Programtervező informatikus BSc, B-C szakirány, Valószínűségszámítás és statisztika

1. gyakorlat megoldások

Bevezetés, klasszikus valószínűségi mező

1.1. Feladat. Hányféleképpen lehet 8 bástyát letenni egy sakktáblára, hogy ne üssék egymást?

Megoldás

Az első bástya 64 helyre kerülhet. Ekkor a lefedett mező sorába és oszlopába már nem kerülhet újabb bástya, így a következőt már csak 7 sor és 7 oszlop valamelyikébe tehetjük le, ami 49 lehetőség. Minden újabb bástya letételével még egy újabb sor és oszlop kerül lefedésre. Tehát ezután sorra 36, 25, 16, 9, 4, és 1 lehetőség van a következő bástyák letételére. Viszont a bástyák letevésének sorrendjét így figyelembe vettük, pedig mind a 8 bástya egyforma, külsőleg nem megkülönböztethető. Így le kell osztanunk a lerakott bástyák permutációinak számával, azaz 8!-sal. Tehát összesen $\frac{64\cdot 49\cdot 36\cdot 25\cdot 16\cdot 9\cdot 4\cdot 1}{8!} = 40320 = 8!$ féleképp tehetjük le a bástyákat. A végeredményt közvetlenül is megkaphatjuk, ha oszloponként (ill. soronként) nézzük a bástyák helyét.

1.2. Feladat. Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott 6 jegyű szám jegyei mind különbözőek?

Megoldás

Az első számjegyet az $1, 2, \ldots, 9$ számjegyek közül, a többi számjegyet a $0, 1, 2, \ldots, 9$ számjegyek közül választhatjuk. Így az összes esetek száma $9 \cdot 10^5$. Kedvező esetek száma: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$, mert itt visszatevés nélkül választunk, a sorrend számít, illetve arra figyelünk, hogy az első számjegy ne lehessen 0. Tehát a keresett valószínűség $\frac{9\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{9\cdot 10^5} = \frac{136080}{900000} = 0{,}1512$.

1.3. Feladat. Ha egy magyar kártya csomagból visszatevéssel húzunk három lapot, akkor mi annak a valószínűsége, hogy

a) pontosan egy piros színű lapot húztunk?

b) legalább egy piros színű lapot húztunk?

Megoldás

a) A 3 kihúzott lap közül $\binom{3}{1} = 3$-féleképp dönthetjük el, hogy melyik legyen a piros színű. Ezután feltehető, hogy az első húzott lap piros, a többi nem. Mivel visszatevéses mintavétel, ezért piros lap húzásának valószínűsége mindig $\frac{8}{32}$, nem piros lap húzásának valószínűsége pedig $\frac{24}{32}$. Tehát a keresett valószínűség: $\binom{3}{1} \cdot (\frac{8}{32})^1 \cdot (\frac{24}{32})^2 = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{16} = \frac{27}{64} = 0{,}4219$.

b) Kényelmesebb most a komplementer esemény valószínűségét kivonni 1-ből. A komplementer esemény: nincsen piros a húzott lapok között. Ennek valószínűsége $\binom{3}{0} \cdot (\frac{8}{32})^0 \cdot (\frac{24}{32})^3 = \frac{27}{64}$. Tehát a keresett valószínűség $1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64} = 0{,}5781$.

1.4. Feladat. Egy zsákban 10 pár cipő van. 4 db-ot kiválasztva, mi a valószínűsége, hogy van közöttük pár, ha

a) egyformák a párok?

b) különbözőek a párok?

Megoldás

a) 10 balos és 10 jobbos cipő van. Mi a valószínűsége, hogy a 4 kihúzott között van balos és jobbos is? Célszerű most is a komplementer esemény valószínűségét kivonni 1-ből. A komplementer esemény: vagy 4 balosat húztunk, vagy 4 jobbosat. Ennek valószínűsége: $\frac{\binom{10}{4}}{\binom{20}{4}} + \frac{\binom{10}{4}}{\binom{20}{4}} = 2 \cdot \frac{14}{323} = \frac{28}{323}$. Tehát a keresett valószínűség $1 - \frac{28}{323} = 0{,}9133$.

b) Most is érdemes a komplementer esemény valószínűségét kiszámítani. Komplementer esemény: nincs pár a 4 cipő között. Ha így akarom a cipőket kiválasztani, akkor az elsőt 20-féleképp választhatom ki, a másodikat 18-féleképp (az első és párja kiesik), a harmadikat 16-féleképp és a negyediket 14-féleképp. Összes eset: $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$. Tehát a komplementer esemény valószínűsége $\frac{20\cdot 18\cdot 16\cdot 14}{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17} = \frac{16\cdot 14}{19\cdot 17}$. Tehát a keresett valószínűség $1 - \frac{224}{323} = 0{,}3065$.

1.5. Feladat. n dobozba véletlenszerűen helyezünk el n golyót úgy, hogy bármennyi golyó kerülhet az egyes dobozokba.

a) Mi a valószínűsége, hogy minden dobozba kerül golyó?

b) Annak mi a valószínűsége, hogy pontosan egy doboz marad üresen?

Megoldás

Vegyük észre hogy a probléma kitűzése nem határozza meg teljesen egyértelműen hogy milyen valószínűségi modellt kell használni, ugyanis nem írja elő hogy milyen módon helyezzük a golyókat a dobozokba, s azt sem rögzíti hogy megkülönböztetett vagy azonos golyókról van szó. Mindenesetre feltesszük hogy a dobozok meg vannak különböztetve (habár a feladat kitűzése ezt sem rögzíti).

a) 1. Értelmezés: A golyókat megkülönböztetjük (ez nem feltétlenül jelenti, hogy a golyók fizikailag különbözőek, már az is megkülönböztetés, hogy ha egymás után rakjuk őket a dobozokba, s így első, második stb., golyóról lehet beszélni). Ilyenkor, hacsak a feladat explicite nem ír elő mást, a "véletlenszerűen" szó értelmezése az, hogy minden golyót egymástól függetlenül, azonos $(1/n)$ valószínűséggel helyezünk a dobozokba.
Tekintsük az $n = 2$ esetet, egyszerűség kedvéért. A valószínűségi tér természetes módon egy szorzattér, $\Omega = \{1, 2\} \times \{1, 2\}$, ahol a Descartes szorzat első komponense azt kódolja el, hogy az első golyó az 1-es vagy a 2-es dobozba kerül, a második komponens ugyanezt teszi a második golyóval. Például $\omega = (2, 1)$ azt jelenti, hogy az első golyó a 2-es, a második golyó az 1-es dobozba került. Összesen $2 \cdot 2 = 4$ kimeneti lehetőség van, és a függetlenségi feltevés miatt mindegyik $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$ valószínűségű.
Általánosan: n megkülönböztetett golyót n dobozba n^n féleképpen tudjuk betenni (ismétléses variáció). A kedvező esetek száma $n!$, azaz a lehetséges permutációk száma. Így a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(\text{minden dobozban van egy golyó}) = \frac{n!}{n^n}.$$

2. Értelmezés: Ha a golyók nincsenek megkülönböztetve, és a berakási folyamat sem utal rá, akkor úgy is okoskodhatunk, hogy csupán a végeredményt látjuk és a valószínűségi terünket az összes lehetséges kimenet halmazaként definiáljuk. Vegyük észre, hogy az 1. Értelmezéssel ellentétben most mindössze 3 lehetőségünk van:
(a) az első dobozban két golyó, a másodikban semmi;
(b) mindkét dobozban egy golyó;
(c) első dobozban semmi, a másodikban kettő.
Struktúrájában ez a valószínűségi tér nagyon más mint az előző, nemcsak az elemek száma különbözik, de nincs Descartes szorzat struktúrája sem. A "véletlenszerűen" szó elvileg értelmezhető úgy is, hogy a három lehetséges kimenet egyenlő valószínűségű. Így például $1/3$ annak a valószínűsége hogy mindkét dobozba egy-egy golyó került, míg az első értelmezés szerint ugyanez a valószínűség $1/2$.
Általánosan: n nem megkülönböztetett n dobozba $\binom{2n-1}{n}$ féleképpen tudjuk betenni (ismétléses kombináció). [Rendezzük az n dobozt sorba, ekkor $n - 1$ válaszfal keletkezik közöttük. Az összes esetek száma az n golyó és az $n - 1$ válaszfal sorrendjeinek száma, ami egy ismétléses permutáció: $\frac{\big(n+(n-1)\big)!}{n!\cdot(n-1)!} = \binom{2n-1}{n}$.] A kedvező esetek száma 1, azaz minden dobozba egy golyó kerül. Így a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(\text{minden dobozban van egy golyó}) = \frac{1}{\binom{2n-1}{n}}.$$

A két értelmezés közötti döntés nem matematikai hanem modellezési probléma; sokszor azonban a matematikusnak kell rámutatni a felhasználónál arra, ha esetleg a probléma nincs kellő pontossággal megfogalmazva. Rögzítsük le azonban, hogy az esetek túlnyomó többségében az első értelmezés felel meg a "véletlenszerűen" köznapi fogalmának.

b) Ha a golyókat megkülönbözőztetjük, akkor - mint előbb - az n golyót n dobozba n^n féleképpen tudjuk letenni (ismétléses variáció). A kedvező esetek számát a következőképpen kaphatjuk: az üres dobozt n féleképpen, a dobozt melyben 2 golyó lesz pedig $n - 1$ féleképpen választhatjuk ki. Az n golyót $n!$ féleképpen tehetjük le, viszont kétféleképpen is eljuthatunk ugyanahhoz az elrendezéshez, hiszen a 2 golyós dobozban bármelyik jöhetett a most üres dobozból. Így a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(\text{pontosan egy doboz marad üresen}) = \frac{n(n-1)\frac{n!}{2}}{n^n} = \frac{n(n-1)n!}{2n^n}.$$

Ha a golyókat nem különbözőztetjük meg, akkor az n golyót n dobozba $\binom{2n-1}{n}$ féleképpen tudjuk betenni (ismétléses kombináció). A kedvező esetek számát a következőképpen kaphatjuk: az üres dobozt n féleképpen, a dobozt melyben 2 golyó lesz pedig $n - 1$ féleképpen választhatjuk ki. Így a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(\text{pontosan egy doboz marad üresen}) = \frac{n(n-1)}{\binom{2n-1}{n}}.$$

1.6. Feladat. Egy boltban 10 látszólag egyforma számítógép közül 3 felújított, a többi új. Mi a valószínűsége, hogy ha veszünk 5 gépet a laborba, akkor pontosan 2 felújított lesz közöttük?

Megoldás

A 10 gépből 3 felújított, 7 új. Tehát a 3 felújított gép közül kell 2-t kiválasztani, illetve a 7 új gép közül kell a maradék 3-mat kiválasztani. A kiválasztás sorrendje nem számít, és visszatevés nélküli mintavétel. A kedvező esetek száma: $\binom{3}{2} \cdot \binom{7}{3} = 3 \cdot 35 = 105$. Összes esetek száma: $\binom{10}{5} = 252$. Tehát a keresett valószínűség $\frac{105}{252} = 0{,}4167$.

1.7. Feladat. Ha a 6 karakteres jelszavunkat véletlenszerűen választjuk a 10 számjegy és a 26 karakter közül, akkor mi a valószínűsége, hogy pontosan 3 szám lesz benne?

Megoldás

$\binom{6}{3} = 20$-féleképp lehet a 6 karakterből a 3 szám helyét kiválasztani. Ezután feltehető, hogy az első 3 karakter szám, az utolsó 3 karakter betű. Számjegy választásának valószínűsége $\frac{10}{36}$, betűé $\frac{26}{36}$. A keresett valószínűség tehát $\binom{6}{3} \cdot (\frac{10}{36})^3 \cdot (\frac{26}{36})^3 = 0{,}1615$.

1.8. Feladat. Az ötöslottónál adjuk meg annak a valószínűségét, hogy egy szelvénnyel játszva öttalálatosunk lesz, illetve hogy legalább négyesünk lesz. Mi a valószínűsége, hogy minden kihúzott szám páros? (Hogy viszonylik ez a visszatevéses esethez?)

Megoldás

Annak a valószínűsége, hogy ötösünk lesz: $\frac{\binom{5}{5}}{\binom{90}{5}}$.

Annak a valószínűsége, hogy legalább négyesünk lesz: $\frac{\binom{5}{5}}{\binom{90}{5}} + \frac{\binom{5}{4}\binom{85}{1}}{\binom{90}{5}}$.

Annak a valószínűsége, hogy minden kihúzott szám páros: $\frac{\binom{45}{5}}{\binom{90}{5}} \approx 0,028$.

A visszatevéses esetben (tehát, mikor egy számot többször is kihúzhatunk) annak a valószínűsége, hogy párosakat húzunk: $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \approx 0,031$. Bár a két érték közel van egymáshoz, a visszatevés nélküli esetben kisebb a valószínűség, mert ott fogynak a páros számok a választás során.

Események fogalma

1.9. Feladat. Két érmével dobunk, majd még annyi érmével, ahány fejet az első két érmével kaptunk. Mik lesznek az eseménytér elemei?

Megoldás

Jelölje I az írást, F a fejet. Ekkor az eseménytér elemei: $\Omega = \{FFFF, FFFI, FFIF, FFII, FIF, FII, IFF, IFI, II\}$

1.10. Feladat. Legyen A, B, C három esemény. Írjuk fel halmazelméleti műveletekkel azt az eseményt, hogy közülük

a) pont k esemény következik be;

b) legfeljebb k esemény következik be. ($k = 1, 2, 3$)

Megoldás

a) (pontosan 0 következik be)= $(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = (\overline{A \cup B \cup C})$
(pontosan 1 következik be)= $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$
(pontosan 2 következik be)= $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$
(pontosan 3 következik be)= $(A \cap B \cap C)$

b) (legfeljebb 1 következik be)=(pontosan 0) $\cup$ (pontosan 1)
(legfeljebb 2)= $(\overline{A \cap B \cap C}) = (\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C})$
(legfeljebb 3)= ez mindig igaz, azaz ez a teljes Ω tér

2. gyakorlat megoldások

2.1. Feladat. Mennyi a valószínűsége, hogy két kockadobásnál mind a két dobás 6-os, feltéve, hogy tudjuk, hogy legalább az egyik dobás 6-os?

Megoldás

Legyen A esemény az, hogy mindkét dobás hatos, B pedig, hogy legalább az egyik hatos. Ekkor

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{1}{11}$$

2.2. Feladat. Milyen n>1-re lesz független

a) az a két esemény, hogy A: n érmedobásból van fej és írás is, valamint B: legfeljebb egy írás van.

b) az a két esemény, hogy A: n érmedobásból van fej és írás is, valamint B: az első dobás fej.

