Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Кафедра «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

ОТЧЕТ

по лабораторная работа №2

по курсу «Математическая статистика»

Вариант №12

Выполнил студент: Мхитарян В.К.

Группа: ИУ7-64

Проверил: Велищанский М.А.

2019 г.

1. Определение γ-доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

Доверительный интервал уровня γ для параметра θ называют пару статистик $\overline{\theta}(\overrightarrow{X})$ и $\underline{\theta}(\overrightarrow{X})$ таких, что $P\{\theta \in (\underline{\theta}(\overrightarrow{X}), \overline{\theta}(\overrightarrow{X}))\} = \gamma$

Пусть $\overrightarrow{X}_n$– случайная выборка объема n из генеральной совокупности X с функцией распределения$F(x;\theta)$, зависящей от параметра θ, значение которого неизвестно.

Предположим, что для параметра θ в построенном интервале $(\underline{\theta}(\overrightarrow{X}_n), \overline{\theta}(\overrightarrow{X}_n))$, где $\underline{\theta}(\overrightarrow{X}_n)$ и $\overline{\theta}(\overrightarrow{X}_n)$ являются функциями случайной выборки $\overrightarrow{X}_n$, такими, что выполняется равенство

$$P\{\underline{\theta}(\overrightarrow{X}_n) < \theta < \overline{\theta}(\overrightarrow{X}_n)\} = \gamma$$

В этом случае интервал $(\underline{\theta}(\overrightarrow{X}_n), \overline{\theta}(\overrightarrow{X}_n))$, называют интервальной оценкой для параметра θ с коэффициентом доверил γ (или, сокращенно, γ - доверительной интервальной оценкой), а $\underline{\theta}(\overrightarrow{X}_n)$ и $\overline{\theta}(\overrightarrow{X}_n)$ соответственно нижней и верхней границами интервальной оценки. Интервальная оценка $(\underline{\theta}(\overrightarrow{X}_n), \overline{\theta}(\overrightarrow{X}_n))$ представляет собой интервал со случайными границами, который с заданной вероятностью γ накрывает неизвестное истинное значение параметра γ.

Интервал $(\underline{\theta}(\overrightarrow{X}_n), \overline{\theta}(\overrightarrow{X}_n))$ называют доверительным интервалом для параметра в с коэффициентом доверия γ или γ - доверительным интервалом, где $\overrightarrow{x}_n$ – любая реализация случайной выборки $\overrightarrow{X}_n$.

2. Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала

При вычислении границ γ-доверительный интервал – интервал, который покрывает доверительного интервала для параметров нормальной случайной величины используются три центральных статистики:

параметры	**центральная статистика**	**границы**
μ - неизв., σ - изв.; оценить μ	$\frac{\mu - \overline{X}}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$	$\underline{\mu}(\overrightarrow{X}_n) = \overline{X} - \frac{u_{1-\alpha}\sigma}{\sqrt{n}}$, $\overline{\mu}(\overrightarrow{X}_n) = \overline{X} + \frac{u_{1-\alpha}\sigma}{\sqrt{n}}$
μ - неизв., σ - неизв.; оценить μ	$\frac{\mu - \overline{X}}{S(\overrightarrow{X}_n)}\sqrt{n} \sim St(n-1)$	$\underline{\mu}(\overrightarrow{X}_n) = \overline{X} - \frac{t_{1-\alpha}S(\overrightarrow{X}_n)}{\sqrt{n}}$, $\overline{\mu}(\overrightarrow{X}_n) = \overline{X} + \frac{t_{1-\alpha}S(\overrightarrow{X}_n)}{\sqrt{n}}$
μ - неизв., σ - неизв.; оценить σ	$\frac{S^2(\overrightarrow{X}_n)}{\sigma^2}(n-1) \sim \chi^2(n-1)$	$\underline{\sigma}(\overrightarrow{X}_n) = \frac{S^2(\overrightarrow{X}_n)(n-1)}{h_{1-\alpha}}$, $\overline{\sigma}(\overrightarrow{X}_n) = \frac{S^2(\overrightarrow{X}_n)(n-1)}{h_\alpha}$
μ - изв., σ - неизв.; оценить σ		

где $\alpha = \dfrac{1-\gamma}{2}$; $u_\alpha,\ t_\alpha,\ h_\alpha$ – квантили уровня α нормального распределения , распределения Стьюдента и распределения хи-квадрат.

