

TIPE (Océan)

Un phénomène d'hystérésis dans un modèle de circulation thermohaline

Neven VILLANI (353)

Épreuve de TIPE

Session 2020

Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Construction du modèle
- 3 Présentation des résultats de l'étude analytique
- 4 Simulation numérique
- 5 Conclusion

Introduction : contexte et définitions

La dérive nord atlantique

- Circulation en surface de l'équateur vers le pôle
- Eaux chaudes
- Extension du Gulf Stream
- Inquiétudes liées au rôle climatique :
 - Influence exacte mal connue
 - Inversion possible ?
 - Refroidissement local ?
 - Phénomène d'hystérésis ?

Introduction : contexte et définitions

Qu'est-ce que l'hystérésis ?

"Soit une grandeur cause notée C produisant une grandeur effet notée E . On dit qu'il y a hystérésis lorsque la courbe $E = f(C)$ obtenue à la croissance de C ne se superpose pas avec la courbe $E = f(C)$ obtenue à la décroissance de C ."

Source de :

- Non linéarité
- Irréversibilité

Premières approximations

- Géométrie simplifiée de l'océan
- Pas d'atmosphère
- Seulement deux compartiments homogènes

Le modèle de Stommel

Océan à deux compartiments homogènes

Équateur

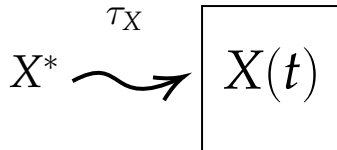
$$(T_e(t), S_e(t))$$

Pôle

$$(T_p(t), S_p(t))$$

Forçage

Retour des grandeurs à leur valeur à l'équilibre

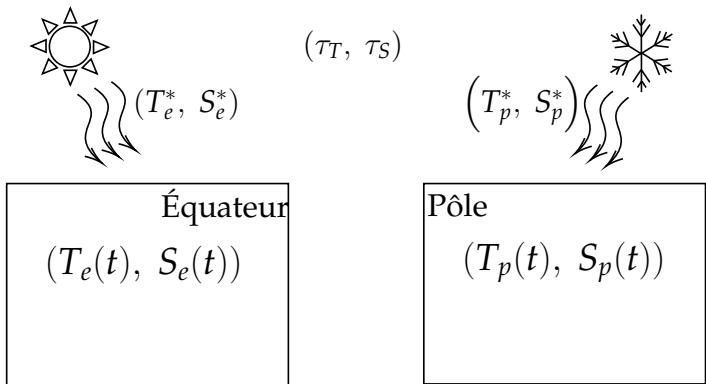


$$dX(t)_{\text{Forçage}} = \frac{X^* - X(t)}{\tau_X} \cdot dt$$

τ_T	$\approx 1\text{mois}$	τ_S	$\approx 6\text{mois}$
T_e^*	$\approx 30^\circ\text{C}$	S_e^*	$\approx 38\text{psu}$
T_p^*	$\approx 2^\circ\text{C}$	S_p^*	$\approx 32\text{psu}$