Megoldás

a) $P(A) = P(\text{van fej és írás is}) = 1 - P(\text{csak az egyik van}) = 1 - 2P(\text{csak fej van}) = 1 - 2\frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$
$P(B) = P(\text{legfeljebb 1 írás van}) = P(\text{pontosan 0 írás van}) + P(\text{pontosan 1 írás van}) = \frac{1}{2^n} + \binom{n}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{n+1}{2^n}$
$P(A \cap B) = P(\text{pontosan 1 írás van}) = \frac{n}{2^n}$
n-re megoldandó a $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ egyenlet, amiből $n + 1 = 2^{n-1}$ lesz. Könnyen látható, hogy az egyenlőség csak $n = 3$ esetén lesz igaz.

b) $P(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$
$P(B) = P(\text{az első fej}) = \frac{1}{2}$
$P(A \cap B) = P(\text{az első fej, a többiben van írás}) \overset{\text{függetlenek}}{=} P(\text{az első fej})P(\text{a többiben van írás}) =$
$\frac{1}{2}(1 - P((n-1) \text{ fej}) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$
n-re megoldandó a $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ egyenlet, amiből $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)\frac{1}{2}$ lesz, ez pedig azonosság, így minden $n > 1$-re függetlenek.

2.3. Feladat. 41 millió ötöslottó-szelvényt töltenek ki egymástól függetlenül. Mennyi a valószínűsége, hogy lesz legalább egy 5-ös találat?

Megoldás

$$P(\text{legalább egy ötös találat lesz a 41M-ból}) = 1 - P(\text{nem lesz ötös találat a 41M-ból}) \overset{\text{függetlenség}}{=}$$

$$= 1 - P(\text{egy embernek nem lesz ötös találata})^{41\cdot 10^6} = 1 - \left(1 - \frac{\binom{5}{5}}{\binom{90}{5}}\right)^{41\cdot 10^6} \approx 0,6066.$$

2.4. Feladat. 100 érme közül az egyik hamis (ennek mindkét oldalán fej található). Egy érmét véletlenszerűen kiválasztva és azzal 10-szer dobva, 10 fejet kaptunk. Ezen feltétellel mi a valószínűsége, hogy a hamis érmével dobtunk?

Megoldás

Jelölje A azt az eseményt, hogy 10 dobásból 10 fej, B_1 azt, hogy jó érmével dobtunk, illetve B_2 azt, hogy hamis érmével dobtunk. Ekkor:

$$P(B_1) = \frac{99}{100}; \qquad P(A|B_1) = \binom{10}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{2^{10}}$$
$$P(B_2) = \frac{1}{100}; \qquad P(A|B_2) = 1$$

Alkalmazva a Bayes-tételt:

$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{100}}{\frac{1}{1024} \cdot \frac{99}{100} + 1 \cdot \frac{1}{100}} \approx 0.9118.$$

2.5. Feladat. Egy diák a vizsgán p valószínűséggel tudja a helyes választ. Amennyiben nem tudja, akkor tippel (az esélye ekkor $\frac{1}{3}$). Ha helyesen válaszolt, mennyi a valószínűsége, hogy tudta a helyes választ?

Megoldás

Jelölje A azt az eseményt, hogy helyesen válaszolt, B_1 azt, hogy tudta a választ, illetve B_2, hogy nem tudta a választ. Ekkor:

$$P(B_1) = p; \qquad P(A|B_1) = 1$$
$$P(B_2) = 1 - p; \qquad P(A|B_2) = \frac{1}{3}$$

Alkalmazva a Bayes-tételt:

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)} = \frac{1 \cdot p}{1 \cdot p + \frac{1}{3} \cdot (1-p)} = \frac{3p}{2p+1}$$

2.6. Feladat. Egy számítógépes program két független részből áll. Az egyikben $0,2$, a másikban $0,3$ a hiba valószínűsége. Ha a program hibát jelez, akkor mi a valószínűsége, hogy mindkét rész hibás?

Megoldás

Vezessük be a következő jelöléseket:

- A - a program hibát jelez;
- B_1 - egyik rész sem hibás;
- B_2 - pontosan az egyik rész hibás;
- B_3 - mindkét rész hibás.

Ekkor

$$P(B_1) = P(\text{sem az első, sem a második}) = (1-0,2)(1-0,3) = 0,56 \qquad P(A|B_1) = 0$$
$$P(B_2) = P(\text{pontosan az egyik}) = 0,2(1-0,3) + 0,3(1-0,2) = 0,14 + 0,24 = 0,38; \qquad P(A|B_2) = 1$$
$$P(B_3) = 0,06; \qquad P(A|B_3) = 1$$

Alkalmazva a Bayes-tételt:

$$P(B_3|A) = \frac{P(A|B_3)P(B_3)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)} = \frac{1 \cdot 0,06}{0 \cdot 0,56 + 1 \cdot 0,38 + 1 \cdot 0,06} = \frac{0,06}{0,44} \approx 0,1364.$$

2.7. Feladat. Egy számítógép processzorát 3 üzemben készítik. 20% eséllyel az elsőben, 30% eséllyel a másodikban és 50% eséllyel a harmadikban. A garanciális hibák valószínűsége az egyes üzemekben rendre 10%, 4%, illetve 1%. Ha a gépünk processzora elromlott, akkor mi a valószínűsége, hogy az első üzemben készült?

Megoldás

Vezessük be a következő jelöléseket:

- A - a processzorunk elromlott;
- B_1 - a processzorunk az első üzemben készült;
- B_2 - a processzorunk a második üzemben készült;
- B_3 - a processzorunk a harmadik üzemben készült.

Ekkor

$$P(B_1) = 0,2; \qquad P(A|B_1) = 0,10$$
$$P(B_2) = 0,3; \qquad P(A|B_2) = 0,04$$
$$P(B_3) = 0,5; \qquad P(A|B_3) = 0,01$$

Alkalmazva a Bayes-tételt:

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)} = \frac{0,1 \cdot 0,2}{0,1 \cdot 0,2 + 0,04 \cdot 0,3 + 0,01 \cdot 0,5} \approx 0,5405$$

2.8. Feladat. Adjuk meg annak a valószínűségi változónak az eloszlását, ami egy hatgyermekes családban a fiúk számát adja meg. (Tegyük fel, hogy mindig $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ a fiúk, ill. a lányok születési valószínűsége.)

Megoldás

Jelölje X valószínűségi változó a fiúk számát. Ekkor a feladat visszatevéses mintavételként kezelhetõ, mely paramétereire $p = \frac{1}{2}$ és $n = 6$ teljesülnek. Amiből a kívánt eloszlás:

$$P(X = k) = \binom{6}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-k} = \binom{6}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6.$$

2.9. Feladat. Tegyük fel, hogy az új internet-előfizetők véletlenszerűen választott 20%-a speciális kedvezményt kap. Mi a valószínűsége, hogy 10 ismerősünk közül, akik most fizettek elő, legalább négyen részesülnek a kedvezményben?

Megoldás

Legyen X az a valószínűségi változó, mely megadja a speciális kedvezményt kapó ismerőseink számát. Ekkor ez egy olyan visszatevéses mintavételként kezelhető feladat, mely paramétereire $p = \frac{1}{5}$ és $n = 10$. Így pedig

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) = \\ &= 1 - \left[\binom{10}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^{10} + \binom{10}{1}\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{4}{5}\right)^9 + \binom{10}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^8 + \binom{10}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^7\right] \\ &= 1 - \left[\binom{10}{0}4^{10} + \binom{10}{1}4^9 + \binom{10}{2}4^8 + \binom{10}{3}4^7\right]\left(\frac{1}{5}\right)^{10} \approx 0,1209. \end{aligned}$$

2.10. Feladat. A 32 lapos magyar kártyacsomagból kihúzunk 7 lapot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lapok között mind a négy szín előfordul?

Megoldás

Jelölje A a kívánt eseményt, ekkor:

$$P(A) = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{\frac{4!}{3!}\binom{8}{4}\binom{8}{1}\binom{8}{1}\binom{8}{1} + \frac{4!}{2!}\binom{8}{3}\binom{8}{2}\binom{8}{1}\binom{8}{1} + \frac{4!}{3!}\binom{8}{2}\binom{8}{2}\binom{8}{2}\binom{8}{1}}{\binom{32}{7}},$$

ugyanis a következőféleképpen lehet 4 különböző szín, vagy $4 + 1 + 1 + 1$, vagy $3 + 2 + 1 + 1$, vagy $2 + 2 + 2 + 1$.

Megoldás a szita módszerrel: Legyen A_i = $\{i$-edik színt nem húzzuk ki$\}$. Ekkor

$$P(\text{mind a négy színt kihúzzuk}) = 1 - P(\text{nem mind a négy színt húzzuk ki}) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4), \text{ahol}$$

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = S_1^{(4)} - S_2^{(4)} + S_3^{(4)} - S_4^{(4)}$ és

$S_1^{(4)} = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = \binom{4}{1}\frac{\binom{24}{7}}{\binom{32}{7}}$

$S_2^{(4)} = P(A_1 \cap A_2) + \cdots + P(A_3 \cap A_4) = \binom{4}{2}\frac{\binom{16}{7}}{\binom{32}{7}}$

$S_3^{(4)} = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \cdots + P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \binom{4}{3}\frac{\binom{8}{7}}{\binom{32}{7}}$

$S_4^{(4)} = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 0.$

Ebből következik, hogy

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \frac{\binom{4}{1}\binom{24}{7} - \binom{4}{2}\binom{16}{7} + \binom{4}{3}\binom{8}{7} - 0}{\binom{32}{7}} = 0,39, \text{ így } P(\text{mind a 4 színt kihúzzuk}) = 0,61.$$

2.11. Feladat. Egy alkalmassági vizsgálat adatai szerint a vizsgált személyeken 0,05 valószínűséggel mozgásszervi és 0,03 valószínűséggel érzékszerni rendellenesség figyelhető meg. Az együttes előfordulás valószínűsége 0,01.

a) Független-e a két rendellenesség előfordulása? Mekkora lenne az együttes előfordulás valószínűsége, ha a két rendellenesség előfordulása független volna?

b) Mi a valószínűsége annak, hogy egy találomra kiválasztott személyen egyik rendellenesség sem figyelhető meg?

c) Mekkora valószínűséggel találunk érzékszervi rendellenességet a mozgásszervi rendellenességgel élő egyéneknél? Fordítva, mekkora valószínűséggel található mozgásszervi rendellenesség az érzékszervi rendellenességben szenvedő egyéneknél?

Megoldás

Legyen M = a véletlenszerűen kiválasztott személyen mozgásszervi rendellenesség található és
E = a véletlenszerűen kiválasztott személyen érzékszervi rendellenesség található

a) Ha M és E független események volnának, akkor $P(M \cap E) = P(M)P(E) = 0,05 \cdot 0,03 = 0,0015$ teljesülne 0,01 helyett, így M és E nem függetlenek.

b) A kérdéses esemény (egyik rendellenesség sem figyelhető meg) ellentettje az, hogy legalább az egyik megfigyelhető. Az ellentett esemény valószínűsége alapján

$P(\overline{M \cup E}) = 1 - P(M \cup E) = 1 - (P(M) + P(E) - P(M \cap E)) = 1 - (0,05 + 0,03 - 0,01) = 0,93.$

c) $P(E|M) = \dfrac{P(E \cap M)}{P(M)} = \dfrac{0,01}{0,05} = 0,2$ (és fordítva $P(M|E) = \dfrac{P(M \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0,01}{0,03} \approx 0,33.$)

3. gyakorlat megoldások

3.1. Feladat. Egy tétel áru 1% selejtet tartalmaz. Hány darabot kell találomra kivennünk és megvizsgálnunk, hogy a megvizsgált darabok között legalább 0,95 valószínűséggel selejtes is legyen, ha az egyes kiválasztott darabokat vizsgálatuk után visszatesszük?

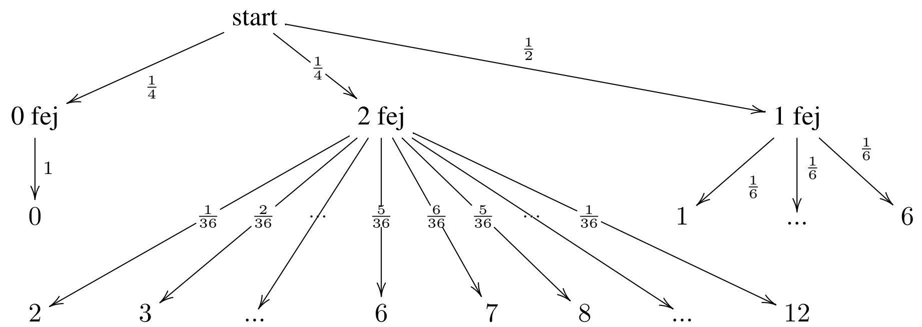
Megoldás

Legyen X = a selejtes áruk száma a vizsgált darabok közt. Ekkor
$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot 0,01^0 \cdot 0,99^n > 0,95 \Rightarrow 0,05 > 0,99^n \Rightarrow n > \frac{\ln 0,05}{\ln 0,99} \approx 298,07 \Rightarrow n \geq 299.$

3.2. Feladat. Dobjunk egy kockával annyiszor, ahány fejet dobtunk két szabályos érmével. Jelölje X a kapott számok összegét. Adjuk meg X eloszlását!

Megoldás

Esetszétbontással érdemes. Annak a valószínűsége, hogy 0,1,2 fejet dobunk rendre 1/4, 1/2, 1/4. Az összegek 0 és 12 közé eshetnek, attól függően, hogy hány fejet dobtunk.



$P(X = 0) = \frac{1}{4} \cdot 1$
$P(X = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}$
$P(X = 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{36}$
$\vdots$
$P(X = 6) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{36}$
$P(X = 7) = \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{36}$
$\vdots$
$P(X = 12) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{36}$

3.3. Feladat. Jelölje X az ötöslottón kihúzott lottószámok legkisebbikét. Adjuk meg X eloszlását!

Megoldás

Jelentse $X = k$ azt, hogy a legkisebb kihúzott szám k. Ez $1 - 86$-ig bármelyik szám lehet. Ezek alapján, ha tudjuk, hogy k a legkisebb:

$$P(X = k) = \frac{\binom{90-k}{4}}{\binom{90}{5}},$$

mert a maradék kihúzott szám $k + 1$ és 90 közé eshet.

3.4. Feladat. Egy érmével dobva (tfh. p a fej valószínűsége), jelölje X az első azonosakból álló sorozat hosszát. (Azaz pl., ha a sorozat FFI..., akkor $X = 2$.) Adjuk meg X eloszlását!

