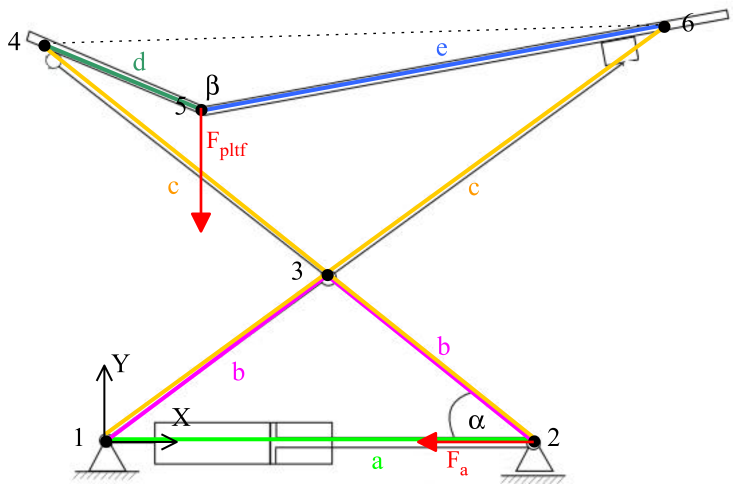
```
> restart;
> with(LinearAlgebra):
```

Skizze des Hubtisches:



Der Aufbau wird zweidimensional betrachtet. Die geometrische Ausdehnung der Platte und der Lager werden vernachlässigt. Aller Lager werden punktförmig betrachtet. Alle Balken und die Platte werden als Linien betrachtet. Die farbigen Linien in der Skizze geben die vereinfachte Geometrie wieder.

Der Zylinder stellt den Abstand a zwischen seinen beiden Lagern ein. Der Winkel α folgt aus der Position des Stellzylinders. Der Stellzylinder zieht mit der Kraft F_a. (Index a für Aktor.)

Die beiden Balken des Hubtischs sind symmetrisch. Die Länge b vom jeweiligen Lager des Hydraulikzylinders bis zum zentralen Gelenk ist bei beiden Balken gleich. Ebenso ist die Gesamtlänge bis zur Platte des Hubtischs c. Die beiden Längen b und c haben einen konstanten Wert.

Die Länge d ist die Länge der Platte vom Lager bis zum tiefsten Punkt Platte. Die Länge d ist ein konstanter Wert.
Die Länge e ist die Länge der Platte vom Gleitlager bis zum tiefsten Punkt der Platte. Die Länge e ist von der Position des Zylinders abhängig.
Der Winkel β ist durch die Konstruktion vorgegeben. Der Winkel β hat einen konstanten Wert. Aber die Lage des Winkels ist von der Position des Stellzylinders abhängig, weil sich die Platte durch das Gleitlager dreht.

Mit 1, 2 bis 5 sind verschiedene Punkte der Konstruktion markiert. Die Last liegt auf dem Punkt 5. Die Kraft der Last auf den Aufbau ist F_{pltf}. (Index pltf für Plattform.)

Die Richtungen eines Koordinatensystems sind eingezeichnet. Der Punkt 1 wird als Nullpunkt des Koordinatensystems gewählt.

Der Punkt 1 ist fest.

```
> P[1] = <0,0>; allp := %:
```

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Der Punkt 2 hat horizontal (x) den Abstand a und ist auf gleicher Höhe (y).

```
> P[2] = P[1] + <a,0>;
```

$$P_2 = P_1 + \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

```
> simplify(subs(allp,(2))); allp := allp,%:
```

$$P_2 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Punkt 3 liegt horizontal (x) in der Mitte zwischen den Punkten 1 und 2. Die Höhe (y) folgt aus der Länge b und a/2 über Pythagoras.

```
> h^2 = b^2-(a/2)^2;
```

$$h^2 = b^2 - \frac{1}{4}\, a^2 \tag{4}$$

```
> P[3] = (P[1]+P[2])/2 + <0,sqrt(rhs((4)))>;
```

$$P_3 = \frac{1}{2}\, P_1 + \frac{1}{2}\, P_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\, \sqrt{4\, b^2 - a^2} \end{bmatrix} \tag{5}$$

```
> simplify(subs(allp,(5))); allp := allp,%:
```

$$P_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\, a \\ \frac{1}{2}\, \sqrt{4\, b^2 - a^2} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Punkt 6 liegt auf der Geraden Punkt 1 - Punkt 3. Der Abstand zum Punkt 1 ist c.

```
> P[6] = P[1]+(c/b)*(P[3]-P[1]);
```

$$P_6 = P_1 + \frac{c\, (P_3 - P_1)}{b} \tag{7}$$

```
> simplify(subs(allp,(7))); allp:=allp,%:
```

$$P_6 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\, \frac{c\, a}{b} \\ \frac{1}{2}\, \frac{c\, \sqrt{4\, b^2 - a^2}}{b} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Punkt 4 liegt auf der Geraden Punkt 2 - Punkt 3. Der Abstand zum Punkt 2 ist c.

```
> P[4] = P[2]+(c/b)*(P[3]-P[2]);
```

$$P_4 = P_2 + \frac{c\, (P_3 - P_2)}{b} \tag{9}$$

```
> simplify(subs(allp,(9))); allp:=allp,%:
```

$$P_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\,\frac{a\,(2\,b-c)}{b} \\ \frac{1}{2}\,\frac{c\,\sqrt{4\,b^2-a^2}}{b} \end{bmatrix} \tag{10}$$

