Analízis 2 (F)

1. zh megoldott feladatai
(2021.10.22)

1. Feladat. Keresse meg azokat az $a, b \in \mathbb{R}$ paramétereket, hogy differenciálható legyen az alábbi függvény minden $x \in \mathbb{R}$ esetén!

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \operatorname{arc\,tg}(bx) + (x+a)e^x, & \text{ha } x \le 0, \\ x^2 + 2x + 3a - \dfrac{b}{x+1}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Megoldás: A deriválási szabályok szerint a feladatban szereplő függvények mindenütt differenciálhatók a paraméterek értékeitől függetlenül, kivéve az átmeneti pontban, ahol külön meg kell vizsgálni a differenciálhatóságot. Legyen

$$b(x) = a \cdot \operatorname{arc\,tg}(bx) + (x+a)e^x \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad j(x) = x^2 + 2x + 3a - \frac{b}{x+1} \quad (x > -1).$$

A deriválási szabályok alapján $b \in D(\mathbb{R})$, $j \in D(-1, +\infty)$, valamint

$$b'(x) = \frac{ab}{1+(bx)^2} + (x+a+1)e^x \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad j'(x) = 2x + 2 + \frac{b}{(x+1)^2} \quad (x > -1).$$

Mivel $f(x) = b(x)$ $(x < 0)$ és $f(x) = j(x)$ $(x > 0)$, így $f \in D\{x\}$ $(x \neq 0)$ minden $a, b \in \mathbb{R}$ esetén.

Legyen $A := f(0) = b(0) = a$. $f \in D\{0\}$ akkor és csak akkor teljesül, ha

- $f \in C\{0\}$. Tudjuk, hogy $b, j \in C\{0\}$. Szükséges még, hogy $b(0) = j(0) = A$. Mivel $A = b(0) = a$ és $j(0) = 3a - b$, így
$$a = 3a - b \qquad \Longrightarrow \qquad b = 2a.$$
- $b(0) = j(0) = A$ mellett $b'_+(0) = j'_+(0)$ teljesül. Tudjuk, hogy $b, j \in D\{0\}$. Szükséges még, hogy $b'(0) = j'(0)$. Mivel $b'(0) = ab + a + 1$ és $j'(0) = 2 + b$, így
$$ab + a + 1 = 2 + b \qquad \Longrightarrow \qquad ab + a - b - 1 = 0.$$

A kapott egyenletrendszer megoldása:

$$a(2a) + a - 2a - 1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 2a^2 - a - 1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (a-1)(2a+1) = 0,$$

azaz $a = 1$ és $b = 2$, vagy $a = -\frac{1}{2}$ és $b = -1$. Csak ezekben az esetekben $f \in D(\mathbb{R})$.

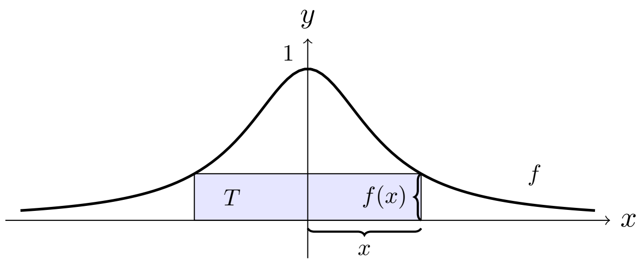
2. Feladat. Keresse meg azt a maximális területű téglalapot amelynek egyik oldala az x tengelyen fekszik, és két csúcsa az

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonján helyezkedik el!

Megoldás: Mivel az f függvény páros és f szigorúan monoton csökkenő a $(0, +\infty)$ intervallumon, így csak olyan téglalapokról lehet szó, amelyeknek két csúcsa az origóra szimmetrikusan fekszik az x tengelyen, és a másik két csúcsa f grafikonján van.

Alkalmazzuk az ábra jelöléseit!



