Analízis 1, 1. zárthelyi dolgozat, 2022.03.25.

Megoldások

(Vázlatosan)

1. Legyen

$$H = \left\{ \frac{x^2+9}{3x^2+9} \colon x \in (-\infty, 3) \right\}.$$

Határozza meg a H halmaz szuprémumát és infimumát! Van-e a H halmaznak legnagyobb, illetve legkisebb eleme? (10 pont)

Megoldás:

- Átalakítás: $\dfrac{x^2+9}{3x^2+9} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{x^2+3}$.
- $\sup H = \max H = 1$, mert $\dfrac{2}{x^2+3} \le \dfrac{2}{3}$, hiszen $x^2 \ge 0$, és $\dfrac{2}{x^2+3} = \dfrac{2}{3}$, ha $x = 0$.
- $\inf H = \dfrac{1}{3}$, mert $\dfrac{1}{3}$ alsó korlát, hiszen $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{x^2+3} > \dfrac{1}{3} \iff \dfrac{2}{x^2+3} > 0$ igaz, illetve $\dfrac{1}{3}$ a legnagyobb alsó korlát, azaz $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists x \in (-\infty, 3)\colon \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{x^2+3} < \dfrac{1}{3} + \varepsilon$, hiszen $\dfrac{2}{x^2+3} < \varepsilon \iff x^2 > \dfrac{2}{\varepsilon} - 3$ és ilyen $x < 3$ szám létezik, pl. $x = -\sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}} - 1$, mert ekkor $x^2 > \dfrac{2}{\varepsilon} > \dfrac{2}{\varepsilon} - 3$.
- $\nexists \min H$, mert $\dfrac{2}{x^2+3} \neq 0$.

2. Legyen

$$f(x) = \frac{2}{|x+1|} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\big) \qquad \text{és} \qquad g(x) = x^2 - 2x - 4 \quad \big(x \in [0, +\infty)\big).$$

(a) Állapítsa meg, hogy invertálható-e az f függvény! (2 pont)

(b) Határozza meg az $f \circ g$ függvényt! (4 pont)

(c) Számítsa ki a $[-4, 4]$ halmaz g által létesített ősképét! (4 pont)

Megoldás:

- Nem invertálható, mert pl. $f(-2) = f(0)$.
- $\mathcal{D}_{f \circ g} = \{x \ge 0\colon x^2 - 2x - 4 \neq -1\} = \{x \ge 0\colon (x+1)(x-3) \neq 0\} = [0, +\infty) \setminus \{3\}$.
- $f \circ g(x) = \dfrac{2}{|x^2 - 2x - 3|} \qquad \big(x \in [0, +\infty) \setminus \{3\}\big)$.

- $g^{-1}\Big[[-4,4]\Big] = \{x \geq 0\colon\ -4 \leq x^2 - 2x - 4 \leq 4\} = \{x \geq 0\colon\ -4 \leq (x-1)^2 - 5 \leq 4\} =$
  $= \{x \geq 0\colon 1 \leq |x-1| \leq 3\}$, így

- $g^{-1}\Big[[-4,4]\Big] = \{x \geq 0\colon 1 \leq x-1 \leq 3\} \cup \{x \geq 0\colon\ -3 \leq x-1 \leq -1\} = [2,4] \cup \{0\}.$

3. A definíció alapján igazolja, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^3 - n^2 + 3}{2n^2 - n + 1} = +\infty.$$

(8 pont)

Megoldás:

- A definíció: $\forall P > 0$-hoz $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n > n_0\colon \dfrac{3n^3 - n^2 + 3}{2n^2 - n + 1} > P$

- Átalakítások, alsó becslés: $\dfrac{3n^3 - n^2 + 3}{2n^2 - n + 1} > \dfrac{3n^3 - n^2}{2n^2 + 1} = \dfrac{2n^3 + n^3 - n^2}{2n^2 + 1} =$
  $= \dfrac{2n^3 + n^2(n-1)}{2n^2 + 1} \geq (\text{ha } n \geq 1) \geq \dfrac{2n^3}{2n^2 + n^2} = \dfrac{2n^3}{3n^2} > \dfrac{n}{2} > P.$

- A küszöbindex: $n_0 := \max\Big\{[2P], 1\Big\}$.

4. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

$$a)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3 - n^2}}{\sqrt{4n+1}}, \qquad (4\ pont)$$

$$b)\ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{5^{n+1} + n^2 3^n}, \qquad (4\ pont)$$

$$c)\ \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+5}{2n}\right)^{3n+1}. \qquad (4\ pont)$$

Megoldás:

a) $$\frac{\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3 - n^2}}{\sqrt{4n+1}} = \frac{n^2+1}{\sqrt{4n+1}\left(\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3-n^2}\right)} =$$
$$= \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{\sqrt{4 + \frac{1}{n}}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^3}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)} \to \frac{1}{\sqrt{4}(\sqrt{1} + \sqrt{1})} = \frac{1}{4}.$$

b) $x_n := 5 + n^2\left(\frac{3}{5}\right)^n \to 5 > 0$ valós szám ($n^k q^n \to 0$, ha $|q| < 1$) $\quad\Longrightarrow$
$\Longrightarrow \quad \sqrt[n]{5^{n+1} + n^2 3^n} = 5\sqrt[n]{x_n} \to 5 \cdot 1 = 5.$

c) $$\left(\frac{n+5}{2n}\right)^{3n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1}\left(\frac{n+5}{n}\right)^{3n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^n \left[\left(1 + \frac{5}{n}\right)^n\right]^3 \left(1 + \frac{5}{n}\right) \to$$
$$\to \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \left[e^5\right]^3 \cdot 1 = 0.$$

5. Mutassa meg, hogy az

$$a_0 = 5, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2a_n}{10} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat konvergens, és számítsa ki a határértékét! (10 pont)

Megoldás:

- A sorozat jól definiált, alulról korlátos és $a_n > 0 \ \ (n \in \mathbb{N})$: indukcióval.
  $n = 0$-ra igaz, mert $a_0 = 5$ valós szám.
  Tegyük fel, hogy valamely n-re igaz, azaz $a_n > 0$ valós szám. Ekkor
  $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 2a_n}{10} >$ (ind. felt. $a_n > 0$ és $a_n^2 > 0$) $> \dfrac{0^2 + 2 \cdot 0}{10} = 0 \quad \Longrightarrow a_{n+1} > 0$ valós szám,
  tehát $n+1$-re is igaz.
- A sorozat monoton csökkenő, azaz $a_{n+1} \leq a_n \ \ (n \in \mathbb{N})$: indukcióval.
  $n = 0$-ra igaz, mert $a_1 = \dfrac{a_0^2 + 2a_0}{10} = \dfrac{5^2 + 2 \cdot 5}{10} = 3,5 < 5 = a_0$.
  Tegyük fel, hogy valamely n-re igaz, azaz $a_{n+1} \leq a_n$. Ekkor
  $a_{(n+1)+1} = a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}}{10} \leq$ (ind. felt. $a_{n+1} \leq a_n$ és $a_{n+1}^2 \leq a_n^2$, mert pozitív számok) $\leq$
  $\leq \dfrac{a_n^2 + 2a_n}{10} = a_{n+1},$
  tehát $n+1$-re is igaz.
- A sorozat konvergens, mert monoton csökkenő és alulról korlátos.

- Lehetséges határértékek: $A := \lim(a_n) \quad \Longrightarrow \quad A = \dfrac{A^2 + 2A}{10} \quad \Longrightarrow \quad A = 0$ vagy $A = 8$.

- Mivel $a_n \leq a_0 = 5$, mert monoton csökkenő, ezért csak $A = 0$ lehet a sorozat határértéke.