

# Relazione Approssimazione Di Equazioni Differenziali

Pirola Zaltieri Stella

Saporito Francesco

January 4, 2017

# Contents

<b>1</b>	<b>Elementi Finiti Per Problemi Ellittici</b>	<b>2</b>
1.1	Introduzione . . . . .	2
1.2	Metodi Variazionali . . . . .	3
1.3	Metodo Galerkin . . . . .	7
1.4	Approssimazione Con Elementi Finiti (Lagrangiani) . . . . .	9
1.5	Stime Teoriche Errori . . . . .	11
1.5.1	Errore $H^1$ . . . . .	11
1.5.2	Errore $L^2$ . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Calcolo Con Elemento Di Riferimento</b>	<b>13</b>
2.1	Introduzione . . . . .	13
2.2	Elemento di riferimento . . . . .	14
2.3	Termine Noto . . . . .	16
2.4	Termini Equazione Ellittica . . . . .	16
2.5	Calcolo Errori . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Esperimenti Numerici</b>	<b>21</b>
3.1	Prima Equazione . . . . .	21
3.1.1	Mesh Uniforme . . . . .	21
3.1.2	Mesh Non Uniforme . . . . .	22
3.2	Seconda Equazione . . . . .	23
3.2.1	Mesh Uniforme . . . . .	23
3.2.2	Mesh Non Uniforme . . . . .	24
	<b>Index</b>	<b>25</b>
	<b>Bibliography</b>	<b>26</b>

# Chapter 1

## Elementi Finiti Per Problemi Ellittici

### 1.1 Introduzione

In questo capitolo richiamiamo i concetti base del metodo agli elementi finiti per risolvere problemi ellittici del secondo ordine.

Il problema differenziale generale che affronteremo è del tipo:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(c\nabla u) + \beta \cdot \nabla u + \alpha u = f & \Omega \\ u = g & \partial\Omega \end{cases}$$

dove  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  e dove con  $\partial\Omega$  intendiamo il bordo relativo al dominio  $\Omega$ . I vari termini dell'equazione possono essere caratterizzati nel modo seguente:

- **Termine Di Diffusione**  $-\operatorname{div}(c\nabla u)$
- **Termine Di Avezione**  $\beta \cdot \nabla u$
- **Termine Di Reazione**  $\alpha u$

Al bordo abbiamo considerato la condizione non omogenea di Dirichlet  $u|_{\partial\Omega} = g$ . Sono possibili altri tipi di condizioni al bordo, ad esempio:

- **Neumann** Condizione sulla derivata normale al bordo della funzione.
- **Cauchy** Impone al bordo sia una condizione di Dirichlet che una di Neumann.
- **Robin** Impone al bordo una condizione ottenuta come combinazione lineare di una condizione di Dirichlet e di una di Neumann.

L'equazione ellittica del secondo ordine è molto importante per la modellizzazione di problemi stazionari (ovvero indipendenti dal tempo), e infatti molte altre equazioni si riducono ad una riconducibile al caso ellittico nel regime stazionario <sup>1</sup>. Forniamo alcuni esempi fisici modellizzati da questa equazione:

**Example 1** (Equazione di Poisson).

Il caso più semplice è l'equazione di Poisson:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega \\ u = g & \partial\Omega \end{cases}$$

dove  $\Delta$  è l'operatore di Laplace, definito come:

$$\Delta = \operatorname{div}\nabla$$

---

<sup>1</sup>Ad esempio le equazioni di tipo parabolico e iperbolico sono equazioni ellittiche nelle variabili spaziali con l'aggiunta di termini temporali

Questa equazione modella ad esempio problema del calore stazionario [Sal10, Capitolo 3] o il problema generale dell'elettrostatica in presenza di cariche [Jac98, Capitoli 1,2,3]. ■

**Example 2** (Equazione di Fick Stazionaria).

L'equazione di Fick descrive la variazione di concentrazione nei materiali in cui è presente diffusività molecolare ma non termica. Nel caso stazionario (ovvero che studia solo la diffusione spaziale senza considerare il tempo), abbiamo:

$$\begin{cases} -D\Delta u + v\nabla u = f & \Omega \\ \partial_\eta u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

dove al bordo sono state supposte condizioni di Neumann omogenee, a significare che non c'è diffusione attraverso il bordo del dominio (caso che invece avviene se ad esempio il bordo è poroso). ■

Gli esempi qui posti sono tutti riguardanti quantità incognite scalari, che è il caso che considereremo in seguito. Il ragionamento può essere esteso a sistemi di equazioni ellittiche (ovvero a grandezze vettoriali). Ad esempio [BS07, Capitolo 11] mostra un'applicazione delle tecniche qui presentate al problema bidimensionale dell'elasticità planare.

## 1.2 Metodi Variazionali

Vogliamo dunque risolvere un problema del tipo 1.1. Esso in particolare per essere ben definito richiede ad esempio che la soluzione  $u$  sia almeno di classe  $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ . Questo limita molto la capacità di modellizzazione per problemi fisici reali (ad esempio che presentano discontinuità). Inoltre non è detto che sia possibile trovare una soluzione in forma chiusa del problema. Per provare ad ovviare a questi problemi proviamo a passare ad una formulazione equivalente detta formulazione variazionale o debole, che permette alla funzione  $u$  di essere meno regolare di quanto previsto dal problema differenziale. I riferimenti principali per questa sezione sono [Bre10] e [Eva90].

Consideriamo inizialmente il seguente problema omogeneo:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(c\nabla u) + \beta \cdot \nabla u + \alpha u = f & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

ricordiamo inanzitutto la definizione di derivata debole:

**Definition 1.2.1 (Derivata Debole).**

Per la formula di integrazione per parti abbiamo che se  $f \in C^{|\alpha|}(\Omega)$  e  $g \in C_0^{|\alpha|}(\Omega)$ , con  $\alpha$  multi-indice, allora vale:

$$\int_{\Omega} (\partial^\alpha f) g \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f (\partial^\alpha g) \, dx$$

da cui, se  $f$  è localmente integrabile su  $\Omega$ , allora diciamo che una funzione  $g$  è la sua  $\alpha$ -derivata debole, definita (quasi ovunque) come

$$g = D^\alpha f$$

se  $\forall \phi \in C_0^{|\alpha|}(\Omega)$  abbiamo

$$\int_{\Omega} g \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f (\partial^\alpha \phi) \, dx$$

■

il concetto di derivata debole risulta quindi un'estensione a quello di derivazione classica, infatti ogni funzione di classe  $C^k$  ha  $k$ -derivata debole. Attraverso la definizione di derivata debole possiamo definire lo spazio di Sobolev  $\mathbb{H}^1(\Omega)$ :

**Definition 1.2.2** ( $\mathbb{H}^1(\Omega)$ ).

$$\mathbb{H}^1(\Omega) = \{v \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \nabla v \in \mathbb{L}^2(\Omega)\}$$

dove il gradiente è inteso nel senso della derivazione debole analogamente a come definito sopra. Questo spazio risulta essere uno spazio di Hilbert con prodotto scalare:

$$\langle v, v' \rangle_{\mathbb{H}^1(\Omega)} = \langle v, v' \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \langle \nabla v, \nabla v' \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$$

ovvero con norma indotta dal prodotto scalare:

$$\|v\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} = \|v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\nabla v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$$

inoltre possiamo definire su  $\mathbb{H}^1$  la seminorma

$$|v|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$$

che per il lemma di Poincaré è equivalente alla norma precedente. ■

Questo spazio è dunque l'insieme delle funzioni di  $L^2(\Omega)$  con derivate deboli prime (esprese tramite il gradiente) anch'esse in  $L^2(\Omega)$ . In questo spazio (o in un suo sottospazio) andremo a cercare le soluzioni deboli della formulazione variazionale.

L'idea dietro alla formulazione debole è che il problema differenziale, in quanto scritto localmente, limita troppo la regolarità della soluzione e del dato al bordo. Vogliamo perciò scriverlo in forma globale, in modo da poter considerare funzioni meno regolari, attraverso il concetto di derivata debole.

