

04-Bits-solutions

1 Битовые операции

1.1 Задача 3.1

1. Смоделируем нашу задачу: составим таблицу нового состояния клетки в зависимости от текущего состояния клетки и её соседей. Пусть клетки $\begin{smallmatrix} [E] \\ [D][A][B] \\ [C] \end{smallmatrix}$ расположены так: $\begin{smallmatrix} [E] \\ [D][A][B] \\ [C] \end{smallmatrix}$ и мы хотим получить новое состояние клетки A' .

2. Решение задачи:

- 2.1. [Код](#) программы по составлению таблицы. Разделим таблицу на 2 части (1-ая часть - $A = 0$, 2-ая часть - $A = 1$).
- 2.2. Составим логическое уравнение для первой части: $\neg A \wedge (B \vee C \vee D) \wedge (B \vee C \vee E) \wedge (B \vee D \vee E) \wedge (C \vee D \vee E) \wedge (\neg C \vee \neg D \vee \neg E) \wedge (\neg B \vee \neg D \vee \neg E) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee \neg E) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee \neg D)$.
- 2.3. Составим логическое уравнение для второй части: $A \wedge (A \vee C \vee D \vee E) \wedge (\neg D \vee \neg E) \wedge (\neg C \vee \neg E) \wedge (\neg C \vee \neg D) \wedge (\neg B \vee \neg E) \wedge (\neg B \vee \neg D) \wedge (\neg B \vee \neg C)$.
- 2.4. Объединим первый и второй случай: $\neg A \wedge (B \vee C \vee D) \wedge (B \vee C \vee E) \wedge (B \vee D \vee E) \wedge (C \vee D \vee E) \wedge (\neg C \vee \neg D \vee \neg E) \wedge (\neg B \vee \neg D \vee \neg E) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee \neg E) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee \neg D) \vee A \wedge (A \vee C \vee D \vee E) \wedge (\neg D \vee \neg E) \wedge (\neg C \vee \neg E) \wedge (\neg C \vee \neg D) \wedge (\neg B \vee \neg E) \wedge (\neg B \vee \neg D) \wedge (\neg B \vee \neg C)$.

Ответ: $A' = \neg A \wedge (B \vee C \vee D) \wedge (B \vee C \vee E) \wedge (B \vee D \vee E) \wedge (C \vee D \vee E) \wedge (\neg C \vee \neg D \vee \neg E) \wedge (\neg B \vee \neg D \vee \neg E) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee \neg E) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee \neg D) \vee A \wedge (A \vee C \vee D \vee E) \wedge (\neg D \vee \neg E) \wedge (\neg C \vee \neg E) \wedge (\neg C \vee \neg D) \wedge (\neg B \vee \neg E) \wedge (\neg B \vee \neg D) \wedge (\neg B \vee \neg C)$.

1.2 Задача 3.3(2)

Выразить $X|Y$ через операции \sim , $\&$ и \oplus .

1. Рассмотрим дизъюнкцию для двух битов: $x \vee y = \overline{\overline{x \vee y}} = \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} \Rightarrow X|Y = \sim(\sim X \& \sim Y)$.

2. Для выражения дизъюнкции через исключающее или и конъюнкцию воспользуемся таблицей истинности:

x	y	$x \oplus y$	$x \wedge y$	$x \vee y$
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1

- откуда видно, что дизъюнкция может быть представлена в виде $x \vee y = (x \oplus y) \oplus (x \wedge y) \Rightarrow X|Y = (X \oplus Y) \oplus (X \& Y)$.

3. Для выражения дизъюнкции через исключающее или, конъюнкцию и отрицание достаточно выразить *исключающее или* из 2 пункта: $x \vee y = (x \oplus y) \oplus (x \wedge y) = ((x \vee y) \wedge (\overline{x \vee y})) \oplus (x \wedge y) = \overline{((x \vee y) \wedge \overline{x \wedge y})} \oplus (x \wedge y) = ((\overline{x \wedge y}) \wedge \overline{x \wedge y}) \oplus (x \wedge y) \Rightarrow X|Y = (\sim(\sim X \& \sim Y) \& \sim(X \& Y)) \oplus (X \& Y)$.

Ответ: $(\sim(\sim X \& \sim Y) \& \sim(X \& Y)) \oplus (X \& Y)$.

1.3 Задача 3.7

Для знаковых X и Y нужно выразить следующие отношения через битовые операции:

1. $X = 0$. Если $X = 0$, то функция должна вернуть 1, иначе - 0 \Rightarrow подходит функция вида: $1 \gg X$.

Ответ: $1 \gg X$.

