

Név:, NEPTUN-kód

Csoport, gyak.vez.:

Pontszám:

*Programtervező informatikus szak I. évfolyam
Matematikai alapok 2. zárthelyi
2022. november 18.*

Minden feladathoz indoklást, levezetést kérünk.

A 6. feladat (elméleti kérdés) megoldását csak e feladatlap hátoldalára írva fogadjuk el.

1. a) (7 pont) Tekintsük a $z_1 = 8 - i$, $z_2 = 3 - 2i$ komplex számokat. Számítsuk ki az alábbi kifejezés értékét (az eredményt algebrai alakban kérjük):

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 \cdot (\overline{z_1 - z_2})$$

- b) (4 pont) Oldjuk meg az $z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán.

2. Legyen $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$.

(a) (6 pont) $(AB^T)^{-1} \cdot (A - B) = ?$

(b) (4 pont) $\det(A^T B) = ?$

3. (4 pont) Altér-e \mathbb{R}^4 -ben az alábbi részhalmaz?

$$H := \left\{ (x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 \mid xyz u \geq 0 \right\}$$

4. Tekintsük az \mathbb{R}^4 vektortér alábbi alterét:

$$W := \left\{ (y + z + 2u, x, x - y - u, x + y - 2z + u) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y, z, u \in \mathbb{R}, 2x + y = z + u \right\}$$

(a) (8 pont) Adjunk meg bázist W -ben. Hány dimenziós a W altér?

(b) (2 pont) Altere-e a W vektortérnek a $G = \text{Span}((0, 0, 0, 0), (1, 0, -1, 3))$ halmaz?

5. (8 pont) Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert Gauss-Jordan eliminációval. Írjuk fel a megoldást skalár alakban és vektor alakban is. Mennyi az együtthatómátrix rangja?

$$\begin{array}{rrrrrrr} 3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & + & 2x_5 & = & -2 \\ 5x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 7x_4 & + & 4x_5 & = & -1 \\ x_1 & + & 8x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 4 \end{array}$$

6. (elméleti kérdés, 7 pont, a feladatlap hátoldalára)

a) Definiálja a mátrix inverzének fogalmát!

b) Írjon fel hármat (bizonyítás nélkül) a determináns tulajdonságai közül. (Ha ugyanazt a tulajdonságot sorokra és oszlopokra is leírja, az egynek számít, nem kettőnek.)

c) Mondja ki és bizonyítsa be a lineárisan összefüggő rendszerek szűkítéséről szóló tételt.