**Theorem 1.2.1** (Problema Ellittico In Forma Variazionale).

*Il problema ellittico 1.2 può essere riscritto in forma variazionale nel seguente modo:*

*Trovare  $u \in \mathbb{V} = \mathbb{H}^1(\Omega)$  tale che:*

$$\int_{\Omega} c \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla u) v \, dx + \int_{\Omega} \alpha u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in \mathbb{V} = \mathbb{H}^1(\Omega)$$

*dove  $u$  è detta soluzione debole del problema variazionale.*

*Dimostrazione*

Condideriamo l'equazione

$$-div(c \nabla u) + \beta \cdot \nabla u + \alpha u = f$$

e moltiplichiamo entrambi i membri per una funzione  $v \in C^\infty(\Omega)$ :

$$-div(c \nabla u) v + (\beta \cdot \nabla u) v + \alpha u v = f v$$

integriamo dunque su tutto il dominio  $\Omega$  rispetto alla misura di Lebesgue  $dx$  del dominio:

$$- \int_{\Omega} div(c \nabla u) v \, dx + \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla u) v \, dx + \int_{\Omega} \alpha u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx$$

consideriamo il primo integrale. Per le proprietà della divergenza se  $f$  è una funzione scalare e se  $\mathbb{F}$  è un campo vettoriale, allora vale:

$$\operatorname{div}(f\mathbb{F}) = \nabla f \cdot \mathbb{F} + f \operatorname{div}(\mathbb{F})$$

considerando dunque  $f = v$  e  $\mathbb{F} = c\nabla u$ , abbiamo

$$\operatorname{div}(vc\nabla u) = \nabla v(c\nabla u) + v \operatorname{div}(c\nabla u)$$

ovvero

$$v \operatorname{div}(c\nabla u) = \operatorname{div}(vc\nabla u) - c \nabla v \nabla u$$

sostituendo nell'integrale abbiamo

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div}(c\nabla u) v \, dx = \int_{\Omega} c \nabla v \nabla u \, dx - \int_{\Omega} \operatorname{div}(vc\nabla u) \, dx$$

possiamo quindi applicare il teorema della divergenza

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(vc\nabla u) \, dx = \int_{\partial\Omega} (vc\nabla u) \cdot \eta \, d\sigma(x)$$

dove  $\eta$  è il versore normale e  $d\sigma(x)$  è la misura superficiale dell'ipersuperficie  $(n-1)$ -dimensionale  $\partial\Omega$ <sup>2</sup>. La funzione  $u$  è però nulla sul bordo, e quindi l'integrale su  $\partial\Omega$  è nullo. Otteniamo così la forma debole:

$$\int_{\Omega} c \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla u) v \, dx + \int_{\Omega} \alpha u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx$$

dobbiamo però caratterizzare la regolarità delle funzioni  $u$ ,  $v$  e  $f$  presenti, affinché questa forma debole sia ben definita. Inanzitutto sia  $u$  che  $v$  devono avere derivata debole di ordine 1. Affinchè poi gli integrali siano definiti e convergenti, dobbiamo avere che  $u$ ,  $v$ , ed  $f$  devono essere almeno in  $L^2(\Omega)$ , così come i gradienti (intesi nel senso della derivazione debole) di  $u$  e  $v$ . Ciò implica quindi che sia  $u$  che  $v$  devono appartenere a  $\mathbb{V} = \mathbb{H}^1(\Omega)$ . Inoltre abbiamo imposto le condizioni omogenee di Dirichlet. Possiamo quindi considerare il sottospazio di funzioni di  $\mathbb{V} = \mathbb{V}_0 = \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ :

$$\mathbb{V}_0 = \mathbb{H}_0^1(\Omega) = \{ v \in \mathbb{H}^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0 \} \subset \mathbb{H}^1(\Omega)$$

da cui risulta che

- $f \in L^2(\Omega)$
- $u, v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{H}^1(\Omega)$

■

allo stesso modo si può procedere per il caso non omogeneo 1.1, dove però al bordo l'integrale non è più nullo, ma va considerato con la restrizione al bordo  $u|_{\partial\Omega} = g$ <sup>3</sup>. Si può dimostrare che nel caso non omogeneo si ottiene la forma debole :

$$\int_{\Omega} c \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla u) v \, dx + \int_{\Omega} \alpha u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\partial\Omega} g v \, dx$$

Il problema in forma debole 1.2.1, può essere espresso in forma astratta:

<sup>2</sup>La misura superficiale differisce dalla misura di Lebesgue in quanto tiene conto anche della curvatura dello spazio

<sup>3</sup>Dato che  $u \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ , non ha senso in generale l'uguaglianza a livello puntuale. Per ovviare al problema si considera la restrizione nel senso delle funzioni di traccia

**Definition 1.2.3** (Problema Astratto).

Trovare  $u \in \mathbb{V}$ , con  $\mathbb{V}$  spazio di Hilbert, tale che

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in \mathbb{V}$$

dove

- $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  è una forma bilineare
- $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  è un funzionale lineare, ovvero  $F \in \mathbb{V}'$ .

■

Nel nostro caso particolare 1.2.1 il problema astratto è formato da:

**Definition 1.2.4** (Problema ellittico astratto).

- $\mathbb{V} = \mathbb{H}^1(\Omega)$
- $a(u, v) = \int_{\Omega} c \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla u) v \, dx + \int_{\Omega} \alpha u v \, dx$
- $F(v) = \int_{\Omega} f v \, dx$

■

Il lemma di Lax-Milgram fornisce un risultato di esistenza e unicità della soluzione (debole) al problema astratto, che coincide dunque con l'esistenza e unicità della soluzione di 1.2.1 e di 1.1:

**Theorem 1.2.2** (Lax-Milgram - 1954).

*Esiste ed è unica la soluzione debole  $u \in \mathbb{V}$  di Hilbert per il problema astratto 1.2.3 se:*

- $a(u, v)$  è continua:  $a(u, v) \leq M \|u\|_{\mathbb{V}} \|v\|_{\mathbb{V}}$
- $a(u, v)$  è coerciva:  $a(v, v) \geq c \|v\|_{\mathbb{V}}^2$
- $F(v)$  è continua:  $F(v) \leq C \|v\|_{\mathbb{V}}$

Nel caso in cui  $a(u, v)$  sia anche simmetrica, tale forma è un prodotto scalare, e il lemma di Lax-Milgram deriva direttamente dal teorema di rappresentazione di Riesz.

Considerando in particolare il problema ellittico 1.2.4, abbiamo il seguente teorema di regolarità:

**Theorem 1.2.3** (Regolarità Problema Ellittico). *Affinchè valgano le ipotesi del lemma di Lax-Milgram 1.2.2, le funzioni  $c, \beta, \alpha$  caratterizzanti il problema ellittico*

$$a(u, v) = \int_{\Omega} c \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla u) v \, dx + \int_{\Omega} \alpha u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx = F(v)$$

*devono rispettare le seguenti proprietà:*

- $c(\underline{x}) \in L^{\infty}$   $c_{max} \geq c(\underline{x}) \geq c_{min} > 0$
- $\alpha(\underline{x}) \in L^2(\Omega), \beta(\underline{x}) \in C^1(\Omega)$   $\alpha - \operatorname{div} \beta = 0$
- $f(\underline{x}) \in L^2(\Omega)$

## 1.3 Metodo Galerkin

Abbiamo visto che il problema astratto 1.2.4 ammette soluzione unica se la forma bilineare  $a(u, v)$  è continua e coerciva, e se la forma lineare  $F(v)$  è continua per il lemma di Lax-Milgram 1.2.2. Non esiste però un metodo generale per trovare la soluzione esatta al problema astratto in forma chiusa su un qualunque dominio  $\Omega$  (soluzione che non è detto che sia formulabile in forma chiusa). Per risolvere il problema dobbiamo quindi tentare di stimare la soluzione esatta con una soluzione approssimata, valutandone poi l'errore di approssimazione. La principale bibliografia per questa sezione è formata da [BS07] e da [Cia78] e [Qua08].

Uno dei metodi principali che consente questo processo è quello di Galerkin <sup>4</sup>:

**Definition 1.3.1** (Metodo Galerkin).

Il metodo Galerkin consiste nell'approssimare lo spazio continuo  $\mathbb{V}$  con una famiglia di spazi  $\mathbb{V}_h$ , dipendenti da un parametro positivo  $h$ , tali che:

- $\mathbb{V}_h \subset \mathbb{V}$
- $\dim(\mathbb{V}_h) = N_h < \infty \quad \forall h > 0$  (Ovvero ogni  $\mathbb{V}_h$  è uno spazio discreto)

In questo modo possiamo riscrivere il problema astratto in forma discreta sul singolo spazio  $\mathbb{V}_h$ :

$$\text{Trovare } u_h \in \mathbb{V}_h, \text{ tale che } a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h$$

detta equazione di Galerkin. <sup>5</sup> ■

dato che  $\mathbb{V}_h \subset \mathbb{V}$ , continuano a valere le ipotesi del lemma di Lax-Milgram 1.2.2, e quindi la soluzione al problema discreto esiste ed è unica. Inoltre vale la seguente relazione tra la soluzione del problema continuo e quella del problema approssimato:

**Definition 1.3.2** (Ortogonalità Di Galerkin).

Sia  $u$  la soluzione esatta del problema continuo e sia  $u_h$  la soluzione del problema discreto. Definire l'errore  $\epsilon_h$  come

$$\epsilon_h = u - u_h$$

allora abbiamo che, sottraendo i due problemi membro a membro

$$a(u, v) - a(u_h, v_h) = f(v) - f(v_h)$$

possiamo però restringere le funzioni  $v$  allo spazio  $\mathbb{V}_h$ , ovvero considerare

$$a(u, v_h) - a(u_h, v_h) = f(v_h) - f(v_h) = 0$$

per linearità della forma  $a$  abbiamo

$$a(u, v_h) - a(u_h, v_h) = a(u - u_h, v_h) = a(\epsilon_h, v_h) = 0$$

nel caso in cui la forma  $a(\cdot, \cdot)$  sia simmetrica (ovvero è un prodotto scalare), abbiamo che l'errore  $\epsilon_h$  è ortogonale ad ogni funzione  $\forall v_h \in \mathbb{V}_h$ , e quindi è ortogonale all'intero spazio  $\mathbb{V}_h$ . ■

---

<sup>4</sup>In particolare presentiamo il cosiddetto metodo di Bubnov-Galerkin, in cui gli spazi delle funzioni test e delle soluzioni coincidono. Il caso più generale che considera spazi funzionali differenti tra funzioni test e soluzioni è dato dal metodo di Petrov-Galerkin.