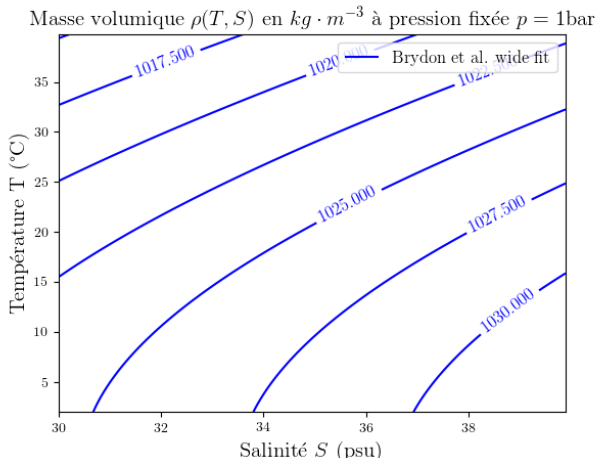
Le modèle de Stommel

Océan à deux compartiments homogènes



Équation d'état

Densité de l'eau de mer en fonction de sa salinité et de sa température



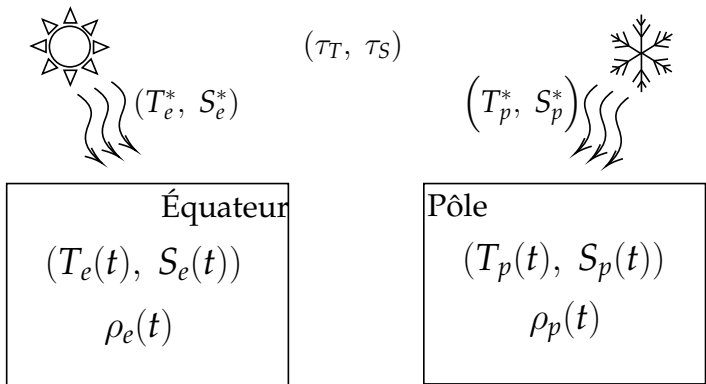
Linéarisation en T et S

$$\rho = \rho_0 [\beta(S - S_0) - \alpha(T - T_0)]$$

T_0	$= 10\text{ }^{\circ}\text{C}$	S_0	$= 35\text{ psu}$
α	$= 1,67 \cdot 10^{-4}\text{ K}^{-1}$	β	$= 0,78 \cdot 10^{-3}\text{ psu}^{-1}$

Le modèle de Stommel

Océan à deux compartiments homogènes



Circulation

Établissement du flux de surface

$$\phi = \lambda \cdot (\rho_p - \rho_e)$$

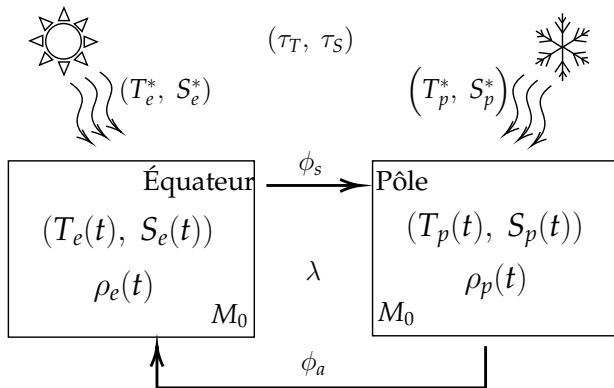
$$\phi \quad \text{kg/s}$$

$$\lambda \approx 10^7 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\rho_p - \rho_e \approx 1 \text{ kg/m}^3$$

Le modèle de Stommel

Océan à deux compartiments homogènes



Variation des paramètres

Couplage des deux compartiments

$$dS_e(t)_{\text{Couplage}} = \frac{S_e(t) \cdot (M_0 - \delta m) + S_p(t) \cdot \delta m}{M_0} - S_e(t)$$

$$dS_e(t)_{\text{Couplage}} = (S_p(t) - S_e(t)) \cdot \frac{\delta m}{M_0}$$

$$\delta m \equiv |\phi| \cdot dt$$

$$dS_e(t) = dS_e(t)_{\text{Couplage}} + dS_e(t)_{\text{Forçage}}$$

Variation des paramètres

Couplage des deux compartiments

$$\dot{T}_e = (T_p - T_e) \cdot \frac{\phi}{M_0} + \frac{T_e^* - T_e}{\tau_T} \quad (1)$$

$$\dot{T}_p = (T_e - T_p) \cdot \frac{\phi}{M_0} + \frac{T_p^* - T_p}{\tau_T} \quad (2)$$

$$\dot{S}_e = (S_p - S_e) \cdot \frac{\phi}{M_0} + \frac{S_e^* - S_e}{\tau_S} \quad (3)$$

$$\dot{S}_p = (S_e - S_p) \cdot \frac{\phi}{M_0} + \frac{S_p^* - S_p}{\tau_S} \quad (4)$$

$$\phi = \lambda \cdot (\rho_p - \rho_e) \quad (5)$$

$$\rho = \rho_0 \cdot [\beta(S - S_0) - \alpha(T - T_0)] \quad (6)$$

Résolution

Recherche de l'équilibre

$$\hat{\alpha} = \left(1 + |\hat{\phi}|\right) \left(\hat{\phi} + \frac{\hat{\beta}\hat{\delta}}{\hat{\delta} + |\hat{\phi}|} \right)$$

