Analízis 1, 2. zárthelyi dolgozat, 2022.05.11.

Megoldások

(Vázlatosan)

1. Konvergens-e a

$$\sum_{n=1} \frac{(-3)^n + (-2)^{2n}}{5^{n+1}}$$

végtelen sor? Ha igen, számítsa ki az összegét! (5 pont)

Megoldás:

Szétbontás mértani sorokra:

$$\sum_{n=1} \frac{(-3)^n + (-2)^{2n}}{5^{n+1}} = \sum_{n=1} \left(\tfrac{1}{5} \cdot \left(-\tfrac{3}{5}\right)^n + \tfrac{1}{5} \cdot \left(\tfrac{4}{5}\right)^n \right).$$

Az első mértani sor konvergens, mert $\left|-\frac{3}{5}\right| < 1$, és összege:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{1}{5} \cdot \left(-\tfrac{3}{5}\right)^n = -\tfrac{3}{25} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\tfrac{3}{5}\right)^n = -\tfrac{3}{25} \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{5}} = -\tfrac{3}{40}.$$

A második mértani sor konvergens, mert $\left|\frac{4}{5}\right| < 1$, és összege:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{1}{5} \cdot \left(\tfrac{4}{5}\right)^n = \tfrac{4}{25} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\tfrac{4}{5}\right)^n = \tfrac{4}{25} \cdot \frac{1}{1-\frac{4}{5}} = \tfrac{4}{5}.$$

A sor konvergens, mert előáll két konvergens sor összegeként. A sor összege:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^n + (-2)^{2n}}{5^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{1}{5} \cdot \left(-\tfrac{3}{5}\right)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{1}{5} \cdot \left(\tfrac{4}{5}\right)^n = \tfrac{29}{40}.$$

2. Konvergensek-e az alábbi végtelen sorok?

a) $\displaystyle\sum_{n=2} \frac{1}{\sqrt[n]{2n^2+1}}$, (5 *pont*)

b) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{n^3 \cdot 3^n}{(3n)!}$, (5 *pont*)

c) $\displaystyle\sum_{n=0} \frac{\sqrt{n^4+1}}{n^4+n^2+1}$. (5 *pont*)

Megoldás:

a) Divergens, hiszen

$$\frac{1}{\sqrt[n]{2n^2+1}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2 \sqrt[n]{2+\frac{1}{n^2}}} \to \frac{1}{1^2 \cdot 1} = 1 \neq 0, \quad \left(x_n := 2 + \tfrac{1}{n^2} \to 2 \in \mathbb{R}^+ \implies \sqrt[n]{x_n} \to 1\right)$$

és így a végtelen sorok konvergenciájára vonatkozó szükséges feltétel nem teljesül.

b) Konvergens, hiszen a d'Alembert-féle hányadoskritérium szerint

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^3 \cdot 3^{n+1}}{\big(3(n+1)\big)!} \cdot \frac{(3n)!}{n^3 \cdot 3^n} = 3\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \to 3 \cdot 1^3 \cdot 0 = 0 < 1.$$

c) Konvergens, hiszen pozitív tagú sor, és ha $n > 0$, akkor

$$\frac{\sqrt{n^4+1}}{n^4+n^2+1} \leq \frac{\sqrt{n^4+3n^4}}{n^4+n^2+1} = \frac{2n^2}{n^4+n^2+1} < \frac{2n^2}{n^4} = \frac{2}{n^2} \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Így a majoráns kritérium szerint a sor konvergens.

3. Határozza meg a

$$\sum_{n=1} \frac{2^n}{n(4^n-1)} \cdot (x-1)^n$$

hatványsor konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát! (10 pont)

Megoldás:

$$\alpha_n = \frac{2^n}{n(4^n-1)} \qquad (n \in \mathbb{N}^+). \text{ Ekkor}$$

$$\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \frac{2^{n+1}}{(n+1)(4^{n+1}-1)} \cdot \frac{n(4^n-1)}{2^n} = 2\,\frac{n}{n+1}\,\frac{4^n-1}{4\cdot 4^n-1} = 2\,\frac{n}{n+1}\,\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{4-\left(\frac{1}{4}\right)^n} \to 2\cdot 1\cdot \frac{1}{4}$$

$$A := \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad R = \frac{1}{A} = 2 \quad \text{a hatványsor konvergenciasugara.}$$

Mivel $a = 1$, így a konvergenciahalmaz belseje: $(a-R, a+R) = (-1, 3)$.

$x = 3$ esetén a $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{2^n}{n(4^n-1)} \cdot (3-1)^n = \sum_{n=1} \frac{4^n}{n(4^n-1)}$ sor divergens, mert

$$\frac{4^n}{4^n-1} > 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{4^n}{n(4^n-1)} > \frac{1}{n} > 0 \qquad \text{és} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Így a minoráns kritérium miatt a sor divergens.

$x = -1$ esetén a $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{2^n}{n(4^n-1)} \cdot (-1-1)^n = \sum_{n=1} \frac{4^n}{n(4^n-1)}(-1)^n$ sor konvergens, mert Leibniz-típusú sorról van szó, hiszen

$$\frac{4^n}{n(4^n-1)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4^n}}$$

monoton csökkenően tart nullához.

