Diszkrét modellek alkalmazásai

I. zh - minta

kidolgozta: Boda Bálint

2022. őszi félév

1. Bizonyítsuk be, hogy az

$$R = \{(a,b) | a \equiv b \pmod{10}\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

reláció ekvivalenciareláció.

Megoldás.
Egy reláció ekvivalenciareláció, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

1. Reflexív: $\forall a \in \mathbb{Z} : a \equiv a \pmod{10} \iff a \pmod{10} = a \pmod{10}$ ami nyilván igaz
2. Szimmetrikus: $\forall a, b \in \mathbb{Z} : a \equiv b \pmod{10} \implies b \equiv a \pmod{10}$ $\iff a \pmod{10} = b \pmod{10} \implies b \pmod{10} = a \pmod{10}$, mivel az egyenlőség szimmetrikus reláció ezért a kongruencia is.
3. Tranzitív:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : a \equiv b \pmod{10} \wedge b \equiv c \pmod{10} \implies a \equiv c \pmod{10}$$

$$\iff a \pmod{10} = b \pmod{10} \wedge b \pmod{10} = c \pmod{10}$$

$$\implies a \pmod{10} = c \pmod{10},$$

mivel az egyenlőség tranzitív reláció ezért a kongruencia is.

Az reláció 10 ekvivalenciaosztályra osztja $\mathbb{Z}$-t az alapján hogy az adott $a, b \in \mathbb{Z}$ osztályok 10-el vett osztási maradéka mennyi, melyek a 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 maradékosztályok.

2. Oldja meg a $60x + 16y = 60$ egyenletet az egész számok halmazán.

Megoldás.
$60x + 16y = 60 \iff 15x + 4y = 15$

$$\begin{aligned} \text{lnko}\,(15,4) = 1 \quad 15 &= 3\cdot 4 + 3 \implies 3 = 1\cdot 15 - 3\cdot 4 \\ 4 &= 1\cdot 3 + 1 \implies 1 = 1\cdot 4 - 1\cdot 3 \implies 4\cdot 4 - 1\cdot 15 \\ 3 &= 3\cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

$a = -1,\ b = 4,\ c = 15,\ d = 4$

$$\begin{aligned} 15x + 4y &= 15 \\ 15a + 4b &= 1 \\ 15\cdot -1 + 4\cdot 4 &= 1 \quad \backslash \cdot 15 \\ 15\cdot -15 + 4\cdot 60 &= 15 \end{aligned}$$

$x_0 = -15,\ y_0 = 60$

$$\begin{aligned} x &= -15 + \frac{4}{1}\cdot t = -15 + 4t \qquad (t \in \mathbb{Z}) \\ y &= 60 - \frac{15}{1}\cdot t\ = 60 - 15t \qquad (t \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

3. Határozza meg az Euklideszi algoritmussal a következő értékeket:

a) $\text{lnko}\,(504,150)$

b) $\text{lnko}\,(30,22)$

Megoldás.

a) $\text{lnko}\,(504,150) = 6$

$$\begin{aligned} 504 &= 3\cdot 150 + 54 \\ 150 &= 2\cdot 54 + 42 \\ 54 &= 1\cdot 42 + 12 \\ 42 &= 3\cdot 12 + 6 \\ 12 &= 2\cdot 6 + 0 \end{aligned}$$

b) $\text{lnko}\,(30,22) = 2$

$$\begin{aligned} 30 &= 1\cdot 22 + 8 \\ 22 &= 2\cdot 8 + 6 \\ 8 &= 1\cdot 6 + 2 \\ 6 &= 3\cdot 2 + 0 \end{aligned}$$

4. Oldja meg a következő lineáris kongruenciákat:

a) $16x \equiv 36 \pmod{28}$

b) $15x \equiv 8 \pmod{20}$

Megoldás.

a) $16x \equiv 36 \pmod{28}$

$$\begin{aligned} 16x \equiv 36 \pmod{28} &\iff 16x \equiv 64 \pmod{28} \\ &\iff x \equiv 4 \pmod{7} \\ &\implies x = 4 + 7t \quad (t \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

b) $15x \equiv 8 \pmod{20}$ $\quad \operatorname{lnko}(15, 20) = 5 \qquad 5 \nmid 8 \implies$ Nincs megoldás.

5.

a) Írjon függvényt, amely természetes számokat tartalmazó halmazt fogad paraméterként (üres halmaz esetén dobjon `ValueError` kivételt). A függvény a számok valódi (nem triviális) osztóit állítsa elő úgy, hogy egy halmazzal tér vissza, amiben rendezett párok vannak: a pár első komponense az egyik természetes szám, a második komponense az első komponens valódi osztóinak halmaza. Hívja meg a függvényt példákkal (kapja el a dobott kivételt).

b) Készítse el azt a listát, amelyben 112-nél nagyobb, 1000-nél kisebb prímszámok vannak, amelyek kongruensek 7-tel modulo 235.

6. Olvasson be a billentyűzetről egy m pozitív egész számot. Ábrázolja a következő irányított gráfot: csúcsai az $\{1; 2; ....; m\}$ összes 3-elemű részhalmazai; egy $\{a; b; c\}$ csúcsból akkor mutat irányított él egy $\{d; e; f\}$ csúcsba, ha $a + b + c < d * e * f$. Példaként rajzolja ki $m = 6$ esetben a gráfot.