Teema 10: Regressio- ja varianssianalyysi

Regressioanalyysi lienee t-testin ohella maailman eniten käytetty tilastollinen menetelmä. Sitä sivuttiin jo alustavasti Teemassa 4.

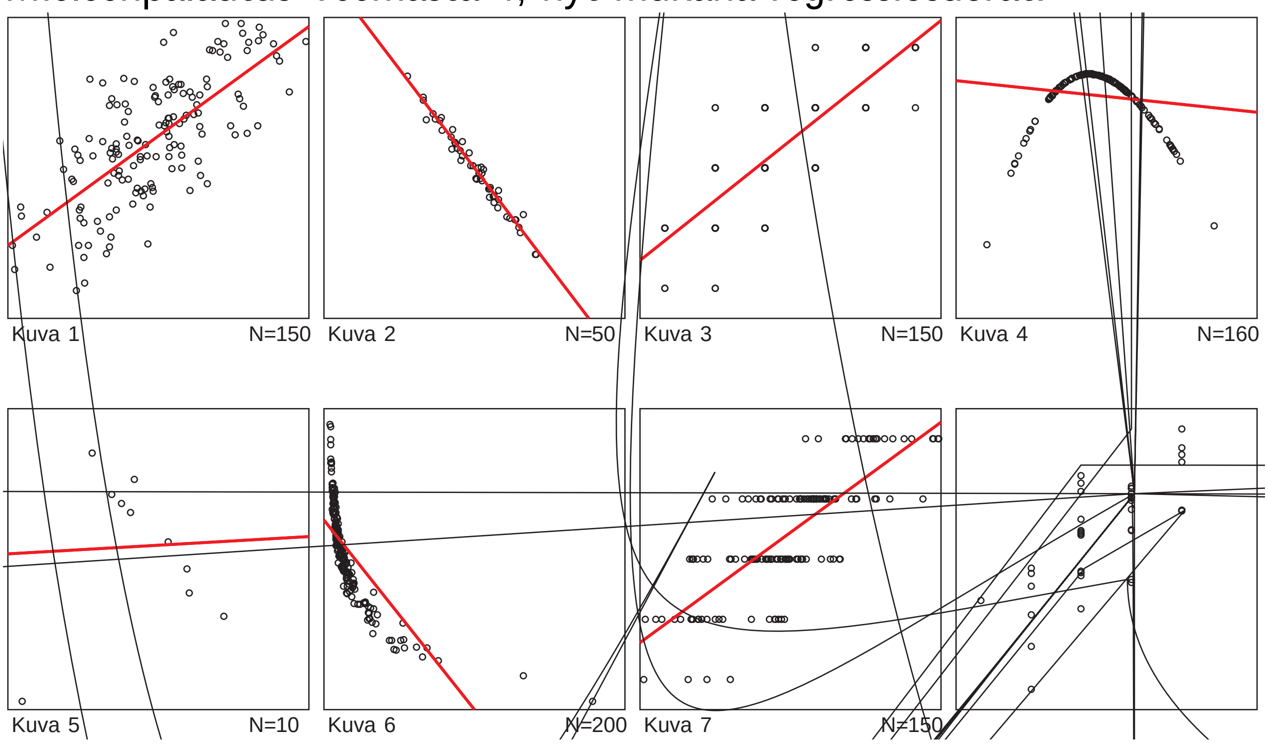
Varianssianalyysi liittyy useallakin tavalla regressioanalyysiin, ja on toisaalta t-testin yleistys silloin kun vertaillaan useampaa kuin kahta ryhmää. Menetelmät kietoutuvat siis vahvasti toisiinsa.

Aivan lopuksi täydennetään aiempia ristiintaulukoita koskevia tarkasteluja χ^2-riippumattomuustestillä (luetaan ”khi-toiseen”).

Esimerkkejä hajontakuvista simuloiduilla aineistoilla

Tilastotieteen johdantokurssi | kevät 2009 | Kimmo Vehkalahti
HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Mieleenpalautus Teemasta 4, nyt mukana regressiosuorat:



Regressioanalyysin asetelma

Regressioanalyysissa on kysymys riippuvuuden mallintamisesta, kun riippuvuus on **lineaarista**. Kuten Teema 4:n yhteydessä todettiin, äskeisistä vain kuvat 1 ja 2 ovat selvästi tämän oletuksen mukaisia.

Näissä yksinkertaisissa tilanteissa vastaavissa regressiomalleissa on vain **yksi selittäjä** (kuvissa vaaka-akselille piirretty muuttuja, jota kutsutaan usein x-muuttujaksi). Yleisesti mallissa voi olla useita selittäjiä, mutta vain **yksi selitettävä** (y-muuttuja).

Kuvassa 8 selittäjä on diskreetti, mikä ei sinänsä haittaa, kunhan sen luokilla on selvä järjestys. Muut kuvat ovat regressioanalyysin kannalta enemmän tai vähemmän kyseenalaisia:

- kuvat 3 ja 7: selitettävä muuttuja liian **diskreetti**
- kuvat 4 ja 6: riippuvuus aivan **epälineaarista**
- kuva 5: **poikkeava havainto** rikkoo lineaarisuuden

Perehdytään nyt regressioanalyysin käsitteistöön vähän tarkemmin.

Regressioanalyysin perusteet

Tilastotieteen johdantokurssi | kevät 2009 | Kimmo Vehkalahti

HELSINGIN YLIOPISTO HELSINGFORS UNIVERSITET UNIVERSITY OF HELSINKI

Lineaarinen regressiomalli voidaan esittää lyhyesti muodossa

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + \varepsilon,$$

jossa y on **selitettävä** muuttuja, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ovat **selittäjiä**, ε on satunnainen **mallivirhe** ja $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$ ovat **regressiokertoimia**, joiden arvot estimoidaan otoksen perusteella.

