

Analízis II. (F) gyakorlatok

**Programtervező informatikus BSc
Szoftverfejlesztő (C) specializáció**

1. gyakorlat

Differenciálszámítás 1.

■ Szükséges ismeretek

- A derivált fogalma.
- A deriválási szabályok.
- Nevezetes függvények deriváltja.

■ Feladatok

1. Feladat. A definíció alapján lássuk be, hogy $f \in D\{a\}$, és számítsuk ki $f'(a)$ -t, ha

- a) $f(x) := x^4 \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a := 1,$
- b) $f(x) := \sqrt{x} \quad (x \in [0, +\infty)), \quad a := 2,$
- c) $f(x) := \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}), \quad a := 3,$
- d) $f(x) := x|x| \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a := 0,$
- e) $f(x) := \begin{cases} 1 - x, & \text{ha } x < 0, \\ x^2 - x + 1, & \text{ha } x \geq 0, \end{cases} \quad a := 0.$

2. Feladat. Adjuk meg a következő függvények deriváltját!

- a) $f(x) := 4x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \quad (x \in \mathbb{R}),$
- b) $f(x) := \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}} \quad (x > 0),$
- c) $f(x) := x^3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}),$
- d) $f(x) := x^a + a^x + ax + \frac{x}{a} + \frac{a}{x} \quad (x > 0), \quad a > 0 \text{ paraméter.}$

3. Feladat. Adjuk meg a következő függvények deriváltját!

- a) $f(x) := x^2 \sin x \quad (x \in \mathbb{R}),$
- b) $f(x) := e^x(\sqrt[3]{x^2} + e^2) \quad (x > 0),$
- c) $f(x) := \frac{x^3 + 2}{x^2 + x + 5} \quad (x \in \mathbb{R}),$
- d) $f(x) := \frac{2^x + 1}{2 + \sin x} \quad (x \in \mathbb{R}).$

4. Feladat. Adjuk meg a következő függvények deriváltját!

a) $f(x) := (5x^2 + 3x)^{2020} \quad (x \in \mathbb{R})$

b) $f(x) := \sqrt{x + \sqrt{x}} \quad (x \geq 0),$

c) $f(x) := \sin \frac{x^2 + 1}{x + 3} \quad (x > -3),$

d) $f(x) := \sin^2 \left(\ln \sqrt{1 + \cos^2 x} + 1 \right) \quad (x \in \mathbb{R}).$

5. Feladat. Mutassuk meg, hogy az alábbi függvények differenciálhatók, és számítsuk ki a deriváltfüggvényeiket!

a) $f(x) := \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{1-x} \quad (x > 0),$

b) $f(x) := (\ln x)^{x+1} \quad (x > 1).$

■ Házi feladatok

1. Feladat. A definíció alapján lássa be, hogy $f \in D\{a\}$, és számítsa ki $f'(a)$ -t, ha

a) $f(x) := \frac{1}{x^2} \quad (x < 0), \quad a := -1,$

b) $f(x) := \begin{cases} x^3 + x, & \text{ha } x \leq 0, \\ e^x - 1, & \text{ha } x > 0, \end{cases} \quad a := 0.$

2. Feladat. Adja meg a következő függvények deriváltját!

a) $f(x) := x^2 e^{\cos x} \quad (x \in \mathbb{R}),$ b) $f(x) := \log_2 \left(\frac{x+2}{x-1} \right) \quad (x > 1),$

c) $f(x) := \sin \sqrt{2^x + x^2} \quad (x \in \mathbb{R}),$ d) $f(x) := \frac{\cos(\ln 2x)}{x^2 \ln x} \quad (x > 0).$

3. Feladat. Adja meg a következő függvények deriváltját!

a) $f(x) := x^x \quad (x > 0),$ b) $f(x) := (x^3 + x)^{\ln x} \quad (x > 1).$

■ Gyakorló feladatok

1. Feladat. A definíció alapján lássa be, hogy $f \in D\{a\}$, és számítsa ki $f'(a)$ -t, ha

a) $f(x) := 3x^2 - x + 1 \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a := 3,$

b) $f(x) := \sqrt{x+1} \quad (x > -1), \quad a := 3,$

c) $f(x) := \sqrt[3]{x^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a := 0,$

d) $f(x) := \frac{2}{x} + 4 \quad (x > 0), \quad a := 2,$

$$\text{e) } f(x) := \begin{cases} x^3 - x, & \text{ha } x < 1, \\ x^2, & \text{ha } x \geq 1, \end{cases} \quad a := 1,$$

$$\text{f) } f(x) := \begin{cases} 2 \sin x, & \text{ha } x < 0, \\ x^2 + 2x, & \text{ha } x \geq 0, \end{cases} \quad a := 0.$$

2. Feladat. Számítsa ki az

$$f(x) := \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \quad (x > 0)$$

függvény deriváltfüggvényét. (Egyszerűsítsen is.)

3. Feladat. Adja meg a következő függvények deriváltját!

$$\text{a) } f(x) := \frac{2x^2 - 1}{x\sqrt{1+x^2}} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \text{b) } f(x) := \frac{e^x}{1+e^x} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\text{c) } f(x) := \sin \sqrt{1+x^3} \quad (x > -1), \quad \text{d) } f(x) := \frac{(x+1)^3}{x^{3/2}} \quad (x > 0),$$

$$\text{e) } f(x) := \ln(e^{-x} \sin x) \quad (0 < x < \pi), \quad \text{f) } f(x) := \sqrt{1 + \sin^2 x} \cdot \cos x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\text{g) } f(x) := e^x \sin x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \text{h) } f(x) := x^2 \sqrt[3]{x} \quad (x > 0),$$

$$\text{i) } f(x) := (x+2)^8(x+3)^6 \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \text{j) } f(x) := (\sin^3 x) \cdot \cos x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\text{k) } f(x) := \frac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}} \quad (x > 0), \quad \text{l) } f(x) := \frac{\sin(2x^2)}{3 - \cos(2x)} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\text{m) } f(x) := \ln(x^2 e^x) \quad (x > 0), \quad \text{n) } f(x) := e^{\cos x} + \cos(e^x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\text{o) } f(x) := \left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{\sqrt{7}} \quad (x > 0), \quad \text{p) } f(x) := \ln(\cos x) \quad (0 < x < \frac{\pi}{2}),$$

$$\text{q) } f(x) := \sqrt[5]{x \cos x} \quad (x > 0), \quad \text{r) } f(x) := \sin^2(\ln(\sqrt{1 + \cos^2 x} + 1)) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

4. Feladat. Adja meg a következő függvények deriváltját!

$$\text{a) } f(x) := (1 + e^{3x+1})^{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \text{b) } f(x) := (2 + \sin x)^{\cos x} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\text{c) } f(x) := x^{\sqrt{x}} \quad (x > 0), \quad \text{d) } f(x) := \sin(x^{\cos x}) \quad (x > 0).$$

■ További feladatok

1. Feladat. Hol deriválhatók az alábbi függvények? Ahol differenciálhatók, ott számítsa ki a deriváltat!

$$\text{a) } f(x) := |3x - 1| \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \text{b) } f(x) := e^{|x|} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\text{c) } f(x) := \ln |x| \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}), \quad \text{d) } f(x) := x^2(\operatorname{sign} x + \operatorname{sign} |x - 1|) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

2. Feladat. Legyen α valós paraméter. Hol deriválható az

$$f(x) := \begin{cases} \alpha x + x^2, & x < 0 \\ x - x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

függvény? Ahol differenciálható, ott számítsa ki a deriváltat!

3. Feladat. Tegyük fel, hogy a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény differenciálható. Fejezze ki az f függvény deriváltját g segítségével, ha

a) $f(x) := g^2(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$

b) $f(x) := g(g(x)) \quad (x \in \mathbb{R}),$

c) $f(x) := \ln |g(x)| \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{y \mid g(y) = 0\}).$

4. Feladat. Legyenek $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ és $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ differenciálható függvények. Fejezze ki h' -t f és g segítségével, ha

a) $h(x) := f(g(\sin x)) \quad (x \in \mathbb{R}),$

b) $h(x) := \log_{f(x)}(g(x)) \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{y \mid f(y) = 1\}).$

5. Feladat. Legyenek $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ és $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ differenciálható függvények. Fejezze ki h' -t f és g segítségével, ha

a) $h(x) := f(g(\sin x)) \quad (x \in \mathbb{R}),$

b) $h(x) := \log_{f(x)}(g(x)) \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{y \mid f(y) = 1\}).$

6. Feladat. Alkalmas függvény differenciálhatóságának a definíciójára gondolva számítsa ki a következő határértékeket!

a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{16+h} - 2}{h},$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 + x - 2}.$

7. Feladat. Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy az

a) $f(x) := g(x)(x-a) \quad (x \in \mathbb{R})$

b) $f(x) := g(x)|x-a| \quad (x \in \mathbb{R})$

függvény deriválható az a pontban?

2. gyakorlat

Differenciálszámítás 2.

■ Szükséges ismeretek

- Az érintő fogalma, egyenlete.
- Az inverz függvényre vonatkozó deriválási szabály.
- Egyoldali pontbeli deriváltak.
- A Rolle- és a Lagrange-féle közéértéktétel.

■ Feladatok

1. **Feladat.** Legyen

$$f(x) := \frac{\sqrt{1+x}}{(x^2+1)^5} \quad (x > -1).$$

- a) Vizsgáljuk meg deriválhatóság szempontjából az f függvényt, és határozzuk meg az f' deriváltfüggvényét!
- b) Mutassuk meg, hogy a függvény grafikonjának a $(0, f(0))$ pontban van érintője, és írjuk fel az érintőegyenest!

2. **Feladat.** Igazoljuk, hogy az alábbi függvények invertálhatók és inverzei differenciálhatók! Számítsuk ki az $(f^{-1})'$ függvény értékét a megadott b pontban!

- a) $f(x) := x^3 + x$ ($x \in \mathbb{R}$), $b := -2$,
- b) $f(x) := 2x + \ln(x^2 + 1)$ ($x > 0$), $b := 2 + \ln 2$.

3. **Feladat.** Igazoljuk, hogy az

$$f(x) := \sqrt{e^{2x-1} + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvények invertálhatók, inverze differenciálható és határozzuk meg az inverz függvényének deriváltját!

4. **Feladat.** Állapítsuk meg, hogy differenciálhatók-e az alábbi függvények a megadott a pontokban!

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &:= \begin{cases} x^2 + 1, & \text{ha } x < 0, \\ \ln(x^2 + 1), & \text{ha } x \geq 0, \end{cases} & a = 0, \\ \text{b) } f(x) &:= \begin{cases} 2^x, & \text{ha } x < 1, \\ 2, & \text{ha } x = 1, \\ \sqrt{x^3 + 3}, & \text{ha } x > 1, \end{cases} & a = 1, \end{aligned}$$

$$c) f(x) := \begin{cases} \cos^2 x, & \text{ha } x \leq \frac{\pi}{2}, \\ (x - \frac{\pi}{2})^2, & \text{ha } x > \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad a = \frac{\pi}{2},$$

$$d) f(x) := \begin{cases} x^3 + 1, & \text{ha } x \leq 0, \\ \frac{\sin x}{x}, & \text{ha } x > 0, \end{cases} \quad a = 0.$$

5. Feladat. Megadható-e olyan a és b paraméter, hogy differenciálhatóak legyenek a következő függvények?

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 + b, & \text{ha } x < 1, \\ \frac{a}{x}, & \text{ha } x \geq 1. \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} \sin ax + b, & \text{ha } x \leq 0, \\ e^{x^2} + x, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

6. Feladat. Legyen $a, b \neq 1$ két pozitív szám. Igazoljuk, hogy az

$$f(x) := a^x + b^x - 2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvénynek legfeljebb két zérushelye lehet!

