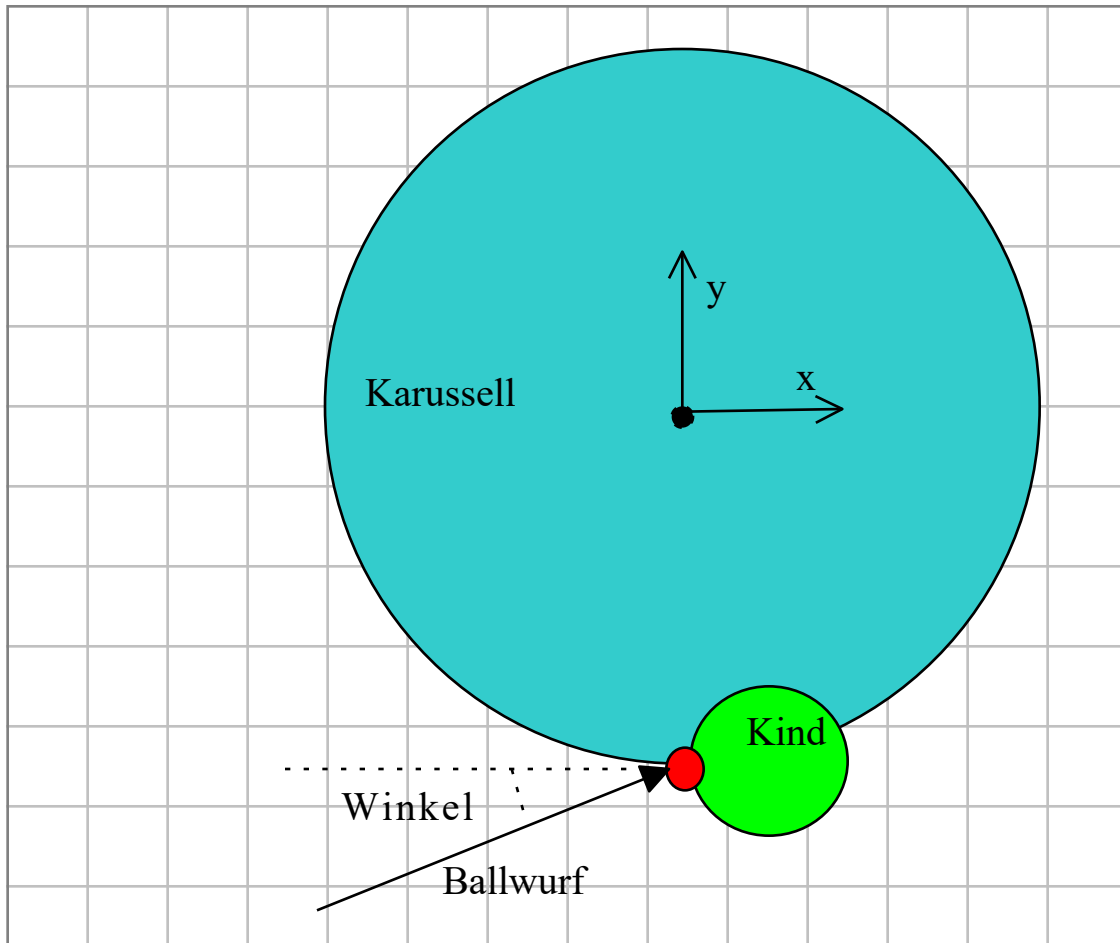


```
> restart;
> Digits:=24: interface( displayprecision = 3 ):
> with(LinearAlgebra):
```

Skizze der Situation



Das Karussell (blau) ist drehbar um seine Achse (schwarzer Punkt). Reibung an der Achse und Luftwiderstand werden vernachlässigt.

Das Kind (grün) steht genau auf am Rand des Karussells.

Der Ball (rot) bewegt sich wie mit dem Pfeil angedeutet.

Das Kind fängt den Ball. Beim Fang werden die Muskeln eingesetzt, um einen Teil der kinetischen Energie des Balls aufzunehmen. Die kinetische Energie wird bei dem Vorgang nicht erhalten, nach dem Fangen ist die kinetische Energie kleiner als vorher.

Auf das System aus den drei Körpern (Karussell, Kind, Ball) wirkt von außen eine Kraft durch die Achse des Karussells. Der Gesamtimpuls bleibt daher nicht erhalten.

