Analízis 2 (F)

2. zh megoldott feladatai

(2021.12.10)

1. Feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat! (6+6 pont)

$$a)\ \int_0^1 (x-x^2)e^{3x}\,dx \qquad (x\in\mathbb{R}), \qquad\qquad b)\ \int \frac{3e^x+2}{e^{2x}+e^x}\,dx \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Megoldás:

a) Először a határozatlan integrált fogjuk meghatározni kétszer egymásután végzett parciálisan integrálással. Egyrészt

$$\int (x-x^2)e^{3x}\,dx = \int (x-x^2)\left(\frac{e^{3x}}{3}\right)'\,dx = (x-x^2)\left(\frac{e^{3x}}{3}\right) - \int (x-x^2)'\left(\frac{e^{3x}}{3}\right)dx =$$
$$= \frac{(x-x^2)e^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int (1-2x)e^{3x}\,dx.$$

Másrészt

$$\int (1-2x)e^{3x}\,dx = \int (1-2x)\left(\frac{e^{3x}}{3}\right)'\,dx = (1-2x)\left(\frac{e^{3x}}{3}\right) - \int (1-2x)'\left(\frac{e^{3x}}{3}\right)dx =$$
$$= \frac{(1-2x)e^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int -2e^{3x}\,dx = \frac{(1-2x)e^{3x}}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{e^{3x}}{3} + c.$$

Így

$$\int (x-x^2)e^{3x}\,dx = \frac{(x-x^2)e^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{(1-2x)e^{3x}}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{e^{3x}}{3}\right) + c =$$
$$= \frac{(x-x^2)e^{3x}}{3} - \frac{(1-2x)e^{3x}}{9} - \frac{2e^{3x}}{27} + c = \frac{(-9x^2+15x-5)e^{3x}}{27} + c.$$

Ekkor a Newton–Leibniz-formula alapján:

$$\int_0^1 (x-x^2)e^{3x}\,dx = \left[\frac{(-9x^2+15x-5)e^{3x}}{27}\right]_0^1 = \frac{e^3}{27} - \frac{-5e^0}{27} = \underline{\underline{\frac{e^3+5}{27}}}.$$

b) A feladatot a második helyettesítési szabály segítségével fogjuk megoldani. Tekintsük a $t := e^x$ helyettesítést, azaz legyen

$$x = \ln t =: g(t) \qquad (t>0)$$

a helyettesítő függvény. Ekkor $\mathcal{R}_g = \mathbb{R}$. A g függvény deriválható, és

$$g'(t) = \frac{1}{t} > 0 \qquad (t>0)$$

alapján g szigorúan monoton növekedő, következésképpen invertálható és

$$g^{-1}(x) = e^x = t \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

A második helyettesítési szabályt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{3e^x+2}{e^{2x}+e^x}\,dx = \int \frac{3t+2}{t^2+t}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{3t+2}{t^2(t+1)}\,dt = (*)$$

Parciális törtekre bontással:

$$\frac{3t+2}{t^2(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t+1} = \frac{At(t+1)+B(t+1)+Ct^2}{t^2(t+1)}.$$

A bal és jobb oldali tört számlálója megegyezik minden $t \in \mathbb{R}$ esetén.

Ha $t = 0$, akkor $2 = A\cdot 0 + B\cdot 1 + C\cdot 0 \quad\Longrightarrow\quad B = 2.$
Ha $t = -1$, akkor $-1 = A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot 1 \quad\Longrightarrow\quad C = -1.$
Ha $t = 1$, akkor $5 = A\cdot 2 + B\cdot 2 + C\cdot 1 \quad\Longrightarrow\quad 5 = 2A + 2\cdot 2 - 1 \quad\Longrightarrow\quad A = 1.$

Ezért

$$(*) = \int \frac{1}{t} + \frac{2}{t^2} - \frac{1}{t+1}\,dt = \ln t - \frac{2}{t} - \ln(t+1) + c\Big|_{t=e^x} =$$

$$= \ln e^x - \frac{2}{e^x} - \ln(e^x+1) + c = \underline{\underline{x - 2e^{-x} - \ln(e^x+1) + c}}.$$

2. Feladat. Számítsa ki az

$$y = \frac{1}{9+x^2}, \quad y = \frac{2x^2-17}{18} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egyenletű görbék által közrezárt korlátos síkidom területét! (8 pont)

Megoldás: A szóban forgó síkidom meghatározásához először meg kell keresnünk a görbék metszéspontjait. Ehhez szükséges megoldani a

$$\frac{1}{9+x^2} = \frac{2x^2-17}{18}$$

egyenletet. A $t := x^2$ helyettesítéssel:

