1. Сформулировать и доказать первое неравенство Чебышева.

Th:
Пусть:
1) X — св; 2) X≥0 (т.е. $P\{X < 0\} = 0$); 3) ∃ MX
Тогда:
$$\exists \varepsilon > 0,\ \ P\{X > \varepsilon\} \le \frac{MX}{\varepsilon}$$
Доказательство:
Для случая непрерывной СВ X (для дискретной СВ X докв-во аналогично).

$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) = |X >= 0| = \int_{0}^{+\infty} x f(x) dx =$ |свойство аддитивности интеграла| =

$= \int_{0}^{\varepsilon} x f(x) dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} x f(x) dx \ge \int_{\varepsilon}^{+\infty} x f(x) dx =$

$= |x \in [\varepsilon; +\infty)\ to\ est\ |x \ge \varepsilon| = \varepsilon \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x) dx = \varepsilon P\{X \ge \varepsilon\}$

т.е. $MX \ge \varepsilon P\{X \ge \varepsilon\} \Rightarrow P\{X \ge \varepsilon\} \le \frac{MX}{\varepsilon}$

2. Сформулировать и доказать первое неравенство Чебышева.

Th:
Пусть:
1) X — св; 3) ∃ MX, ∃ DX
Тогда:
$$\exists \varepsilon > 0,\ \ P\{|X - MX| \ge \varepsilon\} \le \frac{DX}{\varepsilon^2}$$
Доказательство:
$DX = M[(X - MX)^2] =$
| 1) Рассмотрим СВ $Y = (X - MX)^2 \ge 0$ 2) из 1-го неравенства Чебышева для Y следует, что
$\forall \delta > 0\ P\{Y \ge \delta\} \le \frac{MY}{\delta}$ (*) 3) исп (*) для $\delta = x^2$ | =
=
$\delta P\{(X - MX)^2 \ge \delta\} = |\delta = \varepsilon^2| = \varepsilon^2 P\{(X - MX)^2 \ge \varepsilon^2\} =$
$\varepsilon^2 P\{(X - MX)^2 > \varepsilon^2\} = \varepsilon^2 P\{|X - MX| > \varepsilon\}$
т.о.
$DX \ge \varepsilon^2 P\{|X - MX| > \varepsilon\} \Rightarrow P\{|X - MX| > \varepsilon\} \le \frac{DX}{\varepsilon^2}$

3. Для последовательности случайных величин сформулировать определения сходимости по вероятности и слабой сходимости. Сформулировать закон больших чисел

Говорят, что последовательность СВ X1,X2,… сходится по вероятности к СВ Z, если
$\forall \varepsilon > 0\ P\{|X_n - Z| \ge \epsilon\} \to 0$, при $(n \to \infty)$
обозначение:

Говорят, что последовательность СВ x1,x2,… слабо сходится к СВ Z, если функциональная последовательность $F_{x_1}(x), F_{x_2}(x) \dots$ поточено сходится к функции $F_z(x)$ во всех точках непр-ти последовательности, т.е.
$(\forall x_0 \in \mathbb{R})($ функция $F_z(x)$ непр в $x_0)$
$\Rightarrow F_{x_n}(x_0) \to F_z(x_0)$ при $n \to \infty)$
Обозначение: $F_{X_n} \Rightarrow F_z(x)$

Говорят, что последовательность X1,X2,… удовлетворяет закону больших числе, если
$\forall \epsilon > 0\ \ P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i| \ge \epsilon\} \to 0,\ pri\ n \to \infty$
, где $m_i = MX_i,\ i \in \mathbb{N}$

4. Сформулировать закон больших чисел. Доказать закон больших чисел в форме Чебышева

Говорят, что последовательность X1,X2,… удовлетворяет закону больших числе, если
$\forall \epsilon > 0\ \ P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i| \ge \epsilon\} \to 0,\ pri\ n \to \infty$
, где $m_i = MX_i,\ i \in \mathbb{N}$

ЗБЧ в форме Чебышева
Пусть
1) X1,X2,… последовательность СВ
2) $\exists MX_i = m_i,\ \exists DX_i = \delta^2,\ i \in \mathbb{N}$
3) Дисперсия СВ x1,x2,… огр в совокупности, т.е.
$\exists C > 0\ \delta_i^2 \le C,\ i \in \mathbb{N}$
Тогда
Последовательность X1,X2,… удовлетворяет ЗБЧ
Доказательство

1) Рассмотрим $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ n \in \mathbb{N}$

тогда $M[\overline{X}_n] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i$

$D[\overline{X}_n] = D[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i] = n^2 D[\sum_{i=1}^{n} x_i] =$
= | Xi независимы =
$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2$|

2) Применим к СВ $\overline{X}_n$ 2 неравеносвто Чебышева
$P\{|\overline{X}_n - \overline{X}_n| \ge \epsilon\} \le \frac{D\overline{X}_n}{\varepsilon^2}$ т.о.
$P\{|\overline{X}_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i| \ge \epsilon\} \le \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{n^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_i$
$\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 \le |\ \delta_i^2 \le C\ | \le \sum_{i=1}^{n} C = nC$
$0 \le P\{|\overline{X}_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i| \ge \varepsilon\} \le \frac{C}{\varepsilon^2}\frac{1}{n^2}n = \frac{C}{\epsilon^2}\frac{1}{n} \to 0$
, при $n \to \infty$

$\Rightarrow (n \to \infty \Rightarrow 0)$ по th о 2 милиционерах
$P\{|\overline{X}_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i| \ge \epsilon\} \to 0$, при $n \to \infty$, то есть последовательность X1,X2... удовлетворяет ЗБЧ

8. Сформулировать определение начальных и центральных выборочных моментов порядка k, выборочного среднего и выборочной дисперсии. Являются ли эти статистики несмещенными оценками своих теоретических аналогов?

- Выборочным начальным моментом порядка k наз статистика $\hat{m}_k(\overrightarrow{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$.
- Выборочным средним моментом порядка k наз статистика $\hat{\nu}_k(\overrightarrow{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k$.
- Выборочным средним наз статистику $\hat{m}(\overrightarrow{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$.
- Выборочной дисперсией наз статистику $\hat{\sigma}^2(\overrightarrow{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$.
- а) let $g(\overrightarrow{x})$ статистики g на выборке $\overrightarrow{x}$ - выборочное значение; б) let $\overrightarrow{x}$ реализация сл выборки $\overrightarrow{X}$. Это позволяет считать, что сл вел X моделируется диск сл вел, распределение кот имеет вид:

	X_1	…	X_n
P	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$

. Мат ожидание и дисперсия такой сл вел соотв выборочному среднему и выборочной дисперсии указанной выборки соотв.

