TIPE (Océan)
Un phénomène d'hystérésis dans un modèle de circulation thermohaline

Neven Villani (353)

Épreuve de TIPE

Session 2020

Plan de l’exposé

Introduction : contexte et définitions

La dérive nord atlantique

- Circulation en surface de l'équateur vers le pôle
- Eaux chaudes
- Extension du Gulf Stream
- Inquiétudes liées au rôle climatique :
  - Influence exacte mal connue
  - Inversion possible ?
  - Refroidissement local ?
  - Phénomène d'hystérésis ?

Introduction : contexte et définitions

La dérive nord atlantique

- Circulation en surface de l'équateur vers le pôle
- Eaux chaudes
- Extension du Gulf Stream
- Inquiétudes liées au rôle climatique :
  - Influence exacte mal connue
  - Inversion possible ?
  - Refroidissement local ?
  - Phénomène d'hystérésis ?

Introduction : contexte et définitions

La dérive nord atlantique

- Circulation en surface de l'équateur vers le pôle
- Eaux chaudes
- Extension du Gulf Stream
- Inquiétudes liées au rôle climatique :
  - Influence exacte mal connue
  - Inversion possible ?
  - Refroidissement local ?
  - Phénomène d'hystérésis ?

Introduction : contexte et définitions

La dérive nord atlantique

- Circulation en surface de l'équateur vers le pôle
- Eaux chaudes
- Extension du Gulf Stream
- Inquiétudes liées au rôle climatique :
  - Influence exacte mal connue
  - Inversion possible ?
  - Refroidissement local ?
  - Phénomène d'hystérésis ?

Introduction : contexte et définitions

Qu'est-ce que l'hystérésis ?

"Soit une grandeur cause notée C produisant une grandeur effet notée E. On dit qu'il y a hystérésis lorsque la courbe $E = f(C)$ obtenue à la croissance de C ne se superpose pas avec la courbe $E = f(C)$ obtenue à la décroissance de C."

Introduction : contexte et définitions

Qu'est-ce que l'hystérésis ?

"Soit une grandeur cause notée C produisant une grandeur effet notée E. On dit qu'il y a hystérésis lorsque la courbe $E = f(C)$ obtenue à la croissance de C ne se superpose pas avec la courbe $E = f(C)$ obtenue à la décroissance de C."

Source de :

- Non linéarité
- Irréversibilité

Premières approximations

- Géométrie simplifiée de l'océan
- Pas d'atmosphère
- Seulement deux compartiments homogènes

Premières approximations

- Géométrie simplifiée de l'océan
- Pas d'atmosphère
- Seulement deux compartiments homogènes

Premières approximations

- Géométrie simplifiée de l'océan
- Pas d'atmosphère
- Seulement deux compartiments homogènes

Le modèle de Stommel

Océan à deux compartiments homogènes

Équateur

$$(T_e(t),\ S_e(t))$$

Pôle

$$(T_p(t),\ S_p(t))$$

Forçage

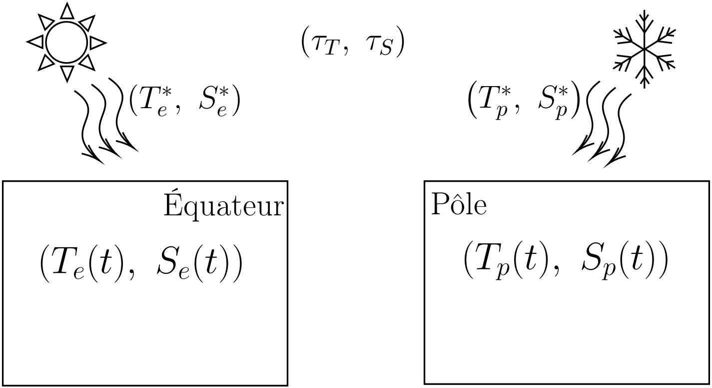
Retour des grandeurs à leur valeur à l'équilibre

$$X^* \xrightarrow{\tau_X} \boxed{X(t)}$$

$$\mathrm{d}X(t)_{\text{Forçage}} = \frac{X^* - X(t)}{\tau_X} \cdot \mathrm{d}t$$

