Diszkrét modellek alkalmazásai

5. gyakorlat

Boda Bálint

2022. őszi félév

1. Diofantoszi egyenlet

Diofantoszi egyenletnek nevezzük az olyan többismeretlenes algebrai egyenleteket, melyek megoldása és együtthatói egész számok. A legegyszerűbb kétváltozós elsőfokú diofantikus egyenlet: $ax + by = c$. Ennek ez egyenletnek pontosan akkor van megoldása ha $\text{lnko}(a, b) \mid c$.

1. Oldja meg a következő egyenleteket!

a) $15x + 33y = 40$

b) $3x + 10y = 9$

c) $12x + 10y = 62$

Megoldás.

a) $15x + 33y = 40 \qquad \text{lnko}\,(15, 33) = 3$

$$33 = 2 \cdot 15 + \mathbf{3}$$
$$15 = 5 \cdot 3 + 0$$

$3 \nmid 40 \implies$ az egyenlet nem megoldható

b) $\text{lnko}\,(3,10)=1$

$$\begin{aligned} 10 &= 3\cdot 3+\mathbf{1} \implies 1=\mathbf{1}\cdot 10 - \mathbf{3}\cdot 3 \\ 3 &= 3\cdot 1+0 \qquad a=-3,\ b=1,\ c=3,\ d=10 \end{aligned}$$

$1 \mid 9 \implies$ az egyenlet megoldható

$$\begin{aligned} 3x+10y &= 9 \\ 3a+10b &= \text{lnko}\,(3,10)=1 \\ 3\cdot -3+10\cdot 1 &= 1 \quad \backslash\cdot 9 \\ 3\cdot -27+10\cdot 9 &= 9 \implies x_0=-27,\ y_0=9 \end{aligned}$$

$$x = x_0+\frac{d}{\text{lnko}\,(c,d)}\cdot t = -27+\frac{10}{1}\cdot t = -27+10t \qquad (t\in\mathbb{Z})$$

$$y = y_0-\frac{c}{\text{lnko}\,(c,d)}\cdot t = 9-\frac{3}{1}\cdot t = 9-3t \qquad (t\in\mathbb{Z})$$

c) $12x+10y=62 \iff 6x+5y=31 \quad \text{lnko}\,(6,5)=1$

$$\begin{aligned} 6 &= 1\cdot 5+\mathbf{1} \implies 1=\mathbf{1}\cdot 6-\mathbf{1}\cdot 5 \\ 1 &= 1\cdot 1+0 \qquad a=1,\ b=-1,\ c=6,\ d=5 \end{aligned}$$

$1 \mid 31 \implies$ az egyenlet megoldható

$$\begin{aligned} 6x+5y &= 31 \\ 6a+5b &= \text{lnko}\,(6,5)=1 \\ 6\cdot -1+5\cdot 1 &= 1 \quad \backslash\cdot 31 \\ 6\cdot 31+5\cdot -31 &= 31 \implies x_0=31,\ y_0=-31 \end{aligned}$$

$$x = x_0+\frac{d}{\text{lnko}\,(c,d)}\cdot t = 31+5t \quad (t\in\mathbb{Z})$$

$$y = y_0-\frac{c}{\text{lnko}\,(c,d)}\cdot t = -31-6t \quad (t\in\mathbb{Z})$$

2. Bontsuk fel 812-t két egész szám összegére úgy hogy az egyik szám osztható legyen 12-vel, a másik pedig 32-vel.

Megoldás.
$12x + 32y = 812 \iff 3x + 8y = 203$

$$\begin{aligned} \text{lnko}\,(3,8) \quad & 8 = 2 \cdot 3 + 2 \implies 2 = 1 \cdot 8 - 2 \cdot 3 \\ & 3 = 1 \cdot 2 + \mathbf{1} \implies 1 = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \implies 1 = 3 \cdot 3 - 1 \cdot 8 \\ & 2 = 2 * 1 + 0 \end{aligned}$$

$a = 3,\ b = -1,\ c = 3,\ d = 8$

$$\begin{aligned} 3x + 8y &= 203 \\ 3a + 8b &= \text{lnko}(3,8) = 1 \\ 3 \cdot 3 + 8 \cdot (-1) &= 1 \quad \backslash \cdot 203 \\ 3 \cdot 609 - 8 \cdot 203 &= 203 \end{aligned}$$

$x_0 = 609,\ y_0 = -203$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{d}{\text{lnko}\,(c,d)} \cdot t = 609 + 8t \quad (t \in \mathbb{Z}) \\ y &= y_0 - \frac{c}{\text{lnko}\,(c,d)} \cdot t = -203 - 3t \quad (t \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

2. Kongruencia rendszer

3. Oldja meg a következő kongruencia rendszereket!

a) $x \equiv 1 \pmod 4,\ x \equiv 3 \pmod 4$

b) $x \equiv 10 \pmod 3,\ x \equiv 4 \pmod 7$

c) $x \equiv -2 \pmod 4,\ x \equiv 1 \pmod 3,\ x \equiv 3 \pmod 7$

d) $9x \equiv 3 \pmod 6,\ 5x \equiv -1 \pmod 3,\ -x \equiv 4 \pmod 5$

e) $x \equiv -10 \pmod 3,\ x \equiv 6 \pmod 5,\ x \equiv 3 \pmod 8$

f) $2x \equiv 6 \pmod 8,\ -x \equiv 2 \pmod 7,\ x \equiv -10 \pmod{11}$

Megoldás.

