Analízis II.

11. házi feladat

Boda Bálint

2022. őszi félév

1. A definíció alapján bizonyítsa be, hogy az

$$f(x,y) \coloneqq x^3 + xy \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény totálisan deriválható az $a \coloneqq (2,3)$ és adja meg az $f'(a)$ deriváltmátrixot! Az $f'(a)$-ra kapott eredményt ellenőrizze a Jacobi-mátrix kiszámításával!

Megoldás.

Legyen $a = (a_1, a_2) = (2,3)$ és $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$. Azt kell belátnunk, hogy van olyan $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ sormátrix, amire:

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - A\cdot h|}{\|h\|} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left| f(a+h) - f(a) - \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

Határozzuk meg az A mátrixot:

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) = f(2 + h_1, 3 + h_2) - f(2,3) = \\ &= (2+h_1)^3 + (2+h_1)(3+h_2) - (2^3 + 2\cdot 3) = \\ &= 8 + 12h_1 + 6h_1^2 + h_1^3 + 6 + 2h_2 + 3h_1 + h_1h_2 - 14 = \\ &= 15h_1 + 2h_2 + 6h_1^2 + h_1^3 + h_1h_2 = \\ &= \begin{pmatrix} 15 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + 6h_1^2 + h_1^3 + h_1h_2 \end{aligned}$$

így:

$$\frac{\left| f(a+h) - f(a) - \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \frac{|h_1^3 + 6h_1^2 + h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

Azt kell bizonyítani, hogy a jobb oldali függvény határértéke a $(0,0)$ pontban 0.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (h_1, h_2) \in D_f \setminus \{(0,0)\} : 0 < \|(h_1,h_2)\| < \delta : \left| \frac{|h_1^3 + 6h_1^2 + h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{|h_1^3 + 6h_1^2 + h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| = \frac{|h_1^3 + 6h_1^2 + h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \frac{|h_1^3| + 6h_1^2 + |h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} < \varepsilon$$

Ha feltesszük, hogy $\sqrt{h_1^2 + h_2^2} < 1$, akkor $|h_1| < 1$ és így $|h_1^3| \le h_1^2$. Továbbá tudjuk, hogy $|h_1h_2| \le \frac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2)$ Így:

$$\frac{|h_1^3| + |h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \le \frac{7h_1^2 + \frac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \le \frac{8h_1^2 + 8h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 8\sqrt{h_1^2 + h_2^2} < \varepsilon$$

Így, ha $\delta \coloneqq \min\left(1, \frac{\varepsilon}{8}\right)$ akkor az előbbi függvény határértéke 0 a $(0,0)$ pontban, így $f \in D(2,3)$ és $f'(a) = \begin{pmatrix} 15 & 2 \end{pmatrix}$.

Ellenőrizzük, a kapott eredményt a Jacobi-mátrix meghatározásával:

$$\partial_1 f(x,y) = 3x^2 + y \qquad \partial_1 f(2,3) = 12 + 3 = 15$$
$$\partial_2 f(x,y) = x \qquad \partial_2 f(2,3) = 2$$

Így a Jacobi-mátrix: $\begin{pmatrix} 15 & 2 \end{pmatrix}$, ami valóban megegyezik a kapott eredménnyel.

2. Írja fel a $z = x^2 \cdot e^{xy}$ egyenletű felület $P_0(1,0)$ pontjához tartozó érintősíkjának egyenletét, és adja meg egy normálvektorát!

Megoldás.
Világos, hogy léteznek a parciális deriváltak:

$$\partial_1 f(x,y) = 2x \cdot e^{xy} + x^2 \cdot e^{xy} \cdot y \qquad \partial_1 f(1,0) = 2$$
$$\partial_2 f(x,y) = x^2 \cdot e^{xy} \cdot x = x^3 \cdot e^{xy} \qquad \partial_2 f(1,0) = 1$$

Mivel a parciális deriváltak léteznek $P_0 = (x_0, y_0)$ pont egy környezetében és folytonosak a pontban, ezért f totálisan deriválható a pontban. A felület $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontjához a következő érintősík húzható:

$$\begin{aligned} z - f(x_0,y_0) &= \partial_1 f(x_0,y_0)(x - x_0) + \partial_2 f(x_0,y_0)(y - y_0) \\ z - 1 &= 2(x-1) + y \\ 1 &= 2x + y - z \end{aligned}$$

Ennek egy normálvektora: $(2, 1, -1)$.

3. Határozza meg az

$$f(x,y) \coloneqq 2x^3 - 6x + y^3 - 12y + 5 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit.

Megoldás.
Az f függvény egy kétváltozós polinom, ezért $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Az elsőrendű szükséges feltétel alapján:

$$\partial_1 f(x,y) = 6x^2 - 6 = 0 \qquad x_{1,2} = \pm 1$$
$$\partial_2 f(x,y) = 3y^2 - 12 = 0 \qquad y_{1,2} = \pm 2$$

A stacionárius pontok a következők:

$$P_1(1,2), \quad P_2(-1,2), \quad P_3(1,-2), \quad P_4(-1,-2)$$

Határozzuk meg a Hesse-féle mátrixot:

$$\partial_{xx} f(x,y) = 12x, \quad \partial_{xy} f(x,y) = 0, \quad \partial_{yx} f(x,y) = 0, \quad \partial_{yy} f(x,y) = 6y$$

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(x,y) & \partial_{xy} f(x,y) \\ \partial_{yx} f(x,y) & \partial_{yy} f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

$$D_1 = 12x, \quad D_2 = \det f''(x,y) = 12x \cdot 6y = 72xy$$

Vizsgáljuk meg a stacionárius pontokat:

1. $P_1(1,2)$
$$f''(1,2) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}, D_2 = 72 \cdot 12 \cdot 12 > 0 \text{ és } D_1 = 12 > 0$$
Így f-nek P_1-ben lokális minimumhelye van.

2. $P_2(-1,2)$
$$f''(-1,2) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}, D_2 = 72 \cdot -12 \cdot 12 < 0$$
Így f-nek P_2-ben nincs lokális szélsőértéke.

3. $P_3(1,-2)$
$$f''(1,-2) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}, D_2 = 72 \cdot 12 \cdot -12 < 0$$
Így f-nek P_3-ban nincs lokális szélsőértéke.

4. $P_4(-1,-2)$
$$f''(-1,-2) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}, D_2 = 72 \cdot -12 \cdot -12 > 0 \text{ és } D_1 = -12 < 0$$
Így f-nek P_1-ben lokális maximumhelye van.