Weil der rechte und linke Balken des Hubtisches die gleiche Geometrie haben, ist die Höhe (y) von Punkt 4 und Punkt 6 gleich.
Die gestrichelte Hilfslinie in der Skizze zwischen Punkt 4 und Punkt 6 verläuft daher exakt horizontal.
Die Länge der Hilfslinie

```
> f = P[6][1]-P[4][1];
```

$$f = P_{6_1} - P_{4_1} \tag{11}$$

```
> sort(simplify(eval((11),{allp})));
```

$$f = -\frac{(b-c)\,a}{b} \tag{12}$$

Die Punkte 4, 5 und 6 bilden ein Dreieck. Bekannt sind Länge Seite d, Länge Seite f und der Winkel β.
Die Länge der Seite e folgt aus dem Cosinus-Satz für das ebene Dreieck.

```
> f^2=d^2+e^2-2*d*e*cos(beta);
```

$$f^2 = d^2 + e^2 - 2\,d\,e\cos(\beta) \tag{13}$$

```
> isolate((13),e);
```

$$e = d\cos(\beta) - \sqrt{d^2\cos(\beta)^2 + f^2 - d^2} \tag{14}$$

Die Länge e ist eine Funktion der Position des Stellzylinders, weil die Länge f eine Funktion der Position ist. Die Länge d und der Winkel β sind durch die Konstruktion der Tischplatte fest vorgegeben.
Die Höhe h des Dreiecks mit dem Punkten 4, 5 und 6 ist

```
> h = d*e/f*sin(beta);
```

$$h = \frac{d\,e\sin(\beta)}{f} \tag{15}$$

```
> subs((14),(15));
```

$$h = \frac{d\left(d\cos(\beta) - \sqrt{d^2\cos(\beta)^2 + f^2 - d^2}\right)\sin(\beta)}{f} \tag{16}$$

Das berechnet f, Gleichung **(12)**, einsetzen.

```
> subs((12),(16));
```

$$h = -\frac{d\left(d\cos(\beta) - \sqrt{d^2\cos(\beta)^2 + \frac{(b-c)^2\,a^2}{b^2} - d^2}\right)b\sin(\beta)}{(b-c)\,a} \tag{17}$$

Der Punkt 5 liegt um die Dreieckshöhe h unter (y) dem Punkt 4.
Der Punkt 5 liegt rechts (x) vom Punkt 4, die Länge folgt aus Pythagoras.

```
> P[5] = P[4] + <sqrt(d^2-h^2),-h>;
```

$$P_5 = P_4 + \begin{bmatrix} \sqrt{d^2-h^2} \\ -h \end{bmatrix} \tag{18}$$

```
> simplify(subs(allp,(18)));
```

$$P_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\,\frac{2\,a\,b - a\,c + 2\sqrt{d^2 - h^2}\,b}{b} \\ \frac{1}{2}\,\frac{c\sqrt{4\,b^2 - a^2} - 2\,h\,b}{b} \end{bmatrix} \tag{19}$$

```
> subs((17),(19)): collect(%,a); allp:=allp,%:
```

$$P_5 = \left[\left[\frac{1}{2}\,\frac{a\,(2\,b-c)}{b} + \sqrt{d^2 - \frac{d^2\left(d\cos(\beta) - \sqrt{d^2\cos(\beta)^2 + \frac{(b-c)^2\,a^2}{b^2} - d^2}\right)^2 b^2\sin(\beta)^2}{(b-c)^2\,a^2}}\right], \left[\frac{1}{2}\,\frac{c\sqrt{4\,b^2-a^2}}{b} + \frac{d\left(d\cos(\beta) - \sqrt{d^2\cos(\beta)^2 + \frac{(b-c)^2\,a^2}{b^2} - d^2}\right)b\sin(\beta)}{(b-c)\,a}\right]\right] \tag{20}$$

