05-Induction-solutions

1 Индукция

1.1 Задача 4.2

При каких $n > 3$ наборь гирь с массами $1, 2, 3, ..., n$ граммов можно разложить на три равные по массе кучки?

1. Общая масса набора гирь: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n * (n+1)}{2}$ граммов. При этом $\dfrac{n * (n+1)}{2} \vdots 3 \Leftrightarrow (n \vdots 3) \vee ((n+1) \vdots 3)$.
2. Докажем достаточность выведенного нами условия. Заметим, что разложение на 3 кучи возможно $\forall n \in \{5, 6, 8, 9\}$. Так разбиения будут вида:

$$1 + 4 = 2 + 3 = 5, n = 5$$
$$1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4, n = 6$$
$$1 + 2 + 3 + 6 = 5 + 7 = 8 + 4, n = 8$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 6 + 9 = 7 + 8, n = 9$$

   остальные n удовлетворяющие условию задачи будут получаться добавлением 6-ок к четырём ранее выписанным n.
   Примечание:
   Почему именно 6-ок? Пусть всего $n = k$ гирь таких, что мы можем разбить их на 3 кучи, тогда рассмотрим $n = k + 6$ гирь. Всего добавилось 6 новых гирь с массами $k+1, k+2, \ldots, k+6$ соответственно. Разобьём 6 новых гирь на 3 кучи равных по массе: $(k+1) + (k+6) = (k+2) + (k+5) = (k+3) + (k+4)$. Но тогда мы можем разбить и $n = k + 6$ гирь на 3 кучи равных масс.

   Ответ: $\forall n \in \mathbb{N} : (n > 3) \wedge (n \equiv 0, 2 \pmod 3))$.

1.2 Задача 4.9

Дано: $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}, u_0 = 1, u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 4n + 6) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Доказать: $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = 2n + \frac{1}{3^n}$.

1. Найдём $u_1 = u_{0+1} = \frac{1}{3}(u_0 + 4 * 0 + 6) = \frac{7}{3}$. Воспользуемся методом математической индукции:

   База: для $n = 1 : u_1 = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ - верно.

   Переход: Пусть $u_n = 2n + \frac{1}{3^n}$ - верно. Тогда докажем, что $u_{n+1} = 2(n+1) + \frac{1}{3^{n+1}}$ также верно. Из формулы $n+1$ члена $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеем: $u_{n+1} = \frac{1}{3}(2n + \frac{1}{3^n} + 4n + 6) = \frac{1}{3}(6n + 6 + \frac{1}{3^n}) = 2n + 2 + \frac{1}{3^{n+1}} = 2(n+1) + \frac{1}{3^{n+1}}$, **ч.т.д.**

1.3 Задача 4.12

Дано: человек, умеющий отмечать точки, делящие отрезок в отношении $n : (n+1), \forall n \in \mathbb{N}$, на любом отрезке.
Доказать: этого умения достаточно, чтобы разделить отрезок в произвольном рациональном отношении.

1. Возьмём в качечтве базы то, что мы можем любой отрезок разбить на $p+q$ частей (где p, q - произвольное рациональное отношение $\frac{p}{q}$, которое мы хотим получить, используя невероятное умение Елпидифора) $\Rightarrow$ раз отрезок разбит на $p+q$ частей, то отношение $\frac{p}{q}$ уже отмечено на отрезке, осталось добраться Елпидифору до него.

2. Рассмотрим два случая (два возможных варианта развития событий):

   2.1. $p + q = 2k, k \in \mathbb{N}$(кол-во частей отрезка чётное). Тогда делим отрезок пополам и переходим к отрезку, правый конец которого наиболее всего ближе к искомому отношению $\frac{p}{q}$.

   2.2. $p + q = 2k - 1, k \in \mathbb{N}$(кол-во частей отрезка нечётное). Тогда выбираем произвольное отношение $\frac{n}{n+1}$ такое, чтобы $n + n + 1 = 2n + 1 = p + q$ и переходим к отрезку, правый конец которого наиболее всего ближе к произвольному заданному отношению $\frac{p}{q}$.

3. Так рекурсивно проходимся до тех пор пока не встретим искомое отношение.

