Programtervező Informatikus BSc Szak, Analízis 1

2. zárthelyi dolgozat; 2021.05.14.
Megoldások

1. Feladat. Konvergens-e a

$$\sum_{n=0} \frac{2\cdot(-1)^n + 2^{n+1}}{3^{2n+1}}$$

végtelen sor? Ha igen, számítsa ki az összegét!

Megoldás: A sor előáll két konvergens sor összegeként. Valóban

$$\sum_{n=0} \frac{2\cdot(-1)^n + 2^{n+1}}{3^{2n+1}} = \sum_{n=0} \frac{2\cdot(-1)^n + 2\cdot 2^n}{3\cdot 9^n} = \sum_{n=0} \left(\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)^n + \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^n\right).$$

A $\sum\limits_{n=0} \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)^n$ mértani sor konvergens, hiszen $-1 < q := -\frac{1}{9} < 1$, és

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)^n = \frac{2}{3}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{9}\right)^n = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{1}{9})} = \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{10} = \frac{3}{5}.$$

A $\sum\limits_{n=0} \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^n$ mértani sor konvergens, hiszen $-1 < q := \frac{2}{9} < 1$, és

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^n = \frac{2}{3}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^n = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{9}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{7} = \frac{6}{7}.$$

Mivel a megadott sor előáll két konvergens sor összegeként, így a sor konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\cdot(-1)^n + 2^{n+1}}{3^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^n = \frac{3}{5} + \frac{6}{7} = \frac{51}{35}.$$

2. Feladat. Konvergensek-e az alábbi végtelen sorok?

$$\text{a)} \sum_{n=1} \frac{(2n+1)!}{3^{n^2}} \qquad \text{b)} \sum_{n=1} \left(\frac{3n+4}{3n+3}\right)^{n^2+1} \qquad \text{c)} \sum_{n=1} \frac{n+1}{\sqrt{n^3+n+7}}$$

Megoldás:

a) Használjuk a d'Alembert-féle hányadoskritériumot!

$$a_n = \frac{(2n+1)!}{3^{n^2}} \implies \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2(n+1)+1)!}{3^{(n+1)^2}}\cdot\frac{3^{n^2}}{(2n+1)!} = \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!}\cdot\frac{3^{n^2}}{3^{n^2+2n+1}} =$$

$$= \frac{(2n+3)(2n+2)}{3^{2n+1}} = \frac{1}{3}\cdot n^2\left(\frac{1}{9}\right)^n\cdot\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3}\cdot 0\cdot(2+0)(2+0) = 0 := A$$

Mivel $A < 1$, így a hányadoskritérium alapján a sor konvergens.

b) A feladat kétféle módon is megoldható.

- Vegyük észre, hogy

$$\frac{3n+4}{3n+3} = 1 + \frac{1}{3n+3} > 1 \quad \Longrightarrow \quad a_n := \left(\frac{3n+4}{3n+3}\right)^{n^2+1} > 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

  Ezért a sor általános tagja nem tart nullához. Így a végtelen sorok konvergenciájára vonatkozó szükséges feltételt szerint a sor divergens.

- Használjuk a Cauchy-féle gyökkritériumot!

$$a_n = \left(\frac{3n+4}{3n+3}\right)^{n^2+1} \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{3n+4}{3n+3}\right)^{n+\frac{1}{n}} = \left(\frac{3n+4}{3n+3}\right)^{n} \sqrt[n]{\frac{3n+4}{3n+3}}.$$

  Továbbá

$$\left(\frac{3n+4}{3n+3}\right)^{n} = \left(\frac{1+\frac{4}{3n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n} = \frac{\left(1+\frac{4/3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{e^{4/3}}{e} = e^{1/3}$$

  illetve

$$\sqrt[n]{\frac{3n+4}{3n+3}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1, \quad \text{hiszen} \quad \frac{3n+4}{3n+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \in \mathbb{R}^+.$$

  Ezért

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{3n+4}{3n+3}\right)^{n} \sqrt[n]{\frac{3n+4}{3n+3}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{1/3}\cdot 1 = e^{1/3} := A.$$

  Mivel $A = e^{1/3} > e^0 = 1$, így a gyökkritérium alapján a sor divergens.