Joka selittäjällä on oma regressiokerroin. Niiden estimaatit toimivat painokertoimina, kun x:istä muodostetaan **sovite** (tai **ennuste**) $\hat{y}$. Tavoitteena on siis *selittää* (tai *ennustaa*) y vain x:ien avulla.

Kerrointa β_0 kutsutaan mallin **vakiotermin** kertoimeksi, jonka käytännön merkitys on yleensä melko vähäinen. Tulkinnat koskevat pääosin estimoituja regressiokertoimia $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_k$.

Satunnaisvaihtelusta johtuen $\hat{y}$ (x:ien painotettu summa) ei ole (käytännössä koskaan) aivan sama kuin y. Mitä lähempänä se on, sitä korkeampi on **selitysaste** (ks. Teema 4).

Regressioanalyysin perusteet (jatkoa)

Regressioanalyysia käytetään paljon—valitettavasti myös väärin. Elleivät menetelmän oletukset päde (edes jollain tavalla), eivät tulokset tai johtopäätöksetkään voi olla kovin ihmeellisiä. Sama pätee tietenkin kaikkiin tilastollisiin menetelmiin.

Regressiomallin tärkeimmät oletukset koskevat mallivirhettä ε. Siitä oletetaan yleensä, että $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$, mikä tarkoittaa että mallivirhe tuo regressiomalliin vain satunnaista, samansuuruista vaihtelua nollan molemmin puolin. Sen oletetaan siis noudattavan normaalijakaumaa, mikä on monissa sovelluksissa luonteva oletus.

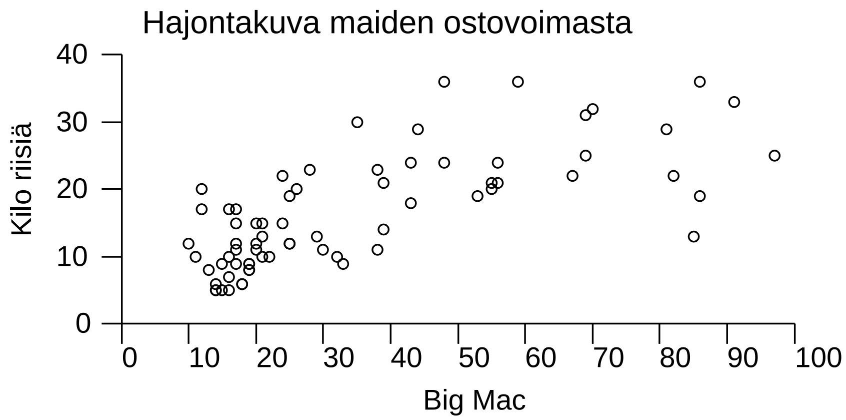
Regressioanalyysiin liittyy monenlaisia testaustilanteita, joissa käytetään mm. t-testiä. Jos normaalijakaumaoletus ei päde, testeistä tehdyt johtopäätökset menettävät luotettavuuttaan.

Mallivirhe on satunnaismuuttuja eikä sellaisenaan havaittavissa, mutta oletusten voimassaoloa tutkitaan mallin jäännöstermin eli **residuaalin** (y:n ja $\hat{y}$:n erotuksen) avulla.

Esimerkki: *Prices and Earnings*, BigMac (Survo)

Tilastotieteen johdantokurssi | kevät 2009 | Kimmo Vehkalahti

Tietoja 70 maasta ja kaupungista vuodelta 2006 (ks. Teema 4)



Hajontakuvia voi toki piirtää kumminpäin hyvänsä. Tutkitaan nyt tilannetta toisinpäin ja selitetään BigMac-indeksiä riisi-indeksillä:

```
Linear regression analysis: Data BIGMAC06, Regressand BigMac     N=70
Variable Regr.coeff.     Std.dev.    t      p
Rice       2.002298       0.237603  8.427  0.000
constant   2.204914       4.367544  0.505  0.308
Variance of regressand BigMac=557.2730849 df=69
Residual variance=276.6006701 df=68
R=0.7147 R^2=0.5108
```

Esimerkki jatkuu: tulkitaan tulostusta

Tulosteesta nähdään, että BigMac-indeksistä 51 % selittyy riisi-indeksillä (Rice), loppu satunnaisvaihtelulla:

```
Variable Regr.coeff.    Std.dev.    t     p
Rice       2.002298      0.237603  8.427  0.000
constant   2.204914      4.367544  0.505  0.308
Residual variance=276.6006701 df=68
R=0.7147 R^2=0.5108
```

Rice-muuttujan regressiokertoimen estimaatti on $\hat{\beta}_1 = 2$, eli kun Rice kasvaa yhden yksikön, BigMac kasvaa kaksi yksikköä. Tämä relaatio on nähtävissä myös kuvasta (vaikka se onkin toisinpäin). Yksikkönähän molemmissa muuttujissa on minuutti (työaikaa).

Kertoimen $\hat{\beta}_1$ estimoitu hajonta (eli keskivirhe) on 0.237. Kerroin jaettuna keskivirheellään on t-testisuure (vrt. Teema 9) 8.427. Hypoteesi $H_0 : \beta_1 = 0$ kaatuu selvästi (vapausasteita on df=68), joten kerroin poikkeaa nollasta (tilastollisesti merkitsevästi).

Vakiotermin kerroin on $\hat{\beta}_0 = 2.2$. Sillä on mallissa oma tehtävänsä, vaikkei se olekaan tilastollisesti merkitsevä (p=0.308).