<sup>5</sup>Notiamo che la forma dell'equazione non cambia tra il problema continuo e quello discreto, cambiano invece gli spazi con cui lavoriamo



E' possibile inoltre dare una stima dell'errore compiuto, attraverso il lemma di Cèa:

**Theorem 1.3.1** (Lemma di Cèa).

*L'errore compiuto con l'approssimazione tramite il problema discreto permette la seguente stima:*

$$\|u - u_h\|_{V(\Omega)} \leq \frac{M}{c} \inf_{v_h \in V_h(\Omega)} \|u - v_h\|_{V(\Omega)}$$

dove  $M$  è la costante della continuità e  $c$  quella della coercività di  $a(\cdot, \cdot)$ . ■

L'approssimazione tramite lo spazio  $V_h$  consente inoltre di trasformare il problema continuo in un sistema lineare di equazioni. Dato che lo spazio  $V_h$  è un sottospazio vettoriale finito, possiamo considerarne una base

$$\bar{\phi} = \{\phi_i\} \quad i = 1, \dots, n = \dim V_h$$

e quindi possiamo sviluppare la funzione  $u_h$  rispetto ad essa:

$$u_h = \sum_{j=1}^n u_j \phi_j$$

è inoltre possibile dimostrare che l'approssimazione vale anche considerando il problema solo riferito alle basi<sup>6</sup>, ovvero sostituendo alle funzioni  $v_h$  le funzioni di base  $\phi_i$

$$a \left( \sum_{j=1}^n u_j \phi_j, \phi_i \right) = F(\phi_i)$$

Sfruttando la linearità di  $a(\cdot, \cdot)$  otteniamo:

$$\sum_{j=1}^n u_j a(\phi_j, \phi_i) = F(\phi_i)$$

e sommando su tutte le funzioni di base (ovvero rispetto all'indice  $i$ ):

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_j a(\phi_j, \phi_i) = \sum_{i=1}^n F(\phi_i)$$

ovvero abbiamo ridotto il problema ad un sistema lineare di equazioni, definendo dunque il problema astratto discreto in forma matriciale:

**Definition 1.3.3** (Problema Astratto Discreto In Forma Matriciale).

Trovare  $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$  tale che

$$K_h \underline{u} = \underline{f}$$

dove abbiamo definito la matrice di stiffness  $K_h$  e il vettore termine noto  $\underline{f}$  come:

$$(K_h)_{i,j} = a(\phi_j, \phi_i) \quad (\underline{f})_i = F(\phi_i)$$

■

Nel caso particolare del problema ellittico astratto 1.2.4 abbiamo la matrice di stiffness

$$(K_h)_{i,j} = a(\phi_j, \phi_i) = \int_{\Omega} c \nabla \phi_j \nabla \phi_i \, dx + \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla \phi_j) \phi_i \, dx + \int_{\Omega} \alpha \phi_j \phi_i \, dx$$

e il vettore termine noto:

$$(\underline{f})_i = F(\phi_i) = \int_{\Omega} f \phi_i \, dx$$

---

<sup>6</sup>Questo in quanto possiamo scrivere ogni funzione  $v_h$  dello spazio  $V_h$  come combinazione lineare delle basi

## 1.4 Approssimazione Con Elementi Finiti (Lagrangiani)

Il metodo di Galerkin fornisce l'idea di approssimare il problema continuo con quello discreto, ma non da vincoli su come fare questa approssimazione. Gli elementi finiti sono un metodo di Galerkin in cui l'approssimazione viene fatta considerando polinomi su elementi di una partizione (poligonale) del dominio. I testi di riferimento sono [BS07] e da [Cia78] e [Qua08]. In particolare lavoriamo in questa sezione considerando per semplicità un dominio  $\Omega \in \mathbb{R}^2$ , con l'ovvia estensione al caso in più di due dimensioni. Il fondamento del metodo agli elementi finiti è di costruire lo spazio discreto  $\mathbb{V}_h$  tramite funzioni polinomiali da considerare sugli elementi di una mesh rappresentante  $\Omega$ .

L'idea di costruire una mesh per il dominio  $\Omega$  si basa sul concetto topologico di complesso simpliciale euclideo [FP13, Capitolo 2], che nel caso particolare bidimensionale permette di considerare la scomposizione di un dominio poligonale in un numero finito di triangoli (e quindi fare una triangolazione del dominio) seguendo le due seguenti proprietà:

- Un vertice di un triangolo  $\mathbb{T}_i$  può essere un punto di un qualsiasi altro triangolo  $\mathbb{T}_j$  solo se è un vertice dell'altro triangolo. Questo impedisce che un triangolo abbia un vertice nel lato di un'altro (ovvero impone la conformità dei triangoli).
- Se l'intersezione degli interni di due triangoli non è vuota, allora i due triangoli devono coincidere. Questa proprietà serve ad escludere triangoli uno interno all'altro o incastonati.

Nel seguito del paragrafo ci riferiremo per semplicità a domini poligonali, in particolare al quadrato di lato unitario con un vertice nell'origine e con due lati sugli assi  $x$  e  $y$ . Nel caso più generale in cui il dominio non sia poligonale, bisognerà trovare delle tecniche di approssimazione per poter comunque generare una sua triangolazione e quindi crearne una mesh.<sup>7</sup> Definiamo dunque un elemento finito:

**Definition 1.4.1** (Elemento Finito).

Definiamo un elemento finito come una terna  $(\mathbb{T}, \mathbb{P}, \Sigma)$ , dove:

- $\mathbb{T}$  è l'insieme dei triangoli della mesh sul dominio  $\Omega$ , ovvero è il complesso simpliciale associato<sup>8</sup> al dominio  $\Omega$ .
- $\mathbb{P}$  è lo spazio locale che utilizziamo per l'approssimazione.
- $\Sigma$  è l'insieme dei gradi di libertà  $\Sigma = \{\Sigma_i : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineare}\}_{i=1}^{dim \mathbb{P}}$

■

Attraverso gli elementi finiti possiamo costruire lo spazio  $\mathbb{V}_h$  come il sottoinsieme di  $\mathbb{V}$  tale che i suoi elementi siano localmente (ovvero su ogni triangolo) esprimibili come elementi dello spazio  $\mathbb{P}$  e soddisfacenti alcune condizioni ulteriori per garantire la regolarità del problema discreto così formulato. In particolare considereremo in seguito elementi così definiti:

**Definition 1.4.2** (Elementi Finiti Polinomiali).

Considereremo come spazio locale di approssimazione  $\mathbb{P} = \mathbb{P}_k(T)$ , ovvero lo spazio dei polinomi di grado  $k$  sull'elemento  $T$ , mentre definiamo lo spazio  $\mathbb{V}_h$  come:

$$\mathbb{V}_h = \{ v \in \mathbb{H}_g^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = g, v|_T \in \mathbb{P}_k(T) \ \forall T \in \mathbb{T} \} \subset \mathbb{H}_g^1(\Omega) = \mathbb{V}$$

<sup>7</sup>Questo si basa sull'idea di varietà triangolabile, ovvero omeomorfa ad un poliedro [FP13, Chapter 5]. A livello pratico ciò può essere fatto ad esempio con il metodo isoparametrico [Len86] o con l'analisi isogeometrica che si interfaccia alla progettazione CAD [CHB09]

<sup>8</sup>Non è unico, ma allo stesso dominio  $\Omega$  possiamo associare più complessi simpliciali

Avremo poi in generale un numero  $N$  gradi di libertà, definito come

$$N = \dim(\mathbb{P}_k(\Omega)) = \binom{n+k}{k} = \frac{(n+k)!}{k! \cdot (n!)}$$

dove  $n$  è la dimensione dello spazio  $\Omega$ . Nel nostro caso particolare  $n = 2$ , e quindi sui triangoli avremo per i polinomi di grado  $k$  un numero di gradi di libertà pari a:

$$N = \dim(\mathbb{P}_k(T)) = \binom{2+k}{k} = \frac{(2+k)!}{k! \cdot (2!)} = \frac{(2+k) \cdot (1+k) \cdot k!}{2 \cdot k!} = \frac{(k+2) \cdot (k+1)}{2}$$

■

Per ricondurci alla definizione data del metodo di Galerkin 1.3.1, si considera una famiglia di spazi  $\mathbb{V}_h$  analoghi alla definizione appena data e dipendenti dal parametro positivo  $h$  che rappresenta il diametro massimo dei triangoli della mesh. In particolare il metodo agli elementi finiti in versione  $h$  consiste nel far tendere questo diametro a zero per riottenere il problema continuo. Quello che si fa nella pratica è un'analisi a posteriori dell'errore, nella quale si fissa una certa tolleranza sull'errore compiuto e si usa una versione adattiva del metodo, ovvero si varia automaticamente il parametro  $h$  (e quindi si raffina la partizione) per ottenere una soluzione approssimata con la precisione richiesta. Altre varianti sono possibili, quali il metodo  $p$  [BSK81], in cui la triangolazione è fissata, ma si usano polinomi di grado  $p$  crescente o il metodo  $hp$  [BS94] che usa una fusione tra i metodi due metodi  $h$  e  $p$ .

