02-sets-solutions

1 Множества

1.1 Задача 1.1

Пусть A - множество, т.ч. $|A| = n$, тогда количество различных подмножеств этого множества, включая несобственные: $C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n = 2^n$ (по свойству треугольника Паскаля).
Ответ: 2^n

1.2 Задача 1.2

1. $A\triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

   - $\subseteq$: По определению $A\triangle B = \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\} \Rightarrow x \in A \wedge x \notin (A\cap B) \vee x \in B \wedge x \notin (A\cap B) \Rightarrow x \notin (A\cap B) \wedge x \in (A \cup B) \equiv (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
   - $\supseteq$: $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) \equiv (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin (A \cap B) \equiv x \notin (A \cap B) \wedge x \in A \vee x \notin (A \cap B) \wedge x \in B \equiv (x \notin A \vee x \notin B) \wedge x \in A \vee (x \notin A \vee x \notin B) \wedge x \in B \equiv (x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in B \wedge x \notin B) \equiv \emptyset \vee (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \vee \emptyset \equiv A\triangle B$, **ч.т.д.**

2. $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

   - $\subseteq$: По определению $x \in A \wedge x \notin (A \setminus B) \equiv x \in A \wedge (x \notin A \vee x \in B) \equiv (x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B) \equiv \emptyset \vee A \cap B \equiv A \cap B$.
   - $\supseteq$: $A \cap B \equiv x \in A \wedge x \in B \equiv x \in A \wedge x \notin (A \setminus B) \equiv A \setminus (A \setminus B)$, **ч.т.д.**

3. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

   - $\subseteq$: По определению $(x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin C \equiv (x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in B \wedge x \notin C) \equiv (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
   - $\supseteq$: $(x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in B \wedge x \notin C) \equiv x \notin C \wedge (x \in A \vee x \in B) \equiv (A \cup B) \setminus C$, **ч.т.д.**

4. $A \cap (B\triangle C) = (A \cap B)\triangle(A \cap C)$.

- $\subseteq$: По определению $x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin C \vee x \in C \wedge x \notin B) \equiv x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C \vee x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in C \equiv x \in (A \cap B) \wedge x \notin (A \cap C) \vee x \in (A \cap C) \wedge x \notin (A \cap B) \equiv (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.
- $\supseteq$: $x \in (A \cap B) \wedge x \notin (A \cap C) \vee x \in (A \cap C) \wedge x \notin (A \cap B) \equiv x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C \vee x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in C \equiv x \in A \wedge (x \in (B \setminus C) \vee x \in (C \setminus B)) \equiv A \cap (B \triangle C)$, **ч.т.д.**

5. $A \cup B = A \triangle B \triangle (A \cap B)$.

   - $\supseteq$: $A \triangle B \triangle (A \cap B) \equiv (A \triangle B) \triangle (A \cap B) \equiv ((A \triangle B) \cup (A \cap B)) \setminus ((A \triangle B) \cap (A \cap B)) \equiv (A \cup B) \setminus \emptyset \equiv A \cup B$.

     Примечание:
     Пусть $x \in ((A \triangle B) \cup (A \cap B))$, тогда $x \in A \wedge x \notin B \vee x \in B \wedge x \notin A \vee x \in A \wedge x \in B \equiv x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in B) \vee x \in B \wedge x \notin A \equiv x \in A \vee x \in B \wedge x \notin A \equiv (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin A) \equiv A \cup B$.
   - $\subseteq$: $A \cup B \equiv (A \cup B) \setminus \emptyset \equiv ((A \triangle B) \cup (A \cap B)) \setminus ((A \triangle B) \cap (A \cap B)) \equiv (A \triangle B) \triangle (A \cap B) \equiv A \triangle B \triangle (A \cap B)$, **ч.т.д.**

1.3 Задача 1.7

$(X \cap Y) \times (Z \cap W) = (X \times Z) \cap (Y \times W) = (X \times W) \cap (Y \times Z)$

1. Докажем, что $(X \cap Y) \times (Z \cap W) = (X \times Z) \cap (Y \times W)$:

   - $\subseteq$: Пусть $x \in (X \cap Y) \times (Z \cap W)$, тогда $x = \{(a, b), a \in (X \cap Y), b \in (Z \cap W)\} \equiv \{(a, b), a \in X, a \in Y, b \in Z, b \in W\} \equiv \{(a, b), a \in X, b \in Z\} \wedge \{(a, b), a \in Y, b \in W\} \Rightarrow x \in (X \times Z) \cap (Y \times W)$.
   - $\supseteq$: Пусть $x \in (X \times Z) \cap (Y \times W)$, тогда $x \in (X \times Z) \wedge (Y \times W)$, т.е. $x = \{(a, b) \in (X \times Z)\} \wedge x = \{(a, b) \in (Y \times W)\} \Rightarrow \{(a, b), a \in X, a \in Y, b \in Z, b \in W\} \Rightarrow x = \{(a, b), a \in (X \cap Y), b \in (Y \cap Z)\} \Rightarrow x \in (X \cap Y) \times (Z \cap W)$, **ч.т.д.**

2. Из пункта 1 $\Rightarrow (X \cap Y) \times (Z \cap W) = (X \times W) \cap (Y \times Z)$ и $(X \times Z) \cap (Y \times W) = (X \times W) \cap (Y \times Z)$, **ч.т.д.**

1.4 Задача 1.8

При каких условиях верно $(X \cup Y) \times (Z \cup W) = (X \times Z) \cup (Y \times W)$?