Esimerkki jatkuu: lisätään toinen selittäjä

Lisätään malliin toiseksi selittäjäksi ruokakorin keskimääräistä hintaa kuvaava Basket (kotitalouden ruokamenot/kk, US$):

```
Variable Regr.coeff.    Std.dev.    t     p
Rice       1.322144      0.269971  4.897  0.000
Basket    -0.074029      0.017947 -4.125  0.000
constant   42.84683      10.54302  4.064  0.000
Residual variance=223.8777762 df=67
R=0.7810 R^2=0.6099
```

Selitysaste paranee ja on nyt 61 %. Molemmat selittäjät ovat merkitseviä, mutta Rice menettää painoarvoaan ($\hat{\beta}_1 = 1.32$). Vapausasteet vähenevät, kun estimoidaan yksi parametri lisää (β_2).

Basket:in estimoitu kerroin $\hat{\beta}_2 = -0.07$ on lukuna pieni, koska muuttujan arvot ovat vastaavasti suurehkoja lukuja. Regressiomalleissa muuttujat voivat olla eri mittayksiköissä ja eri suuruusluokkaa.

Vakiotermikin nousee tilastollisesti merkitseväksi, vaikkei sillä edelleenkään ole sen ihmeellisempää merkitystä.

Esimerkki jatkuu: lisätään kolmas selittäjä

Lisätään malliin vielä lomapäivien määrää kuvaava Vacdays, jota on tarkasteltu aiemmissa harjoituksissa:

```
Variable Regr.coeff.    Std.dev.    t      p
Rice      1.216663       0.279237  4.357  0.000
Basket   -0.077837       0.018052 -4.312  0.000
Vacdays  -0.450943       0.331290 -1.361  0.178
constant  55.08178       13.76280  4.002  0.000
Residual variance=221.0640444 df=66
R=0.7878 R^2=0.6206
```

Selitysaste paranee edelleen, mutta se ei ole ihme, sillä näin käy vaikka malliin lisättäisiin *mitä tahansa selittäjiä*. Selitysaste ei sellaisenaan olekaan riittävä peruste hyvälle mallille.

Huomaa, että Rice menettää taas painoarvoaan ja vapausasteet vähenevät yhdellä, kun β_3 estimoidaan aineistosta.

Vacdays-selittäjän ottamiselle malliin ei kuitenkaan ole perusteluja, sillä sen estimoitu kerroin $\hat{\beta}_3 = -0.45$ ei ole merkitsevä (p=0.178). Hypoteesi $H_0 : \beta_3 = 0$ jää voimaan, ja näin ollen Vacdays voidaan pudottaa pois ja palata aiempaan, suppeampaan malliin.

Esimerkki jatkuu: vaihdetaan kolmas selittäjä

Otetaan Vacdays:in tilalle malliin muuttuja Bread, joka kuvaa sitä, kuinka kauan pitää työskennellä voidakseen ostaa kilon leipää:

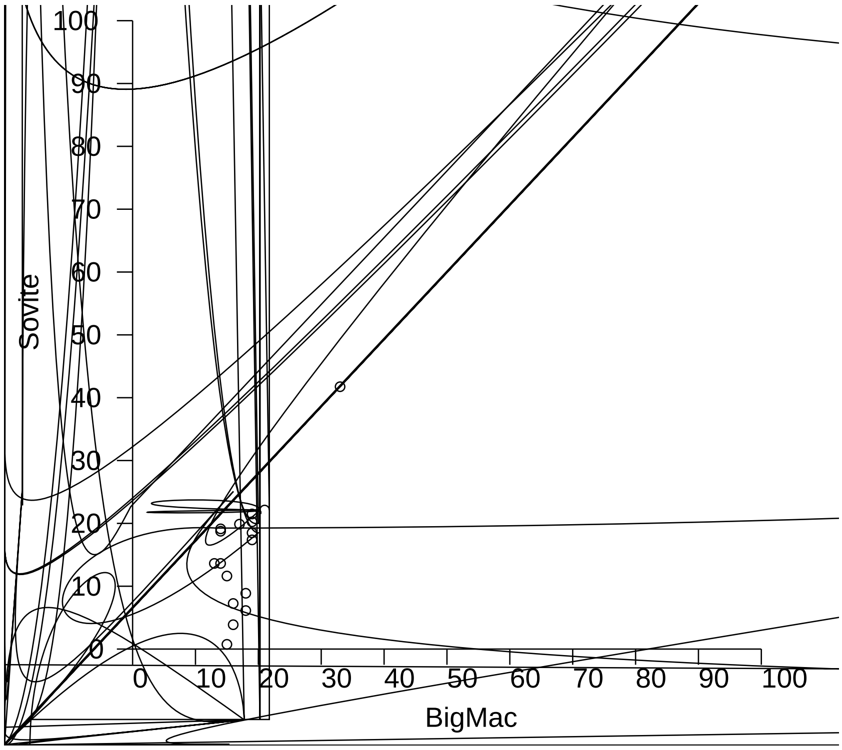
```
Variable Regr.coeff.    Std.dev.    t      p
Rice      0.802165       0.206413  3.886  0.000
Basket   -0.062346       0.013083 -4.766  0.000
Bread     0.826217       0.105148  7.858  0.000
constant  28.61589       7.844347  3.648  0.000
Residual variance=117.4217887 df=66
R=0.8936 R^2=0.7985
```

Nyt selitysaste nousee selvästi, miltei 80 %:iin. Kaikki selittäjät ovat merkitseviä. On aika katsastaa mallia hieman syvemmältä.