c) Mivel

$$\frac{n+1}{\sqrt{n^3+n+7}} \approx \frac{n}{\sqrt{n^3}} = \frac{n}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{1/2}}, \quad \text{ha } n \text{ elég nagy, továbbá} \quad \sum_{n=1} \frac{1}{n^{1/2}} \quad \text{divergens,}$$

ezért a sejtésünk az, hogy a sor divergens. Valóban az, hiszen pozitív sorról van szó, és

$$\frac{n+1}{\sqrt{n^3+n+7}} > \frac{n}{\sqrt{n^3+n+7}} \geq (n\geq 1) \geq \frac{n}{\sqrt{n^3+n^3+7n^3}} = \frac{n}{\sqrt{9n^3}} = \frac{n}{3n^{3/2}} = \frac{1}{3n^{1/2}} \geq \frac{1}{3n}.$$

Mivel a harmonikus sor divergens, így a $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n}$ sor is divergens. Tehát a minoráns kritérium szerint a megadott sor divergens.

3. Feladat. Határozza meg a

$$\sum_{n=1} \frac{3^{-n}}{\sqrt{n^3+n+1}} \cdot (3x+1)^n$$

hatványsor konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát!

Megoldás: A hatványsorok általános alakja $\sum\limits_{n=0} \alpha_n (x-a)^n$. A megadott hatványsor esetében

$$\sum_{n=1} \frac{3^{-n}}{\sqrt{n^3+n+1}} \cdot (3x+1)^n = \sum_{n=1} \frac{3^{-n}3^n}{\sqrt{n^3+n+1}} \cdot \left(\frac{3x+1}{3}\right)^n = \sum_{n=1} \frac{1}{\sqrt{n^3+n+1}} \cdot \left(x+\frac{1}{3}\right)^n.$$

Ezért
$$\alpha_0 = 0, \qquad \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n^3+n+1}} \quad (0 < n \in \mathbb{N}), \qquad \underline{\underline{a = -\frac{1}{3}.}}$$
Ekkor
$$A = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = (n \geq 1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^3+n+1}}{\sqrt{(n+1)^3+(n+1)+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^3+n+1}}{\sqrt{n^3+3n^2+4n+3}} =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n^3+n+1}{n^3+3n^2+4n+3}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}+\frac{3}{n3}}} = \sqrt{\frac{1}{1}} = 1$$
amiből következik, hogy a hatványsor konvergencia sugara:
$$\underline{\underline{R = \frac{1}{A} = 1.}}$$
Ezért
$$\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = (a-R, a+R) \subseteq \mathrm{KH}\left(\sum_{n=1} \frac{3^{-n}}{\sqrt{n^3+n+1}} \cdot (3x+1)^n\right) \subseteq [a-R, a+R] = \left[-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right].$$
A határpontoknál

- ha $x = \frac{2}{3}$, akkor a $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{\sqrt{n^3+n+1}}$ sort kapjuk, ami konvergens, hiszen pozitív sorról van szó, és
$$\frac{1}{\sqrt{n^3+n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{3/2}} \quad \text{illetve} \quad \sum_{n=1} \frac{1}{n^{3/2}} \quad \text{konvergens,}$$
hiszen hiperharmonikus sor, ahol $\alpha = 3/2 > 1$. Ezért a majoráns kritérium szerint a $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{\sqrt{n^3+n+1}}$ sor konvergens.
- ha $x = -\frac{4}{3}$, akkor a $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{\sqrt{n^3+n+1}}(-1)^n$ sort kapjuk, ami konvergens, hiszen abszolút sora
$$\sum_{n=1} \left|\frac{1}{\sqrt{n^3+n+1}}(-1)^n\right| = \sum_{n=1} \frac{1}{\sqrt{n^3+n+1}},$$
amiről az előző esetnél igazoltuk, hogy konvergens.
Megjegyzés: A sor konvergenciája a Leibniz-kritérium alapján is igazolható.

Összefoglalva
$$\mathrm{KH}\left(\sum_{n=1} \frac{3^{-n}}{\sqrt{n^3+n+1}} \cdot (3x+1)^n\right) = \left[-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right].$$

4. Feladat. Számítsa ki a
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3+x^2-6x}{x^2-x-2}$$
határértéket! A definíció alapján is igazolja az állítást!