Definiamo ora una base per questo spazio  $\mathbb{V}_h$  come definito in 1.4.2, in modo da poter esplicitare il problema ellittico debole in forma matriciale 1.3:

**Definition 1.4.3** (Base di Lagrange).

Definiamo la base di Lagrange  $\phi_i$  per lo spazio  $\mathbb{V}_h$  in corrispondenza del nodo libero  $v_j$  come alla funzione:

$$\phi_i(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

In particolare notiamo che il supporto della funzione  $\phi_i$  è formata dai triangoli che circondano il vertice  $v_i$ . ■

Usando questa base, la risultante matrice di stiffness  $K_h$  oltre ad essere definita positiva<sup>9</sup>, risulta essere anche una matrice sparsa<sup>10</sup>. Ciò permette da un lato di ridurre le dimensioni in memoria della matrice e dall'altro di usare metodi appositi per la risoluzione di sistemi lineari con matrice associata sparsa, quali il gradiente coniugato o l'uso di preconditionatori [Saa03].

Definiamo dunque il problema astratto discreto agli elementi finiti come al caso particolare del problema astratto discreto in forma matriciale 1.3.3 dove consideriamo come basi le basi di Lagrange 1.4.3 e gli spazi così come definiti nel caso degli elementi finiti polinomiali 1.4.2. In modo analogo definiamo il problema agli elementi finiti che approssima il problema ellittico in forma debole 1.2.1.

---

<sup>9</sup>Fatto che vale per ogni base

<sup>10</sup>Che invece vale in particolare per questa base ma non in generale

## 1.5 Stime Teoriche Errori

Raccogliamo in questa sezione varie stime per l'errore compiuto nell'approssimazione agli elementi finiti per il problema ellittico 1.2.1. Inanzitutto ricordiamo il lemma di Cea 1.3.1 per la stima dell'errore compiuto da un generico metodo Galerkin 1.3.1 (e quindi valido per problemi più generali del nostro problema ellittico):

$$\| u - u_h \|_{V(\Omega)} \leq \frac{M}{c} \inf_{v_h \in V_h(\Omega)} \| u - v_h \|_{V(\Omega)}$$

dove  $M$  è la costante della continuità e  $c$  quella della coercività di  $a(\cdot, \cdot)$ . Vogliamo però dare delle stime dell'errore compiuto dall'approssimazione agli elementi finiti in varie norme. In particolare vogliamo stimare l'errore  $u - u_h$  in norma  $L^2(\Omega)$

$$\| u - u_h \|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (u - u_h)^2 dx$$

e in norma  $H^1$ :

$$\| u - u_h \|_{H^1(\Omega)}^2 = \| u - u_h \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| u - u_h \|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (u - u_h)^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla(u - u_h)|^2 dx$$

### 1.5.1 Errore $H^1$

Iniziamo dall'errore in norma  $H^1$ . Vale la seguente stima:

**Theorem 1.5.1** (Stima Errore  $H^1(\Omega)$ ).

$$\| u - u_h \|_{H^1(\Omega)} \leq C h^k \| u \|_{H^{k+1}(\Omega)}$$

Per dimostrare questa stima si usa il seguente lemma:

**Lemma 1.5.1.** *Sia  $v \in V$  e sia  $T \in \mathbb{T}$  un qualunque elemento della triangolazione del dominio  $\Omega$ . Allora se  $\Pi$  è un proiettore da  $V$  a  $V_h \subset V$ , si ha la seguente stima:*

$$\| v - \Pi v_h \|_{m,T} \leq C \frac{h_T^{k+1}}{\rho_T^m} \| v \|_{k+1,T}$$

dove

- $0 \leq m \leq k+1$ .
- $h_T$  è il diametro del triangolo  $T$ .
- $\rho_T$  è il diametro del cerchio inscritto al triangolo  $T$ .

Possiamo ora dimostrare il teorema:

*Dimostrazione Teorema 1.5.1*

Applichiamo il lemma con  $m = 1$  e  $v = u$ :

$$\| u - \Pi u_h \|_{H^1(T)} \leq C \frac{h_T^{k+1}}{\rho_T} \| u \|_{H^{k+1}(T)}$$

supponiamo che la mesh sia shape regular, ovvero che  $h_T \approx \rho_T$ :

$$\| u - \Pi u_h \|_{\mathbb{H}^1(T)} \leq C h_T^k | u |_{\mathbb{H}^{k+1}(T)}$$

inoltre per le proprietà dei proiettori abbiamo  $\Pi u_h = u_h \forall u_h \in \mathbb{V}_h$ , da cui

$$\| u - u_h \|_{\mathbb{H}^1(T)} \leq C h_T^k | u |_{\mathbb{H}^{k+1}(T)}$$

consideriamo ora l'errore in norma  $\mathbb{H}^1(\Omega)$  e spezziamolo sui singoli triangoli della mesh (supponendo di assimilare tutte le costanti):

$$\| u - u_h \|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}^2 \leq C \sum_{T \in \mathbb{T}} \| u - u_h \|_{\mathbb{H}^1(T)}^2$$

appliciamo ora la disuguaglianza ottenuta dal lemma:

$$\| u - u_h \|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}^2 \leq C \sum_{T \in \mathbb{T}} (h_T^k | u |_{\mathbb{H}^{k+1}(T)})^2$$

sia ora  $h$  il massimo tra tutti gli  $h_T$ , allora sempre assimilando le costanti otteniamo

$$\| u - u_h \|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}^2 \leq C h^{2k} | u |_{\mathbb{H}^{k+1}(\Omega)}^2$$

da cui prendendo la radice quadrata di ambo i membri otteniamo il risultato voluto:

$$\| u - u_h \|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \leq C h^k | u |_{\mathbb{H}^{k+1}(\Omega)}$$

■

### 1.5.2 Errore $L^2$

Passiamo alla norma  $L^2(\Omega)$ . Per darne una stima si usa il cosiddetto argomento di dualità di Aubin-Nitzche<sup>11</sup>. Definiamo quindi il problema duale:

**Definition 1.5.1** (Problema Duale).

Dato il problema primale (ovvero il problema astratto 1.2.3):

$$u \in \mathbb{V} : \quad a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in \mathbb{V}$$

definiamo l'associato problema duale come

$$u \in \mathbb{V} : \quad a(v, u) = F(u) \quad \forall v \in \mathbb{V}$$

Notiamo che il problema duale coincide con quello primale se la forma bilineare  $\alpha(\cdot, \cdot)$  è simmetrica. Inoltre se il problema primale ammette soluzione unica (per Lax-Milgram 1.2.2), lo stesso vale per il problema duale. Tramite il problema duale (considerando l'errore come termine noto del problema duale) è possibile dimostrare la seguente stima per l'errore in  $L^2(\Omega)$ :

**Theorem 1.5.2** (Stima Errore  $L^2(\Omega)$ ).

$$\| u - u_h \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C h^{k+1} | u |_{\mathbb{H}^{k+1}(\Omega)}$$

---

<sup>11</sup>Tecniche di dualità vengono usate per trattare agevolmente problemi vincolati [?]

# Chapter 2

## Calcolo Con Elemento Di Riferimento

### 2.1 Introduzione

In questo capitolo mostriamo come fare esplicitamente il calcolo della soluzione approssimata tramite gli elementi finiti. Quello che andiamo a risolvere è dunque il problema 1.3.3 rappresentato dal seguente sistema lineare

$$K_h \underline{u} = \underline{f}$$

che scritto esplicitamente rispetto alla definizione del problema ellittico in forma astratta 1.2.4 porta a dover calcolare

$$\int_{\Omega} c \nabla \phi_j \nabla \phi_i \, dx + \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla \phi_j) \phi_i \, dx + \int_{\Omega} \alpha \phi_j \phi_i \, dx = \int_{\Omega} f \phi_i \, dx$$

dove  $\phi$  è la base di Lagrange 1.4.3 mentre  $c, \beta, \alpha$  e  $f$  sono i dati del problema.

Dato che la base di Lagrange  $\phi_i$  ha supporto compatto formato dai vertici  $j$  vicini al vertice  $i$  (ovvero appartenenti ai triangoli adiacenti a quello in cui è contenuto  $i$ ), possiamo limitarci a fare il calcolo su ogni singolo triangolo considerando che solo i termini con vertici  $i, j$  appartenente al triangolo corrente risultano non zero, per poi sommare nella matrice  $K_h$  tutti i contributi <sup>1</sup>. Scomponiamo quindi la matrice di stiffness  $K_h$  1.3 in una somma matrici elementari  $K_h^T$  tali che:

$$(K_h)_{ij} = \sum_{T \in \mathbb{T}} (K_h^T)_{ij} = \sum_{T \in \mathbb{T}} \left( \int_T c \nabla \phi_j \nabla \phi_i \, dx + \int_T (\beta \cdot \nabla \phi_j) \phi_i \, dx + \int_T \alpha \phi_j \phi_i \, dx \right)$$

Allo stesso modo facciamo per il termine noto:

$$(f)_i = \sum_{T \in \mathbb{T}} (f^T)_i = \sum_{T \in \mathbb{T}} \int_T f \phi_i \, dx$$

Consideriamo dunque  $\forall T \in \mathbb{T}$  il problema:

$$\int_T c \nabla \phi_j \nabla \phi_i \, dx + \int_T (\beta \cdot \nabla \phi_j) \phi_i \, dx + \int_T \alpha \phi_j \phi_i \, dx = \int_T f \phi_i \, dx$$