7. Feladat. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget!

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x \quad (x > 0).$$

■ Házi feladatok

1. Feladat. Írja fel az

$$f(x) := \cos \frac{x-1}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonjának az $a = \frac{1}{2}$ abszcisszájú pontjához tartozó érintőegyenese az egyenletét!

2. Feladat. Igazolja, hogy az alábbi függvény invertálható és inverze differenciálható a $(-\pi, \pi)$ intervallumon! Számítsa ki a függvény inverzének deriváltja a $b = 1 + \frac{\pi}{2}$ pontban!

$$f(x) := x + \sin x \quad (x \in \mathbb{R})$$

3. Feladat. Megadható-e olyan a és b paraméter, hogy differenciálhatóak legyenek a következő függvény?

$$f(x) := \begin{cases} ax^2 - ax + b \cos(x+1), & \text{ha } x < -1, \\ \frac{2a}{x^2+1} + e^{bx+b}, & \text{ha } x \geq -1. \end{cases}$$

4. Feladat. Igazolja, hogy az $f(x) := x^7 + 14x - 3$ ($x \in \mathbb{R}$) függvénynek pontosan egy zérushelye van!

■ Gyakorló feladatok

1. Feladat. Számítsa ki a következő függvény deriváltját, és írja fel a függvény grafikonjának az $a = 2$ abszcisszájú pontjához tartozó érintőegyenese az egyenletét!

$$f(x) := \frac{1}{\ln^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)} \quad (x > 1)$$

2. Feladat. Írja fel az f függvény grafikonjának az a abszcisszájú pontjához tartozó érintő-egyeneseének az egyenletét!

a) $f(x) := \sqrt{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a = 1/2,$

b) $f(x) := \frac{\sin \sqrt{1+x^2}}{x+3} \quad (x \in (-3, +\infty)), \quad a = 0,$

c) $f(x) := (x+2)^{x^2+1} \quad (x > -2), \quad a = -1,$

d) $f(x) := x^{\ln x} \quad (x > 0), \quad a = e^2.$

3. Feladat. A logaritmikus deriválás segítségével számítsa ki a következő függvények deriváltját!

a) $f(x) := \frac{x^4 \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+3}} \quad (x \neq 0), \quad b) \quad f(x) := \frac{(2x+3)^8(x+4)^5}{x^x(3x+1)^3} \quad (x > 0).$

4. Feladat. Igazolja, hogy az alábbi függvény invertálható és inverze differenciálható! Számítsa ki a függvény inverzének deriváltja a $b = 2$ pontban!

$$f(x) := x^5 + x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$$

5. Feladat. Igazolja az inverz kapcsolat segítségével, hogy az alábbi függvények invertálhatók, inverzüik differenciálható és határozza meg az inverz függvényük deriváltját!

a) $f(x) := 3e^{\sqrt[3]{x}} - 1 \quad (x \in \mathbb{R}), \quad b) \quad f(x) := e^{e^x} \quad (x \in \mathbb{R}).$

6. Feladat. Állapítsa meg, hogy differenciálhatóak-e az alábbi függvények a megadott pontokban!

a) $f(x) := \begin{cases} x^2 - 3x + 3, & \text{ha } x \leq 1, \\ e^{1-x}, & \text{ha } x > 1, \end{cases} \quad a = 1,$

b) $f(x) := \begin{cases} \sin^2 x, & \text{ha } x \leq \frac{\pi}{2}, \\ x^2 - \pi x, & \text{ha } x > \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad a = \frac{\pi}{2},$

c) $f(x) := \begin{cases} e^x, & \text{ha } x \leq 0, \\ x+1, & \text{ha } 0 < x \leq 1, \\ 3 - \frac{1}{x}, & \text{ha } x > 1, \end{cases} \quad a_1 = 0, a_2 = 1,$

d) $f(x) := \begin{cases} \frac{4x+5}{x+1}, & \text{ha } x < -2, \\ 1-x, & \text{ha } -2 \leq x \leq 2, \\ \cos(\pi(x-1)), & \text{ha } x > 2, \end{cases} \quad a_1 = -2, a_2 = 2,$

e) $f(x) := \begin{cases} \sin(x^2 + \pi), & \text{ha } x \leq 0, \\ x \ln(x+1), & \text{ha } x > 0, \end{cases} \quad a = 0.$

7. Feladat. Megadható-e olyan a és b paraméter, hogy differenciálhatóak legyenek a következő függvények?

$$\begin{aligned} a) \quad f(x) &= \begin{cases} ax^3 + bx + a, & \text{ha } x < 0, \\ bx^3 + ax^2 + bx, & \text{ha } x \geq 0, \end{cases} & b) \quad f(x) &= \begin{cases} a + x - x^2, & \text{ha } x < 0, \\ e^{bx} - a, & \text{ha } x \geq 0, \end{cases} \\ c) \quad f(x) &= \begin{cases} e^{\frac{x}{2}} + a, & \text{ha } x < 0, \\ \ln(\sin x + b), & \text{ha } x \geq 0, \end{cases} & d) \quad f(x) &= \begin{cases} ax^2 + bx, & \text{ha } x < 1, \\ \cos\left(\frac{x-1}{2}\right), & \text{ha } x \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

8. Feladat. Megadható-e olyan a és b paraméter, hogy differenciálhatók legyen a következő függvény?

$$f(x) = \begin{cases} a - \frac{bx}{x^2 + 1}, & \text{ha } x < 0, \\ \frac{e^x - 1}{ax} + bx, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

9. Feladat. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } -16 \leq x \leq 2, \\ -x^2 + 6x - 6, & \text{ha } 2 < x \leq 8. \end{cases}$$

a) Teljesülnek-e a Rolle-tétel feltételei a $[-6, 6]$ intervallumon?

b) Van-e zérushelye f' -nek a $(-6, 6)$ intervallumon?

10. Feladat. Legyen

$$f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Igazolható, hogy $f(-1) = f(1)$, de nincs olyan pont -1 és 1 között, ahol a függvény deriváltja nulla. Ez pedig a Rolle-féle középértéktételnek ellenmond. Hol hibádzik az előző okfejtés?

11. Feladat. Legyen

$$f(x) := x(x+1)(x+2)(x+3) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Igazoljuk, hogy az f' függvénynek pontosan három zérushelye van!

12. Feladat. Igazolja, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén fennáll az alábbi egyenlőtlenség!

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$$

13. Feladat. Igazolja, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll az alábbi egyenlőtlenség!

$$\sqrt[n]{1+x} \leq 1 + \frac{x}{n} \quad (x \geq -1).$$

■ További feladatok

1. Feladat. Adja meg olyan p és q értékeket, hogy az x tengely érintse az

$$f(x) := x^3 + px + q \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját!

2. Feladat. Igazolja, hogy az

$$f(x) := e^x + x \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény invertálható, $f^{-1} \in D^2(\mathbb{R})$, majd számítsa ki az $(f^{-1})''(1)$ értékét!

3. Feladat. Igazolja, hogy van olyan deriválható $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelyre

$$h(x^3 + 3x + 1) = x^3 - 2x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

teljesül, majd számítsa ki a $h'(-3)$ értéket!

4. Feladat. Adott $\alpha, \beta, a \in \mathbb{R}$, ill. az a pontban differenciálható $g: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény esetén mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & \text{ha } x < a, \\ g(x), & \text{ha } x \geq a \end{cases}$$

függvény deriválható az a pontban?

5. Feladat. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$. Mutassuk meg, hogy ha n rendre páros, illetve páratlan, akkor a

$$p(x) := x^n + ax + b \quad (x \in \mathbb{R})$$

polinomnak legfeljebb kettő, illetve három gyöke van!

6. Feladat. A Rolle-tétel felhasználásával igazoljuk a következő egyenlőtlenséget!

$$\sin x > \frac{2x}{\pi} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

3. gyakorlat

Függvénytulajdonságok kapcsolata a deriválttal 1.

■ Szükséges ismeretek

- A monotonitás és a derivált kapcsolata.
- A lokális szélsőérték elsőrendű szükséges feltétele.
- A lokális szélsőérték elsőrendű és másodrendű elégséges feltétele.
- A lokális és abszolút szélsőérték viszonya.
- A Weierstrass-tétel.

■ Feladatok

1. Feladat. Határozzuk meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken az f függvény monoton, ha

a) $f(x) := 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2 \quad (x \in \mathbb{R}),$

b) $f(x) := \frac{x}{x^2 - 10x + 16} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 8\}).$

2. Feladat. Számítsuk ki az

$$f(x) := x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit!

3. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x) := \frac{x}{x^2 + 1} \quad \left(x \in \left[-\frac{1}{2}, 2\right]\right)$$

függvény abszolút szélsőértékhelyeit és abszolút szélsőértékeit!

4. Feladat. Igazoljuk, hogy ha két pozitív szám összege állandó, szorzatuk akkor a legnagyobb, ha a két szám egyenlő!

5. Feladat. Határozzuk meg egy R sugarú félkörbe írt legnagyobb területű téglalap méreteit, ha a téglalap egyik oldala a félkör átmérőjén fekszik!

6. Feladat. Hogyan kell megválasztani egy 1 liter térfogatú, henger alakú konzervdoboz méreteit, hogy a gyártási költsége minimális legyen?

■ Házi feladatok

1. Feladat. Határozza meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken az f függvény monoton, ha

a) $f(x) := x - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}),$

b) $f(x) := \frac{e^x}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$

2. Feladat. Határozza meg az

$$f(x) := \frac{x}{x^2 + x + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvénynek

- a) a lokális szélsőértékeit,
- b) az abszolút szélsőértékeit a $[-2, 0]$ halmazon!

3. Feladat. Keresse meg azt a maximális területű téglalapot az első síknegyedben, amelynek az egyik csúcsa az origó, az ebből kiinduló két oldala a koordinátatengelyekre illeszkedik, és az origóval szemközti csúcs az

$$f(x) := e^{-3x} \quad (x \in (0, +\infty))$$

függvény grafikonján helyezkedik el!

■ Gyakorló feladatok

1. Feladat. Határozza meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken az f függvény monoton, ha

- a) $f(x) := 1 - 4x - x^2 \quad (x \in \mathbb{R}),$
- b) $f(x) := x^2(x - 3) \quad (x \in \mathbb{R}),$
- c) $f(x) := x \ln x \quad (x > 0),$
- d) $f(x) := \frac{2}{x} - \frac{8}{1+x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}),$
- e) $f(x) := 2e^{x^2-4x} \quad (x \in \mathbb{R}),$
- f) $f(x) := xe^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}),$
- g) $f(x) := \ln \frac{x^2}{(1+x)^3} \quad (x > -1, x \neq 0),$
- h) $f(x) := (x-3)\sqrt{x} \quad (x \geq 0).$

2. Feladat. Határozza meg az f függvény lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit, ha

- a) $f(x) := x^3 - 3x^2 + 3x + 2 \quad (x \in \mathbb{R}),$
- b) $f(x) := \frac{x^2}{x-3} \quad (x \neq 3),$
- c) $f(x) := x^2e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R}),$
- d) $f(x) := x - \ln(1+x) \quad (x > -1).$

3. Feladat. Számítsa ki az f függvény abszolút szélsőértékeit, ha

- a) $f(x) := 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1 \quad (-3 \leq x \leq 3),$
- b) $f(x) := x^4 - 4x^3 + 10 \quad (-1 \leq x \leq 4),$
- c) $f(x) := x^2e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R}),$
- d) $f(x) := 2x + \frac{200}{x} \quad (0 < x < +\infty).$

4. Feladat. A $6x + y = 9$ egyenletű egyenesen keressük meg a $(-3, 1)$ -hez legközelebbi pontot!

5. Feladat. Az $y^2 - x^2 = 4$ egyenletű hiperbolának mely pontja van legközelebb a $(2, 0)$ ponthoz?

6. Feladat. Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik átmegy a $(3, 5)$ ponton és az első síknegyedből a legkisebb területű részt vágja le!

