Név: ...., NEPTUN-kód ....

Csoport, gyak.vez.: ....

Pontszám: ....

Programtervező informatikus szak I. évfolyam
Matematikai alapok 1. zárthelyi
2022. október 14.

Minden feladathoz indoklást, levezetést kérünk.

1. *(7 pont)* Hozzuk a legegyszerűbb alakra az alábbi algebrai kifejezést az $a \in \mathbb{R}$ változó olyan értékei mellett, melyekre a megadott kifejezés értelmes:

$$\left(\frac{5}{2\sqrt{a}-1} + \frac{8}{2\sqrt{a}+1} + \frac{7+6\sqrt{a}}{1-4a}\right) \cdot \left((1+\sqrt{a})^2 - a\right)$$

2. *(9 pont)* Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$\frac{x-1}{x+2} > \frac{x+3}{x-2}$$

3. *(5+6=11 pont)* Adott az alábbi egyenlőtlenség a valós számok halmazán:

$$\log_2\left(25^{\log_5\sqrt{5}} + 3 \cdot \log_{1/2}(x-3)\right) < 3$$

a) Határozzuk meg az egyenlőtlenség értelmezési tartományát.

b) Oldjuk meg az egyenlőtlenséget.

4. *(8 pont)* Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\cos(2x) - 2\cos^2 x = 4\sin^2 x + 8\sin x + 2$$

5. *(7+1= 8 pont)*

a) Egy megfelelő $N \in \mathbb{N}$ szám meghatározásával igazoljuk az alábbi állítást:

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\, n > N: \quad \frac{n^4 - 15n^3 - 7n^2 - 6n - 2}{5n^3 + n^2 + n + 3} > 25$$

b) Írjuk fel "pozitív" kijelentés formájában az állítás tagadását.

6. *(7 pont)* Igazoljuk teljes indukcióval:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^+ : \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[7]{k}} \geq \sqrt[7]{n^6}$$