Affrontiamo subito il problema delle condizioni al bordo. Nei vertici di bordo sappiamo già il valore della soluzione  $u$ , che corrisponde al valore del dato al bordo  $g$  calcolato

---

<sup>1</sup>Questo risultato è legato strettamente al fatto che la matrice  $K_h$  sia sparsa

nel vertice. Sfruttando l'idea insita nella forma del problema debole non omogeneo 1.2 in cui abbiamo il termine di bordo associato al termine noto, possiamo semplicemente restringere la matrice  $K_h$  e i vettori  $\underline{u}$  e  $\underline{f}$  ai nodi interni, aggiungendo poi in seguito i valori sui nodi di bordo, dove consideriamo per i nodi  $x_i$  di bordo:

$$(\underline{u})_i = g(x_i)$$

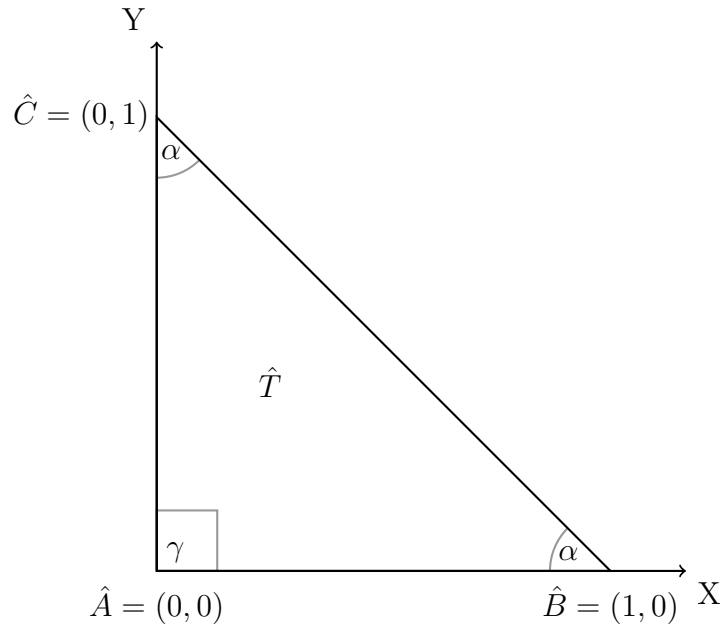
ovvero consideriamo i valori del dato al bordo  $g$  nei singoli nodi.

Definiamo dunque la matrice  $A_h$  di dimensioni  $NL \times NL$  e il vettore  $\underline{b} \in R^{NL}$ , con  $NL$  numero di nodi liberi (ovvero non di bordo), come:

$$(A_h)_{i,j} = (K_h)_{i,j} \quad (\underline{b})_i = (\underline{f})_i$$

## 2.2 Elemento di riferimento

Dato che i triangoli della mesh hanno la sola restrizione di verificare le proprietà 1.4 date per la triangolazione<sup>2</sup>, impostare un calcolo automatico su ogni triangolo potrebbe essere difficile da gestire (ancor di più se si passa a tre o più dimensioni). E' dunque comodo trasportare i calcoli su un elemento triangolare di riferimento  $\hat{T}$ , definito come il triangolo rettangolo isoscele con il vertice sottostante all'angolo rettangolo nell'origine del sistema di riferimento e gli altri due lati (presi unitari) disposti sugli assi. Questo triangolo di riferimento avrà area  $|\hat{T}| = \frac{1}{2}$ .



Per passare dall'elemento di riferimento  $\hat{T}$  ad un qualunque altro elemento  $T \in \mathbb{T}$ , consideriamo una funzione affine e invertibile  $F : \hat{T} \rightarrow T$ , definita come:

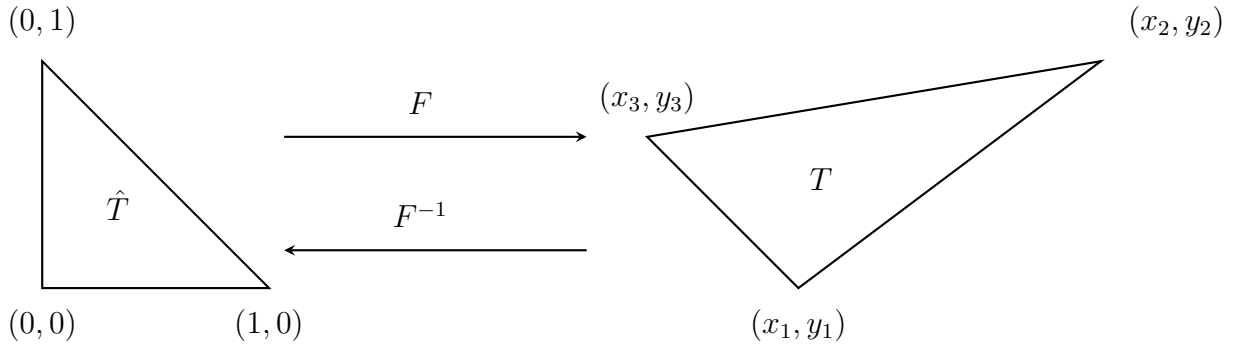
$$F(\underline{\hat{x}}) = B\underline{\hat{x}} + b = \underline{x} \quad \underline{x} = (x, y) \quad \underline{\hat{x}} = (\hat{x}, \hat{y})$$

ovvero

$$F(\underline{\hat{x}}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \hat{x} + \beta_1 \hat{y} + \gamma_1 \\ \alpha_2 \hat{x} + \beta_2 \hat{y} + \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

<sup>2</sup>Nelle analisi della convergenza si suppone di lavorare con mesh *Shape Regular*, ovvero si suppone che i triangoli non abbiano un diametro molto maggiore del diametro del cerchio inscritto in essi, ovvero non si accettano triangoli degeneri con angoli molto piccoli (Ad esempio a livello pratico si è visto che un limite di 20 gradi è sufficiente per ottenere una buona qualità delle mesh).

dove per convenzione consideriamo le quantità con il cappuccio quelle appartenenti al triangolo di riferimento  $\hat{T}$  e quella senza come appartenenti al triangolo generico  $T$ . La situazione è rappresentata dal seguente diagramma:



Imponiamo inoltre la condizione secondo cui i vertici vengono mappati nei vertici, ovvero:

$$F(0, 0) = (x_1, y_1) \quad F(1, 0) = (x_2, y_2) \quad F(0, 1) = (x_3, y_3)$$

che permette di calcolare i coefficienti presenti nella definizione della funzione  $F$ :

$$F(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

notiamo che la matrice altro non è che la matrice Jacobiana di  $F$  (essendo affine), da cui possiamo riscrivere  $F$  come:

$$F(\hat{x}, \hat{y}) = \mathbb{J}_f \hat{\underline{x}} + \underline{b}$$

Da questa relazione possiamo calcolare in modo geometrico il determinante della matrice Jacobiana legandolo all'area  $|T|$  del triangolo (in quanto la trasformazione è affine):

$$2|T| = 2 \int_T 1 dx = 2 \int_{\hat{T}} \det \mathbb{J}_f d\hat{x} = 2 \det \mathbb{J}_f \int_{\hat{T}} 1 d\hat{x} = 2 \det \mathbb{J}_f |\hat{T}| = 2 \frac{1}{2} \det \mathbb{J}_f = \det \mathbb{J}_f$$

Attraverso la funzione  $F$  e la sua inversa  $F^{-1}$  possiamo poi trasportare funzioni a valori reali su  $T$  a funzioni reali su  $\hat{T}$ , tramite l'operazione di composizione. In particolare consideriamo le funzioni di base. Dato che la funzione  $F$  è affine, l'orientazione dei nodi rimane la stessa, e quindi abbiamo

$$F(\hat{N}_i) = N_i \quad N_i : \text{Nodo Su } T \quad \hat{N}_i : \text{Nodo Su } \hat{T}$$

da cui abbiamo che per le funzioni di base vale

$$(\phi_i \circ F)(\hat{N}_j) = \phi_i(F(\hat{N}_j)) = \phi_i(N_j) = \delta_{ij} = \hat{\phi}_i(\hat{N}_j)$$

ovvero

$$\phi_i \circ F = \hat{\phi}_i \quad \hat{\phi}_i \circ F^{-1} = \phi_i$$

una volta trovate le relazioni che legano le funzioni di base tra l'elemento generico  $T$  e l'elemento di riferimento  $\hat{T}$ , possiamo trasportare tutti i calcoli sull'elemento di riferimento.