5. Сформулировать закон больших чисел в форме Чебышева. Доказать следствие этого закона для одинаково распределенных случайных величин и закон больших чисел в форме Бернулли.

- Теор. Чебышева: а) let $X_1, X_2 \dots$ - посл-ть незав. сл. вел; б) $\exists MX_i = m_i, \exists DX_i = \sigma_i^2, i \in N$; в) $\exists C > 0, \sigma_i^2 \le C, i \in N$. Тогда $X_1, X_2 \dots$ удовл. ЗБЧ.
- Если посл-ть $X_1, X_2 \dots$ удовл. Th Чебышева, то говорят, что она удовл. ЗБЧ в форме чебышева.
- Следствие1: а) let выполн. усл. Th Чебышева; б) все сл. вел. X_i одинаково распр. Тогда
$\forall \xi > 0, P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m| \ge \xi\} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$
- Док-во: т. к. $m_i \equiv m$, то $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i = m$ и исп-м ЗБЧ в форме Чебышева.
- Следствие2: а) let n исп. по схеме Бернулли с вер. успеха p; б) r_n - $\frac{\textbf{число успехов в серии}}{n}$, тогда
$r_n \xrightarrow[n \to \infty]{P} p.$
- Док-во: let X_i, $i = \overline{1,n}$, $X_i = 1$, если в i-ом исп произ успех, 0 иначе. Тогда: а) закон расп:

X_i	0	1
P	q	p

q = 1-p, т о все X_i одинаково распр, $MX_i = p$; $DX_i = pq$; б) Дисперсии огр в сов-ти; в) X_i независ, т к схема Бернулли. Т о посл-ть X_1, $X_2 \dots$ удовл следствию1 и для нее справедливо
$\forall \xi > 0, P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m| \ge \xi\} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, где
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m = r_n$, а m = p, откуда:
$P\{|r_n - p| \ge \xi\} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, т е $r_n \xrightarrow[n \to \infty]{P} p$.

6. Сформулировать центральную предельную теорему. Доказать интегральную теорему Муавра-Лапласа.

- let а) $X_1, X_2 \dots$ - посл-ть незав. сл. вел; б) Все сл вел X_i, $i \in N$ одинаково распр; в) $\exists MX_i = m, \exists DX_i = \sigma^2$. Рассмотрим сл вел
$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, M\overline{X}_n = m, n \in N,$
$D\overline{X}_n = \frac{\sigma^2}{n}, n \in N$. Рассмотрим сл вел
$Y_n = \frac{\overline{X}_n - M\overline{X}_n}{\sqrt{D\overline{X}_n}} = \frac{\overline{X}_n - m}{\sigma / \sqrt{n}}, n \in N$, тогда
$MY_n = 0, DY_n = 1$.
- Теорема (ЦПТ): let условия а)-в), тогда посл-ть Y_n при $n \to \infty$ слабо сходится к сл вел Z ~ N(0,1), т е $\forall x \in R$, $F_{Y_n}(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} F_Z(x)$.
- Теорема (Муавра-Лапласа): let а) проводилось n>>1 исп по схеме Бернулли с вер-тью успеха p; б) k - число успехов. Тогда вер-ть того что $k_1 \le k \le k_2$ можно вычислить по формуле:
$P\{k_1 \le k \le k_2\} \approx \Phi(x_2) - \Phi(x1)$, где
$x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}}, i = \overline{1,2}$.
- Док-во: let сл вел $X_i = 1$, если в i-ом исп произ успех, 0 иначе. Тогда: а) сл вел $X_1, \dots, X_n$ независ; б) $MX_i = p$; $DX_i = pq$; в) X_i одинаково распр.
$P\{k_1 \le k \le k_2\} = P\{k_1 \le \sum_{i=1}^{n} X_i \le k_2\} =$
$= P\{\frac{k_1}{n} - p \le \overline{X}_n - p \le \frac{k_2}{n} - p\} =$
$= P\{\frac{k_1/n - p}{\sqrt{pq/n}} \le \frac{\overline{X}_n - p}{\sqrt{pq/n}} \le \frac{k_2/n - p}{\sqrt{pq/n}}\} =$
$= P\{x_1 \le Y_n \le x_2\} =$ | в соотв с ЦПТ (т к n>>1) Y_n~N(0,1) | $\approx \Phi(x_2) - \Phi(x1)$.

7. Сформулировать определение случайной выборки и выборки, вариационного ряда. Записать и обосновать выражения для функций распределения случайной выборки и крайних членов вариационного ряда.

- Случайной выборкой из генеральной сов-ти X нас случ вектор $\overrightarrow{X}(X_1, \dots, X_n)$, где $X_1, \dots, X_n$ незав в сов-ти сл вел, каждая из к-рых имеет то же распр-е, что и X. Любую возможную реализацию $\overrightarrow{x} = (x_1, \dots, x_n)$ сл выборки $\overrightarrow{X}$ называют выборкой («просто» выборкой) из ген сов-ти X.
- Расположим элементы выборки $\overrightarrow{x}$ в порядке неуб, тогда посл-ть $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ наз вариационным рядом выборки $\overrightarrow{x}$.
- а) $P\{X_{(i)} \le X_{(i+1)}\} = 1, i = \overline{1, n-1}$;
- б)
$P\{X_{(n)} < x\} = P\{X_{(1)} < x, \dots, X_{(n)} < x\} =$
| X_i - независимые | $= P\{X_1 < x\} \cdot \dots$
$\cdot P\{X_n < x\} = [F(x)]^n$;
в)$P\{X_{(1)} < x\} = 1 - P\{X_{(1)} \ge x\} = 1 -$
$P\{X_{(1)} \ge x, \dots, X_{(n)} \ge x\} = 1 - P\{X_1 \ge x\} \cdot$
$\dots \cdot P\{X_n \ge x\} = 1 - (1 - P\{X_n < x\}) \cdot \dots$
$\cdot (1 - P\{X_n < x\}) = 1 - [1 - F(x)]^n$.

9. Сформулировать определения эмпирической функции распределения и выборочной функции распределения. Сформулировать и доказать теорему о сходимости выборочной функции распределения.