7. Feladat. Mely pozitív szám esetén lesz a szám és reciprokának összege a lehető legkisebb?

8. Feladat. Egységnyi területű téglalapok közül melyiknek legnagyobb, illetve legkisebb a területe?

9. Feladat. Határozzuk meg egy R sugarú félkörbe írt legnagyobb területű trapéz méreteit, ha a trapéz egyik párhuzamos oldala a félkör átmérőjén fekszik!

10. Feladat. A Tisza partján egy 3200 m^2 területű, téglalap alakú telket kell bekeríteni. Mekkora válaszuk a téglalap méreteit, hogy a legrövidebb kerítésre legyen szükség? (A folyóparton nem állítunk kerítést.)

11. Feladat. Egy ablak alakja egy téglalap és egy fölé állított szabályos háromszögből áll. Kerülete 5 m . Milyenek válasszuk a méreteket, hogy az ablak a legtöbb fényt bocsássa át?

12. Feladat. Az R sugarú gömbbe írt kúpok közül keressük meg azt, amelyiknek a térfogata maximális!

13. Feladat. Határozzuk meg az 1 literes, felül nyitott legkisebb felszínű henger méreteit!

■ További feladatok

1. Feladat. Mutassa meg, hogy ha $f \in D(\mathbb{R})$ és f páros (páratlan), akkor f' páratlan (páros)!

2. Feladat. Milyen $p \in \mathbb{R}$ esetén van az $x^3 - 6x^2 + 9x + p = 0$ egyenletnek pontosan egy valós gyöke?

3. Feladat. Az $\ln' 1 = 1$ egyenlőség alapján bizonyítsa be, hogy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

4. Feladat. Vizsgáljuk meg van-e lokális szélsőértéke az

$$f(x) = (x - a)^n \varphi(x)$$

függvénynek az $x = a$ pontban, ha a φ függvény folytonos az $x = a$ pontban, $\varphi(a) \neq 0$ és n egy pozitív egész szám!

5. Feladat. Két, egymást derékszögben metsző egyenes egy-egy pontja egyidejűleg kezd a csúcspont felé mozogni. Az egyik 100 m , a másik 60 m távolságban indul a csúcsponttól. Az első sebessége 4 m/s , a másiké 2 m/s . Mikor lesz a két pont egymáshoz legközelebb, és mekkora lesz ekkor egymástól a távolságuk?

6. Feladat. Egy 5 m széles csatornán szálfákat úsztatnak. A csatornából egy $2,5 \text{ m}$ széles mellékág vezet le, amelynek az iránya az eredetivel derékszöget zár be. Legfeljebb hány méter hosszúságú szálfát tudunk a szóban forgó mellékágba terelni?

7. Feladat. Legfeljebb mekkora lehet annak a gerendának a hossza, amelyet egy 4 m átmérőjű, kör keresztmetszetű toronyba, egy a torony falán vágott 2 m magas ajtón át bevihetünk?

8. Feladat. Egy ellipszis két főtengelyének hossza a és b . Mekkora az ellipszisbe írható legnagyobb területű téglalap méretei, ha feltételezzük, hogy a téglalap oldalai párhuzamosak az ellipszis főtengelyeivel?

4. gyakorlat

Függvénytulajdonságok kapcsolata a deriválttal 2.

■ Szükséges ismeretek

- L'Hospital szabály.
- A konvexitás és a derivált kapcsolata.
- Az inflexiós pontok létezésének szükséges és elégséges feltétele.
- Az aszimptota fogalma és meghatározásának módja.

■ Feladatok

1. **Feladat.** L'Hospital-szabály segítségével számítsuk ki az alábbi határértékeket!

$$\begin{array}{ll} a) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^3 - 8x + 3}{x^7 + x - 2}, & b) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 - 8x + 3}{x^7 + x - 2}, \\ c) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^3 - 8}, & d) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}. \end{array}$$

2. **Feladat.** L'Hospital-szabály segítségével számítsuk ki az alábbi határértékeket!

$$\begin{array}{ll} a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right), & b) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x e^{1/x} - x \right), \\ c) \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \ln x \cdot \ln(1 - x), & d) \quad \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x. \end{array}$$

3. **Feladat.** L'Hospital-szabály segítségével számítsuk ki az alábbi határértékeket!

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x, \quad b) \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}.$$

4. **Feladat.** Adjuk meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken f konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

$$\begin{array}{ll} a) \quad f(x) := 2x^3 - 21x^2 + 36x \quad (x \in \mathbb{R}), & b) \quad f(x) := \ln(x^2 + 2x + 2) \quad (x \in \mathbb{R}), \\ c) \quad f(x) := \frac{x^3}{4 - x^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}), & d) \quad f(x) := \frac{e^x}{x + 1} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}). \end{array}$$

■ Házi feladatok

1. **Feladat.** L'Hospital-szabály segítségével számítsuk ki az alábbi határértékeket!

$$\begin{array}{ll} a) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\ln \left(\frac{\pi}{2} - x \right)}{\operatorname{tg} x}, & b) \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}, \\ c) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{\pi}{2} \right), & d) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ch} x)^{1/\operatorname{sh} x}. \end{array}$$

2. Feladat. Adjuk meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken f konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

$$a) \quad f(x) := e^{2x} - (4x + 1) \quad (x \in \mathbb{R}), \quad b) \quad f(x) := \frac{4x}{x^2 - 1} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}).$$

3. Feladat. Van-e az f függvényeknek aszimptotája $(+\infty)$ -ben, illetve $(-\infty)$ -ben? Ha igen, akkor határozza meg az aszimptotákat.

$$f(x) := \frac{x^2 + 4}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

■ Gyakorló feladatok

1. Feladat. L'Hospital-szabály segítségével számítsuk ki az alábbi határértékeket!

$$\begin{array}{ll} a) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{5x^2 - x - 4}, & b) \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^7 + 4x^6 - x^2 - x + 2}{3x^4 + 7x^3 - 5x - 2}, \\ c) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x^2 + x + 4}}{x}, & d) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x^2 + 6x + 20} - 2x}{x^3 + x - 10}, \\ e) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x}, & f) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + x}{x^3}, \\ g) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos x}, & h) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{x^2}, \\ i) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}, & j) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin x}{(1 - \cos x)^2}, \\ k) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}, & l) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3} \quad (a > 0), \\ m) \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{3 + \ln x}{2 - 3 \ln \sin x}, & n) \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln(1 - \cos x)}{\ln \operatorname{tg} x}, \\ o) \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\frac{1}{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x} - \frac{1}{x} \right), & p) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x - 1} \right), \\ q) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + x}), & r) \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right), \\ s) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \operatorname{ctg} x, & t) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-x^2} \cdot \ln(x^2 - x + 1), \\ u) \quad \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}, & v) \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, \\ w) \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} (e^{3x} - 5x)^{\frac{1}{x}}, & x) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{3x} - 5x)^{\frac{1}{x}}, \\ y) \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}, & z) \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}. \end{array}$$

2. Feladat. Határozza meg a következő határértékeket!

$$a) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt[n]{\alpha} - 1) \quad (\alpha > 0), \quad b) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right)^n.$$

3. Feladat. Határozzuk meg a

$$\frac{\sin 4x \sin 3x}{x \sin 2x}$$

hányados határértékét ha $x \rightarrow 0$ és ha $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

4. Feladat. Adjuk meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken f konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

- | | |
|---|---|
| a) $f(x) := 1 - (x + 1)^3 \quad (x \in \mathbb{R}),$ | b) $f(x) := x^5 - 5x^4 \quad (x \in \mathbb{R}),$ |
| c) $f(x) := \frac{x^3}{3x^2 + 1} \quad (x \in \mathbb{R}),$ | d) $f(x) := \frac{4x}{x^2 + 1} \quad (x \in \mathbb{R}),$ |
| e) $f(x) := x\sqrt{8 - x^2} \quad (x \leq 2\sqrt{2}),$ | f) $f(x) := \frac{\sqrt{x}}{x + 1} \quad (x \neq -1),$ |
| g) $f(x) := xe^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}),$ | h) $f(x) := \frac{x}{e^x(x - 1)} \quad (x \neq 1),$ |
| i) $f(x) := \ln(x^2 + 1) \quad (x \in \mathbb{R}),$ | j) $f(x) := x + \sin x \quad (x \in \mathbb{R}).$ |

5. Feladat. Írjuk fel az

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

függvény grafikonjához húzott érintők egyenletét a függvény inflexiós pontjaiban!

6. Feladat. Van-e az alábbi függvényeknek aszimptotája $(+\infty)$ -ben, illetve $(-\infty)$ -ben? Ha igen, akkor határozza meg az aszimptotákat.

- | | |
|--|---|
| a) $f(x) := \frac{1 - x^3}{x^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}),$ | b) $f(x) := \frac{\ln x}{x} \quad (x > 0),$ |
| c) $f(x) := x \ln x \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}),$ | d) $f(x) := \sqrt{x^2 - x + 1}.$ |

■ További feladatok

1. Feladat. Igazoljuk, hogy az

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x},$	b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x},$
--	--

határértékek L'Hospital-szabállyal nem határozhatók meg és keressük meg más úton az értékeket!

2. Feladat. Határozzuk meg az a és b értékeket úgy, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{a}{x^2} + b \right) = 0.$$

3. Feladat. Határozzuk meg a c értéket úgy, hogy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + c}{x - c} \right)^x = 4.$$

4. Feladat. Határozzuk meg a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \sin \frac{a}{x}$$

határértéket, ahol $a \neq 0$ valós szám és n egy pozitív egész szám!

5. Feladat. Igazoljuk, hogy az

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$$

függvénynek három inflexiós pontja van, melyek egy egyenesre illeszkednek!

6. Feladat. Keressük olyan a értékeket, hogy az $f(x) = e^x + ax^3$ függvénynek legyen inflexiós pontja!

5. gyakorlat

Elemi függvények és teljes függvényvizsgálat

■ Szükséges ismeretek

- A trigonometrikus függvények inverzeinek fogalma és legfontosabb összefüggések.
- A teljes függvényvizsgálat menete, és az egyes szempontok vizsgálatának módja.

■ Feladatok

1. **Feladat.** Számítsuk ki az alábbi függvényértékeket!

$$\arcsin \frac{1}{2}, \quad \arcsin(\sin 10), \quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \arctg 1, \quad \operatorname{arctg} \sqrt{3}, \quad \log_{1/4} \frac{1}{1024}.$$

2. **Feladat.** Differenciálszámítással igazoljuk, hogy

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (x \in [-1, 1]).$$

Milyen kapcsolat van az \arcsin és az \arccos függvények grafikonjai között?

3. **Feladat.** Szemléltessük az

$$f(x) := \arcsin(\sin x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját!

