03-Boolean-solutions

1 Логика

1.1 Задача 2.7

Примечание:
Так как формулировка задания не совсем ясна: искать под каждый пункт свою функцию или найти функцию, удовлетворяющую всем 4 критериям, то разберу все эти 2 случая.
СЛУЧАЙ ПЕРВЫЙ:

1. Привести пример функции F, у которой только три различных комбинации логических переменных дают "ложь".

   - Пусть этими 3-мя комбинациями логических переменных являются комбинации $(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0)$, тогда необходимо, чтобы только при таких комбинациях A,B,C функция обнулялась. Тогда запишем в СКНФ форме данную функцию: $F = (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee C)$, нетрудно заметить, что данная СКНФ функция обнуляется только при наборах A,B,C равных $(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0)$.
   - Упростим найденную функцию: $F = (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \overset{\text{ассоциативность}}{=} ((A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C)) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \overset{\text{дистрибутивность}}{=} (A \vee ((B \vee C) \wedge (B \vee \neg C))) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \overset{\text{дистрибутивность}}{=} (A \vee (B \vee (C \wedge \neg C))) \wedge (A \vee \neg B \vee C) = (A \vee B) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \overset{\text{дистрибутивность}}{=} A \vee (B \wedge (\neg B \vee C)) \overset{\text{дистрибутивность}}{=} A \vee (B \wedge \neg B \vee B \wedge C) = A \vee (B \wedge C)$.
     <u>**Ответ:**</u> $F = A \vee (B \wedge C)$.

2. Привести пример функции F такой, что $F(A,B,C) = C$ при $A = 0$.

   - Выпишем все возможные комбинации с $A = 0$:

A	B	C	F
...	...	...	...
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
...	...	...	...

Из таблицы видно, что функция F принимает значение 1 ровно 2 раза при $A = 0 \Rightarrow$ что функция может быть записана в СДНФ форме: $F = (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$.

- Упростим найденную функцию: $F = (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \overset{\text{дистрибутивность}}{=} (C \wedge \neg A) \wedge (\neg B \vee B)) = C \wedge \neg A$.
  <u>Ответ:</u> $F = C \wedge \neg A$.

3. Привести пример функции F такой, что $F(A, B, C) = A \vee C$ при $B = 0$.

- Выпишем все возможные комбинации с $B = 0$:

A	B	C	F
...	...	...	...
0	0	0	0
0	0	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
...	...	...	...

  Из таблицы видно, что функция F принимает значение 1 ровно 3 раза при $B = 0 \Rightarrow$ что функция может быть записана в СДНФ форме: $F = (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C)$.

- Упростим найденную функцию: $F = (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C)$.
  $(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \overset{\text{дистрибутивность}}{=} A \wedge ((\neg B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C)) \overset{\text{дистрибутивность}}{=} A \wedge (\neg B \wedge (\neg C \vee C)) = A \wedge \neg B$.
  $(\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B) \overset{\text{дистрибутивность}}{=} \neg B \wedge (A \vee \neg A \wedge C) \overset{\text{дистрибутивность}}{=} \neg B \wedge ((A \vee \neg A) \wedge (A \vee C)) = \neg B \wedge (A \vee C)$(3 операции).
  <u>Ответ:</u> $F = \neg B \wedge (A \vee C)$.

4. Привести пример функции F такой, что $F(A, B, C) = A \wedge \neg B$ при $C = 0$.

- Выпишем все возможные комбинации с $C = 0$:

A	B	C	F
...	...	...	...
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	0	0
...	...	...	...

  Из таблицы видно, что функция F принимает значение 1 ровно 1 раз при $C = 0 \Rightarrow$ что функция может быть записана в СКНФ форме: $F = A \wedge \neg B \wedge \neg C$(4 операции)$= A \wedge \neg(B \vee C)$(3 операции).
  <u>Ответ:</u> $F = A \wedge \neg(B \vee C)$.

СЛУЧАЙ ВТОРОЙ:

1. Если функция должна удовлетворять всем 4 критериям, то попробуем

составить таблицу истинности:

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

, где первые 4 строчки получены из второго условия; $1, 2, 5, 6$ строчки из третьего условия; $1, 3, 5, 7$ строчки из четвёртого условия. После заполнения строк таблицы согласно $2, 3$ и 4 пунктам мы видим, что у нас запонились первые 7 строк таблицы, 3 из которых дают ложь в результате функции F(1 условие выполняется) $\Rightarrow$ последняя строчка $(1, 1, 1)$ должна давать истину в результате функции F.

2. Теперь запишем, опираясь на таблицу, функцию F в СКНФ форме: $F = (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C)$. Нетрудно заметить, что данная СКНФ функция обнуляется только при наборах $(0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)$.

3. Теперь Упростим полученную функцию: $F = (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C) \overset{\text{ассоциативность}}{=} (A \vee B \vee C) \wedge ((A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C)) \overset{\text{дистрибутивность}}{=} (A \vee B \vee C) \wedge ((C \vee \neg B) \vee (A \wedge \neg A)) = (C \vee \neg B) \wedge (A \vee B \vee C) \overset{\text{дистрибутивность}}{=} C \vee (\neg B \wedge (A \vee B)) \overset{\text{дистрибутивность}}{=} C \vee ((\neg B \wedge A) \vee (\neg B \wedge B)) = C \vee (\neg B \wedge A)$(3 операции).
   <u>Ответ:</u> $C \vee (\neg B \wedge A)$.

