in Gleichung (9).

> subs((13),(9)) ;

$$-1 = -1 \quad (14)$$

Die Gleichung (9) liefert also keine weitere Information. Die Gleichung (9) ist linear abhängig von den Gleichungen (8) und (10).

Die Lösungsmenge kann mit einem Parameter $\lambda \in \mathbb{Z}$ dargestellt werden.

> subs(B[2]=lambda, {(11),(13)}) union {B[2]=lambda} ;

$$\{A_1 = -\lambda, B_1 = -\lambda - 1, B_2 = \lambda\} \quad (15)$$

Die vorgegebene Lösung folgt aus dem Fall

> lambda = -1;

$$\lambda = -1 \quad (16)$$

> subs((16),(15)) ;

$$\{A_1 = 1, B_1 = 0, B_2 = -1\} \quad (17)$$

Es gibt auch andere Elemente in der Lösungsmenge (15). Zum Beispiel mit

> lambda = -2;

$$\lambda = -2 \quad (18)$$

> subs((18),(15)) ;

$$\{A_1 = 2, B_1 = 1, B_2 = -2\} \quad (19)$$

Einsetzen in die Funktion (1).

```
> subs ( (19), (1) );
```

$$H(z) = \frac{\left(1 + \frac{1}{z}\right) \left(1 + \frac{1}{z} - \frac{2}{z^2}\right)}{1 + \frac{2}{z}} \quad (20)$$

und vereinfachen (Klammern auflösen, alles auf einen Bruchstrich bringen)

```
> simplify((20)) : expand(%);
```

$$H(z) = 1 - \frac{1}{z^2} \quad (21)$$

macht sichtbar, dass auch (19) ein Element der Lösungsmenge (15) für die Aufgabe ist.