4. **Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy

$$\arcsin x = \arctg \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \in (-1, 1)).$$

5. **Feladat.** Teljes függvényvizsgálat végzése után vázoljuk a következő függvény grafikonját!

$$f(x) := x^4 - 4x^3 + 10 \quad (x \in \mathbb{R})$$

6. **Feladat.** Teljes függvényvizsgálat végzése után vázoljuk a következő függvény grafikonját!

$$f(x) := \frac{x^3 + x}{x^2 - 1} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\})$$

7. **Feladat.** Teljes függvényvizsgálat végzése után ábrázoljuk az

$$f(x) := e^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját (az ún. **Gauss-görbét**)!

■ Házi feladatok

1. **Feladat.** Számítsa ki az alábbi függvényértékeket!

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \operatorname{arsh}\left(\frac{3}{4}\right), \quad e^{-2 \ln 3}.$$

2. **Feladat.** Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja a következő függvények grafikonját!

$$a) \quad f(x) := \left(\frac{x+2}{x-3}\right)^2 \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}), \quad b) \quad f(x) := x^2 e^x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

■ Gyakorló feladatok

1. Feladat. Számítsa ki az alábbi függvényértékeket!

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right), \quad \arcsin(\cos 10), \quad \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}), \quad \operatorname{arch}\left(\frac{5}{4}\right), \quad \log_9 \frac{3}{27^3}, \quad 8^{\log_4 9}.$$

2. Feladat. Differenciálszámítással igazolja, hogy

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Milyen kapcsolat van az arctg és az $\operatorname{arccotg}$ függvények grafikonjai között?

3. Feladat. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja a következő függvények grafikonját!

- a) $f(x) := 3x - x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$, b) $f(x) := x^4 + 8x^2 - 9 \quad (x \in \mathbb{R})$,
c) $f(x) := (x-1)^2(x+2)^2 \quad (x \in \mathbb{R})$, d) $f(x) := x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$,
e) $f(x) := x + \sqrt{1-x} \quad (x \leq 1)$, f) $f(x) := \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}} \quad (x \in \mathbb{R})$,
g) $f(x) := \frac{x}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R})$, h) $f(x) := \frac{x^2+9}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$,
i) $f(x) := \frac{x+1}{x^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$, j) $f(x) := \frac{x^2-1}{x^2-5x+6} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\})$,
k) $f(x) := \frac{x^2}{x^3-x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\})$, l) $f(x) := \frac{x^3+2x^2}{x^2+2x+1} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$,
m) $f(x) := \left(\frac{x-3}{x+1}\right)^2 \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$, n) $f(x) := \frac{x^3-2x^2}{x^2-4} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\})$,
o) $f(x) := x + \frac{7}{x} - \frac{3}{x^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$, p) $f(x) := 3x + \frac{6}{x} - \frac{1}{x^3} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$,
q) $f(x) := xe^{-2x} \quad (x \in \mathbb{R})$, r) $f(x) := e^x - x \quad (x \in \mathbb{R})$,
s) $f(x) := \frac{e^x}{x+1} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$, t) $f(x) := \frac{e^x}{1+e^x} \quad (x \in \mathbb{R})$,
u) $f(x) := e^{\frac{1}{1-x}} \quad (x \in \mathbb{R})$, v) $f(x) := e^{2x-x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$,
w) $f(x) := \ln(x^2+x+1) \quad (x \in \mathbb{R})$, x) $f(x) := x \ln^2 x \quad (x > 0)$,
y) $f(x) := \frac{\ln x}{x} \quad (x > 0)$, z) $f(x) := x - \operatorname{arctg} 2x \quad (x \in \mathbb{R})$.

■ További feladatok

1. Feladat. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja a következő függvények grafikonját!

- a) $f(x) := \ln(x^2-1) \quad (|x| > 1)$, b) $f(x) := x + \ln(x^2-4x) \quad (x \in \mathbb{R} \setminus [0, 4])$,
c) $f(x) := x \ln|x| \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$, d) $f(x) := \frac{x^4}{|x| \cdot (x^2-1)} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\})$,
e) $f(x) := 2^{-x} \sin \pi x \quad (x \in \mathbb{R})$, f) $f(x) := e^{\sin \pi x} \quad (x \in \mathbb{R})$,
g) $f(x) := \sin^2 x - 2 \cos x \quad (x \in \mathbb{R})$, h) $f(x) := x \operatorname{arctg} x \quad (x \in \mathbb{R})$.

2. Feladat. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja a következő függvény grafikonját!

$$f(x) := \begin{cases} x^4 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right), & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

3. Feladat. Legyen $g(x) := e^{-x^2}$ ($x \in \mathbb{R}$) a Gauss-görbe. Teljes függvényvizsgálat végzése után ábrázoljuk az

$$f(x) := -g''(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját (az ún. **Sombrero-függvényt**)!

6. gyakorlat

Taylor-polinomok és Taylor-sorok

■ Szükséges ismeretek

- A lineáris közelítés.
- A Taylor-polinom fogalma.
- A Taylor-formula.
- A Taylor-sor fogalma.
- A hatványsor összegfüggvénye és Taylor-sora közötti kapcsolat.
- Egy függvény Taylor-sorának a felírásához létező módszerek.

■ Feladatok

1. Feladat. Legyen

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \quad (x > -1) \quad \text{és} \quad A := \frac{1}{\sqrt[3]{1030}}.$$

- Milyen lineáris becslést tudunk adni az f függvényre az $a = 0$ pont környezetében? Becsüljük vele a A értéket, és adjunk hibabecslést!
- Írjuk fel az f függvény 0 ponthoz tartozó harmadfokú Taylor-polinomját, és határozzuk meg, hogy a $\left[0, \frac{1}{10}\right]$ intervallumon legfeljebb mekkora hibával közelíti meg a Taylor-polinom a függvényt!
- A b) pontban kapott becslés felhasználásával adjunk újabb becslést az A számra, és becsüljük meg a közelítés hibáját!

2. Feladat. Az $f(x) = e^x$ függvény $a = 0$ ponthoz tartozó negyedfokú Taylor polinomja segítségével adjunk becslést a \sqrt{e} értékére és adjunk hibakorlátot! A becslések kiszámításakor kizárólag a négy alapműveletet szabad használni.

3. Feladat. Számítsuk ki $\sin 1$ értékét 5 tizedesjegy pontossággal!

4. Feladat.

- Mutassuk meg, hogy bármely P polinomot bármely $a \in \mathbb{R}$ ponthoz tartozó Taylor-sora mindenütt előállítja, azaz ha P tetszőleges legfeljebb n -edfokú polinom és $a \in \mathbb{R}$ egy tetszőlegesen megadott középpont, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

- Írjuk fel az x^5 polinomot $(x-1)$ hatványai szerint, és számítsuk ki vele $1, 1^5$ pontos értékét!

5. Feladat. Számítsuk ki az \arctg függvény deriváltjait a 0 pontban!

6. Feladat. Milyen $x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens az

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$$

hatványsor, és mi az összegfüggvénye?

7. Feladat. Adjuk meg a következő függvények a pont körüli Taylor-sorát!

$$a) \quad f(x) := \sin^3 x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a = 0, \quad b) \quad f(x) := \frac{1}{x^3} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a = 1.$$

Milyen intervallumon állítja elő a Taylor-sor a függvényt?

■ Házi feladatok

1. Feladat. Írja fel az

$$f(x) := \sqrt{1+2x} \quad \left(x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)\right)$$

függvény 0 pont körüli második Taylor-polinomját, $T_{2,0}f(x)$ -et! Adjon becslést az

$$|f(x) - T_{2,0}f(x)|$$

hibára a $\left[-\frac{5}{18}, \frac{1}{4}\right]$ intervallumon.

2. Feladat. Adja meg a következő függvények a pont körüli Taylor-sorát!

$$a) \quad f(x) := 2^x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a = 1, \quad b) \quad f(x) := \ln(x^2 + 1) \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a = 0.$$

Milyen intervallumon állítja elő a Taylor-sor a függvényt?

■ Gyakorló feladatok

1. Feladat. Határozza meg a következő függvények a ponthoz tartozó n -edfokú Taylor-polinomját!

$$\begin{array}{ll} a) \quad f(x) = x^5, \quad a = 1, \quad n = 3, & b) \quad f(x) = e^{-x}, \quad a = 0, \quad n = 5, \\ c) \quad f(x) = \cos x, \quad a = 0, \quad n = 5, & d) \quad f(x) = \operatorname{sh} x, \quad a = 0, \quad n = 5, \\ e) \quad f(x) = \ln(1-x)^3, \quad a = 0, \quad n = 4, & f) \quad f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4, \quad n = 4, \\ g) \quad f(x) = \operatorname{tg} x, \quad a = \frac{\pi}{4}, \quad n = 3, & h) \quad f(x) = \sin^2 x, \quad a = \pi, \quad n = 3, \\ i) \quad f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x, \quad a = 0, \quad n = 4, & j) \quad f(x) = \operatorname{ar} \operatorname{th} x, \quad a = 0, \quad n = 4, \\ k) \quad f(x) = \sqrt[3]{8-x}, \quad a = 0, \quad n = 3, & l) \quad f(x) = \frac{1}{2+x}, \quad a = -1, \quad n = 3. \end{array}$$

2. Feladat. A megadott f függvények adott a pontban húzott érintőegyenes egyenletével becsülje meg a következő értékeket, és az értékbecslések hibáit!

$$\begin{array}{ll} a) \quad f(x) = \sqrt{x+1}, \quad a = 8, \quad \sqrt{9,1} \approx?, & b) \quad f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad a = 8, \quad \sqrt[3]{8,4} \approx?, \\ c) \quad f(x) = \frac{x}{x+1}, \quad a = 1, \quad \frac{13}{23} \approx?, & d) \quad f(x) = e^x, \quad a = 0, \quad \frac{1}{e^{0,01}} \approx?, \\ e) \quad f(x) = \sin x, \quad a = 0, \quad \sin \frac{\pi}{16} \approx?, & f) \quad f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x, \quad a = 1, \quad \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1,01 \approx?. \end{array}$$

Határozzuk meg az előző értékbecsléseket másod- és harmadfokú közelítéssel és becsüljük meg a kapott becslések hibáját!