Piirretään muutama **diagnostiikkakuva**, jotta voidaan tutkia miten regressiomallin oletukset toteutuvat tämän mallin osalta:

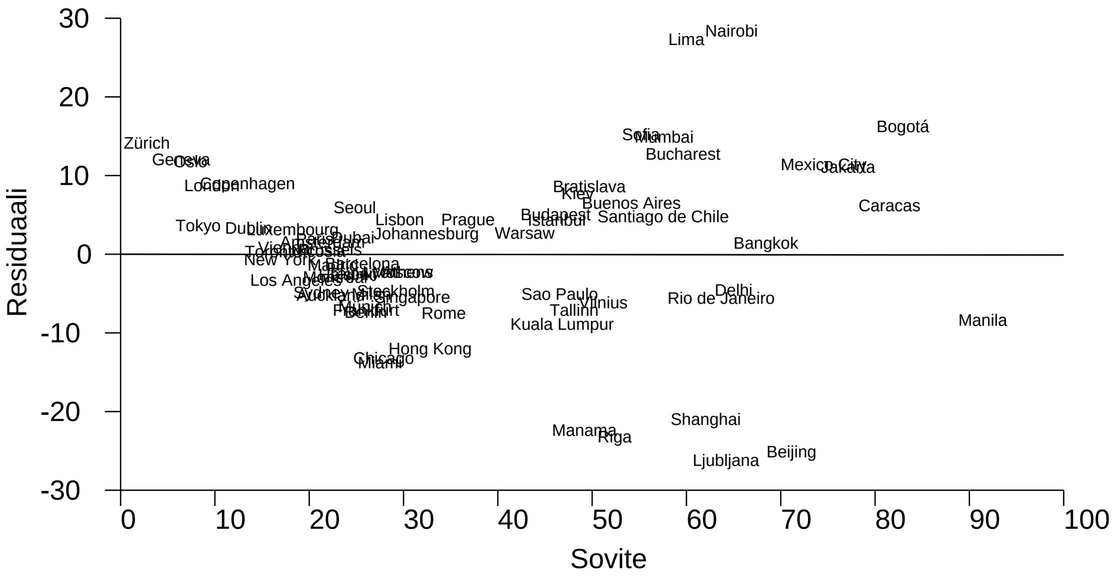
- selitettävä muuttuja vastaan mallin sovite
- sovite vastaan residuaali (ns. *jäännösvaihteludiagrammi*)
- residuaalin normaalisuus (ns. *todennäköisyyspaperikuva*)
- residuaalin normaalisuus (histogrammi, normaalijakauma)

Diagnostiikkakuva 1: selitettävä ja sovite



Mitä paremmin pisteet asettuvat suoralle, sitä lähempänä mallin antama sovite on selitettävää muuttujaa.

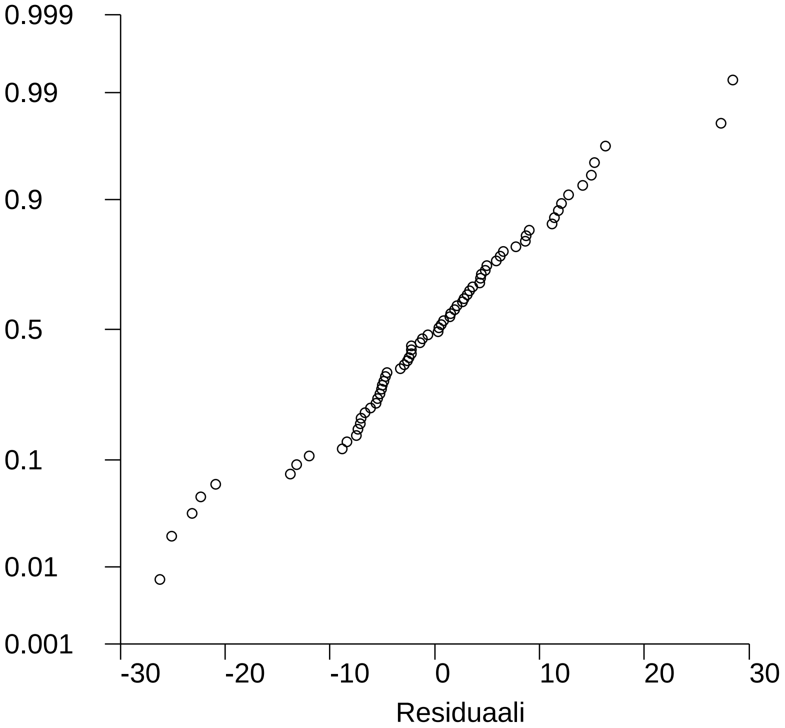
Diagnostiikkakuva 2: sovite ja residuaali



Tässä ei saisi näkyä mitään systemaattista, mutta nyt ilmenee että mallissa on vaikeuksia. Aineiston heterogeenisuus tuo ongelmia. **Jäännösvaihtelu** ei ole satunnaista. Malli on lievästi harhainen.

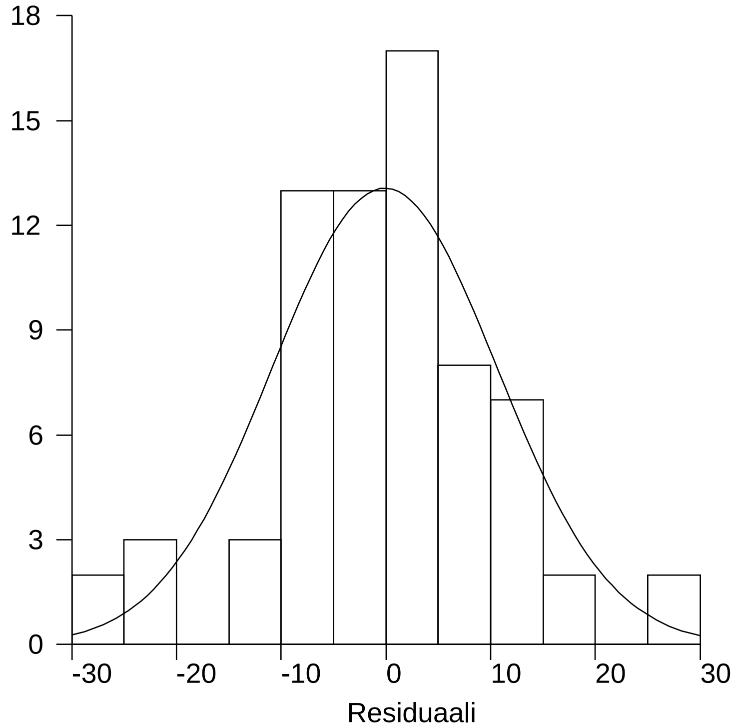
Tilastotieteen johdantokurssi | kevät 2009 | Kimmo Vehkalahti
HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Diagnostiikkakuva 3: residuaali todennäköisyyspaperilla



Todennäköisyyspaperikuvassa pystyakselilla ovat normaalijakauman kertymäfunktion arvot. Mitä paremmin pisteet kuvautuvat suoraksi, sitä paremmin empiirinen jakauma vastaa normaalijakaumaa.