## 2.3 Termine Noto

Calcoliamo in questa sezione il termine noto del problema ellittico 1.3 sul triangolo di riferimento, applicando le relazioni 2.2 trovate per le basi:

$$\int_T f(x) \phi_i(x) dx = \int_{\hat{T}} f(x) \hat{\phi}_i(F^{-1}(x)) dx$$

facciamo il cambio di variabili

$$x = F(\hat{x}) \quad dx = \det J_F d\hat{x} = 2 |T| d\hat{x}$$

da cui otteniamo

$$\int_T f(x) \phi_i(x) dx = 2 |T| \int_{\hat{T}} f(F(\hat{x})) \hat{\phi}_i(\hat{x}) d\hat{x}$$

questa ultima formula non è in generale calcolabile esplicitamente. Dobbiamo dunque approssimarla con una formula di quadratura [QSS08, , Capitolo 8], del tipo:

$$\int_{\hat{T}} \Psi d\hat{x} \approx \sum_{q=1}^{NQ} \Psi(x_q^Q) \cdot \hat{w}_q$$

dove abbiamo

- Nodi di quadratura:  $x_q^Q \in \{x_1^Q, x_2^Q, \dots, x_{NQ}^Q\} \quad x_q^Q \in \mathbb{R}^n$
- Pesi:  $\hat{w}_q \in \{\hat{w}_1, \hat{w}_2, \dots, \hat{w}_{NQ}\} \quad \hat{w}_q \in \mathbb{R}$

Nel nostro caso particolare abbiamo dunque

$$\int_T f(x) \phi_i(x) dx \approx 2 |T| \int_{\hat{T}} f(F(\hat{x})) \hat{\phi}_i(\hat{x}) d\hat{x} \approx 2 |T| \sum_{q=1}^{NQ} f(F(x_q^Q)) \cdot \hat{\phi}_i(x_q^Q) \cdot \hat{w}_q$$

## 2.4 Termini Equazione Ellittica

Allo stesso modo del calcolo del termine noto, possiamo calcolare gli altri termini dell'equazione ellittica. In particolare il punto che necessita una discussione più approfondita è il calcolo del gradiente delle funzioni di base, presente sia nel termine di diffusione che in quello di avvezione. Abbiamo visto che vale la relazione 2.2:

$$\phi_i(x) = \hat{\phi}_i(F^{-1}(x))$$

da cui, ribattezzando  $F^{-1}$  come  $G = [G_1, G_2]'$ , abbiamo che il gradiente di  $\phi_i$  è riscrivibile in funzione del gradiente delle funzioni di base sull'elemento di riferimento:

$$\nabla \phi_i(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x} & \frac{\partial G_1}{\partial y} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} & \frac{\partial G_2}{\partial y} \end{bmatrix} \nabla \hat{\phi}_i(G_1(x, y), G_2(x, y))$$

ovvero, dato che

$$J_G^T = J_{F^{-1}}^T = J_F^{-T}$$

allora possiamo scrivere infine

$$\nabla \phi_i(x, y) = J_F^{-T} \nabla \hat{\phi}_i(G_1(x, y), G_2(x, y))$$

Con questa relazione possiamo approssimare i vari termini del problema ellittico su ogni elemento della triangolazione:

- Termine di Diffusione

$$\int_T c \nabla \phi_j \nabla \phi_i dx \approx 2 |T| \sum_{q=1}^{NQ} c(F(x_q^Q)) \cdot J_F^{-T} \nabla \hat{\phi}_j(x_q^Q) \cdot J_F^{-T} \nabla \hat{\phi}_i(x_q^Q) \cdot \hat{w}_q$$

- Termine di Avezione

$$\int_T (\beta \cdot \nabla \phi_j) \phi_i dx \approx 2 |T| \sum_{q=1}^{NQ} \beta(F(x_q^Q)) \cdot J_F^{-T} \nabla \hat{\phi}_j(x_q^Q) \cdot \hat{\phi}_i(x_q^Q) \cdot \hat{w}_q$$

- Termine di Reazione

$$\int_T \alpha \phi_j \phi_i dx \approx 2 |T| \sum_{q=1}^{NQ} a(F(x_q^Q)) \cdot \hat{\phi}_j(x_q^Q) \cdot \hat{\phi}_i(x_q^Q) \cdot \hat{w}_q$$

riportiamo ora il codice Matlab che implementa questi calcoli su un triangolo generico della mesh:

Listing 2.1: Termini Problemi Ellittico

```
% Actual Matrix KE Computation Loop
for i=1:6
    for j=1:i-1 % Loop That Use Matrix Symmetry To Halve The
                  Computations
        KE(i,j) = KE(j,i);
    end
    for j = i:6
        for q=1:Nq
            % Image on T (current triangle) Of The Quadrature Node
            % tmp = (xq, yq) = (xhq(q), yhq(q))
            % On The Riferiment Element
            tmp = JF*[xhq(q); yhq(q)] + [x1; y1];
            xq = tmp(1); % Quadrature Node X Coordinate
            yq = tmp(2); % Quadrature Node Y Coordinate
            % Diffusive term (Second Order)
            % c * grad phi(j,q) ** grad phi (i,q) * whq(q)
            diffusive = c(xq,yq)*dot(JFIT*[gphihqx(j,q);...
                                                gphihqy(j,q)],...
                                      JFIT*[gphihqx(i,q);...
                                      gphihqy(i,q)]...
                                      )*whq(q);

            % Reactive Term (First Order)
            % beta ** grad phi(j,q) * phi (i,q) * whq(q)
            [b1, b2] = beta(xq,yq);
            transport = dot([b1; b2], ...
                            JFIT*[gphihqx(j,q); gphihqy(j,q)]...
                            )*phihq(i,q)*whq(q);

            % Transport Term (Zeroth Order)
            % alpha * phi(j,q) * phi (i,q) * whq(q)
            reaction = alpha(xq,yq)*(phihq(j,q)*phihq(i,q))*whq(q);
            % KE(i,j) Sum Update With All Three Terms
            KE(i,j) = KE(i,j) + diffusive + transport + reaction;
        end
    end
    KE(i,j) = 2*area*KE(i,j);
end
end
```

## 2.5 Calcolo Errori

Analogamente ai termini dell'equazione, possiamo anche calcolare gli errori tramite l'elemento di riferimento. Abbiamo infatti nel caso  $L^2$

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |u - u_h|^2 dx = \sum_{T \in \mathbb{T}} \int_T |u - u_h|^2 dx$$

consideriamo ora lo sviluppo sulla base di  $u_h$  e passiamo all'elemento di riferimento:

$$= \sum_{T \in \mathbb{T}} \int_T |u(x) - \sum_{i=1}^n u_h^i \phi_i(x)|^2 dx = \sum_{T \in \mathbb{T}} 2|T| \int_{\hat{T}} |u(F(\hat{x})) - \sum_{i=1}^n \hat{u}_h^i \hat{\phi}_i(\hat{x})|^2 d\hat{x}$$

applicando infine la formula di quadratura otteniamo:

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{T \in \mathbb{T}} 2|T| \cdot \sum_{q=1}^{N_q} |u(F(x_q^Q)) - \sum_{i=1}^n \hat{u}_h^i \hat{\phi}_i(x_q^Q)|^2 \cdot \hat{w}_q$$

mentre nel caso  $\mathbb{H}^1$ , dato che per definizione di norma  $\mathbb{H}^1(\Omega)$ :

$$\|u - u_h\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}^2 = \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

dobbiamo stimare solo il secondo termine, dato che il primo rientra nel caso precedente. Si ha dunque, con calcoli analoghi al caso  $L^2$ :

$$\begin{aligned} \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} |\nabla(u - u_h)|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla u_h|^2 dx \\ &= \sum_{T \in \mathbb{T}} \int_T |\nabla u - \nabla u_h|^2 dx = \sum_{T \in \mathbb{T}} \int_T |\nabla u(x) - \sum_{i=1}^n u_h^i \nabla \phi_i(x)|^2 dx \\ &= \sum_{T \in \mathbb{T}} 2|T| \int_{\hat{T}} |\nabla u(F(\hat{x})) - \sum_{i=1}^n J_F^{-T} \hat{u}_h^i \nabla \hat{\phi}_i(\hat{x})|^2 d\hat{x} \\ &= \sum_{T \in \mathbb{T}} 2|T| \cdot \sum_{q=1}^{N_q} |\nabla u(F(x_q^Q)) - \sum_{i=1}^n J_F^{-T} \hat{u}_h^i \nabla \hat{\phi}_i(x_q^Q)|^2 \cdot \hat{w}_q \end{aligned}$$

Riportiamo dunque il codice Matlab per il calcolo dell'errore  $L^2$  e in  $\mathbb{H}^1$ :

Listing 2.2: Errore  $L^2$  e  $\mathbb{H}^1$

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% L2 and H1 Error Computation
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

if (strcmp(exact_solution, 'yes'))
    if (strcmp(out, 'yes'))
        disp('--- L2 and H1 Error Computation ---');
    end

    % (xhq, yhq) Quadrature's Nodes
    % whq = pesi
    [xhq, yhq, whq] = quadrature(fdq);

    % Basis Function Computed On The Quadrature Nodes Of The Riferement
    Element
```

```

Nq = length(xhq); % Number Of Quadrature Nodes
phi_hq = zeros(6,Nq); % Phi_hq Definition
grad_phi_hq = zeros(6,Nq); % Grad_phi_hq Definition
grad_phi_hq = zeros(6,Nq); % Grad_phi_hq Definition

% Basis Functions Computation Loop
for i=1:6
    for q=1:Nq
        phi_hq(i,q) = phi_h2(i,xhq(q),yhq(q));
    end
end

% L2 Error Variable
errL2sq = 0;

% H1 Error Variable
errH1sq = 0;

% Actual Errors Computation
% Works By Computing The Global Errors As A Summation
% Of The Errors On Every Triangle
for iele=1:nele

% Acquire Informations From The iele Elements

    % Vertices Acquisition
    v1 = vertices(iele,1);
    v2 = vertices(iele,2);
    v3 = vertices(iele,3);

    % Vertex 1 Coordinates
    x1 = xv(v1);
    y1 = yv(v1);