- Эмпирической ф-й распр, отвечающей выборке $\overrightarrow{x}$, назыв ф-я $F_n(x) = \frac{n(x, \overrightarrow{x})}{n}$, где $n(x, \overrightarrow{x})$- кол-во эл-ов в выборке $\overrightarrow{x}$, кот имеют знач, меньше x
- Выборочной ф-й распр, отвечающ сл выборке X, назыв ф-я $\widehat{F_n}(x) = \frac{n(x, \overrightarrow{X})}{n}$, где $n(x, \overrightarrow{X})$- сл вел, кот для кажд реализации $\overrightarrow{x}$ сл выборки $\overrightarrow{X}$ принимает знач = $n(x, \overrightarrow{x})$
- ∀фикс $x \in R$ посл $F_n(x)$ сходится по вер-ти к значению $F(x)$ теоретич (т.е. «истинной») ф-ий распр сл вел X $\forall x \in R$ $\widehat{F_n} \xrightarrow{P}_{n \to \infty} F(x)$;
Док-во: $\widehat{F_n}(x)$-относ частота успеха в серии из n испит по сх Бернулли с вер успеха В соответствии с ЗБЧ в форме Бернулли
$\widehat{F_n} \xrightarrow{l}_{n \to \infty} P$ по p=P{X<x}=F(x)

10. Понятия интервального статистического ряда, эмпирической плотности, гистограммы, полигона частот.

- Интервальным статич рядом назыв табл

J_1	…	J_m
n_1	…	n_m

Здесь n_i-кол-во эл-ов в выборке $\overrightarrow{x}$, принадл J_i
- Эмпирич плотностью, отвеч выборке $\overrightarrow{x}$, назыв ф-ю $f_n(x) = \{\frac{n_i}{n\ \Delta}, x \in J_i$; 0, **иначе**
- График эмпирич плотности назыв гистограммой

- Полигоном частот для выборки $\overrightarrow{x}$ назыв ломаная, звенья кот соединяют середины верхних сторон прямоугольников гистограммы

11. Постановка задачи идентификации неизвестных параметров закона распределения случайной величины. Определение точечной оценки. Определение несмещенной точечной оценки. Показать, что выборочная дисперсия является смещенной оценкой дисперсии. Записать формулу для исправленной выборочной дисперсии.

- let X-сл вел, общий вид закона распр известен, но неизвестн знач-е 1го или нескольких пар-ов этого закона. Требуется найти (оценить) знач-е этих пар-ов. let ф-я распр сл вел Xзависимой от одного неизв пар-ра $\theta \in R$, т.е. $F(x, \theta)$- ф-я распр сл вел X
- статистику $\widehat{\theta}(\overrightarrow{X})$ назыв точечной оценкой пар-ра θ, если ее выборочное знач принимается в кач-ве пар-ра θ, $\theta := \widehat{\theta}(\overrightarrow{x})$
- let 1)$F(x, \theta)$-ф-я распр сл вел X, содерж неизв пар-р θ; 2) точечн оценка для θ; тогда точ оценка $\widehat{\theta}(\overrightarrow{X})$ назыв несмещенной оценкой для θ, если $\exists M[\widehat{\theta}(\overrightarrow{X})] = \theta$
- let X-сл вел, $\exists DX = \delta^2$-неизв. Можно показать, что выборочная дисперсия
$\widehat{\delta^2}(\overrightarrow{X}) = \frac{1}{n}\sum^{n}(X_i - \overline{X})^2$ яви смещ оценкой дисперсии, причем $M[\delta^2(\overrightarrow{X})] = \frac{n-1}{n}\delta^2$. По этой причине рассм стат
$S^2(\overrightarrow{X}) = \frac{n-1}{n}\widehat{\delta^2}(\overrightarrow{X}) = \frac{1}{n-1}\sum^{n}(X_i - \overline{X})^2$
для которой $M[S^2(\overrightarrow{X})] = \frac{n}{n-1}M[\widehat{\delta^2}] =$
$\frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n}\delta^2 = \delta^2$, т.е. $S^2(\overrightarrow{X})$ явл несмещенной конечной дисперсией
- статистика $S^2(\overrightarrow{X})$ - исправленная выб дисперсия

12.Постановка задачи идентификации неизвестных параметров закона распределения случайной величины. Определение точечной оценки. Определение состоятельной оценки. Привести примеры состоятельной и несостоятельной оценок (с обоснованием).

- let X-сл вел, общий вид закона распр известен, но неизвестн знач-е 1го или нескольких пар-ов этого закона. Требуется найти (оценить) знач-е этих пар-ов. let ф-я распр сл вел Xзависимой от одного неизв пар-ра $\theta \in R$, т.е. $F(x, \theta)$- ф-я распр сл вел X
- статистику $\widehat{\theta}(\overrightarrow{X})$ назыв точечной оценкой пар-ра θ, если ее выборочное знач принимается в кач-ве пар-ра θ, $\theta := \widehat{\theta}(\overrightarrow{x})$
- let 1)$F(x, \theta)$-ф-я распр сл вел X, содерж неизв пар-р θ; 2) точечн оценка для θ; оценка $\widehat{\theta}(\overrightarrow{X})$ назыв состоятельной оценкой пар-ра θ, если $\widehat{\theta}(\overrightarrow{X}) \xrightarrow{P}_{n \to \infty} \theta$, где n - объем выборки X
- let 1) X- сл вел; 2) $\exists MX = m$; 3) $\exists DX = \theta^2$; Покажем, что выборочное среднее $\overline{X}$ явл состоятельн оценкой для m: а) let $X_1, \dots, X_n, \dots$ явл посл-тью независ одинаков расп сл вел;
б) $\exists MX_i = m, \exists DX_i = \delta^2, i \in N$; в) из а) б) -> посл-ть $X_1, \dots, X_n$ уд-т ЗБЧ в форме Чеб-ва=>
$\forall \epsilon > 0\ P\{|\overline{X} - m| < \epsilon\} \xrightarrow{P}_{n \to \infty} 1$, т.е.
$\overline{X} \xrightarrow{P}_{n \to \infty} m$
- let 1) $X \sim N(m, \delta^2)$ причем m и δ^2-неизвестны; 2) $\tilde{m}(\overrightarrow{X}) = X_1$ - рез-т 1го наблюд - точечн оченка для m. Покажем, что $\widehat{m}$ не явл состоят оценкой. Зафикс $\epsilon > 0$
$P\{|\widehat{m}(\overrightarrow{x}) - m| < \epsilon\} = P\{|X_1 - m| < \epsilon\} =$
$P\{m - \epsilon < X_1 < m + \epsilon\} =$
$\wr X_1 \sim X \sim N(m, \delta^2) \wr = \mathbf{\Phi}_0(\frac{m + \epsilon - m}{\delta}) -$
$\mathbf{\Phi}_0(\frac{m - \epsilon - m}{\delta}) = 2\mathbf{\Phi}_0(\frac{\epsilon}{\delta}) \ne 1$, если
$\frac{\epsilon}{\delta} \ne +\infty$. Поэтому
$P\{|\widehat{m}(\overrightarrow{x}) - m| < \epsilon\} \nrightarrow_{n \to \infty} 1$

