Analízis II

9. Házi feladat

Boda Bálint

2022. őszi félév

1. Számítsa ki a következő határozatlan integrálokat!

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3x-1}}{x}\,dx$

A függvény értelmezve van, ha $x \geq \frac{1}{3}$. Használjuk a $t = \sqrt{3x-1}$ helyettesítést. Ekkor

$$x = \frac{t^2+1}{3} =: g(t) \;\; (t \in [0, +\infty))$$
$$g'(t) = \frac{2}{3}t \geq 0 \;\; (t \in [0, +\infty)) \implies g \text{ szigorúan monoton nő} \implies g \text{ invertálható}$$
$$g^{-1}(x) = \sqrt{3x-1} = t \;\; \left(x \in \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)\right)$$

A második helyettesítési szabály alapján, ha $x \in \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$:

$$\int \frac{\sqrt{3x-1}}{x}\,dx = \int \frac{3}{t^2+1} \cdot t \cdot \frac{2}{3}t\,dt = \int \frac{2t^2}{t^2+1}\,dt = 2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt$$
$$= 2\int 1\,dt - 2\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = 2t - 2\operatorname{arctg} t$$
$$= 2\sqrt{3x-1} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{3x-1} + c$$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-4x}\,dx \quad F = \int e^{-4x}\,dx = \frac{e^{-4x}}{-4}$

$$\int_0^{+\infty} e^{-4x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\int_0^t e^{-4x}\,dx\right) = \lim_{t\to+\infty}(F(t) - F(0))$$
$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{e^{-4x}}{-4} - \left(-\frac{1}{4}\right)\right) = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

c) $\displaystyle\int\limits_{\ln 4}^{\ln 8} \frac{e^x}{e^{2x}-4}\,dx$

A függvény a teljes intervallumon értelmezve van ezért gond nélkül meghatározhatjuk a határozott integrált.

Ehhez alkalmazzuk a $t = e^x \ \ (x \in [\ln 4, \ln 8])$ helyettesítést. Ekkor

$$\begin{aligned}
&x = \ln(t) =: g(t) \ \ (t \in [4,8]) \\
&g'(t) = \frac{1}{t} > 0 \ \ (t \in [4,8]) \implies g \text{ szigorúan monoton nő} \implies g \text{ invertálható} \\
&g^{-1}(x) = e^x = t \ \ (x \in [\ln 4, \ln 8])
\end{aligned}$$

A második helyettesítési szabály alapján, ha $x \in [\ln 4, \ln 8]$:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-4}\,dx = \int \frac{t}{t^2-4}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{1}{(t+2)(t-2)}\,dt = \int \frac{A}{(t+2)} + \frac{B}{(t-2)}\,dt$$

A parciális törtekre bontás módszerével:

$$\begin{aligned}
A(t-2) + B(t+2) &= 0x + 1 \\
At - 2A + Bt + 2B &= 0x + 1
\end{aligned}$$

Melyből a következő egyenletrendszer adódik:

$$\begin{aligned}
-2A + 2B = 1 \iff 4B = 1 \iff B = \frac{1}{4} \\
A + B = 0 \iff A = -B \iff A = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(t+2)(t-2)}\,dt &= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{(t+2)}\,dt + \frac{1}{4}\int \frac{1}{(t-2)}\,dt \\
&= \frac{1}{4}\ln(t-2) - \frac{1}{4}\ln(t+2) =: G
\end{aligned}$$

A Newton-Leibniz formula alapján:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\ln 4}^{\ln 8} \frac{e^x}{e^{2x}-4}\,dx &= \int\limits_{4}^{8} \frac{1}{(t+2)(t-2)}\,dt = G(8) - G(4) \\
&= \frac{1}{4}\ln 6 - \frac{1}{4}\ln 10 - \left(\frac{1}{4}\ln 2 - \frac{1}{4}\ln 6\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln 6 - \frac{1}{4}\ln 10 - \frac{1}{4}\ln 2 = \frac{1}{4}\left(2\ln 6 - \ln 10 - \ln 2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\ln 36 - \ln 10 - \ln 2\right) = \frac{1}{4}(\ln 3,6 - \ln 2) = \frac{1}{4}\ln 1,8 = \ln \sqrt[4]{1,8}
\end{aligned}$$

