Analízis 1 ABC, 1. zárthelyi dolgozat, 2020.04.17.

1. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ természetes szám esetén :

$$a) \quad \left(1+\frac{3}{n}\right)^n < \left(1+\frac{3}{n+1}\right)^{n+1};$$

$$b) \quad \left(1+\frac{3}{n}\right)^n < 27 \cdot \left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n+3}.$$

2. Adott az $A := \left\{\frac{5x-1}{2x+3} \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \in [3,+\infty)\right\}$ halmaz.

Korlátos-e az A halmaz ? Számítsuk ki $\sup A$, $\inf A$, $\min A$, $\max A$-t, ha léteznek.

3. Tekintsük az alábbi függvényeket :

$$f(x) := \sqrt{\frac{1-x}{x+2}} \quad (x \in [0,1]); \quad g(x) := -x^2 - 4x - 3 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

a) Határozzuk meg az $f \circ g$ függvényt.

b) Invertálható-e az f ? Mi lesz ekkor $f^{-1}(x)$, $\mathcal{R}_{f^{-1}}$, illetve $\mathcal{D}_{f^{-1}}$ $(x \in \mathcal{D}_{f^{-1}})$?

4. A definíció alapján igazoljuk, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n^2+14n+19}{1+(n+3)^2}\right) = 2.$$

5. Számítsuk ki az alábbi határértékeket :

$$\text{a)} \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1+3^{2n}}; \quad \text{b)} \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n^2+3}{2n^2-2}\right)^{n^2-1};$$

$$\text{c)} \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{\alpha \cdot n^2+2n+1} - 2n\right) \quad \text{(ahol } \alpha \in [0;+\infty) \text{ adott paraméter).}$$