Megoldás

Tegyük fel, hogy k-szor dobtunk egymás után fejet. Ez akkor lesz pontosan k hosszú sorozat, ha a k fej után közvetlenül írást dobtunk. Ugyanez fordítva is kell, hogy teljesüljön, azaz k írás után 1 fej kell. Ezek alapján az eloszlás:

$$P(X = k) = p^k(1 - p) + (1 - p)^k p$$

3.5. Feladat. Tegyük fel, hogy egy számítógép meghibásodási időpontja 0 és 10 év között van és itt geometriai modellel írható le. Határozzuk meg a jelenség eloszlásfüggvényét!

Megoldás

Legyen a ξ valószínűségi változó a meghibásodás időpontja, azaz ξ a [0,10] intervallumból veheti fel értékeit. Ekkor $P(\xi < 0) = 0$, mivel a meghibásodás időpontja nem lehet negatív. Hasonlóan $P(\xi < 10) = 1$, mivel a számítógép 10 éven túl nem üzemelhet. Ha viszont $0 < x < 10$, akkor $P(\xi < x) = \frac{x}{10}$, mivel a meghibásodás valószínűsége arányos a szakasz hosszával.

Ekkor az eloszlásfüggvény a következő alakú: $F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{x}{10} & \text{ha } 0 < x \leq 10 \\ 1 & \text{ha } 10 < x \end{cases}$

Az ilyen eloszlásfüggvényű valószínűségi változót egyenletes eloszlásúnak nevezzük a $[0, 10]$ intervallumon.

3.6. Feladat. Legyen $0 < Y < 3$ valószínűségi változó. Eloszlásfüggvénye ezen az intervallumon $F(x) = cx^3$. Mennyi c és $P(-1 < Y < 1)$?

Megoldás

Az eloszlásfüggvénynek monoton növekedőnek kell lennie és legfeljebb 1 lehet, vagyis c pozitív lehet csak és $x = 3$-ban már 1, vagyis

$$1 = \max_{x \in (0,3]} cx^3 = c \cdot 3^3 = 27c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{27}.$$

Tudjuk, hogy -1-ben az eloszlásfüggvény 0-át vesz fel, emiatt $P(-1 < Y < 1) = F(1) - F(-1) = \dfrac{1}{27} - 0.$

3.7. Feladat. Legyen X egy folytonos valószínűségi változó a $[0, c]$ intervallumon, sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{9}x^2, & \text{ha } 0 \leq x < c \\ 0, & \text{ha } x < 0 \text{ vagy } x \geq c. \end{cases}$$

Határozza meg c-t és X eloszlásfüggvényét!

Megoldás

Mivel a sűrűségfüggvény integrálja $=1$ a $[0, c]$ intervallumon, így $1 = \displaystyle\int_0^c \frac{1}{9}t^2\,dt = \frac{1}{9}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^c = \frac{1}{9}\frac{c^3}{3}$, amiből $c = 3$.

Felhasználva, hogy az eloszlásfüggvény a sűrűségfüggvény integrálja:

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{9}t^2\,dt = \left[\frac{1}{9}\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{27} \quad 0 < x \leq 3, \text{ így } F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ \dfrac{x^3}{27}, & \text{ha } 0 < x \leq 3 \\ 1, & \text{ha } x > 3 \end{cases}$$

3.8. Feladat. Az X valószínűségi változó a $[0, c]$ intervallumon veszi fel értékeit és ott sűrűségfüggvénye $4e^{-2x}$. Határozzuk meg c értékét és annak valószínűségét, hogy $\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}$!

Megoldás

Mivel az eloszlásfüggvény a sűrűségfüggvény integrálja, így

$$F(x) = \int_0^x 4e^{-2t}\,dt = \left[\frac{e^{-2t}}{-2}4\right]_0^x = -2e^{-2x} + 2 \qquad 0 < x \leq c,$$

és $F(c) = 1$-ből következik, hogy $-2e^{-2c} + 2 = 1$, azaz $c = \frac{\ln(2)}{2} \approx 0,35$.

$$P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - (-2e^{-2\frac{1}{4}} + 2) = \frac{2}{\sqrt{e}} - 1 \approx 0,21.$$

3.9. Feladat. Legyenek az X diszkrét valószínűségi változó értékei $-2, 1, 3$, a következő valószínűségekkel:

$$P(-2) = 1/2, \quad P(1) = 1/3, \quad P(3) = 1/6.$$

Rajzolja fel az $F(x)$ eloszlásfüggvényt!

Megoldás

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq -2 \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } -2 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}, & \text{ha } 1 < x \leq 3 \\ 1, & \text{ha } x > 3 \end{cases}$$

4. gyakorlat megoldások

4.1. Feladat. Tegyük fel, hogy a 3 valószínűségszámítás gyakorlatra rendre 15, 20, illetve 25 diák jár. Várhatóan mekkora egy véletlenszerűen kiválasztott diák csoportja?

Megoldás

Legyen X a valószínűségszámítás gyakorlatra járó diákok száma. Ekkor
$P(X = 15) = 15/60 = 1/4$
$P(X = 20) = 20/60 = 1/3$
$P(X = 25) = 25/60 = 5/12$
Így a várható érték $EX = 15 \cdot 1/4 + 20 \cdot 1/3 + 25 \cdot 5/12 = (45 + 80 + 125)/12 = 250/12 = 20,83$.

4.2. Feladat. Két kockával dobunk. Egy ilyen dobást sikeresnek nevezünk, ha van 6-os a kapott számok között. Várhatóan hány sikeres dobásunk lesz n próbálkozásból?

Megoldás

Legyen X a sikeres dobások száma az n dobásból. Ekkor X egy p paraméterű binomiális eloszlást követ, melyre $p = \frac{11}{36}$ a sikeres dobás valószínűsége. Így X várható értéke $EX = np$, azaz várhatóan $\frac{11}{36}n$ sikeres dobásunk lesz.

4.3. Feladat. Tegyük fel, hogy egy dobozban van $2N$ kártyalap, melyek közül kettőn 1-es, kettőn 2-es szám van és így tovább. Válasszunk ki véletlenszerűen m lapot. Várhatóan hány pár marad a dobozban?

Megoldás

Legyen X_i annak az indikátora, hogy mindkét i feliratú lap bent marad az m lap kivétele után, azaz

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{ha mindkét } i \text{ feliratú lap bent marad} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor

$$p = P(X_i = 1) = \frac{\binom{2N-2}{m}}{\binom{2N}{m}}. \qquad \left(\text{Legyen} \binom{n}{k} := 0, \text{ ha } n < k.\right)$$

Legyen X a dobozban maradt párok száma az m lap kivétele után. Ekkor $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$, melynek várható értéke

$$EX = EX_1 + EX_2 + \cdots + EX_N = Np = N\frac{\binom{2N-2}{m}}{\binom{2N}{m}} = \frac{(2N-m)(2N-1-m)}{2(2N-1)}.$$

4.4. Feladat. Mennyi az ötöslottón kihúzott

a) számok összegének várható értéke?

b) páros számok számának várható értéke?

Megoldás

a) Egy húzásnál a várható érték $1 \cdot \frac{1}{90} + 2 \cdot \frac{1}{90} + \cdots + 90 \cdot \frac{1}{90} = \frac{1+2+\ldots+90}{90} = 45,5$. Öt szám kihúzása esetén pedig az összeg várható értéke $5 \cdot 45,5 = 227,5$.

b) A lottón kihúzott (páros és páratlan) számok számának várható értéke 5, azaz $E(\text{párosak száma}) + E(\text{páratlanok száma}) = 5$. Mivel ugyanannyi páros és páratlan szám közül választhatunk, így $E(\text{párosak száma}) = E(\text{páratlanok száma})$. Ez viszont csak akkor teljesülhet, ha a $E(\text{párosak száma}) = 2,5$.

Más megoldás: Jelölje X a kihúzott páros számok darabszámát. Ekkor X hipergeometrikus eloszlást követ $N = 90$, $K = 45$ és $m = 5$ paraméterekkel, így $EX = m\dfrac{K}{N} = 5\dfrac{45}{90} = 2.5$.

4.5. Feladat. Egy bükkösben a bükkmagoncok négyzetméterenkénti száma Poisson-eloszlású, $\lambda = 2,5$ db / m^2 paraméterrel. Mi a valószínűsége annak, hogy egy 1 m^2-es mintában

a) legfeljebb egy, ill.

b) több, mint három magoncot találunk?

c) Adja meg a magoncok számanak várható értékét és szórását!

Megoldás

Legyen X a bükkmagoncok négyzetméterenkénti száma. Ekkor $X \sim Poisson(\lambda)$, ahol $\lambda = 2,5$.

a) $P(X \le 1) = P(X=0) + P(X=1) = 1 \cdot e^{-2,5} + 2,5 \cdot e^{-2,5} = (1+2,5)e^{-2,5} \approx 0,287.$

b) $P(X > 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)) = 1 - (1 \cdot e^{-2,5} + 2,5 \cdot e^{-2,5} + \frac{2,5^2}{2} \cdot e^{-2,5} + \frac{2,5^3}{6} \cdot e^{-2,5}) = 1 - \left(1 + 2,5 + \frac{2,5^2}{2} + \frac{2,5^3}{6}\right) e^{-2,5} \approx 0,242.$

c) $EX = \lambda = 2,5,\ DX = \sqrt{\lambda} = \sqrt{2,5} \approx 1,58.$

4.6. Feladat. Véletlenszerűen választunk egy pontot az $x^2+y^2 < 1$ kör belsejében. Jelölje Z a távolságát a középponttól. Adjuk meg Z eloszlás- és sűrűségfüggvényét valamint várható értékét!

Megoldás

Legyen Z a középponttól való távolság. Ekkor $0 \le Z \le 1$, így a továbbiakban csak erre az intervallumra szorítkozunk.

$$F(r) = P(Z < r) = \frac{r^2\pi}{1^2\pi} = r^2$$

ebből deriválással adódik, hogy

$$f(r) = F'(r) = 2r,$$

$$EZ = \int_0^1 r \cdot 2r \,\mathrm{dr} = \left[\frac{2r^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

4.7. Feladat. Legyen X sűrűségfüggvénye $\dfrac{c}{x^4}$ ha $x > 1$, és 0 különben.

a) $c = ?$

b) $EX = ?$

Megoldás

a) Mivel $1 = \displaystyle\int_1^\infty \frac{c}{x^4} dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{c}{x^4} dx = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{c}{-3\cdot x^3}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{c}{-3\cdot t^3} - \frac{c}{-3\cdot 1^3}\right] = 0 + \frac{c}{3} = \frac{c}{3}$
$\left(\text{egyszerűbb jelöléssel: } 1 = \displaystyle\int_1^\infty \frac{c}{x^4} dx = \left[\frac{c}{-3\cdot x^3}\right]_1^\infty = \frac{c}{3}\right)$, így következik, hogy $c = 3$.

b) $EX = \displaystyle\int_1^\infty x \frac{3}{x^4}\, dx = \left[\frac{-3}{2\cdot x^2}\right]_1^\infty = 1,5$

4.8. Feladat. Tapasztalatok szerint az út hossza, amit egy bizonyos típusú robogó megtesz az első meghibásodásáig exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Ez a távolság átlagosan 6000 km. Mi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott robogó

a) kevesebb, mint 4000 km megtétele után meghibásodik?

b) több, mint 6500 km megtétele után hibásodik meg?

c) 4000 km-nél több, de 6000 km-nél kevesebb út megtétele után hibásodik meg?

d) Legfeljebb mekkora utat tesz meg az első meghibásodásig a robogók leghamarabb meghibásodó 20%-a?

Megoldás

Legyen X az első meghibásodásig megtett út. Ekkor $X \sim Exp(\lambda)$, ahol $\lambda = \dfrac{1}{6000}$.

a) $P(X < 4000) = 1 - e^{-\frac{1}{6000}4000} \approx 0,4866$

b) $P(X > 6500) = 1 - P(X < 6500) = e^{-\frac{1}{6000}6500} \approx 0,3385$

c) $P(4000 < X < 6000) = P(X < 6000) - P(X < 4000) = 1 - e^{-\frac{1}{6000}6000} - (1 - e^{-\frac{1}{6000}4000}) \approx 0,1455$

d) $0,2 = P(X < c) = 1 - e^{-\frac{1}{6000}c}$, azaz $0,8 = e^{-\frac{1}{6000}c}$, amiből $c = -6000\ln(0,8) \approx 1338,86$.

4.9. Feladat. Egy tehén napi tejhozamát normális eloszású valószínűségi változóval, $m = 22,1$ liter várható értekkel és $\sigma = 1,5$ liter szórással, modellezzük.

a) Mi annak a valószínűsége, hogy egy adott napon a tejhozam 23 és 25 liter közé esik?

b) Mekkora valószínűséggel esik a napi tejhozam $m - \sigma$ es $m + \sigma$ közé?

$(\Phi(0,6) = 0,7257, \Phi(1,93) = 0,9732, \Phi(1) = 0,8413)$

Megoldás

Legyen X a napi tejhozam. Ekkor $X \sim N(22,1; 1,5^2)$.

a) $P(23 < X < 25) = P(X < 25) - P(X < 23) = \Phi\left(\frac{25-22,1}{1,5}\right) - \Phi\left(\frac{23-22,1}{1,5}\right) = \Phi(1,93) - \Phi(0,6) = 0,9732 - 0,7257 = 0,2475.$

b) $P(m-\sigma < X < m+\sigma) = P(X < m+\sigma) - P(X < m-\sigma) = \Phi\left(\frac{(m+\sigma)-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(m-\sigma)-m}{\sigma}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0,8413 - 1 = 0,6826.$

4.10. Feladat. Mennyi garanciát adjunk, ha azt szeretnénk, hogy termékeink legfeljebb 10%-át kelljen garanciaidőn belül javítani, ha a készülék élettartama 10 év várható értékű és 2 év szórású normális eloszlással közelíthető.

Megoldás

Legyen X egy termék meghibásodásának ideje. Ekkor $X \sim N(10, 2^2)$

$$0,1 = P(X < c) = P\left(\frac{X-10}{2} < \frac{c-10}{2}\right) = \Phi\left(\frac{c-10}{2}\right)$$

$$c = 2 \cdot \Phi^{-1}(0,1) + 10 = 2 \cdot (-\Phi^{-1}(0,9)) + 10 = -2 \cdot 1,28 + 10 = 7,44.$$

Standard normáslis eloszás eloszlásfüggvényének értékei: `http://www.cs.elte.hu/~kovacsa/stdnormelo.pdf`

5. gyakorlat megoldások

5.1. Feladat. Tegyük fel, hogy egy populációban az intelligenciahányados (IQ) normális eloszlású 110 várható értékkel és 10 szórással. Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember IQ-ja 120 feletti?
/ $\Phi(1) = 0,8413$ /

Megoldás

Legyen X egy véletlenszerűen kiválasztott ember IQ-ja. Ekkor $X \sim N(110, 10^2)$.

$$P(X > 120) = 1 - P(X < 120) = 1 - P\left(\frac{X-110}{10} < 1\right) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0,8413 \approx 16\%$$

5.2. Feladat. Egy adott területről származó talajmintákban a spórák száma Poisson-eloszlású. A minták harmadában egyáltalán nincs spóra. Mi a valószínűsége annak, hogy egy mintában a spórák száma egynél több? Mekkora a spórák számának várható értéke és szórása?