2. $X \neq 0$. Из 1 пункта мы получили, что функция $1 \gg X$ даёт 1 при $X = 0$, иначе - 0 \Rightarrow нам нужно инвертировать эту функцию, чтобы новая функция возвращала 1 при $X \neq 0$, т.е. подходит функция вида: $1 \gg (1 \gg X)$.

Ответ: $1 \gg (1 \gg X)$.

1.4 Задача 3.8

Для знаковых X и Y нужно выразить следующие отношения через битовые операции:

1. $X = Y$. Запишем таблицу истинности для операции \oplus :

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- откуда видно, что $x \oplus y$ даёт $1 \Leftrightarrow x \neq y \Rightarrow$ функция равенства двух переменных принимает вид: $1 \gg (X \oplus Y)$.

Ответ: $1 \gg (X \oplus Y)$.

2. $X \neq Y$. Аналогично запишем функцию неравенства через \oplus : $1 \gg (1 \gg (X \oplus Y))$.

Ответ: $1 \gg (1 \gg (X \oplus Y))$.

1.5 Задача 3.9

Выразить следующие операции для беззнаковых X и Y :

1. Циклического сдвига X вправо на Y позиций. Для начала разобьём задачу циклического сдвига вправо на 2 задачи(части):

1.1. Сдвиг вправо числа X на Y бит: $X \gg Y$.

1.2. Сдвиг влево числа X на $CHAR_BIT * sizeof(X) - Y$ бит, где $CHAR_BIT$ - константа, которая показывает кол-во битов в 1 байте, а $sizeof$ - функция, которая возвращает длину переменной в байтах. Для того, чтобы посчитать кол-во сдвигов влево числа X необходима маска, которая будет показывать, какое максимальное число переменная X может хранить перед переполнением, т.е. $mask = CHAR_BIT * sizeof(X) - 1$. Тогда кол-во сдвигов влево числа X находится так: $(-Y) \& mask$, где $-Y$ - представлено в дополнительном коде.

Теперь объединим 1 и 2 части и получим: $(X \gg Y) | (X \ll ((-Y) \& mask))$.

Ответ: $(X \gg Y) | (X \ll ((-Y) \& mask))$.

2. Циклического сдвига X влево на Y позиций. Аналогично 1 пункту: $(X \ll Y) | (X \gg ((-Y) \& mask))$.

Ответ: $(X \ll Y) | (X \gg ((-Y) \& mask))$.

Примечание:

Для ускорения/оптимизации алгоритма можно откидывать степени 2 из Y большие чем $CHAR_BIT * sizeof(X) - 1$, на которое нужно сдвинуть X , так как сдвиг X на степень двойки большую чем $CHAR_BIT * sizeof(X) - 1$ возвращает все биты X на прежние места(до сдвига на Y бит).

1.6 Задача 3.10

Для беззнаковых X и Y напишите все шаги нахождения gcd этих чисел бинарным алгоритмом Евклида.

1. $\gcd(X, Y) = \gcd(784, 939) = \gcd(392, 939) \stackrel{X/2}{=} \gcd(196, 123) \stackrel{X/2}{=} \gcd(98, 123) \stackrel{X/2}{=} \gcd(49, 123) = \gcd(\frac{123-49}{2}, 49) = \gcd(37, 49) = \gcd(\frac{49-37}{2}, 37) = \gcd(6, 37) \stackrel{X/2}{=}$

$$\begin{aligned} \gcd(3, 37) &= \gcd\left(\frac{37-3}{3}\right) = \gcd(34, 3) \stackrel{X/2}{=} \gcd(17, 3) = \gcd\left(\frac{17-3}{3}\right) = \gcd(14, 3) \stackrel{X/2}{=} \\ \gcd(7, 3) &= \gcd\left(\frac{7-3}{3}\right) = \gcd(4, 3) \stackrel{X/2}{=} \gcd(2, 3) = \gcd\left(\frac{3-2}{2}\right) = \gcd(1, 2) = \\ &1. \end{aligned}$$

Ответ: $\gcd(784, 939) = 1$.

2. $\gcd(X, Y) = \gcd(3072, 2400)$.

$$3072_{10} = 110000000000_2, 2400_{10} = 100101100000_2.$$

$$\gcd(110000000000_2, 100101100000_2) = 32 * \gcd(01100000_2, 01001011_2) =$$

$$32 * \gcd(11_2, 0001011_2) = 32 * \gcd\left(\frac{1001011_2 - 11_2}{10_2}\right) = 32 * \gcd(1001000_2, 11_2) =$$

$$32 * \gcd(1001_2, 11_2) = 32 * \gcd\left(\frac{1001_2 - 11_2}{10_2}\right) = 32 * \gcd(110_2, 11_2) = 32 * \gcd(11_2, 11_2) = 32 * 3 = 96.$$

Ответ: $\gcd(3072, 2400) = 96$.