A számításelmélet alapjai I.

2. gyakorlat

Boda Bálint

2023. tavaszi félév

1. Generatív grammatika

Definíció (grammatika)**.** Egy $G = (N, T, P, S)$ rendezett négyest (generatív) grammatikának vagy nyelvtannak nevezünk, ha N és T diszjunkt (azaz $N \cap T = \emptyset$) véges ábécék. Ekkor

- N a nem terminális szimbólumok halmaza,
- T (vagy Σ) a terminális szimbólumok halmaza,
- $S \in N$ a grammatika kezdőszimbóluma,
- $P = \{(x, y) \mid x, y \in (N \cup T)^*$ szavak úgy, hogy x legalább egy nem terminális betűt tartalmaz$\}$, az ún. (átírási) szabályok (vagy produkciók) halmaza.

Jelölés. Gyakran (x, y) helyett az $x \to y$ jelölést használjuk, egy szabály leírására. Természetesen ez csak akkor lehetséges ha az adott ábécének nem eleme $\to$.

Definíció (egylépéses levezetés)**.** Legyen $G = (N, T, P, S)$ egy grammatika és legyen $u, v \in (N \cup T)^*$. Azt mondjuk v közvetlen levezethető az u szóból G-ben (jelekkel: $u \Rightarrow_G v$), ha

$$\exists (x, y) \in P: \ u = u_1 x u_2 \text{ és } v = u_1 y u_2, \quad (u_1, u_2 \in (N \cup T)^*)$$

Definíció (többlépéses levezetés)**.** Legyen $G = (N, T, P, S)$ egy grammatika és legyen $u, v \in (N \cup T)^*$. Azt mondjuk v több lépésben levezethető az u szóból G-ben (jelekkel: $u \Rightarrow_G^* v$), ha

$$u = v \vee \exists \left(n \geq 1 \wedge w_0, \ldots, w_n \in (N \cup T)^*\right), \text{ hogy } w_{i-1} \Rightarrow_G w_i \, (1 \leq i \leq n), \ w_0 = u \text{ és } w_n = v$$

Definíció (generált nyelv)**.** Legyen $G = (N, T, P, S)$ egy grammatika, ekkor a G által generált nyelvnek nevezzük az S kezdőszimbólumból több lépésben levezethető terminális szavak halmazát, azaz a

$$L(G) = \{u \in T^* \mid S \Rightarrow_G^* u\}$$

nyelvet.

Példa. Legyen

$$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\} \, P, S)$$
$$P = \{S \to B|bb, \ B \to aaA, \ A \to a|\varepsilon \ \}$$

Adjuk meg $L(G)$-t!

Megjegyzés. Egy $S \to B|bb$ az $S \to B$ és $S \to bb$ szabályokat jelöli.

$$S \to bb$$
$$S \to B \to aaA \to a$$
$$S \to B \to aaA \to \varepsilon$$

Így: $L(G) = \{bb, aa, a\}$.

1.1. Feladatok

1. Legyen $G_i = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P_i, S)$. Határozzuk meg az $L(G_i)$ nyelvet, ha

- $P_1 = \{S \to aaS|a\}$
- $P_2 = \{S \to aSb|\varepsilon\}$
- $P_3 = \{S \to ASB|\varepsilon,\ AB \to BA,\ BA \to AB,\ A \to a,\ B \to b\}$

Megoldás.

$$\begin{aligned} L(G_1) &= \{a, aaa, aaaaa \dots\} = \left\{a^{(2n+1)} \mid n \geq 0\right\} \\ L(G_2) &= \{\varepsilon, ab, aabb \dots\} = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \end{aligned}$$

A harmadik nyelv meghatározása már nehezebb feladat. Tekintsünk pár példa levezetést:

$$\begin{aligned} &S \to A\underline{S}B \to \underline{A}B \to a\underline{B} \to ab \\ &S \to ASB \to AB \to BA \to bA \to ba \\ &S \to A\underline{S}B \to AA\underline{S}BB \to A\underline{AB}B \to \underline{AB}AB \to BA\underline{AB} \to \underline{B}ABA \to \dots \to baba \\ &S \to ASB \to AASBB \to AABB \to ABAB \to BAAB \to baab \end{aligned}$$

Ezek alapján $L(G_3) = \{u \in \{a, b\}^* \mid l_a(u) = l_b(u)\}$.

2. A grammatikák Chomsky féle osztályzása

Legyen $G = (N, T, P, S)$ egy grammatika. A G grammatika i-típusú ($i = 0, 1, 2, 3$), ha a P szabályhalmazra teljesülnek a következők:

- $i = 0$ (mondatszerkezetű grammatika): nincs korlátozás
- $i = 1$ (környezetfüggő grammatika):
  - P minden szabálya $u_1 A u_2 \to u_1 v u_2$ alakú, ahol $u_1, u_2, v \in (N \cup T)^*, A \in N$ és $v \neq \varepsilon$
  - Kivétel: P tartalmazhatja az $S \to \varepsilon$ szabályt, de csak akkor, ha S nem fordul elő egyetlen szabály jobb oldalán sem.
- $i = 2$ (környezetfüggetlen): P minden szabálya $A \to v$ alakú ($A \in N,\ v \in (N \cup T)^*$)
- $i = 3$ (reguláris): P minden szabálya $A \to uB$ vagy $A \to u$ alakú ($A, B \in N,\ u \in T^*$)

Az adott osztályokat $\mathcal{G}_i$-vel jelöljük.

Definíció (nyelvosztály)**.** Az i típusú nyelvek osztályának nevezzük a

$$\mathcal{L}_i = \{L \mid \exists G \in \mathcal{G}_i, \text{ hogy } L = L(G)\}$$

1. Tétel (Chomsky nyelvhierarchia tétel)**.**

$$\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_0$$

2.1. Feladatok

1. Írjuk fel azt a grammatikát, mely a 4-el osztható bináris számok nyelvét generálja! Milyen osztályba sorolható a generált nyelv?

Megoldás.
Egy kettes számrendszerbeli szám akkor osztható néggyel, ha utolsó két számjegye 0. Gondoskodnunk kell továbbá arról, hogy ne legyenek felesleges nullák az elején. Így

$$G = \left(\{S, B\}, \{0, 1, \varepsilon\}, \left\{ S \to \underbrace{0}_{3.} \mid \underbrace{1B00}_{2.}, B \to \underbrace{\varepsilon}_{3} . \mid \underbrace{0B}_{3.} \mid \underbrace{1B}_{3.} \right\}, S \right)$$

(Az adott szabály jobb oldala alatt tüntettem fel annak szintjét.) Mivel kettes a legkisebb szint ezért a generált nyelv is 2-es szintű.

A feladat megoldható más módon is:

$$G = (\{S, A\}, \{0, 1, \varepsilon\}, \{S \to 0|1A, A \to \varepsilon|0A|1A\}, S)$$

amiből már reguláris nyelv adódik.

2. Írjuk fel azt a grammatikát, ami az $L(G) = \{a^n b^m c^n \mid n \geq 0, m \geq 3\}$, nyelvet generálja!

Megoldás.
Írjuk fel $L(G)$ néhány elemét: $\{bbb, abbbc, aabbbcc \ldots\}$. Így $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c, \varepsilon\}, P, S)$, ahol

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \to ASC, \\ S \to BBB, \\ A \to a, \\ B \to b, \\ C \to c \end{array} \right\}$$

3. Reguláris kifejezések