Programozáselmélet

10. gyakorlat

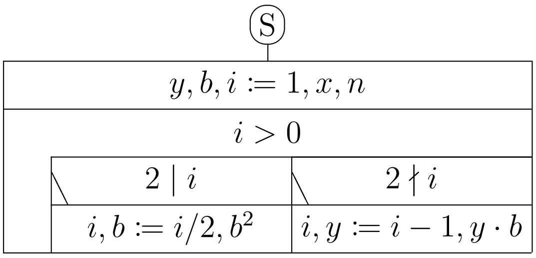
Boda Bálint

2022. őszi félév

1. (9. feladatsor) Lássa be, hogy az S program megoldja a következő feladatot:

$$\begin{aligned}
&A = (x : \mathbb{N}, n : \mathbb{N}, y : \mathbb{N})\\
&B = (x' : \mathbb{N}, n' : \mathbb{N})\\
&Q = (x = x' \wedge n = n' \wedge x > 0)\\
&R = (Q \wedge y = x^n)
\end{aligned}$$

Az program állapottere $(x : \mathbb{N}, n : \mathbb{N}, y : \mathbb{N}, b : \mathbb{N}, i : \mathbb{N})$.



$Q' = (Q \wedge y = 1 \wedge b = x \wedge i = n)$ a szekvencia közbülső állítása

Legyen továbbá $t = i$ a termináló függvény és $P = (Q \wedge y \cdot b^i = x^n)$ a ciklusinvariáns.

Megoldás.

A szekvencia levezetési szabálya alapján, azt kell belátni, hogy:

1. $Q \implies \mathrm{lf}(y, b, i := 1, x, n; Q') \iff Q \implies (Q')^{y,b,i \leftarrow 1,x,n}$

$$Q \implies (Q \wedge 1 = 1 \wedge x = x \wedge n = n)\checkmark$$

2. $Q' \implies \mathrm{lf}(DO, R)$, ahol DO jelöli a struktogramban szereplő ciklust.
   A ciklus levezetési szabálya alapján:

   (a) $Q' \implies P$

$$(Q \wedge y = 1 \wedge b = x \wedge i = n) \implies (Q \wedge y \cdot b^i = x^n)$$
$$(Q \wedge y = 1 \wedge b = x \wedge i = n) \implies (Q \wedge 1 \cdot x^n = x^n)\checkmark$$

   (b) $P \wedge \neg\pi \implies R$

$$\big((Q \wedge y \cdot b^i = x^n) \wedge \underbrace{i \le 0}_{i \in \mathbb{N}}\big) \implies (Q \wedge y = x^n)$$
$$\big((Q \wedge y \cdot b^i = x^n) \wedge i = 0\big) \implies (Q \wedge y = x^n)$$
$$(Q \wedge y \cdot 1 = x^n) \implies (Q \wedge y = x^n)\checkmark$$

   (c) $P \implies (\pi \vee \neg\pi)$

$$(Q \wedge y \cdot b^i = x^n) \implies (i > 0 \vee i \le 0)$$
$$(Q \wedge y \cdot b^i = x^n) \implies (i \ge 0)$$

   Mivel $i \in \mathbb{N}$, az $i \ge 0$ állítás mindig igaz, ezért a maga után vonás is teljesül.

   (d) $(P \wedge \pi) \implies t > 0$

$$\big((Q \wedge y \cdot b^i = x^n) \wedge \underline{i > 0}\big) \implies \underbrace{t > 0}_{t=i}\checkmark$$

(e) $(P \wedge \pi \wedge t = t_0) \implies \mathrm{lf}(S_0; P \wedge t < t_0)$, ahol az S_0 elágazás a DO ciklus ciklusmagja. Jelölje Q'' a $(P \wedge \pi \wedge t = t_0)$ feltételt. Az elágazás levezetési szabálya alapján:

i. $\left(Q'' \implies \bigvee_{i=1}^{2} \pi_i\right) \iff \big(Q'' \implies (2 \mid i \vee 2 \nmid i)\big)$ Ez nyilván teljesül. ✓

ii. $\left(Q'' \implies \bigwedge_{i=1}^{2} (\pi_i \vee \neg\pi_i)\right) \iff \left(Q'' \implies \big(\underbrace{(2 \mid i \vee 2 \nmid i) \wedge (2 \nmid i \vee 2 \mid i)}_{\text{az és két oldala ugyan az}}\big)\right)$

Ez valójában ugyan az mint az (i.) állítás, így ez is teljesül. ✓

iii. $\forall i \in [1..2] : (Q'' \wedge \pi_i) \implies \mathrm{lf}(S_i, P \wedge t < t_0)$

A. $Q'' \implies \mathrm{lf}(i, b \coloneqq i/2, b^2; P \wedge t < t_0)$

$$(P \wedge 2 \mid i \wedge t = t_0) \implies (P \wedge t < t_0)^{(i \leftarrow i/2, b \leftarrow b^2)}$$

A π feltétel miatt elvégezhető az $i/2$ osztás.

$$(P \wedge 2 \mid i \wedge t = t_0) \implies (Q \wedge y \cdot (b^{i/2})^2 = x^n \wedge \frac{i}{2} < t_0)$$
$$(P \wedge 2 \mid i \wedge t = t_0) \implies (\underbrace{Q \wedge y \cdot b^i = x^n}_{P} \wedge \frac{i}{2} < t_0)$$

A termináló függvény értékének csökkenésére vonatozó feltétel pedig nyilván teljesül. Így:

$$(P \wedge 2 \mid i) \implies P$$

Ami nyilván teljesül, mivel $\lceil(P \wedge 2 \mid i)\rceil \subseteq \lceil P \rceil$. ✓

B. $Q'' \implies \mathrm{lf}(i, y \coloneqq i - 1, y \cdot b; P \wedge t < t_0)$

$$(P \wedge 2 \nmid i \wedge t = t_0) \implies (P \wedge t < t_0)^{(i \leftarrow i-1, b \leftarrow y \cdot b)}$$
$$(P \wedge 2 \nmid i \wedge t = t_0) \implies (Q \wedge y \cdot (yb)^{i-1} = x^n \wedge i - 1 < t_0)$$
$$\big((Q \wedge y \cdot b^i = x^n) \wedge 2 \nmid i \wedge t = t_0\big) \implies (Q \wedge y^i \cdot b^{i-1} = x^n \wedge i - 1 < t_0)$$

Q miatt tudjuk, hogy a program futása során x és n, ezáltal x^n értéke nem változik meg, így fennáll az $y \cdot b^i = y^i \cdot b^{i-1}$ egyenlőség. Emellett nyilván teljesül a termináló függvény értékének csökkenésére vonatozó feltétel, így a $2 \nmid i$ tag kivételével a két oldal megegyezik. Így az (A) állításhoz hasonlóan teljesül a következik reláció. ✓

Ezzel beláttuk, hogy S megoldja a specifikált feladatot.