A fentiek szerint a

$$T(x) := 2x \cdot f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \qquad (x > 0)$$

függvénynek keressük az abszolút maximumhelyét. A deriválási szabályok szerint igaz, hogy $T \in D^2(0, +\infty)$ és

$$T'(x) = 2 \cdot \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot (2x)}{(1+x^2)^2} = 2 \cdot \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \qquad (x > 0)$$

$$T''(x) = 2 \cdot \frac{-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} \qquad (x > 0).$$

$T'(x) = 0 \iff x = \pm 1$, de csak $x = 1$ pozitív. Mivel $T''(1) < 0$, így a másodrendű elégséges feltétel szerint $x = 1$ a T függvény lokális maximumhelye. Ez abszolút maximumhely is, mert $T \in D^2(0, \pi/2)$ és a $T'(x) = 0$ egyenletnek egyetlen megoldása van a $(0, +\infty)$ intervallumon.

Az előbbiek szerint akkor kapunk maximális területű téglalapot, ha $x = 1$, és ekkor ez a terület $T(1) = 1$.

3. Feladat. L'Hospital-szabály segítségével számítsuk ki az alábbi határértékeket!

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - x)}{x^2 + \sin(2x)}, \qquad\qquad b)\ \lim_{x\to 0+0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

Megoldás:

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - x)}{x^2 + \sin(2x)} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(\frac{\pi}{2} - x) \cdot (-1)}{2x + \cos(2x) \cdot 2} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2\cos 0} = \frac{1}{2}$$

b) Alakítsuk át a kifejezést a következő módon:

$$(\sin x)^{\operatorname{tg} x} = \left(e^{\ln \sin x}\right)^{\operatorname{tg} x} = e^{\operatorname{tg} x \cdot \ln \sin x} \qquad (x > 00)$$

Nézzük először a kitevő határértékét:

$$\lim_{x\to 0+0} \operatorname{tg} x \cdot \ln \sin x = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{\sin x} \cos x}{-\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} =$$

$$= -\lim_{x\to 0+0} \frac{\operatorname{tg}^2 x \cos^3 x}{\sin x} = -\lim_{x\to 0+0} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{\cos^3 x}{\sin x} = -\lim_{x\to 0+0} \sin x \cos x = -0 \cdot 1 = 0.$$

Az exp függvény folytonos a 0 pontban, ezért

$$\lim_{x\to 0+0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = \exp\left(\lim_{x\to 0+0} \operatorname{tg} x \cdot \ln \sin x\right) = e^0 = 1.$$

4. Feladat. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) := \frac{x}{2} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{2} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

függvény grafikonját!

Megoldás:

1. **Kezdeti vizsgálatok.** A deriválási szabályok alapján f akárhányszor differenciálható minden $x \neq 0$ pontban.

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{2} = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{2x^2} = \frac{(x+1)(x-2)^2}{2x^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -1 \text{ v. } x = 2.$$

Előjelvizsgálat

	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	$0 < x < 2$	2	$x > 2$
f	$-$	0	$+$	$+$	0	$+$

A függvény nem páros, páratlan vagy periodikus.

2. **Monotonitás, lokális szélsőértékek.** Minden $x \neq 0$ esetén

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{x^3} = \frac{x^3 - 8}{2x^3} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^3 = 8 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 2.$$

	$x < 0$	$0 < x < 2$	2	$x > 2$
f'	$+$	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	$\downarrow$	0	$\uparrow$
lok.			min	

3. **Konvexitás, inflexiós pontok.** Minden $x \neq 0$ esetén

$$f''(x) = \frac{12}{x^4} > 0$$

	$x < 0$	$x > 0$
f''	$+$	$+$
f	$\smile$	$\smile$

Nincsenek inflexiós pontok.

4. **Határértékek, aszimptoták.** A határértékeket a $(+\infty)$-ben és a $(-\infty)$-ben, ill. a 0 pont bal és jobb oldalán kell megvizsgálni:

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{2}\right) = +\infty + 0 - \frac{3}{2} = +\infty,$$

$$\lim_{-\infty} f = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{2}\right) = -\infty + 0 - \frac{3}{2} = -\infty,$$

$$\lim_{0\pm0} f = \lim_{x\to0\pm0} \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{2}\right) = 0 + (+\infty) - \frac{3}{2} = +\infty.$$

