Analízis II

8. Házi feladat

Boda Bálint

2022. őszi félév

1. Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat!

a)

$$\int \frac{x^3 + x^2 - x + 3}{x^2 + x - 2}\, dx \quad (x > 1)$$

b)

$$\int \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^2(x+1)}\, dx \quad (0 < x < 1)$$

c)

$$\int \frac{x + 1}{x^2 + 3x + 4}\, dx \quad (x \in \mathbb{R})$$

d)

$$\int \frac{2x^2 + x + 1}{x^2(x^2+1)}\, dx \quad (x > 0)$$

Megoldás.

a) Mivel a számláló fokszáma nagyobb mint a nevezőé először fel kell bontanunk a törtet egy törtre és egy polinomra:

$$\frac{x^3+x^2-x+3}{x^2+x-2} = x + \frac{x+3}{x^2+x-2} = x + \frac{x+3}{(x-1)(x+2)}$$

Alakítsuk át a törtet a parciális törtekre hozás módszerével:

$$\frac{x+3}{(x-1)(x+2)} = x + \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)} = x + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$A(x+2)+B(x-1) = x+3$$

$$x=1, \qquad 3A=4 \implies A \;= \frac{4}{3}$$

$$x=-2, \quad -3B=1 \implies B{=}-\frac{1}{3}$$

Így a tört:

$$\frac{x^3+x^2-x+3}{x^2+x-2} = x + \frac{4}{3(x-1)} - \frac{1}{3(x+2)}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+x^2-x+3}{x^2+x-2}\,dx &= \int x\,dx + \int \frac{4}{3(x-1)}\,dx - \int \frac{1}{3(x+2)}\,dx \\ &= \int x\,dx + \frac{4}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{3}\ln(x+2) + c\end{aligned}$$

b) Mivel a számláló fokszáma nagyobb mint a nevezőé először fel kell bontanunk a törtet egy törtre és egy polinomra:

$$\begin{aligned}
\frac{x^4-x^2+1}{x^2(x+1)} &= \frac{x^4+x^3-x^3-x^2+1}{x^3+x^2} = \frac{x(x^3+x^2)-x^3-x^2+1}{x^3+x^2} \\
&= x + \frac{-x^3-x^2+1}{x^3+x^2} = x - \frac{x^3+x^2}{x^3+x^2} + \frac{1}{x^3+x^2} \\
&= x - 1 + \frac{1}{x^3+x^2}
\end{aligned}$$

Bontsuk parciális törtekre a $\frac{1}{x^3+x^2}$ kifejezést:

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

A következő egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned}
A \cdot x \cdot (x+1) + B \cdot (x+1) + C \cdot x^2 &= 1 \\
Ax^2 + Ax + Bx + B + Cx^2 &= 1
\end{aligned}$$

Ebből:

$$\begin{aligned}
A + C = 0 &\iff -1 + C = 0 \iff C = 1 \\
A + B = 0 &\iff A + 1 = 0 \iff A = -1 \\
B = 1 &
\end{aligned}$$

Így a tört:

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4-x^2+1}{x^2(x+1)}\,dx &= \int x\,dx - \int 1\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 - x - \ln(x) - \frac{1}{x} + \ln(x+1) + c
\end{aligned}$$

c) Bontsuk fel a törtet a következő módon:

$$\frac{x+1}{x^2+3x+4} = \frac{\gamma((x^2+3x+4)')}{x^2+3x+4} + \frac{\delta}{x^2+3x+4} = \frac{\gamma(2x+3)}{x^2+3x+4} + \frac{\delta}{x^2+3x+4}$$

Ebből a következő egyenlet adódik:

$$1x + 1 = \gamma(2x+3) + \delta$$

Ami akkor teljesül ha:

$$x = \gamma \cdot 2x \iff \gamma = \frac{1}{2}$$
$$1 = \gamma \cdot 3 + \delta = \frac{3}{2} + \delta \iff \delta = -\frac{1}{2}$$

Ez alapján a tört:

$$\frac{x+1}{x^2+3x+4} = \frac{\frac{2x+3}{2} - \frac{1}{2}}{x^2+3x+4} = \frac{2x+3}{2(x^2+3x+4)} - \frac{1}{2(x^2+3x+4)}$$

Így:

$$\int \frac{x+1}{x^2+3x+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+3}{x^2+3x+4}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+3x+4}\,dx$$

ahol,

$$\int \frac{1}{x^2+3x+4}\,dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}\,dx = \frac{7}{4}\int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{4}{7}}\left(x+\frac{3}{2}\right)\right)^2 + 1}\,dx$$
$$= \frac{4}{7} \cdot \frac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{4}{7}}\left(x+\frac{3}{2}\right)\right)}{\sqrt{\frac{4}{7}}}$$

$$\int \frac{x+1}{x^2+3x+4}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \ln|x^2+3x+4| - \frac{2}{7} \cdot \frac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{4}{7}}\left(x+\frac{3}{2}\right)\right)}{\sqrt{\frac{4}{7}}} + c$$

d) Bontsuk fel a kifejezést a parciális törtekre bontás módszerével:

$$\frac{2x^2+x+1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Ebből a következő egyenlet adódik:

$$A(x)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x^2) = Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx^3 + Dx^2$$

Ez pontosan akkor teljesül, ha:

$$Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx^3 + Dx^2 = 2x^2 + x + 1$$

Melyből a következő egyenletrendszer adódik:

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= 1 \\ A + C &= 0 \iff 1 + C = 0 \iff C = -1 \\ B + D &= 2 \iff 1 + D = 2 \iff D = 1 \end{aligned}$$

Így a felbontott tört a következő:

$$\frac{2x^2+x+1}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{x-1}{x^2+1}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2+x+1}{x^2(x^2+1)}\,dx &= \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln x^2 + 1 - \operatorname{arctg} x + c \end{aligned}$$