11.	Differenciálszámítás II.	HF

1. Érintőegyenes = ? $x = 0,5$

$$f(x) := \cos\frac{x-1}{x^2+1}$$

$$y = f'(x)\cdot(x-0,5) + f(0,5)$$

$$f'(x) = \left(-\sin\frac{x-1}{x^2+1}\right)\cdot\frac{x^2+1-(x-1)2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \left(-\sin\frac{x-1}{x^2+1}\right)\cdot\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2} = (-1)\left(\sin\frac{x-1}{x^2+1}\right)\cdot\frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\sin\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{4}+1}\right)\cdot\frac{\frac{1}{4}-1-1}{\left(\frac{1}{4}+1\right)^2} = \sin\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\right)^2\cdot\left(-\frac{7}{4}\cdot\frac{16}{25}\right)$$

$$= \sin\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{28}{25}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\cos-\frac{4}{10}\right)$$

$$y = \sin\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(\frac{-28}{25}\right)\cdot(x-0,5) + \cos\left(-\frac{4}{10}\right)$$

2. Igazolja, hogy az alábbi függvény invertálható és inverze differenciálható a $(-\pi, \pi)$ intervallumon! $(f^{-1})'\left(1+\frac{\pi}{2}\right) = ?$

$$f(x) := x + \sin x \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) := 1 + \cos x \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \Rightarrow f \uparrow \Rightarrow f \text{ invertálható}$$

$$f(a) = x + \sin x = 1 + \frac{\pi}{2} - b \Rightarrow a = \frac{\pi}{2}$$

$$(f^{-1})'\left(1+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 1$$

3. $\exists a, b \in \mathbb{R}$, hogy f deriválható?

$$f(x) := \begin{cases} ax^2 - ax + b\cos(x+1) & x < -1 \\ \dfrac{2a}{x^2+1} + e^{bx+b} & x \geq -1 \end{cases}$$

Az $x = -1$ pontot vizsgáljuk

Legyen $h(x) = ax^2 - ax + b\cos(x+1)$

$g(x) = \dfrac{2a}{x^2+1} + e^{bx+b}$

I. $h(-1) = a + a + b = a + 1 = g(-1)$ $\quad \boxed{a = 1 - b}$

Legyen $h'(x) = 2ax - a - b\sin(x+1) \cdot 1$

$g'(x) = \dfrac{-4ax}{(x^2+1)^2} + e^{bx+b} \cdot b$

II. $h'(-1) = -3a = a + b = g'(-1)$ $\quad \boxed{4a + b = 0}$

$\left.\begin{array}{l} a = 1 - b \\ 4a + b = 0 \end{array}\right\}$ $\quad 4 - 4b + b = 0$

$\frac{4}{3} = b \quad a = -\frac{1}{3}$

M: $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

4. Igazolja, hogy az $f(x) := x^7 + 14x - 3 \quad (x \in \mathbb{R})$ függvénynek pontosan egy zérushelye van.

T. f. h. f-nek két $x_1 < x_2$ zérushelye van. Ekkor a Rolle-féle középértéktétel alapján:

$$\exists \xi \in (x_1, x_2) : f'(\xi) = 0$$

$$f'(x) = 7x^6 + 14 > 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

Mivel $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén $f'(x) > 0$, ezért

$$\nexists \xi \in (x_1, x_2) : f'(\xi) = 0$$

ami azt jelenti, hogy f-nek pontosan egy zérushelye van.