Diagnostiikkakuva 4: residuaalin histogrammi



Teema 9:stä tutussa χ^2-yhteensopivuustestissä p=0.37, joten residuaaleja voidaan pitää normaalisti jakautuneina. Oletus mallivirheen normaalisuudesta jää siis voimaan.

Esimerkki päättyy: johtopäätökset

Näin rakennettu malli on kohtuullisen hyvä, mutta lievä harhaisuus olisi hyvä saada korjattua, joko paremmilla selittäjävalinnoilla tai mahdollisilla regressiodiagnostisilla keinoilla kuten muunnoksilla.

Malliin liittyvä normaalijakaumaoletus näyttäisi pitävän paikkansa, joten t-testeihin perustuva päättely on perusteltua.

Sisällölliset tulkinnat on tässä jätetty vähemmälle huomiolle, ja saatuun malliin onkin syytä suhtautua enemmänkin teknisenä esimerkkinä regressiomallin laatimisesta.

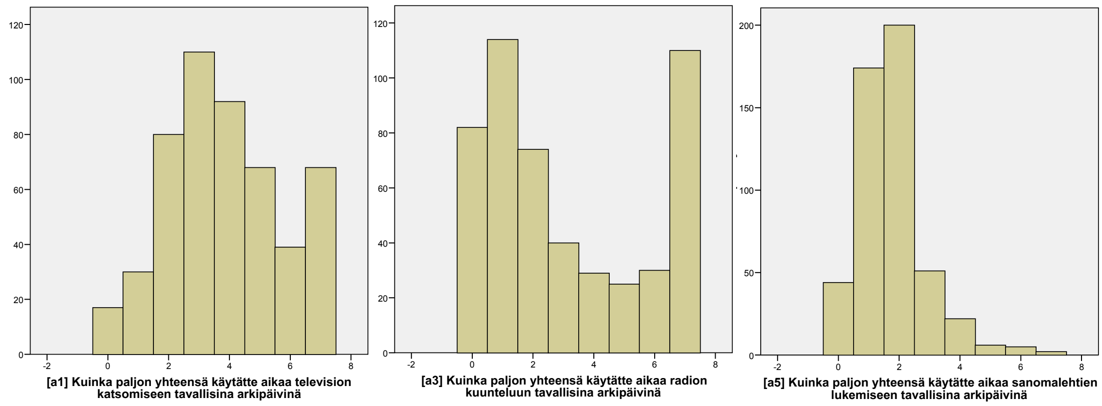
Huomaa jälleen, miten kurssilla aiemmin opitut asiat ja käsitteet (jakaumat, parametrit, estimointi, testit, p-arvot jne.) sekä erilaiset merkintätavat tulivat luontevasti käyttöön.

Tästä olisi hyvä jatkaa pidemmällekin, mutta sitä ei tämän kurssin puitteissa tehdä. Siirrytään sen sijaan toiseen esimerkkiin.

Tilastotieteen johdantokurssi | kevät 2009 | Kimmo Vehkalahti

Esimerkki: ESS ja mediaseuranta (SPSS)

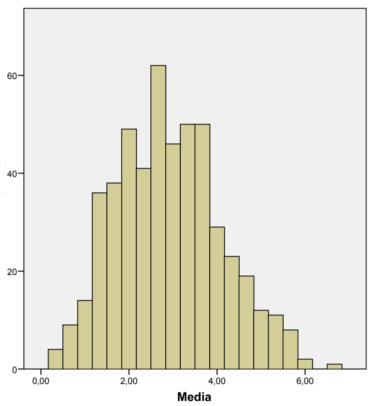
Tarkastellaan ESS-aineistoa ja siitä valittua kolmea muuttujaa:



Muodostetaan summamuuttuja Media:

Descriptive Statistics

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
[a1] Kuinka paljon yhteensä käytätte aikaa television katsomiseen tavallisina arkipäivinä	504	0	7	3.85	1.890
[a3] Kuinka paljon yhteensä käytätte aikaa radion kuunteluun tavallisina arkipäivinä	504	0	7	3.12	2.607
[a5] Kuinka paljon yhteensä käytätte aikaa sanomalehtien lukemiseen tavallisina arkipäivinä	504	0	7	1.76	1.132
Media	504	.33	6.67	2.9101	1.19450
Valid N (listwise)	504				



Esimerkki jatkuu: ESS ja mediaseuranta

Laaditaan regressiomalli, jossa selitetään mediaseurannan aktiivisuutta vastaajan sukupuolella ja iällä. Ikää käytetään mallissa jatkuvana muuttujana (2002 – syntymävuosi), ja sukupuoli on koodattu 1=mies, 2=nainen. Tulostus alkaa yhteenvedolla:

Model Summary[b]

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.327[a]	.107	.103	1.13127

a. Predictors: (Constant), Sukupuoli (1=mies, 2=nainen), Ikä (vuosina)

b. Dependent Variable: Media

Selitysaste ei ole kovin kaksinen (n. 11 %). Samaa luokkaa on myös korjattu selitysaste, joka laajemmissa malleissa rankaisee liioista selittäjistä ja on siksi hieman parempi mallin hyvyyden mitta.