13. Постановка задачи идентификации неизвестных параметров закона распределения случайной величины. Определение точечной оценки. Определение эффективной оценки. Показать, что выборочное среднее является эффективной оценкой математического ожидания в классе линейных оценок.

- Пусть X-сл вел, общий вид закона распр известен, но неизвестны знач-я одного или нескольких пар-ов этого закона. Требуется найти (оценить) знач-я этих пар-ов. Для простоты будем считать, что ф-я распр сл вел X зависит от одного неизв пар-ра $\theta \in R$, т.е. $F(x, \theta)$- ф-я распр сл вел X.
- Статистику $\hat{\theta}(\vec{X})$ назыв точечной оценкой пар-ра θ, если ее выборочное знач принимается в кач-ве знач пар-ра θ, $\theta := \hat{\theta}(\vec{X})$.
- Оценка $\hat{\theta}$ наз эффективной оценкой для пар-ра θ, *если*: 1) $\hat{\theta}$ явл несмещ оценкой для θ 2) $\hat{\theta}$ обладает наим дисперсией среди всех несмещ оценок для θ.
- Пусть X – сл вел, ∃MX = m, $\exists DX = \sigma^2$. Пок, что выборочное среднее $\bar{X}$ явл эфф оценкой для m в классе линейных оценок. Линейная оценка имеет вид: $\hat{m}(\vec{X}) = \lambda x_1 + \ldots + \lambda x_n$, *где* $\lambda_j \in R$, $j = \overline{1,n}$. Т. к. оценка должна быть несмещ, то $M[\hat{m}(\vec{X})] = M[\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i] = \sum_{i=1}^n \lambda_i M X_i = m \sum_{i=1}^n \lambda_i$. *Требуем*: $M[\hat{m}(\vec{X})] = m => \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1.$

Подберем в лин оценке $\hat{m}(\vec{X}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ конст-ты λ_i т. о., чтобы D[$\hat{m}(\vec{X})$] была мин среди знач дисп всевозм лин оценок. $D[\hat{m}] = D[\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i] =$ X_i *– независ* $= \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 D X_i = \sigma^2 \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$.

Т.о. приходим к з-че поиска extr:

$$\begin{cases} f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 -> min \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1. \end{cases}$$

Составим ф-ю Лагранжа: L $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu) = f(x_1, \ldots, x_n) - \mu(\sum_{i=1}^n \lambda_i - 1) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - \mu(\sum_{i=1}^n \lambda_i - 1)$.

Необх усл extr: $\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 2\lambda_i - \mu = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mu} = -(\sum_{i=1}^n \lambda_i - 1) = 0 \end{cases}$

$=> \lambda_i = \frac{\mu}{2}$, $i = \overline{1,n}$.

$1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \frac{\mu n}{2} => \mu = \frac{2}{n}$ Тогда $\lambda_i = \frac{1}{n}$, $i = \overline{1,n}$. Можно, проверив дост усл extr пок, что т $(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$ *явл усл т inf ф-ии* $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

Т.о. лин оценка с наим дисп: $\hat{m}(\vec{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}$. *Соотв знач дисп*: $D[\hat{m}(\vec{X})] = \frac{\sigma^2}{n}$

14. Постановка задачи идентификации неизвестных параметров закона распределения случайной величины. Определение точечной оценки. Определение эффективной оценки. Доказать теорему о единственности эффективной оценки.

- Пусть X-сл вел, общий вид закона распр известен, но неизвестны знач-я одного или нескольких пар-ов этого закона. Требуется найти (оценить) знач-я этих пар-ов. Для простоты будем считать, что ф-я распр сл вел X зависит от одного неизв пар-ра $\theta \in R$, т.е. $F(x, \theta)$- ф-я распр сл вел X.
- Статистику $\hat{\theta}(\vec{X})$ назыв точечной оценкой пар-ра θ, если ее выборочное знач принимается в кач-ве знач пар-ра θ, $\theta := \hat{\theta}(\vec{X})$.
- Оценка $\hat{\theta}$ наз эффективной оценкой для пар-ра θ, *если*: 1) $\hat{\theta}$ явл несмещ оценкой для θ 2) $\hat{\theta}$ обладает наим дисперсией среди всех несмещ оценок для θ.
- Пусть $\hat{\theta}_1(\vec{X})$ и $\hat{\theta}_2(\vec{X})$ – две эфф оценки для пар-ра θ. Тогда $\hat{\theta}_1(\vec{X}) = \hat{\theta}_2(\vec{X})$. Это рав-во явл рав-вом для 2 случ вел $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$, поэтому оно понимается в вероятностном смысле P{$\vec{X} \in \{\vec{X} : \hat{\theta}_1(\vec{X}) \neq \hat{\theta}_2(\vec{X})\}$} = 0. Док-во: Рассм оценку $\hat{\theta} = \frac{1}{2}[\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2]$. M$\hat{\theta}$ = M $[\frac{1}{2}(\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2)] = \frac{1}{2}(M\hat{\theta}_1 + M\hat{\theta}_2) = \hat{\theta}_1$ *и* $\hat{\theta}_2$ *– эфф => несмещ* $= \frac{1}{2}[\theta + \theta] = \theta$, т.е. $\hat{\theta}$ также явл несмещ оценкой для θ. D $\hat{\theta} = \frac{1}{4}D[\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2] = \frac{1}{4}[D\hat{\theta}_1 + D\hat{\theta}_2 + 2cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)] =$ обозн $D\hat{\theta}_1 = a^2 = D\hat{\theta}_2$ *т.к.* $\hat{\theta}_1$ *и* $\hat{\theta}_2$ *- эфф, то они имеют* одинаковую дисп-ю, кот явл наименьшей среди дисп-й всех несмещ оценок для θ. $= \frac{1}{2}[a^2 + 2cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)](*)$. $|cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)| \le \sqrt{D\hat{\theta}_1 + D\hat{\theta}_2} = a^2$. *Т.о.* $D\hat{\theta}_1 \le$ *см*$(*) \le \frac{1}{2}[a^2 + a^2] = a^2 (**)$. $\hat{\theta}$ – несмещ оценка для θ, а $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ – эфф оценки $=> D\hat{\theta}_1 = D\hat{\theta}_2 \le$ D$\hat{\theta}$. С учетом (**):D $\hat{\theta} = a^2$. $(*) =>$ $a^2 = \frac{1}{2}[a^2 + cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)] => cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = a^2$, *т.е.* $cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \sqrt{D\hat{\theta}_1 + D\hat{\theta}_2} =>$ св-ва ков $=> \hat{\theta}_1$ *и* $\hat{\theta}_2$ связаны положит лин зав-ю, т.е. $\hat{\theta}_1 = k\hat{\theta}_2 + b (k > 0)(***)$. (***) $=> D\hat{\theta}_1 = k^2 D\hat{\theta}_2$ $=> k^2 = 1$ => k=1. Тогда $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2 + b$. $M\hat{\theta}_1 = M\hat{\theta}_2$+b => b = 0. Т.о. (***) $=> \hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2$.