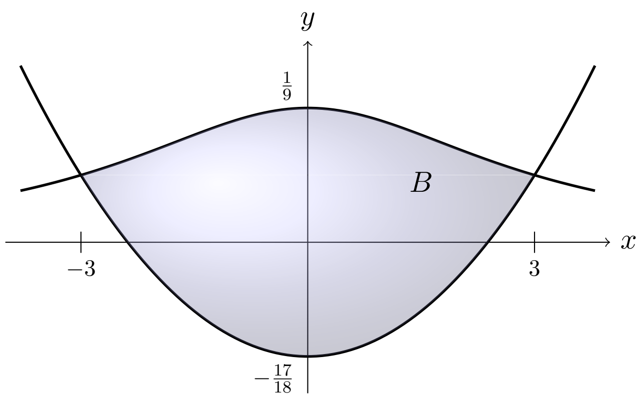
$$\frac{1}{9+t} = \frac{2t-17}{18} \quad\Longrightarrow\quad 18 = (2t-17)(9+t) = 2t^2 + t - 153 \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad 2t^2 + t - 171 = 0 \quad\Longrightarrow\quad t_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1369}}{4} = \frac{-1\pm 37}{4} \quad\Longrightarrow\quad t_1 = -\frac{38}{4},\ t_2 = 9.$$

Ebből csak az $x^2 = t = 9$ lehetséges, amiből $x = -3$ és $x = 3$ adódik. Az előző eredmények alapján a síkidom

$$B := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \le x \le 3,\ \frac{2x^2-17}{18} \le y \le \frac{1}{9+x^2} \right\},$$

ami az alábbi ábrán látható.



Ekkor

$$T(B) = \int_{-3}^{3} \left(\frac{1}{9+x^2} - \frac{2x^2-17}{18} \right) dx = \int_{-3}^{3} \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{9}} - \frac{2x^2}{18} + \frac{17}{18} \right) dx =$$

$$\int_{-3}^{3} \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} - \frac{x^2}{9} + \frac{17}{18} \right) dx = \left[\frac{1}{9} \cdot \frac{\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{3}}{1/3} - \frac{x^3}{27} + \frac{17}{18}\, x \right]_{-3}^{3} =$$

$$= \left[\frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{3} - \frac{x^3}{27} + \frac{17}{18}\, x \right]_{-3}^{3} = \left(\frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} 1 - 1 + \frac{17}{6} \right) - \left(\frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg}(-1) + 1 - \frac{17}{6} \right) =$$

$$= \frac{2}{3} \operatorname{arc\,tg} 1 - 2 + \frac{17}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{11}{3} = \underline{\underline{\frac{\pi}{6} + \frac{11}{3}}}.$$

3. Feladat. Lássa be, hogy az

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+3y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény folytonos a $(0,0)$ pontban, a

$$g(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+3y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény pedig nem folytonos a $(0,0)$ pontban! (6+4 pont)

Megoldás: Először az f függvény folytonosságát fogjuk igazolni a $(0,0)$ pontban. A folytonosság definíciója szerint azt kell megmutatni, hogy

(1) $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in D_f, \|(x,y)-(0,0)\| < \delta$ pontban $|f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$,

ahol $D_f = \mathbb{R}^2$ és $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ valós számot.

Ha $(x,y) = 0$, akkor nyilván $|f(x,y) - f(0,0)| = |0-0| = 0 < \varepsilon$. Ha $(x,y) \neq 0$, akkor

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{xy^3}{x^2+3y^2} - 0 \right| = \frac{|xy^3|}{x^2+3y^2} \leq \frac{|xy^3|}{x^2+y^2} = \frac{|xy| \cdot y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{|xy| \cdot (x^2+y^2)}{x^2+y^2} = |xy|.$$

Alkalmazzuk az x^2 és y^2 számok számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget, azaz

$$|xy| = \sqrt{x^2y^2} \leq \frac{x^2+y^2}{2}.$$

Ekkor

$$|f(x,y) - f(0,0)| \leq |xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2} = \underbrace{\frac{\|(x,y)\|^2}{2} < \varepsilon}_{\|(x,y)\| < \sqrt{2\varepsilon}}.$$

Így (1) rögzített $\varepsilon > 0$ esetén $\delta := \sqrt{2\varepsilon}$ megválasztásával teljesül, és ez az állítás bizonyítását jelenti.

Most azt fogjuk igazolni, hogy a g függvény nem folytonos a $(0,0)$ pontban. A folytonosságra vonatkozó átviteli elv szerint, ha van olyan $\mathbb{R}^2$-beli (x_n, y_n) sorozat, amely a $(0,0)$ ponthoz konvergál, de a $g(x_n, y_n)$ képsorozata nem tart a 0-hoz, akkor g nem folytonos a $(0,0)$ pontban.