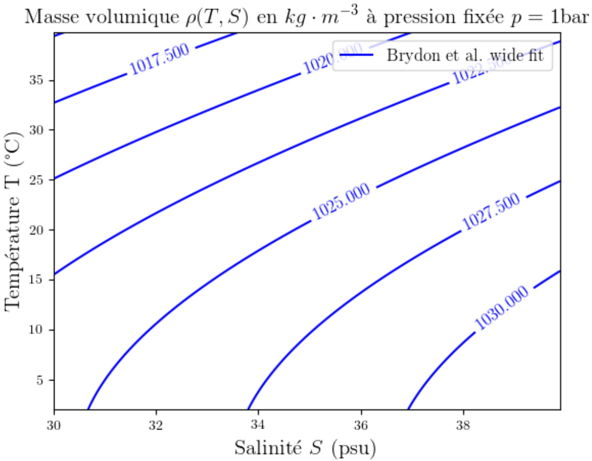
Le modèle de Stommel

Océan à deux compartiments homogènes



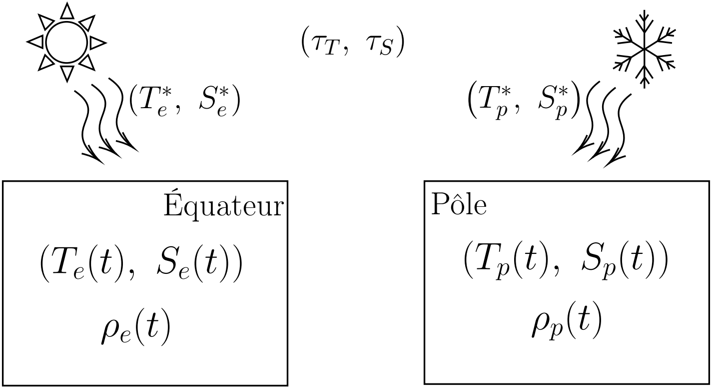
Équation d'état

Densité de l'eau de mer en fonction de sa salinité et de sa température



Le modèle de Stommel

Océan à deux compartiments homogènes



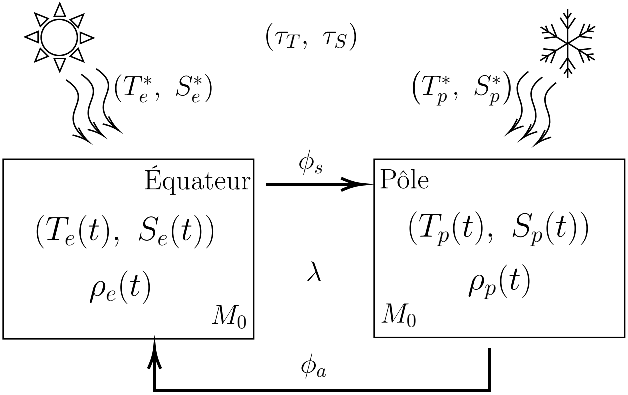
Circulation

Établissement du flux de surface

$$\phi = \lambda \cdot (\rho_p - \rho_e)$$

Le modèle de Stommel

Océan à deux compartiments homogènes



Variation des paramètres

Couplage des deux compartiments

$$\mathrm{d}S_e(t)_{\text{Couplage}} = \frac{S_e(t)\cdot(M_0-\delta m)+S_p(t)\cdot\delta m}{M_0} - S_e(t)$$

$$\mathrm{d}S_e(t)_{\text{Couplage}} = (S_p(t)-S_e(t))\cdot\frac{\delta m}{M_0}$$

$$\delta m \equiv |\phi|\cdot\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}S_e(t) = \mathrm{d}S_e(t)_{\text{Couplage}} + \mathrm{d}S_e(t)_{\text{Forçage}}$$

Variation des paramètres

Couplage des deux compartiments

$$\mathrm{d}S_e(t)_{\text{Couplage}} = \frac{S_e(t) \cdot (M_0 - \delta m) + S_p(t) \cdot \delta m}{M_0} - S_e(t)$$

$$\mathrm{d}S_e(t)_{\text{Couplage}} = (S_p(t) - S_e(t)) \cdot \frac{\delta m}{M_0}$$

$$\delta m \equiv |\phi| \cdot \mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}S_e(t) = \mathrm{d}S_e(t)_{\text{Couplage}} + \mathrm{d}S_e(t)_{\text{Forçage}}$$

Variation des paramètres

Couplage des deux compartiments

$$\mathrm{d}S_e(t)_{\text{Couplage}} = \frac{S_e(t)\cdot(M_0-\delta m)+S_p(t)\cdot\delta m}{M_0} - S_e(t)$$

$$\mathrm{d}S_e(t)_{\text{Couplage}} = (S_p(t)-S_e(t))\cdot\frac{\delta m}{M_0}$$

$$\delta m \equiv |\phi|\cdot\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}S_e(t) = \mathrm{d}S_e(t)_{\text{Couplage}} + \mathrm{d}S_e(t)_{\text{Forçage}}$$