a) $x \equiv 1 \pmod 4,\ x \equiv 3 \pmod 4$

$$\begin{aligned} x \equiv 1 &\pmod 4 \implies x = 1 + 4t\ (t \in \mathbb{Z}) \\ 1 + 4t \equiv 3 &\pmod 4 \iff 4t \equiv 2 \pmod 4 \end{aligned}$$

$$\text{lnko}(4,4) = 4,\ 4 \nmid 2, \text{nincs megoldás}$$

b) $x \equiv 10 \pmod 3,\ x \equiv 4 \pmod 7$

$$\begin{aligned} x \equiv 10 &\pmod 3 \iff x \equiv 1 \pmod 3 \implies x = 1 + 3t\ (t \in \mathbb{Z}) \\ 1 + 3t \equiv 4 &\pmod 7 \iff 3t \equiv 3 \pmod 7 \iff t \equiv 1 \pmod 7 \\ &\implies t = 1 + 7z (z \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

$$x = 1 + 3(1 + 7z) = 4 + 21z$$

c) $x \equiv -2 \pmod 4,\ x \equiv 1 \pmod 3,\ x \equiv 3 \pmod 7$

$$\begin{aligned} x \equiv -2 &\pmod 4 \iff x \equiv 2 \pmod 4 \implies x = 2 + 4t\ (t \in \mathbb{Z}) \\ 2 + 4t \equiv 1 &\pmod 3 \iff 2 + 4t \equiv 10 \pmod 3 \iff 4t \equiv 8 \pmod 3 \\ &\iff t \equiv 2 \pmod 3 \implies t = 2 + 3z\ (z \in \mathbb{Z}) \\ &\implies x = 2 + 8 + 12z = 10 + 12z \\ 10 + 12z \equiv 3 &\pmod 7 \iff 12z \equiv -7 \pmod 7 \iff 12z \equiv 0 \pmod 7 \\ &\iff z \equiv 0 \pmod 7 \implies z = 7w\ (w \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

$$x = 10 + 12z = 10 + 84w$$

d) $9x \equiv 3 \pmod 6,\ 5x \equiv -1 \pmod 3,\ -x \equiv 4 \pmod 5$

$$\begin{aligned}
9x \equiv 3 \pmod 6 &\iff 9x \equiv 9 \pmod 6 \iff x \equiv 1 \pmod 2\\
&\implies x = 1 + 2t \ (t \in \mathbb{Z})\\
5 + 10t \equiv -1 \pmod 3 &\iff 10t \equiv -6 \pmod 3 \iff 10t \equiv 0 \pmod 3\\
&\implies t = 3z \ (z \in \mathbb{Z})\\
&\implies x = 1 + 6z\\
-1 - 6z \equiv 4 \pmod 5 &\iff -6z \equiv 5 \pmod 5 \iff z \equiv 0 \pmod 5\\
&\implies z = 5w \ (w \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

$$x = 1 + 6z = 1 + 30w$$

e) $x \equiv -10 \pmod 3,\ x \equiv 6 \pmod 5,\ x \equiv 3 \pmod 8$

$$\begin{aligned}
x \equiv -10 \pmod 3 &\iff x \equiv 2 \pmod 3 \implies x = 2 + 3t \ (t \in \mathbb{Z})\\
2 + 3t \equiv 6 \pmod 5 &\iff 3t \equiv 4 \pmod 5 \iff t \equiv 3 \pmod 5\\
&\implies t = 3 + 5z \ (z \in \mathbb{Z})\\
&\implies x = 2 + 3(3 + 5z) = 11 + 15z\\
11 + 15z \equiv 3 \pmod 8 &\iff 15z \equiv -8 \pmod 8 \iff 15z \equiv 0 \pmod 8\\
&\iff z \equiv 0 \pmod 8 \implies z = 8w \ (w \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

$$x = 11 + 15z = 11 + 120w$$

f) $2x \equiv 6 \pmod 8,\ -x \equiv 2 \pmod 7,\ x \equiv -10 \pmod{11}$

$$\begin{aligned}
2x \equiv 6 \pmod 8 &\iff x \equiv 3 \pmod 4 \implies x = 3 + 4t \ (t \in \mathbb{Z})\\
-3 - 4t \equiv 2 \pmod 7 &\iff 4t \equiv -5 \pmod 7 \iff 4t \equiv 16 \pmod 7\\
&\iff t \equiv 4 \pmod 7 \implies t = 4 + 7z \ (z \in \mathbb{Z})\\
&\implies x = 3 + 4(4 + 7z) = 19 + 28z\\
19 + 28z \equiv -10 \pmod{11} &\iff 28z \equiv -29 \pmod{11}\\
&\iff 28z \equiv 224 \pmod{11}\\
&\iff z \equiv 8 \pmod{11} \implies z = 8 + 11w \ (w \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

$$x = 19 + 28z = 19 + 28(8 + 11w) = 243 + 308w$$