06-Combinatorics-solutions

1 Комбинаторика

1.1 Задача 6.2

- Задача эквивалентна задаче о разложении 20 шаров по 5 ящикам, при этом некоторые "ящики"могут оказаться пустыми.

- Рассмотрим 24 объекта: 20 шаров и 4 перегородки (т.к. именно 4 перегородки позволят выделить 5 групп (5 предложений)), причём эти 24 объекта расположены в произвольном порядке. Каждый такой ряд из 24 произвольно расставленных объектов однозначно соответствует некоторому способу раскладки шаров по ящикам: в первый ящик попадут шары, расположенные левее первой перегородки, во второй расположенные между первой и второй перегородками и т.д. (причём между какими-то перегородками шаров может не быть) $\Rightarrow$ число способов раскладки шаров по ящикам равно числу различных рядов из 20 шаров и 4 перегородок, т.е. C_{24}^4.

  Ответ: C_{24}^4.

1.2 Задача 6.3

- Очевидно, что при таком условии ответ 0 (т.к. для любого 7-го числа, каждая последующая цифра которого больше предыдущей, необходимо как минимум 7 различных цифр, а в условии их 4). Если под словами "больше"имелось в виду не меньше, то решу задачу для такой формулировки.

- Переформулируем задачу: обозначи 7 разрядов исходного числа за шары, а 4 цифры в условии за ящики. Теперь задача состоит в том, чтобы разложить 7 шаров по 4 ящикам, причём неокторые ящики могут быть пустыми. Аналогично рассуждениям в Задаче 6.2 получаем, что число способов раскладки шаров по ящикам равно числу различных рядов из 7 шаров и 3 перегородок, т.е. C_{10}^3.

  Ответ: C_{10}^3.

1.3 Задача 6.4

- Предположим, что никакие два соседних числа не равны между собой (т.е. их разность не равна 0). Тогда заметим, что из любой клетки в любую другую мы можем добраться не более чем за (10 - 1) по вертикали и (10 - 1) по горизонтали, т.е. не более чем за $9 + 9 = 18$ раз сдвинувшись в соседнюю клетку. Но тогда все числа находятся между числами l и $l + 18 * 5 = l + 90$, где l - минимум из всех расставленных целых чисел на доске, а $l + 90$ - максимальное число записанное на доске целых чисел $\Rightarrow$ по принципу Дирихле на доске найдутся 2 одинаковых целых числа, **ч.т.д.**

1.4 Задача 6.6

- Условимся при решении задачи, что порядок предметов в ящиках нам не важен. Тогда выложим все предметы в один ряд. Это можно сделать $n!$ способами. Теперь положим в первый ящик n_1 предметов, во второй n_2 предметов, ..., в m-ый n_m предметов. Заметим, что т.к. нам не важен порядок предметов в ящике, то перестановка одних и тех же предметов в ящике результат распределения не меняет, причём кол-во всех возможных перестановок в первом, втором, ..., m-ом ящиках равны $n_1!, n_2!, ..., n_m!$ соответственно. Т.к. при каждой новой перестановке в одном и том же ящике получается новая перестановка всех предметов, то по правилу произведения получаем, что $n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_m!$ перестановок не меняют результата распределения. Таким образом, $n!$ перестановок разбиваются на $n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_m!$ групп, которые нужно отождествить.

  Ответ: $\dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_m!}$.

1.5 Задача 6.7

- Переобозначим 5 конвертов как 5 ящиков, а 8 рукописей как 8 шаров.

- Если ящики могут быть пустыми, то число способов разложить 8 различных шаров по 5 различным ящикам равно 5^8 — это просто число размещений с повторениями. Пусть Q_i — множество разложений шаров, при которых i-й ящик пуст (i = 1, 2, . . . , 5). Тогда искомое число $D(8,5)$ разложений шаров, при которых все ящики непусты, равно:
  $D(8,5) = 5^8 - |Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_5| = 5^8 - \sum\limits_i |Q_i| + \sum\limits_{i<j} |Q_i \cap Q_j| - \sum\limits_{i<j<k} |Q_i \cap Q_j \cap Q_k| + \ldots + (-1)^5 |Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_5|$. Причём ясно, что $|Q_i| = (5-1)^8, |Q_i \cap Q_j = (5-2)^8|, |Q_i \cap Q_j \cap Q_k| = (5-3)^8$ и т.д.
  Получаем, что: $D(8,5) = 5^8 - C_5^1(5-1)^8 + C_5^2(5-2)^8 - C_5^3(5-3)^8 + \ldots + (-1)^5 \cdot 0 = 5^8 - 5 \cdot 4^8 + 10 \cdot 3^8 - 10 \cdot 2^8 + \ldots = 126000$.

  Ответ: 126000.