$$\hat{\phi} \propto \phi$$

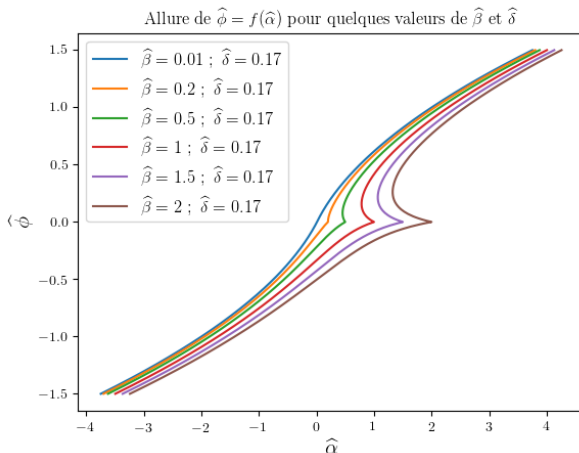
$$\hat{\alpha} \propto T_p^* - T_e^*$$

$$\hat{\beta} \propto S_p^* - S_e^*$$

$$\hat{\delta} \equiv \frac{\tau_T}{\tau_S}$$

Position d'équilibre

Allure de $\hat{\phi} = f(\hat{\alpha})$ et influence des paramètres



Position d'équilibre

Confirmation par la simulation de la stabilité

30

S_e^*

32

S_p^*

299

τ_s

0.0

λ

Play

Skip

30

T_e^*

2

T_p^*

50

τ_t

2000

M_0

☐ -
 ☐ +

0.30

TIME

10

dt

Layout

Couplage (ON)

Équilibre (ON)

Équateur

----->

Pôle

σ

0.98484

ϕ

162081

σ

28695

S

355189

α'

209592

S

344811

β'

200786

δ'

0.16949

T

23.7331

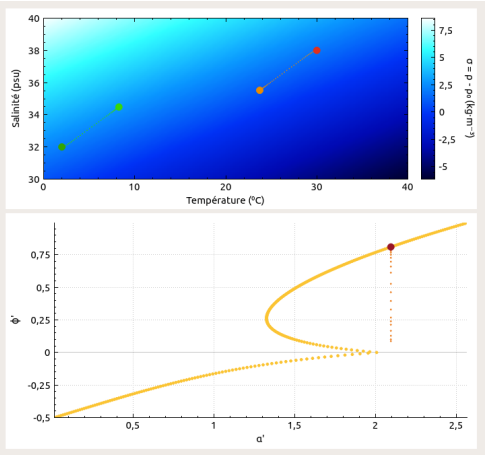
ϕ'