Összefoglalva, a sor konvergenciahalmaza: $[-1, 3)$.

4. Számítsa ki a következő határértékeket!

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\sqrt{\cos 2x}}$, (5 *pont*)

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{\alpha x^2-\alpha+1}-1}{x^3-1} \qquad (0 \leq \alpha \leq 1)$. (5 *pont*)

Megoldás:

a) A nevező átalakítása:

$$1-\sqrt{\cos 2x} = (1-\sqrt{\cos 2x}) \cdot \frac{1+\sqrt{\cos 2x}}{1+\sqrt{\cos 2x}} = \frac{1-\cos 2x}{1+\sqrt{\cos 2x}} = \frac{2\sin^2 x}{1+\sqrt{\cos 2x}}.$$

A $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ nevezetes határérték alkalmazásával

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\sqrt{\cos 2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x(1+\sqrt{\cos 2x})}{2\sin^2 x} = \frac{1}{2}\cdot \frac{\lim\limits_{x\to 0}(1+\sqrt{\cos 2x})}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+1}{1} = 1.$$

b) A számlaló gyöktelenítése:

$$\sqrt{\alpha x^2-\alpha+1}-1 = (\sqrt{\alpha x^2-\alpha+1}-1)\cdot\frac{\sqrt{\alpha x^2-\alpha+1}+1}{\sqrt{\alpha x^2-\alpha+1}+1} = \frac{\alpha x^2-\alpha+1-1}{\sqrt{\alpha x^2-\alpha+1}+1} =$$

$$= \frac{\alpha(x^2-1)}{\sqrt{\alpha x^2-\alpha+1}+1}.$$

Így a határérték:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{\alpha x^2-\alpha+1}-1}{x^3-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\alpha(x^2-1)}{(x^3-1)(\sqrt{\alpha x^2-\alpha+1}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\alpha(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{\alpha x^2-\alpha+1}+1)} = \alpha\cdot\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{(x^2+x+1)(\sqrt{\alpha x^2-\alpha+1}+1)} =$$

$$= \alpha\cdot\frac{2}{3\cdot(\sqrt{1}+1)} = \frac{\alpha}{3}.$$

5. Határozza meg az

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2-x-6} & (x<-2) \\[2mm] \dfrac{e^{2x}-e^x}{2x} & (-2\le x<0) \\[2mm] 1 & (x=0) \\[2mm] \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} & (x>0) \end{cases}$$

függvény folytonossági és szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait! (10 pont)

Megoldás:

A megadott f függvény minden $x\in\mathbb{R}$ esetén értelmezhető, hiszen az

$$f_1(x) := \frac{x}{x^2-x-6} = \frac{x}{(x+2)(x-3)} \qquad \big(x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,3\}\big),$$

illetve az

$$f_2(x) := \frac{e^{2x}-e^x}{2x} \quad \big(x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\big), \qquad f_3(x) := \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} \quad \big(x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\big)$$

függvények értelmezhetők a megadott intervallumokon. A polinomok, a gyök- és a exponenciális, illetve a folytonos függvényekkel végzett alapműveletek (kivéve természetesen a kritikus műveletek) és a kompozíció folytonossága miatt igaz, hogy f_1, f_2 és f_3 folytonosak minden értelmezési tartománybeli pontjukban. Ezért f folytonos az $\mathbb{R}\setminus\{-2,0\}$ halmaz minden pontjában.

Az $x=-2$ pontban:

$$\lim_{-2-0} f = \lim_{x\to -2-0}\frac{x}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x\to-2-0}\frac{x}{x-3}\cdot\lim_{x\to-2-0}\frac{1}{x+2} = \frac{2}{5}\cdot(-\infty) = -\infty.$$

Ezért az f függvénynek másodfajú szakadása van az $x=-2$ pontban.

A bal oldali határértéke az $x = 0$ pontban: minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{és} \quad e^{2x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k x^k}{k!} = 1 + 2x + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2^k x^k}{k!}.$$

Ezért $\displaystyle\frac{e^{2x} - e^x}{2x} = \frac{1}{2x}\left(x + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(2^k - 1)x^k}{k!}\right) = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(2^k - 1)x^{k-1}}{2k!} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2^{k+1} - 1)x^k}{2(k+1)!}$

A hatványsor összegfüggvényének a határértékére vonatkozó tétel alapján

$$\lim_{0-0} f = \lim_{x\to 0-0} \frac{e^{2x} - e^x}{2x} = \frac{1}{2}$$

Másik megoldás:

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{x}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} - 1\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0-0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

és így

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{e^{2x} - e^x}{2x} = \lim_{x\to 0-0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} - \frac{1}{2} \lim_{x\to 0-0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

A jobb oldali határértéke az $x = 0$ pontban:

$$\lim_{0+0} f = \lim_{x\to 0+0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} + 1}{\sqrt{x^2+1} + 1} = \lim_{x\to 0+0} \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2(\sqrt{x^2+1} + 1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Az $x = 0$ pontban az f függvénynek megszüntethető szakadása van, hiszen

$$\exists \lim_{0} f = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}, \qquad \text{de} \qquad f(0) = 1 \neq \frac{1}{2}.$$