Programozáselmélet

4. gyakorlat

Boda Bálint

2022. őszi félév

Definíció (Logikai függvény)**.** Legyen A egy tetszőleges halmaz. Ekkor **logikai függvény**nek nevezzük a

$$Q \in A \to \mathbb{L}$$

függvényt.

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy nem a $Q : A \to \mathbb{L}$ jelölést használtuk, azaz az A halmaznak lehet olyan eleme, melyhez a függvény nem rendel logikai értéket.

Definíció (Igazsághalmaz)**.** Egy $Q \in A \to \mathbb{L}$ logikai függvény igazsághalmazának nevezzük a

$$\lceil Q \rceil := \{a \in A \mid Q(a)\ igaz\}$$

halmazt.

Definíció (A "következik" reláció)**.** Legyenek $Q, R \in A \to \mathbb{L}$ logikai függvények. Ha

$$\lceil Q \rceil \subseteq \lceil R \rceil$$

akkor azt mondjuk Q maga után vonja R-t, (más szóval R következik Q-ból) és $Q \implies R$-el jelöljük.

Definíció (Leggyengébb előfeltétel)**.** Legyen $S \subseteq A \times \left(\bar{A} \cup \{fail\}\right)^{**}$ és $R \in A \to \mathbb{L}$ egy logikai függvény. Ekkor az S program R utófeltételhez tartozó leggyengébb előfeltétele az az $lf(S, R) : A \to \mathbb{L}$ függvény, melyre

$$\lceil lf(S, R) \rceil = \left\{a \in A \mid a \in D_{p(S)} \ \wedge \ p(S)(a) \subseteq \lceil R \rceil\right\}$$

Megjegyzés. A leggyengébb előfeltétel igazsághalmaza pontosan azon állapotokat foglalja magába, melyekből kiindulva a program hibátlanul terminál, úgy, hogy minden lehetséges végállapotban teljesül a R függvény.

2.

Legyen $A = [1..5]$, $\quad Q, P : A \to \mathbb{L}$ logikai függvények, úgy, hogy $\lceil P \rceil = \{1,2\}$, $\lceil Q \rceil = \{1,2,3,4\}$. $S \subseteq A \times \left(\bar{A} \cup \{fail\}\right)^{**}$ a következő reláció A felett:

$$S := \{(a, \langle a \rangle) \mid a \in A\} \cup \{(a, \langle a+1 \rangle) \mid a \leq 4\} \cup \{(a, \langle a, a, ... \rangle) \mid a = 3\}$$

a) Határozzuk meg a következőket: $S(1)$, $S(3)$, $D_{p(S)}$, $p(S)(1)$, $p(S)$!

b) Hány elemű S?

c) Igaz-e, hogy $P \subseteq Q$?

d) Határozzuk meg $lf(S, Q)$ igazsághalmazát!

e) Eleme-e 4 $\lceil lf(S, Q) \rceil$-nak?

2.

a) $S(1) = \{1 \to \langle 1 \rangle \,, \ 1 \to \langle 1, 2 \rangle\}$
$S(3) = \{3 \to \langle 3, 3, 3, ... \rangle\}$
$D_{p(S)} = \{a \in A \mid S(a) \subseteq \bar{A}^*\} = \{1, 2, 4, 5\}$
$p(S)(1) = \{1, 2\}$
$p(S) = \{(a, a) \mid a \in D_{p(S)}\} \cup \{(a, a+1) \mid a \in D_{p(S)} \ \wedge \ a \leq 4\}$

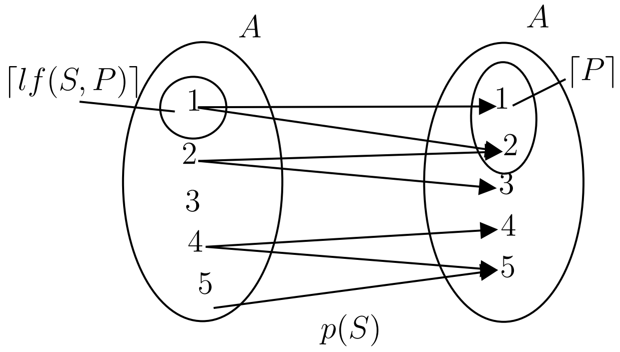
b) $|S| = |H_1| + |H_2| + |H_3| = 5 + 4 + 1 = 10$