    % Vertex 2 Coordinates
    x2 = xv(v2);
    y2 = yv(v2);

    % Vertex 3 Coordinates
    x3 = xv(v3);
    y3 = yv(v3);

% Jacobian Matrix Computation

    % F Jacobian
    JF = [x2-x1    x3-x1
          y2-y1    y3-y1];

    % F Jacobian Inverse
    JFI = inv(JF);

    % F Jacobian Inverse Transposed
    JFIT = JFI';

    % Single Element Area (Triangle's Area)
    area = (1/2)*det(JF);

% Recover Triangle's Edges
    l1 = edges(iele,1); % First Edge
    l2 = edges(iele,2); % Second Edge

```

```

13 = edges(iele,3); % Third Edge

% Global Degrees Of Freedom

% Vertex i ---> i
% Edge i ---> nver
% This row-array holds the current triangle's Global Degrees Of
Freedom
dofg = [v1 v2 v3 (nver+11) (nver+12) (nver+13)];

% Recover the uT coefficients
uT = uh(dofg);

% Tmp variables to hold the element result
sqL2 = 0;
sqH1 = 0;

% Computation Over Weighting Nodes
for q=1:Nq
    % Compute the u_h expansion over the \hat{\phi}(i)
    tmpL2_1 = 0;
    tmpH1 = [0; 0];
    for i=1:6
        tmpL2_1 = tmpL2_1 + uT(i)*phihq(i,q);
        tmpH1 = tmpH1 + JFIT*uT(i)*[gphihqx(i,q); gphihgy(i,q)];
    end
    % Error Computation
    tmpL2_2 = JF*[xhq(q); yhq(q)] + [x1; y1];
    xq = tmpL2_2(1);
    yq = tmpL2_2(2);
    sqL2 = sqL2 + (ue(xq,yq) - tmpL2_1)^2 * whq(q);
    [uegx, uegy] = ueGrad(xq,yq);
    sqH1 = sqH1 + (norm([uegx; uegy] - tmpH1)^2)*whq(q);
end

sqL2 = 2*area*sqL2;
sqH1 = 2*area*sqH1;

% L2 Error On The Element (Squared)
errL2sq = errL2sq + sqL2;

% H1 Error On The Element (Squared)
% ErrH1 = errL2(u) + errL2(grad u)
errH1sq = errH1sq + errL2sq + sqH1;

end

% Final L2 Error Computation
errL2 = sqrt(errL2sq);

% Final H1 Error Computation
errH1 = sqrt(errH1sq);