15. Постановка задачи идентификации неизвестных параметров закона распределения случайной величины. Определение точечной оценки. Определение эффективной оценки. Определение количества информации по Фишеру. Сформулировать теорему о неравенстве Рао-Крамера.

- Пусть X-сл вел, общий вид закона распр известен, но неизвестны знач-я одного или нескольких пар-ов этого закона. Требуется найти (оценить) знач-я этих пар-ов. Для простоты будем считать, что ф-я распр сл вел X зависит от одного неизв пар-ра $\theta \in R$, т.е. $F(x, \theta)$- ф-я распр сл вел X.
- Статистику $\hat{\theta}(\vec{X})$ назыв точечной оценкой пар-ра θ, если ее выборочное знач принимается в кач-ве знач пар-ра θ, $\theta := \hat{\theta}(\vec{X})$.
- Оценка $\hat{\theta}$ наз эффективной оценкой для пар-ра θ, *если*: 1) $\hat{\theta}$ явл несмещ оценкой для θ 2) $\hat{\theta}$ обладает наим дисперсией среди всех несмещ оценок для θ.
- Пусть X – непрер сл вел. f(t, θ) – ф-я пл-ти распр вер-ей сл вел X. $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$– случ выборка из ген сов-ти X. Тогда ф-ия пл-ти распр сл в-ра $\vec{X}$: $f_{\vec{X}}(t_1, \ldots, t_n, \theta)$ = f(t_1, θ)*…* f(t_n, θ). Обознач $(t_1, \ldots, t_n) = \vec{T}$. Величина $\mathrm{I}(\theta) = \mu\left\{\left[\frac{\partial ln f_{\vec{X}}(\vec{T}, \theta)}{D\theta}\right]^2\right\}$ – назыв количеством информации по Фишеру (в серии из n наблюдений)
- Пусть 1) рассматр регулярная модель 2) $\hat{\theta}(\vec{X})$ – несмещ точечная оценка парам θ з-на распред сл вел X. Тогда D$\hat{\theta}(\vec{X}) \ge \frac{1}{I(\theta)}$ – нер-во Рао-Крамера, где I(θ) – кол-во инф по Фишеру.

16. Постановка задачи идентификации неизвестных параметров закона распределения случайной величины. Определение точечной оценки. Определение эффективной оценки. Показать, что выборочное среднее является эффективной оценкой математического ожидания нормальной случайной величины при известной дисперсии.

- Пусть X-сл вел, общий вид закона распр известен, но неизвестны знач-я одного или нескольких пар-ов этого закона. Требуется найти (оценить) знач-я этих пар-ов. Для простоты будем считать, что ф-я распр сл вел X зависит от одного неизв пар-ра $\theta \in R$, т.е. $F(x, \theta)$- ф-я распр сл вел X.
- Статистику $\hat{\theta}(\vec{X})$ назыв точечной оценкой пар-ра θ, если ее выборочное знач принимается в кач-ве знач пар-ра θ, $\theta := \hat{\theta}(\vec{X})$.
- Оценка $\hat{\theta}$ наз эффективной оценкой для пар-ра θ, *если*: 1) $\hat{\theta}$ явл несмещ оценкой для θ 2) $\hat{\theta}$ обладает наим дисперсией среди всех несмещ оценок для θ.
- Рассм норм модель N(θ, σ^2) в предполож, что σ^2 – известна. Оценка $\hat{\theta}(\vec{X}_n) = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ явл несмещ для неизвестного среднего знач-я $\theta = \mu$. Убедимся в её эфф по Рао-Крамеру. В силу нез-ти эл-ов сл выборки $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ *имеем* D($\vec{X}_n$) = D($\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$) $= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n D X_i = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$.

$$\mathrm{I}(\theta) = M\left(\frac{\partial}{\partial\theta} ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(X-\theta)^2}{2\sigma^2}}\right)\right)^2 =$$

$M\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - ln\sigma - \frac{(X-\theta)^2}{2\sigma^2}\right)\right)^2 = M\frac{(X-\theta)^2}{\sigma^4} = \frac{\sigma^2}{\sigma^4} = \frac{1}{\sigma^2} => e(\theta) = \frac{1}{nI(\theta)D\bar{X}} = \frac{n}{n\frac{1}{\sigma^2} * \sigma^2} = 1,$

т.е. для норм модели $\bar{X}$ – эфф оценка пар-ра μ.

17. Постановка задачи идентификации неизвестных параметров закона распределения случайной величины. Определение точечной оценки. Описать метод моментов построения точечной оценки. Привести пример.

let X-сл вел, общий вид закона распр известен, но неизв знач одного или неск пар-ов этого закона. Требуется найти(оценить) знач этих пар-ов.

let ф-я распр сл вел X зависит от одного неизв пар-ра $\theta \in R$, т.е. $F(x, \theta)$- ф-я распр сл вел X.