3. Feladat. A megadott f függvények esetén adjon becslést az a ponthoz tartozó n -edik Taylor-polinommal történő közelítés hibájára az adott I intervallumon!

a) $f(x) = x^5, \quad a = 1, \quad n = 3, \quad I = [0, 1],$

b) $f(x) = \sqrt{x+2}, \quad a = 2, \quad n = 2, \quad I = \left[\frac{7}{4}, 3\right],$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}, \quad a = 0, \quad n = 3, \quad I = \left[-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right],$

d) $f(x) = xe^x, \quad a = 0, \quad n = 2, \quad I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$

e) $f(x) = \ln(x+1), \quad a = 0, \quad n = 2, \quad I = \left[-\frac{7}{8}, 1\right],$

f) $f(x) = \cos x, \quad a = 0, \quad n = 5, \quad I = \left[0, \frac{\pi}{6}\right].$

4. Feladat. Becsülje meg a következő értékeket 5 tizedesjegy pontossággal! Végezze el a közelítést a megadott függvény adott a ponthoz tartozó Taylor-polinomjával.

a) $(0, 2)^{12}, \quad f(x) = x^{12}, \quad a = 0, \quad b) \quad (2, 1)^{10}, \quad f(x) = x^{10}, \quad a = 2,$

c) $\sqrt{5}, \quad f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4, \quad d) \quad \sqrt[5]{2}, \quad f(x) = \sqrt[5]{x}, \quad a = 1,$

e) $\frac{1}{0,99}, \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad a = 1, \quad f) \quad \sin \frac{\pi}{12}, \quad f(x) = \sin x, \quad a = 0,$

g) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}, \quad f(x) = \operatorname{tg} x, \quad a = 0, \quad h) \quad e^{-1}, \quad f(x) = e^{-x}, \quad a = 0,$

i) $e^{0,1}, \quad f(x) = e^x, \quad a = 0, \quad j) \quad \ln 0,8, \quad f(x) = \ln(1+x), \quad a = 0,$

k) $\ln 2, \quad f(x) = \ln x, \quad a = 1, \quad l) \quad \operatorname{arctg} 2, \quad f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad a = 1.$

5. Feladat. Írja fel a $2x^3 + 5x^2 + 3x + 1$ polinomot $(x+1)$ hatványai szerint!

6. Feladat. Adja meg a következő függvények a pont körüli Taylor-sorát! Milyen intervallumon állítja elő a Taylor-sor a függvényt?

a) $f(x) := \frac{1}{x+2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}), \quad a = 0,$

b) $f(x) := \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}), \quad a = 3,$

c) $f(x) := \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -3\}), \quad a = 0,$

d) $f(x) := \frac{1}{x^3} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}), \quad a = 2,$

e) $f(x) := 3^x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a = -1,$

f) $f(x) := x^2 e^{x^3} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a = 0,$

g) $f(x) := \ln x \quad (x > 0), \quad a = 2,$

h) $f(x) := \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (-1 < x < 1), \quad a = 0,$

i) $f(x) := \cos x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a = \pi,$

j) $f(x) := \sin^2 x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a = 0.$

■ További feladatok

1. Feladat. Adja meg a következő függvények a pont körüli Taylor-sorát! Milyen intervallumon állítja elő a Taylor-sor a függvényt?

$$a) \quad f(x) := \sqrt{1+x} \quad (x > -1), \quad a = 0,$$

$$b) \quad f(x) := \frac{1}{\sqrt{1+x}} \quad (x > -1), \quad a = 0,$$

$$c) \quad f(x) := \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1), \quad a = 0,$$

$$d) \quad f(x) := \arcsin x \quad (-1 < x < 1), \quad a = 0.$$

2. Feladat. Egy alkalmas függvény sorfejtése segítségével határozza meg a következő sorok összegét!

$$a) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}, \quad b) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}, \quad c) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k}, \quad d) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!},$$

7. gyakorlat

Integrálszámítás 1.

■ Szükséges ismeretek

- A határozatlan integrál fogalma.
- Alapintegrálok, a határozatlan integrál linearitása.
- Az első helyettesítési szabály.
- A parciális integrálás szabálya.

■ Feladatok

1. Feladat. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

$$\begin{array}{ll} a) \int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} dx & (x \in (0, +\infty)), \quad b) \int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx \quad (x \in \mathbb{R}), \\ c) \int \frac{(x+1)^2}{x^3} dx & (x \in (0, +\infty)), \quad d) \int \frac{3\cos^2 x + 2}{\cos 2x - 1} dx \quad (x \in (0, \pi)). \end{array}$$

2. Feladat. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

$$\begin{array}{ll} a) \int \frac{x}{x^2 + 3} dx & (x \in \mathbb{R}), \quad b) \int \operatorname{tg} x dx \quad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right), \\ c) \int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx & (x \in (1, +\infty)), \quad d) \int \cos(5x - 3) dx \quad (x \in \mathbb{R}), \\ e) \int \sin^5 x \cdot \cos^3 x dx & (x \in \mathbb{R}), \quad f) \int \sin^2 x dx \quad (x \in \mathbb{R}), \\ g) \int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}} dx & \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right), \quad h) \int \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} dx \quad (x \in (0, +\infty)). \end{array}$$

3. Feladat. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

$$a) \int x \cdot \sin x dx \quad (x \in \mathbb{R}), \quad b) \int (x^2 + 3x) \cdot e^{2x} dx \quad (x \in \mathbb{R}).$$

4. Feladat. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

$$a) \int \ln x dx \quad (x \in (0, +\infty)), \quad b) \int \operatorname{arc} \operatorname{tg} 3x dx \quad (x \in \mathbb{R}).$$

5. Feladat. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrált!

$$\int e^{2x} \cdot \cos x dx \quad (x \in \mathbb{R}).$$

6. Feladat. Parciális integrálással számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

$$a) \int \sqrt{1 - x^2} dx \quad (x \in (-1, 1)), \quad b) \int x^5 \cdot e^{x^3} dx \quad (x \in \mathbb{R}).$$

■ Házi feladatok

1. Feladat. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

$$\begin{array}{ll}
 a) \int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx & (x > 0), \\
 b) \int \sqrt{1 - \cos 2x} dx & (x \in (0, 2\pi)), \\
 c) \int \frac{1}{1 + e^{-x}} dx & (x \in \mathbb{R}), \\
 d) \int \frac{x}{x^2 + 4} dx & (x \in \mathbb{R}), \\
 e) \int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 + 4}} dx & (x \in \mathbb{R}), \\
 f) \int x^2 \cdot \sqrt[3]{6x^3 + 4} dx & (x \in \mathbb{R}), \\
 g) \int \frac{5x + 3}{2x - 3} dx & (x > \frac{3}{2}), \\
 h) \int \frac{x}{1 + x^4} dx & (x \in \mathbb{R}), \\
 i) \int x \ln^2 x dx & (x > 0), \\
 j) \int e^x \sin(3x + 1) dx & (x \in \mathbb{R}).
 \end{array}$$

■ Gyakorló feladatok

1. Feladat. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

$$\begin{array}{ll}
 a) \int \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{x} dx & (x > 0), \\
 b) \int \frac{2x^2 - 2}{x} + 3(1 - x^2)^{-1/2} dx & (0 < x < 1), \\
 c) \int \operatorname{tg}^2 x dx & \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right), \\
 d) \int \frac{\cos^2 x - 5}{1 + \cos 2x} dx & , \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right), \\
 e) \int (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 dx & \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right), \\
 f) \int \sin^3 x dx & (x \in \mathbb{R}), \\
 g) \int \sin 3x \cdot \sin 9x dx & (x \in \mathbb{R}), \\
 h) \int \frac{1}{1 + 4x^2} dx & (x \in \mathbb{R}), \\
 i) \int \frac{1}{4 + x^2} dx & (x \in \mathbb{R}), \\
 j) \int \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx & (-2 < x < 2), \\
 k) \int 4^{2x-3} dx & (x \in \mathbb{R}), \\
 l) \int \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} dx & (x > 0), \\
 m) \int \frac{(e^{2x} - 1)^2}{e^{3x}} dx & (x \in \mathbb{R}), \\
 n) \int e^x (1 - e^x)^2 dx & (x \in \mathbb{R}), \\
 o) \int x^2 (4 - 2x^3)^{2021} dx & (x \in \mathbb{R}), \\
 p) \int \frac{8x + 14}{\sqrt[4]{(2x^2 + 7x + 8)^5}} dx & (x \in \mathbb{R}), \\
 q) \int \sin^3 x \cdot \cos^5 x dx & (x \in \mathbb{R}), \\
 r) \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx & (x \in \mathbb{R}), \\
 s) \int \sqrt{\frac{\operatorname{ar sh} x}{1 + x^2}} dx & (x > 0), \\
 t) \int \frac{1}{(\cos^2 x) \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} dx & \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right), \\
 u) \int \frac{x \cdot \sqrt[3]{\ln(1 + x^2)}}{1 + x^2} dx & (x \in \mathbb{R}), \\
 v) \int \frac{1}{(x^2 + 1) \operatorname{arc tg} x} dx & (x \in \mathbb{R}), \\
 w) \int \frac{1}{\sin x} dx & \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right), \\
 x) \int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^4 x} dx & (x > 0), \\
 y) \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}} dx & (-1 < x < 1), \\
 z) \int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx & \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right).
 \end{array}$$

2. Feladat. Parciális integrálással számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

- | | |
|---|--|
| a) $\int x^2 e^x dx \quad (x \in \mathbb{R}),$ | b) $\int x \cdot e^{3x+1} dx \quad (x \in \mathbb{R}),$ |
| c) $\int (x^2 + 1) \sin 3x dx \quad (x \in \mathbb{R}),$ | d) $\int (2x + 1) \cos(3x + \pi) dx \quad (x \in \mathbb{R}),$ |
| e) $\int e^{3x} \sin 2x dx \quad (x \in \mathbb{R}),$ | f) $\int e^{-x} \cos x dx \quad (x \in \mathbb{R}),$ |
| g) $\int \operatorname{ar sh} 2x dx \quad \left(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right),$ | h) $\int x \cdot \operatorname{arc tg} x dx \quad (x \in \mathbb{R}),$ |
| i) $\int x^2 \cdot \ln x dx \quad (x > 0),$ | j) $\int \ln \sqrt{1+x^2} dx \quad (x \in \mathbb{R}),$ |
| k) $\int \cos(\ln x) dx \quad (x > 0),$ | l) $\int x^3 e^{x^2} dx (x \in \mathbb{R}) \quad .$ |

■ További feladatok

1. Feladat. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

- | | |
|--|--|
| a) $\int x \sqrt{2-8x} dx \quad \left(x < \frac{1}{4}\right),$ | b) $\int \frac{x^5}{2x^2+1} dx \quad (x \in \mathbb{R}),$ |
| c) $\int \frac{x^7}{\sqrt{1+x^4}} (x \in \mathbb{R}) dx \quad ,$ | d) $\int \frac{2\sqrt{x}+1}{2x(\sqrt{x}+1)} dx \quad (x > 0).$ |

2. Feladat. Van-e primitív függvénye az alábbi függvénynek? Ha igen adja meg az összeset!

$$f(x) := x \cdot |2x - 1| \quad (x \in \mathbb{R}).$$

3. Feladat. Igazolja a következő rekurziós formulákat!

- $\int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{x^{n-1}\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{n-1}{n} \int \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1-x^2}} dx,$
- $\int \cos^n x dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx,$
- $\int \sin^n x dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx,$
- $\int x^\alpha \ln^n x dx = \frac{x^{\alpha+1} \ln^n x}{\alpha+1} - \frac{n}{\alpha+1} \int x^\alpha \ln^{n-1} x dx \quad (\alpha \neq -1),$
- $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx,$

ahol $n \in \mathbb{N}^+.$

8. gyakorlat

Integrálszámítás 2.

■ Szükséges ismeretek

- Alapintegrálok, a határozatlan integrál linearitása.
- Az első helyettesítési szabály.
- A második helyettesítési szabály.

■ Feladatok

1. **Feladat.** Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

$$\begin{aligned} a) \quad & \int \frac{1}{(x-2)(x-4)} dx \quad (x \in (2, 4)), & b) \quad & \int \frac{3x-5}{x^2+2x+1} dx \quad (x \in (-1, +\infty)), \\ c) \quad & \int \frac{x^3+x^2-x+3}{x^2-1} dx \quad (x \in (-1, 1)), & d) \quad & \int \frac{x+3}{x^2+2x+3} dx \quad (x \in \mathbb{R}), \\ e) \quad & \int \frac{1}{x(x^2+4)} dx \quad (x \in (0, +\infty)). \end{aligned}$$

2. **Feladat.** A $t = \sqrt{e^x - 1}$ helyettesítéssel számítsuk ki a

$$\int \sqrt{e^x - 1} dx \quad (x \in (0, +\infty))$$

határozatlan integrált.