Variation des paramètres

Couplage des deux compartiments

$$\dot{T}_e = (T_p - T_e) \cdot \frac{\phi}{M_0} + \frac{T_e^* - T_e}{\tau_T} \quad (1)$$

$$\dot{T}_p = (T_e - T_p) \cdot \frac{\phi}{M_0} + \frac{T_p^* - T_p}{\tau_T} \quad (2)$$

$$\dot{S}_e = (S_p - S_e) \cdot \frac{\phi}{M_0} + \frac{S_e^* - S_e}{\tau_S} \quad (3)$$

$$\dot{S}_p = (S_e - S_p) \cdot \frac{\phi}{M_0} + \frac{S_p^* - S_p}{\tau_S} \quad (4)$$

$$\phi = \lambda \cdot \Delta\rho \quad (5)$$

$$\Delta\rho = \rho_0 \cdot [\beta(S_e - S_p) - \alpha(T_e - T_p)] \quad (6)$$

Variation des paramètres

Couplage des deux compartiments

$$\dot{T}_e = (T_p - T_e) \cdot \frac{\phi}{M_0} + \frac{T_e^* - T_e}{\tau_T} \tag{1}$$

$$\dot{T}_p = (T_e - T_p) \cdot \frac{\phi}{M_0} + \frac{T_p^* - T_p}{\tau_T} \tag{2}$$

$$\dot{S}_e = (S_p - S_e) \cdot \frac{\phi}{M_0} + \frac{S_e^* - S_e}{\tau_S} \tag{3}$$

$$\dot{S}_p = (S_e - S_p) \cdot \frac{\phi}{M_0} + \frac{S_p^* - S_p}{\tau_S} \tag{4}$$

$$\phi = \lambda \cdot \Delta\rho \tag{5}$$

$$\Delta\rho = \rho_0 \cdot [\beta(S_e - S_p) - \alpha(T_e - T_p)] \tag{6}$$

Variation des paramètres

Couplage des deux compartiments

$$\dot{T}_e = (T_p - T_e) \cdot \frac{\phi}{M_0} + \frac{T_e^* - T_e}{\tau_T} \quad (1)$$

$$\dot{T}_p = (T_e - T_p) \cdot \frac{\phi}{M_0} + \frac{T_p^* - T_p}{\tau_T} \quad (2)$$

$$\dot{S}_e = (S_p - S_e) \cdot \frac{\phi}{M_0} + \frac{S_e^* - S_e}{\tau_S} \quad (3)$$

$$\dot{S}_p = (S_e - S_p) \cdot \frac{\phi}{M_0} + \frac{S_p^* - S_p}{\tau_S} \quad (4)$$

$$\phi = \lambda \cdot \Delta\rho \quad (5)$$

$$\Delta\rho = \rho_0 \cdot [\beta(S_e - S_p) - \alpha(T_e - T_p)] \quad (6)$$

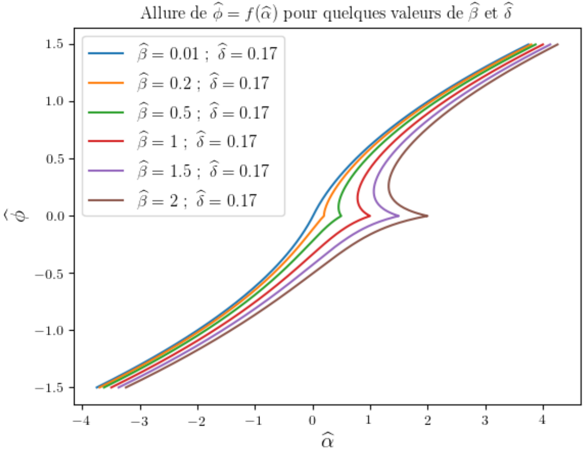
Résolution

Recherche de l'équilibre

$$\widehat{\alpha} = \left(1 + \left|\widehat{\phi}\right|\right) \left(\widehat{\phi} + \frac{\widehat{\beta\delta}}{\widehat{\delta} + \left|\widehat{\phi}\right|}\right)$$