Megoldás: Vegyük észre, hogy
$$\frac{x^3+x^2-6x}{x^2-x-2} = \frac{x(x^2+x-6)}{x^2-x-2} = \frac{x(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+1)} = \frac{x(x+3)}{x+1} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}).$$

- Határértékszámítás:
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3+x^2-6x}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x(x+3)}{x+1} = \frac{2\cdot(2+3)}{2+1} = \frac{10}{3}$$

- A definíció alapján: azt kell igazolni, hogy

$$(*)\qquad \forall\,\varepsilon>0\text{-hoz }\ \exists\,\delta>0,\ \ \forall\,x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,2\},\ 0<|x-2|<\delta:\quad \left|\frac{x(x+3)}{x+1}-\frac{10}{3}\right|<\varepsilon.$$

Legyen $\varepsilon>0$ egy rögzített valós szám, illetve $x\neq 2$ és $|x-2|<1$. Ekkor

$$\left|\frac{x(x+3)}{x+1}-\frac{10}{3}\right|=\left|\frac{3x^2+9x-10x-10}{3(x+1)}\right|=\left|\frac{3x^2-x-10}{3(x+1)}\right|=\left|\frac{(x-2)(3x+5)}{3(x+1)}\right|=$$

$$=\frac{|3x+5|}{3\cdot|x+1|}\cdot|x-2|<\frac{14}{3\cdot 2}\cdot|x-2|<\underbrace{3\cdot|x-2|<\varepsilon}_{|x-2|<\frac{\varepsilon}{3}},$$

hiszen $\quad |x-2|<1 \quad\Longrightarrow\quad -1<x-2<1\quad\Longrightarrow\quad 1<x<3,\quad$ továbbá

- $1<x<3 \quad\Longrightarrow\quad 3<3x<9\quad\Longrightarrow\quad 8<3x+5<14\quad\Longrightarrow\quad |3x+5|<14,$
- $1<x<3 \quad\Longrightarrow\quad 2<x+1<4\quad\Longrightarrow\quad |x+1|>2.$

Így a $\delta:=\min\{1,\frac{\varepsilon}{3}\}$ választással $(*)$ teljesül.

5. Feladat. Határozza meg az

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x<1\\[2mm] \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{2-x}, & 1\leq x<2\\[2mm] 1, & x=2\\[2mm] \dfrac{\sin(2-x)}{2x-4}, & x>2\end{cases}$$

függvény folytonossági és szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait!

Megoldás: A megadott f függvény minden $x\in\mathbb{R}$ esetén értelmezhető, hiszen az

$$f_1(x):=\frac{1}{1-x}\quad (x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}),\qquad f_2(x):=\frac{\sqrt{x+7}-3}{2-x}\quad (x\in[-7,+\infty)\setminus\{2\})$$

illetve

$$f_3(x):=\frac{\sin(2-x)}{2x-4}\qquad (x\in\mathbb{R}\setminus\{2\})$$

függvények értelmezhetők a megadott intervallumokon. A polinomok, a gyök- és a szinuszfüggvény, illetve a folytonos függvényekkel végzett alapműveletek (kivéve természetesen a kritikus műveletek) és a kompozíció folytonossága miatt igaz, hogy f_1, f_2 és f_3 folytonosak minden értelmezési tartománybeli pontjukban. Ha $x\neq 1$ és $x\neq 2$, akkor az x pontnak van olyan környezete, ahol az f függvény értéke kizárólag az f_1, az f_2 vagy az f_3 függvények egyikével kifejezhető. Ez azt jelenti, hogy f folytonos az $\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$ halmazon.

$x=1$ esetén

$$\lim_{1-0}f=\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{1-x}=\lim_{x\to 1-0}\frac{-1}{x-1}=(-1)\cdot(-\infty)=+\infty,$$

így az f függvénynek másodfajú szakadása van az $x=1$ pontban.

$x = 2$ esetén

$$\lim_{2-0} f = \lim_{x\to 2-0} \frac{\sqrt{x+7}-3}{2-x} = \lim_{x\to 2-0} \left(\frac{\sqrt{x+7}-3}{2-x} \cdot \frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3} \right) =$$

$$= \lim_{x\to 2-0} \frac{x+7-3^2}{(2-x)(\sqrt{x+7}+3)} = \lim_{x\to 2-0} \frac{-(2-x)}{(2-x)(\sqrt{x+7}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 2-0} \frac{-1}{\sqrt{x+7}+3} = \frac{-1}{\sqrt{2+7}+3} = -\frac{1}{6}$$

$$\lim_{2+0} f = \lim_{x\to 2+0} \frac{\sin(2-x)}{2x-4} = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 2+0} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = (y = x-2 \to 0+0,\ \text{ha } x \to 2+0) =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{y\to 0+0} \frac{\sin y}{y} = -\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2},$$

így f nem folytonos az $x = 2$ pontban, hiszen a pont bal- és jobb oldali határértéke nem egyezik meg. Mivel mindkét határérték véges, ezért az f függvénynek elsőfajú szakadása van az $x = 2$ pontban.