Статистику $\hat{\theta}(\vec{X})$ назыв *точечной оценкой* пар-ра θ, если ее выборочное знач принимается в кач-ве пар-ра θ, $\theta := \hat{\theta}(\vec{x})$

Метод моментов. let X-сл вел, з-н распр которой известен с точностью до вектора $\vec{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_r)$ неизв пар-ов.(требуется оценить знач этих пар-ов)

Усл. вел. X $\exists r$ первых моментов.

Для построения т. Оценок параметров $\theta_1, \cdots, \theta_r$ необходимо: 1) найти выражения для r первых теор моментов сл вел X (т.к. ф-я распр сл вел X зависит от параметров $\theta_1, \cdots, \theta_r$ то и теор моменты также будут зависеть от этих пар-ов):

$m_1(\theta_1, \ldots, \theta_r) = M[X]$…

$m_r(\theta_1, \ldots, \theta_r) = M[X^r]$

2) Нужно приравнять выражения для теор. моментов к их выборочным аналогам:

$$\begin{cases} m_1(\theta_1, \ldots, \theta_r) = \hat{m}_1(\vec{X}) \\ m_r(\theta_1, \cdots, \theta_r) = \hat{m}_r(\vec{X}) \end{cases}$$

3) Решаем получ систему относительно $\theta_1, \cdots, \theta_r$

$$\begin{cases} \theta_1 = \hat{\theta}_1(\vec{X}) \\ \theta_r = \hat{\theta}_r(\vec{X}) \end{cases}$$

Пример: $X \sim R[a, b]$ построить т оценки для a и b.

Решение:

---

18. Постановка задачи идентификации неизвестных параметров закона распределения случайной величины. Определение точечной оценки. Описать метод максимального правдоподобия построения точечной оценки. Привести пример.

См. 17

Метод max правдоподобия. let X-сл вел, з-н распр которой зависит от неизв пар-ов $\vec{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_r)$.

$\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ – сл выборка из ген совокупности.

Опр. Функцией правдоподобия сл выборки $\vec{X}$ наз функция $L(\vec{X}, \theta_1, \ldots, \theta_r) = p(X_1, \vec{\theta}) \cdot \ldots \cdot p(X_n, \vec{\theta})$,

где $p(X_i, \vec{\theta}) = P\{X = x_i\}$, если X – дискр сл вел

$p(X_i, \vec{\theta}) = f(X_i, \vec{\theta})$ если X – непр сл вел

В методе max правд в кач-ве точной оценки знач $\vec{\theta}$ использ то его знач, кот максимиз-т ф правд L. Для постр такой оценки надо решить задачу $L(\vec{X}, \vec{\theta}) \to max$, либо эквив ей $lnL(\vec{X}, \vec{\theta}) \to max$

Если ф-я праводп диф-ма по вектору парам-ов $\vec{\theta}$, то исп необх усл экстремума: $\frac{\partial L(\vec{x}_1 \vec{\theta})}{\partial \theta_j} = 0,$ $j = \overline{1; r}$

Пример: $X \sim R[a, b]$ построить т оценки для a и b.

Решение:

---

19. Постановка задачи идентификации неизвестных параметров закона распределения случайной величины. Сформулировать определение γ-доверительного интервала. Сформулировать определение центральной статистики и изложить общий алгоритм построения γ-доверительного интервала для скалярного параметра.

См 17.

γ-доверительным инт-ом для парам θ назыв пара статистик $\theta(\vec{X})$ и $\bar{\theta}(\vec{X})$ таких, что

$$P\left\{\theta \in \left(\theta(\vec{X}), \bar{\theta}(\vec{X})\right)\right\} = j$$

Статистика g$(\vec{x}, \theta)$ наз *центральной*, если закон ее распределения не зависит от θ, т.е

$Fg(x, \theta) \equiv Fg(x)$, *где* Fg - ф-я распр сл вел g.

Алгоритм 1) let g$(\vec{x}, \theta)$ явл центральной,

2) g$(\vec{x}, \theta)$ определена на $\forall\theta \in R$ непрерывно и монотонно возрастает по θ.

3) ф-я распр Fg(x) монотонно возр и непрервна.

=> $\forall q \in (0,1) \exists!$ Корень ур-я Fg(x) = q

h_q – назыв квантилью ур-я q для сл вел g$(\vec{x}, \theta)$

4) выбраны значения $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, такие что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - \gamma$

Тогда из св-в непр случ вел: $\gamma = 1-$ $(\alpha_1 + \alpha_2) = 1 - \alpha_2 - \alpha_1 = Fg(h_{1-\alpha_2}) - Fg(h_{\alpha_1}) =$

$$P\left\{h_{\alpha_1} < g(\vec{X}, \theta) < h_{1-\alpha_2}\right\}$$

20. Постановка задачи идентификации неизвестных параметров закона распределения случайной величины. Сформулировать определение γ-доверительного интервала. Сформулировать определение центральной статистики. Изложить и обосновать метод построения доверительного интервала для математического ожидания нормальной случайной величины в случае известной дисперсии.

►Пусть X - св, закон распределения которой известен с точностью до вектора $\vec{\theta} = \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ неизвестных параметров (т.е известен тип функции $F(x, \vec{\theta})$ распределения св X). Если задать значение вектора $\vec{\theta}$, то эта функция распределения будет известна полностью. Точечной оценкой параметра θ называется статистика $\hat{\theta}(\vec{X})$, выборочное значение которой принимается в качестве значения θ. Те $\theta := \hat{\theta}(\vec{X})$, $\vec{X}$- случайная выборка

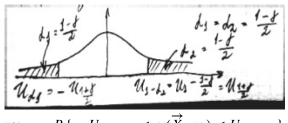
►Доверительный интервал уровня γ для параметра θ называют пару статистик $\bar{\theta}(\vec{X})$ и $\vec{\theta}(\vec{X})$ таких, что $P\{\theta \in (\bar{\theta}(\vec{X}), \vec{\theta}(\vec{X}))\} = \gamma$.

►Статистика $g(\vec{X}, \theta)$ называется центральной если закон распределения не зависит от закона θ, т.е. фукнция распределения $F_g(x)$ не зависит от θ.