3. Программный код

```
function Lab2()
   X = csvread('data.csv');

   [mu, s2] = CalcmuDisp(X);
   fprintf('mat. muectation: %.6f\ndispersion: %.6f\n', mu, s2);

   gamma = input('Input gamma: ');
   if isempty(gamma)
      gamma = 0.9;
      disp(gamma);
   end
   N = input('Input N: ');
   if isempty(N)
      N = length(X);
      disp(N);
   end

   [lowM, highM] = CalcBordersmu(mu, s2, gamma, N);
   [lowD, highD] = CalcBordersDisp(s2, gamma, N);
   fprintf('mat.mu. borders: (%.6f .. %.6f)\n', lowM, highM);
   fprintf('dispersion borders: (%.6f .. %.6f)\n', lowD, highD);

   figure(1);
   hold on;
   PlotMathmus(X, gamma, N);

   figure(2);
   hold on;
   PlotDispersions(X, gamma, N);

end


function [mu, s2] = CalcmuDisp(X)
%% вычисление точечных оценок математического ожидания и дисперсии

   n = length(X);

   mu = sum(X) / n;
   if n > 1
      s2 = sum((X - mu).^2) / (n-1);  % исправленная выборочная дисперсия
   else
      s2 = 0;
   end
end


function [lowM, highM] = CalcBordersmu(mu, s2, gamma, N)
%% вычисление нижней и верхней границ матожидания
   %неизвестны матожидание и дисперсия, оцениваем матожидание;
   %статистика ~St(n-1): P{|(m - mu^)/sqrt(s2)*sqrt(n)| < q_alpha} = gamma
   alpha = 1 - (1 - gamma) / 2;
   quantile = tinv(alpha, N-1);

   border = quantile * sqrt(s2) / sqrt(N);
   lowM = mu - border;
   highM = mu + border;

end
```

```
function [lowD, highD] = CalcBordersDisp(s2, gamma, N)
%% вычисление нижней и верхней границ дисперсии
   %неизвестны матожидание и дисперсия, оцениваем дисперсию;
   %статистика ~St(n-1): P{l(m - mu^)/sqrt(s2)*sqrt(n)l < q_alpha} = gamma

   alpha = (1 - gamma) / 2;
   a_quantile = chi2inv(alpha, N-1);
   highD = s2*(N-1) / a_quantile;

   low = 1 - alpha;
   a_quantile = chi2inv(low, N-1);
   lowD = s2*(N-1) / a_quantile;

end


function PlotMathmus(X, gamma, N)
%% на координатной плоскости Oyn построить прямую y=mu^(x_N), а также
%графики функций mu^(x_n), mu_down(x_n), mu_up(x_n) как функций от объема n
%выборки, где n изменяется от 1 до N

   start = 1;


   %определяем матожидания и дисперсии для разных n
   mu = zeros(N,1);
   s2 = zeros(N,1);
   for i = 1:N
      part = X(1:i);
      [mu(i), s2(i)] = CalcmuDisp(part);
   end

   %заполняем массив значений для прямой
   mu_line = zeros(N,1);
   mu_line(1:N) = mu(N);

   %заполняем массивы значений для границ
   mu_down = zeros(N,1);
   mu_up = zeros(N,1);
   for i = 1:N
      [mu_down(i), mu_up(i)] = CalcBordersmu(mu(i), s2(i), gamma, i);
   end

   plot((start:N), mu_line(start:N), 'g', 'LineWidth', 1);
   plot((start:N), mu(start:N), 'k--');
   plot((start:N), mu_up(start:N), 'b-.');
   plot((start:N), mu_down(start:N), 'r');
   grid on;
   xlabel('n');
   ylabel('\mu');
   legend('\mu\^(x_N)', '\mu\^(x_n)', '\mu^{up}(x_n)', '\mu_{down}(x_n)');
end


function PlotDispersions(X, gamma, N)
%% на координатной плоскости Ozn построить прямую y=S2(x_N), а также
   %графики функций S2(x_n), sigma_down(x_n), sigma_up(x_n) как функций от
   %объема n выборки, где n изменяется от 1 до N
```

```
    %на малых n дисперсия прыгает до 300, мелкие значения не разглядеть
    start = 5;


    %определяем матожидания и дисперсии для разных n
    mu = zeros(N,1);
    s2 = zeros(N,1);
    for i = start:N
        part = X(1:i);
        [mu(i), s2(i)] = CalcmuDisp(part);
    end

    %заполняем массив значений для прямой
    s2_line = zeros(N,1);
    s2_line(1:N) = s2(N);

    %заполняем массивы значений для границ
    sigma_down = zeros(N,1);
    sigma_up = zeros(N,1);
    for i = start:N
        [sigma_down(i), sigma_up(i)] = CalcBordersDisp(s2(i), gamma, i);
    end

    nvalues = (start:N);
    plot(nvalues, s2_line(nvalues), 'g', 'LineWidth', 1);
    plot(nvalues, s2(nvalues), 'k--');
    plot(nvalues, sigma_up(nvalues), 'b-.');
    plot(nvalues, sigma_down(nvalues), 'r');
    grid on;
    xlabel('n');
    ylabel('\sigma');
    legend('S^2(x_N)', 'S^2(x_n)', '\sigma^{up}(x_n)', '\sigma_{down}(x_n)');
end
```

