A számításelmélet alapjai I.

1. gyakorlat

Boda Bálint

2023. tavaszi félév

Definíció (ábécé)**.** Szimbólumok egy véges nemüres halmaza. Például. $V = \{a, b\}$.

Definíció (szimbólum)**.** Egy tetszőleges V ábécé elemeit szimbólumoknak vagy betűknek nevezzük.

Definíció (szó)**.** Egy $u \in V^*$ (V ábécé elemiből álló véges) sorozatot V feletti szónak (vagy sztringnek) nevezünk.

1. Szavak

1.1. Alapfogalmak

Definíció. Legyen $u \in V^*$ egy szó, ekkor a benne lévő betűk számát u hosszának nevezzük és $l(u)$-val vagy $|u|$-el jelöljük.

Jelölés. Egy $\delta \in V$ betű az $u \in V^*$ szóban lévő előfordulásinak számát $l(u)_\delta$-val vagy $|u|_\delta$-val jelöljük.

Definíció (üres szó)**.** Legyen V egy ábécé, ekkor üres szónak nevezzük azt az ε szót melyre $|\varepsilon| = 0$.

Megjegyzés. Világos, hogy $\varepsilon \in V^*$ bármely V abécé esetén.

Definíció (V^+)**.** Tetszőleges V ábécé esetén V^+ jelöli az V feletti nemüres szavak halmazát, azaz a $V^+ = V^* \setminus \{\varepsilon\}$ halmazt.

1.2. Műveletek

1.2.1. Konkatenáció

Definíció. Legyen V egy ábécé és legyenek $u = s_1 \dots s_n$ és $v = t_1 \dots t_k$ V feletti szavak. Ekkor az $uv \coloneqq s_1 \dots s_n t_1 \dots t_k$ szót u és v konkatenáltjának nevezzük.

Tulajdonságok

1. $|uv| = |u| + |v|$
2. általában nem kommutatív (kivétel egyetlen betűből álló ábécék)
3. asszociatív: $u, v, w \in V^* \implies u(vw) = (uv)w$
4. $\forall u, v \in V^* : uv \in V^*$ (V^* a konkatenáció műveletére zárt)
5. létezik egységelem: $\forall u \in V^* : u\varepsilon = u$

Így V^* félcsoport.

1.2.2. Hatványozás

Definíció. Legyen $i \in \mathbb{N}^+$ és $u \in V^*$. Ekkor u i-edik hatványának nevezzük az u szó i darab példányának konkatenáltját.

$$u^0 = \varepsilon,\ u^i = uu^{i-1}\,(i \in \mathbb{N}^+)$$

Megjegyzés. Nyilván $\varepsilon^0 = \varepsilon$.

Tulajdonságok

1. $u^{n+k} = u^n u^k \ \ (k, n \in \mathbb{N})$
2. $(ab)^n \neq a^n b^n$

1.2.3. Tükörkép

Definíció. Legyen $u = a_1 \dots a_n$, ekkor a szó tükörképének (megfordítottjának) nevezzük a

$$u^R = a_n \dots a_1\ (1 \leq i \leq n : u_i = u^R_{n+1-i})$$

szót. Alternatív jelölés: u^{-1}, $\mathrm{rev}(u)$.

Megjegyzés. Ha $u = u^R$ a szót palindrómának (vagy palindrom tulajdonságúnak) nevezzük.

Tulajdonságok

1. $\varepsilon^R = \varepsilon$
2. $\left(u^R\right)^R = u$
3. $(uv)^R = v^R u^R$
4. $\left(u^i\right)^R = \left(u^R\right)^i \ \ (i \in \mathbb{N})$

1.3. Résszavak

1.4. Résszó

Legyen V egy ábécé és legyenek u és v szavak V felett.

Definíció (résszó)**.** Az u szó résszava a v szónak, ha $\exists x, y \in V^* : v = xuy$.

Definíció (valódi résszó)**.** Az u szó valód résszava a v szónak, ha résszó és $u \neq v$ és $u \neq \varepsilon$.

Definíció (prefixum)**.** Ha, $v = xuy$, úgy hogy $x = \varepsilon$, akkor u-t v prefixumának nevezzük.

Definíció (szuffixum)**.** Ha, $v = xuy$, úgy hogy $y = \varepsilon$, akkor u-t v szuffixumának nevezzük.