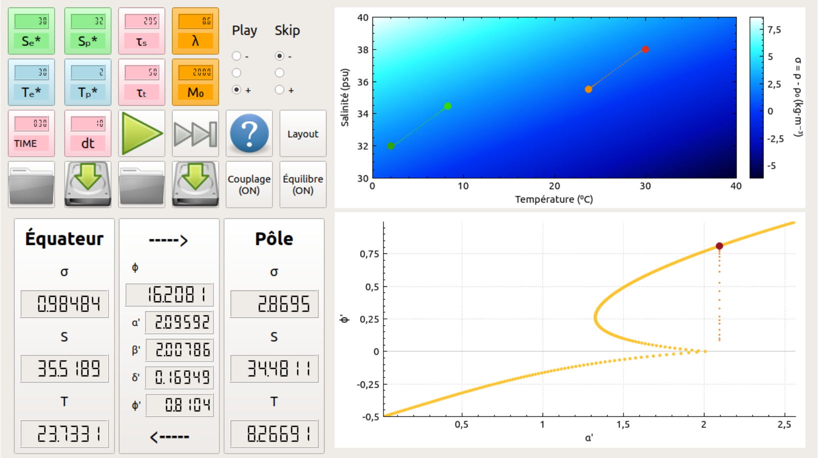
Position d'équilibre

Allure de $\widehat{\phi} = f(\widehat{\alpha})$ et influence des paramètres



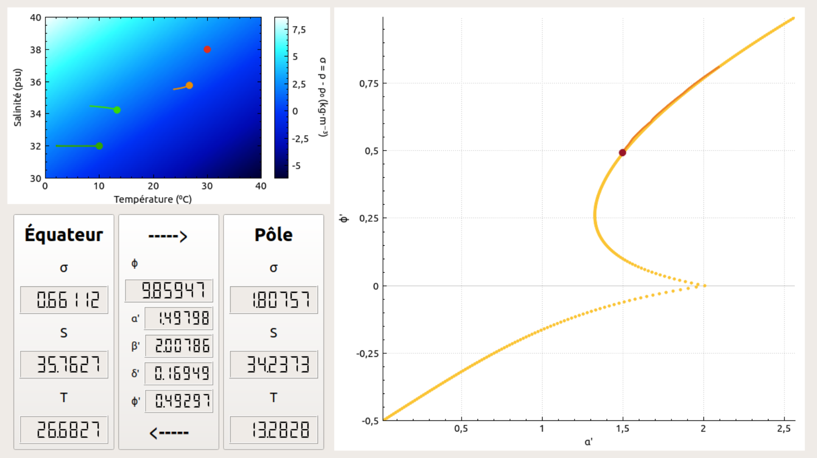
Position d'équilibre

Confirmation par la simulation de la stabilité



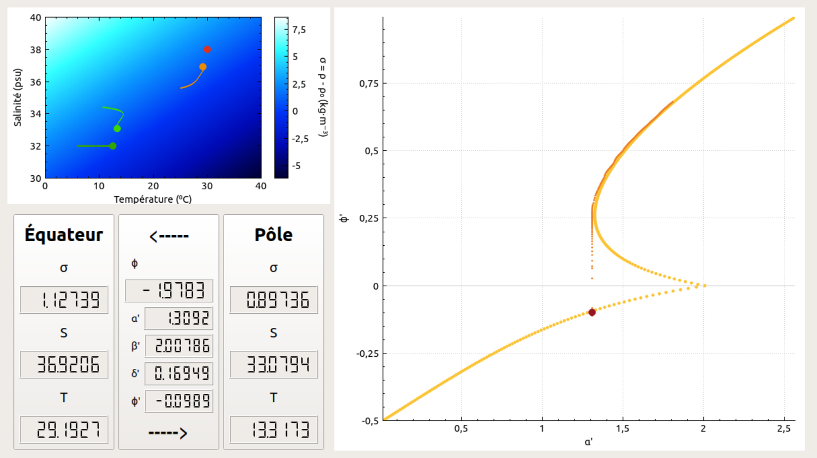
Évolution du système

Diminution d'intensité du Gulf Stream



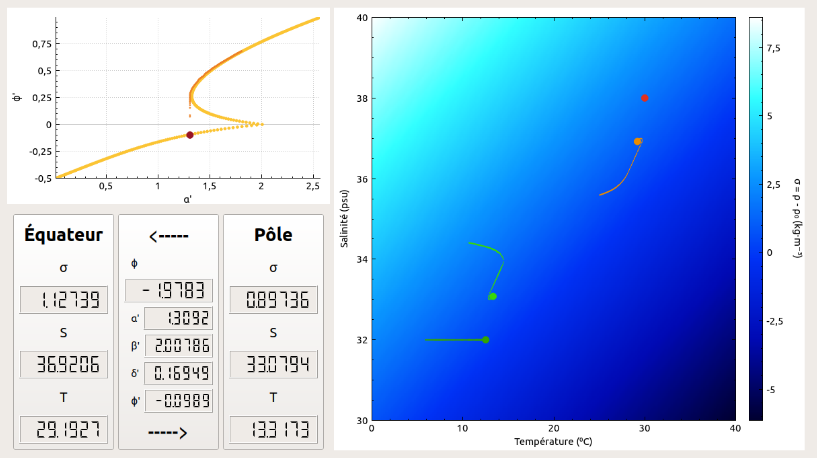
Évolution du système

Inversion brutale du sens de circulation



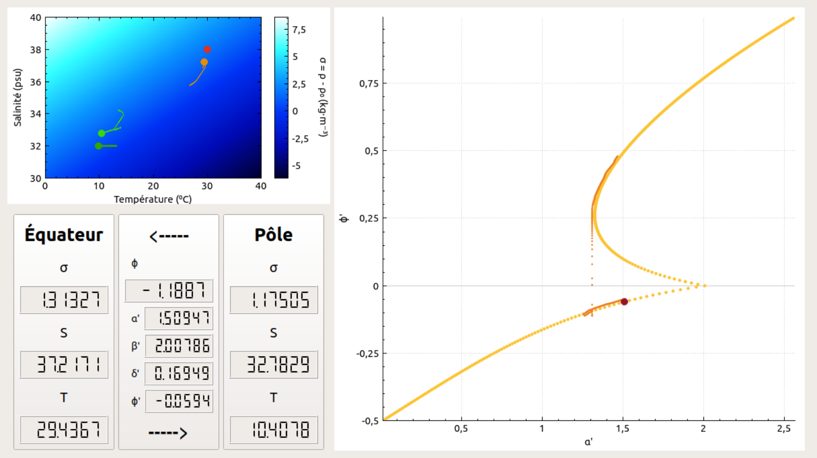
Évolution du système

Refroidissement aux pôles



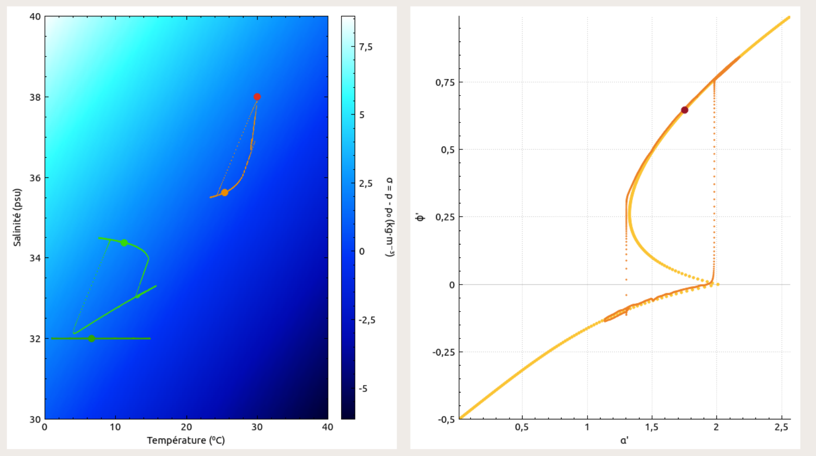
Hystérésis

Irréversibilité de l'évolution



Hystérésis

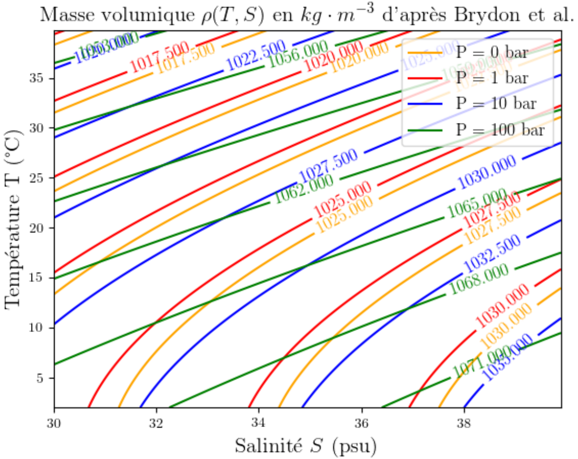
Cycle complet



Conclusion

Équation d'état

Influence de la pression



Circulation

Loi de Fick et établissement du flux de surface

$$\vec{j} = -D \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, n$$

$$\vec{j} \cdot m \cdot S = -D \cdot m \cdot S \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, n$$

$$j \cdot m \cdot S = -D \cdot m \cdot S \cdot \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}$$

$$j \cdot m \cdot S = -D \cdot m \cdot S \cdot \frac{\Delta n}{\Delta x}$$

$$\lambda \equiv \frac{D \cdot S}{\Delta x} \qquad \phi \equiv j \cdot m \cdot S \qquad \rho \equiv m \cdot n$$

$$\phi = \lambda \cdot \Delta \rho$$

Circulation

Loi de Fick et établissement du flux de surface