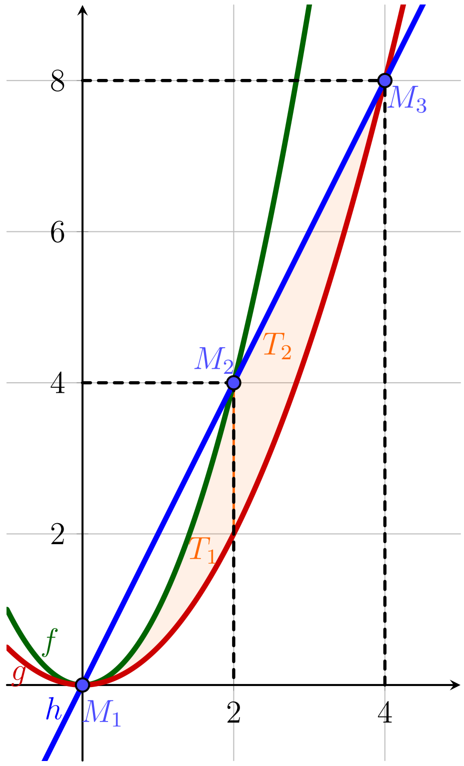
Megjegyzés. A feladat természetesen megoldható úgy is, hogy visszahelyettesítéssel kiszámoljuk az eredeti függvény primitív függvényét és arra alkalmazzuk a Newton-Leibniz formulát.

2. Számítsa ki az $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$, és az $y = 2x$ egyenletű görbék által közrezárt korlátos síkidom területét.

Jelölje f az x^2, g az $\frac{x^2}{2}$ és h a $2x$ görbét. A metszéspontok meghatározásához a következő egyenleteket kell megoldani:

$$
\begin{aligned}
x^2 &= \frac{x^2}{2} \iff 0,5x^2 = 0 & & x = 0\\
x^2 &= 2x \iff x^2 - 2x = 0 \iff x(x-2) = 0 & & x_1 = 2, x_2 = 0\\
\frac{x^2}{2} &= 2x \iff x(x-4) = 0 & & x_1 = 4, x_2 = 0
\end{aligned}
$$

Így a metszéspontok: $M_1(0,0) = M_3 = M_5$, $M_2(2,4)$, $M_3(4,8)$.
A keresett síkidomot alulról a g görbe, felülről a $[0,2]$ intervallumon az f görbe a $[2,4]$ intervallumon pedig a h görbe határolja. Így a következő két terület adódik:



$$
T_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2,\ \frac{x^2}{2} \le y \le x^2 \right\}
$$
$$
T_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \le x \le 4,\ \frac{x^2}{2} \le y \le 2x \right\}
$$

Melyeket integrálással könnyen meg tudunk határozni:

$$
\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c
$$
$$
\int \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{x^3}{6} + c
$$
$$
\int 2x\,dx = x^2 + c
$$

$$
T_1 = \int_0^2 x^2\,dx - \int_0^2 \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{8}{3} - 0 - \left(\frac{8}{6} - 0\right) = \frac{8}{6}
$$
$$
T_2 = \int_2^4 2x\,dx - \int_2^4 \frac{x^2}{2}\,dx = 16 - 4 - \left(\frac{64}{6} - \frac{8}{6}\right) = \frac{72}{6} - \frac{56}{6} = \frac{16}{6}
$$
$$
T = \frac{8}{6} + \frac{16}{6} = 4
$$

3. Határozza meg az $f(x) \coloneqq \sqrt{\operatorname{arctg} x} \quad (x \in [0,1])$ függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát!

$$V = \pi \cdot \int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx$$

Parciális integrálással:

$$\int \operatorname{arctg} x \cdot 1 \, dx = \operatorname{arctg} x \cdot \int 1 \, dx - \int \frac{1}{1+x^2} \cdot x \, dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx$$
$$= x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2+1) + c$$

Így

$$V = \pi \cdot \left(\operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2} \ln 2 - \left(0 \operatorname{arctg} 0 - \frac{1}{2} \ln 1 \right) \right) = \pi \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} \ln 2$$

4. Számítsa ki az $f(x) \coloneqq x^{\frac{3}{2}} \quad (x \in [0,4])$ függvény grafikonjának ívhosszát!

$$\ell = \int\limits_0^4 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx$$

$$\int \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \right)^2} \, dx = \int \sqrt{1 + \frac{9}{4} x} \, dx = \frac{3}{2} \int \sqrt{1x + \frac{4}{9}} \, dx$$

Lineáris helyettesítéssel:

$$\frac{3}{2} \int \left(1x + \frac{4}{9} \right)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{2 \cdot \left(x + \frac{4}{9} \right)^{\frac{3}{2}}}{3}}{1} = \left(x + \frac{4}{9} \right)^{\frac{3}{2}}$$

A Newton-Leibniz formula alapján:

$$\ell = \int\limits_0^4 \left(x + \frac{4}{9} \right)^{\frac{3}{2}} dx = \left(4 + \frac{4}{9} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{4}{9} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{40^{\frac{3}{2}}}{27} - \frac{8}{27} = \frac{8 \cdot \sqrt{1000}}{27} - \frac{8}{27}$$
$$= \frac{8 \cdot \sqrt{1000} - 8}{27}$$