►Пусть 1) $X \sim N(m, \delta^2)$

2) m - неизвестна, δ^2 - известна. Построить γ - доверительный интервал для m. Рассмотреть статистику $\vec{g}(\vec{X}, m) = \frac{m - \vec{X}}{\delta} * \sqrt{x} \sim N(0,1)$,

$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1-\alpha}{2} U_{\alpha_1} = -\frac{U_1 + \alpha}{2} U_{1-\alpha_2} = U_1 - \frac{1-\alpha}{2} = U_{\frac{1+\alpha}{2}}$



то: $\gamma = P\{-U_{\frac{1+\alpha}{2}} < g(\vec{X}, m) < U_{\frac{1+\alpha}{2}}\} =$

$P\{-U_{\frac{1+\alpha}{2}} < \frac{m - \bar{x}}{\delta} < U_{\frac{1+\alpha}{2}}\} =$

$P\{\bar{X} - \frac{\delta U_{\frac{1+\alpha}{2}}}{\sqrt{n})} < m < \bar{X} + \frac{\delta U_{\frac{1+\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\}$

то: $\overline{m} = \bar{x} - \frac{\delta U_{\frac{1+\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$ $\overline{m} = \bar{x} + \frac{\delta U_{\frac{1+\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$

21. Постановка задачи идентификации неизвестных параметров закона распределения случайной величины. Сформулировать определение γ-доверительного интервала. Сформулировать определение центральной статистики. Изложить и обосновать метод построения доверительного интервала для математического ожидания нормальной случайной величины в случае неизвестной дисперсии.

►Пусть X - св, закон распределения которой известен с точностью до вектора $\vec{\theta} = \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ неизвестных параметров (т.е известен тип функции $F(x, \vec{\theta})$ распределения св X). Если задать значение вектора $\vec{\theta}$, то эта функция распределения будет известна полностью. Точечной оценкой параметра θ называется статистика $\hat{\theta}(\vec{X})$, выборочное значение которой принимается в качестве значения θ. Те $\theta := \hat{\theta}(\vec{X})$, $\vec{X}$- случайная выборка

►Доверительный интервал уровня γ для параметра θ называют пару статистик $\bar{\theta}(\vec{X})$ и $\vec{\theta}(\vec{X})$ таких, что

$P\{\theta \in (\bar{\theta}(\vec{X}), \vec{\theta}(\vec{X}))\} = \gamma$.

►Статистика $g(\vec{X}, \theta)$ называется центральной если закон распределения не зависит от закона θ, т.е. фукнция распределения $F_g(x)$ не зависит от θ.

►Пусть 1) $X \sim N(m, \delta^2)$

2) m - неизвестна, δ^2 - неизвестна.

Рассмотреть статистику $\vec{g}(\vec{X}, m) = \frac{m - \vec{X}}{\delta(\vec{X})} * \sqrt{n}$

Покажем, что g является центральной статистикой:

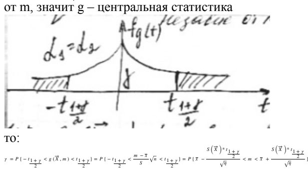
а) $\vec{g}(\vec{X}, m) = \frac{\frac{m - \vec{X}}{\delta} * \sqrt{n}}{\frac{S^2(\vec{X})}{\delta}} = =$

$$\frac{(\frac{m - \vec{X}}{\delta} * \sqrt{n})}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{\delta^2}}} * \sqrt{n-1} = \frac{\xi}{\sqrt{\eta}}\sqrt{n-1}$$

б) $\xi \sim N(0,1)$

$\eta \sim X^2(n, 1)$, причём логично показать, что ξ и η независимы.

в) Т. о. $g = \frac{\xi}{\sqrt{\eta}}\sqrt{n-1} \sim St(n-1)$ - независимая от m, значит g – центральная статистика



то:

$\gamma = P\{-t_{\frac{1+\gamma}{2}} < g(\vec{X}, m) < t_{\frac{1+\gamma}{2}}\} = P\{-t_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{m - \bar{X}}{\delta}\sqrt{n} < t_{\frac{1+\gamma}{2}}\} = P\{\bar{X} - \frac{S(\vec{X}) t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} < m < \bar{X} + \frac{S(\vec{X}) t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}\}$

20. Постановка задачи идентификации неизвестных параметров закона распределения случайной величины. Сформулировать определение γ-доверительного интервала. Сформулировать определение центральной статистики. Изложить и обосновать метод построения доверительного интервала для математического ожидания нормальной случайной величины в случае известной дисперсии.

►Пусть X - св, закон распределения которой известен с точностью до вектора $\overrightarrow{\theta} = \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$неизвестных параметров (т.е известен тип функции $F(x, \overrightarrow{\theta})$ распределения св X). Если задать значение вектора $\overrightarrow{\theta}$, то эта функция распределения будет известна полностью. Точечной оценкой параметра θ называется статистика $\hat{\theta}(\overrightarrow{X})$, выборочное значение которой принимается в качестве значения θ. Те $\theta := \hat{\theta}(\overrightarrow{X})$, $\overrightarrow{X}$- случайная выборка

►Доверительный интервал уровня γ для параметра θ называют пару статистик $\overline{\theta}(\overrightarrow{X})$ и $\overrightarrow{\theta}(\overrightarrow{X})$ таких, что $P\{\theta \in (\overline{\theta}(\overrightarrow{X}), \overrightarrow{\theta}(\overrightarrow{X}))\} = \gamma$.

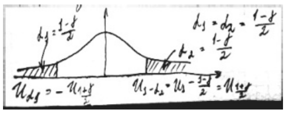
►Статистика $g(\overrightarrow{X}, \theta)$ называется центральной если закон распределения не зависит от закона θ, т.е. фукнция распределения $F_g(x)$ не зависит от θ.

►Пусть 1) $X \sim N(m, \delta^2)$

2) m - неизвестна, δ^2 - известна. Построить γ - доверительный интервал для m. Рассмотреть статистику

$$\overrightarrow{g}(\overrightarrow{X}, m) = \frac{m - \overrightarrow{X}}{\delta} * \sqrt{x} \sim N(0,1),$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1-\alpha}{2} U_{\alpha_1} = -\frac{U_1 + \alpha}{2} U_{1-\alpha_2} = U_1 - \frac{1-\alpha}{2} = U_{\frac{1+\alpha}{2}}$$



то:

$$\gamma = P\{-U_{\frac{1+\alpha}{2}} < g(\overrightarrow{X}, m) < U_{\frac{1+\alpha}{2}}\} = P\{-U_{\frac{1+\alpha}{2}} < \frac{m - \overline{x}}{\delta} < U_{\frac{1+\alpha}{2}}\} = P\{\overline{X} - \frac{\delta U_{\frac{1+\alpha}{2}}}{\sqrt{n})} < m < \overline{X} + \frac{\delta U_{\frac{1+\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\}$$

то: $\overline{m} = \overline{x} - \frac{\delta U_{\frac{1+\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$ $\overline{m} = \overline{x} + \frac{\delta U_{\frac{1+\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$

21. Постановка задачи идентификации неизвестных параметров закона распределения случайной величины. Сформулировать определение γ-доверительного интервала. Сформулировать определение центральной статистики. Изложить и обосновать метод построения доверительного интервала для математического ожидания нормальной случайной величины в случае неизвестной дисперсии.