■ Házi feladatok

1. **Feladat.** Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

$$\begin{aligned} a) \quad & \int \frac{x^3+x^2-x+3}{x^2+x-2} dx \quad (x > 1), & b) \quad & \int \frac{x^4-x^2+1}{x^2(x+1)} dx \quad (0 < x < 1), \\ c) \quad & \int \frac{x+1}{x^2+3x+4} dx \quad (x \in \mathbb{R}), & d) \quad & \int \frac{2x^2+x+1}{x^2(x^2+1)} dx \quad (x > 0). \end{aligned}$$

■ Gyakorló feladatok

1. **Feladat.** Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

$$\begin{aligned} a) \quad & \int \frac{3}{2x+1} dx \quad (x < -\tfrac{1}{2}), & b) \quad & \int \frac{5}{(2x-1)^3} dx \quad (x < \tfrac{1}{2}), \\ c) \quad & \int \frac{x}{x^2-4} dx \quad (-2 < x < 2), & d) \quad & \int \frac{3x}{(x^2+1)^4} dx \quad (x \in \mathbb{R}), \\ e) \quad & \int \frac{x+2}{x^2+4x+13} dx \quad (x \in \mathbb{R}), & f) \quad & \int \frac{3x+1}{x^2+4x+13} dx \quad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

2. Feladat. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

- a) $\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx \quad (x > 2),$ b) $\int \frac{x}{x^2 - 3x + 2} dx \quad (1 < x < 2),$
c) $\int \frac{5x + 9}{x^2 + 5x - 6} dx \quad (x > 1),$ d) $\int \frac{2}{x(x + 2)} dx \quad (x > 0),$
e) $\int \frac{4}{x^2(x + 2)} dx \quad (x < -2),$ f) $\int \frac{x^3 + 2}{(x - 1)(x + 2)^2} dx \quad (x > 1),$
g) $\int \frac{x + 2}{(x - 1)^3} dx \quad (x < 1),$ h) $\int \frac{2x^3 + 13x^2 + 26x + 16}{(x + 3)^2} dx \quad (x > -3),$
i) $\int \frac{5x^4 + 2x - 4}{x^3 - 5x^2 - 4} dx \quad (x < 0),$ j) $\int \frac{x(x + 7)}{(x - 1)(x + 1)^2} dx \quad (-1 < x < 1),$
k) $\int \frac{x^2 + 4x - 8}{x^3 + 8} dx \quad (x > -2),$ l) $\int \frac{1}{x^3 + 8} dx \quad (x > -2),$
m) $\int \frac{x^3 - 4}{5x^3 + x} dx \quad (x > 0),$ n) $\int \frac{x - 3}{x^2 - 2x + 4} dx \quad (x \in \mathbb{R}),$
o) $\int \frac{1}{x^4 + 1} dx \quad (x \in \mathbb{R}),$ p) $\int \frac{x + 1}{x^4 + 1} dx \quad (x \in \mathbb{R}),$
q) $\int \frac{x + 1}{x^4 + x^2 + 1} dx \quad (x \in \mathbb{R}),$ r) $\int \frac{x^5}{x^3 - 1} dx \quad (x > 1),$
s) $\int \frac{x^4}{x^4 - 1} dx \quad (x < -1),$ t) $\int \frac{x^3 + x}{(x^2 + 4x - 5)^2} dx \quad (x > 1),$
u) $\int \frac{x^3 + x}{x^2 + 4x + 5} dx \quad (x \in \mathbb{R}),$ v) $\int \frac{x^5}{x^2 + 1} dx \quad (x \in \mathbb{R}),$
w) $\int \frac{2x + 5}{x^3(x^2 + 4)} dx \quad (x > 0),$ x) $\int \frac{4x^2 - 8x}{(x - 1)^2(x^2 + 1)} dx \quad (x > 1),$.

3. Feladat. Számítsa ki az

$$\int \sqrt{1 + x^2} dx \quad (x \in \mathbb{R})$$

határozatlan integrált

- a) az $x = \operatorname{sh} t$ ($t \in \mathbb{R}$) helyettesítéssel,
b) parciális integrálással!

4. Feladat. A megadott helyettesítéssel számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

- a) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx \quad (x > 0),$ $t = \ln x,$
b) $\int \frac{\ln x + 1}{x \ln^2 x + x} dx \quad (x > 0),$ $t = \ln x,$
c) $\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right),$ $t = \sin x,$
d) $\int e^{2x} \sin(e^{2x}) dx \quad (x \in \mathbb{R}),$ $t = e^{2x},$
e) $\int \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx \quad (x > 0),$ $t = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}},$

$$f) \quad \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx \quad (x \in \mathbb{R}), \quad t = \sqrt{e^x + 1}.$$

■ További feladatok

1. Feladat. Számítsa ki a következő integrált!

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ötlet: Alkalmazza a

$$2 \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2) + (1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} + \left(\frac{x}{1+x^2} \right)'$$

átalakítást!

2. Feladat. Igazolja, hogy tetszőleges $n = 1, 2, \dots$ esetén

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} dx = \frac{1}{2n} \frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx.$$

3. Feladat. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

$$\begin{array}{ll} a) \quad \int \frac{1}{(x^2+4)^2} dx \quad (x \in \mathbb{R}), & b) \quad \int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx \quad (x > 0), \\ c) \quad \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx \quad (x \in \mathbb{R}), & d) \quad \int \frac{x^5}{(x^2+x+1)^2} dx \quad (x \in \mathbb{R}), \\ e) \quad \int \frac{x^3+1}{x^2(x^2+9)} dx \quad (x > 0), & f) \quad \int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx \quad (x \in \mathbb{R}). \end{array}$$

4. Feladat. Igazolja, hogy

$$\int |x| dx = \frac{x|x|}{2} + c \quad (x \in \mathbb{R}).$$

9. gyakorlat

Integrálszámítás 3.

■ Szükséges ismeretek

- Racionális törtfüggvények integrálása.
- A második helyettesítési szabály.
- A Newton–Leibniz-formula.
- Síkidomok területének, síkbeli görbék ívhosszának, forgástest térfogatának kiszámítása.
- Improprius integrálok kiszámítása.

■ Feladatok

1. **Feladat.** Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

$$a) \int \frac{e^{3x}}{e^x + 2} dx \quad (x \in \mathbb{R}), \quad b) \int \frac{1}{x^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} dx \quad (x \in (0, +\infty)).$$

2. **Feladat.** Számítsuk ki az

$$\int_{10}^{66} \frac{1}{x - \sqrt[3]{x-2} - 2} dx$$

határozott integrált!

3. **Feladat.** Számoljuk ki az $y = x - 1$ egyenletű egyenes és az $y^2 = 2x + 6$ egyenletű parabola által közrezárt korlátos síkidom területét!

4. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x) := \frac{2(x-1)^{3/2}}{3} \quad (2 \leq x \leq 5)$$

függvény grafikonjának a hosszát!

5. **Feladat.** Számítsuk ki az

$$f(x) := \sin x \quad (x \in [0, \pi])$$

függvény grafikonjának az x -tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát!

6. **Feladat.** Számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat!

$$a) \int_0^{+\infty} x e^{-2x} dx, \quad b) \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} dx.$$

■ Házi feladatok

1. Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

$$a) \int_{\ln 4}^{\ln 8} \frac{e^x}{e^{2x} - 4} dx, \quad b) \int \frac{\sqrt{3x-1}}{x} dx \quad (x > \tfrac{1}{3}), \quad c) \int_0^{+\infty} e^{-4x} dx.$$

2. Feladat. Számítsa ki az $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ és az $y = 2x$ egyenletű görbék által közrezárt korlátos síkidom területét!

3. Feladat. Határozza meg az

$$f(x) := \sqrt{\arctg x} \quad (x \in [0, 1])$$

függvény grafikonjának az x -tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát!

4. Feladat. Számítsa ki az

$$f(x) := x^{3/2} \quad (0 \leq x \leq 4)$$

függvény grafikonjának a hosszát!

■ Gyakorló feladatok

1. Feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat!

$$\begin{array}{ll} a) \int \frac{\sqrt{x}}{x+2} dx \quad (x > 0), & b) \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx \quad (x > -1), \\ c) \int_1^5 x\sqrt{x-1} dx, & d) \int_4^{12} \frac{\sqrt{2x+1}}{x} dx, \\ e) \int \frac{1}{x+\sqrt{x+1}} dx \quad (x > 0), & f) \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{2x-3}{x}} dx \quad (x < 0), \\ g) \int \frac{1}{\sqrt{5x-1}+2x} dx \quad (x > \tfrac{1}{5}), & h) \int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} dx \quad (x > 0), \\ i) \int \frac{1}{1+e^{2x}} dx \quad (x \in \mathbb{R}), & j) \int \frac{1}{2^x+3} dx \quad (x \in \mathbb{R}), \\ k) \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{3x}} dx, & l) \int_0^{\ln 2} \frac{e^x+4}{e^x+2} dx, \\ m) \int \frac{e^{-x}}{1+e^{2x}} dx \quad (x \in \mathbb{R}), & n) \int \frac{e^{4x}}{1+e^x} dx \quad (x \in \mathbb{R}). \end{array}$$

2. Feladat. Számítsa ki az alábbi határozott integrálokat!

$$\begin{array}{ll} a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 3x dx, & b) \int_0^{\pi} e^x \sin x dx, \\ c) \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx, & d) \int_{-2}^{\sqrt{3}-2} \frac{1}{x^2+4x+5} dx, \\ e) \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx, & f) \int_0^1 x\sqrt{x^2+1} dx. \end{array}$$

3. Feladat. Számítsa ki az $x = 1$, $x = 4$, $y = \frac{1}{x}$ és az $y = \frac{1}{1 + \sqrt{x}}$ ($x > 0$) egyenletű görbék által közrezárt korlátos síkidom területét!

4. Feladat. Milyen arányú részekre osztja az $y^2 = 2x$ egyenletű parabola az $x^2 + y^2 = 8$ egyenletű kör által határolt síkrész területét?

5. Feladat. Határozza meg a következő görbék által közrezárt korlátos síkidomok területét!

a) $y = x^2 - 6x + 5$, $y = 2x - 7$,

b) $y = 2 - x^2$, $y = |x|$,

c) $y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 8$,

d) $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$, $y = 3x$,

e) $y^3 = x$, $y = 1$, $x = 8$,

f) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, $x = 4$,

g) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$.

6. Feladat. Határozza meg a következő függvények adott I intervallumon keletkezett görbé-
ívének hosszát!

a) $f(x) = x^2$, $I := [0, 4]$ b) $f(x) = \frac{4\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^3} - 1$, $I := [0, 1]$,

c) $f(x) = \sqrt{x}$, $I := [1, 4]$, d) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$, $I := [1, 3]$,

e) $f(x) = \ln x$, $I := [1, e]$, f) $f(x) = \ln \cos x$, $I := [0, \frac{\pi}{4}]$,

g) $f(x) = \ln(1 - x^2)$, $I := [0, \frac{1}{4}]$, h) $f(x) = \operatorname{ch} x$, $I := [0, \ln 2]$.

7. Feladat. Határozza meg a következő függvények adott I intervallumon x tengely körüli forgatásával keletkezett forgástest térfogatát!

a) $f(x) = x^2 - 2x$, $I := [0, 2]$, b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $I := [1, 8]$,

c) $f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x}}$, $I := [0, 4]$, d) $f(x) = \frac{1}{2 - x}$, $I := [0, 1]$,

e) $f(x) = x\sqrt[4]{x^3 + 1}$, $I := [0, 2]$, f) $f(x) = \sin x$, $I := [0, \frac{\pi}{2}]$,

g) $f(x) = \log_2 x$, $I := [1, 8]$, h) $f(x) = xe^x$, $I := [0, 3]$,

i) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3 + e^x}}$, $I := [0, 1]$, j) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$, $I := [0, \frac{\pi}{8}]$.

