1.	Differenciálszámítás I. / Házi feladat	

1. Definíció alapján lássuk be, hogy $f \in D\{a\}$. $f'(a) = ?$

a, $f(x) := \frac{1}{x^2}$ $(x<0)$ $a = -1$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(h-1)^2} - 1}{h} = \frac{\frac{1}{h^2-2h+1} - \frac{h^2-2h+1}{h^2-2h+1}}{h} = \frac{\frac{-h(h-2)}{h^2-2h+1}}{h}$$

$$= \frac{-(h-2)}{h^2-2h+1} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{2}{1} = 2 = f'(a)$$

b, $f(x) := \begin{cases} x^3+x, & \text{ha } x \le 0 \\ e^x - 1, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$ $a := 0$

$$\frac{x^3+x}{x} = \frac{x(x^2+1)}{x} = x^2+1 \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

$$\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

Mivel a kétoldali deriváltak léteznek és végesek $f \in D\{0\}$
és $f'(0) = 1$

2. Adja meg a következő függvények deriváltját!

a, $f(x) = x^2 e^{\cos x}$ $(x \in \mathbb{R})$

$$f'(x) = 2x e^{\cos x} + x^2 e^{\cos x} \cdot (-\sin x)$$

$$= 2x e^{\cos x} - x^2 e^{\cos x} \sin x$$

b, $f(x) = \log_2\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\ln 2} \cdot \frac{x-1-(x+2)}{(x-1)^2} = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x+2}{x-1}\right)} \cdot \frac{-3}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{-3}{x^2+x-2} = \frac{-3}{\ln 2\,(x^2+x-2)}$$

c, $f(x) = \sin\sqrt{2^x + x^2}$

$f'(x) = \cos x\left(\sqrt{2^x + x^2}\right) \cdot \left(\sqrt{2^x + x^2}\right)'$

$\cos\left(\sqrt{2^x + x^2}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{2^x + x^2}} \cdot 2^x \ln 2 + 2x$

d, $f(x) = \frac{\cos(\ln 2x)}{x^2 \ln x}$

$= \frac{-\sin(\ln 2x) \cdot \frac{1}{\cancel{2x}} \cdot \cancel{2} \cdot x^2 \ln x - \cos(\ln 2x)(2x \ln x + x^2 \frac{1}{x})}{x^4 \ln^2 x}$

$= \frac{x(-\sin(\ln 2x) \ln x - \cos(\ln 2x)(2 \ln x + 1))}{x^4 \ln^2 x}$

$= \frac{-\sin(\ln 2x) \ln x - \cos \ln 2x \cdot 2 \ln x - \cos(\ln(x))}{x^3 \ln^2 x}$

3. Adja meg a következő függvények deriváltját!

a, $f(x) = x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x} = \exp(x \ln x)$

$f'(x) = \exp(x \ln x) \cdot \cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}} + \ln x = e^{x \ln x} + \ln x \cdot e^{x \ln x}$

b, $f(x) = (x^3 + x)^{\ln x} = (e^{\ln(x^3+x)})^{\ln x} = e^{\ln(x^3+x) \cdot \ln x}$

$f' = \exp(\ln(x^3+x) \cdot \ln x)$

$f'(x) = e^{\ln(x^3+x) \cdot \ln x} \cdot (\ln(x^3+x) \cdot \ln x)'$

$= e^{\ln(x^3+x) \cdot \ln x} \cdot \left(\frac{1}{x^3+x} \cdot (3x^2+1) \cdot \ln x + \ln(x^3+x) \cdot \frac{1}{x}\right)$