4. Результат работы программы

```
точечная оценка там ожидания: 9.487167
 дисперсии: 1.217306
Введите гамму:
    0.9000

Введите N:
   120

границы мат ожидания: (9.320200 .. 9.654134)
границы дисперсии: (0.995866 .. 1.527872)
```

5. Графики

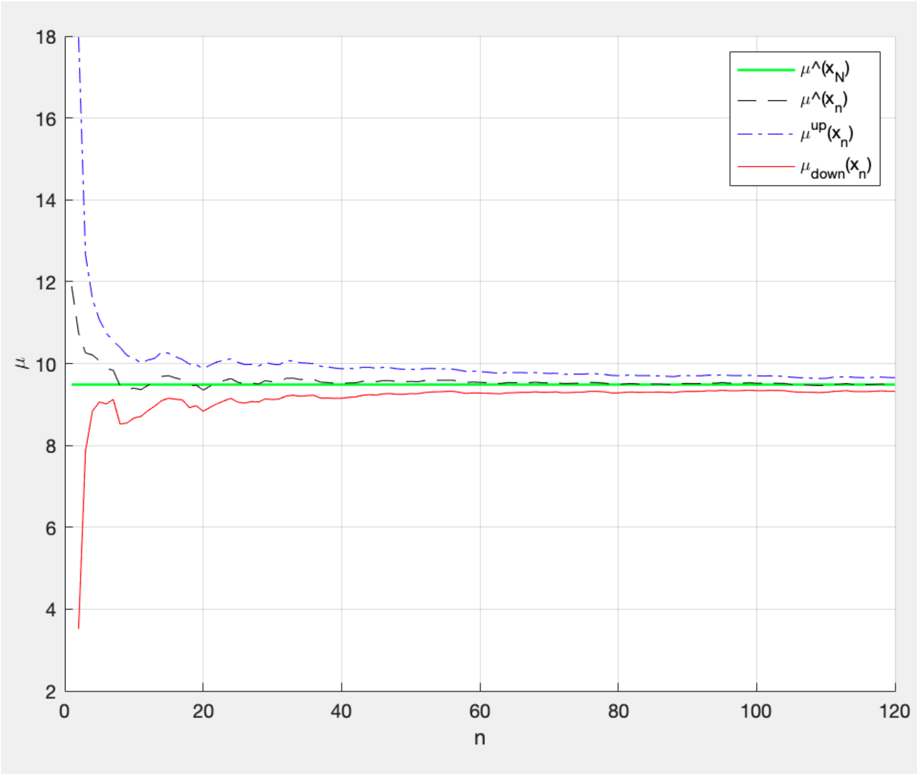

Рис. 1 – Графики для мат ожидания

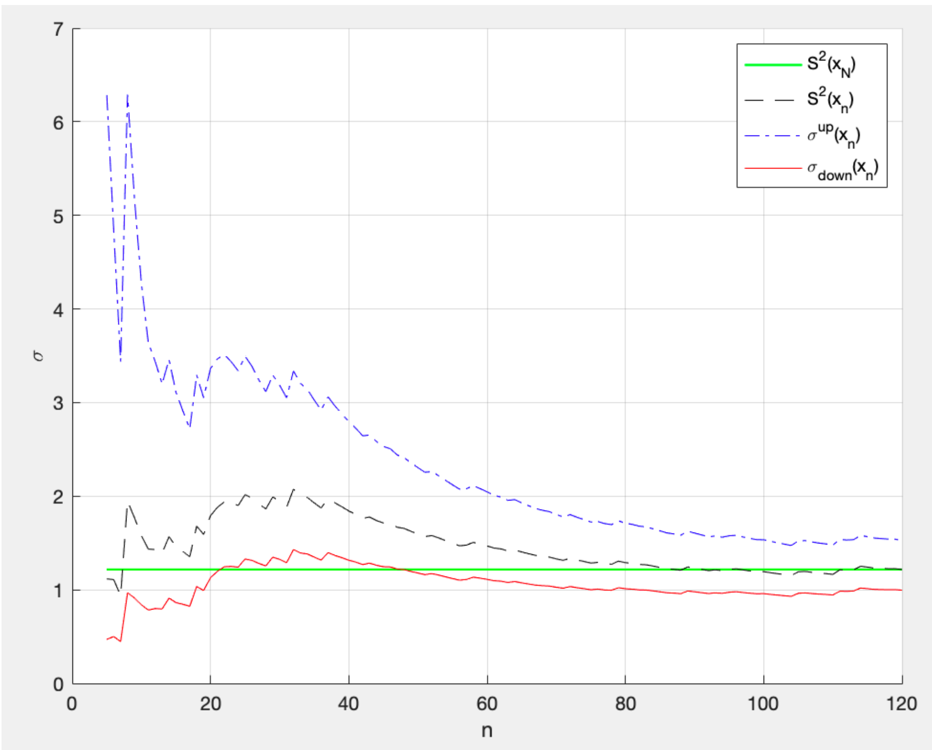

Рис. 2 – Графики для дисперсии