Megoldás

Legyen X a spórák száma a vizsgált mintában. Ekkor $X \sim Poisson(\lambda)$.
$P(X = 0) = e^{-\lambda} = \frac{1}{3}$, így $\lambda = -\ln\dfrac{1}{3} = \ln 3 \approx 1,099$.
$P(X > 1) = 1 - P(X \le 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - (1 \cdot e^{-\ln 3} + \ln 3 \cdot e^{-\ln 3}) \approx 0,3$.
$EX = \lambda = \ln 3$ és $DX = \sqrt{\ln 3} \approx 1,048$.

5.3. Feladat. Legyen X sűrűségfüggvénye $\dfrac{c}{x^4}$ ha $1 < x$, és 0 különben. Mi a c konstans értéke és mennyi D^2X?

Megoldás

$$1 = \int_1^\infty \frac{c}{x^4}dx = \left[\frac{cx^{-3}}{-3}\right]_1^\infty = 0 - \left(-\frac{c}{3}\right) = \frac{c}{3}, \text{ így } c = 3$$

$$EX = \int_1^\infty x\frac{3}{x^4}dx = \int_1^\infty 3x^{-3}dx = \left[-\frac{3}{2}x^{-2}\right]_1^\infty = 0 - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$EX^2 = \int_1^\infty x^2\frac{3}{x^4}dx = \int_1^\infty 3x^{-2}dx = \left[-3x^{-1}\right]_1^\infty = 0 - (-3) = 3$$

$$D^2X = EX^2 - E^2X = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

5.4. Feladat. Legyen X egyenletes eloszlású az $(1, 4)$ intervallumon Számítsuk ki $(X - 1)^2$ várható értékét!

Megoldás

Ha $X \sim Egyenletes(1, 4)$, akkor $Y = X - 1 \sim Egyenletes(0, 3)$. Ekkor

$$E(X-1)^2 = EY^2 = \int_0^3 y^2\frac{1}{3}\,dy = \frac{1}{3}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3 = 3$$

Más megoldás:

$$E(X-1)^2 = D^2(X-1) + E^2(X-1) = \frac{(3-0)^2}{12} + \left(\frac{0+3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{9}{4} = 3$$

5.5. Feladat. Legyen $X \sim N(2, \sqrt{5}^2)$ és $Y \sim N(5, 3^2)$ függetlenek és legyen $W = 3X - 2Y + 1$. Számítsa ki EW-t és D^2W-t!

Megoldás

$EW = 3EX - 2EY + 1 = 6 - 10 + 1 = -3$ és $D^2W = 9D^2X + 4D^2Y = 45 + 36 = 81$

5.6. Feladat. Legyen X és Y független valószínűségi változók mindkettő 0 várható értékkel és 1 szórással. Legyen $W = X - Y$. Számítsa ki W várható értékét és szórását!

Megoldás

$EW = EX - EY = 0$ és $DW = \sqrt{D^2X + D^2Y} = \sqrt{2}$

5.7. Feladat. Adjon meg véges sok értéket felvehető (X) ill. végtelen sok értéket felvehető (Y) diszkrét valószínűségi változókat melyeknek szórása 1!

Megoldás

Például: Legyen $P(X = -1) = \frac{1}{2}, P(X = 1) = \frac{1}{2}$ ill. $Y \sim Poisson(1)$.

5.8. Feladat. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását a következő táblázat mutatja. Határozzuk meg X és Y eloszlását, várható értékét, szórásnégyzetét és kovarianciájukat!

Y \ X	0	1	2
1	3/27	3/27	4/27
2	2/27	2/27	4/27
3	1/27	1/27	7/27

Megoldás

$Y \setminus X$	0	1	2	Y
1	3/27	3/27	4/27	10/27
2	2/27	2/27	4/27	8/27
3	1/27	1/27	7/27	9/27
X	6/27	6/27	15/27	1

$$EX = 0 \cdot \frac{6}{27} + 1 \cdot \frac{6}{27} + 2 \cdot \frac{15}{27} = \frac{36}{27} = \frac{4}{3}$$

$$EX^2 = 0^2 \cdot \frac{6}{27} + 1^2 \cdot \frac{6}{27} + 2^2 \cdot \frac{15}{27} = \frac{66}{27} = \frac{22}{9}$$

$$D^2X = EX^2 - E^2X = \frac{22}{9} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$EY = 1 \cdot \frac{10}{27} + 2 \cdot \frac{8}{27} + 3 \cdot \frac{9}{27} = \frac{53}{27}$$

$$EY^2 = 1^2 \cdot \frac{10}{27} + 2^2 \cdot \frac{8}{27} + 3^2 \cdot \frac{9}{27} = \frac{123}{27} = \frac{41}{9}$$

$$D^2Y = EY^2 - E^2Y = \frac{123}{27} - \left(\frac{53}{27}\right)^2 = \frac{512}{729} = \frac{2^9}{3^6}$$

XY	0	1	2
1	0	1	2
2	0	2	4
3	0	3	6

$$E(XY) = 1 \cdot \frac{3}{27} + 2 \cdot \frac{2}{27} + 3 \cdot \frac{1}{27} + 2 \cdot \frac{4}{27} + 4 \cdot \frac{4}{27} + 6 \cdot \frac{7}{27} = \frac{76}{27}$$

$$cov(X,Y) = E(XY) - EX \cdot EY = \frac{76}{27} - \frac{4}{3} \cdot \frac{53}{27} = \frac{16}{81} = \frac{2^4}{3^4}$$

5.9. Feladat. Legyenek az X valószínűségi változó értékei $-2, -1, 0, 1, 2$ és minden értéket azonos $1/5$ valószínűséggel vegye fel és legyen $Y = X^2$.

a) Adja meg az X és Y együttes eloszlását az alábbi táblázatban!

$Y \setminus X$	-2	-1	0	1	2
0					
1					
4					

b) Számítsa ki EX-et és EY-t!

c) Mutassa meg, hogy X és Y nem független, de $cov(X,Y) = 0$

Megoldás

a)

$Y \setminus X$	-2	-1	0	1	2	Y
0	0	0	1/5	0	0	1/5
1	0	1/5	0	1/5	0	2/5
4	1/5	0	0	0	1/5	2/5
X	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5	1

b) A peremeloszlásokat használva: $EX = \frac{1}{5}(-2 - 1 + 0 + 1 + 2) = 0$ és $EY = 0 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5} + 4 \cdot \frac{2}{5} = 2$

c) $P(X = -2, Y = 0) = 0 \neq P(X = -2) \cdot P(Y = 0) = \frac{1}{25}$, így X és Y nem függetlenek.
$cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{5}\left((-2) \cdot 4 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4\right) = 0$

6. gyakorlat megoldások

6.1. Feladat. Legyen $X \sim N(2, \sqrt{5}^2)$ és $Y \sim N(5, 3^2)$ függetlenek és legyen $W = 3X - 2Y + 1$. Számítsa ki
a) EW-t és D^2W-t, ill.
b) $P(W \leq 6)$-ot!
$(\Phi(1) = 0,8413)$

Megoldás

a) $EW = 3EX - 2EY + 1 = 6 - 10 + 1 = -3$ és $D^2W = 9D^2X + 4D^2Y = 45 + 36 = 81$
b) Mivel független normális eloszlású valószínűségű változók összege is normális eloszlású, és $3X \sim N(6,\ 3^2 \cdot \sqrt{5}^2)$ továbbá $-2Y \sim N(-10,\ (-2)^2 \cdot 3^2)$, így $W \sim N(-3, 9^2)$.

$$P(W \leq 6) = P\left(\frac{W - (-3)}{9} < \frac{6 - (-3)}{9}\right) = \Phi(1) = 0,8413$$

6.2. Feladat. Legyen X egy véges szórású valószínűségi változó és legyen $a, b \in \mathbb{R}$.
a) Mutassa meg, hogy $aX + b$ és X kovarianciája egyenlő a-szor X szórásnégyzetével!
b) Számolja ki $aX + b$ és X korrelációját $(a \neq 0)$!

Megoldás

a)
$$cov(aX + b, X) = cov(aX, X) + cov(b, X) = acov(X, X) = aD^2(X)$$
b)
$$corr(aX + b, X) = \frac{cov(aX + b, X)}{D(aX + b)DX} = \frac{aD^2X}{\sqrt{a^2}DXDX} = \begin{cases} 1, & \text{ha } a > 0 \\ -1, & \text{ha } a < 0 \end{cases}$$

6.3. Feladat. Legyen X és Y független valószínűségi változók, melyre $D^2X < \infty$ és $D^2Y < \infty$.
a) Mutassa meg, hogy $X + Y$ és X kovarianciája egyenlő X szórásnégyzetével!
b) Számolja ki $X + Y$ és X korrelációját!

Megoldás

a)
$$cov(X + Y, X) = E((X + Y)X - E(X + Y)EX = EX^2 + E(YX) - E^2X - EYEX =$$
$$= EX^2 - E^2X + E(YX) - EYEX = cov(X, X) + cov(Y, X) = D^2(X)$$
b)
$$corr(X + Y, X) = \frac{cov(X + Y, X)}{D(X + Y)DX} = \frac{D^2X}{\sqrt{D^2X + D^2Y}DX} = \frac{DX}{\sqrt{D^2X + D^2Y}}$$

6.4. Feladat. Tegyük fel, hogy egy tábla csokoládé tömege normális eloszlású 100g várható értékkel és 3g szórással. Legalább hány csokoládét csomagoljunk egy dobozba, hogy a dobozban levő táblák átlagos tömege legalább 0.9 valószínűséggel nagyobb legyen 99.5 g-nál, ha feltételezzük, hogy az egyes táblák tömege egymástól független? $(\Phi(1,28) = 0,8997)$

Megoldás

Legyen X egy tábla csokoládé tömege, $X \sim N(100, 3^2)$. Ekkor n tábla csokoládé átlagos tömege $\overline{X} \sim N(100, \frac{9}{n})$, mivel $D^2(\overline{X}) = D^2\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n D^2(X_i) = \frac{n \cdot 9}{n^2} = \frac{9}{n}$.

$$0,9 = P(\overline{X} > 99,5) = 1 - P(\overline{X} < 99,5) = 1 - P\left(\frac{\overline{X} - 100}{\frac{3}{\sqrt{n}}} < \frac{-0,5 \cdot \sqrt{n}}{3}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{-\sqrt{n}}{6}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{6}\right)$$

Mivel tudjuk, hogy $\Phi(1.28) = 0.8997 \approx 0,9$, így $1,28 = \frac{\sqrt{n}}{6}$. Ebből következik, hogy $n = (6 \cdot 1,28)^2 = 58,9$, azaz legalább 59 csokit kell egy dobozba csomagolni.

6.5. Feladat. Egy scannelt kép átlagos mérete 600KB, 100KB szórással. Mi a valószínűsége, hogy 80 ilyen kép együttesen 47 és 48MB közötti tárhelyet foglal el, ha feltételezzük, hogy a képek mérete egymástól független?
$(\Phi(1,12) = 0,8686)$

Megoldás

Jelölje X egy kép eloszlását $\mu = 600$KB várható értékkel és $\sigma = 100$KB szórással. Legyen S_n n db ilyen valószínűségi változó összege ($n = 80$). A centrális határeloszlás tétel szerint

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \to Z \text{ ha } n \to \infty, \text{ ahol } Z \sim N(0,1).$$

Tehát

$$P(47000 \le S_n \le 48000) = P\left(\frac{47000 - 80 \cdot 600}{\sqrt{80} \cdot 100} \le \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le \frac{48000 - 80 \cdot 600}{\sqrt{80} \cdot 100}\right) \approx$$

$$\approx P(-1,12 \le Z \le 0) = \Phi(0) - \Phi(-1,12) = 0,5 - (1 - \Phi(1,12)) = 0,5 - (1 - 0,8686) = 0,3686 = 36,9\%$$

6.6. Feladat. Egy szoftver frissítéséhez 68 file-t kell installálni, amik egymástól függetlenül 10mp várható értékű és 2mp szórású ideig töltődnek.
a) Mi a valószínűsége, hogy a teljes frissítés lezajlik 12 percen belül?
b) A cég a következő frissítésnél azt ígéri, hogy az már 95% valószínűséggel 10 percen belül betöltődik. Hány file-ból állhat ez a frissítés?
$(\Phi(2,42) = 0,992, \Phi(1,645) = 0,95)$

Megoldás

Legyen X egy fájl telepítési ideje $\mu = 10$ mp várható értékkel és $\sigma = 2$ mp szórással. Jelölje S_n n db fájl telepítési idejének az összegét ($n = 68$).
a)

$$P(\text{teljes frissítés lezajlik 12 percen belül}) = P(S_n < 720) = P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < \frac{720 - 680}{2\sqrt{68}}\right) \approx \Phi(2,42) = 99,2\%$$

b)

$$0,95 = P(S_n < 600) = P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < \frac{600 - 10n}{2\sqrt{n}}\right) \approx \Phi\left(\frac{600 - 10n}{2\sqrt{n}}\right)$$

Mivel tudjuk, hogy $\Phi(1,645) = 0,95$, így $1,645 = \dfrac{600 - 10n}{2\sqrt{n}}$. Ezt megoldva következik, hogy $n = 57,5$, azaz legfeljebb 57 fájlból állhat a frissítés.

6.7. Feladat. Legyen egy X pozitív valószínűségi változó várható értéke $EX = 3$ és szórása $DX = 3$. Számítsuk ki, hogy legfeljebb mekkora valószínűséggel vesz fel a változó 13-at vagy annál nagyobb értéket! Mennyi a valószínűség pontos értéke, ha feltesszük, hogy az eloszlás exponenciális?

