Programtervező informatikus szak I. évfolyam
Matematikai alapok 1. zárthelyi
2020. október 16.

Minden feladathoz indoklást, levezetést kérünk.

1. *(7 pont)* Hozzuk a legegyszerűbb alakra az alábbi algebrai kifejezést az $a, b \in \mathbb{R}$ változók olyan értékei mellett, melyekre a megadott törtek értelmesek:
$$\left(\frac{a^2b - ab^2}{a^2 - b^2} + \frac{a^3 + a^2b}{a^2 + 2ab + b^2} - \frac{a^2 - ab}{a + b}\right) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

2. *(9 pont)* Milyen valós p paraméterek esetén teljesül az alábbi egyenlőtlenség minden valós x számra?
$$(p^2 - 3p)x^2 - 2(p - 3)x + 2 \geq 0$$

3. *(4+8= 12 pont)*

   a) Igazoljuk, hogy $x_0 = 1$ gyöke az alábbi polinomnak, és emeljük ki a hozzá tartozó gyöktényezőt:
$$P(x) := x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \;\; (x \in \mathbb{R})$$

   b) Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:
$$\log_3(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) - 2 \cdot \log_9(x - 1) > \log_3(10 - x)$$

4. *(7 pont)* Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán
$$\sin x - \cos x + 2 \cdot \mathrm{tg}\; x = 2$$

5. *(7+1= 8 pont)*

   a) Egy megfelelő $N \in \mathbb{N}$ szám meghatározásával igazoljuk az alábbi állítást:
$$\exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\, n > N: \quad \frac{n^4 - 4n^3 - 7n^2 - 5n - 4}{n^3 + 5n^2 + 2n + 3} > 100$$

   b) Írjuk fel "pozitív" kijelentés formájában az állítás tagadását.

6. *(7 pont)* Igazoljuk teljes indukcióval:
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^+: \qquad \sum_{k=1}^{n} k \cdot (3k - 1) < (n + 1)^3$$