1.4 Задача 4.13

1. Воспользуемся формулами сокращённого умножения $a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1), a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$:
   $$\frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \ldots \cdot \frac{n^3-1}{n^3+1} = (\frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{7}}{3}) \cdot (\frac{2}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{13}}{\cancel{7}}) \cdot (\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{21}}{\cancel{13}}) \cdot (\frac{\cancel{4}}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{31}}{\cancel{21}}) \cdot (\frac{\cancel{5}}{\cancel{7}} \cdot \frac{\cancel{43}}{\cancel{31}}) \cdot \ldots \cdot (\frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{(n-1)^2+n-1+1}}{\cancel{(n-1)^2-n-1+1}}) \cdot (\frac{\cancel{n-1}}{n+1} \cdot \frac{n^2+n+1}{\cancel{n^2-n+1}}) = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2+n+1}{n+1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+n+1}{n(n+1)}.$$

2. Докажем, исопльзуя метод математической индукции, что $\dfrac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n^3-1}{n^3+1}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{n^2+n+1}{n(n+1)}$:

   База: Для $n=2$ имеем: $\dfrac{2^3-1}{2^3+1}=\dfrac{7}{9}$; $\quad\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{7}{3}=\dfrac{7}{9}$ - верно.

   Переход: Пусть $\dfrac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n^3-1}{n^3+1}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{n^2+n+1}{n(n+1)}$ - верно. Тогда докажем, что $\dfrac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\dfrac{(n+1)^3-1}{(n+1)^3+1}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{(n+1)^2+n+1+1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{(n+1)^2+n+2}{n^2+3n+2}$ также верно:

   $$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}\cdot\frac{(n+1)^3-1}{(n+1)^3+1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\cdot\frac{(n+1)^3-1}{(n+1)^3+1}=$$
   $$\frac{2}{3}\cdot\frac{\cancel{n^2+n+1}}{\cancel{n}(n+1)}\cdot\frac{\cancel{n}(n^2+3n+3)}{(n+2)(\cancel{n^2+n+1})}=\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+3n+3}{n^2+3n+2}\equiv\frac{(n+1)^2+n+2}{n^2+3n+2},$$
   ч.т.д.

   <u>**Ответ:**</u> $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{n^2+n+1}{n(n+1)}$.

1.5 Задача 4.15

Доказать: $\forall a=2^n: a=7x^2+y^2, n\in\{3,4,5,\ldots\}, \forall x \not\vdots\, 2, \forall y \not\vdots\, 2$.

1. **База:** для $n=3: 2^3=8=7\cdot 1+1$ - верно.

   Переход: Пусть $2^n=7x^2+y^2, \forall x\not\vdots\, 2, \forall y\not\vdots\, 2$ - верно. Тогда докажем, что $2^{n+1}=7x^2+y^2, \forall x\not\vdots\, 2, \forall y\not\vdots\, 2$. Для этого нам нужно найти такую пару (x,y), что $x\not\vdots\, 2, \forall y\not\vdots\, 2$. Рассмотрим пару $(x,y)=(\frac{x+y}{2},\frac{7x-y}{2})$. Заметим, что $7x^2+y^2=7\cdot\frac{(x+y)^2}{4}+\frac{(7x-y)^2}{4}=\frac{7x^2+14xy+7y^2+49x^2-14xy+y^2}{4}=\frac{56x^2+8y^2}{4}=14x^2+2y^2=2(7x^2+y^2)=2\cdot 2^n=2^{n+1}$. Т.е. мы нашли пару такую, чётность элементов которой одинакова, но вот чётны или нечётны элементы пары мы сказать не можем. Попробуем найти ещё одну пару, элементы которой будут отличаться по чётности от уже найденной пары. Такой парой будет $(x,y)=(\frac{x-y}{2},\frac{7x+y}{2})$, причём $7x^2+y^2=2^{n+1}$. Итого мы имеем две пары, в каждой паре числа одинаковой чётности, любые два числа из разных пар разной чётности $\Rightarrow$ числа из какой-то одной пары $(\frac{x-y}{2},\frac{7x+y}{2})$ или $(\frac{x+y}{2},\frac{7x-y}{2})$ будут нечётны, **ч.т.д.**