Megoldás

A Csebisev-egyenlőtlenséget $\varepsilon = 10$ értékre használva

$$P(X \ge 13) = P(X - 3 \ge 13 - 3) = P(X - 3 \ge 10) \le P(|X - 3| \ge 10) \le \frac{D^2X}{10^2} = \frac{9}{100} = 0,09$$

Ha X exponenciális eloszlású, akkor eloszlásfüggvénye $F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{3}x}$, így

$$P(X \ge 13) = 1 - P(X < 13) = 1 - (1 - e^{-\frac{13}{3}}) = e^{-\frac{13}{3}} = 0,013$$

6.8. Feladat. Egy elektromos vezetékgyártó cég 40 m-es vezetékeket gyárt $0,2$ m szórással. Legfeljebb mennyi annak a valószínűsége, hogy a vezeték hossza legalább 1 m-rel eltér a várható 40 m-es értéktől?

Megoldás

A Csebisev-egyenlőtlenséget $\varepsilon = 1$ értékre használva

$$P(|X - 40| \ge 1) \le \frac{D^2X}{1^2} = \frac{0,2^2}{1^2} = 0,04$$

Vagyis legfeljebb 0,04 annak a valószínűsége, hogy a vezeték rövidebb, mint 39 m ill. hosszabb, mint 41 m.

7. gyakorlat megoldások

7.1. Feladat. Háromszor feldobtunk egy kockát és a következőket kaptuk: 5, 3, 6.

(a) Határozzuk meg a következő középértékeket: átlag, medián!

(b) Adjuk meg a rendezett mintát!

(c) Határozzuk meg minden valós x-re annak a relatív gyakoriságát, hogy a kísérletünk során x-nél kisebb értéket kaptunk. Ábrázoljuk a kapott függvényt!

Megoldás

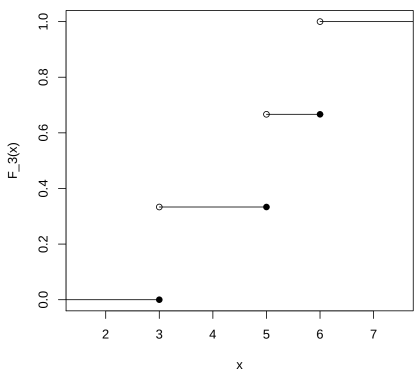
A kapott értékek: $x_1 = 5, x_2 = 3, x_3 = 6$.

(a) átlag $= \overline{x} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{3+5+6}{3} \approx 4,67$, medián $= 5$

(b) rendezett minta: $x_1^* = 3, x_2^* = 5, x_3^* = 6$

(c) relatív gyakoriságok:

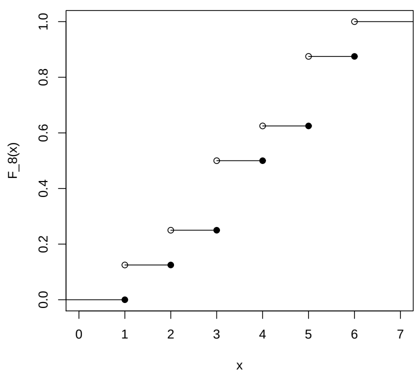
$$F_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 3 \\ \frac{1}{3} & \text{ha } 3 < x \leq 5 \\ \frac{2}{3} & \text{ha } 5 < x \leq 6 \\ 1 & \text{ha } x > 6. \end{cases}$$



7.2. Feladat. Egy szabályos dobókockával nyolcszor dobtunk és a következőket kaptuk: 2, 4, 3, 5, 6, 5, 1, 3. Számítsa ki és rajzolja fel a tapasztalati eloszlásfüggvényt! Mi a kockadobás elméleti eloszlásfüggvénye?

Megoldás

$$F_8(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 1 \\ \frac{1}{8} & \text{ha } 1 < x \leq 2 \\ \frac{2}{8} & \text{ha } 2 < x \leq 3 \\ \frac{4}{8} & \text{ha } 3 < x \leq 4 \\ \frac{5}{8} & \text{ha } 4 < x \leq 5 \\ \frac{7}{8} & \text{ha } 5 < x \leq 6 \\ 1 & \text{ha } x > 6 \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 1 \\ \frac{1}{6} & \text{ha } 1 < x \leq 2 \\ \frac{2}{6} & \text{ha } 2 < x \leq 3 \\ \frac{3}{6} & \text{ha } 3 < x \leq 4 \\ \frac{4}{6} & \text{ha } 4 < x \leq 5 \\ \frac{5}{6} & \text{ha } 5 < x \leq 6 \\ 1 & \text{ha } x > 6 \end{cases}$$



7.3. Feladat. Legyen az alábbi 20 elemű minta gyakorisági táblája:

érték	-1	1	2
gyakoriság	4	10	6

Számolja ki a megfigyeléseink átlagát, mediánját, korrigált tapasztalati szórását és szórási együtthatóját!

Megoldás
$n = 20$

$$\overline{x} = \frac{4 \cdot (-1) + 10 \cdot 1 + 6 \cdot 2}{20} = 0,9$$

$$s_n^* = \sqrt{\frac{4(-1-0,9)^2 + 10(1-0,9)^2 + 6(2-0,9)^2}{19}} = 1,07$$

$$V = \frac{1,07}{0,9} = 1,189 = 118,9\%$$

Medián: $\frac{x^*_{\frac{20}{2}} + x^*_{\frac{20}{2}+1}}{2} = \frac{x^*_{10} + x^*_{11}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$

7.4. Feladat. Egy osztályban a diákok magassága: 180, 163, 150, 157, 165, 165, 174, 191, 172, 165, 168, 186 cm. Elemezzük a diákok testmagasságát az átlag, a korrigált tapasztalati szórás, szórási együttható és boxplot ábra (kvartilisek) segítségével! Értelmezzük az eredményeket!

Megoldás
$n = 12$

$$\overline{x} = \frac{180 + 163 + ... + 186}{12} = 169,7 \text{ cm}$$

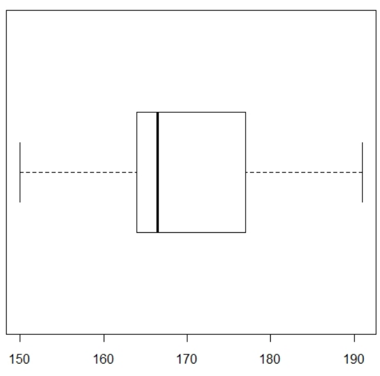
$$s_n^* = \sqrt{\frac{(180-169,7)^2 + (163-169,7)^2 + ... + (186-169,7)^2}{11}} = 11,7 \text{ cm}$$

$$V = \frac{11,7}{169,7} = 6,9\%$$

Rendezett minta: $150, 157, 163, 165, 165, 165, 168, 172, 174, 180, 186, 191$

Kvartilisek:
Q_1-hez sorszám: $\frac{13}{4} = 3 + 0,25$, így $Q_1 = X_3^* + 0,25(X_4^* - X_3^*) = 163 + 0,25 \cdot (165 - 163) = 163,5$ cm
Q_2-höz sorszám: $\frac{13}{2} = 6 + 0,5$, így $Q_2 = X_6^* + 0,5(X_7^* - X_6^*) = 165 + 0,5 \cdot (168 - 165) = 166,5$ cm
ez ugyanaz, mint: medián = $\frac{X_6^* + X_7^*}{2} = \frac{165+168}{2} = 166,5$ cm
Q_3-hoz sorszám: $\frac{13 \cdot 3}{4} = 9 + 0,75$, így $Q_3 = X_9^* + 0,75(X_{10}^* - X_9^*) = 174 + 0,75 \cdot (180 - 174) = 178,5$ cm

Boxplot ábra:

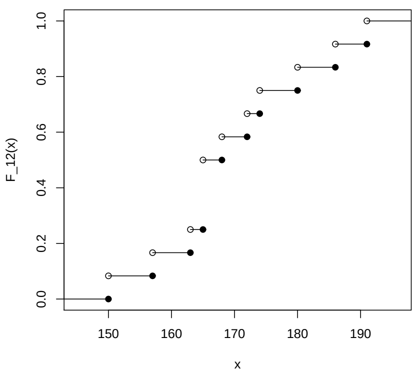


A diákok átlagos testmagassága 169,7 cm, az egyes testmagasságok az átlagos testmagasságtól átlagosan 11,7 cm-rel, azaz 6,9 %-kal térnek el. A hallgatók negyede 163,5 cm-nél alacsonyabb, míg háromnegyede ennél magasabb. A hallgatók fele 166,5 cm-nél alacsonyabb, másik fele ennél magasabb. A hallgatók negyede 178,5 cm-nél magasabb.

7.5. Feladat. Rajzolja fel az előző feladatban a diákok magasságára vonatkozó tapasztalati eloszlásfüggvényt!

Megoldás

$$F_{12}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } z \leq 150 \\ \frac{1}{12} & \text{ha } 150 < x \leq 157 \\ \frac{2}{12} & \text{ha } 157 < x \leq 163 \\ \frac{3}{12} & \text{ha } 163 < x \leq 165 \\ \frac{6}{12} & \text{ha } 165 < x \leq 168 \\ \frac{7}{12} & \text{ha } 168 < x \leq 172 \\ \frac{8}{12} & \text{ha } 172 < x \leq 174 \\ \frac{9}{12} & \text{ha } 174 < x \leq 180 \\ \frac{10}{12} & \text{ha } 180 < x \leq 186 \\ \frac{11}{12} & \text{ha } 186 < x \leq 191 \\ 1 & \text{ha } x > 191 \end{cases}$$



7.6. Feladat. Igaz-e, hogy ha egy minta esetén $Q_1 = Q_3 = 9$, akkor a medián = 9?

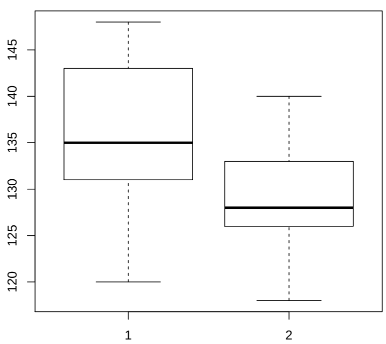
Megoldás Igaz, mivel medián $= Q_2$ és $Q_1 \leq Q_2 \leq Q_3$.

7.7. Feladat. Egy állatkísérletben 30 egér tömegét mérték. A következő értékeket kapták: $q_{0,3} = 17,6$ gramm és $F_{30}(19) = 0,9$. Értelmezze szövegesen ezek jelentését!

Megoldás

A kísérletben az egerek $\frac{3}{10}$-ed részének (vagy 30%-ának, vagyis 9 egérnek) a tömege legfeljebb 17,6 gramm, $\frac{7}{10}$-ed részének (vagy 70%-ának, vagyis 21 egérnek) a tömege pedig legalább 17,6 gramm. Annak a valószínűsége, hogy az egerek tömege 19 grammnál kevesebb egyenlő $0,9$, vagyis az egerek $\frac{9}{10}$-ed részének (vagy 90%-ának, vagyis 27 egérnek) 19 grammnál kevesebb volt a tömege.

7.8. Feladat. Az alábbi boxplot ábrán melyik csoportban mely esetben lesz az adott csoportbeli adatok nagyobb része 135 alatt?
A. 1 B. 2 C. kb. ugyanaz D. nem lehet meghatározni



Megoldás

A 2. csoportban, mivel az 1. csoportban a medián kb. 135, a 2. csoportban pedig Q_3 ez érték alatt van.

7.9. Feladat. Két csoport diákjai magasságát (cm) tartalmazza az alábbi táblázat:

I. csoport (cm)	131	150	147	138	144
II. csoport (cm)	139	148	132	151	140

(a) Melyek igazak az alábbiak közül?
A. A minták terjedelme a két csoportban ugyanakkora.
B. A mintaátlagok megegyeznek.
C. Az interkvartilis terjedelmek ugyanakkorák.
(b) Az I. csoport adatainak mintaátlaga 142 cm, szórása $7,58$ cm. Számolja ki a szórási együtthatót! Mit jelent a mintaátlag, szórás és szórási együttható a szövegkörnyezetben?

Megoldás

(a) Mindhárom állítás igaz.
A. $R_I = 150 - 131 = 19, R_{II} = 151 - 132 = 19$, tehát $R_I = R_{II}$
B. $\overline{x}_I = \frac{131+138+144+147+150}{5} = 142, \overline{x}_{II} = \frac{132+139+140+148+151}{5} = 142$, tehát $\overline{x}_I = \overline{x}_{II}$
C. $IQR_I = q_{\frac{3}{4}} - q_{\frac{1}{4}} = (147 + 0,5(150 - 147)) - (131 + 0,5(138 - 131)) = 148,5 - 134,5 = 14$
$IQR_{II} = q_{\frac{3}{4}} - q_{\frac{1}{4}} = (148 + 0,5(151 - 148)) - (132 + 0,5(139 - 132)) = 149,5 - 135,5 = 14$, tehát $IQR_I = IQR_{II}$
(b) $V = \frac{7.58}{142} = 0,0534 = 5,34\%$. Az I. csoportbeli diákok átlagos testmagassága 142 cm, az egyes testmagasságok az átlagos testmagasságtól átlagosan 7,58 cm-rel, azaz 5,34 %-kal térnek el.

8. gyakorlat megoldások

8.1. Feladat. Legyen $X_1, \ldots, X_n$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók m várható értékkel. Célunk az ismeretlen m paraméter becslése. Tekintsük az alábbi statisztikákat és állapítsuk meg, hogy melyek torzítatlanok! Amelyik nem torzítatlan, hogyan tudnánk torzítatlanná tenni?

$T_1(\mathbf{X}) = X_8 \qquad T_2(\mathbf{X}) = \dfrac{X_3 + X_7}{2} \qquad T_3(\mathbf{X}) = \dfrac{X_9 + X_{19}}{9} \qquad T_4(\mathbf{X}) = \overline{X}$

Megoldás

$E(T_1(\mathbf{X})) = E(X_8) = m$, így T_1 torzítatlan

$E(T_2(\mathbf{X})) = E\left(\dfrac{X_3 + X_7}{2}\right) = \dfrac{E(X_3) + E(X_7)}{2} = m$, így T_2 torzítatlan

$E(T_3(\mathbf{X})) = E\left(\dfrac{X_9 + X_{19}}{9}\right) = \dfrac{E(X_9) + E(X_{19})}{9} = \dfrac{2m}{9}$, így T_3 nem torzítatlan, viszont $\dfrac{9}{2}T_3$ már igen

$E(T_4(\mathbf{X})) = E(\overline{X}) = E\left(\dfrac{1}{n}\sum_{1=1}^{n} E(X_i)\right) = m$, így T_4 torzítatlan

8.2. Feladat. Adjon torzítatlan becslést a független, azonos $E[0, \vartheta]$ eloszlású $X_1, \ldots, X_n$ minta ϑ paraméterére a mintaátlag segítségével!