c) $\lceil P \rceil = \{1, 2\} \implies P = \{(1, igaz), (2, igaz), (3, hamis), (4, hamis), (5, hamis)\}$
$\lceil Q \rceil = \{1, 2, 3, 4\} \implies Q = \{(1, igaz), (2, igaz), (3, igaz), (4, igaz), (5, hamis)\}$
$P \not\subseteq Q$

d) $\lceil lf(S, Q) \rceil = \{a \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \mid a \in \{1, 2, 4, 5\} \wedge p(S)(a) \subseteq \{1, 2, 3, 4\}\}$
$p(S)(1) = \{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$
$p(S)(2) = \{2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$
$3 \notin D_{p(S)}$
$p(S)(4) = \{4, 5\} \not\subseteq \{1, 2, 3, 4\}$
$p(S)(5) = \{5\} \ \not\subseteq \{1, 2, 3, 4\}$
Azaz $\lceil lf(S, Q) \rceil = \{1, 2\}$.

e) $\lceil lf(S,P) \rceil = \{1\} \not\ni 4$

Megjegyzés. A feladat vizuális módon is megoldató.



Az ábráról látható, hogy S P-re vonatkozó leggyengébb előfeltételének igazsághalmaza azon A A-beli elemeket, melyekhez $p(S)$ csak olyan értéket rendel, melyekre teljesül a P logikai függvény.

6.

Legyen $A = (x : \mathbb{N}, y : \mathbb{N})$, jelölje S az $x := x - y$ értékadást.

a) Mit rendel S, illetve $p(S)$ a $(3, 1)$ és $(1, 3)$ pontokhoz?

b) $p(S) =?$

c) Adott az $R((x, y)) = (2x + y < 5)$ logikai függvény. Számoljuk ki $\lceil lf(S,R) \rceil$-t!

d) Mondjunk olyan pontot, melyre teljesül $lf(S,R)$ és olyat amire nem.

6.

a) $\{x : 3, y : 1\} \rightarrow \langle \{x : 3, y : 1\}, \{x : 2, y : 1\} \rangle$
$\{x : 1, y : 3\} \rightarrow \langle \{x : 1, y : 3\}, fail \rangle$

b) $p(S) = \{(\{x : a, y : b\}, \{x : a - b, y : b\}) \mid a \geq b\}$

c) $\lceil lf(S,R) \rceil = \{(\{x : a, y : b\} \in A) \mid a \geq b \ \wedge \ 2a - b < 5\}$

d) $\{x : 3, y : 2\}$ és $\{x : 3, y : 1\}$

4.

Legyen A egy tetszőleges állapottér, $R : A \to \mathbb{L}$ logikai függvény, S program az A állapottér felett! Döntsük el igazak-e a következő állítások:

a) $\lceil \mathrm{lf}\,(S, R) \rceil \cup \lceil \mathrm{lf}\,(S, \neg R) \rceil = A$

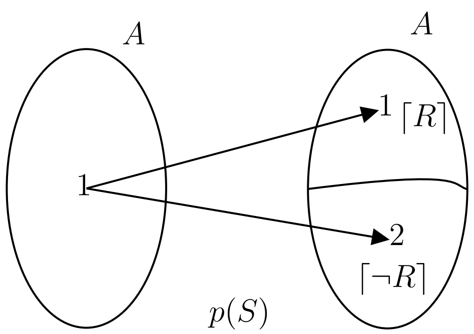
b) $\lceil \mathrm{lf}\,(S, R) \rceil \cup \lceil \mathrm{lf}\,(S, \neg R) \rceil = D_{p(S)}$

4.

A leggyengébb előfeltétel definíciójából következik, hogy $\forall a \in \lceil \mathrm{lf}\,(S, R) \rceil$: $a \in D_{p(S)}$, ami azt jelenti, hogy $\lceil \mathrm{lf}\,(S, R) \rceil \subseteq D_{p(S)}$.

a) Mivel $D_{p(S)} \subseteq A$, ezért az állítás hamis.

b)



Ekkor $\lceil \mathrm{lf}\,(S, R) \rceil$ és $\lceil \mathrm{lf}\,(S, \neg R) \rceil$ üres halmazok. $\emptyset \cup \emptyset \neq D_{p(S)}$, az állítás hamis.