Programtervező Informatikus BSc Szak, Analízis 1

1. zárthelyi dolgozat; 2021.03.26.
Megoldások

1. Feladat. Legyen

$$H = \left\{ \frac{2x^2+5}{x^2+2} \in \mathbb{R} \;\middle|\; x > -1 \right\}.$$

Határozza meg $\sup H$-t és $\inf H$-t! Van-e a H halmaznak legnagyobb, illetve legkisebb eleme?

Megoldás: A kifejezést a következő módon átalakítjuk:

$$\frac{2x^2+5}{x^2+2} = \frac{2(x^2+2)+1}{x^2+2} = 2 + \frac{1}{x^2+2}.$$

- A halmaz alulról korlátos, hiszen $1/(x^2+2) > 0$. Ekkor

  $$\frac{2x^2+5}{x^2+2} = 2 + \frac{1}{x^2+2} > 2 \qquad (x > -1).$$

  Ezért 2 a halmaz alsó korlátja, de bármely nála nagyobb szám már nem alsó korlát, hiszen

  $$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists x > -1, \text{ hogy } H \ni 2 + \frac{1}{x^2+2} < 2 + \varepsilon.$$

  Valóban, minden rögzített $\varepsilon > 0$ szám esetén

  $$2 + \frac{1}{x^2+2} < 2 + \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{x^2+2} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 2,$$

  és ilyen $x > -1$ szám létezik, mert ha $x > 1/\sqrt{\varepsilon}$, akkor $x^2 > 1/\varepsilon > 1/\varepsilon - 2$. Ezért

  $$\inf H = 2, \text{ de } \nexists \min H, \text{ hiszen } 2 \notin H.$$

- A halmaz felülről korlátos, hiszen $x^2 + 2 \geq 2$, és így $1/(x^2+2) \leq 1/2$. Ekkor

  $$\frac{2x^2+5}{x^2+2} = 2 + \frac{1}{x^2+2} \leq 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \qquad (x > -1).$$

  Ezért $5/2$ a halmaz felső korlátja, de halmazbeli elem is, hiszen megkapjuk $x = 0$ esetén. Ezért $5/2$ a halmaz legnagyobb eleme, azaz

  $$\sup H = \max H = \frac{5}{2}.$$

2. Feladat. Legyen

$$f(x) = \sqrt{x+3} \quad (x \geq 1) \qquad \text{és} \qquad g(x) = x^2 - 4x + 1 \quad (x < 1).$$

Határozza meg az $f \circ g$ függvényt! Számítsa ki továbbá a $[-1, 2]$ halmaz f által létesített ősképét!

Megoldás: $D_f = [1, +\infty)$ és $D_g = (-\infty, 1)$. Ekkor

$$D_{f\circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in (-\infty, 1) \mid x^2 - 4x + 1 \in [1, +\infty)\} =$$
$$= \{x \in (-\infty, 1) \mid x^2 - 4x + 1 \geq 1\}.$$

Másrészt

$$x^2-4x+1\geq 1 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2-4x\geq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x(x-4)\geq 0$$
$$\Longleftrightarrow\quad x\leq 0 \text{ vagy } x\geq 4.$$

Ekkor

$$D_{f\circ g}=\{x\in(-\infty,1)\bigm| x\leq 0 \text{ vagy } x\geq 4\}=(-\infty,0].$$

Így

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2-4x+1)=\sqrt{(x^2-4x+1)+3}=\sqrt{x^2-4x+4}=$$
$$=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|=2-x \qquad (x\in(-\infty,0]).$$

Számítsuk ki a $C:=[-1,2]$ halmaz f által létesített ősképét!

$$f^{-1}[C]=\{x\in D_f \bigm| f(x)\in C\}=\{x\in[1,+\infty)\bigm| \sqrt{x+3}\in[-1,2]\}$$
$$=\{x\in[1,+\infty)\bigm| -1\leq\sqrt{x+3}\leq 2\}.$$

Tudjuk, hogy $\sqrt{x+3}\geq 0$, ezért csak a $\sqrt{x+3}\leq 2$ feltételt kell ellenőrizni:

$$\sqrt{x+3}\leq 2 \quad\Longleftrightarrow\quad 0\leq x+3\leq 4 \quad\Longleftrightarrow\quad -3\leq x\leq 1.$$

Ezért

$$f^{-1}[C]=\{x\in[1,+\infty)\bigm| -3\leq x\leq 1\}=\{1\}.$$

3. Feladat. A definíció alapján igazolja, hogy

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+4n+1}{3n^2+6n+5}=\frac{1}{3}!$$

Megoldás: A határérték definíciója szerint azt kell belátni, hogy

$$\forall\varepsilon>0\text{-hoz } \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n>n_0\colon\ \left|\frac{n^2+4n+1}{3n^2+6n+5}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon. \tag{*}$$

Legyen $\varepsilon>0$ egy rögzített valós szám. Ekkor

$$\left|\frac{n^2+4n+1}{3n^2+6n+5}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{3n^2+12n+3-(3n^2+6n+5)}{3(3n^2+6n+5)}\right|=\left|\frac{6n-2}{3(3n^2+6n+5)}\right|=$$
$$=(\text{ha } n\geq 1,\ \text{akkor } 6n-2>0 \text{ és } 3n^2+6n+5>0)=$$
$$=\frac{6n-2}{3(3n^2+6n+5)}=\frac{6n-2}{9n^2+18n+15}<\frac{6n}{9n^2+18n+15}<$$
$$<(\text{mert } 18n+15>0)<\frac{6n}{9n^2}=\frac{2}{3n}<\underbrace{\frac{1}{n}<\varepsilon}.$$

Az utolsó egyenlőtlenség teljesül, ha $n>1/\varepsilon$. Legyen

$$n_0:=\max\left\{1,\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}.$$

Ekkor minden $n>n_0$ index esetén

$$\left|\frac{n^2+4n+1}{3n^2+6n+5}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon,$$

ezért (*) teljesül.

