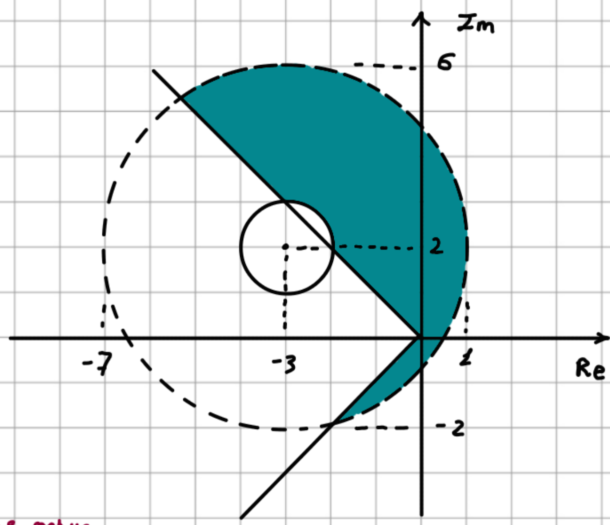
Брель Мария, Р3207
ТФКП 23.1



1. $D = \{ z:\ 1 \le |z+3-2i| < 4;\ |\arg z| \le \frac{3\pi}{4} \}$

$1 \le |x+iy+3-2i| < 4$

$1^2 \le (x+3)^2 + (y-2)^2 < 4^2$ – точки между двумя окружностями

внешняя выколота

$|\arg z| \le \frac{3\pi}{4} \Rightarrow -\frac{3\pi}{4} \le \arg z \le \frac{3\pi}{4} \Rightarrow$

z в секторе от $-\frac{3\pi}{4}$ до $\frac{3\pi}{4}$

2. $4^i = e^{i\ln 4} = e^{i(\ln 4 + i2\pi)},\ k \in \mathbb{Z} = e^{-2\pi k}\cdot\overbrace{(\cos(\ln 4) + i\sin(\ln 4))}^{\text{тригонометрическая форма комплексного числа}}$

$\underbrace{\ln 4}_{\mathbb{C}} = \underbrace{\ln|4|}_{\mathbb{R}} + i(0 + 2\pi k) = \ln 4 + 2\pi k\cdot i,\ k \in \mathbb{Z}$ $\qquad \ln z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z$

3. $\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}$ $\qquad u = ch(\frac{y}{2})\cos(\frac{y}{2}) - 2xy - 2x$

берем первообразную

$u_x = -\frac{1}{2}ch(\frac{y}{2})\cdot\sin(\frac{x}{2}) - 2y - 2 \Rightarrow v_y = -\frac{1}{2}ch(\frac{y}{2})\sin(\frac{x}{2}) - 2y - 2 \quad \Rightarrow_1$

$u_y = \frac{1}{2}sh(\frac{y}{2})\cdot\cos(\frac{x}{2}) - 2x \Rightarrow v_x = -\frac{1}{2}sh(\frac{y}{2})\cos(\frac{x}{2}) - 2x \quad \Rightarrow_2$

$\left.\begin{matrix} (1)\ -sh(\frac{y}{2})\sin(\frac{x}{2}) - y^2 - 2y + h(x) + C \\ (2)\ -sh(\frac{y}{2})\sin(\frac{x}{2}) + x^2 + f(y) + C \end{matrix}\right\} \Rightarrow v = -sh(\frac{y}{2})\sin(\frac{x}{2}) + x^2 - y^2 - 2y + C$

$f(x,y) = ch(\frac{y}{2})\cos(\frac{x}{2}) - 2xy - 2x + i(-sh(\frac{y}{2})\sin(\frac{x}{2}) + x^2 - y^2 - 2y + C)$

4. $\int_C y\,dz$, C – окружность $|z-a| = R$. Отрицательное направление

$\exists z = a + R\cdot e^{i\varphi},\ \varphi \in [0; 2\pi]$ – окружность вокруг a с радиусом R

$dz = iR\cdot e^{i\varphi}d\varphi$ $\quad R \quad \cos\varphi + i\sin\varphi$

$y = Im(z) = Im(a) + R\,Im(e^{i\varphi}) = Im(a) + R\sin\varphi$

$$\int_C y\,dz = \int_{2\pi}^{0}(Im(a) + R\cdot\sin(\varphi))(iR\cdot e^{i\varphi})d\varphi = \int_{2\pi}^{0} Im(a)\cdot i\cdot R\cdot e^{i\varphi}d\varphi + iR^2\int_{2\pi}^{0}\sin\varphi\cdot e^{i\varphi}d\varphi =$$

$$= Im(a)\cdot R\cdot i\underbrace{\int_{2\pi}^{0} e^{i\varphi}d\varphi}_{0,\ \text{т.к. контур замкнутый}} + iR^2\int_{2\pi}^{0}\sin\varphi(\cos\varphi + i\sin\varphi)d\varphi =$$

$$= iR^2\int_{2\pi}^{0}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi - R^2\int_{2\pi}^{0}\sin^2\varphi\,d\varphi = iR^2\underbrace{\int_{2\pi}^{0}\frac{1}{2}\sin 2\varphi\,d\varphi}_{0} - R^2\int_{2\pi}^{0}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi)d\varphi =$$

$$= -R^2\left(\int_{2\pi}^{0}\frac{1}{2}d\varphi - \underbrace{\int_{2\pi}^{0}\frac{1}{2}\cos 2\varphi\,d\varphi}_{0}\right) = -R^2\cdot\left(\frac{1}{2}\varphi\Big|_{2\pi}^{0}\right) = -R^2\cdot(-\pi) = \pi R^2$$

