```
> restart;
> Digits := 25:
```

Aufgabe

Berechne die Punkt mit maximalem oder minimalem Abstand zum Ursprung auf der entarteten Hyperbel

```
> x^2+2*x*y+y^2=5;
```

$$x^2 + 2\,x\,y + y^2 = 5 \tag{1}$$

Rechnung
mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren.

Die Extremstellen des Abstands sind gesucht, also die Extremstellen von

```
> f(x,y) = sqrt( x^2+y^2 );
```

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2}$$

Da die Wurzelfunktion auf den positiven Zahlen streng monoton steigend ist, ist es ausreichend die Extremstellen des Arguments zu suchen.

```
> lhs((2)) = rhs((2))^2;
```

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \tag{3}$$

Die Nebenbedingung in Nullstellen einer Funktion umformen.

```
> (1)-rhs((1));
```

$$x^2 + 2\,x\,y + y^2 - 5 = 0 \tag{4}$$

```
> psi(x,y) = lhs((4));
```

$$\psi(x, y) = x^2 + 2\,x\,y + y^2 - 5 \tag{5}$$

```
> psi(x,y)=0;
```

$$\psi(x, y) = 0 \tag{6}$$

Es gibt eine Nebenbedingung, also einen Lagrange-Multiplikator einführen: λ.
Die Lagrange-Funktion bilden.

```
> L(x,y) = f(x,y) + lambda*psi(x,y);
```

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda\,\psi(x, y) \tag{7}$$

```
> subs((3),(5),(7));
```

$$L(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda\left(x^2 + 2\,x\,y + y^2 - 5\right) \tag{8}$$

Das Lagrange Gleichungssystem aufstellen.

```
> psi(x,y)=0;
```

$$\psi(x, y) = 0 \tag{9}$$

```
> diff(L(x,y),x) = 0;
```

$$\frac{\partial}{\partial x}\,L(x, y) = 0 \tag{10}$$

```
> diff(L(x,y),y) = 0;
```

$$\frac{\partial}{\partial y}\,L(x, y) = 0 \tag{11}$$

Die drei Gleichungen **(9)**, **(10)** und **(11)** bilden ein Gleichungssystem für die drei Unbekannte x, y und λ.

```
> subs((5),(9));
```

$$x^2 + 2\,x\,y + y^2 - 5 = 0 \tag{12}$$

```
> subs((8),(10)); simplify(%);
```

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+\lambda\left(x^2+2\,x\,y+y^2-5\right)\right)=0$$

$$2\,x+2\,\lambda\,x+2\,\lambda\,y=0 \qquad (13)$$

```
> subs((8),(11)); simplify(%);
```

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2+\lambda\left(x^2+2\,x\,y+y^2-5\right)\right)=0$$

$$2\,y+2\,\lambda\,x+2\,\lambda\,y=0 \qquad (14)$$

Die Lösung berechnet mit Maples solve Funktion:

```
> solve({(12),(13),(14)}, {x,y,lambda} );
```

$$\left\{x=\frac{RootOf\left(\_Z^2-5\right)}{2},\, y=\frac{RootOf\left(\_Z^2-5\right)}{2},\, \lambda=-\frac{1}{2}\right\} \qquad (15)$$

Die Lösung in "Handarbeit".

```
> (13)-(14); isolate(%,x);
```

$$2\,x-2\,y=0$$

$$x=y \qquad (16)$$

```
> subs((16),(12)); solve(%,{y}); evalf(%);
```

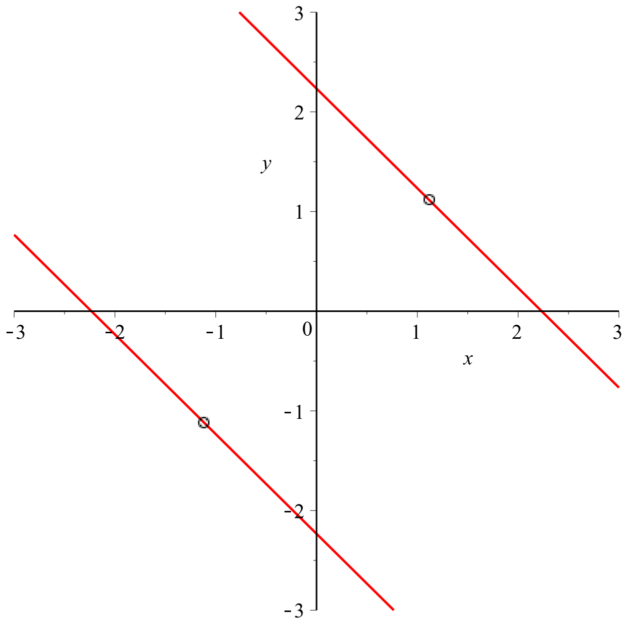
$$4\,y^2-5=0$$

$$\left\{y=\frac{\sqrt{5}}{2}\right\},\,\left\{y=-\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$$

$$\{y=1.118033988749894848204587\},\,\{y=-1.118033988749894848204587\} \qquad (17)$$

Der Suchbereich und die gefundenen Extremstellen darstellen.

```
> r := plots[implicitplot]( (12), x=-3..+3, y=-3..+3 ):
> c := map( z->rhs(z[1]), [(17)] ):
> s := plots[pointplot]( {[c[1],c[1]],[c[2],c[2]]}, symbol=circle,
  symbolsize=15 ):
> plots[display]( r, s );
```



3
2
y
1
-3
-2
-1
0
1
2
3
x
-1
-2
-3