8. Feladat. Bizonyítsa be, hogy

$$\int_0^1 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx + \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \, dx = \frac{\pi}{4}.$$

9. Feladat. Számítsa ki az alábbi improprius integrálokat!

$$\begin{array}{ll} a) \int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx, & b) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx, \\ c) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx, & d) \int_{\ln 2}^{+\infty} e^{-3x} dx, \\ e) \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx, & f) \int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-x^2} dx. \end{array}$$

■ További feladatok

1. Feladat. Számítsa ki az

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx \quad (x \in (-1, 1))$$

határozatlan integrált

a) a $t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ helyettesítéssel,

b) az integrandus $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = 1$ -gyel megszorzásával].!

A végeredmény:

a)

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = 2 \arctg \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{1-x^2} + c \quad (x \in (-1, 1)),$$

b)

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + c \quad (x \in (-1, 1)).$$

A *Mathematica* programcsomag a következő eredményt adja:

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = 2 \arcsin \sqrt{\frac{1+x}{2}} - \sqrt{1-x^2} + c \quad (x \in (-1, 1)).$$

Megjegyzés. Határozatlan integrálokra különböző módszerekkel kaphatunk (formai szempontból) különböző képleteket. Az így kapott két függvényhalmaz egyenlő, ha a generáló elemeik különbségének a deriváltja a megadott intervallumon azonosan nulla.

Még két olyan integrandus-típust mutatunk be, amelyeket alkalmas helyettesítésekkel racionális törtfüggvények integrálására vezethetünk vissza.

3. típus: $\int R(\sin x, \cos x) dx$ alakú **integrálok**, ahol $R(u, v)$ két változós racionális törtfüggvény. Ebben az esetben a

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

helyettesítés lesz célravezető. Ekkor

$$\sin x = \sin\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2},$$

$$\cos x = \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Másrészt

$$x = 2 \arctan t = g(t) \quad \implies \quad g'(t) = \frac{2}{1 + t^2} > 0.$$

Példa. Számítsuk ki az

$$\int \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} dx \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$$

határozatlan integrált!

A $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ helyettesítéssel az előző összefüggések alapján, ha $-\frac{\pi}{2} < x < \pi$, akkor

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} dx &= \int \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{1+t^2+2t+1-t^2} dt = \\ &= \int \frac{1}{t+1} dt = \ln(1+t) + c \Big|_{t=\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \ln\left(1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + c \end{aligned}$$

4. típus: $\int R(x, \sqrt{1-x^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{1+x^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2-1}) dx$ alakú integrálok, ahol $R(u, v)$ két változós racionális törtfüggvény. Ezekben az esetekben rendre a

$$\boxed{t = \sin t} \quad \boxed{t = \operatorname{sh} t} \quad \boxed{t = \operatorname{ch} t}$$

helyettesítésekkel érdemes próbálkozni.

2. Feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat!

$$\begin{aligned} a) \quad & \int \frac{1}{\sin x} dx \quad (0 < x < \pi), & b) \quad & \int \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x} dx \quad (0 < x < \pi), \\ c) \quad & \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right), & d) \quad & \int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} dx \quad (-\pi < x < \pi), \\ e) \quad & \int \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx \quad (x > 0), & f) \quad & \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx \quad (x > 0), \\ g) \quad & \int \sqrt{x^2 - x} dx \quad (x > 1), & h) \quad & \int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} dx \quad (-1 < x < 1). \end{aligned}$$

3. Feladat. Határozza meg az

$$f(x) := \sin^2 x \quad (x \in [0, \pi])$$

függvény grafikonjának az x -tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát.

Útmutatás. Használja fel a

$$\sin^4 x = \sin^2 x \cdot (1 - \cos^2 x) = \sin^2 x - \frac{(\sin 2x)^2}{4} \quad (x \in \mathbb{R})$$

azonosságot.

10. gyakorlat

Többszörös analízis 1.

■ Szükséges ismeretek

- Többszörös függvények folytonossága, átviteli elv.
- Többszörös függvények pontbeli határértéke, átviteli elv.
- A parciális deriváltak fogalma.
- Az iránymenti derivált, és kapcsolata a parciális deriváltakkal.

■ Feladatok

1. Feladat. A definíció alapján bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{2x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

függvény folytonos a $(0, 0)$ pontban!

2. Feladat. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

függvény nem folytonos a $(0, 0)$ pontban!

3. Feladat. Legyen

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy f leszűkítése minden, az origón átmenő egyenesre egy folytonos egyváltozós függvény, de $f \notin C\{(0, 0)\}$.

4. Feladat. Lássuk be, hogy

$$a) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0, \quad b) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = 2.$$

5. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy

a) Az

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^4 y}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{ha } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

függvény folytonos a $(0, 0)$ pontban!

b) A

$$g(x, y) := \frac{x^4}{(x^2 + y^2)^2} \quad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \right)$$

függvénynek nincs határértéke a $(0, 0)$ pontban!

6. Feladat. Számítsuk ki az alábbi függvény x és y változók szerinti parciális deriváltjait!

$$f(x, y) := \frac{x^2 - y^3}{xy} \quad (x, y > 0).$$

7. Feladat. Legyen

$$f(x, y) := x^3y + x^2y^2 + x + y^2 \quad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2 \right).$$

Számítsa ki a függvény másodrendű parciális deriváltjait az $(x, y) = (1, 0)$ pontban!

8. Feladat. Legyen

$$f(x, y) := x^2 - xy + y^2 \quad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2 \right),$$

$a = (a_1, a_2) = (1, 1)$ és v az x -tengely pozitív ágával α szöget bezáró euklideszi normában vett egységvektor.

a) Határozzuk meg a definíció alapján a $\partial_v f(a)$ iránymenti deriváltat!

b) Ellenőrizzük a kapott eredményt a tanult tétellel!

9. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x, y) := \frac{y^3}{e^{2x+1}} \quad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2 \right)$$

függvény iránymenti deriváltját a $P\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ pontban a $u = (1, 2)$ vektor által meghatározott irány mentén!

■ Házi feladatok

1. Feladat. Bizonyítsa be, hogy

a) Az

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3y^2}{3x^2 + 2y^2}, & \text{ha } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

függvény folytonos a $(0, 0)$ pontban!

b) A

$$g(x, y) := \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x - y)^2} \quad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \right)$$

függvénynek nincs határértéke a $(0, 0)$ pontban!

2. Feladat. Számolja ki az

$$f(x, y) := xe^{yx} - xy \quad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2 \right)$$

függvény iránymenti deriváltját az $(1, 1)$ pontban a $v = (3, 4)$ vektor által meghatározott irány mentén!

■ Gyakorló feladatok

1. Feladat. A definíció alapján bizonyítsa be, hogy az

$$f(x, y) := \sqrt{|xy|} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvény *folytonos* az $a := (0, 0)$ pontban!

2. Feladat. A definíció alapján igazoljuk, hogy az alábbi $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos az $a = (0, 0)$ pontban!

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^3}{x^2 + 3y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

3. Feladat. Folytonos-e az

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + xy + y^2}, & \text{ha } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

függvény az origóban?

4. Feladat. Mutassa meg, hogy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

5. Feladat. Legyen

$$f(x, y) := \frac{x - y}{x + y} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq -y).$$

Bizonyítsa be, hogy

$$a) \quad \exists \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right), \quad b) \quad \exists \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right), \quad c) \quad \nexists \lim_{(0,0)} f.$$

6. Feladat. Léteznek-e az alábbi határértékek? Ha igen, számolja ki az értéküket!

$$\begin{array}{ll} a) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}, & b) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2}, \\ c) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2}, & d) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{|x| + |y|}. \end{array}$$

7. Feladat. Számítsa ki az alábbi függvények x és y változók szerinti parciális deriváltjait!

$$\begin{array}{ll} a) \quad f(x, y) := y^2 \ln(xy) \quad (x, y > 0), & b) \quad f(x, y) := e^{x^2 y} - 2x^2 y^7 \sin(x + y) \quad (x, y \in \mathbb{R}), \\ c) \quad f(x, y) := e^x \cos y - x \ln y \quad (x, y > 0), & d) \quad f(x, y) := \frac{\sin y}{e^{xy}} \quad (x, y \in \mathbb{R}). \end{array}$$

8. Feladat. Határozza meg az

$$f(x, y) := x^3 e^{y^2} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvény összes első- és másodrendű parciális deriváltját az $(x_0, y_0) := (2, 1)$ pontban!

9. Feladat. Igazolja, hogy az

$$f(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{ha } xy = 0, \\ 1, & \text{ha } xy \neq 0, \end{cases}$$

függvény nem folytonos a $(0, 0)$ pontban, de ott léteznek a parciális deriváltjai!

10. Feladat. Határozza meg az

$$f(x, y) := 5x + 3y + x^2y^3 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

v irány szerinti deriváltját a megadott a pontban!

a) $v = (1, 0)$ és $a = (3, 2)$.

b) $v = (4, 3)$ és $a = (1, 2)$.

c) v az x tengellyel 60-fokos szöget bezáró egységvektor.

■ További feladatok

1. Feladat. Határozza meg és szemléltesse az $f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek a koordinátasíkokkal párhuzamos síkmetszeteit és szintvonalait. Milyen felülettel szemléltethető a függvény a térbeli koordináta-rendszerben?

a) $f(x, y) := \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1),$

b) $f(x, y) := e^{-(x^2+y^2)} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$

2. Feladat. Az $f(x, y) := x^2 + y^2 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ függvény grafikonja egy forgásparaboloid. Milyen felülettel szemléltethető a

$$g(x, y) := x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvény a térbeli koordináta-rendszerben?

3. Feladat. Vizsgálja meg folytonosság szempontjából az alábbi függvényeket!

a) $f(x, y) := \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

b) $f(x, y) := \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

c) $f(x, y) := \begin{cases} (1 + x^2y^2)^{\frac{-1}{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

d) $f(x, y) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{y}, & \text{ha } y \neq 0, \\ 0, & \text{ha } y = 0. \end{cases}$

4. Feladat. Léteznek-e az alábbi határértékek? Ha igen, számolja ki az értéküket!

$$a) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y \sin^2(2x)}{x^2 + 3y^2},$$

$$b) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2},$$

$$c) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2), \quad d) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \begin{cases} x + y, & \text{ha } x + y \text{ racionális,} \\ x^2 + y^2, & \text{ha } x + y \text{ irracionális.} \end{cases}$$

5. Feladat. Melyik $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt határozzák meg (együtt) az alábbi egyenlőségek?

$$\partial_x f(x, y) = x^2 y, \quad \partial_y f(x, y) = 1 + \frac{x^3}{3} \quad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2 \right).$$

11. gyakorlat

Többsváltozós analízis 2.

■ Szükséges ismeretek

- A totális derivált fogalma és kapcsolata a parciális deriváltakkal.
- Az érintősík egyenlete.
- Valós értékű függvények (feltétel nélküli) szélsőértékeinek fogalma.
- $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvények lokális szélsőértékeire vonatkozó elsőrendű szükséges, és másodrendű elégséges feltétel.

■ Feladatok

1. Feladat. A definíció alapján bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x, y) := 2x^2 + 3xy - y^2 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvény totálisan deriválható az $a := (1, 2)$ pontban, és adjuk meg az $f'(a)$ deriváltmátrixot! Az $f'(a)$ -ra így kapott eredményt ellenőrizzük a Jacobi-mátrix kiszámításával!

2. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x, y) := \sqrt{|xy|} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvény folytonos a $(0, 0)$ pontban, ott léteznek a parciális deriváltak, de f nem differenciálható a $(0, 0)$ pontban!

3. Feladat. Legyen

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy az f függvény a $(0, 0)$ pontban

- a) folytonos,
- b) minden irány mentén deriválható,
- c) totálisan nem deriválható!

4. Feladat. Legyen

$$f(x, y) := \sqrt{x^2 - 2y^2} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 > 2y^2).$$

- a) Számítsa ki az f függvény elsőrendű parciális deriváltjait!
- b) Írja fel a $z = \sqrt{x^2 - 2y^2}$ egyenletű felület $P_0(3, 2)$ pontjához tartozó érintősíkjának az egyenletét, és adja meg a sík egy normálvektorát.

5. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x, y) := x^3 - 3x^2 + 2xy + y^2 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit!

6. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x, y) := x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit!

7. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x, y) := x^3 y^5 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit!

■ Házi feladatok

1. Feladat. A definíció alapján bizonyítsa be, hogy az

$$f(x, y) := x^3 + xy \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvény totálisan deriválható az $a := (2, 3)$ pontban, és adjuk meg az $f'(a)$ deriváltmátrixot! Az $f'(a)$ -ra így kapott eredményt ellenőrizzük a Jacobi-mátrix kiszámításával!

2. Feladat. Írja fel a $z = x^2 e^{xy}$ egyenletű felület $P_0(1, 0)$ pontjához tartozó érintősíkjának az egyenletét, és adja meg a sík egy normálvektorát!

3. Feladat. Határozza meg az

$$f(x, y) := 2x^3 - 6x + y^3 - 12y + 5 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit!

■ Gyakorló feladatok

1. Feladat. Vizsgálja meg a definíció szerint az alábbi függvények differenciálhatóságát a megadott pontokban!

$$a) \quad f(x, y) := x^2 + xy \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2), \quad a = (2, 1),$$

$$b) \quad f(x, y) := (x + y)^3 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2), \quad a = (1, 2),$$

$$c) \quad f(x, y) := \sqrt[3]{x^3 + y^3} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2), \quad a = (0, 0),$$

$$d) \quad f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0), \end{cases} \quad a = (0, 0).$$

2. Feladat. Írja fel a $z = xy + x + y$ egyenletű felület $P_0(1, -1)$ pontjához tartozó érintősíkjának az egyenletét, és adja meg a sík egy normálvektorát!

3. Feladat. Legyen

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{ha } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Mutassa meg, hogy $f \in C\{(0,0)\}$!
- b) Határozza meg a $\partial_1 f$ és $\partial_2 f$ függvényeket \mathbb{R}^2 minden pontjában!
- c) Bizonyítsa be, hogy $f \notin D\{(0,0)\}$!

4. Feladat. Határozza meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit!

- a) $f(x, y) := x^2 + xy + y^2 - 5x - 4y + 1 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$
- b) $f(x, y) := x^3 + y^3 - 9xy \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$
- c) $f(x, y) := x^4 y^2 (4 - x - y) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$
- d) $f(x, y) := x^3 y^2 (4 - x - y) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$
- e) $f(x, y) := e^{-x^2 - y^2} (x^2 + 2y^2) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$
- f) $f(x, y) := (1 + e^y) \cos x - ye^y \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$

5. Feladat. Mutassa meg, hogy ha

$$f(x, y) := x^4 + y^2 \quad \text{és} \quad g(x, y) := x^3 + y^2 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$$

akkor

- a) f -nek az origóban lokális (és abszolút) minimuma van, g -nek ugyanott nincs lokális szélsőértéke,
- b) mindegyik függvény origóban vett Hesse-mátrixának a determinánsa nullával egyenlő!

■ További feladatok

1. Feladat. Legyen

$$f(x, y) := \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Igazolja, hogy a $\partial_1 \partial_2 f(0, 0)$ és a $\partial_2 \partial_1 f(0, 0)$ parciális deriváltak léteznek, de ezek nem egyenlők:

$$\partial_1 \partial_2 f(0, 0) \neq \partial_2 \partial_1 f(0, 0).$$

Mutassa meg azt is, hogy f nem differenciálható kétszer a $(0, 0)$ pontban!

Megoldás. Először az elsőrendű parciális deriváltfüggvényeket határozzuk meg.

A $(0, 0)$ pontban az x változó szerinti parciális derivált a definíció alapján:

$$\underbrace{\partial_1 f(0, 0)} = \partial_x f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = \underbrace{0},$$

az y változó szerinti parciális derivált pedig

$$\underbrace{\partial_2 f(0, 0)} = \partial_y f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = \underbrace{0}.$$

Ha $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (vagyis $x^2 + y^2 \neq 0$), akkor

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x, y) &= \partial_x f(x, y) = y \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \cdot \frac{2x \cdot (x^2 + y^2) - (x^2 - y^2) \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= y \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{és} \\ \partial_2 f(x, y) &= \partial_y f(x, y) = x \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \cdot \frac{-2y \cdot (x^2 + y^2) - (x^2 - y^2) \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= x \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2}.\end{aligned}$$

A másodrendű parciális deriváltakat az origóban a parciális derivált definíciója alapján számítjuk ki:

$$\begin{aligned}\underbrace{\partial_{12} f(0, 0)} &= \partial_2(\partial_1 f)(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial_1 f(0, t) - \partial_1 f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t - 0}{t} = \underbrace{-1}, \\ \underbrace{\partial_{21} f(0, 0)} &= \partial_1(\partial_2 f)(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial_2 f(t, 0) - \partial_2 f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - 0}{t} = \underbrace{1}.\end{aligned}$$

A $\partial_{12} f(0, 0) = \partial_{21} f(0, 0)$ egyenlőség tehát valóban nem teljesül. (A parciális deriváltak sorrendjének a képzése nem cserélhető fel.)

Az f függvény nem deriválható kétszer az origóban. Valóban, ha ez igaz lenne, akkor Young tétele szerint a különböző sorrendben vett másodrendű deriváltak megegyeznének, és ez a fentiek alapján *nem igaz*.

2. Feladat. Legyen

$$\begin{aligned}A &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - 1)^2 < 1 \text{ vagy } x^2 + (y + 1)^2 < 1\}, \\ B &:= \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Bizonyítsa be, hogy a

$$\chi_{A \cup B}(x, y) := \begin{cases} 1, & \text{ha } (x, y) \in A \cup B \\ 0, & \text{ha } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (A \cup B) \end{cases}$$

függvény (az $A \cup B$ halmaz *karakterisztikus függvénye*) minden irányban deriválható a $(0, 0)$ pontban, de nem deriválható (totálisan) a $(0, 0)$ pontban!

3. Feladat. Mutassa meg, hogy ha $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F \in D$ és

$$f(x, y) := y \cdot F(x^2 - y^2) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$$

akkor

$$y^2 \cdot \partial_x f(x, y) + xy \cdot \partial_y f(x, y) = x \cdot f(x, y) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

12. gyakorlat

Többszörös analízis 3.

■ Szükséges ismeretek

- Többszörös valós értékű függvényekre vonatkozó Weierstrass-tétel.
- Abszolút szélsőérték kiszámításainak módja.
- A feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó szükséges és elegendő feltétel (Lagrange-szorók módszere).

■ Feladatok

1. **Feladat.** Határozza meg az

$$f(x, y) := x^3 - 12x + y^3 - 3y \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvénynek abszolút szélsőérték helyeit és abszolút szélsőértékeit az alábbi halmazon:

$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 3, \quad -x \leq y \leq 2\}.$$

2. **Feladat.** Határozza meg az $f(x, y) := x^2 + y^2$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$) függvény feltételes lokális minimum helyeit a $g(x, y) = x + 2y - 4 = 0$ feltételre vonatkozóan!

- a) Mi a feladat geometriai tartalma?
- b) Oldja meg a feladatot úgy, hogy a korlátozó feltételből y kifejezésével visszavezeti egyváltozós szélsőérték-problémára!
- c) Oldja meg a feladatot a Lagrange-szorók módszerével!

3. **Feladat.** Legyen

$$f(x, y) := xy \quad \text{és} \quad g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

- a) Elemi úton keresse meg az f függvény feltételes abszolút szélsőérték helyeit a $g = 0$ feltétel mellett!
- b) A Lagrange-szorók módszerével keresse meg az f függvény feltételes lokális szélsőérték helyeit a $g = 0$ feltétel mellett!

4. **Feladat.** Legyen

$$f(x, y) := 2x + 3y \quad \text{és} \quad g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Határozza meg az f függvény feltételes lokális szélsőérték helyeit a $g = 0$ feltétel mellett!

■ Házi feladatok

1. Feladat. Határozza meg az

$$f(x, y) := x^3 + y^3 - 9xy \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvénynek abszolút szélsőértékhelyeit és abszolút szélsőértékeit az alábbi halmazon:

$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 5, \ 0 \leq y \leq 2x\}.$$

2. Feladat. Legyen

$$f(x, y) := xy \quad \text{és} \quad g(x, y) := x + y - 1 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Határozza meg az f függvény feltételes lokális szélsőértékhelyeit a $g = 0$ feltétel mellett!

■ Gyakorló feladatok

1. Feladat. Határozza meg az

$$f(x, y) := x^3 - 3x^2 - y^2 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvénynek abszolút szélsőértékhelyeit és abszolút szélsőértékeit az alábbi halmazon:

$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq -1, \ x - 1 \leq y \leq 4\}.$$

2. Feladat. Határozza meg az alábbi f függvény feltételes lokális szélsőértékeit a $g = 0$ feltételre vonatkozóan!

a) $f(x, y) := xy, \quad g(x, y) := x + y - 1 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$

b) $f(x, y) := 3xy, \quad g(x, y) := x^2 + y^2 - 8 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$

c) $f(x, y) := x + y, \quad g(x, y) := x^2 + y - 1 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$

d) $f(x, y) := x + y, \quad g(x, y) := x^2 + 3xy + 3y^2 - 3 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$

e) $f(x, y) := x^2 + y^2, \quad g(x, y) := x^2 + xy + y^2 - 3 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$

f) $f(x, y) := 2x + 3y, \quad g(x, y) := x^2 - y^3 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$

g) $f(x, y) := x^3 + y^3, \quad g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$

h) $f(x, y) := x^2 + 12xy + 2y^2, \quad g(x, y) := 4x^2 + y^2 - 25 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$

■ További feladatok

1. Feladat. Adott kerületű téglalapokat megforgatunk az egyik oldaluk körül. Mikor lesz a keletkező henger térfogata a legnagyobb?

2. Feladat. Határozzuk meg az $x^2 y^2 z = 1$ felület azon pontjait, amelyek legközelebb vannak az origóhoz!

3. Feladat. Alkalmazhatók-e a feltételes szélsőértékkel kapcsolatban tanult tételek az f függvény $g = 0$ feltételre vonatkozó (esetleg létező) feltételes lokális szélsőértékeinek a meghatározására, ha

$$a) \quad f(x, y) := x, \quad g(x, y) := x^3 - y^2 \quad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2 \right),$$

$$b) \quad f(x, y) := x^3, \quad g(x, y) := y - x^2 \quad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2 \right),$$

$$c) \quad f(x, y) := y, \quad g(x, y) := x^3 - y^2 \quad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2 \right),$$

$$d) \quad f(x, y) := x + y, \quad g(x, y) := x^3 - y^2 \quad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2 \right).$$

(Ha a tételek nem alkalmazhatók, akkor a definíció alapján okoskodjon!)