Az u szót v valódi prefixumainak/szuffixumainak nevezzük, ha $u \neq \varepsilon \wedge u \neq v$.

2. Nyelv

Definíció (nyelv)**.** Legyen V egy ábécé, ekkor nyelvnek nevezzük az $L \subseteq V^*$ halmazt. Ekkor L-t V

Jelölés. $\emptyset$-el jelöljük az üres nyelvet. $\emptyset \neq \{\varepsilon\}$

2.1. Műveletek

Mivel a nyelvek halmazok értelmezzük az unió, metszet, különbség és komplementer műveleteket.

2.1.1. Konkatenáció

Definíció. Legyen V^* egy ábécé és $L_1, L_2 \subseteq V^*$, ekkor L_1 és L_2 konkatenációjának nevezzük az

$$L_1L_2 = \{u_1, u_2 | u_1 \in L_1, u_2 \in L_2\}$$

a nyelvet.

Példa.

$$\{a, b\} \{ab, b\} = \{aab, ab, bab, bb\}$$

Tulajdonságok

1. Minden L nyelv esetén: $\{\varepsilon\} L = L \{\varepsilon\}$
2. Asszociatív
3. Egységelem: $\{\varepsilon\}$.

2.1.2. Hatványozás

Definíció. Legyen V^* egy ábécé és $L \subseteq V^*$, ekkor L i-edik hatványának nevezzük a

$$L^0 = \{\varepsilon\}, \qquad L^i = LL^{i-1} \quad (i \geq 1)$$

a nyelvet.

Megjegyzés. $\emptyset^0 = \{\varepsilon\}$.

2.1.3. Iteratív lezárt

Definíció. Egy L nyelv iteratív lezártjának nevezzük az

$$L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i = L^0 \cup L^1 \cup \ldots$$

nyelvet.

2.1.4. Pozitív lezárt

Definíció. Egy L nyelv pozitív lezártjának nevezzük az

$$L^+ = \bigcup_{i \geq 1} L^i = L^0 \cup L^1 \cup \cdots = L^* \setminus \{\varepsilon\}$$

nyelvet.

2.2. Feladatok

2.2.1.

Legyenek

$$\begin{aligned}
L_1 &= \{a, bb, aba\} \\
L_2 &= \{ab^n \mid n \geq 0\} = \{a, ab, abb, \dots\} \\
L_3 &= \{u \in \{a,b\}^* \mid l_a(u) = l_b(u)\} = \{\varepsilon, ab, ba, \dots\} \\
L_4 &= \{u \in \{a,b\}^* \mid l_b(u) \bmod 2 = 0\} = \{\varepsilon, a, bb, abb, aabb, \dots\} \\
L_5 &= \{\varepsilon, ba\}
\end{aligned}$$

nyelvek. Határozzuk meg:

$$\begin{aligned}
L_1 \cap L_2 &= \{a\} \\
L_1 \cap L_3 &= \emptyset \\
L_1 \cap L_4 &= \{a, bb\} \\
L_2 \setminus L_1 &= \{ab^n \mid n \geq 1\} \\
L_1 L_5 &= \{a, aba, bb, bbba, ababa\} \\
L_1^2 &= \{aa, abb, aaba, bba, bbbb, bbaba, abaa, ababb, abaaba\}
\end{aligned}$$

2.2.2.

Legyenek

$$\begin{aligned}
L_1 &= \{a^n b^m \mid m \geq n \wedge n \geq 0\} = \{\varepsilon, b, ab, abb, \dots\} \\
L_2 &= \{ab\}^* = \{\varepsilon, ab, abab, \dots\}
\end{aligned}$$

nyelvek. Határozzuk meg:

$$\begin{aligned}
L_1 \cap L_2 &= \{\varepsilon, ab\} \\
L_1 \setminus L_2^* &= \{a^n b^m \mid m \geq n \geq 2\} \cup \{b\}^+ \cup \{ab^n \mid n \geq 1\} \\
L_1^* &= \{\varepsilon, b, ab, abb, bb, bab, abab, \dots\} \\
L_2\ L_1^* &= \emptyset \qquad (ab \in L_1^* \text{ miatt}) \\
L_2^* &= L_2
\end{aligned}$$