Megoldás

Mivel $X_1, \ldots, X_n \sim E[0, \vartheta]$, így $E(X_i) = \frac{\vartheta}{2}$. Ekkor $E(\overline{X}) = \frac{\vartheta}{2}$, tehát $E(2\overline{X}) = \vartheta$, vagyis $2\overline{X}$ torzítatlan becslése ϑ-nak.

8.3. Feladat. Legyen $X_1, \ldots, X_n$ független, azonos eloszlású minta az $f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1+\alpha x}{2} & \text{ha } \; -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

sűrűségfüggvényű eloszlásból $-1 \le \alpha \le 1$. Mutassa meg, hogy $\hat{\alpha} = 3\overline{X}$ torzítatlan becslése α-nak!

Megoldás

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{1=1}^{n} X_i\right) = \left(\frac{1}{n}\sum_{1=1}^{n} E(X_i)\right) = \frac{1}{n} nE(X_1) =$$

$$= \int_{-1}^{1} x\frac{1+\alpha x}{2}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}x + \frac{\alpha x^2}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{4} + \frac{\alpha x^3}{6}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4} + \frac{\alpha}{6} - \left(\frac{(-1)^2}{4} + \frac{\alpha(-1)^3}{6}\right) = \frac{\alpha}{3}$$

így $E(3\overline{X}) = \alpha$, azaz $3\overline{X}$ torzítatlan becslése α-nak.

8.4. Feladat. Legyen $X_1, \ldots, X_n$ független, azonos eloszlású minta és legyenek $T_1(X)$ és $T_2(X)$ ϑ-nak egy-egy torzítatlan becslése. Mely $a, b \in \mathbb{R}$ értékekre lesz az $aT_1(X) + bT_2(X)$ torzítatlan becslése ϑ-nak?

Megoldás

$E(aT_1(X) + bT_2(X)) = aE(T_1(X)) + bE(T_2(X)) = a\vartheta + b\vartheta = (a+b)\vartheta = \vartheta$, ha $a + b = 1$. Vagyis azon $a, b \in \mathbb{R}$ értékekre, melyre $a + b = 1$ lesz az $aT_1(X) + bT_2(X)$ torzítatlan becslése ϑ-nak.

8.5. Feladat. Legyen az alábbi gyakorisági tábla egy 20 elemű minta, a következő diszkrét eloszlásból:
$P(X_i = -1) = c, P(X_i = 1) = 3c, P(X_i = 2) = 1 - 4c\,\big(i = 1, \ldots 20$ és c az ismeretlen paraméter, $0 < c < \frac{1}{4}\big)$.

érték	-1	1	2
gyakoriság	4	10	6

Határozza meg c ML-becslését és c becslését a momentum módszerrel!

Megoldás

<u>c ML-becslése:</u>

$$L(c, \mathbf{x}) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_{20} = x_{20}) = c^4 (3c)^{10} (1 - 4c)^6$$

$$lnL(c, \mathbf{x}) = 4\ln(c) + 10\ln(3c) + 6\ln(1 - 4c)$$

$$(lnL(c, \mathbf{x}))'_c = \frac{4}{c} + \frac{10}{c} - \frac{6 \cdot 4}{1 - 4c}$$

Átrendezve a $(lnL(c,\mathbf{x}))'_c = 0$ egyenletet, kapjuk, hogy $\hat{c} = \frac{7}{40} = \frac{21}{120}$. Ez valóban maximum, mivel $(lnL(c,\mathbf{x}))''_c$-t kiértékelve a $\hat{c}$ helyen $(lnL(c;\mathbf{x}))''_c = -\frac{14}{c^2} - \frac{96}{(1-4c)^2} < 0$.

<u>c becslése momentum-módszerrel:</u>

$$M_1(c) = EX = -1 \cdot c + 1 \cdot 3c + 2 \cdot (1-4c) = 2 - 6c, \qquad m_1 = \frac{1}{20}(-1 \cdot 4 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 6) = 0,9$$

így az $M_1(c) = m_1$ egyenletet c-re megoldva kapjuk, hogy $\hat{c} = \frac{2-0,9}{6} = \frac{11}{60} = \frac{22}{120}$

8.6. Feladat. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független azonos eloszlású valószínűségi változók az alábbi eloszlásokból. Számolja ki az ismeretlen paraméter ML-becslését!
a) $Bin(m,p)$ binomiális eloszlás, ahol $m \in \mathbb{N}$ adott és p a paraméter
b) $Exp(\lambda)$ exponenciális eloszlás
c) $N(\mu, \sigma^2)$ normális eloszlás, ahol $\sigma \in \mathbb{N}$ adott és μ a paraméter

Megoldás
a)

$$L(m,p;\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^{n} \binom{m}{x_k} p^{x_k}(1-p)^{m-x_k} \qquad (x_k = 0,1,\ldots,m)$$

$$lnL(m,p;\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} \ln\binom{m}{x_k} + \ln p \sum_{k=1}^{n} x_k + \ln(1-p)\sum_{k=1}^{n}(m-x_k)$$

$$(lnL(m,p;\mathbf{x}))'_p = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n} x_k + \frac{-1}{1-p}\sum_{k=1}^{n}(m-x_k) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n} x_k + \frac{-1}{1-p}\left(nm - \sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \frac{1}{p}n\overline{x} + \frac{-1}{1-p}(nm - n\overline{x})$$

Átrendezve a $(lnL(m,p;\mathbf{x}))'_p = 0$ egyenletet, kapjuk, hogy $\hat{p} = \frac{\overline{X}}{m}$. Ez valóban maximum, mivel $(lnL(m,p))''_p$-t kiértékelve a $\hat{p}$ helyen $(lnL(m,p;\mathbf{x}))''_p = \frac{-n\overline{x}}{p^2} + \frac{-n(m-\overline{x})}{(1-p)^2} = -n\left(\frac{\overline{x}}{p^2} + \frac{m-\overline{x}}{(1-p)^2}\right) < 0$.
b)

$$L(\lambda;\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_k} \qquad (x_k > 0)$$

$$lnL(\lambda;\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} \ln \lambda e^{-\lambda x_k} = \sum_{k=1}^{n} \ln \lambda + \sum_{k=1}^{n} \ln e^{-\lambda x_k} = n \ln \lambda - \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k = n \ln \lambda - \lambda n \overline{x}$$

$$(lnL(\lambda;\mathbf{x}))'_\lambda = \frac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{n}{\lambda} - n\overline{x}$$

Átrendezve a $(lnL(\lambda;\mathbf{x}))'_\lambda = 0$ egyenletet, kapjuk, hogy $\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}}$. Ez valóban maximum, mivel $(lnL(\lambda))''_\lambda = -\frac{n}{\lambda^2} < 0$.
c)

$$L(\mu,\sigma^2;\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{k=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$lnL(\mu,\sigma^2;\mathbf{x}) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\left(lnL(\mu,\sigma^2;\mathbf{x})\right)'_\mu = -\frac{1}{2\sigma^2}(-2)\sum_{k=1}^{n}(x_i-\mu)$$

Átrendezve a $\left(lnL(\mu,\sigma^2;\mathbf{x})\right)'_\mu = 0$ egyenletet, kapjuk, hogy $\hat{\mu} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_i}{n} = \overline{X}$. Ez valóban maximum, mivel $\left(lnL(\mu,\sigma^2;\mathbf{x})\right)''_\mu = -\frac{n}{\sigma^2} < 0$.

8.7. Feladat. Határozza meg az ismeretlen paraméter ML-becslését, ha a minta $E[a,1]$ eloszlású!

Megoldás

A paraméter függvényében nem deriválható a likelihood függvény (ugrik):

$$L(a;\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-a} I(a \le x_i \le 1) = \frac{1}{(1-a)^n} I(a \le x_1, x_2, ..., x_n \le 1) =$$

$$= \frac{1}{(1-a)^n} I(a \le x_1^* \le ... \le x_n^* \le 1) = \frac{1}{(1-a)^n} I(a \le x_1^*) I(x_n^* \le 1)$$

Az $I(a \le x_1^*)I(x_n^* \le 1)$ rész 0 vagy 1 lehet, tehát úgy kell megválasztani a paramétereket, hogy 1 legyen: $a \le x_1^*$ és $x_n^* \le 1$ teljesüljön. Mivel a $(-\infty, x_1^*]$ intervallumon az $\dfrac{1}{(1-a)^n}$ függvény maximuma az $a = x_1^*$ pontban van, így $\hat{a} = X_1^*$.

8.8. Feladat. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független azonos $E[a,b]$ eloszlású valószínűségi változók. Számolja ki az ismeretlen paraméterek becslését a momentum módszerrel!

Megoldás

$M_1(a,b) = E(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad m_1 = \overline{x}$

$M_2(a,b) = E(X^2) = D^2(X) + E(X)^2 = \frac{(b-a)^2}{12} + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, \qquad m_2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$

Így $M_1(a,b) = m_1$ és $M_2(a,b) = m_2$-ből kapjuk, hogy

$\frac{a+b}{2} = m_1$

$\frac{(b-a)^2}{12} + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = m_2$

és ezt oldjuk meg a, b-re, először m_1 és m_2-vel kifejezve. Átrendezve a fenti adja, hogy $\frac{(b-a)^2}{12} = m_2 - m_1^2$, így

$b - a = \sqrt{12(m_2 - m_1^2)}$

$b + a = 2m_1.$

Ezeket összeadva kapjuk, hogy $b = m_1 + \sqrt{3(m_2 - m_1^2)}$ és $a = m_1 - \sqrt{3(m_2 - m_1^2)}$. Azaz a paraméterek becslése a momentum módszerrel:

$$\hat{a} = \overline{X} - \sqrt{3\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \overline{X}^2\right)} = \overline{X} - \sqrt{3}S_n \quad \text{és} \quad \hat{b} = \overline{X} + \sqrt{3\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \overline{X}^2\right)} = \overline{X} + \sqrt{3}S_n$$

9. gyakorlat megoldások

9.1. Feladat. Legyen X_1, X_2, X_3, X_4 független azonos $N(\mu, 2^2)$ eloszlású minta. A megfigyelt értékek a következők: 14,8; 12,2; 16,8; 11,1
a) Adjon 95%-os megbízhatóságú konfidenciaintervallumot μ-re!
b) Hány elemű mintára van szükség, ha azt szeretnénk, hogy a konfidenciaintervallum legfeljebb 1,6 hosszúságú legyen?
$(u_{0,975} = 1{,}96)$

Megoldás

a) Adatok: $n = 4$
$\overline{x} = \frac{14{,}8+12{,}2+16{,}8+11{,}1}{4} = 13,725$
$\sigma = 2$
$\alpha = 0{,}05$
Ekkor $u_{0,975} = 1{,}96$, így az $(1-\alpha)100\%$ megbízhatóságú konfidenciaintervallum μ-re:

$$\left(\overline{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(13{,}725 - u_{0,975}\frac{2}{\sqrt{4}}, 13{,}725 + u_{0,975}\frac{2}{\sqrt{4}}\right) = (11{,}765; 15{,}685)$$

R-kód:
```
minta=c(14.8, 12.2, 16.8, 11.1)
n=length(minta)
sigma=2
alpha=0.05
mean(minta)-qnorm(1-alpha/2)*sigma/sqrt(n)
mean(minta)+qnorm(1-alpha/2)*sigma/sqrt(n)
```

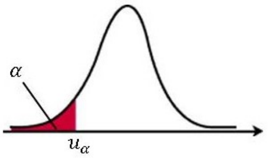
b) A konfidenciaintervallum hossza: $2u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2u_{0,975}\frac{2}{\sqrt{n}} < 1{,}6$, így $n > \left(\frac{4u_{0,975}}{1{,}6}\right)^2 = \left(\frac{4 \cdot 1,96}{1{,}6}\right)^2 \approx 24{,}01$
tehát legalább 25 elemű mintára van szükség.

R-kód (folytatás):
```
hossz=1.6
(2*qnorm(1-alpha/2)*sigma/hossz)^2
```

9.2. Feladat. Azt szeretnénk vizsgálni, hogy a napi középhőmérséklet október 18-án Budapesten 15°C alatt volt-e? Az elmúlt 4 év napi középhőmérsékletei a következők voltak: $14,8; 12,2; 16,8; 11,1\ ^\circ C$, valamint tegyük fel, hogy az adatok normális eloszlásból származnak.
a) Írjuk fel a null- és ellenhipotézist!
b) Tegyük fel, hogy a napi középhőmérséklet szórása $\sigma = 2$. Tesztelje a fenti hipotézist $\alpha = 0.05$ terjedelem mellett!
Adja meg a kritikus tartományt és p-értéket! Mi a döntés?
c) Tesztelje a hipotézist úgy is, hogy nem használja a szórásra vonatkozó előzetes információt!
d) Milyen hipotézist írjunk fel, ha azt szeretnénk vizsgálni, hogy a napi középhőmérséklet október 18-án Budapesten 15°C-tól különböző volt? Teszteljük a fenti adatok segítségével!
$(u_{0,05} = -1{,}645,\ \Phi(1{,}275) = 0{,}899,\ t_{3;0,05} = -2{,}353\ u_{0,975} = 1,96)$

Megoldás

a) Legyen m a napi középhőmérséklet október 18-án Budapesten. Ekkor
$H_0: m \geq 15$
$H_1: m < 15$
b) Adatok: $n = 4$
$\overline{x} = \frac{14{,}8+12{,}2+16{,}8+11{,}1}{4} = 13,725$
$\sigma = 2$
$\alpha = 0,05$
Milyen próbát használjunk? Egymintás, egyoldali u-próbát.
Próbastatisztika: $U = \frac{\overline{X} - 15}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \overset{H_0 \text{esetén}}{\sim} N(0,1)$, melynek értéke: $u = \frac{13,725 - 15}{\frac{2}{\sqrt{4}}} = -1,275$
U mely értékeire utasítjuk el H_0-t?
H_0 esetén $P(U < u_\alpha) = \Phi(u_\alpha) = \alpha$, azaz $\Phi(u_{0,05}) = 0,05$ tehát $u_{0,05} = -1,645$ így a kritikus tartomány $= \{\mathbf{x} \in \chi : U < u_\alpha\} = \{\mathbf{x} \in \chi : U < -1,645\}$.
Mivel most $u = -1,275 > -1,645$, nem utasítjuk el H_0-t. Azaz nincs elég bizonyítékunk, hogy a napi középhőmérséklet október 18-án Budapesten 15°C alatt lenne.