4. Feladat. Számítsa ki az alábbi határértékeket:

$$(a)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n\cdot(-2)^n + 2^{2n+1}}{4^n + 3^{n+1}},$$
$$(b)\ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2\cdot 3^n + 3\cdot 5^n + n},$$
$$(a)\ \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n+5}{2n+3}\right)^{4n+5}!$$

Megoldás:

(a) A keresett határérték

$$a_n = \frac{n\cdot(-2)^n + 2^{2n+1}}{4^n + 3^{n+1}} = \frac{n\cdot(-2)^n + 2\cdot 4^n}{4^n + 3\cdot 3^n} = \frac{n\cdot(-\frac{1}{2})^n + 2}{1 + 3\cdot(\frac{3}{4})^n} \to$$
$$\to (\text{mivel ha } |q|<1, \text{ akkor } q^n \to 0 \text{ és } nq^n \to 0) \to \frac{0+2}{1+0} = 2,$$

ha $n\to+\infty$.

(b) Átalakítással

$$a_n = \sqrt[n]{2\cdot 3^n + 3\cdot 5^n + n} = \sqrt[n]{5^n\left(2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n + 3 + n\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)} =$$
$$= 5\cdot\sqrt[n]{2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n + 3 + n\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n}.$$

Másrészt

$$x_n := 2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n + 3 + n\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n \to (\text{mivel ha } |q|<1, \text{ akkor } q^n \to 0 \text{ és } nq^n \to 0) \to 3 > 0,$$

ha $n\to+\infty$. Ekkor $\lim(\sqrt[n]{x_n}) = 1$. Ezért a keresett határérték

$$a_n = 5\cdot\sqrt[n]{x_n} \to 5\cdot 1 = 5,$$

ha $n\to+\infty$.

(c) A keresett határérték

$$a_n = \left(\frac{2n+5}{2n+3}\right)^{4n+5} = \left(\frac{1+\frac{5}{2n}}{1+\frac{3}{2n}}\right)^{4n+5} = \left[\left(\frac{1+\frac{5}{2n}}{1+\frac{3}{2n}}\right)^n\right]^4 \cdot \left(\frac{1+\frac{5}{2n}}{1+\frac{3}{2n}}\right)^5 =$$
$$= \left[\frac{\left(1+\frac{5/2}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{3/2}{n}\right)^n}\right]^4 \cdot \left(\frac{1+\frac{5}{2n}}{1+\frac{3}{2n}}\right)^5 \to \left(\text{mivel } \left(1+\frac{r}{n}\right)^n \to e^r, \text{ ha } r\in\mathbb{Q}\right) \to$$
$$\to \left[\frac{e^{5/2}}{e^{3/2}}\right]^4 \cdot \left(\frac{1+0}{1+0}\right)^5 = e^4,$$

ha $n\to+\infty$.

5. Feladat. Mutassa meg, hogy az

$$a_0 = 0, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 3}{4} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat konvergens és számítsa ki a határértékét!

Megoldás: Először azt fogjuk igazolni, hogy (a_n) monoton növekvő és felülről korlátos.

- Teljes indukcióval azt fogjuk igazolni, hogy $a_n < 1$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.
  - $n = 0$-ra igaz az állítás, hiszen $a_0 = 0 < 1$.
  - Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ számra igaz az állítás, azaz $a_n < 1$. Ekkor

    $$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 3}{4} < \frac{1^2 + 3}{4} = 1,$$

    tehát $n + 1$-re is igaz az állítás.

  Ezért $a_n < 1$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$ számra, és így (a_n) felülről korlátos.

- Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

  $$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2 + 3}{4} - a_n = \frac{a_n^2 - 4a_n + 3}{4} = \frac{\overbrace{(a_n - 1)}^{<0}\overbrace{(a_n - 3)}^{<0}}{4} > 0$$

  hiszen $a_n < 1$. Ezért (a_n) szigorúan monoton növekvő.

Mivel (a_n) monoton növekvő és felülről korlátos, így konvergens sorozat. Legyen $A := \lim(a_n)$. A műveleti tételekre vonatkozó állításokat felhasználva azt kapjuk, hogy

$$A \leftarrow a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 3}{4} \to \frac{A^2 + 3}{4}$$

ha $n \to +\infty$. Ezért

$$A = \frac{A^2 + 3}{4} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^2 - 4A + 3 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = 1 \text{ vagy } A = 3.$$

Mivel $a_n < 1$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, így az (a_n) sorozat határértéke csak $A = 1$ lehet.

Az (a_n) sorozat tehát valóban konvergens, és $\lim (a_n) = 1$.