$$\vec{j} = -D \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, n$$

$$\vec{j} \cdot m \cdot S = -D \cdot m \cdot S \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, n$$

$$j \cdot m \cdot S = -D \cdot m \cdot S \cdot \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}$$

$$j \cdot m \cdot S = -D \cdot m \cdot S \cdot \frac{\Delta n}{\Delta x}$$

$$\lambda \equiv \frac{D \cdot S}{\Delta x} \qquad \phi \equiv j \cdot m \cdot S \qquad \rho \equiv m \cdot n$$

$$\phi = \lambda \cdot \Delta\rho$$

Circulation

Loi de Fick et établissement du flux de surface

$$\vec{j} = -D \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, n$$

$$\vec{j} \cdot m \cdot S = -D \cdot m \cdot S \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, n$$

$$j \cdot m \cdot S = -D \cdot m \cdot S \cdot \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}$$

$$j \cdot m \cdot S = -D \cdot m \cdot S \cdot \frac{\Delta n}{\Delta x}$$

$$\lambda \equiv \frac{D \cdot S}{\Delta x} \qquad \phi \equiv j \cdot m \cdot S \qquad \rho \equiv m \cdot n$$

$$\phi = \lambda \cdot \Delta\rho$$

Circulation

Loi de Fick et établissement du flux de surface

$$\vec{j} = -D \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, n$$

$$\vec{j} \cdot m \cdot S = -D \cdot m \cdot S \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, n$$

$$j \cdot m \cdot S = -D \cdot m \cdot S \cdot \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}$$

