```
> restart;
```

Einführung

Betrachtet wird ein ruhender Körper. An diesem Körper greifen Kräfte an. Weil der Körper ruht müssen die Kräfte im Gleichgewicht sein. Vereinfachend wird vorausgesetzt, dass alle Kräfte in einer Ebene liegen. In dieser Ebene wird ein kartesisches Koordinatensystem mit den Achsen x und y eingeführt.
An den Körper greifen n Kräfte an: F_1 bis F_n. Die Komponenten der Kräfte im Koordinatensystem sind $F_{1,x}$ und $F_{1,y}$ bis $F_{n,x}$ und $F_{n,y}$.
Die Kräfte sind Einzelkräfte, die an einzelnen Punkten angreifen. Die Stellen haben die Koordinaten X_1, Y_1 bis X_n, Y_n.

Die Gleichgewichtsbedingung in Formulierung I.

```
> sum(F[i,x],i=1..n) = 0;
```

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,\,x} = 0 \tag{1}$$

```
> sum(F[i,y],i=1..n) = 0;
```

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,\,y} = 0 \tag{2}$$

```
> sum(M[i,A],i=1..n) = 0;
```

$$\sum_{i=1}^{n} M_{i,\,A} = 0 \tag{3}$$

Dabei ist $M_{i,a}$ das Drehmoment der Kraft F_i bezüglich Punkt A = (A_x,A_y).

```
> M[i,A] = (A[y]-Y[i])*F[i,x] - (A[x]-X[i])*F[i,y];
```

$$M_{i,\,A} = \left(A_y - Y_i\right) F_{i,\,x} - \left(A_x - X_i\right) F_{i,\,y} \tag{4}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen in Formulierung II.

```
> sum(F[i,x],i=1..n) = 0;
```

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,\,x} = 0 \tag{5}$$

```
> sum(M[i,A],i=1..n) = 0;
```

$$\sum_{i=1}^{n} M_{i,\,A} = 0 \tag{6}$$

```
> sum(M[i,B],i=1..n) = 0;
```

$$\sum_{i=1}^{n} M_{i,\,B} = 0 \tag{7}$$

Dabei sind A und B zwei Punkte, deren x-Koordinaten verschieden sind ("Zwei Punkte, die nicht auf einer Vertikalen liegen.").

Zu zeigen ist, dass die beiden Bedingungen I und II äquivalent sind.

Die Äquivalenz wird in zwei Schritten gezeigt. Im ersten Schritt wird gezeigt, dass aus der Bedingung I die Bedingung II folgt. Anders formuliert: Es wird gezeigt, wenn die Kräfte der Gleichgewichtsbedingung I genügen, dann ist auch immer die Gleichgewichtsbedingung II erfüllt. Im zweiten Schritt wird gezeigt, dass aus der Bedinung II die Bedingung I folgt.

Erster Schritt.
Die Kräfte erfüllen die Bedingung I.
Es gelten die Gleichungen **(1)**, **(2)** und **(3)**.

Gleichung **(5)** ist identisch mit Gleichung **(1)**.
Gleichung **(6)** ist identisch mit Gleichung **(3)**.
Es bleibt die Gleichung **(7)** zu zeigen.

Die Gleichung **(3)** umformen. Die Definition des Drehmoments einsetzen.

```
> subs((4),(3));
```

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\left(A_y - Y_i\right) F_{i,x} - \left(A_x - X_i\right) F_{i,y} \right) = 0 \tag{8}$$

Klammern ausmultiplizieren.

```
> expand((8));
```

$$\sum_{i=1}^{n} \left(F_{i,x} A_y - F_{i,x} Y_i - F_{i,y} A_x + F_{i,y} X_i \right) = 0 \tag{9}$$

Neu zusammenfassen.

```
> sum(X[i]*F[i,y]-Y[i]*F[i,x],i=1..n)+A[y]*sum(F[i,x],i=1..n)-A[x]*
  sum(F[i,y],i=1..n) = 0;
```

$$\sum_{i=1}^{n} \left(F_{i,y} X_i - F_{i,x} Y_i \right) + A_y \left(\sum_{i=1}^{n} F_{i,x} \right) - A_x \left(\sum_{i=1}^{n} F_{i,y} \right) = 0 \tag{10}$$

Gleichung **(1)** und **(2)** einsetzen.

```
> subs((1),(2),(10));
```

$$\sum_{i=1}^{n} \left(F_{i,y} X_i - F_{i,x} Y_i \right) = 0 \tag{11}$$

Diese Gleichung merken für die Umformung der Summe:

```
> sum(M[i,B],i=1..n);
```

$$\sum_{i=1}^{n} M_{i,B} \tag{12}$$

Definition des Drehmoments um Punkt B einsetzen.

```
> subs(M[i,B] = (B[y]-Y[i])*F[i,x] - (B[x]-X[i])*F[i,y],(12));
```

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\left(B_y - Y_i\right) F_{i,x} - \left(B_x - X_i\right) F_{i,y} \right) \tag{13}$$