A hipotézist a p-érték α-val való összehasonlításával is tesztelhetjük:

p-érték $= \Phi(-1,275) = 1 - \Phi(1,275) = 1 - 0,899 = 0,101 > \alpha = 0,05$, így nem vetjük el H_0-t.

c) Adatok: $n = 4$

$\overline{x} = \frac{14,8+12,2+16,8+11,1}{4} = 13,725$

$s_n^* = \sqrt{\frac{(14,8-13,725)^2+(12,2-13,725)^2+(16,8-13,725)^2+(11,1-13,725)^2}{3}} = \sqrt{6,6092} = 2,57$

$\alpha = 0,05$

Milyen próbát használjunk? Egymintás, egyoldali t-próbát.

Próbastatisztika: $T = \dfrac{\overline{X} - 15}{\frac{s_n^*}{\sqrt{n}}} \overset{H_0 \text{esetén}}{\sim} t_{n-1}$, melynek értéke: $t = \dfrac{13,725 - 15}{\frac{2,57}{\sqrt{4}}} = -0,99$

T mely értékeire utasítjuk el H_0-t?

H_0 esetén $P(T < t_{n-1;\alpha}) = \alpha$, azaz $P(T < t_{3;0,05}) = 0,05$ tehát $t_{3;0,05} = -2,353$ így a kritikus tartomány $= \{\mathbf{x} \in \chi : T < t_{n-1;\alpha}\} = \{\mathbf{x} \in \chi : T < -2,353\}$.

Mivel most $t = -0,99 > -2,353$, nem utasítjuk el H_0-t. Azaz nincs elég bizonyítékunk, hogy a napi középhőmérséklet október 18-án Budapesten 15°C alatt lenne.

A hipotézist a p-érték α-val való összehasonlításával is tesztelhetjük:

p-érték $= P(t_3 < -0,99) = 0.198 > \alpha = 0,05$, így nem vetjük el H_0-t.

d) Legyen m a napi középhőmérséklet október 18-án Budapesten. Ekkor

$H_0 : m = 15$
$H_1 : m \neq 15$

Adatok: $n = 4$

$\overline{x} = \frac{14,8+12,2+16,8+11,1}{4} = 13,725$

$\sigma = 2$

$\alpha = 0,05$

Milyen próbát használjunk? Egymintás, kétoldali u-próbát.

Próbastatisztika: $U = \dfrac{\overline{X} - 15}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \overset{H_0 \text{esetén}}{\sim} N(0,1)$, melynek értéke: $u = \dfrac{13,725 - 15}{\frac{2}{\sqrt{4}}} = -1,275$

U mely értékeire utasítjuk el H_0-t?

H_0 esetén $P(|U| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \Phi(u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \alpha$, azaz $\Phi(u_{0,975}) = 0,05$ tehát $u_{0,975} = 1,96$ így a kritikus tartomány $= \{\mathbf{x} \in \chi : |U| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}\} = \{\mathbf{x} \in \chi : |U| > 1,96\}$.

Mivel most $|u| = 1,275 < 1,96$, nem utasítjuk el H_0-t. Azaz nincs elég bizonyítékunk, hogy a napi középhőmérséklet október 18-án Budapesten 15°C-tól különböző lenne.

A hipotézist a p-érték α-val való összehasonlításával is tesztelhetjük:

p-érték $= 2 \cdot (1 - \Phi(1,275)) = 0.202 > \alpha = 0,05$, így nem utasítjuk el H_0-t.

A hipotézist a várható értékre vonatkozó 95%-os konfidenciaintervallum segítségével is tesztelhetjük:

A konfidenciaintervallum $(11,765; 15,685)$ (Feladat 1.) tartalmazza a 15-öt, így nem utasítjuk el H_0-t.

9.3. Feladat. Az alábbi két minta két különböző gyáregységben tapasztalt selejtarányra vonatkozik (ezrelékben). Állítható-e, hogy az „A” gyáregység jobban dolgozott? (Feltételezhetjük, hogy a minták normális eloszlásúak, függetlenek.)

A	11,9	12,1	12,8	12,2	12,5	11,9	12,5	11,8	12,4	12,9
B	12,1	12,0	12,9	12,2	12,7	12,6	12,6	12,8	12,0	13,1

$(F_{9,9;0,975} = 4{,}026,\ t_{18;0,05} = -1{,}734)$

Megoldás

Jelölje m_A az „A” és m_B az „B” gyáregység selejtarányát. Ekkor

$H_0 : m_A \geq m_B$
$H_1 : m_A < m_B$

Adatok: $n_A = 10, n_B = 10$

$\overline{x}_A = \frac{11,9+\cdots+12,9}{10} = 12,3$

$\overline{x}_B = \frac{12,1+\cdots+13,1}{10} = 12,5$

$s_A^{*2} = \frac{(11,9-12,3)^2+\cdots+(12,9-12,3)^2}{9} = \frac{132}{900} = 0,147$

$s_B^{*2} = \frac{(11,9-12,5)^2+\cdots+(12,9-12,5)^2}{9} = \frac{142}{900} = 0,158$

$\alpha = 0,05$

Van különbség a szórások közt? Előzetes F-próbával tesztelünk.

$H_0\colon \sigma_A^2 = \sigma_B^2$
$H_1\colon \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$

$F = \frac{s_B^{*2}}{s_A^{*2}} = \frac{142}{132} = 1,076 <$ kritikus érték $= F_{9,9;0,975} = 4,026$, tehát nem utasítjuk el H_0-t, így nincs rá okunk, hogy a két szórást különbözőnek tekintsük.

Milyen próbát használjunk? Kétmintás, egyoldali t-próbát.

$$T = \sqrt{\frac{n_A n_B}{n_A+n_B}}\frac{\overline{x}_A-\overline{x}_B}{\sqrt{\frac{(n_A-1)s_A^{*2}+(n_B-1)s_B^{*2}}{n_A+n_B-2}}} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} t_{n+m-2}, \text{ melynek értéke: } t = \sqrt{\frac{10\cdot 10}{10+10}}\frac{12,3-12,5}{\sqrt{\frac{9\cdot 0,147+9\cdot 0,158}{10+10-2}}} = -1,13$$

T mely értékeire utasítjuk el H_0-t?

H_0 esetén $P(T < t_{n_A+n_B-2;\alpha}) = \alpha$, azaz $P(T < t_{18;0,05}) = 0,05$ tehát $t_{18;0,05} = -1,734$ így a kritikus tartomány $= \{\mathbf{x} \in \chi : T < t_{n_A+n_B-2;\alpha}\} = \{\mathbf{x} \in \chi : T < -1,734\}$.

Mivel most $t = -1,13 > -1,734$, nem utasítjuk el H_0-t, azaz nincs elég bizonyítékunk arra, hogy az „A” gyáregység jobban dolgozott.

9.4. Feladat. Két szervert hasonlítottunk össze. Az elsőn 30 futás átlagos ideje 6,7 mp volt, míg ettől függetlenül a másodikon 20 futásé 7,2 mp. Vizsgáljuk meg, hogy van-e szignifikáns különbség a két szerver sebessége közt, ha a futási idők megfigyelt szórása mindkét gépen 0,5 volt?
($u_{0,975}$ = 1,96)

Megoldás

Jelölje m_1 és m_2 az első illetve a második szerveren való futás idejét. Ekkor

$H_0\colon m_1 = m_2$
$H_1\colon m_1 \neq m_2$

Adatok: $n_1 = 30, n_2 = 20$

$\overline{x}_1 = 6.7$

$\overline{x}_2 = 7.2$

$\sigma_1 = \sigma_2 = 0.5$

Milyen próbát használjunk? Kétmintás, kétoldali u-próbát (szórások ismertek).

$$U = \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \overset{H_0 \text{esetén}}{\sim} N(0,1), \text{ melynek értéke: } u = \frac{6.7-7.2}{\sqrt{\frac{0.5^2}{30}+\frac{0.5^2}{20}}} = -3.464$$

U mely értékeire utasítjuk el H_0-t?

H_0 esetén $P(|U| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \Phi(u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, azaz $\Phi(u_{0,975}) = 0,975$ tehát $u_{0,975} = 1,96$ így a kritikus tartomány $= \{\mathbf{x} \in \chi : |U| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}\} = \{\mathbf{x} \in \chi : |U| > 1,96\}$.

Mivel most $|u| = 3,464 > 1,96$, elutasítjuk H_0-t, azaz a két szerver futási ideje közt szignifikáns különbség van.

9.5. Feladat. Az alábbi két minta 10 forgalmas csomópont levegőjében található szennyezőanyag koncentrációra vonatkozó két adatsort tartalmaz. Az első sorban a november 15-i, a másodikban a november 29-i számok szerepelnek. Szignifikánsan változott-e a légszennyezettség?

november 15.	20,9	17,1	15,8	18,8	20,1	15,6	14,8	24,1	18,9	12,5
november 29.	21,4	16,7	16,4	19,2	19,9	16,6	15,0	24,0	19,2	13,2

($t_{9;0,975}$ = 2,262)

Megoldás

Jelölje m_1 és m_2 a november 15-i illetve a november 29-i légszennyeződés várható értékét. Ekkor

$H_0\colon m_1 = m_2$
$H_1\colon m_1 \neq m_2$

Mivel ugyanazokon a helyeken mérték a légszennyezettséget, a minták páronként összetartozóak (egymástól nem független megfigyeléseink vannak). A légszennyeződés változására vonatkozó információ a két mérési eredmény különbségében rejlik.

november 29. - november 15.	0,5	-0,4	0,6	0,4	-0,2	1,0	0,2	-0,1	0,3	0,7

Jelöljük m-mel a november 29-én és a november 15-én mért légszennyeződés várható értékének különbségét, azaz $m = m_2 - m_1$. Ekkor a fenti hipotézis a következőképpen fogalmazható meg:

$H_0 : m = 0$
$H_1 : m \neq 0$

Adatok: $n = 10$
$\overline{x} = \frac{0,5+\cdot+0,7}{10} = 0,3$
$s_n^* = \sqrt{\frac{(0,5-0,3)^2+\cdot+(0,07-0,3)^2}{10-1}} = 0,435$
$\alpha = 0,05$

Milyen próbát használjunk? Egymintás, kétoldali t-próbát.

$$T = \frac{\overline{X} - 0}{\frac{s_n^*}{\sqrt{n}}} \overset{H_0 \text{esetén}}{\sim} t_{n-1}, \text{ melynek értéke: } t = \frac{0,3-0}{\frac{0,435}{\sqrt{10}}} = 2,18$$

T mely értékeire utasítjuk el H_0-t?

H_0 esetén $P(|T| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, azaz $P(T < 1 - t_{9;0,975}) = 0,975$ tehát $t_{9;0,975} = 2,262$ így a kritikus tartomány $= \{\mathbf{x} \in \chi : |T| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\} = \{\mathbf{x} \in \chi : |T| > 2,262\}$.

Mivel most $t = 2,18 < 2,262$, nem utasítjuk el H_0-t, azaz nincs elég bizonyítékunk, hogy különbség lenne a november 15-i és 29-i légszennyeződés mértéke közt.

Viszont vegyük észre, hogy a próbastatisztika értéke közel van a kritikus értékhez. Ezt a p-érték α-hoz közeli értékéből is látjuk: p-érték $= P(|t_9| > 2,18) = 0,057$. Ez utóbbi azt mutatja, hogy az $\alpha = 0,05$ szignifikancia-szinten nem utasítjuk el a nullhipotézist, viszont egy $0,057$-nél magasabb szinten már igen.

10. gyakorlat megoldások

10.1. Feladat. Egy gyárban egy termék minőségét 4 elemű mintákat véve ellenőrzik, havonta 300 mintavétellel. Megszámolták, hogy a legutóbbi hónapban hányszor volt selejtes a minta, melynek eredményiet az alábbi táblázat tartalmazza:

Selejtesek száma	0	1	2	3	4
Darabszám	80	113	77	27	3

Modellezhető a mintákban levő selejtesek száma
a) $(4; 0,25)$, ill.
b) $(4; p)$ paraméterű binomiális eloszlással $(\alpha = 0,05)$? $\left(\chi^2_{3;0,95} = 7,81,\ \chi^2_{2;0,95} = 5,99\right)$

Megoldás

a) Tiszta illeszkedésvizsgálat

$H_0: X_i \sim Bin(4;\ 0,25)$.
$H_1: X_i$ nem ilyen eloszlású

Vegyük észre, hogy az utolsó oszopra vonatkozóan $np_5 = 300 \cdot \binom{4}{4} \cdot 0,25^4 \cdot 0,75^0 = 1,2 < 5$, így az utolsó két oszlopban levő eseményeket vonjuk össze. A módosított táblázat a következő:

Selejtesek száma	0	1	2	3 vagy 4
Darabszám	80	113	77	30

$r = 4, n = 300$

Határozzuk meg az egyes selejtes termékekre vonatkozó valószínűségeket, illetve ezek alapján gyakoriságokat:

$p_1 = P(X_j = 0) = \binom{4}{0} \cdot 0,25^0 \cdot 0,75^4 = 0,3164 \Rightarrow n \cdot p_1 = 300 \cdot 0,3164 = 94,9$
$p_2 = P(X_j = 1) = \binom{4}{1} \cdot 0,25^1 \cdot 0,75^3 = 0,4219 \Rightarrow n \cdot p_2 = 300 \cdot 0,4219 = 126,6$
$p_3 = P(X_j = 2) = \binom{4}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^2 = 0,2109 \Rightarrow n \cdot p_3 = 300 \cdot 0,2109 = 63,3$
$p_4 = P(X_j \geq 3) = 1 - p_1 - p_2 - p_3 = 0,0508 \Rightarrow n \cdot p_4 = 300 - 94,9 - 126,6 - 63,3 = 15,2$

Selejtesek száma	0	1	2	3 vagy 4
Darabszám v. gyakoriságok (ν_j)	80	113	77	30
Valószínűségek (p_j)	0,3164	0,4219	0,2109	0,0508
Elméleti gyakoriságok (np_j)	94,9	126,6	63,3	15,2

Próbastatisztika: $T_n = \sum_{j=1}^{r} \frac{(\nu_j - np_j)^2}{np_j} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} \chi^2_{r-1}$, melynek értéke

$\frac{(80-94,9)^2}{94,9} + \frac{(113-126,6)^2}{126,6} + \frac{(77-63,3)^2}{63,3} + \frac{(30-15,2)^2}{15,2} = 2,339 + 1,461 + 2,965 + 14,411 = 21,176$

A próbastatisztika mely értékeire utasítjuk el H_0-t?

Mivel a szabadsági fok $r - 1 = 3$, így $\chi^2_{3;0,95} = 7,81$, azaz a kritikus tartomány $= \{\mathbf{x} : T_n(\mathbf{x}) > \chi^2_{r-1,1-\alpha}\} = \{\mathbf{x} : T_n(\mathbf{x}) > 7,81\}$. Mivel most $T_n = 21,176 > 7,81$, így elutasítjuk H_0-t, azaz mondhatjuk, hogy a selejtes termékek száma nem $Bin(4;\ 0,25)$ eloszlást követ.