$$j \cdot m \cdot S = -D \cdot m \cdot S \cdot \frac{\Delta n}{\Delta x}$$

$$\lambda \equiv \frac{D \cdot S}{\Delta x} \qquad \phi \equiv j \cdot m \cdot S \qquad \rho \equiv m \cdot n$$

$$\phi = \lambda \cdot \Delta \rho$$

Circulation

Loi de Fick et établissement du flux de surface

$$\vec{j} = -D \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, n$$

$$\vec{j} \cdot m \cdot S = -D \cdot m \cdot S \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, n$$

$$j \cdot m \cdot S = -D \cdot m \cdot S \cdot \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}$$

$$j \cdot m \cdot S = -D \cdot m \cdot S \cdot \frac{\Delta n}{\Delta x}$$

$$\lambda \equiv \frac{D \cdot S}{\Delta x} \qquad \phi \equiv j \cdot m \cdot S \qquad \rho \equiv m \cdot n$$

$$\phi = \lambda \cdot \Delta\rho$$

Circulation

Loi de Fick et établissement du flux de surface

$$\vec{j} = -D \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, n$$

$$\vec{j} \cdot m \cdot S = -D \cdot m \cdot S \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, n$$

$$j \cdot m \cdot S = -D \cdot m \cdot S \cdot \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}$$

$$j \cdot m \cdot S = -D \cdot m \cdot S \cdot \frac{\Delta n}{\Delta x}$$

$$\lambda \equiv \frac{D \cdot S}{\Delta x} \qquad \phi \equiv j \cdot m \cdot S \qquad \rho \equiv m \cdot n$$

$$\phi = \lambda \cdot \Delta \rho$$

Mélange

Eaux de salinités et températures différentes

$$\underset{i\to f}{\Delta} U = m \cdot c \cdot (T^f - T^i)$$

$$\underset{i\to f}{\Delta} M^{\text{sel}} = m \cdot (S^f - S^i)$$

$$\underset{i\to f}{\Delta} U_1 + \underset{i\to f}{\Delta} U_2 = 0$$

$$\underset{i\to f}{\Delta} M_1^{\text{sel}} + \underset{i\to f}{\Delta} M_2^{\text{sel}} = 0$$

$$m_1 \cdot T_1^f + m_2 \cdot T_2^f = m_1 \cdot T_1^i + m_2 \cdot T_2^i$$

$$m_1 \cdot S_1^f + m_2 \cdot S_2^f = m_1 \cdot S_1^i + m_2 \cdot S_2^i$$

$$T^f = \frac{m_1 \cdot T_1^i + m_2 \cdot T_2^i}{m_1 + m_2}$$

$$S^f = \frac{m_1 \cdot S_1^i + m_2 \cdot S_2^i}{m_1 + m_2}$$

Mélange

Eaux de salinités et températures différentes

$$\underset{i\to f}{\Delta} U = m \cdot c \cdot (T^f - T^i)$$

$$\underset{i\to f}{\Delta} M^{\text{sel}} = m \cdot (S^f - S^i)$$

$$\underset{i\to f}{\Delta} U_1 + \underset{i\to f}{\Delta} U_2 = 0$$

$$\underset{i\to f}{\Delta} M_1^{\text{sel}} + \underset{i\to f}{\Delta} M_2^{\text{sel}} = 0$$

$$m_1 \cdot T_1^f + m_2 \cdot T_2^f = m_1 \cdot T_1^i + m_2 \cdot T_2^i$$

$$m_1 \cdot S_1^f + m_2 \cdot S_2^f = m_1 \cdot S_1^i + m_2 \cdot S_2^i$$

$$T^f = \frac{m_1 \cdot T_1^i + m_2 \cdot T_2^i}{m_1 + m_2}$$

$$S^f = \frac{m_1 \cdot S_1^i + m_2 \cdot S_2^i}{m_1 + m_2}$$

Mélange

Eaux de salinités et températures différentes

$$\underset{i\to f}{\Delta} U = m \cdot c \cdot (T^f - T^i) \qquad \underset{i\to f}{\Delta} M^{\text{sel}} = m \cdot (S^f - S^i)$$

$$\underset{i\to f}{\Delta} U_1 + \underset{i\to f}{\Delta} U_2 = 0 \qquad \underset{i\to f}{\Delta} M_1^{\text{sel}} + \underset{i\to f}{\Delta} M_2^{\text{sel}} = 0$$

$$m_1 \cdot T_1^f + m_2 \cdot T_2^f = m_1 \cdot T_1^i + m_2 \cdot T_2^i \qquad m_1 \cdot S_1^f + m_2 \cdot S_2^f = m_1 \cdot S_1^i + m_2 \cdot S_2^i$$

$$T^f = \frac{m_1 \cdot T_1^i + m_2 \cdot T_2^i}{m_1 + m_2} \qquad S^f = \frac{m_1 \cdot S_1^i + m_2 \cdot S_2^i}{m_1 + m_2}$$