Másrészt

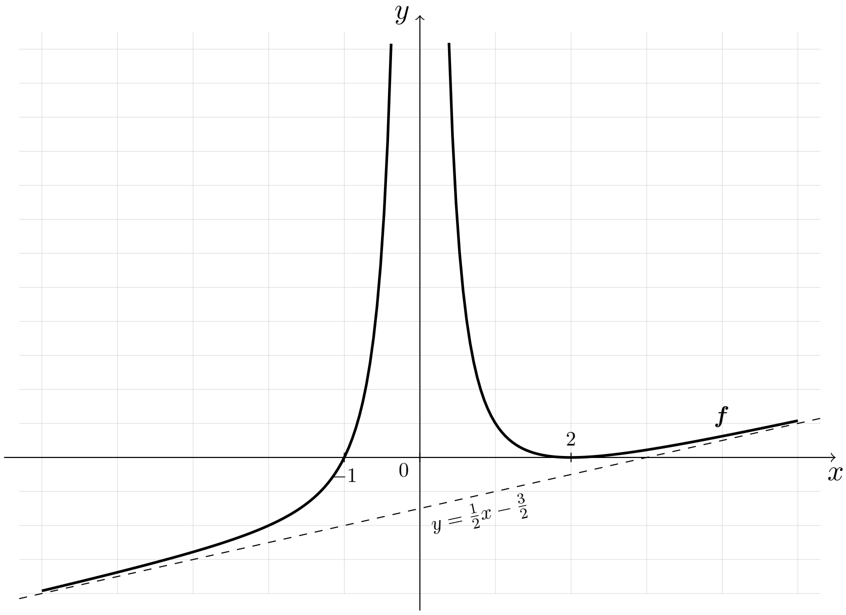
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{x^3} - \frac{3}{2x}\right) = \frac{1}{2} + 0 - 0 = \frac{1}{2} := A$$

és

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - Ax) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2}{x^2} - \frac{3}{2}\right) = 0 - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} := B$$

Ezért f-nek a $-\infty$-ben és a $+\infty$-ben van aszimptotája, és ez mindkét esetben az $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ egyenletű egyenes.

5. **Ábrázolás.**



5. Feladat. Írja fel az alábbi függvény 0 középpontú másodfokú Taylor-polinomját, és adjon becslést a közelítés hibájára a $[0, \frac{1}{8}]$ intervallumon!

$$f(x) := \sqrt[3]{1+4x} \qquad \left(x > -\frac{1}{4}\right).$$

Megoldás: A függvény akárhányszor deriválható, és minden $x > -\frac{1}{4}$ pontban

$$f(x) = (1+4x)^{1/3} \qquad \Longrightarrow \qquad f(0) = 1,$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(1+4x)^{-2/3} \cdot 4 = \frac{4}{3}(1+4x)^{-2/3} \qquad \Longrightarrow \qquad f'(0) = \frac{4}{3},$$

$$f''(x) = -\frac{8}{9}(1+4x)^{-5/3} \cdot 4 = -\frac{32}{9}(1+4x)^{-5/3} \qquad \Longrightarrow \qquad f''(0) = -\frac{32}{9}.$$

Az f függvény 0 ponthoz tartozó másodfokú Taylor-polinomja

$$T_{2,0}f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = 1 + \frac{4}{3}x - \frac{16}{9}x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A hibabecsléshez a Taylor-formulát alkalmazzuk a Lagrange-féle maradéktaggal. Ekkor minden $0 < x \le \frac{1}{8}$ értékhez van olyan $0 < \xi_x < x$ szám, hogy

$$f(x) - T_{2,0}f(x) = \frac{f'''(\xi_x)}{3!}x^3.$$

Mivel

$$f'''(x) = \frac{160}{27}(1+4x)^{-8/3} \cdot 4 = \frac{640}{27\sqrt[3]{(1+4x)^8}},$$

így

$$|f(x) - T_{2,0}f(x)| = \frac{|f'''(\xi)|}{6}|x|^3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{640}{27\sqrt[3]{(1+4\xi_x)^8}}|x|^3 \le \frac{1}{6} \cdot \frac{640}{27\sqrt[3]{(1+4\cdot 0)^8}} \cdot \left|\frac{1}{8}\right|^3 =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{640}{27} \cdot \frac{1}{512} = \frac{5}{648} \approx 0,0077.$$