Auf das System wirkt von außen kein Drehmoment bezüglich der Karussellachse. Der Gesamtdrehimpuls bleibt erhalten. Über den Drehimpuls kann die resultierende Winkelgeschwindigkeit des Karussells berechnet werden. Es handelt sich um eine Art von inelastischem Stoß.

Ein Koordinatensystem definieren: x- und y-Achse in der Zeichenebene, z-Achse senkrecht auf der Ebene. Nullpunkt auf die Drehachse des Karussells.

Das Trägheitsmoment des Karussells

```
> J = 150.0 * Unit(kg*m^2); params:=%:
```

$$J = 150.000 \left[\text{kg m}^2 \right] \quad (1)$$

Masse des Kinds (Das Kind wird behandelt wie eine Punktmasse.)

```
> m[K] = 30.0 * Unit(kg); params:=%,params:
```

$$m_K = 30.000 \left[\text{kg} \right] \quad (2)$$

Masse des Balls (Der Ball wird behandelt wie eine Punktmasse.)

```
> m[B] = 1.0 * Unit(kg); params:=%,params:
```

$$m_B = 1.000 \left[\text{kg} \right] \quad (3)$$

Abstand vom Kind zur Achse, auch Abstand des Balls zur Achse

```
> r = 2.0 * Unit(m); params:=%,params:
```

$$r = 2.000 \left[\text{m} \right] \quad (4)$$

Ortsvektor des Kinds und des Balls

```
> R = <0,-r,0>;
```

$$R = \begin{bmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

```
> subs(params,(5)): simplify(%);
```

$$R = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.000 \left[\text{m} \right] \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Betrag der Geschwindigkeit des Balls vor dem Stoß

```
> v = 12.0 * Unit(m/s); params:=%,params:
```

$$v = 12.000 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad (7)$$

Winkel des Geschwindigkeitsvektors zur x-Achse vor dem Stoß

```
> alpha = 37.0 * Unit(deg);
```

$$\alpha = 37.000 \left[\text{arcdeg} \right] \quad (8)$$

```
> simplify((8)); params:=%,params:
```

$$\alpha = 0.646 \left[\text{rad} \right] \quad (9)$$

Geschwindigkeit des Balls vor dem Stoß

```
> V = v * <cos(alpha), sin(alpha), 0>;
```

$$V = \begin{bmatrix} v \cos(\alpha) \\ v \sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

```
> subs(params,(10)): simplify(%);
```

$$V = \begin{bmatrix} 9.584 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \\ 7.222 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Vor dem Stoß bewegt sich nur der Ball. Der Gesamtdrehimpuls vor dem Stoß ist gleich dem Drehimpuls des Balls.

Der Drehimpuls des Balls

$$L_I = m_B R \times V$$

> L[1] = m[B] * rhs((5)) &x rhs((10)) ;

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_B r v \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (12)$$

Hier sind alle Drehimpuls parallel zur Achse. Daher wird ab jetzt nur noch die z-Komponente der Drehimpulse betrachtet.

> L[1,z] = rhs((12)) [3] ;

$$L_{1,z} = m_B r v \cos(\alpha) \quad (13)$$

Nach dem Stoß bewegen sich alle drei Körper mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse. Die z-Komponente des Gesamtdrehimpuls nach dem Stoß

> L[2,z] = (J + m[K]*r^2 + m[B]*r^2) * omega ;

$$L_{2,z} = (J + m_K r^2 + m_B r^2) \omega \quad (14)$$

Weil kein Drehmoment von außen wirkt, bleibt der Drehimpuls des Systems gleich.

> L[1,z] = L[2,z] ;

$$L_{1,z} = L_{2,z} \quad (15)$$

(13) und (14) einsetzen.

> subs((13),(14),(15)) ;

$$m_B r v \cos(\alpha) = (J + m_K r^2 + m_B r^2) \omega \quad (16)$$

Auflösen nach der gesuchten Winkelgeschwindigkeit.

> isolate((16),omega) : simplify(%) ;

$$\omega = \frac{m_B r v \cos(\alpha)}{J + m_K r^2 + m_B r^2} \quad (17)$$

Die gegebenen Werte einsetzen und ausrechnen.

> subs(params,(17)) : simplify(%) ;

$$\omega = 6,995 \times 10^{-2} \left[\frac{1}{s} \right] \quad (18)$$

Die Winkelgeschwindigkeit des Karussells unmittelbar nach dem Auffangen beträgt 0,070 /s.

Hilfsmittel

- D. Meschede: Gerthsen Physik, Springer Verlag

- Maple 17