5. Разложить ф-цию в ряд Тейлора

$f(z) = (z-1)(z+3)^{-1} \quad z_0 = -1 \quad$ Пусть $w = z - z_0 = z+1 \Rightarrow z = -1 + w \Rightarrow$

$z+3 = -1+w+3 = 2+w \qquad z-1 = -1+w-1 = w-2$

$$f(z) = \frac{z-1}{z+3} = \frac{w-2}{w+2} = (w-2)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{w}{2}} \qquad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad |z|<1$$

стандартное разложение

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{w}{2}} = \frac{1}{2}\sum_0^{\infty}\frac{w^n}{2^n}\cdot(-1)^n \Rightarrow$$

$|z - z_0| < R$
область $|\frac{w}{2}|<1 \Rightarrow |w|<2$
$\Rightarrow |z+1|<2$

$$f(z) = (w-2)\cdot\frac{1}{2}\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}w^n = \frac{1}{2}\left(\sum_0^{\infty} w\frac{(-1)^n}{2^n}w^n - 2\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}w^n\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}w^{n+1} - 2\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}w^n\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}w^n - 2 - 2\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}w^n\right) = -1\cdot\frac{1}{2}\sum_1^{\infty}\left(\frac{2\cdot(-1)^{n-1}}{2^n} - \frac{2(-1)^n}{2^n}\right)w^n =$$

$$= -1 + \frac{1}{2}\sum_1^{\infty}\frac{2((-1)^{n-1} - (-1)^n)}{2^n}w^n = -1 + \frac{1}{2}\sum_1^{\infty}\frac{2((-1)^{n-1} + (-1)^{n-1})}{2^n}w^n =$$

$$= -1 + \frac{1}{2}\sum_1^{\infty}\frac{4(-1)^{n-1}}{2^n}w^n = -1 + \frac{4}{2}\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}w^n = -1 + 2\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^n}{-1\cdot 2^n}w^n = -1 - 2\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}w^n =$$

$$= -1 - 2\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(z-z_0)^n = -1 - 2\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(z+1)^n$$

6. $f(z) = (z-1)\cdot\sin\left(\frac{1}{z}\right)$

$$\sin(x) = \sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \Rightarrow \sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{-(2n+1)}$$

$$f(z) = (z-1)\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot z^{-(2n+1)} = \sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{1-(2n+1)} - \sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{-(2n+1)} =$$

$$= \sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{-2n} - \sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{-(2n+1)} =$$ <0 <0 | значение степени при любом существ. n должно быть <0 |

$$= 1 + \underbrace{\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{-2n} - \sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{-(2n+1)}}_{\text{главная часть}}$$ <0 <0

правильная часть

7. $$\int_L \frac{\exp z - \sin z}{z^4}dz = 2\pi i\cdot\operatorname{res}_0 f(z) = \frac{2}{3}\pi i$$

$L = \{z : |z| = \frac{1}{3}\}$

$$\exp z = \sum_0^{\infty}\frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

$$\sin z = \sum_0^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots$$

$$\frac{1}{z^4}(\exp z - \sin z) = \frac{1}{z^4}\left(1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{2z^3}{3!} + \ldots\right) = \frac{1}{z^4} + \frac{z^{-2}}{2!} + \frac{2z^{-1}}{3!} + \ldots$$

$-4 \qquad -2 \qquad -1$

$$\operatorname{res} f(z) = \frac{2}{3!} = \frac{2}{1\cdot2\cdot3} = \frac{1}{3}$$

8. $$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+11}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{(x+i\sqrt{11})(x-i\sqrt{11})}\,dx \ominus$$

$a<0$

$$\operatorname*{res}_{i\sqrt{11}} f(x) = \frac{\cos(ai\sqrt{11})}{2i\sqrt{11}}$$

$$\ominus \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos(ai\sqrt{11})}{2i\sqrt{11}}\cdot 2\pi i = \frac{\pi}{2\sqrt{11}}\cdot\frac{e^{i\cdot i\cdot a\sqrt{11}}+e^{-i\cdot i\cdot a\sqrt{11}}}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{11}}\cdot\frac{e^{a\sqrt{11}}+e^{-a\sqrt{11}}}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{11}}\operatorname{ch}(a\sqrt{11})$$

* вторая точка не попадает в полуокружность т.к. от 0 до $+\infty$, а вторая точка $-i\sqrt{11}$