08104

T

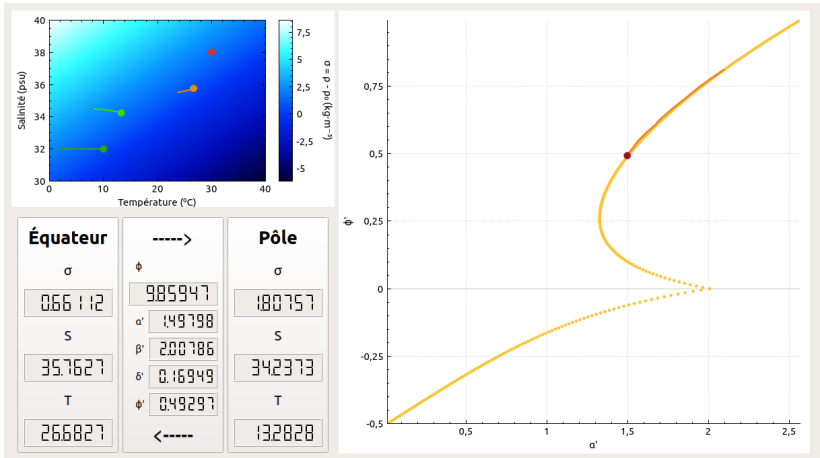
826691

<-----



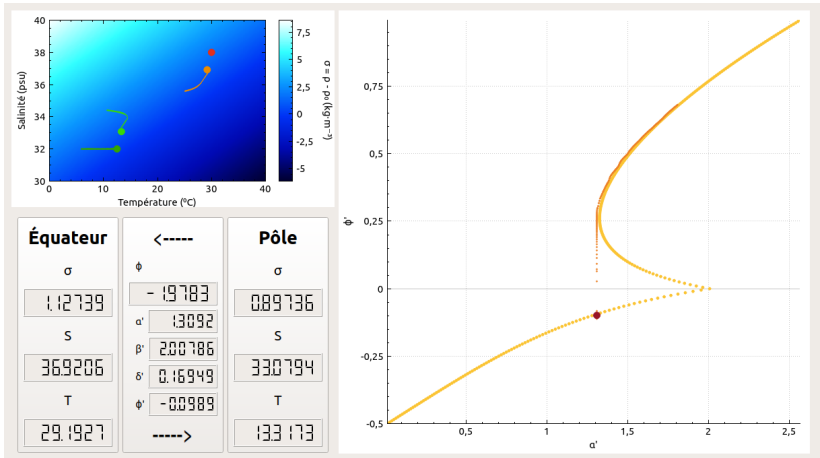
Évolution du système

Diminution d'intensité du Gulf Stream



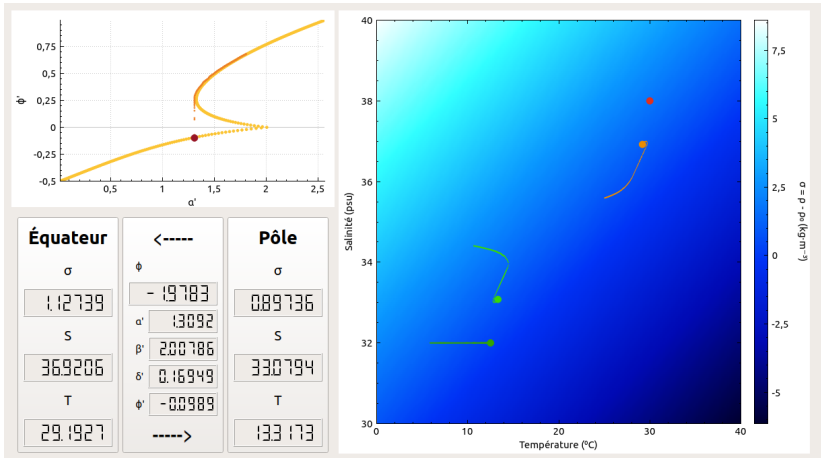
Évolution du système

Inversion brutale du sens de circulation



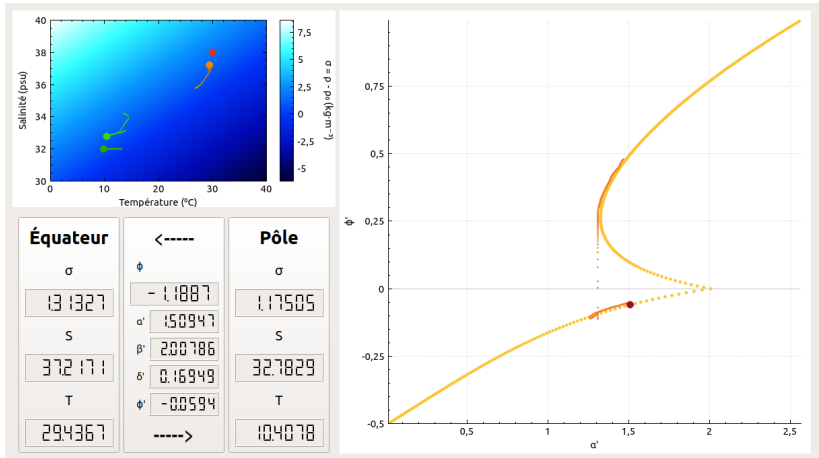
Évolution du système

Refroidissement aux pôles



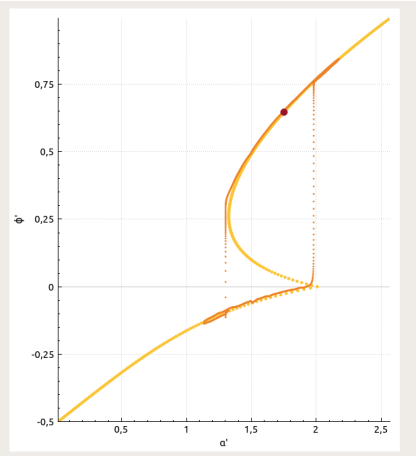
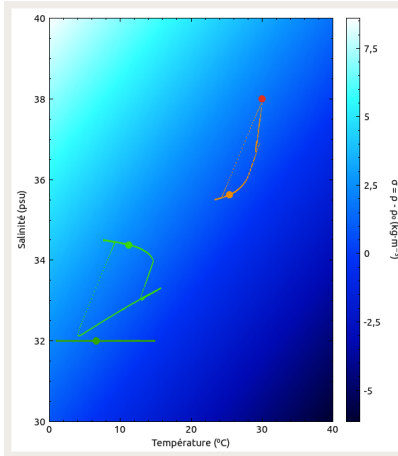
Hystérésis

Irréversibilité de l'évolution



Hystérésis

Cycle complet



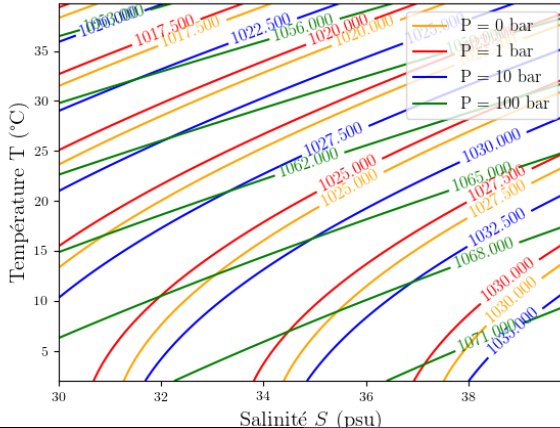
Conclusion

- Inutilisable en tant que tel
- Peut faciliter l'étude d'un modèle plus précis
- Permet d'envisager des scénarios à tester

Équation d'état

Influence de la pression

Masse volumique $\rho(T, S)$ en $kg \cdot m^{-3}$ d'après Brydon et al.



Circulation

Loi de Fick et établissement du flux de surface

$$\vec{j} = -D \cdot \overrightarrow{\text{grad}} n$$

$$\vec{j} \cdot m \cdot S = -D \cdot m \cdot S \cdot \overrightarrow{\text{grad}} n$$

$$j \cdot m \cdot S = -D \cdot m \cdot S \cdot \frac{dn}{dx}$$

