Analízis II

10. Házi feladat

Boda Bálint

2022. őszi félév

1. Bizonyítsa be, hogy:

a) Az f függvény folytonos a $(0,0)$ pontban!

$$f(x,y) \coloneqq \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{3x^2+2y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

A folytonosság definíciója alapján azt kell megmutatni, hogy:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f, ||(x,y) - (0,0)|| < \delta : |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon \tag{1}$$

Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ valós számot. Ha $(x,y) = (0,0)$, akkor $|f(x,y) - f(0,0)| = 0 < \varepsilon$ Ha $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, akkor

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{x^3y^2}{3x^2+2y^2} - 0 \right| = \frac{|x^3|y^2}{3x^2+2y^2} = \frac{y^2}{3x^2+2y^2} \cdot |x^3| \le \frac{3x^2+2y^2}{3x^2+2y^2} \cdot |x^3|$$

Tegyük fel, hogy $\underline{||(x,y)|| < 1}$, ekkor $|x| < 1$, így:

$$|x^3| \le |x^2| \le x^2 + y^2 = \underbrace{\big|\big|(x,y)\big|\big|^2 < \varepsilon}_{||(x,y)|| < \sqrt{\varepsilon}}$$

Így, ha $\delta \coloneqq \min\{\underline{1}, \sqrt{\varepsilon}\}$, akkor (1) teljesül, ami azt jelenti, hogy $f \in C\big\{(0,0)\big\}$.

b) A g függvénynek nincs határértéke a $(0,0)$ pontban!

$$g(x,y) \coloneqq \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\big)$$

A határértékekre vonatkozó átviteli elv alapján két olyan $(0,0)$-hoz tartó sorozatot kell találni, melyekre a függvényértékek sorozatának határértéke különböző.
Rögzített $m\in\mathbb{R}$ esetén tekintsük g értékeit az $y=mx$ egyenletű egyenes pontjaiban:

$$\begin{aligned} g(x,y)=g(x,mx) &= \frac{x^2\cdot m^2x^2}{x^2\cdot m^2x^2+(x-mx)^2} = \frac{m^2x^4}{m^2x^4+(x-mx)^2} \\ &= \frac{m^2x^4}{m^2x^4+x^2(1-m)^2} = \frac{m^2}{m^2+x^{-2}(1-m)^2} \end{aligned}$$

Ekkor

- ha $m=0$ és így $(x_n,y_n)\coloneqq\left(\frac{1}{n},0\right)\to(0,0) \implies g(x_n,y_n)=0$
- ha $m=1$ és így $(u_n,v_n)\coloneqq\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\to(0,0) \implies g(u_n,v_n)=\frac{1}{1}=1$

Mivel

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n,y_n)=(0,0)=\lim_{n\to+\infty}(u_n,v_n)$$

de

$$\lim_{n\to+\infty}g(x_n,y_n)=0\neq 1=\lim_{n\to+\infty}g(u_n,v_n)$$

ezért a g függvénynek nincs határértéke $(0,0)$ pontban.

2. Számolja ki az

$$f(x,y) := xe^{yx} - xy \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény iránymenti deriváltját az $(1,1)$ pontban a $v = (3,4)$ vektor által meghatározott irány mentén!

Mivel v nem egységvektor ezért elő kell állítanunk a normáját.

$$u = \frac{v}{||v||} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,8 \end{pmatrix}$$

Az iránymenti deriválhatósághoz azt kell megmutatni, hogy a

$$\begin{aligned} F_u(t) &:= f(a+tu) = f(a_1 + tu_1, a_2 + tu_2) = f(1+0,6t; 1+0,8t) \\ &= (1+0,6t)e^{(1+0,6t)(1+0,8t)} - (1+0,6t)(1+0,8t) \\ &= (1+0,6t)e^{1+1,4t+0,48t^2} - (1+1,4t+0,48t^2) \\ &= (1+0,6t)e^{1+1,4t+0,48t^2} - 1 - 1,4t - 0,48t^2 \quad (t \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

függvény deriválható a 0 pontban. Ez nyilván teljesül, így a derivált:

$$0,6 \cdot (e^{1+1,4t+0,48t^2}) + (1+0,6t)e^{1+1,4t+0,48t^2} \cdot (1,4+0.96t) - 1,4 - 0,96t$$

és $F'_u(0) = 0,6e + 1,4e - 1,4 = 2e - 1,4$. Ezért f-nek létezik v irányú iránymenti deriváltja az (1,1) pontban és értéke $2e - 1,4$. Ellenőrizzük a megoldás helyességét a parciális deriváltak és az iránymenti deriváltak kapcsolatára vonatkozó tétel segítéségével:

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x,y) &= e^{yx} + xe^{yx}y - y \\ \partial_2 f(x,y) &= x^2 e^{yx} - x \end{aligned}$$

A tétel alapján:

$$\begin{aligned} \partial_u f(1,1) &= \partial_1 f(1,1) \cdot u_1 + \partial_2 f(1,1) \cdot u_2 = (e^{yx} + xe^{yx}y - y) \cdot 0.6 + (x^2 e^{yx} - x) \cdot 0.8 \\ &= 0.6 \cdot (e^{1 \cdot 1} + 1 \cdot e^{1 \cdot 1} \cdot 1 - 1) + 0.4 \cdot (1^2 e^{1 \cdot 1} - 1) = 0.6(2e-1) + 0.8(e-1) \\ &= \frac{12e-6}{10} + \frac{8e-8}{10} = 2e - 1,4 \end{aligned}$$