Klammer ausmultiplizieren.

```
> expand((13));
```

$$\sum_{i=1}^{n} \left(F_{i,x} B_y - F_{i,x} Y_i - F_{i,y} B_x + F_{i,y} X_i \right) \tag{14}$$

Neu zusammenfassen.

```
> sum(X[i]*F[i,y]-Y[i]*F[i,x],i=1..n)+B[y]*sum(F[i,x],i=1..n)-B[x]*
  sum(F[i,y],i=1..n);
```

$$\sum_{i=1}^{n} \left(F_{i,y} X_i - F_{i,x} Y_i\right) + B_y \left(\sum_{i=1}^{n} F_{i,x}\right) - B_x \left(\sum_{i=1}^{n} F_{i,y}\right) \tag{15}$$

Gleichung **(1)** und **(2)** einsetzen.

```
> subs((1),(2),(15));
```

$$\sum_{i=1}^{n} \left(F_{i,y} X_i - F_{i,x} Y_i\right) \tag{16}$$

Gleichung **(11)** einsetzen.

```
> subs((11),(16));
```

$$0 \tag{17}$$

Die Rechenschritte zusammengefasst:

```
> sum(M[i,B],i=1..n) = 0;
```

$$\sum_{i=1}^{n} M_{i,B} = 0 \tag{18}$$

Das ist die Gleichung **(7)**. Damit sind alle Gleichungen der Gleichgewichtsbedingung II aus den Gleichungen der Gleichgewichtsbedingung I hergeleitet.

Zweiter Schritt.
Die Kräfte erfüllen die Bedingung II.
Es gelten die Gleichungen **(5)**, **(6)** und **(7)**.

Gleichung **(5)** ist identisch mit Gleichung **(1)**.
Gleichung **(6)** ist identisch mit Gleichung **(3)**.
Es bleibt die Gleichung **(2)** zu zeigen.

Die Gleichung **(6)** umformen wie oben durch Einsetzen der Formel für das Drehmoment und geschickt zusammenfassen.

```
> sum(X[i]*F[i,y]-Y[i]*F[i,x],i=1..n)+A[y]*sum(F[i,x],i=1..n)-A[x]*
  sum(F[i,y],i=1..n) = 0;
```

$$\sum_{i=1}^{n} \left(F_{i,y} X_i - F_{i,x} Y_i\right) + A_y \left(\sum_{i=1}^{n} F_{i,x}\right) - A_x \left(\sum_{i=1}^{n} F_{i,y}\right) = 0 \tag{19}$$

Die Gleichung **(5)** einsetzen.

```
> subs((5),(19));
```

$$\sum_{i=1}^{n} \left(F_{i,y} X_i - F_{i,x} Y_i\right) - A_x \left(\sum_{i=1}^{n} F_{i,y}\right) = 0 \tag{20}$$

Die Gleichung **(7)** umformen wie oben durch Einsetzen der Formel für das Drehmoment und geschickt zusammenfassen.

```
> sum(X[i]*F[i,y]-Y[i]*F[i,x],i=1..n)+B[y]*sum(F[i,x],i=1..n)-B[x]*
  sum(F[i,y],i=1..n) = 0;
```

$$\sum_{i=1}^{n} \left(F_{i,y} X_i - F_{i,x} Y_i\right) + B_y \left(\sum_{i=1}^{n} F_{i,x}\right) - B_x \left(\sum_{i=1}^{n} F_{i,y}\right) = 0 \tag{21}$$

Die Gleichung **(5)** einsetzen.

```
> subs((5),(21));
```

$$\sum_{i=1}^{n}(F_{i,y}X_i - F_{i,x}Y_i) - B_x\left(\sum_{i=1}^{n}F_{i,y}\right) = 0 \tag{22}$$

Gleichung **(20)** minus der Gleichung **(22)**.

```
> (20)-(22);
```

$$-A_x\left(\sum_{i=1}^{n}F_{i,y}\right) + B_x\left(\sum_{i=1}^{n}F_{i,y}\right) = 0 \tag{23}$$

```
> (B[x]-A[x])*sum(F[i,y],i=i..n)=0;
```

$$(B_x - A_x)\left(\sum_{i=i}^{n}F_{i,y}\right) = 0 \tag{24}$$

Laut Bedingung II haben die Punkte A und B verschiedene x-Koordinaten. Die Differenz B_x-A_x ist also ungleich 0. Also muss der rechte Multiplikator gleich 0 sein.

```
> sum(F[i,y],i=i..n)=0;
```

$$\sum_{i=i}^{n}F_{i,y} = 0 \tag{25}$$

Das ist die Gleichung **(2)**.
Damit sind alle Gleichungen der Bedingung I aus den Gleichungen der Bedingung II hergeleitet.

Es wurde gezeigt, dass Bedingung I ⇒ Bedingung II und Bedingung II ⇒ Bedingung I. Also sind die Bedingungen äquivalent.