Diszkrét modellek alkalmazásai

beadandó

Boda Bálint — KDHPNI

2022. őszi félév

1. Határozd meg az a, b, c valós paraméterek értékeit, úgy, hogy a 3 legalább háromszoros gyöke legyen a $p(x) := ax^5 + x^4 + bx^2 + c \in \mathbb{R}[x]$ polinomnak.

Megoldás.

	a	1	0	b	0	c
3	a	$3a+1$	$9a+3$	$27a+9+b$	$81a+27+3b$	$243a+81+9b+c$
3	a	$6a+1$	$27a+6$	$108a+27+b$	$405a+108+6b$	
3	a	$9a+1$	$54a+9$	$270a+54+b$		
3	a	$12a+1$	$90a+12$			
3	a	$15a+1$				

Számunkra három kedvező eset van: 3 háromszoros, 3 négyszeres és 3 ötszörös gyöke a $p(x)$ polinomnak.

- Ha 3 háromszoros gyök a következő egyenletrendszer adódik:

$$\begin{aligned} 243a + 9b + c + 81 &= 0 \\ 405a + 6b + 108 &= 0 \iff 135a + 2b + 36 = 0 \\ 270a + b + 54 &= 0 \iff b = -270a - 54 \end{aligned}$$

  Behelyettesítve a második egyenletbe:

$$\begin{aligned} 135a + 2(-270a - 54) + 36 &= 0 \\ -405a - 72 &= 0 \\ a &= -\frac{8}{45} \end{aligned}$$

  Így, $b = -270a - 54 \iff b = 48 - 54 = -6$.

$$\begin{aligned} 243a + 9b + c + 81 &= 0 \\ c &= -243a - 9b - 81 \\ c &= 43,2 + 54 - 81 = 16,2 \end{aligned}$$

  Így $a = -\frac{8}{45}$, $b = -6$, $c = 16,2$ paraméterek esetén 3 háromszoros gyöke a $p(x)$ polinomnak.

- Ha 3 négyszeres gyök a következő egyenletrendszer adódik:

$$\begin{aligned} 243a + 9b + c + 81 &= 0 \\ 405a + 6b + 108 &= 0 \\ 270a + b + 54 &= 0 \\ 90a + 12 &= 0 \iff a = -\frac{2}{15} \end{aligned}$$

  Ekkor a harmadik egyenlet miatt: $b = 36 - 54 = -18$, így viszont a második egyenlet nem teljesül, mivel $-\frac{910}{15} + 108 - 108 \neq 0$. Ezért az egyenletrendszernek nincs megoldása.

- Ha 3 ötszörös gyök a következő egyenletrendszer adódik:

$$
\begin{aligned}
243a + 9b + c + 81 &= 0\\
405a + 6b + 108 &= 0\\
270a + b + 54 &= 0\\
90a + 12 &= 0 \iff a = -\frac{2}{15}\\
15a + 1 &= 0
\end{aligned}
$$

Ekkor viszont az 5. egyenlet nem teljesül, azaz az egyenletrendszernek nincs megoldása.

Így a keresett paraméterek csak a következők lehetnek: $a = -\frac{8}{45}$, $b = -6$, $c = 16,2$.

2. Oszd el maradékosan az $x^{10} + 5x^7 + 15x^6 + 25x^5 - x^3 - 2x + 3 \in \mathbb{Z}[x]$ polinomot az $x^2 + 2x - 3 \in \mathbb{Z}[x]$ polinommal majd az eredményt oszd le újra az osztó polinommal.

Megoldás.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^8 - 2x^7 + 7x^6 - 15x^5 + 66x^4 - 152x^3 + 502x^2 - 1461x + 4428 \\
\hline
x^2 + 2x - 3 & x^{10} + 0x^9 + 0x^8 + 5x^7 + 15x^6 + 25x^5 + 0x^4 - x^3 + 0x^2 - 2x + 3 \\
 & x^{10} + 2x^9 - 3x^8 \\
\cline{2-2}
 & \quad - 2x^9 + 3x^8 + 5x^7 + 15x^6 + 25x^5 + 0x^4 - x^3 + 0x^2 - 2x + 3 \\
 & \quad - 2x^9 - 4x^8 + 6x^7 \\
\cline{2-2}
 & \qquad 7x^8 - 1x^7 + 15x^6 + 25x^5 + 0x^4 - x^3 + 0x^2 - 2x + 3 \\
 & \qquad 7x^8 + 14x^7 - 21x^6 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\quad - 15x^7 + 36x^6 + 25x^5 + 0x^4 - x^3 + 0x^2 - 2x + 3 \\
 & \qquad\quad - 15x^7 - 30x^6 + 45x^5 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad +66x^6 - 20x^5 + 0x^4 - x^3 + 0x^2 - 2x + 3 \\
 & \qquad\qquad +66x^6 + 132x^5 - 198x^4 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad -152x^5 + 198x^4 - x^3 + 0x^2 - 2x + 3 \\
 & \qquad\qquad\quad -152x^5 - 304x^4 + 456x^3 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad + 502x^4 - 457x^3 + 0x^2 - 2x + 3 \\
 & \qquad\qquad\qquad + 502x^4 + 1004x^3 - 1506x^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad\quad -1461x^3 + 1506x^2 - 2x + 3 \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad -1461x^3 - 2922x^2 + 4383x \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad\qquad + 4428x^2 - 4385x + 3 \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad + 4428x^2 + 8856x - 13284 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -13241x + 13287
\end{array}
$$

Az első osztás eredménye:

$$
x^8 - 2x^7 + 7x^6 - 15x^5 + 66x^4 - 152x^3 + 502x^2 - 1461x + 4428 + \frac{-13241x + 13287}{x^2 + 2x - 3}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^6-4x^5+18x^4-63x^3+246x^2-833x+2906 \\
\hline
x^2+2x-3 & x^8-2x^7+7x^6-15x^5+66x^4-152x^3+502x^2-1461x+4428 \\
 & x^8+2x^7-3x^6 \\
\cline{2-2}
 & -4x^7+10x^6-15x^5+66x^4-152x^3+502x^2-1461x+4428 \\
 & -4x^7-8x^6+12x^5 \\
\cline{2-2}
 & 18x^6-27x^5+66x^4-152x^3+502x^2-1461x+4428 \\
 & 18x^6+36x^5-54x^4 \\
\cline{2-2}
 & -63x^5+120x^4-152x^3+502x^2-1461x+4428 \\
 & -63x^5-126x^4+189x^3 \\
\cline{2-2}
 & +246x^4-341x^3+502x^2-1461x+4428 \\
 & +246x^4+492x^3-738x^2 \\
\cline{2-2}
 & -833x^3+1240x^2-1461x+4428 \\
 & -833x^3-1666x^2+2499x \\
\cline{2-2}
 & +2906x^2-3960x+4428 \\
 & +2906x^2+5812x-8718 \\
\cline{2-2}
 & -9772x+13146
\end{array}
$$

A második osztás eredménye:

$$
x^6-4x^5+18x^4-63x^3+246x^2-833x+2906+\frac{-9772x+13146}{x^2+2x-3}+\frac{-13241x+13287}{x^2+2x-3}
$$