Selitysasteen neliöjuurta merkitään usein (myös edellä olevissa Survon tulosteissa) symbolilla R ja kutsutaan *yhteiskorrelaatiokertoimeksi*. Nimi tulee siitä, että kyseessä on y:n ja $\hat{y}$:n korrelaatiokerroin. Jos selittäjiä on vain yksi, R on sama kuin y:n ja x:n tavallinen korrelaatiokerroin.

Esimerkki jatkuu: ESS ja mediaseuranta

Seuraava tuloslaatikko on otsikoitu lyhenteellä ANOVA, joka johtuu **varianssianalyysia** tarkoittavista sanoista ANalysis Of VAriance.

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	76.538	2	38.269	29.903	.000[a]
	Residual	641.162	501	1.280		
	Total	717.700	503			

Varianssianalyysi liittyy läheisesti regressioanalyysiin (nämä menetelmät ovat oikeastaan saman *lineaarisen mallin* ilmentymiä). Tässä kohtaa on kysymys siitä, miten regressioanalyysi on yleisesti onnistunut: paljonko y-muuttujan (Media) vaihtelusta selittyy mallin avulla ja paljonko jää selittämättä.

Nämä tiedot esitetään perinteisesti tässä näkyvänä *varianssitauluna*, joka koostuu kumpaakin osuutta kuvaavista neliösummista, vapausasteista ja näiden osamäärinä saatavista varianssitermeistä (Mean Square). Varianssien suhteena saadaan F-testisuure, joka testaa *(todella skeptistä!)* hypoteesia

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0,$$

siis että kaikkien selittäjien (paitsi vakion) regressiokertoimet olisivat nollia.

Testin p-arvon perusteella *ainakin yksi* kertoimista poikkeaa nollasta, ts. mallin selittäjävalinta ei ole aivan pielessä (vaikka selitysaste onkin melko vähäinen).

Esimerkki jatkuu: ESS ja mediaseuranta

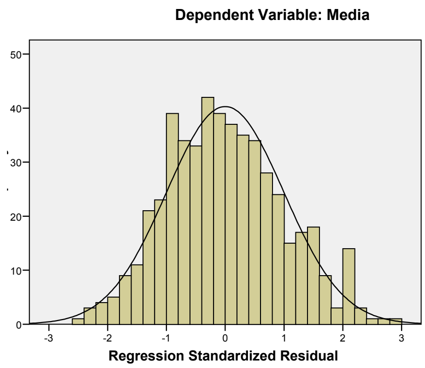
Kiinnostavin osa tulostuksesta on yleensä seuraava laatikko:

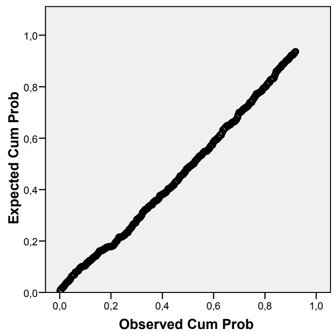
Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients B	Unstandardized Coefficients Std. Error	Standardized Coefficients Beta	t	Sig.
1	(Constant)	2.270	.203		11.159	.000
	Ikä (vuosina)	.020	.003	.317	7.518	.000
	Sukupuoli (1=mies, 2=nainen)	-.190	.101	-.079	-1.878	.061

a. Dependent Variable: Media

Analyysia täydentävät kaksi diagnostista kuvaa (vrt. Survon kuvat):





Tulkintoihin palataan tarkemmin harjoituksissa.

Esimerkki jatkuu: ESS ja mediaseuranta

Tilastotieteen johdantokurssi | kevät 2009 | Kimmo Vehkalahti

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Äskeisen kaltaisia tilanteita on yhteiskuntatieteissä tyypillistä tutkia myös varianssianalyysilla. Luokitellaan seuraavassa ikä (karkeasti) ryhmiin 15-34 -vuotiaat, 35-54 -vuotiaat ja yli 54-vuotiaat.

Jos ikäryhmiä olisi vain kaksi, niitä voitaisiin vertailla t-testillä. Sen yleistys useamman ryhmän vertailuun tunnetaan nimellä **yksisuuntainen varianssianalyysi**. Tutkittavana muuttujana on edelleen mediaseurannan aktiivisuus.

Aluksi saadaan ryhmiä kuvaavia tunnuslukuja ja luottamusvälejä:

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	95% Confidence Interval for Mean Upper Bound
15-34	158	2.5865	1.07499	.08552	2.4176	2.7554
35-54	176	2.6913	1.13865	.08583	2.5219	2.8607
55-	170	3.4373	1.18463	.09086	3.2579	3.6166
Total	504	2.9101	1.19450	.05321	2.8055	3.0146

Esimerkki jatkuu: ESS ja mediaseuranta

Seuraavaksi tulee varianssitaulu, joka muistuttaa hyvin paljon regressioanalyysin yhteydessä nähtyä vastaavaa esitystä. Tässä kysymys on ryhmien välisen ja ryhmien sisäisen vaihtelun suhteesta. Kiinnostuksen kohteena on nimenomaan ryhmien välinen vaihtelu, ts. miten suuria eroja ikäryhmien välillä on havaittavissa.