1. Пусть $x \in (X \cup Y) \times (Z \cup W)$, тогда $x = \{(a, b), a \in (X \cup Y), b \in (Z \cup W)\} \equiv x = \{(a, b), a \in X \vee a \in Y, b \in Z \vee b \in W\}$.

2. Пусть $x \in (X \times Z) \cup (Y \times W)$, тогда $x \in (X \times Z) \vee x \in (Y \times W) \Rightarrow x = \{(a, b) \in (X \times Z)\} \vee x = \{(a, b) \in (Y \times W)\} \Rightarrow x = \{(a, b), a \in X, b \in Z\} \vee \{(a, b), a \in Y, b \in W\}$.

3. Из пункта 1 видно, что есть 4 возможных ситуации: $x = \{(a,b), a \in X, b \in Z\}, x = \{(a,b), a \in X, b \in W\}, x = \{(a,b), a \in Y, b \in Z\}, x = \{(a,b), a \in Y, b \in W\}$, из которых при $x = \{(a,b), a \in X, b \in W\}, x = \{(a,b), a \in Y, b \in Z\}$ равенство не выполняется $\Rightarrow$ для выполнения предложенного равенства необходимо и достаточно выполнения $X = Y$ или $Z = W$.

1.5 Задача 1.13(3, 4)

3. Доказать, что любой интервал равномощен любому отрезкзу.
   1 способ:

   - Пусть (a,b) и $[c,d]$ – интервал и отрезок соответственно, тогда для того, чтобы доказать, что (a,b) и $[c,d]$ равномощны достаточно по определению установить биективное (взаимно однозначное) соответствие, т.е. чтобы заданное нами отображение являлось и инъективным и сюръективным.
   - Выделим в интервале (a,b) счётное множество, состоящее из чисел $a+\frac{b-a}{2}, a+\frac{b-a}{3}, ..., a+\frac{b-a}{n}, ...$. Отобразим (a,b) в $[c,d]$ таким образом: $f(a+\frac{b-a}{2}) = c, f(a+\frac{b-a}{3}) = d$ (этим мы пристраиваем крайние точки отрезка); $f(a+\frac{b-a}{4}) = c+\frac{d-c}{2}, f(a+\frac{b-a}{5}) = c+\frac{d-c}{3}, ..., f(a+\frac{b-a}{n+2}) = c+\frac{d-c}{n}, \forall n >= 2$. Если $a+\frac{b-a}{x}$ не принадлежит выделенному счётному множеству, то $f(a+\frac{b-a}{x}) = c+\frac{d-c}{x}$.
   - Из вышеприведённых рассуждений докажем биективность отображения

$$\begin{cases} a+\dfrac{b-a}{2} \longrightarrow c, \\ a+\dfrac{b-a}{n+2} \longrightarrow c+\dfrac{d-c}{n}, \forall n \in \mathbb{N} \\ a+\dfrac{b-a}{n} \longrightarrow c+\dfrac{d-c}{n}, n \in (1; +\infty) \setminus \{\mathbb{N}\} \end{cases}$$

   (a) Предложенное отображение инъективно, т.к. прообраз каждой точки отрезка единственен, т.е. $\nexists n_1 \nexists n_2, n_1 \neq n_2 : a + \dfrac{b-a}{n_1} = c + \dfrac{d-c}{n_2}$.

   (b) Предложенное отображение также сюръективно, т.к. каждая точка отрезка является образом хотя бы одной точки интервала. Действительно, рассмотрим пределы:

$$\lim_{n\to\infty}(a+\frac{b-a}{n}) = a; \lim_{n\to\infty}(c+\frac{d-c}{n}) = c;$$

и

$$\lim_{n\to 1}(a+\frac{b-a}{n}) = b; \lim_{n\to 1}(c+\frac{d-c}{n}) = d;$$

   , из которых видно, что сюръекция выполняется.

(c) Из того, что отображение является и инъективным и сюръективным $\Rightarrow$ оно является биективным.