Mélange

Eaux de salinités et températures différentes

$$\underset{i\to f}{\Delta} U = m \cdot c \cdot (T^f - T^i)$$

$$\underset{i\to f}{\Delta} M^{\text{sel}} = m \cdot (S^f - S^i)$$

$$\underset{i\to f}{\Delta} U_1 + \underset{i\to f}{\Delta} U_2 = 0$$

$$\underset{i\to f}{\Delta} M_1^{\text{sel}} + \underset{i\to f}{\Delta} M_2^{\text{sel}} = 0$$

$$m_1 \cdot T_1^f + m_2 \cdot T_2^f = m_1 \cdot T_1^i + m_2 \cdot T_2^i$$

$$m_1 \cdot S_1^f + m_2 \cdot S_2^f = m_1 \cdot S_1^i + m_2 \cdot S_2^i$$

$$T^f = \frac{m_1 \cdot T_1^i + m_2 \cdot T_2^i}{m_1 + m_2}$$

$$S^f = \frac{m_1 \cdot S_1^i + m_2 \cdot S_2^i}{m_1 + m_2}$$

Résolution

Découplage des équations

$$(2)-(1) \qquad \frac{\mathrm{d}(T_p - T_e)}{\mathrm{d}t} = \frac{T_p^* - T_e^* + T_e - T_p}{\tau_T} - \frac{2|\phi|}{M_0}(T_p - T_e)$$

$$(4)-(3) \qquad \frac{\mathrm{d}(S_p - S_e)}{\mathrm{d}t} = \frac{S_p^* - S_e^* + S_e - S_p}{\tau_S} - \frac{2|\phi|}{M_0}(S_p - S_e)$$

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{T}}{\mathrm{d}\widehat{t}} = 1 - \widehat{T} - \left|\widehat{\phi}\right| \cdot \widehat{T} \qquad \frac{\mathrm{d}\widehat{S}}{\mathrm{d}\widehat{t}} = \widehat{\delta}(1 - \widehat{S}) - \left|\widehat{\phi}\right| \cdot \widehat{S}$$

$$\widehat{T} \equiv \frac{T_p - T_e}{T_p^* - T_e^*} \qquad \widehat{S} \equiv \frac{S_p - S_e}{S_p^* - S_e^*} \qquad \widehat{t} \equiv \frac{t}{\tau_T} \qquad \widehat{\delta} \equiv \frac{\tau_T}{\tau_S} \qquad \widehat{\phi} \equiv \frac{2\tau_T}{M_0}\phi$$

Résolution

Découplage des équations

$$(2)-(1) \qquad \frac{\mathrm{d}(T_p - T_e)}{\mathrm{d}t} = \frac{T_p^* - T_e^* + T_e - T_p}{\tau_T} - \frac{2|\phi|}{M_0}(T_p - T_e)$$

$$(4)-(3) \qquad \frac{\mathrm{d}(S_p - S_e)}{\mathrm{d}t} = \frac{S_p^* - S_e^* + S_e - S_p}{\tau_S} - \frac{2|\phi|}{M_0}(S_p - S_e)$$

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{T}}{\mathrm{d}\widehat{t}} = 1 - \widehat{T} - \left|\widehat{\phi}\right| \cdot \widehat{T} \qquad \frac{\mathrm{d}\widehat{S}}{\mathrm{d}\widehat{t}} = \widehat{\delta}(1 - \widehat{S}) - \left|\widehat{\phi}\right| \cdot \widehat{S}$$

$$\widehat{T} = \frac{T_p - T_e}{T_p^* - T_e^*} \qquad \widehat{S} = \frac{S_p - S_e}{S_p^* - S_e^*} \qquad \widehat{t} = \frac{t}{\tau_T} \qquad \widehat{\delta} = \frac{\tau_T}{\tau_S} \qquad \widehat{\phi} = \frac{2\tau_T}{M_0}\phi$$

Résolution

Découplage des équations

$$(2)-(1) \qquad \frac{\mathrm{d}(T_p - T_e)}{\mathrm{d}t} = \frac{T_p^* - T_e^* + T_e - T_p}{\tau_T} - \frac{2|\phi|}{M_0}(T_p - T_e)$$

$$(4)-(3) \qquad \frac{\mathrm{d}(S_p - S_e)}{\mathrm{d}t} = \frac{S_p^* - S_e^* + S_e - S_p}{\tau_S} - \frac{2|\phi|}{M_0}(S_p - S_e)$$

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{T}}{\mathrm{d}\widehat{t}} = 1 - \widehat{T} - \left|\widehat{\phi}\right| \cdot \widehat{T} \qquad \frac{\mathrm{d}\widehat{S}}{\mathrm{d}\widehat{t}} = \widehat{\delta}(1 - \widehat{S}) - \left|\widehat{\phi}\right| \cdot \widehat{S}$$

$$\widehat{T} \equiv \frac{T_p - T_e}{T_p^* - T_e^*} \qquad \widehat{S} \equiv \frac{S_p - S_e}{S_p^* - S_e^*} \qquad \widehat{t} \equiv \frac{t}{\tau_T} \qquad \widehat{\delta} \equiv \frac{\tau_T}{\tau_S} \qquad \widehat{\phi} \equiv \frac{2\tau_T}{M_0}\phi$$

