```
> restart;
> Digits:=30: interface(displayprecision=5):
> using(DEtools):
> swap := x -> rhs(x) = lhs(x):
```

Aufgabe

Ein Kirchenmittelschiff soll nach einer ganzrationalen Funktion zweiten Gerade gebaut werden. Das Gewölbe hat eine Höhe h=15m und eine Breite b=10m.
Die Stützpfeiler werden fabrikmäßig als einfache Geradenstücke angefertigt. Unter welchem Winkel sind die Geradenstücke einzubauen?

Rechnung

Betrachtet wird ein Schnitt durch das Mittelschiff senkrecht zur langen Achse. Dann kann die Aufgabe zweidimensional gelöst werden.

Wahl des Koordinatensystems: x-Achse horizontal. x = 0 in der Mitte des Krichenmittelschiffs. y-Achse nach oben. y=0 auf der Höhe des Übergangs von dem Pfeilern auf den Bogen. Einheit = Meter.

Der höchste Punkt ist in der Mitte.

```
> x[1] = 0, y[1] = 15;
```

$$x_1 = 0, y_1 = 15 \quad (1)$$

Der rechte Punkt an dem das Gewölbe auf den Pfeilern ruht.

```
> x[2] = 5, y[2] = 0;
```

$$x_2 = 5, y_2 = 0 \quad (2)$$

Der linke Punkt an dem das Gewölbe auf den Pfielern ruht.

```
> x[3] = -5, y[3] = 0;
```

$$x_3 = -5, y_3 = 0 \quad (3)$$

Das Gewölbe soll beschrieben werden durch ein Polynom vom Grad 2. Das Polynom hat drei Parameter A, B und C.

```
> y(x) = A*x^2 + B*x + C;
```

$$y(x) = A\,x^2 + B\,x + C \quad (4)$$

Das Polynom muss durch die drei Punkte 1, 2 und 3 führen. Einsetzen der drei Punkte in die Gleichung **(4)** des ergibt drei Gleichungen zur Bestimmung der Parameter A, B und C.
Punkt 1 liefert:

```
> subs( y(x)=y[1],x=x[1], (1), (4) );
```

$$15 = C \quad (5)$$

Punkt 2 liefert:

```
> subs( y(x)=y[2],x=x[2], (2), (4) );
```

$$0 = 25\,A + 5\,B + C \quad (6)$$

Punkt 3 liefert:

```
> subs( y(x)=y[3],x=x[3], (3), (4) );
```

$$0 = 25\,A - 5\,B + C \quad (7)$$

Gleichung **(5)** in Gleichung **(6)** und **(7)** einsetzen.

```
> subs(swap((5)),(6));
```

$$0 = 25\,A + 5\,B + 15 \quad (8)$$

```
> subs(swap((5)),(7));
```

$$0 = 25\,A - 5\,B + 15 \tag{9}$$

Gleichungen **(8)** und **(9)** addieren.

```
> (8)+(9);
```

$$0 = 50\,A + 30 \tag{10}$$

Auflösen nach A.

```
> isolate((10),A);
```

$$A = -\frac{3}{5} \tag{11}$$

Gleichung **(11)** einsetzen in Gleichung **(9)**.

```
> subs((11),(9));
```

$$0 = -5\,B \tag{12}$$

Auflösen nach B.

```
> isolate((12),B);
```

$$B = 0 \tag{13}$$

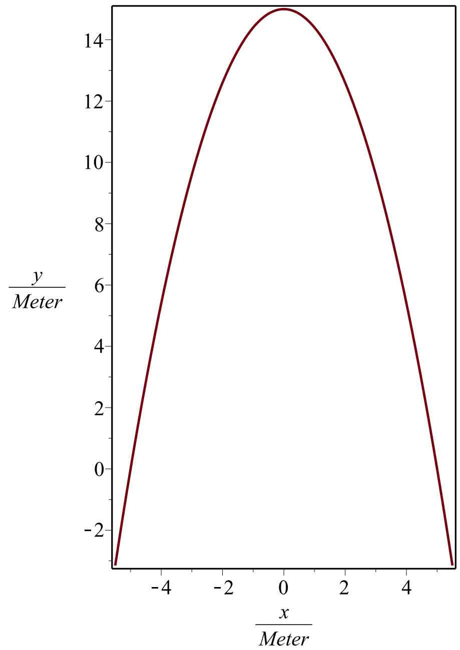
Damit sind alle Parameter des Polynoms berechnet. Zusammenfassen:

```
> subs( (13), (11), swap((5)), (4) );
```

$$y(x) = -\frac{3\,x^2}{5} + 15 \tag{14}$$

Plot der Funktion zur Kontrolle. Im Plot sind die Einheiten auf beiden Achsen gleich lang, damit die Winkel direkt an der Zeichnung geschätzt werden können.

```
> plot( rhs((14)), x=-5.5..+5.5, axes = boxed, labels=[x/Meter,
  y/Meter], scaling=constrained );
```



Die Höhe der Wölbung ist 15, die Breite ist 10, wie gewünscht.

Die Winkel der Kurve zur Senkrechten bei y=0 sind zu berechnen. Dort sollen die geraden Pfeilern ohne Knick das Gewölbe tragen.
Der Winkel kann aus der Ableitung bestimmt werden.

```
> diff((14),x);
```

$$y'(x) = -\frac{6\,x}{5} \tag{15}$$

Die Steigung in Winkel zur x-Achse umrechnen.

```
> diff(y(x),x) = tan(alpha);
```

$$y'(x) = \tan(\alpha) \tag{16}$$

```
> subs( (16),(15) );
```

$$\tan(\alpha) = -\frac{6\,x}{5} \tag{17}$$

Die Steigung am linken Ende bei x = -5;

```
> subs(x=-5,(17)); solve(%,[alpha])[][]; evalf(%); lhs(%)=convert
  (rhs(%),degrees): evalf(%);
```

$$\tan(\alpha) = 6$$

$$\alpha = \arctan(6)$$

$$\alpha = 1.4056$$

$$\alpha = 80.538\ degrees \tag{18}$$

Der Winkel zur Senkrechten.

```
> beta = 90*degrees - alpha; subs((18),%);
```

$$\beta = 90\ degrees - \alpha$$

$$\beta = 9.4623\ degrees \tag{19}$$

Die Pfeiler müssen um 9,46° von der Senkrechten weg geneigt sein.

Hilfsmittel

Maple 17, http://www.maplesoft.com/