Egy ilyen sorozat megkereséséhez vizsgáljuk meg a g függvény értékeit az $y = mx$ egyenes mentén, ahol $m \in \mathbb{R}$ egy rögzített paraméter:

$$g(x,y) = g(x, mx) = \frac{x(mx)}{x^2 + 3(mx)^2} = \frac{mx^2}{x^2 + 3m^2x^2} = \frac{m}{1+3m^2} \qquad (x \neq 0).$$

Látható, hogy ekkor a g függvény értéke csak az m paramétertől függ. Például $m = 1$ esetén g értéke az $y = x$ egyenes mentén állandó, és $1/4$-gyel egyenlő, ha $x \neq 0$. Ezért az

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0), \text{ ha } n \to \infty$$

sorozat képsorozata $g(x_n, y_n) = g(x_n, x_n) = 1/4$, ami nem tart 0-hoz, ha $n \to \infty$. Tehát g nem folytonos a $(0,0)$ pontban.

4. Feladat. Legyen

$$f(x,y) := \frac{x+3y}{e^{xy}} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

a) Határozza meg az f függvény iránymenti deriváltját a $P(1,0)$ pontban a $v = (6,8)$ vektor által meghatározott irány mentén!

b) Írja fel a $z = f(x,y)$ egyenletű felület $P(1,0)$ pontjához tartozó érintősíkjának az egyenletét, és adja meg a sík egy normálvektorát!

(8 pont)

Megoldás: Az

$$f(x,y) := \frac{x+3y}{e^{xy}} = (x+3y)e^{-xy} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

függvény differenciálható minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban, hiszen a

$$\partial_1 f(x,y) = 1 \cdot e^{-xy} + (x+3y)e^{-xy} \cdot (-y) = \frac{1 - xy - 3y^2}{e^{xy}},$$

$$\partial_2 f(x,y) = 3 \cdot e^{-xy} + (x+3y)e^{-xy} \cdot (-x) = \frac{3 - 3xy - x^2}{e^{xy}}.$$

parciális deriváltak léteznek és folytonosak minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban. A parciális deriváltak értéke a $P(1,0)$ pontban:

$$\partial_1 f(1,0) = 1 \qquad \text{és} \qquad \partial_2 f(1,0) = 2.$$

a) Mivel f differenciálható a $P(1,0)$ pontban, így ott minden irányban létezik az iránymenti deriváltja, és

$$\partial_v f(1,0) = \partial_1 f(1,0)v_1 + \partial_2 f(1,0)v_2,$$

ahol v az u irányú euklideszi normában vett egységvektor, azaz

$$v = (v_1, v_2) = \frac{u}{\|u\|} = \frac{(6,8)}{\sqrt{6^2+8^2}} = \left(\frac{6}{10}, \frac{8}{10}\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

Ezért

$$\partial_v f(1,0) = 1 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{4}{5} = \underline{\underline{\frac{11}{5}}}.$$

b) Legyen $(x_0, y_0) = (1, 0)$. Mivel f differenciálható az (x_0, y_0) pontban, így a felület

$$(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$$

pontjához érintősík húzható. Ennek egyenlete a

$$z - f(x_0, y_0) = \partial_1 f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_2 f(x_0, y_0)(y - y_0)$$

képlettel adható meg. Mivel

$$f(x_0, y_0) = 1, \quad \partial_1 f(x_0, y_0) = 1, \quad \partial_2 f(x_0, y_0) = 2$$

ezért az érintősík egyenlete:

$$z - 1 = 1(x - 1) + 2(y - 0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x + 2y - z = 0.$$

Ennek egy normálvektora:

$$\vec{n} = (\partial_1 f(x_0, y_0), \partial_2 f(x_0, y_0), -1) = (1, 2, -1).$$

5. Feladat. Legyen

$$f(x, y) := 2x^3 y - 29x^2 - 16y \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

a) Vannak-e lokális szélsőértékhelyei az f függvénynek? Ha igen, akkor számítsa ki ezeket! (5 pont)

b) Lagrange-féle multiplikátorok módszerével számítsa ki az f függvény feltételes lokális szélsőértékeit a

$$g(x, y) := xy - 1 = 0 \qquad (x, y > 0)$$

feltétel mellett! (7 pont)

Megoldás:

a) Az f függvény kétszer folytonosan deriválható $\mathbb{R}^2$-őn, mert egy kétváltozós polinom.

