```
> restart;
> Digits := 24: interface( displayprecision=6 ):
```

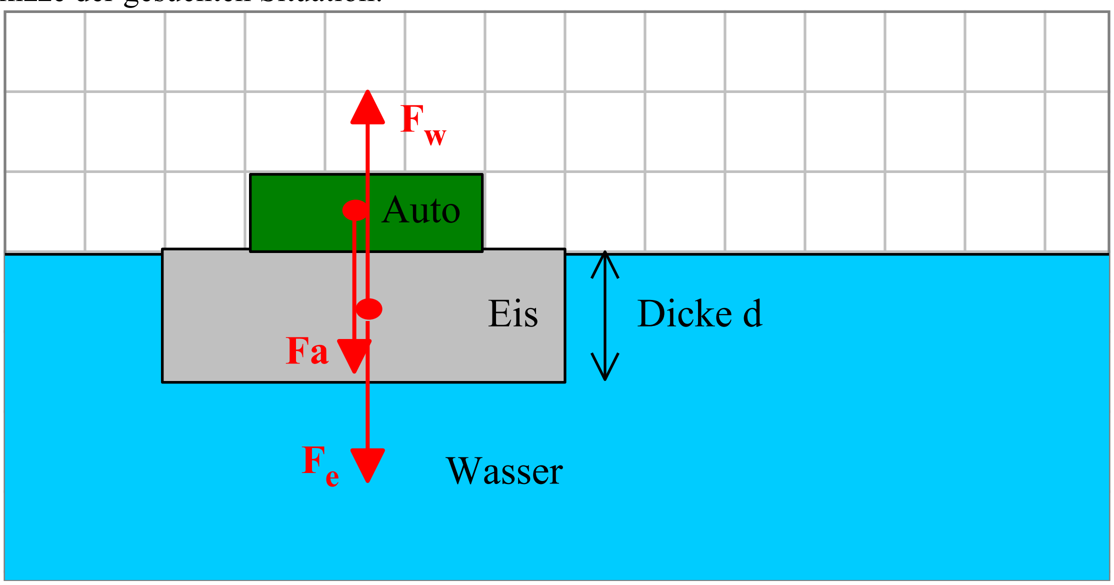
Aufgabe

Welche Fläche muss ein 0,3 m dicker Eisblock, der auf dem Wasser schwimmt, mindestens haben, um ein Auto zu tragen, das eine Masse von 1100 kg hat?

Bearbeitung

Die Auftriebskraft ist proportional zum Volumen des verdrängten Wassers. Je kleiner die Fläche des Eisblocks, desto tiefer taucht der Eisblock in das Wasser ein.
Die Fläche des Eisblocks ist minimal, wenn der Eisblock bis zur Oberkante ins Wasser eintaucht.

Eine Skizze der gesuchten Situation:



Es wirken drei Kräfte:
- F_a = das Gewicht des Autos
- F_e = das Gewicht des Eisblocks
- F_w = die Auftriebskraft des Eisblocks

(Der Angriffspunkt ist jeweils der Schwerpunkt, in der Skizze verschoben gezeichnet, weil alle Pfeile aufeinander liegen.)

Damit die Lage im Gleichgewicht ist muss die Summe der Kräfte gleich 0 sein und die Summe der Drehmomente gleich 0 sein.
Alle Drehmomente um den Schwerpunkt des Eisblocks sind 0, wenn das Auto in der Mitte des Eisblocks steht.
Zu berechnen bleibt das Kräftegleichgewicht.

Die Masse des Autos ist m_a. Das Gewicht des Autos ist

```
> F[a] = m[a] * g;
```

$$F_a = m_a\, g \tag{1}$$

Dabei ist g die Fallbeschleunigung. [nach 1]

Das Volumen V_e des Eisblocks berechnet sich aus der Fläche A und der Dicke d des Blocks.

```
> V[e] = A * d;
```

$$V_e = A\,d \quad (2)$$

Die Masse m_e des Eisblocks bei konstanter Dichte ρ_e des Eises.

```
> m[e] = V[e] * rho[e];
```

$$m_e = V_e\,\rho_e \quad (3)$$

Das Gewicht F_e des Eisblocks.

```
> F[e] = m[e] * g;
```

$$F_e = m_e\,g \quad (4)$$

Auftriebskraft F_w des Wassers auf den Eisblock, der mit dem gesamten Volumen V_e eintaucht.

```
> F[w] = V[e] * rho[w] * g;
```

$$F_w = V_e\,\rho_w\,g \quad (5)$$

Dabei ist ρ_w die Dichte des Wassers. [nach 1]

Die Summe der Kräfte im statischen Gleichgewicht ist 0. [nach 1]
Die Auftriebskraft F_w ist nach oben gerichtet: Vorzeichen +. Die beiden Gewichte F_a, F_e sind nach unten gerichtet: Vorzeichen -.

```
> F[w] - F[a] - F[e] = 0;
```

$$F_w - F_a - F_e = 0 \quad (6)$$

Die oben aufgestellten Gleichungen für die drei Kräfte einsetzen.

```
> subs( (1), (4), (5), (6) );
```

$$V_e\,\rho_w\,g - m_a\,g - m_e\,g = 0 \quad (7)$$

Die Gleichung **(3)** für die Eisblockmasse einsetzen.

```
> subs( (3), (7) );
```

$$V_e\,\rho_w\,g - m_a\,g - V_e\,\rho_e\,g = 0 \quad (8)$$

Die Gleichung **(2)** für das Volumen einsetzen.

```
> subs( (2), (8) );
```

$$A\,d\,\rho_w\,g - m_a\,g - A\,d\,\rho_e\,g = 0 \quad (9)$$

Die Konstante g kann gekürzt werden.

```
> simplify( (9)/g );
```

$$A\,d\,\rho_w - m_a - A\,d\,\rho_e = 0 \quad (10)$$

Auflösen nach der gesuchten Fläche A.

```
> isolate( (10), A );
```

$$A = \frac{m_a}{d\,\rho_w - d\,\rho_e} \quad (11)$$

Die Masse des Autos aus der Aufgabe.

```
> m[a] = 1100*Unit(kg);
```

$$m_a = 1100\ [\![kg]\!] \quad (12)$$

Die Dicke des Eisblocks aus der Aufgabe.

```
> d = 0.3*Unit(m);
```

$$d = 0.3\ [\![m]\!] \quad (13)$$

Dichte von Wasser bei 0 °C aus [1].
(Salzgehalt von Wasser wird vernachlässigt. Temperatur von 0 °C angenommen, damit der Eisblock

nicht schmilzt.)

```
> rho[w] = 999.84 * Unit(kg/m^3);
```

$$\rho_w = 999.84 \left[\!\left[\frac{kg}{m^3} \right]\!\right] \tag{14}$$

Dichte von Eis aus [1].

```
> rho[e] = 920 * Unit(kg/m^3);
```

$$\rho_e = 920 \left[\!\left[\frac{kg}{m^3} \right]\!\right] \tag{15}$$

Die Zahlenwerte in die Gleichung **(11)** einsetzen und ausrechnen.

```
> subs((12),(13),(14),(15),(11)): simplify(%);
```

$$A = 45.9252 \left[\!\left[m^2 \right]\!\right] \tag{16}$$

Die minimale Fläche des Eisblocks beträgt 46 m².

Verwendete Hilfsmittel:

[1] Hering, Martin, Stohrer: Physikalisch-Technisches Taschenbuch, VDI-Verlag
[2] Maple 14, http://www.maplesoft.com/