3.	Házi feladat	

1. Határozza meg a legbővebb intervallumokat, melyeken f monoton!

a, $f(x) := x - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = x - 3x^{-1} + 2x^{-2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

$f'(x) := 1 + 3x^{-2} - 4x^{-3} = 1 + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3} = \frac{x^3 + 3x - 4}{x^3} \quad x_1 = 1$

	1	0	3	-4
1	1	1	4	0

$= \frac{(x-1)(x^2+x+4)}{x^3}$

$D = b^2 - 4ac = -15 < 0$

$\Downarrow$

$x_1 = 1$ az egyetlen valós gyök

	$(-\infty; 0)$	$(0; 1)$	1	$(1; \infty)$
f'	+	−	0	+
f	↑	↓	−	↑

b, $f(x) := \frac{e^x}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

$f'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x (x-1)}{x^2} \quad x = 1$

	$(-\infty; 0)$	$(0; 1)$	1	$(1; \infty)$
f'	−	−	0	+
f	↓	↓	−	↑

2. Határozza meg az

$$f(x) := \frac{x}{x^2+x+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény

a, lokális szélsőértékeit

$$f'(x) := \frac{x^2+x+1-x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2} \qquad x_1 = 1, \quad x_2 = -1$$

Stacionárius pontok: 1, -1

$$f''(x) := \frac{-2x(x^2+x+1)^{\cancel{2}} - (1-x^2)\cdot 2\cancel{(x^2+x+1)}(2x+1)}{(x^2+x+1)^{3}}$$

$$= \frac{-2(x(x^2+x+1)-(1-x^2)(2x+1))}{(x^2+x+1)^3}$$

$$f''(1) = \frac{-2\cdot(3-0)}{27} = -\frac{2}{9} < 0 \Rightarrow 1 \text{ lokális maximumhely}$$

⇓

$f(1) = \frac{1}{3}$ lokális maximum

$$f''(-1) = \frac{-2\cdot(-1-1)}{1} = 2 > 0 \Rightarrow -1 \text{ lokális minimumhely}$$

⇓

$f(-1) = -1$ lokális minimum

b, abszolút szélsőértékeit a $[-2, 0]$ halmazon

$f \in C[-2, 0] \Rightarrow \exists$ abszolút szélsőértékek (Weierstrass-tétel)

Stacionárius pontok mellett az $x = -2$ és $x = 0$ pontokat vizsgáljuk.

Az a feladatrész alapján: $f(1) = 1/3$, $f(-1) = -1$

$f(-2) = -2/3$

$f(0) = 0$

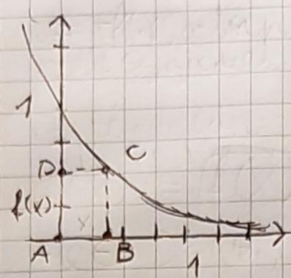
Ezek alapján: $x = 1$ abszolút maximumhely

$x = -1$ abszolút minimumhely

3. Keresse meg azt a maximális területű téglalapot az első síknegyedben, melynek egyik csúcsa az origó az ebből kiinduló két oldala a tengelyekre illeszkedik és az origóval szemközti csúcs az

$$f(x) := e^{-3x} \qquad (x \in (0;\infty))$$

függvény grafikonján helyezkedik el.



$$T(x) = x \cdot f(x) = x \cdot e^{-3x}$$

Azt az x pontot keressük, ahol $T(x)$ a legnagyobb.

$$T'(x) = 1 \cdot e^{-3x} + x \cdot e^{-3x} \cdot (-3)$$

$$= e^{-3x} - 3x\, e^{-3x}$$

$$e^{-3x} - 3x\, e^{-3x} = 0$$

$$e^{-3x} = 3x\, e^{-3x}$$

$$\frac{1}{3} = x$$

$$T''(x) = e^{-3x} \cdot (-3) - (3e^{-3x} + 3x\, e^{-3x}(-3))$$

$$= -3e^{-3x} - 3e^{-3x} + 9x\, e^{-3x}$$

$$= 9x\, e^{-3x} - 6e^{-3x}$$

$$T''\left(\frac{1}{3}\right) = 9 \cdot \frac{1}{3} \cdot e^{-1} - 6 \cdot e^{-1} = \frac{-3}{e} < 0$$

$$\Downarrow$$

$x = \frac{1}{3}$ abszolút maximumhely

A maximális területű téglalap:

$A = (0;0) \qquad B = \left(\frac{1}{3}; 0\right) \qquad C = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{e}\right) \qquad D = \left(0, \frac{1}{e}\right)$