Elsőrendű szükséges feltétel:

$$\left.\begin{array}{rcccl} \partial_x f(x, y) & = & 6x^2 y - 58x & = & 0 \\ \partial_y f(x, y) & = & 2x^3 - 16 & = & 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad x^3 = 8 \quad \Longrightarrow \quad x = 2.$$

Ebből

$$6 \cdot 2^2 y - 58 \cdot 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{29}{6}$$

ezért az f függvény stacionárius pontja, azaz a lehetséges lokális szélsőértékhely: $P\left(2, \frac{29}{6}\right)$.

Másodrendű elégséges feltétel: Az $f''(x, y)$ Hesse-féle mátrix egy $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban:

$$\partial_{xx} f(x, y) = 12xy - 58, \quad \partial_{xy} f(x, y) = 6x^2 = \partial_{yx} f(x, y), \quad \partial_{yy} f(x, y) = 0.$$

Ezért

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(x, y) & \partial_{xy} f(x, y) \\ \partial_{yx} f(x, y) & \partial_{yy} f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12xy - 58 & 6x^2 \\ 6x^2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_1 = 12xy - 58, \quad D_2 = \det f''(x, y) = -36x^4.$$

Mivel a $P\left(2, \frac{29}{6}\right)$ pontban $D_2 = -36 \cdot 2^4 < 0$, ezért a függvénynek nincsenek lokális szélsőértékhelyei.

b) A Lagrange-multiplikátor módszerre vonatkozó tételeket alkalmazzuk.

A szükséges feltétel: A szóban forgó tétel feltételei teljesülnek, mert ha U az első síknegyed pontjai, azaz $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x, y > 0\}$, akkor

$$f, g \in C^1(U) \quad \text{és} \quad g'(x,y) = (\partial_1 g(x,y), \partial_2 g(x,y)) = (y,x) \neq (0,0) \qquad ((x,y) \in U),$$

hiszen ha $(y,x) = (0,0)$, akkor $x = y = 0$, de ekkor $g(0,0) = -1 \neq 0$.

A Lagrange-függvény:

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = 2x^3y - 29x^2 - 16y + \lambda(xy-1) \quad ((x,y) \in U).$$

A lehetséges lokális szélsőértékhelyek az

$$\begin{aligned} \partial_1 \mathcal{L}(x,y) &= 6x^2y - 58x + \lambda y = 0 \\ \partial_2 \mathcal{L}(x,y) &= 2x^3 - 16 + \lambda x \quad\;\;\, = 0 \\ g(x,y) &= xy - 1 \qquad\qquad\;\;\; = 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásai. Nyilván $x \neq 0$. A második és a harmadik egyenletből:

$$\lambda = \frac{16 - 2x^3}{x} \qquad \text{és} \qquad y = \frac{1}{x}.$$

Ha ezeket beírjuk az első egyenletbe

$$0 = 6x^2 \cdot \frac{1}{x} - 58x + \frac{16-2x^3}{x} \cdot \frac{1}{x} = 6x - 58x + \frac{16}{x^2} - 2x = \frac{16}{x^2} - 54x$$

Ebből

$$\frac{16}{x^2} = 54x \qquad \Longrightarrow \qquad x^3 = \frac{8}{27} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{2}{3}, \quad y = \frac{3}{2}, \quad \lambda = \frac{208}{9}$$

Következésképpen csak az $(x_0, y_0) = \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$ pontban lehet feltételes lokális szélsőérték.

A hozzá tartozó Lagrange-szorzó: $\lambda_0 = \frac{208}{9}$.

Az elégséges feltétel: Mivel minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban

$$\partial_1 g(x,y) = y, \qquad \partial_2 g(x,y) = x;$$

$$\partial_{11}\mathcal{L}(x,y) = 12xy - 58, \quad \partial_{12}\mathcal{L}(x,y) = 6x^2 + \lambda = \partial_{21}\mathcal{L}(x,y), \quad \partial_{22}\mathcal{L}(x,y) = 0;$$

ezért

$$D(x,y;\lambda) := \det \begin{pmatrix} 0 & \partial_1 g(x,y) & \partial_2 g(x,y) \\ \partial_1 g(x,y) & \partial_{11}\mathcal{L}(x,y) & \partial_{12}\mathcal{L}(x,y) \\ \partial_2 g(x,y) & \partial_{21}\mathcal{L}(x,y) & \partial_{22}\mathcal{L}(x,y) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & y & x \\ y & 12xy - 58 & 6x^2 + \lambda \\ x & 6x^2 + \lambda & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= xy(6x^2 + \lambda) + xy(6x^2 + \lambda) - x^2(12xy - 58) = 2(6x^2 + \lambda) + 46x^2,$$

hiszen $xy = 1$. Így

$$D\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{208}{9}\right) > 0,$$

ami azt jelenti, hogy P feltételes lokális maximumhely, és az ehhez tartozó függvényérték

$$f\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right) = -36.$$