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	72.214	2	36.107	28.025	.000
Within Groups	645.486	501	1.288		
Total	717.700	503			

F-testin perusteella eroja on selvästi havaittavissa. Tarkemmin erot paljastuvat vasta **monivertailutesteillä**:

(I) ikäryhm	(J) ikäryhm	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
15-34	35-54	-.10479	.12440	.677	-.3972	.1876
	55-	-.85076*	.12543	.000	-1.1456	-.5559
35-54	15-34	.10479	.12440	.677	-.1876	.3972
	55-	-.74597*	.12206	.000	-1.0329	-.4590
55-	15-34	.85076*	.12543	.000	.5559	1.1456
	35-54	.74597*	.12206	.000	.4590	1.0329

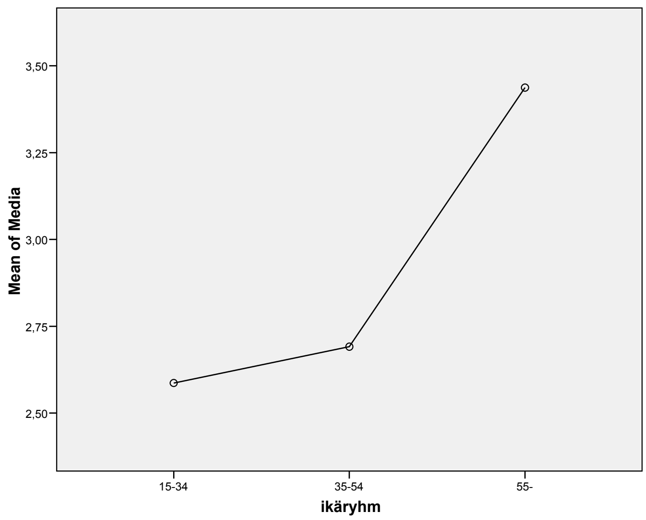
*. The mean difference is significant at the .05 level.

Tilastotieteen johdantokurssi | kevät 2009 | Kimmo Vehkalahti
HELSINGIN YLIOPISTO HELSINGFORS UNIVERSITET UNIVERSITY OF HELSINKI

Esimerkki päättyy: ESS ja mediaseuranta

Varianssianalyysin (joskus hieman harhaanjohtavalta tuntuva) nimi tulee siis y-muuttujan varianssin hajottamisesta erilaisiin osiin, mutta mielenkiinto keskittyy **ryhmien keskiarvojen vertailuun**.

Tuloksia on usein tapana visualisoida **keskiarvoprofiileilla**:



Varianssianalyysillakin voidaan tutkia useita muuttujia sekä niiden **yhdysvaikutuksia**, mutta näihin asioihin ei tässä perehdytä.

Riippuvuustarkasteluja ristiintaulukoista

Kurssin osallistujien ikäjakauma tiedekunnittain (ks. Teema 5)
(lähde: WebOodi/KV)

	Ikä (vuotta)				
Tiedekunta	17–22	23–27	28–32	33–46	yht.
Valtiotieteellinen	132	62	21	13	228
Matem.–luonnontiet.	47	30	9	6	92
Muut tiedekunnat	49	27	3	4	83
yhteensä	228	119	33	23	403

Tästä tarkasteltiin ehdollisia jakaumia, reunajakaumia ja erilaisia %-jakaumia. Teeman 6 harjoituksissa puolestaan tarkasteltiin taulukkoa, jonka sarakeluokittelijana oli sukupuoli. Sen avulla tutkittiin ehdollista todennäköisyyttä ja riippumattomuutta.

Nämä käsitteet ovat perustana, kun otetaan mukaan vielä riippumattomuuden arviointiin tarkoitettu tilastollinen testi.

Riippumattomuuden arviointi χ^2-testillä

Ovatko äskeisen taulukot rivi- ja sarakeluokittelijat toisistaan riippumattomia, ts. ovatko ikäjakaumat tiedekunnittain samanlaisia (kun keskitytään lähinnä kahteen kurssin kannalta suurimpaan tiedekuntaan ja samastetaan muut yhdeksi kategoriaksi)?

Muodollisemmin on kyse seuraavasta hypoteesin testauksesta:

H_0 : Ikäjakaumat ovat samat tiedekunnasta riippumatta.
H_1 : Ikäjakaumissa on eroja tiedekunnittain.

Testaus tapahtuu χ^2-testillä, jonka erästä muotoa käytettiin jo ohimennen Teemassa 9 empiiristen ja teoreettisten jakaumien yhteensopivuuden testaukseen.

Tässä testi johtaa p-arvoon 0.604, joten H_0 jää voimaan. Ikäjakaumissa **ei ole** eroja tiedekunnittain. Miten se ilmenee? Tutkitaan tarkemmin eikä tyydytä vain yhteen lukuun.

χ^2-testi: odotetut ja havaitut frekvenssit

Diskreetin jakauman yhteensopivuustesteissä (nopat, lotto) verrattiin **havaittuja frekvenssejä** pistetodennäköisyyksien mukaisiin **odotettuihin frekvensseihin**. Samoin tehdään nyt.

Odotetut frekvenssit vastaavat H_0:n mukaista riippumatonta tilannetta, joten ne seuraavat aivan suoraan reunajakaumista. Esimerkiksi taulukon ensimmäisen solun arvo saadaan laskemalla $\frac{228 \cdot 228}{403} = 128.99$. Ohessa luvut on pyöristetty:

	Ikä (vuotta)				
Tiedekunta	17–22	23–27	28–32	33–46	yht.
Valtiotieteellinen	129.0	67.3	18.7	13.0	**228**
Matem.–luonnontiet.	52.0	27.2	7.5	5.3	92
Muut tiedekunnat	47.0	24.5	6.8	4.7	83
yhteensä	**228**	119	33	23	**403**

Tilastotieteen johdantokurssi | kevät 2009 | Kimmo Vehkalahti
HELSINGIN YLIOPISTO HELSINGFORS UNIVERSITET UNIVERSITY OF HELSINKI

χ^2-testi: kontribuutiot päättelyn tukena

Odotettuja ja havaittuja frekvenssejä verrataan toisiinsa laskemalla niiden *neliöidyt erotukset* suhteessa odotettuihin frekvensseihin. Jokaista taulukon solua kohti saadaan kyseistä eroa kuvaava luku. Näitä lukuja kutsutaan toisinaan χ^2-kontribuutioiksi:

	Ikä (vuotta)				
Tiedekunta	17–22	23–27	28–32	33–46	yht.
Valtiotieteellinen	0.07	0.42	0.29	0.00	0.78
Matem.–luonnontiet.	0.49	0.30	0.29	0.11	1.18
Muut tiedekunnat	0.09	0.25	**2.12**	0.11	**2.58**
yhteensä	0.65	0.97	**2.70**	0.22	4.54

Korostetut luvut kertovat suurimmat erot (vrt. taulukot).

