PROGETTO 1

Elemento non-conforme per Stokes.

Si consideri il problema di Stokes su un dominio Ω, con condizioni di Dirichet omogenee. Data una triangolazione $\mathcal{T}_h$ del dominio, si consideri la sua discretizzazione con il seguente spazio per le per velocità V_h:

$$V_h = \Big\{ \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)] \ : \ \mathbf{v}|_T \in [\mathcal{P}_1(T)]^2 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \\ \mathbf{v} \text{ continua nei punti medi dei lati interni e nulla nei punti medi dei lati in } \partial\Omega \Big\}.$$

Come gradi di libertà per tale spazio si prendano i valori della funzione (vettoriale) nei punti medi di tutti i lati interni della griglia. Si osservi che lo spazio delle velocità può essere discontinuo tra un elemento e l'altro, essendo continuo solo nel punto medio del lato. Si tratta dunque di uno spazio per le velocità *non-conforme*, ovverosia non contenuto in $[H^1(\Omega)]^2$.
Dato lo spazio di pressioni Q_h composto da tutte le funzioni di $L^2_0(\Omega)$ che sono costanti a tratti rispetto alla griglia, l'approssimazione del problema diviene

$$\begin{cases} \text{Trovare } \mathbf{u}_h \in V_h, \ p_h \in Q_h \text{ tali che} \\ \nu \displaystyle\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\operatorname{div} \mathbf{v}_h) p_h = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \\ \displaystyle\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\operatorname{div} \mathbf{u}_h) q_h = 0 \quad \forall q_h \in Q_h. \end{cases}$$

1. Utilizzando come punto di partenza il codice per l'elemento $P2/P0$, si implementi il codice per l'elemento non-conforme sopra presentato. Il grafico delle velocità deve essere fatto col comando `quiver` basato sui punti medi dei lati anzichè i vertici.

2. Si testi il codice per un problema modello con soluzione nota (e nulla al bordo), calcolando l'errore L^2 per le pressioni e l'errore in norma Sobolev "spezzata" per le velocità

$$\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|^2_{H^1(T)} \right)^{1/2}.$$

Si controllino gli ordini di convergenza e si confrontino in un grafico (sia per pressioni che per velocità) gli errori in funzione del numero di gradi di libertà con quelli ottenuti con il metodo P2/P0.
Si commenti circa le motivazioni per cui il presente metodo, a differenza del caso con velocità $\mathcal{P}_1$ *continue*, è inf-sup stabile.

PROGETTO 2

Elasticità lineare quasi-incomprimibile

Si consideri il seguente problema, detto dell'elasticità lineare isotropa, in forma variazionale: trovare $\mathbf{u} \in (H_0^1(\Omega))^2$, tale che

$$\mu \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} + \lambda \int_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{u})(\operatorname{div} \mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \qquad \forall \mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^2, \tag{1}$$

dove $\mathbf{u}$ rappresenza il campo degli spostamenti cercato, $\mathbf{f}$ il carico applicato al corpo elastico, λ e μ le cosiddette costanti (positive) di Lamé del materiale. In particolare, il parametro λ rappresenta la "resistenza" del materiale a deformazioni di tipo volumetrico (ovverosia che ne alterano il volume).

1. Si approssimi tale formulazione scegliendo elementi finiti conformi di grado 2 (modificare il codice del elemento $P2$ vettoriale fatto a lezione). Si consideri $\mu = 1$ e si svolga uno studio di convergenza per diversi valori di λ crescente (ad esempio, $\lambda = 1, 10^2, 10^4, 10^6$) considerando il caso con termine noto f corrispondente alla seguente soluzione esatta assegnata sul dominio $\Omega = (-1, 1)^2$:

$$u_1 = \frac{(x^2-1)^2(y^2-1)y}{4}, \quad u_2 = \frac{(y^2-1)^2(1-x^2)x}{4}.$$

Cosa si osserva? a cosa si potrebbe addurre questo fenomeno?