Résolution

Expression du flux

$$\begin{aligned}\widehat{\phi} &= \frac{2\tau_T}{M_0}\phi \\ &= \frac{2\tau_T}{M_0}\lambda\rho_0\left[-\alpha(T_p^* - T_e^*)\widehat{T} + \beta(S_p^* - S_e^*)\widehat{S}\right] \\ &= \widehat{\alpha}\widehat{T} - \widehat{\beta}\widehat{S}\end{aligned}$$

$$\widehat{\alpha} = \frac{2\tau_T}{M_0}\lambda\rho_0\alpha(T_e^* - T_p^*) > 0$$

$$\widehat{\beta} = \frac{2\tau_T}{M_0}\lambda\rho_0\beta(S_e^* - S_p^*) > 0$$

Résolution

Expression du flux

$$\begin{aligned}\widehat{\phi} &= \frac{2\tau_T}{M_0}\phi \\ &= \frac{2\tau_T}{M_0}\lambda\rho_0\left[-\alpha(T_p^* - T_e^*)\widehat{T} + \beta(S_p^* - S_e^*)\widehat{S}\right] \\ &= \widehat{\alpha}\widehat{T} - \widehat{\beta}\widehat{S}\end{aligned}$$

$$\widehat{\alpha} = \frac{2\tau_T}{M_0}\lambda\rho_0\alpha(T_e^* - T_p^*) > 0$$

$$\widehat{\beta} = \frac{2\tau_T}{M_0}\lambda\rho_0\beta(S_e^* - S_p^*) > 0$$

Résolution

Recherche de l'équilibre

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{T}}{\mathrm{d}\widehat{t}} = 1 - \widehat{T} - \left|\widehat{\phi}\right| \cdot \widehat{T} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \widehat{T} = \frac{1}{1 + \left|\widehat{\phi}\right|}$$

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{S}}{\mathrm{d}\widehat{t}} = \widehat{\delta}(1 - \widehat{S}) - \left|\widehat{\phi}\right| \cdot \widehat{S} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \widehat{S} = \frac{\widehat{\delta}}{\widehat{\delta} + \left|\widehat{\phi}\right|}$$

$$\widehat{\phi} = \frac{\widehat{\alpha}}{1 + \left|\widehat{\phi}\right|} - \frac{\widehat{\beta}\widehat{\delta}}{\widehat{\delta} + \left|\widehat{\phi}\right|}$$

Résolution

Recherche de l'équilibre

$$\widehat{\phi} = \frac{\widehat{\alpha}}{1+\left|\widehat{\phi}\right|} - \frac{\widehat{\beta\delta}}{\widehat{\delta}+\left|\widehat{\phi}\right|}$$

$$\widehat{\alpha} = \left(1+\left|\widehat{\phi}\right|\right)\left(\widehat{\phi} + \frac{\widehat{\beta\delta}}{\widehat{\delta}+\left|\widehat{\phi}\right|}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{\alpha}}{\mathrm{d}\widehat{\phi}} = \left(\widehat{\phi} + \frac{\widehat{\beta\delta}}{\widehat{\delta}+\left|\widehat{\phi}\right|}\right)\frac{\mathrm{d}\left|\widehat{\phi}\right|}{\mathrm{d}\widehat{\phi}} + \left(1+\left|\widehat{\phi}\right|\right)\left(1 - \frac{\widehat{\beta\delta}}{\left(\widehat{\delta}+\left|\widehat{\phi}\right|\right)^2}\frac{\mathrm{d}\left|\widehat{\phi}\right|}{\mathrm{d}\widehat{\phi}}\right)$$

Résolution

Recherche de l'équilibre

$$\left.\frac{\mathrm{d}\widehat{\alpha}}{\mathrm{d}\widehat{\phi}}\right|_{\widehat{\phi}\approx 0} \approx 1 - \widehat{\beta}\left(\frac{1-\widehat{\delta}}{\widehat{\delta}}\right)\frac{\mathrm{d}\left|\widehat{\phi}\right|}{\mathrm{d}\widehat{\phi}}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\widehat{\alpha}}{\mathrm{d}\widehat{\phi}}\right|_{\widehat{\phi}\geq 0} \approx 1 - \widehat{\beta}\left(\frac{1-\widehat{\delta}}{\widehat{\delta}}\right) \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\widehat{\alpha}}{\mathrm{d}\widehat{\phi}}\right|_{\widehat{\phi}\leq 0} \approx 1 + \widehat{\beta}\left(\frac{1-\widehat{\delta}}{\widehat{\delta}}\right)$$

$$0 < \widehat{\delta} < 1$$

$$\widehat{\beta}\left(\frac{1-\widehat{\delta}}{\widehat{\delta}}\right) > 1$$