1.2 Задача 2.11

1. Требуется найти выражения, которые являются логическими следствиями выражения $G(A, B, C) = A \wedge (B \to \neg C)$.

   - Для начала определим, на каких входных значениях функция G принимает истинное значение. Для этого нужно, чтобы $A = 1 \wedge B \neq 1 \wedge C \neq 1$, т.е. подходят тройки $(1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0)$.
   - Рассмотрим первую функцию $F(A, B, C) = A \vee (\neg C \to \neg B)$, из которой видно, что при $A = 1$ значения C и B могут быть любыми $\Rightarrow$ подходит.
   - Рассмотрим вторую функцию $F(A, B, C) = \neg A \vee (\neg C \to B)$, из которой видно, что при $A = 1$ импликация должна быть истинной, т.е. $C \neq 0 \wedge B \neq 0 \to$, что тройка $(1, 0, 0)$ не будет являться решением $\Rightarrow$ не подходит.
   - Рассмотрим третью функцию $F(A, B, C) = A \vee (\neg C \to B)$, из которой видно, что при $A = 1$ значения C и B могут быть любыми $\Rightarrow$ подходит.

- Рассмотрим четвёртую функцию $F(A,B,C) = A \wedge (\neg C \to \neg B)$, из которой видно, что при $A = 1$ импликация должна быть истинной, т.е. $C \neq 0 \wedge B \neq 1 \to$, что тройка $(1,1,0)$ не будет являться решением $\Rightarrow$ не подходит.
- Рассмотрим четвёртую функцию $F(A,B,C) = (C \to B) \to A$, из которой видно, что при $A = 1$ значения C и B могут быть любыми $\Rightarrow$ подходит.
  <u>**Ответ:**</u> $1, 3, 5$.

1.3 Задача 2.13

Выразить через штрих Шеффера:
Примечание:
$x \vee y = \overline{\overline{x \vee y}} = \overline{\overline{x \wedge x \vee y \wedge y}} \overset{\text{З. Де Моргана}}{=} \overline{\overline{x \wedge x} \wedge \overline{y \wedge y}} = (x|x)|(y|y).$
$x \wedge y = \overline{\overline{x \wedge y}} = \overline{\overline{x \wedge y \vee x \wedge y}} = (x|y)|(x|y).$
$\overline{x|y} \overset{def}{=} \overline{\overline{x \wedge y}} \overset{\text{З. Де Моргана}}{=} \overline{\overline{x} \vee \overline{y}} = x \wedge y.$

1. $x \equiv y = \overline{\overline{(x \equiv y)}} = \overline{x \oplus y} = \overline{(x \vee y) \wedge \overline{x \wedge y}} \overset{\text{см. примечание}}{=} \overline{(x|x)|(y|y) \wedge (x|y)} = ((x|x)|(y|y))|(x|y).$
2. $x \oplus y = (x \vee y) \wedge \overline{x \wedge y} = ((x|x)|(y|y)) \wedge \overline{((x|y)|(x|y))} = ((x|x)|(y|y)) \wedge (x|y).$
   Пусть $l = ((x|x)|(y|y)), p = (x|y) \Rightarrow l \wedge p = (l|p)|(l|p) = (((x|x)|(y|y))|(x|y))|(((x|x)|(y|y))|(x|y)).$
3. $x \downarrow y \overset{def}{=} \overline{x \vee y} \overset{\text{см. примечание}}{=} \overline{(x|x)|(y|y)} = (x|x) \wedge (y|y)$. Пусть $d = (x|x), q = (y|y) \Rightarrow d \wedge q = (d|q)|(d|q) = ((x|x)|(y|y))|((x|x)|(y|y)).$

1.4 Задача 2.14

Выразить через стрелку Пирса:
Примечание:
$x \vee y = \overline{\overline{x \vee y}} = \overline{\overline{(x \vee y) \wedge (x \vee y)}} \overset{\text{З. Де Моргана}}{=} \overline{\overline{x \vee y} \vee \overline{x \vee y}} = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y).$
$x \wedge y = \overline{\overline{x \wedge y}} = \overline{\overline{(x \vee x) \wedge (y \vee y)}} \overset{\text{З. Де Моргана}}{=} \overline{\overline{x \vee x} \vee \overline{y \vee y}} = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y).$
$\overline{x \downarrow y} \overset{def}{=} \overline{\overline{x \vee y}} \overset{\text{З. Де Моргана}}{=} \overline{\overline{x} \vee \overline{y}} = x \vee y.$

5. $x \equiv y = \overline{\overline{x \equiv y}} = \overline{x \oplus y} = \overline{(x \vee y) \wedge \overline{x \wedge y}} = \overline{x \vee y} \vee (x \wedge y) \overset{\text{см. примечание}}{=} (x \downarrow y) \vee ((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)) \overset{\text{см. примечание}}{=} ((x \downarrow y) \downarrow ((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y))) \downarrow ((x \downarrow y) \downarrow ((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y))).$
6. $x \oplus y = (x \vee y) \wedge \overline{x \wedge y} = ((x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)) \wedge \overline{((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y))} = ((x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)) \wedge (((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)) \downarrow ((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y))) = (((x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)) \downarrow ((x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y))) \downarrow ((((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)) \downarrow ((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y))) \downarrow (((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)) \downarrow ((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)))).$
7. $x|y = \overline{x \wedge y} = \overline{(x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)} = (x \downarrow x) \vee (y \downarrow y) = (((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)) \downarrow ((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y))).$