Név: ...., *NEPTUN-kód* ....

Csoport, gyak.vez.: ....

Pontszám: ....

Programtervező informatikus szak I. évfolyam
Matematikai alapok 1. zárthelyi
2021. október 15.

Minden feladathoz indoklást, levezetést kérünk.

1. *(7 pont)* Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést ($a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$, $a \neq -1$):

$$\left(\frac{a}{a+1}+\frac{a^2+a+1}{a^3-1}+\frac{2a}{a^2-1}\right)\cdot\left(\frac{a}{a+1}+\frac{a^2+a+1}{a^3-1}-\frac{2a}{a^2-1}\right)$$

2. *(8 pont)* Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{x-x^2} > 2x-1.$$

3. *(4+8= 12 pont)*

a) Határozzuk meg az a valós paraméter értékét úgy, hogy 1 gyöke legyen az alábbi polinomnak, majd emeljük ki az 1-hez tartozó gyöktényezőt.

$$P(x) := x^3+ax^2+x-6 \ \ (x \in \mathbb{R}).$$

b) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\log_3(x^3+4x^2+x-6) - 2\cdot\log_9(x+3) = 2\cdot\log_3(\sqrt{3-x}).$$

4. *(7 pont)* Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán

$$(1-\cos x)^2 - 3\sin^2 x \leq 0$$

5. *(1+7+1= 9 pont)*

a) Írjuk fel kvantorok segítségével a következő állítást: minden elég nagy n természetes szám esetén:

$$\frac{3n^5-2n^4+n^3+n^2-n+7}{5n^6+2n^5-n^4-n^3+n-398} < \frac{1}{5}.$$

b) Egy megfelelő küszöb meghatározásával igazoljuk a fenti állítást.

c) Írjuk fel "pozitív" kijelentés formájában az állítás tagadását.

6. *(7 pont)* Igazoljuk teljes indukcióval:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^+ : \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k\cdot(k+1)\cdot 2^k} = 1 - \frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}$$