Analízis II (F), 2. zárthelyi dolgozat, 2022.11.24.

Megoldások

(Vázlatosan)

1. (10 pont) Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat!

$$\text{a)} \int \frac{(x-1)^2}{x^2+4}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}) \qquad\qquad \text{b)} \int \frac{\sin(2x)}{\cos^4 x}\,dx \quad \left(x\in\left(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right)\right)$$

Megoldás.

- a) Az integrandus átalakítása:
$$\int \frac{(x-1)^2}{x^2+4}\,dx = \int \frac{x^2-2x+1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{(x^2+4)-2x-3}{x^2+4}\,dx = \int \left(1-\frac{2x}{x^2+4}-\frac{3}{x^2+4}\right)dx =$$
$$= \int \left(1-\frac{2x}{x^2+4}\right)dx - \int \frac{3}{x^2+4}\,dx.$$
- a) Az 1. integrál kiszámítása:
$$\int \left(1-\frac{2x}{x^2+4}\right)dx = x - \ln(x^2+4)+c.$$
- a) A 2. integrál kiszámítása:
$$\int \frac{3}{x^2+4}\,dx = \frac{3}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx = \frac{3}{4}\cdot\frac{\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{2}}+c = \frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{2}\right)+c.$$
- a) A végeredmény:
$$\int \frac{(x-1)^2}{x^2+4}\,dx = x-\ln(x^2+4)-\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{2}\right)+c.$$
- b) Az integrandus átalakítása:
$$\int \frac{\sin(2x)}{\cos^4 x}\,dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{\cos^4 x}\,dx = 2\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx = 2\int \operatorname{tg} x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$
- b) Az integrál $\int f\cdot f'$ típus:
$$\int \frac{\sin(2x)}{\cos^4 x}\,dx = 2\int \operatorname{tg} x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = 2\cdot\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+c = \operatorname{tg}^2 x+c.$$

2. (8 pont) Számítsuk ki az alábbi függvény grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával keletkező test térfogatát!

$$f(x) := x\cdot\sqrt{1+x\cdot\ln x} \qquad \big(x\in[1,e]\big).$$

Megoldás.

- A tanult formula alapján:
$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx = \pi\int_1^e (x\sqrt{1+x\ln x})^2\,dx = \pi\int_1^e x^2(1+x\ln x)\,dx =$$
$$= \pi\int_1^e (x^2+x^3\ln x)\,dx = \pi\left(\int_1^e x^2\,dx + \int_1^e x^3\ln x\,dx\right)$$

- Az 1. integrál kiszámítása:

  $$\int_1^e x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}.$$

- A 2. integrál (határozatlan) kiszámítása parciális integrálással:

  $$\int x^3 \ln x\,dx = \int \left(\frac{x^4}{4}\right)' \ln x\,dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^3}{4}\,dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + c.$$

- A 2. integrál (határozott) kiszámítása:

  $$\int_1^e x^3 \ln x\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16}\right]_1^e = \left(\frac{e^4}{4}\ln e - \frac{e^4}{16}\right) - \left(\frac{1^4}{4}\ln 1 - \frac{1^4}{16}\right) = \frac{3e^4}{16} + \frac{1}{16}.$$

- A keresett forgástest térfogata:

  $$V = \pi\left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} + \frac{3e^4}{16} + \frac{1}{16}\right) = \pi\left(\frac{3e^4}{16} + \frac{e^3}{3} - \frac{13}{48}\right).$$

3. (8 pont) Tekintsük az alábbi függvényeket!

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2+xy+2y^2}{\sqrt{x^2+2y^2}} & \big((x,y)\neq(0,0)\big) \\ 0 & \big((x,y)=(0,0)\big) \end{cases} \quad \text{és} \quad g(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2+xy+2y^2}{x^2+2y^2} & \big((x,y)\neq(0,0)\big) \\ 0 & \big((x,y)=(0,0)\big). \end{cases}$$

a) Igazolja a definíció szerint, hogy f folytonos a $(0,0)$ pontban!

b) Létezik-e g-nek határértéke $(0,0)$-ban?

Megoldás.

- a) A folytonosság definíciója alapján azt kell megmutatni, hogy

  $(*)\qquad \forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists\delta > 0 : \forall(x,y)\in D_f,\ \|(x,y)-(0,0)\| < \delta\colon |f(x,y)-f(0,0)| < \varepsilon,$

  ahol $D_f = \mathbb{R}^2$ és $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

- Becslések: Ha $(x,y)=(0,0)$, akkor nyilvánvaló. Ha $(x,y)\neq(0,0)$, akkor

  $$|f(x,y)-f(0,0)| = \left|\frac{x^2+xy+2y^2}{\sqrt{x^2+2y^2}} - 0\right| \le \frac{|xy|+x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+2y^2}} \le \frac{|xy|+2x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \le$$

  $$\le \frac{\frac{x^2+y^2}{2}+2x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\frac{5}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{5}{2}\sqrt{x^2+y^2} < 3\sqrt{x^2+y^2} = 3\|(x,y)\|.$$

- Rögzített $\varepsilon > 0$ esetén

  $3\|(x,y)\| < \varepsilon \quad\Longrightarrow\quad \|(x,y)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$ Ezért $\delta := \frac{\varepsilon}{3}$ megválasztásával $(*)$ teljesül.