Mukana ovat myös χ^2-kontribuutioiden rivi- ja sarakesummat. Kokonaissumma 4.54 on χ^2-testisuure, jonka **vapausasteet** *(degrees of freedom)* ovat df = (rivien lkm − 1) × (sarakkeiden lkm − 1), kun summarivejä ei oteta mukaan, siis $(3-1)(4-1) = 6$. Testin p-arvo saadaan χ^2-jakauman kertymäfunktiosta tai taulukosta.

χ^2-testi: kevään 2008 vastaava taulukko

Vertailun vuoksi tarkastellaan myös tilannetta, jossa ikäjakaumat eroavat tiedekunnittain (huomaa, että myös luokittelut eroavat edellä esitetyistä):

Kevään 2008 kurssin osallistujien ikäjakauma tiedekunnittain (lähde: WebOodi/KV)

	Ikä (vuotta)				
Tiedekunta	18–22	23–27	28–32	33–62	yht.
Valtiotieteellinen	86	43	6	12	147
Matem.–luonnontiet.	46	33	20	7	106
Muut tiedekunnat	35	28	5	4	72
yhteensä	167	104	31	23	325

Tässä tilanteessa testi johtaa p-arvoon 0.003, joten H_0 hylätään. Ikäjakaumissa **on** eroja tiedekunnittain. Mitä nuo erot ovat?

χ^2-testi: odotetut ja havaitut frekvenssit

Tehdään vastaavat tarkastelut kuin edellä:

Odotetut frekvenssit vastaavat H_0:n mukaista riippumatonta tilannetta, joten ne seuraavat aivan suoraan reunajakaumista. Esimerkiksi taulukon ensimmäisen solun arvo saadaan laskemalla $\frac{167 \cdot 147}{325} = 75.5$.

	Ikä (vuotta)				
Tiedekunta	18–22	23–27	28–32	33–62	yht.
Valtiotieteellinen	75.5	47.0	14.0	10.4	**147**
Matem.–luonnontiet.	54.5	33.9	10.1	7.5	106
Muut tiedekunnat	37.0	23.0	6.9	5.1	72
yhteensä	**167**	104	31	23	**325**

χ^2-testi: kontribuutiot päättelyn tukena

Lasketaan χ^2-kontribuutiot ja -testisuure:

$$\frac{(86-75.5)^2}{75.5} + \frac{(43-47)^2}{47.0} + \cdots + \frac{(4-5.1)^2}{5.1} = 1.45 + 0.35 + \cdots + 0.24 = 19.6$$

Kerätään luvut taulukkoon (vastaavasti kuin edellä):

	Ikä (vuotta)				
Tiedekunta	18–22	23–27	28–32	33–62	yht.
Valtiotieteellinen	1.45	0.35	**4.59**	0.25	**6.63**
Matem.–luonnontiet.	1.32	0.02	**9.67**	0.03	**11.05**
Muut tiedekunnat	0.11	1.07	0.51	0.24	1.92
yhteensä	2.87	1.44	**14.77**	0.51	19.60

Korostetut luvut kertovat, miksi H_0 hylätään (vrt. taulukot).

χ^2-testin visualisointi: korrespondenssianalyysi

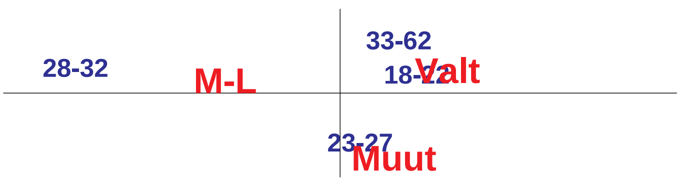
Tilastotieteen johdantokurssi | kevät 2009 | Kimmo Vehkalahti

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Taulukoiden visualisointiin erikoistunut monimuuttujamenetelmä on nimeltään **korrespondenssianalyysi**. Tarkastellaan äskeisiä taulukoita vielä sen avulla:

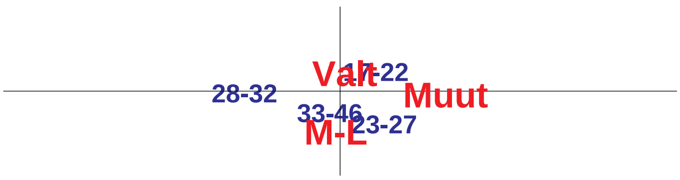
Kevät 2008:

```
Correspondence analysis on data JK08K: Rows=3 Columns=4

    Canonical      Eigen-              Chi^2      Cumulative
    correlation    value                          percentage
 1  0.2311         0.0534         17.3646554        88.61
 2  0.0829         0.0069          2.23264005      100.00
                   0.0603         19.5973 (df=6 P=0.00326527)
```



Syksy 2008:

```
Correspondence analysis on data JK08S: Rows=3 Columns=4

    Canonical      Eigen-              Chi^2      Cumulative
    correlation    value                          percentage
 1  0.0899         0.0081          3.25890317       71.82
 2  0.0563         0.0032          1.27855915      100.00
                   0.0113          4.53746 (df=6 P=0.604347)
```



Lisää aiheesta: *Kyselytutkimuksen mittarit ja menetelmät* (luku 7).