Analízis II. (F), 1. zárthelyi, 2022.03.25.

1. Határozza meg az $a, b \in \mathbb{R}$ paramétereket úgy, hogy az alábbi függvény minden $x \in \mathbb{R}$ esetén differenciálható legyen! (10 pont)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a + \cos x}{e^x}, & \text{ha } x < 0 \\ a \sin x + b \operatorname{arctg} x + \dfrac{x^2 - 10x + 4}{b}, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \ f \in D\{x\}$
- $b(x) := \dfrac{a + \cos x}{e^x} \quad (x \in \mathbb{R}),\ b \in D(\mathbb{R}),\ b'(x) = \dfrac{-\sin x - (a + \cos x)}{e^x}$

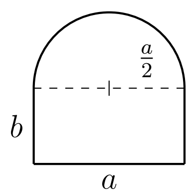
  $j(x) := a \sin x + b \operatorname{arctg} x + \dfrac{x^2 - 10x + 4}{b} \quad (x \in \mathbb{R}),\ j \in D(\mathbb{R}),\ j'(x) = a \cos x + \dfrac{b}{1 + x^2} + \dfrac{2x - 10}{b}$
- $f \in C\{0\}$: $b(0) = j(0) \iff a + 1 = \dfrac{4}{b} \iff a = -1 + \dfrac{4}{b}$
- $f \in D\{0\}$: $b'_+(0) = j'_-(0) \iff -a - 1 = a + b - \dfrac{10}{b} \iff 2a + b - \dfrac{10}{b} + 1 = 0$

  $\iff b - \dfrac{2}{b} - 1 = 0 \iff b^2 - b - 2 = 0 \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$ vagy $\begin{cases} a = -5 \\ b = -1 \end{cases}$

---

2. Boltíves ablakot készítünk, amelynek az alsó része téglalap, a felső része pedig félkörív alakú. A kerülete legfeljebb 6 m lehet. Hogyan válasszuk meg az ablak méreteit, hogy az a lehető legtöbb fényt bocsássa át? (A téglalap és a félkörív találkozási oldala nem kerül beépítésre, azaz nem tartozik a kerülethez.) (10 pont)

Legyen $a > 0$ és $b > 0$ az ablak alját alkotó téglalap oldalai:



- Kerület: $K = a + 2b + \dfrac{a\pi}{2} = 6 \implies b = 3 - \dfrac{a}{2} - \dfrac{a\pi}{4} = 3 - \dfrac{2 + \pi}{4} a$
- Terület: $T = ab + \dfrac{a^2\pi}{8} = a\left(3 - \dfrac{2 + \pi}{4} a\right) + \dfrac{a^2\pi}{8} = 3a - \dfrac{4 + \pi}{8} a^2$
- Célfüggvény: $T(a) := 3a - \dfrac{4 + \pi}{8} a^2 \quad \left(0 < a < \dfrac{12}{2 + \pi}\right)$, $f \in D^2$
- Szükséges: $T'(a) = 3 - \dfrac{4 + \pi}{4} a = 0 \iff a = \dfrac{12}{4 + \pi}$
- Elégséges: $T''(a) = -\dfrac{4 + \pi}{4} < 0 \implies$ lokális max., abszolút max. is $\left(0, \dfrac{12}{2 + \pi}\right)$-n
- Eredmény: $a = \dfrac{12}{4 + \pi},\ b = 3 - 3 \cdot \dfrac{2 + \pi}{4 + \pi} = \dfrac{6}{4 + \pi}$

---

3. Számítsa ki a következő határértékeket a L'Hospital-szabály segítségével! (5+5 pont)

$$\text{a)} \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \sin x}{1 - \cos x}, \qquad \text{b)} \lim_{x \to 0+0} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} x}$$

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \sin x}{1 - \cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x + x \cdot \cos x}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2 \cos x - x \cdot \sin x}{\cos x} = 2$

b) (1^∞), $(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} x} = e^{\operatorname{tg} x \cdot \ln \operatorname{tg} x} \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$