$$j \cdot m \cdot S = -D \cdot m \cdot S \cdot \frac{\Delta n}{\Delta x}$$

$$\lambda \equiv \frac{D \cdot S}{\Delta x}$$

$$\phi \equiv j \cdot m \cdot S$$

$$\rho \equiv m \cdot n$$

$$\phi = \lambda \cdot \Delta \rho$$

Mélange

Eaux de salinités et températures différentes

$$\Delta U_{i \rightarrow f} = m \cdot c \cdot (T^f - T^i)$$

$$\Delta M^{\text{sel}}_{i \rightarrow f} = m \cdot (S^f - S^i)$$

$$\Delta U_{i \rightarrow f} + \Delta U_{i \rightarrow f} = 0$$

$$\Delta M^{\text{sel}}_{i \rightarrow f} + \Delta M^{\text{sel}}_{i \rightarrow f} = 0$$

$$m_1 \cdot T_1^f + m_2 \cdot T_2^f = m_1 \cdot T_1^i + m_2 \cdot T_2^i$$

$$m_1 \cdot S_1^f + m_2 \cdot S_2^f = m_1 \cdot S_1^i + m_2 \cdot S_2^i$$

$$T^f = \frac{m_1 \cdot T_1^i + m_2 \cdot T_2^i}{m_1 + m_2}$$

$$S^f = \frac{m_1 \cdot S_1^i + m_2 \cdot S_2^i}{m_1 + m_2}$$

Résolution

Découplage des équations

$$(2) - (1) \quad \frac{d(T_p - T_e)}{dt} = \frac{T_p^* - T_e^* + T_e - T_p}{\tau_T} - \frac{2|\phi|}{M_0}(T_p - T_e)$$

$$(4) - (3) \quad \frac{d(S_p - S_e)}{dt} = \frac{S_p^* - S_e^* + S_e - S_p}{\tau_S} - \frac{2|\phi|}{M_0}(S_p - S_e)$$