►Пусть X - св, закон распределения которой известен с точностью до вектора $\overrightarrow{\theta} = \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ неизвестных параметров (т.е известен тип функции $F(x, \overrightarrow{\theta})$ распределения св X). Если задать значение вектора $\overrightarrow{\theta}$, то эта функция распределения будет известна полностью. Точечной оценкой параметра θ называется статистика $\hat{\theta}(\overrightarrow{X})$, выборочное значение которой принимается в качестве значения θ. Те $\theta := \hat{\theta}(\overrightarrow{X})$, $\overrightarrow{X}$- случайная выборка

►Доверительный интервал уровня γ для параметра θ называют пару статистик $\overline{\theta}\left(\overrightarrow{X}\right)$ и $\overrightarrow{\theta}\left(\overrightarrow{X}\right)$ таких, что

$P\{\theta \in (\overline{\theta}(\overrightarrow{X}), \overrightarrow{\theta}(\overrightarrow{X}))\} = \gamma$.

►Статистика $g(\overrightarrow{X}, \theta)$ называется центральной если закон распределения не зависит от закона θ, т.е. фукнция распределения $F_g(x)$ не зависит от θ.

►Пусть 1) $X \sim N(m, \delta^2)$

2) m - неизвестна, δ^2 - неизвестна.

Рассмотреть статистику $\overrightarrow{g}(\overrightarrow{X}, m) = \frac{m - \overrightarrow{X}}{\delta(\vec{X})} * \sqrt{n}$

Покажем, что g является центральной статистикой:

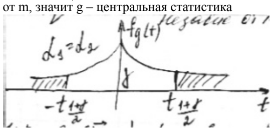
а) $\overrightarrow{g}(\overrightarrow{X}, m) = \frac{\frac{m - \overrightarrow{X}}{\delta} * \sqrt{n}}{\frac{S^2\left(\vec{X}\right)}{\delta}} = =$

$$\frac{\left(\frac{m - \overrightarrow{X}}{\delta} * \sqrt{n}\right)}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2\left(\vec{X}\right)}{\delta^2}}} * \sqrt{n - 1} = \frac{\xi}{\sqrt{\eta}} \sqrt{n - 1}$$

б) $\xi \sim N(0,1)$

$\eta \sim X^2(n, 1)$, причём логично показать, что ξ и η независимы.

в) Т. о. $g = \frac{\xi}{\sqrt{\eta}} \sqrt{n - 1} \sim St(n - 1)$ - независимая от m, значит g – центральная статистика



то:

$$\gamma = P\{-t_{\frac{1+\gamma}{2}} < g(\overrightarrow{X}, m) < t_{\frac{1+\gamma}{2}}\} = P\{-t_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{m - \overline{x}}{S}\sqrt{n} < t_{\frac{1+\gamma}{2}}\} = P\{\overline{x} - \frac{S\left(\overrightarrow{X}\right) * t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{\eta}} < m < \overline{x} + \frac{S\left(\overrightarrow{X}\right) * t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{\eta}}\}$$

22. Постановка задачи идентификации неизвестных параметров закона распределения случайной величины. Сформулировать определение γ-доверительного интервала. Сформулировать определение центральной статистики. Изложить и обосновать метод построения доверительного интервала для дисперсии нормальной случайной величины.

►Пусть X - св, закон распределения которой известен с точностью до вектора $\overrightarrow{\theta} = \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ неизвестных параметров (т.е известен тип функции $F(x, \overrightarrow{\theta})$ распределения св X). Если задать значение вектора $\overrightarrow{\theta}$, то эта функция распределения будет известна полностью. Точечной оценкой параметра θ называется статистика $\hat{\theta}(\overrightarrow{X})$, выборочное значение которой принимается в качестве значения θ. Те $\theta := \hat{\theta}(\overrightarrow{X})$, $\overrightarrow{X}$- случайная выборка

►Доверительный интервал уровня γ для параметра θ называют пару статистик $\overline{\theta}(\overrightarrow{X})$ и $\overrightarrow{\theta}(\overrightarrow{X})$ таких, что $P\{\theta \in (\overline{\theta}(\overrightarrow{X}), \overrightarrow{\theta}(\overrightarrow{X}))\} = \gamma$.

►Статистика $g(\overrightarrow{X}, \theta)$ называется центральной если закон распределения не зависит от закона θ, т.е. фукнция распределения $F_g(x)$ не зависит от θ.

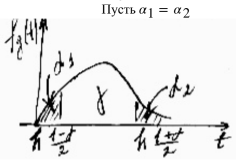
►Пусть 1) $X \sim N(m, \delta^2)$

2) m - неизвестна, δ^2 - неизвестна.

Построить X - доверительный интервал для δ, g – центральная статистика. Рассмотреть статистику

$$\overrightarrow{g}(\overrightarrow{X}, m) = \frac{S^2\left(\overrightarrow{X}\right)(n-1)}{\delta^2} \sim X^2(n, 1)$$

Пусть $\alpha_1 = \alpha_2$



то:

$$\gamma = P\{h_{\frac{1-\gamma}{2}} < g(\overrightarrow{X}, \delta^2) < h_{\frac{1+\gamma}{2}}\} = P\{h_{\frac{1-\gamma}{2}} < \frac{S^2(n-1)}{\delta^2} < h_{\frac{1+\gamma}{2}}\} = P\{\frac{1}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}} < \frac{\delta^2}{S^2(n-1)} < \frac{1}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}}\}$$

$$= P\{\frac{S^2(\overrightarrow{X})(n-1)}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}} < \delta^2 < \frac{S^2(\overrightarrow{X})(n-1)}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}}\}$$