- Sejtés: a g esetében a határérték nem létezik, mert $y = mx$ $(x\neq 0)$ esetén

  $$g(x,mx) = \frac{x^2+x(mx)+2(mx)^2}{x^2+2(mx)^2} = \frac{1+m+2m^2}{1+2m^2} \qquad \text{csak az } m\text{-től függ.}$$

- Konkrét ellenpélda az átviteli elvre:

  $$m=0,\quad (x_n,y_n) = \left(\frac{1}{n},0\right) \to (0,0),\quad \text{de}\quad g(x_n,y_n) = 1.$$

  $$m=1,\quad (u_n,v_n) = \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) \to (0,0),\quad \text{de}\quad g(u_n,v_n) = \frac{4}{3}.$$

  Mivel a $g(x_n,y_n)$ és a $g(u_n,v_n)$ sorozatok határértéke nem egyezik meg, így g-nek nem létezik határértéke a $(0,0)$ pontban.

4. (7 pont) Tekintsük az alábbi függvényt!

$$f(x,y) := \sin(x+2y) \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big).$$

a) Adja meg f iránymenti deriváltját a $P\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$ pontban a $\frac{7\pi}{4}$ irányszögű egységvektor iránya mentén!

b) Írja fel a $z=f(x,y)$ felület $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pontjához tartozó érintősík egyenletét, és adja meg a sík egy normálvektorát!

Megoldás.

- A parciális deriváltak kiszámítása:

  $\partial_1 f(x,y) = \cos(x+2y) \qquad \Longrightarrow \qquad \partial_1 f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2},$

  $\partial_2 f(x,y) = 2\cos(x+2y) \qquad \Longrightarrow \qquad \partial_1 f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -1.$

- Az irányvektor:

  $v = \left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$

- Az iránymenti derivált kiszámítása: Mivel f differenciálható a P pontban, így

  $\partial_v f(1,2) = \partial_1 f(1,2)v_1 + \partial_2 f(1,2)v_2 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$

- Mivel f differenciálható a $P\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$ pontban, így a $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pontban érintősík húzható. Ennek egyenlete:

  $z - f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right) = \partial_1 f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)(x-\frac{\pi}{3}) + \partial_2 f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)(y-\frac{\pi}{6}).$

  azaz $z - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{3}) - (y-\frac{\pi}{6}) \qquad \Longrightarrow \qquad x+2y+2z = \dfrac{2\pi}{3}+\sqrt{3}.$

- Ennek egyik normálvektora:

  $$\vec{n} = (1,\,2,\,2).$$

5. (7 pont) Határozza meg az

$$f(x,y) := x^2 - 4xy + y^3 + 4y \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit!

Megoldás.

- Stacionárius pontok meghatározása:

  $$\left.\begin{array}{rcrcl} \partial_x f(x,y) & = & 2x-4y & = & 0 \\ \partial_y f(x,y) & = & -4x+3y^2+4 & = & 0 \end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad x=2y \quad\Longrightarrow\quad -4(2y)+3y^2+4=0,$$

  azaz $3y^2-8y+4=0$. Ennek megoldásai $y=2$ és $y=\frac{2}{3}$.

  A stacionárius pontok: $P_1(4,2)$ és $P_2\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$.

- A másodrendű elégséges feltételben szereplő Hesse-féle mátrix determinánsa:

  $$\partial_{xx} f(x,y) = 2, \quad \partial_{xy} f(x,y) = -4 = \partial_{yx} f(x,y), \quad \partial_{yy} f(x,y) = 6y.$$

  Ezért

  $$f''(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(x,y) & \partial_{xy} f(x,y) \\ \partial_{yx} f(x,y) & \partial_{yy} f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 6y \end{pmatrix},$$

  $$D_1(x,y) = \partial_{xx} f(x,y) = 2, \quad D_2(x,y) = \det f''(x,y) = 12y-16.$$

- A vizsgálat eredménye:
  $\boldsymbol{P_1(4,2)}$: $D_2(4,2) = 8 > 0$ és $D_1(4,2) = 2 > 0$, ezért a függvénynek lokális minimuma van a $P_1(4,2)$ pontban.

  $\boldsymbol{P_2\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)}$: $D_2\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right) = -8 < 0$, ezért a függvénynek nincs lokális szélsőértéke a $P_2\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$ pontban.