$$\frac{d\hat{T}}{d\hat{t}} = 1 - \hat{T} - |\hat{\phi}| \cdot \hat{T} \qquad \frac{d\hat{S}}{d\hat{t}} = \hat{\delta}(1 - \hat{S}) - |\hat{\phi}| \cdot \hat{S}$$

$$\hat{T} \equiv \frac{T_p - T_e}{T_p^* - T_e^*} \qquad \hat{S} \equiv \frac{S_p - S_e}{S_p^* - S_e^*} \qquad \hat{t} \equiv \frac{t}{\tau_T} \qquad \hat{\delta} \equiv \frac{\tau_T}{\tau_S} \qquad \hat{\phi} \equiv \frac{2\tau_T}{M_0}\phi$$

Résolution

Expression du flux

$$\begin{aligned}\hat{\phi} &= \frac{2\tau_T}{M_0} \phi \\ &= \frac{2\tau_T}{M_0} \lambda \rho_0 \left[-\alpha(T_p^* - T_e^*) \hat{T} + \beta(S_p^* - S_e^*) \hat{S} \right] \\ &= \hat{\alpha} \hat{T} - \hat{\beta} \hat{S}\end{aligned}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{2\tau_T}{M_0} \lambda \rho_0 \alpha (T_e^* - T_p^*) > 0$$

$$\hat{\beta} = \frac{2\tau_T}{M_0} \lambda \rho_0 \beta (S_e^* - S_p^*) > 0$$

Résolution

Recherche de l'équilibre

$$\frac{d\hat{T}}{d\hat{t}} = 1 - \hat{T} - |\hat{\phi}| \cdot \hat{T} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{T} = \frac{1}{1 + |\hat{\phi}|}$$

$$\frac{d\hat{S}}{d\hat{t}} = \hat{\delta}(1 - \hat{S}) - |\hat{\phi}| \cdot \hat{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{S} = \frac{\hat{\delta}}{\hat{\delta} + |\hat{\phi}|}$$

$$\hat{\phi} = \frac{\hat{\alpha}}{1 + |\hat{\phi}|} - \frac{\hat{\beta}\hat{\delta}}{\hat{\delta} + |\hat{\phi}|}$$

Résolution

Recherche de l'équilibre

$$\hat{\phi} = \frac{\hat{\alpha}}{1 + |\hat{\phi}|} - \frac{\hat{\beta}\hat{\delta}}{\hat{\delta} + |\hat{\phi}|}$$

$$\hat{\alpha} = \left(1 + |\hat{\phi}|\right) \left(\hat{\phi} + \frac{\hat{\beta}\hat{\delta}}{\hat{\delta} + |\hat{\phi}|}\right)$$

$$\frac{d\hat{\alpha}}{d\hat{\phi}} = \left(\hat{\phi} + \frac{\hat{\beta}\hat{\delta}}{\hat{\delta} + |\hat{\phi}|}\right) \frac{d|\hat{\phi}|}{d\hat{\phi}} + \left(1 + |\hat{\phi}|\right) \left(1 - \frac{\hat{\beta}\hat{\delta}}{(\hat{\delta} + |\hat{\phi}|)^2} \frac{d|\hat{\phi}|}{d\hat{\phi}}\right)$$

Résolution

Recherche de l'équilibre

$$\left. \frac{d\hat{\alpha}}{d\hat{\phi}} \right|_{\hat{\phi} \approx 0} \approx 1 - \hat{\beta} \left(\frac{1 - \hat{\delta}}{\hat{\delta}} \right) \left. \frac{d|\hat{\phi}|}{d\hat{\phi}} \right|$$

$$\left. \frac{d\hat{\alpha}}{d\hat{\phi}} \right|_{\hat{\phi} \geq 0} \approx 1 - \hat{\beta} \left(\frac{1 - \hat{\delta}}{\hat{\delta}} \right)$$

$$\left. \frac{d\hat{\alpha}}{d\hat{\phi}} \right|_{\hat{\phi} \leq 0} \approx 1 + \hat{\beta} \left(\frac{1 - \hat{\delta}}{\hat{\delta}} \right)$$

$$0 < \hat{\delta} < 1$$

$$\hat{\beta} \left(\frac{1 - \hat{\delta}}{\hat{\delta}} \right) > 1$$