- Из приведённых выше доказательств $\Rightarrow$ любой интервал равномощен любому отрезку, **ч.т.д.**

2 способ:

- Пусть (a, b) и $[c, d]$ – интервал и отрезок соответственно, тогда $[c, d]$ содержит интервал (c, d), который эквивалентен множеству точек интервала (a, b). Множество точек любого из внутренних отрезков интервала (a, b) эквивалентно множеству точек отрезка $[c, d]$ $\Rightarrow$ по теореме Кантора — Бернштейна получаем, что множества точек (a, b) и $[c, d]$ равномощны.

4. Доказать, что любой отрезок равен любому квадрату.

- Докажем, что любой отрезок равномощен любому отрезку. Пусть $[a, b]$ и $[c, d]$ - два отрезка, тогда существует отображение:

$$\begin{cases} a + \dfrac{b-a}{x} \longrightarrow c + \dfrac{d-c}{x}, x \in [1; +\infty) \\ b \longrightarrow d \end{cases}$$

Предложенное отображение инъективно (т.к. прообраз каждой точки отрезка единственен), т.е. $\nexists x1 \nexists x2 : a + \dfrac{b-a}{x_1} = c + \dfrac{d-c}{x_2}$ и сюръективно (т.к. каждый прообраз образа отрезка является прообразом хотя бы для одного образа) $\Rightarrow$ отображение является биективным по определению биекции.

- Из вышеприведённого докозательства $\Rightarrow$ $[a, b] \cong [0, 1]$. Докажем, что отрезок $[0, 1] \cong [0, 1] \times [0, 1]$, т.е. что отрезок равномощен квадрату со стороной 1 через метод координат. Введём прямоугольную декартову систему координат, где точка начала отсчёта ($O(0, 0)$) совпадает с левым нижним углом квадрата, тогда каждая точка квадрата задаётся парой координат, $\begin{pmatrix} 0, x_1 x_2 x_3 ... \\ 0, y_1 y_2 y_3 ... \end{pmatrix}$ но тогда мы можем сопоставить точку квадрата с точкой на отрезке в виде $0, x_1 y_1 x_2 y_2 ...$, т.е. у нас задано отображение вида:

$$\begin{pmatrix} 0, x_1 x_2 x_3 ... \\ 0, y_1 y_2 y_3 ... \end{pmatrix} \longrightarrow 0, x_1 y_1 x_2 y_2 ... \tag{1}$$

– которое является и инъективным (прообраз каждой точки отрезка единственен) и сюръективным (т.к. каждый прообраз образа отрезка является прообразом хотя бы для одного образа) $\Rightarrow$ по определению биекции оно и биективно $\Rightarrow$ любой отрезок равномощен квадрату со стороной 1.

- Докажем, что квадрат со стороной 1 равномощен квадрату с произвольной стороной через метод координат, т.е., к примеру, $[0,1]\times[0,1]\cong[0,d]\times[0,d]$. Введём прямоугольную систему координат так, чтобы точка начала отсчёта ($O(0,0)$) совпала с левыми нижними углами квадратов, тогда каждая точка квадрата со стороной 1 задайтся парой координат: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ – а каждая точка квадрата со стороной d задаётся парой координат: $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ – но тогда каждую точку квадрата со стороной d можно задать умножив каждую точку квадрата со стороной 1 на d, т.е. есть отображение вида: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}x*d\\y*d\end{pmatrix}$. – которое является и инъективным (прообраз каждой точки квадрата единственен) и сюръективным (т.к. каждый прообраз образа квадрата является прообразом хотя бы для одного образа) $\Rightarrow$ по определению биекции оно и биективно $\Rightarrow[0,1]\times[0,1]\cong[0,d]\times[0,d]$.
- Из полученной выше информации $\Rightarrow$ любой отрезок равномощен любому квадрату, **ч.т.д.**

1.6 Задача 1.14

Задача: Площадь комнаты — 6 метров. В ней уложены 3 ковра площадью 3 и произвольной формы. Доказать, что имеется каких-то два ковра, площадь пересечения которых не менее 1.
Решение: Пусть это не так, тогда площадь любых двух пересекающихся ковров меньше $1\,\mathrm{m}^2\Rightarrow$ они занимают площадь большую чем $3+3-1=5\,\mathrm{m}^2$. Третий ковёр имеет площадь пересечения меньше $1\,\mathrm{m}^2$ с первым ковром и площадь пересечения меньше $1\,\mathrm{m}^2$ со вторым ковром $\Rightarrow$ только третий ковёр покрывает площадь большую $3-1-1=1\,\mathrm{m}^2$, но тогда общая площадь, которую покрывают 3 ковра, больше $6\,\mathrm{m}^2$, что больше площади комнаты, противоречие $\Rightarrow$ изначальное предположение не верно $\Rightarrow\exists$ 2 ковра, площадь пересечения которых больше или равна $1\,\mathrm{m}^2$, **ч.т.д.**