if (strcmp(out, 'yes'))
    disp(['      L2 Error: ' num2str(errL2)]);
    disp(['      H1 Error: ' num2str(errH1)]);
end
end
end

```

# Chapter 3

## Esperimenti Numerici

Consideriamo in questo capitolo un confronto tra soluzione esatta e soluzione approssimata per verificare a livello pratico i risultati teorici di convergenza rispetto al parametro geometrico  $h$  della specifica mesh. Vogliamo mostrare che l'errore  $L^2$  va come  $\mathcal{O}(h^3)$ , mentre l'errore  $H^1$  va come  $\mathcal{O}(h^2)$ .

Per le mesh uniformi usiamo una successione di triangolazioni tali che  $N$  vari tra 5 e 15. Usiamo invece il seguente parametro d'area  $h$  per le mesh non uniformi generate da Triangle:

$$h = [0.005 \quad - \quad 0.01 \quad - \quad 0.05 \quad - \quad 0.15 \quad - \quad 0.25]$$

### 3.1 Prima Equazione

Consideriamo dunque la seguente soluzione esatta:

$$u_e = e^{x^2+y^2} \cdot \sin(y)$$

e quindi i coefficienti:

$$c = e^{x+y} + 5 \quad \beta = [-x, y] \quad a = x^2 \cdot y^2 + 15$$

e risolviamo l'equazione associata tramite gli elementi finiti di ordine  $k = 2$  usando una formula di quadratura di ordine 3.

#### 3.1.1 Mesh Uniforme

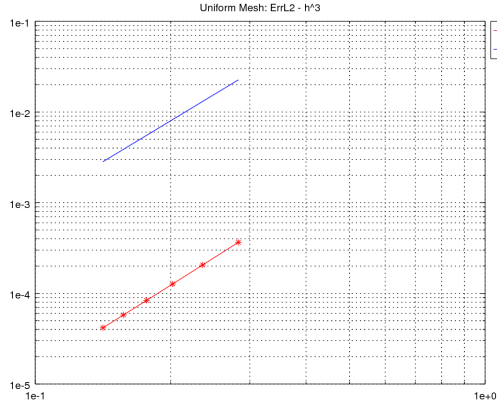
Partiamo da mesh uniformi. Otteniamo i seguenti errori:

ErrL2	0.00036557	0.0002059	0.00012683	8.3492e-05	5.7831e-05	4.1695e-05
ErrH1	0.36489	0.25431	0.18728	0.14363	0.11362	0.092125

Inanzitutto mostriamo i valori ottenuti con un ordine di quadratura 5 non si discostano in modo rilevante da quelli ottenuti con ordine di quadratura 3:

ErrL2	0	0	0	0	0	0
ErrH1	0	0	0	0	0	0

Passiamo ora ai grafici ottenuti, dove si nota un evidente parallelismo tra le due curve, che mostra l'aderenza con la teoria per la convergenza degli errori.



(a) Eq1, errore L2 mesh uniforme



(b) Eq1, errore H1 mesh uniforme

### 3.1.2 Mesh Non Uniforme

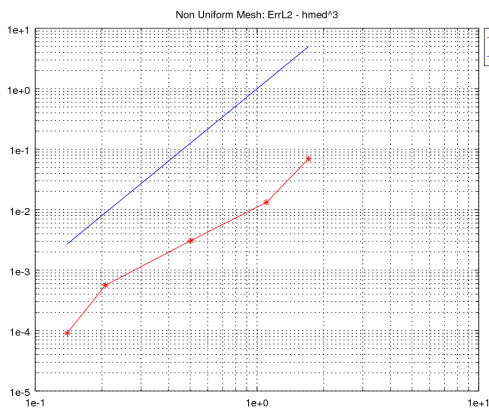
Passiamo ora al caso di mesh non uniformi. Abbiamo i seguenti errori:

ErrL2	0.06929	0.013243	0.0030863	0.00056221	9.0456e-05
ErrH1	6.4278	4.0406	0.84966	0.2273	0.089256

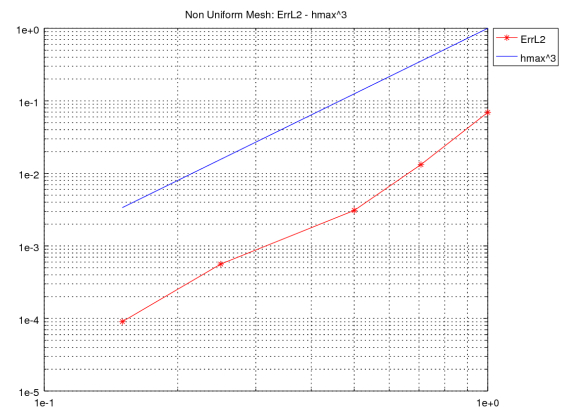
Mostriamo che anche in questo caso l'ordine di quadratura superiore a 3 non porta evidenti benefici sulla precisione della soluzione approssimata. Usiamo in particolare un ordine di quadratura uguale a 7:

ErrL2	0	0	0	0	0	0
ErrH1	0	0	0	0	0	0

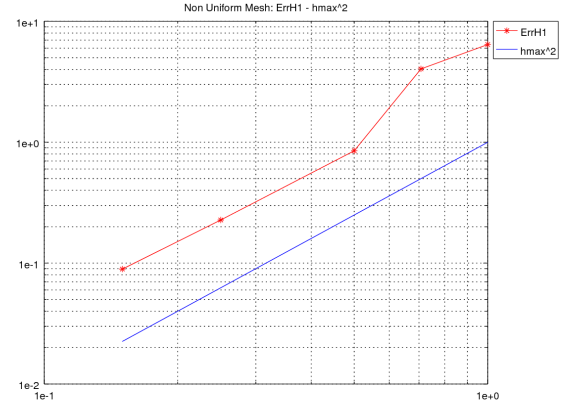
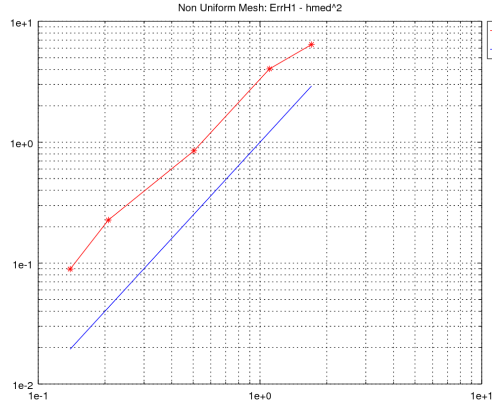
I grafici, effettuati sia rispetto al massimo  $h$  della triangolazione che a quello medio, sono i seguenti:



(a) Eq1, errore L2 mesh non uniforme (h avg)



(b) Eq1, errore L2 mesh non uniforme (h max)



(a) Eq1, errore H1 mesh non uniforme (h avg) (b) Eq1, errore H1 mesh non uniforme (h max)

## 3.2 Seconda Equazione

Consideriamo ora la seguente soluzione esatta:

$$u_e = \cos(x^2) + \sin(y^2) + 10$$

e gli associati coefficienti:

$$c = x + y + 1 + 2 \quad \beta = [1, 1] \quad a = 6$$

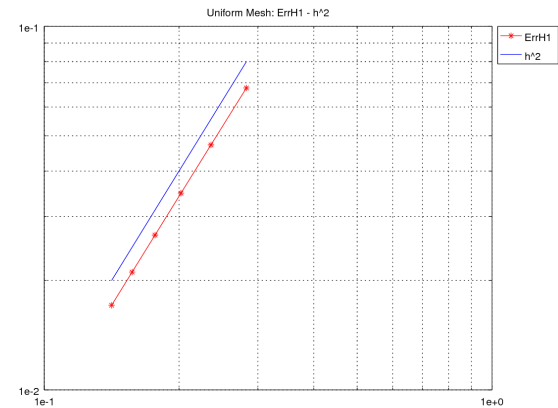
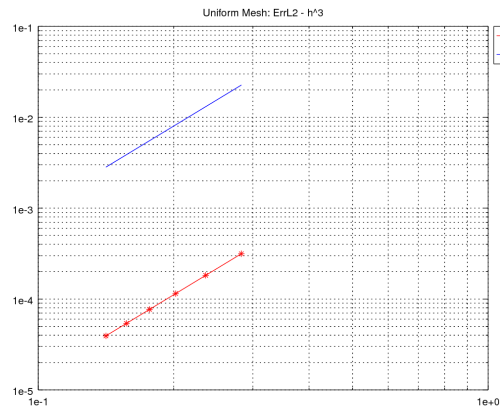
e risolviamo l'equazione associata tramite gli elementi finiti di ordine  $k = 2$  usando una formula di quadratura di ordine 7.

### 3.2.1 Mesh Uniforme

Partendo sempre dalle mesh uniformi otteniamo i seguenti errori: E i relativi grafici in

ErrL2	0.00031514	0.00018232	0.00011477	7.6868e-05	5.3975e-05	3.9341e-05
ErrH1	0.067708	0.047209	0.03477	0.026663	0.02109	0.017096

cui si vede ancora la convergenza tramite il parallelismo sono i seguenti:



(a) Eq2, errore L2 mesh uniforme

(b) Eq2, errore H1 mesh uniforme

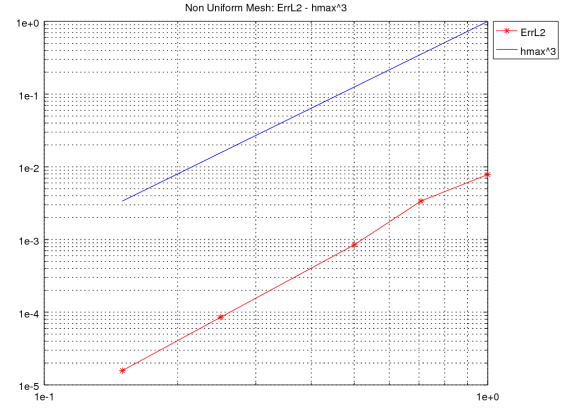
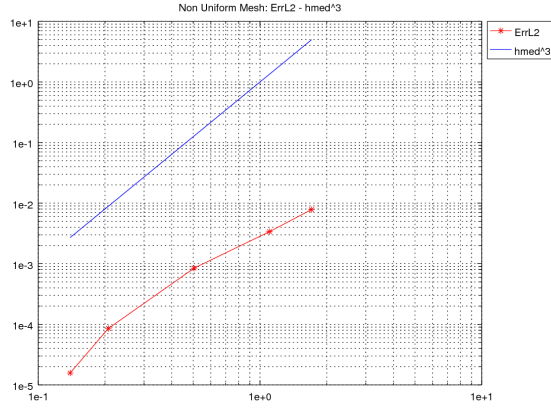


### 3.2.2 Mesh Non Uniforme

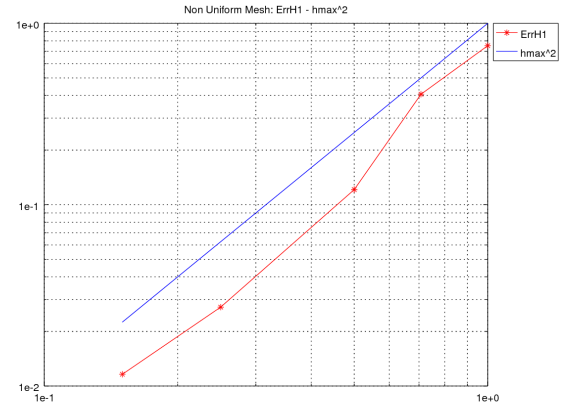
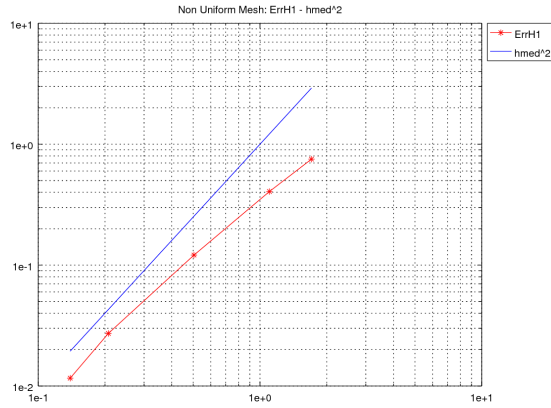
Considerando invece mesh non uniformi abbiamo o seguenti errori:

ErrL2	0.007828	0.0033816	0.00084461	$8.5435e-05$	$1.5742e-05$
ErrH1	0.75273	0.40637	0.12105	0.027238	0.011611

I grafici, effettuati anche in questa seconda equazione sia rispetto al massimo  $h$  presente nella triangolazione che a quello medio, sono i seguenti:



(a) Eq2, errore L2 mesh non uniforme ( $h$  avg) (b) Eq2, errore L2 mesh non uniforme ( $h$  max)



(a) Eq2, errore H1 mesh non uniforme ( $h$  avg) (b) Eq2, errore H1 mesh non uniforme ( $h$  max)

# Index

	<b>B</b>	
Base di Lagrange		10
	<b>D</b>	
Derivata Debole		3
	<b>E</b>	
Elementi Finiti Polinomiali		9
Elemento Finito		9
	<b>F</b>	
Formula di Quadratura		16
	<b>L</b>	
Lemma Di Cèa		8
Lemma di Lax-Milgram		6
	<b>M</b>	
Matrice Di Stiffness		8
Matrice Di Stiffness Problema Ellittico		8
Metodo Galerkin		7
	<b>O</b>	
Ortogonalità di Galerkin		7
	<b>P</b>	
Problema Astratto		6
Problema Astratto Discreto In Forma Matriciale		8
Problema Di Dirichlet		2
Problema Di Dirichlet Omogeneo		3
Problema Duale		12
Problema Ellittico Astratto		6
Problema Ellittico Debole		4
Problema Ellittico Debole Non Omogeneo		5
	<b>R</b>	
Relazioni Basi Generiche e Di Riferimento		15
	<b>S</b>	
Spazio $\mathbb{H}^1$		4
Spazio $\mathbb{H}_0^1$		5
Stima Errore $\mathbb{H}^1(\Omega)$		11
Stima Errore $L^2\Omega$		12
	<b>T</b>	
Triangolazione		9

# Bibliography

- [Bre10] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces And Partial Differential Equations*. Springer, 2010.
- [BS94] Ivo Babuška and Manil Suri. The p and h-p versions of the finite element method, basic principles and properties. *SIAM review*, 36(4):578–632, 1994.
- [BS07] Susanne C. Brenner and L. Ridgway Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Method*. Springer, third edition, 2007.
- [BSK81] Ivo Babuška, Barna A Szabo, and I Norman Katz. The p-version of the finite element method. *SIAM journal on numerical analysis*, 18(3):515–545, 1981.
- [CHB09] J. Austin Cottrell, Thomas J.R. Hughes, and Yuri Bazilevs. *Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA*. Wiley, 2009.
- [Cia78] P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, 1978.
- [Eva90] Lawrence C. Evans. *An Introduction To Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1990.
- [FP13] Davide Luigi Ferrario and Renzo Piccinini. *Simplicial Structures In Topology*. Springer, 2013.
- [Jac98] Jhon David Jackson. *Classical Electrodynamics*. Jhon Wiley and Sons, third edition, 1998.
- [Len86] M Lenoir. Optimal isoparametric finite elements and error estimates for domains involving curved boundaries. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 23(3):562–580, 1986.
- [QSS08] Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco, and Fausto Saleri. *Matematica Numerica [Trad: Numerical Mathematics]*. Springer, third edition, 2008.
- [Qua08] Quarteroni. *Modellistica Numerica Per Problemi Differenziali [Trad: Numerical Modelling For Differential Problems]*. Springer, fourth edition, 2008.
- [Saa03] Yousef Saad. *Iterative methods for sparse linear systems*. SIAM, second edition, 2003.
- [Sal10] Sandro Salsa. *Equazioni Alle Derivate Parziali: metodi, modelli e applicazioni [Trad: Partial Differential Equations: methods, models and applications]*. Springer, second edition, 2010.