A hipotézist a p-érték α-val való összehasonlításával is tesztelhetjük:

p-érték $= P(\chi^2_3 > 21,176) = 0,0001 < 0,05$, így elutasítjuk H_0-t.

b) Becsléses illeszkedésvizsgálat

$H_0: X_i \sim Bin(4; p)$ valamilyen p-re
$H_1: X_i$ nem ilyen eloszlású

Először meg kell becsülni az ismeretlen p paramétert ML-módszerrel. (Egy paramétert becslünk, így $s = 1$.) A 8. gyakorlat 6 a) feladata alapján tudjuk, hogy $Bin(m, p)$ eloszlású minta esetén (m ismert) a p ML-becslése $\hat{p} = \frac{\overline{X}}{m}$. Mivel $\overline{x} = \frac{0 \cdot 80 + 1 \cdot 113 + 2 \cdot 77 + 3 \cdot 27 + 4 \cdot 3}{300} = \frac{360}{300} = 1,2$, így $\hat{p} = \frac{1,2}{4} = 0,3$. Vegyük észre, hogy az utolsó oszopra vonatkozóan $np_5 = 300 \cdot \binom{4}{4} \cdot 0,3^4 \cdot 0,7^0 = 2,43 < 5$, így az utolsó két oszlopban levő eseményeket vonjuk össze. A módosított táblázat a következő:

Selejtesek száma	0	1	2	3 vagy 4
Darabszám	80	113	77	30

$r = 4, n = 300$

Határozzuk meg az egyes selejtes termékekre vonatkozó valószínűségeket, illetve ezek alapján gyakoriságokat:

$\hat{p_1} = \hat{P}(X_j = 0) = \binom{4}{0} \cdot 0,3^0 \cdot 0,7^4 = 0,2401 \Rightarrow n \cdot \hat{p_1} = 300 \cdot 0,2401 = 72$
$\hat{p_2} = \hat{P}(X_j = 1) = \binom{4}{1} \cdot 0,3^1 \cdot 0,7^3 = 0,4116 \Rightarrow n \cdot \hat{p_2} = 300 \cdot 0,4116 = 123,5$
$\hat{p_3} = \hat{P}(X_j = 2) = \binom{4}{2} \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^2 = 0,2646 \Rightarrow n \cdot \hat{p_3} = 300 \cdot 0,2646 = 79,4$
$\hat{p_4} = \hat{P}(X_j \geq 3) = 1 - \hat{p_1} - \hat{p_2} - \hat{p_3} = 0,0837 \Rightarrow n \cdot \hat{p_4} = 300 - 72 - 123,5 - 79,4 = 25,1$

Selejtesek száma	0	1	2	3 vagy 4
Darabszám v. gyakoriságok (ν_j)	80	113	77	30
Valószínűségek (p_j)	0,2401	0,4116	0,2646	0,0837
Elméleti gyakoriságok (np_j)	72	123,5	79,4	25,1

Próbastatisztika: $T_n = \sum_{j=1}^{r} \frac{(\nu_j - np_j)^2}{np_j} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} \chi^2_{r-s-1}$, melynek értéke

$\frac{(80-72)^2}{72} + \frac{(113-123{,}5)^2}{123{,}5} + \frac{(77-79{,}4)^2}{79{,}4} + \frac{(30-25{,}1)^2}{25{,}1} = 0,889 + 0,893 + 0,073 + 0,957 = 2,812$

A próbastatisztika mely értékeire utasítjuk el H_0-t?

Mivel 1 paramétert becsültünk ($s = 1$), a szabadsági fok $r - s - 1 = 2$, így $\chi^2_{2;0,95} = 5,99$, azaz a kritikus tartomány $=$ $\{\mathbf{x} : T_n(\mathbf{x}) > \chi^2_{r-s-1,1-\alpha}\} = \{\mathbf{x} : T_n(\mathbf{x}) > 5,99\}$. Mivel most $T_n = 2,812 < 5,99$, így nem utasítjuk el H_0-t, tehát tekinthetjük a selejtes termékek számát $Bin(4, p)$ eloszlásúnak.

10.2. Feladat. Az alábbi kontingencia-táblázat mutatja, hogy egy 100 éves időszakban egy adott napon a csapadék mennyisége és az átlaghőmérséklet hogyan alakult:

Hőmérséklet | Csapadék	kevés	átlagos	sok
hűvös	15	10	5
átlagos	10	10	20
meleg	5	20	5

A cellákban az egyes esetek gyakoriságai találhatóak. $\alpha = 0,05$ mellett tekinthető-e a csapadékmennyiség és a hőmérséklet függetlennek? ($\chi^2_{4;0,95} = 9,49$)

Megoldás

Függetlenségvizsgálat

H_0: a csapadék és a hőmérséklet függetlenek

H_1: nem függetlenek

Egészítsük ki a táblázatot egy "összesen" sorral és oszloppal:

Hőmérséklet | Csapadék	kevés	átlagos	sok	Összesen
hűvös	15	10	5	$\nu_{1\bullet} = 30$
átlagos	10	10	20	$\nu_{2\bullet} = 40$
meleg	5	20	5	$\nu_{3\bullet} = 30$
Összesen	$\nu_{\bullet 1} = 30$	$\nu_{\bullet 2} = 40$	$\nu_{\bullet 3} = 30$	$n = 100$

A várt gyakoriságok $\hat{\nu}_{ij} = n \cdot \frac{\nu_{i\bullet}}{n} \cdot \frac{\nu_{\bullet j}}{n} = \frac{\nu_{i\bullet} \cdot \nu_{\bullet j}}{n}$ táblázatban:

Hőmérséklet | Csapadék	kevés	átlagos	sok	Összesen
hűvös	$\frac{30 \cdot 30}{100} = 9$	$\frac{40 \cdot 30}{100} = 12$	$\frac{30 \cdot 30}{100} = 9$	$\nu_{1\bullet} = 30$
átlagos	$\frac{30 \cdot 40}{100} = 12$	$\frac{40 \cdot 40}{100} = 16$	$\frac{30 \cdot 40}{100} = 12$	$\nu_{2\bullet} = 40$
meleg	$\frac{30 \cdot 30}{100} = 9$	$\frac{30 \cdot 40}{100} = 12$	$\frac{30 \cdot 30}{100} = 9$	$\nu_{3\bullet} = 30$
Összesen	$\nu_{\bullet 1} = 30$	$\nu_{\bullet 2} = 40$	$\nu_{\bullet 3} = 30$	$n = 100$

Próbastatisztika: $T_n = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{\left(\nu_{ij} - \frac{\nu_{i\bullet}\nu_{\bullet j}}{n}\right)^2}{\frac{\nu_{i\bullet}\nu_{\bullet j}}{n}} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} \chi^2_{(r-1)(s-1)}$ (r az oszlopok, s a sorok száma), melynek értéke

$\frac{(15-9)^2}{9} + \frac{(10-12)^2}{12} + \frac{(5-9)^2}{9} + \frac{(10-12)^2}{12} + \frac{(10-16)^2}{16} + \frac{(20-12)^2}{12} + \frac{(5-9)^2}{9} + \frac{(20-12)^2}{12} + \frac{(5-9)^2}{9} =$
$= 4 + 0,333 + 1,778 + 0,333 + 2,25 + 5,333 + 1,778 + 5,333 + 1,778 = 22,916$

A próbastatisztika mely értékeire utasítjuk el H_0-t?

Mivel a szabadsági fok $(r-1)(s-1) = 2 \cdot 2 = 4$, így $\chi^2_{4;0,95} = 9,49$, azaz a kritikus tartomány $=$ $\{\mathbf{x} : T_n(\mathbf{x}) > \chi^2_{(r-1)(s-1),1-\alpha}\} = \{\mathbf{x} : T_n(\mathbf{x}) > 9,49\}$. Mivel most $T_n = 22,916 > 9,49$, így elutasítjuk H_0-t, tehát állíthatjuk, hogy a csapadék és a hőmérséklet nem függetlenek.

A hipotézist a p-érték α-val való összehasonlításával is tesztelhetjük:

p-érték $= P(\chi^2_4 > 22,916) = 0,0001 < 0,05$, így elutasítjuk H_0-t.

10.3. Feladat. Két dobókockával dobva az alábbi gyakoriságokat figyeltük meg:

Dobások	1	2	3	4	5	6
1. kocka	27	24	26	23	18	32
2. kocka	18	12	15	21	14	20

$\alpha = 0,05$ mellett döntsünk arról, hogy tekinthető-e a két eloszlás azonosnak! $\left(\chi^2_{5;0,95} = 11,1\right)$

Megoldás

Homogenitásvizsgálat

H_0 a két eloszlás megegyezik
H_1 a két eloszlás nem egyezik meg

Egészítsük ki a táblázatot egy „összesen” oszloppal:

Dobások	1	2	3	4	5	6	Összesen
1. kocka (ν_i)	27	24	26	23	18	32	$n = 150$
2. kocka (μ_i)	18	12	15	21	14	20	$m = 100$

$r = 6$

Próbastatisztika: $T_{n,m} = nm \sum_{i=1}^{r} \frac{\left(\frac{\nu_i}{n} - \frac{\mu_i}{m}\right)^2}{\nu_i + \mu_i} \overset{H_0 \text{ esetén}}{\sim} \chi^2_{r-1}$ melynek értéke

$$T_{150,100} = 150 \cdot 100 \left(\frac{\left(\frac{27}{150} - \frac{18}{100}\right)^2}{27+18} + \frac{\left(\frac{24}{150} - \frac{12}{100}\right)^2}{24+12} + \frac{\left(\frac{26}{150} - \frac{15}{100}\right)^2}{26+15} + \frac{\left(\frac{23}{150} - \frac{21}{100}\right)^2}{23+21} + \frac{\left(\frac{18}{150} - \frac{14}{100}\right)^2}{18+14} + \frac{\left(\frac{32}{150} - \frac{20}{100}\right)^2}{32+20} \right) =$$
$$= 0 + 0,67 + 0,20 + 1,09 + 0,19 + 0,05 = 2,2$$

A próbastatisztika mely értékeire utasítjuk el H_0-t?

Mivel a szabadsági fok $r - 1 = 5$, így $\chi^2_{5;0,95} = 11,1$, azaz a kritikus tartomány $= \{\mathbf{x} : T_{n,m}(\mathbf{x}) > \chi^2_{r-1,1-\alpha}\} =$ $= \{\mathbf{x} : T_{n,m}(\mathbf{x}) > 11,1\}$. Mivel most $T_{150,100} = 2,2 < 11,1$, így nem utasítjuk el H_0-t, ami nem mutat elentmondást a két eloszlás azonosságával.

10.4. Feladat. Adottak a következő $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ párok:

$\mathbf{x}$	0	1	6	5	3
$\mathbf{y}$	4	3	0	1	2

a) Határozzuk meg és ábrázoljuk is az $ax + b$ alakú regressziós egyenest!
b) Mi az $x = 2$-höz tartozó előrejelzett y érték?
c) Számoljuk ki a reziduálisokat és becsüljük meg a hiba szórásnégyzetét, valamint a becsléseink szórásnégyzetét!

Megoldás

$\overline{x} = \frac{0+1+6+5+3}{5} = 3; \qquad \overline{y} = \frac{4+3+0+1+2}{5} = 2; \qquad \sum (x_i - \overline{x})^2 = (-3)^2 + (-2)^2 + 3^2 + 2^2 + 0^2 = 26$

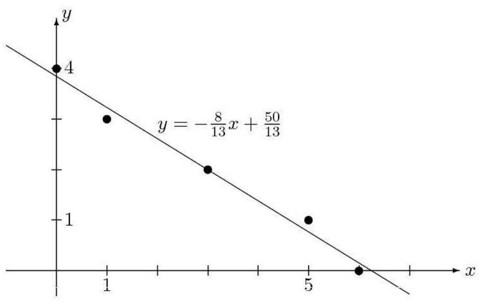
A paraméterek becslésének meghatározásához célszerű egy táblázatot készíteni:

	x_i	y_i	$x_i - \overline{x}$	$y_i - \overline{y}$	$\hat{y}_i = \hat{a}x_i + \hat{b}$	$\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i$
	0	4	-3	2	$\frac{50}{13} \approx 3,85$	$\frac{2}{13} \approx 0,15$
	1	3	-2	1	$\frac{42}{13} \approx 3,23$	$-\frac{3}{13} \approx -0,23$
	6	0	3	-2	$\frac{2}{13} \approx 0,15$	$-\frac{2}{13} \approx -0,15$
	5	1	2	-1	$\frac{10}{13} \approx 0,77$	$\frac{3}{13} \approx 0,23$
	3	2	0	0	$\frac{26}{13} \approx 2$	0
Összesen	15	10	0	0	-	0

a) A táblázat első négy oszlopából megkaphatjuk a képletek alapján a keresett együtthatókat:

$$\hat{a} = \frac{\sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum(x_i - \overline{x})^2} = \frac{-6 - 2 - 6 - 2}{9 + 4 + 9 + 4} = -\frac{8}{13}; \qquad \hat{b} = \overline{y} - \hat{a}\overline{x} = 2 - \left(-\frac{8}{13}\right) \cdot 3 = \frac{50}{13}$$

Tehát a regressziós egyenes: $-\frac{8}{13}x + \frac{50}{13} = -0,615x + 3,846$



b) $x = 2$-höz tartozó előrejelzett y érték $\hat{y} = -\frac{8}{13}2 + \frac{50}{13} = -0,615 \cdot 2 + 3,846 = 2,616$

c) A reziduálisok meghatározásához az előbbi táblázat utolsó előtti oszlopa használható, a reziduálisokat a táblázat utolsó oszlopa tartalmazza (mindkettő a képlet alapján könnyen számolható).

Reziduális szórásnégyzet (ill. hiba) becslése:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum(y_i - \hat{y_i})^2}{n-2} = \frac{\left(\frac{2}{13}\right)^2 + \left(-\frac{3}{13}\right)^2 + \left(-\frac{2}{13}\right)^2 + \left(\frac{3}{13}\right)^2}{3} = \frac{\frac{2}{13}}{3} = \frac{2}{39} \approx 0,051$$

Az együtthatók becsléseinek szórásnégyzetét a következő képletekkel becsülhetjük:

$$\hat{D}^2(\hat{a}) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum(x_i - \overline{x})^2} = \frac{\frac{2}{39}}{26} \approx 0,00197$$

$$\hat{D}^2(\hat{b}) = \hat{\sigma}^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{\sum(x_i - \overline{x})^2}\right) = \frac{2}{39} \left(\frac{1}{5} + \frac{3^2}{26}\right) \approx 0,028$$