Laurea Magistrale in Matematica **Anno Accademico 2015-2016**

Relazione per il corso di Approssimazione di Equazioni Differenziali

Prof. Alessandro Russo

La relazione ha lo scopo di studiare l'ordine di convergenza in L^2 e in H^1 del metodo degli elementi finiti in due dimensioni basato sui triangoli e sui polinomi di grado 2.

Il punto di partenza sono i codici e le note reperibili **qui**.

✎ Scrivere un codice Matlab che risolva l'equazione differenziale alle derivate parziali

$$-\operatorname{div}(c\nabla u) + \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u + \alpha u = f \quad \text{in } \Omega$$

con condizione al bordo di Dirichlet $u = g$ su $\Gamma = \partial\Omega$ utilizzando elementi finiti di grado 2.

Parametrizzare il codice prevedendo di usare varie formule di quadratura per il calcolo della matrice di stiffness e del termine noto.

Come dimostrato a lezione, se si calcolano gli integrali esattamente, in questo caso l'errore nella seminorma $H^1(\Omega)$ è $O(h^2)$ mentre in norma $L^2(\Omega)$ è $O(h^3)$, dove h è il massimo dei diametri dei triangoli.

Nel caso di elementi finiti polinomiali di ordine k, si dimostra che l'errore commesso nell'approssimazione dei coefficienti della matrice e del termine noto è trascurabile se il grado di precisione delle formule di quadratura utilizzate è (almeno) $2k - 1$, quindi $2 \times 2 - 1 = 3$ in questo caso.

✎ Verificare che se si usa una qualunque formula di quadratura di grado di precisione 3 si ottiene l'ordine previsto in L^2 e in H^1.

✎ Verificare inoltre che se si utilizza una formula di quadratura di grado di precisione maggiore di 3 gli ordini di convergenza non cambiano.

Per queste verifiche, procurarsi come spiegato a lezione una problema di cui si conosca *a priori* la soluzione esatta (regolare) u_{esatta}. Scegliere quindi u_{esatta} e scegliere poi delle funzioni c, $\boldsymbol{\beta}$, α, regolari con $c(x, y) \geq c_0 > 0$ e $-\frac{1}{2}\operatorname{div}\boldsymbol{\beta} + \alpha \geq 0$ in modo da assicurare le ipotesi di coercività e regolarità del problema. Definire f usando l'equazione e porre $g = u_{esatta}$.

Non limitarsi ad usare soluzioni esatte polinomiali perché potrebbero avere degli ordini di convergenza diversi (in generale più alti) di quelli previsti dalla teoria.

Usare come h sia la media di tutti gli edge, sia il massimo di tutti gli edge della triangolazione (che coincide col massimo dei diametri di tutti i triangoli). Le curve dell'errore nel caso in cui h è la media sono di solito più lineari.

Usate sia mesh generate da triangle sia delle mesh regolari (sul sito del corso c'è scritto come procurarsele e come usarle). Nel caso delle mesh regolari l'andamento delle curve di convergenza dovrebbe essere più lineare.

Per calcolare la norma L^2 dell'errore, si proceda in questo modo:

$$\|u_{esatta} - u_h\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |u_{esatta} - u_h|^2 = \sum_T \int_T |u_{esatta} - u_h|^2.$$

Ci siamo quindi riportati a integrali sui triangoli che possono essere calcolati analogamente alla matrice di stiffness ancora tramite formule di quadratura sul triangolo di riferimento. In questo caso occorre utilizzare una formula di quadratura che abbia grado di precisione pari almeno all'ordine di convergenza atteso più uno (se no l'errore nel calcolo dell'integrale si mangia l'errore di approssimazione!).

Per l'errore in H^1 si procede in modo analogo.

Riportare su un grafico in scala logaritimica h per varie mesh e l'errore corrispondente e verificare che le pendenze (cioè gli ordini) siano quelli previsti caso per caso.