Beim Anheben verkleiner der Stellzylinder die Länge a. Die Last befindet sich an Punkt 5. Die Last wird angehoben um die Änderung der y-Koordinate von Punkt 5. Die y-Position der Last:

```
> y = P[5,2];
```

$$y = P_{5,\,2} \tag{21}$$

```
> eval((21),{allp});
```

$$y = P_{5,\,2} \tag{22}$$

Die Koordinaten der Puntke sind berechnet. Die Abhängigkeit der Kraft F_a von der Kraft F_{pltf} wird über das Prinzip der virtuellen Arbeiten berechnet.
Der Hubtisch ohne den Stellzylinder wird betrachtet. Auf den Hubtisch wirken an den Punkten 1, 2 und 5 Kräfte von außen.
Der Punkt 1 hat eine feste Position. Die Kräfte dort leisten keine Arbeit.
Die Kraft an Punkt 2 auf den Hubtisch

```
> F[2] = <-F[a],F[2,2]>;
```

$$F_2 = \begin{bmatrix} -F_a \\ F_{2,\,2} \end{bmatrix} \tag{23}$$

Die Kraft am Punkte 5 auf den Hubtisch

```
> F[5] = <0,-F[pltf]>;
```

$$F_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ -F_{pltf} \end{bmatrix} \tag{24}$$

Die virtuelle Verschiebung in Punkte 2 erfolgt nur in x-Richtung. (Gleitlager)

```
> delta[2] = <delta[2,1],0>;
```

(25)

$$\delta_2 = \begin{bmatrix} \delta_{2,1} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

Die x-Koordinate von Punkt 2 ist a, Gleichung **(3)**. Also eine virtuelle Verschiebung um δa in x-Richtung.

```
> delta[2] = <`&delta;a`,0>;
```

$$\delta_2 = \begin{bmatrix} \delta a \\ 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

Die virtuelle Verschiebung in Punkt 5

```
> delta[5] = <delta[5,1],delta[5,2]>;
```

$$\delta_5 = \begin{bmatrix} \delta_{5,1} \\ \delta_{5,2} \end{bmatrix} \tag{27}$$

Der y-Koordinate von Punkt 5 wurde in Gleichung **(21)** der Namen y gegeben.

```
> delta[5] = <delta[5,1],`&delta;y`>;
```

$$\delta_5 = \begin{bmatrix} \delta_{5,1} \\ \delta y \end{bmatrix} \tag{28}$$

Die Summe der virtuellen Arbeiten muss 0 ergeben. Hier sind die virtuellen Arbeiten am Punkt 2 und 5 zu addieren.

```
> F[2] . delta[2] + F[5] . delta[5] = 0;
```

$$F_2 . \delta_2 + F_5 . \delta_5 = 0 \tag{29}$$

```
> subs((23),(24),(26),(28),(29));
```

$$\begin{bmatrix} -F_a \\ F_{2,2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \delta a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -F_{pltf} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \delta_{5,1} \\ \delta y \end{bmatrix} = 0 \tag{30}$$

```
> subs(conjugate(F[a])=F[a],conjugate(F[pltf])=F[pltf],simplify(
  (30)));
```

$$-F_a \, \delta a - F_{pltf} \, \delta y = 0 \tag{31}$$

```
> isolate((31),F[a]);
```

$$F_a = -\frac{F_{pltf} \, \delta y}{\delta a} \tag{32}$$

Die Koordinate y ist abhängig von der Koordinate a. Übergang von den virtuellen Verschiebungen, dem Differenzenquotienten, zum Differenzialquotienten.

```
> F[a] = - Diff(y(a),a)*F[a];
```

$$F_a = -\left(\frac{d}{da} y(a)\right) F_a \tag{33}$$

```
> F[a] = ü*F[Plft];
```

$$F_a = ü \, F_{Plft} \tag{34}$$

Mit der Übersetzung

```
> ü = -Diff(y(a),a);
```

$$\ddot{u} = -\left(\frac{d}{da}\, y(a)\right) \tag{35}$$

```
> ü = -diff(rhs((22)),a);
```

$$\ddot{u} = 0 \tag{36}$$

Die Namen der Balkenlängen einsetzen.
Der untere Teil des Balkens: b = l_1
Der obere Teil des Balkens: c-b = l_2
Die Gesamtlänge des Balkens: c = l_0

```
> eval((36),{b=l[1],b-c=-l[2],c=l[0]});
```

$$\ddot{u} = 0 \tag{37}$$

Anstelle der Stellzylinderlänge a, den Winkel alpha verwenden.
Aus der Skizze

```
> a=2*b*cos(alpha);
```

$$a = 2\, b \cos(\alpha) \tag{38}$$

```
> eval((38),b=l[1]);
```

$$a = 2\, l_1 \cos(\alpha) \tag{39}$$

```
> eval((37),(39));
```

$$\ddot{u} = 0 \tag{40}$$

```
> subs(op(rhs((40)))[1]=l[0]/(2*l[1]*tan(alpha)),(40));
```

$$\ddot{u} = \frac{1}{2}\, \frac{l_0}{l_1 \tan(\alpha)} \tag{41}$$