2. Si consideri ora la stessa identica formulazione, ma in cui il membro "volumetrico" $\lambda \int_\Omega (\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{v})$ viene integrato, in ogni elemento T, con una formula di quadratura a un solo punto, data dalla valutazione nel baricentro di T (con peso pari all'area del elemento). Si operi poi lo stesso identico test di cui sopra per questa nuova versione, e si confrontino i risultati.

Si cerchi di giustificare il metodo di cui al punto **2** nel seguente modo. Si osservi inanzitutto come tale modifica corrisponda a considerare la proiezione L^2 di $\operatorname{div} \mathbf{u}$ e $\operatorname{div} \mathbf{v}$ su uno spazio di funzioni costanti a tratti. Si cerchi di utilizzare tale osservazione per riscrivere il problema di cui al punto **2** in una forma mista (che utilizzi anche uno spazio di funzioni costanti a tratti, oltre allo spazio P2 degli spostamenti) la quale sia, formalmente per $\lambda = +\infty$, uguale a quella di Stokes...

PROGETTO 3

Problema di diffusione nonlineare in forma mista.

Si consideri il problema di diffusione nonlineare in cui il parametro di diffusività κ dipende dalla concentrazione stessa u:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\big(\kappa(u)\,\nabla u\big) = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{in } \partial\Omega, \end{cases}$$

con $\kappa : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ generica funzione continua, limitata, e a valori strettamente positivi. Si verifichi che la formulazione variazionale *mista* diviene: trovare $\mathbf{F} \in H_{\text{div}}(\Omega)$, $u \in L^2(\Omega)$ tali che

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \kappa^{-1}(u)\mathbf{F}\cdot\mathbf{G} + \int_\Omega u\operatorname{div}\mathbf{G} = 0 & \forall \mathbf{G} \in H_{\text{div}}(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega q\operatorname{div}\mathbf{F} = -\int_\Omega fq & \forall q \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

1. Si modifichi il codice del elemento Raviart-Thomas introdotto in aula per considerare anche questo problema, con generica funzione κ inserita dall'utente. Si osservi che, poichè la variabile u_h è costante a tratti, anche $\kappa^{-1}(u_h)$ sarà costante su ogni elemento (questo semplifica molto la implementazione). Poichè il problema è nonlineare, lo si risolva con un metodo iterativo di *punto fisso*, costruito come segue. Data una iterata iniziale $(\mathbf{F}_h^0, u_h^0) = (0, 0)$, ad ogni $n-$esima iterazione si risolve il sistema lineare

$$\begin{cases} \text{Trovare } \mathbf{F}_h^{n+1} \in V_h,\ u_h^{n+1} \in Q_h \text{ tali che} \\ \displaystyle\int_\Omega \kappa^{-1}(u_h^n)\,\mathbf{F}_h^{n+1}\cdot\mathbf{G}_h + \int_\Omega u_h^{n+1}\operatorname{div}\mathbf{G}_h = 0 & \forall \mathbf{G}_h \in V_h, \\ \displaystyle\int_\Omega q_h\operatorname{div}\mathbf{F}_h^{n+1} = -\int_\Omega f q_h & \forall q_h \in Q_h, \end{cases}$$

e si arresta l'operazione quando la norma euclidea (relativa) dello scarto

$$||\vec{u}_h^{n+1} - \vec{u}_h^n|| / ||\vec{u}_h^{n+1}|| \le TOL,$$

con TOL numero piccolo e positivo. L'ultima iterata trovata corrisponde alla soluzione discreta del problema.

2. Si testi la convergenza del metodo su un problema in $\Omega = [0,1]^2$ con soluzione nota

$$u = \sin(\pi x)\sin(\pi y)\ , \quad \mathbf{F} = \kappa\nabla u,$$

con funzione di diffusività

$$\kappa(u) = \frac{u^2 + 1/5}{u^2 + 1}$$

e carico f da voi calcolato (a mano) utilizzando la forma forte dell'equazione.