$\displaystyle\lim_{x \to 0+0} \operatorname{tg} x \cdot \ln \operatorname{tg} x = \lim_{x \to 0+0} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0+0} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \to 0+0} (-\operatorname{tg} x) = 0$

$\displaystyle\exp \in C \implies \lim_{x \to 0+0} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} x} = e^{\lim\limits_{x \to 0+0} \operatorname{tg} x \cdot \ln \operatorname{tg} x} = e^0 = 1$

4. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

függvény grafikonját! (12 pont)

1. Kezdeti vizsgálatok: $f \in D^\infty$, nem páros/páratlan, nem periodikus. Zérushelyek és előjel:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
f	$\oplus$	$-$	$\oplus$	0	$\ominus$	0	$\oplus$

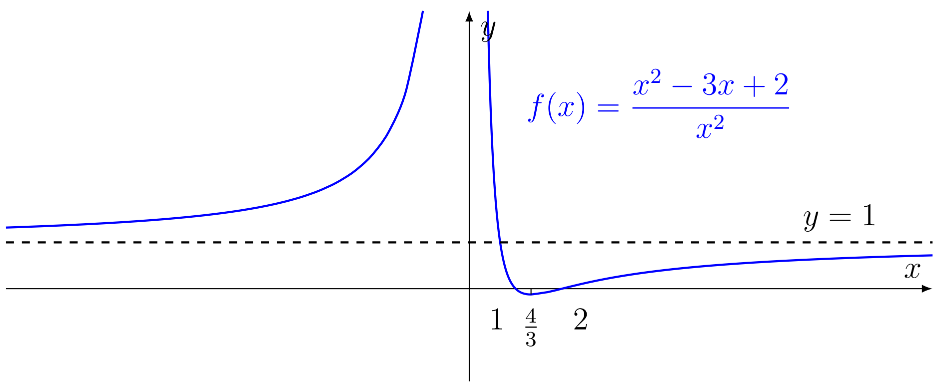
2. Monotonitás: $f'(x) = \dfrac{(2x-3)x^2 - 2x(x^2-3x+2)}{x^4} = \dfrac{3x^2-4x}{x^4} = \dfrac{3x-4}{x^3}$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{4}{3})$	$\frac{4}{3}$	$(\frac{4}{3}, +\infty)$
f'	$\oplus$	$-$	$\ominus$	0	$\oplus$
f	$\uparrow$	$-$	$\downarrow$	$-\frac{1}{8}$ lok. min.	$\uparrow$

3. Konvexitás: $f''(x) = \dfrac{3x^3 - 3x^2(3x-4)}{x^6} = \dfrac{-6x^3+12x^2}{x^4} = -\dfrac{6(x-2)}{x^4}$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0,2)$	2	$(0,+\infty)$
f''	$\oplus$	$-$	$\oplus$	0	$\ominus$
f	konvex	$-$	konvex	0 infl.	konkáv

4. Határértékek, aszimptota: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ (L'H) $\implies$ $y=1$ aszimptota $\pm\infty$-ben
5. Grafikon:



---

5. Írja fel az alábbi függvény 0 középpontú másodfokú Taylor-polinomját, és adjon becslést a közelítés hibájára a $\left[0, \frac{1}{10}\right]$ intervallumon! (8 pont)

$$f(x) = \sqrt[3]{(1+3x)^2} \qquad (x \in \mathbb{R})\,.$$

- $f(x) = (1+3x)^{2/3}, \quad f'(x) = 2(1+3x)^{-1/3}, \quad f''(x) = -2(1+3x)^{-4/3}$
- $f(0) = 1,\ f'(0) = 2,\ f''(0) = -2 \implies T_{2,0}f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2}x^2 = 1 + 2x - x^2$
- $f'''(x) = 8(1+3x)^{-7/3} = \dfrac{8}{\sqrt[3]{(1+3x)^7}}$
- $\forall\, 0 < x \le \dfrac{1}{10} :\ \exists\, 0 < \xi < x :\ |f(x) - T_{2,0}f(x)| = \dfrac{|f'''(\xi)|}{6}|x|^3 \le \dfrac{8}{6} \cdot \left|\dfrac{1}{10}\right|^3 = 0.001\dot{3}$