

TIPE (Océan)

Un phénomène d'hystérésis dans un modèle de circulation thermohaline

Neven VILLANI (353)

Épreuve de TIPE

Session 2020

Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Construction du modèle
- 3 Présentation des résultats de l'étude analytique
- 4 Simulation numérique
- 5 Conclusion

Introduction : contexte et définitions

La dérive nord atlantique

- Circulation en surface de l'équateur vers le pôle
- Eaux chaudes
- Extension du Gulf Stream
- Inquiétudes liées au rôle climatique :
 - Influence exacte mal connue
 - Inversion possible ?
 - Refroidissement local ?
 - Phénomène d'hystérésis ?

L'objet de cette étude est la dérive nord-atlantique, un ensemble de courants chauds qui circulent de l'équateur vers les pôles en surface de l'océan.

Le Gulf Stream est inclus dans cette dérive nord-atlantique, mais on utilise souvent par abus de langage le terme "Gulf Stream" pour désigner l'ensemble des courants. Comme notre modèle ne sera pas assez fin pour distinguer le Gulf Stream des autres courants, nous nous autoriserons cet abus.

L'étendue du rôle du Gulf Stream dans la régulation du climat est mal connue, et si comme certains articles le suggèrent il pourrait venir à s'inverser à cause du réchauffement climatique, il est envisagé qu'un refroidissement local en Europe soit provoqué.

Introduction : contexte et définitions

Qu'est-ce que l'hystérésis ?

"Soit une grandeur cause notée C produisant une grandeur effet notée E . On dit qu'il y a hystérésis lorsque la courbe $E = f(C)$ obtenue à la croissance de C ne se superpose pas avec la courbe $E = f(C)$ obtenue à la décroissance de C ."

Source de :

- Non linéarité
- Irréversibilité

D'autres phénomènes célèbres qui présentent un phénomène d'hystérésis sont :

1. Hystérésis élastique : un élastique suspendu et chargé avec une masse n'a pas la même élongation à l'équilibre si on atteint la charge cible par le haut ou par le bas (grandeur cause : m , grandeur effet : l)
2. Régulateur de température : la commande d'allumage se déclenche à une température $T_{allumage} < T_{cible}$, et s'interrompt à $T_{extinction} > T_{cible}$. Sur tout l'intervalle $[T_{allumage}; T_{extinction}]$ (grandeur cause), la valeur de la puissance délivrée par la chaudière (grandeur effet) dépend de laquelle des deux bornes a été franchie en dernier.

Premières approximations

- Géométrie simplifiée de l'océan
- Pas d'atmosphère
- Seulement deux compartiments homogènes

Contrairement aux autres approximations que nous ferons par la suite, celles-ci sont difficiles à justifier.

Il est évident que la présence de reliefs (proximité des côtes, fonds marins), d'une atmosphère, et d'une inhomogénéité du brassage des eaux selon les profondeurs et les latitudes auront des conséquences majeures sur la circulation océanique, mais ces approximations sont nécessaires pour pouvoir construire notre modèle.

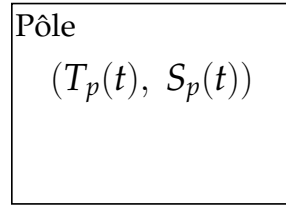
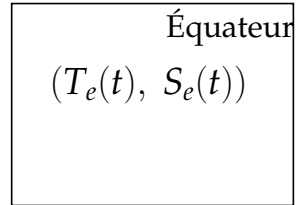
À l'inverse, toutes les autres approximations qui suivront pourraient être éliminées sans changer de structure générale du modèle, quitte à augmenter soit la précision des valeurs numériques des paramètres, soit le temps de calcul lors de la simulation numérique.

La présence de ces approximations nécessite de recadrer les objectifs de cette étude : elles sont tellement grandes que les résultats obtenus, quels qu'ils soient, ne pourront pas servir de prédiction. Nous nous contenterons donc d'envisager des scénarios possibles qu'un modèle plus précis permettrait de confirmer ou d'invalidier, mais il ne sera pour l'instant pas question d'envisager leur plausibilité.

Le modèle de Stommel

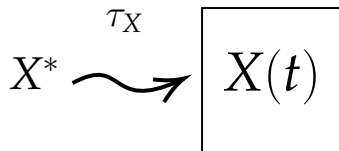
Océan à deux compartiments homogènes

L'océan est modélisé par deux compartiments homogènes, qui présentent chacun une salinité et une température variables au cours du temps.



Forçage

Retour des grandeurs à leur valeur à l'équilibre



$$dX(t)_{\text{Forçage}} = \frac{X^* - X(t)}{\tau_X} \cdot dt$$

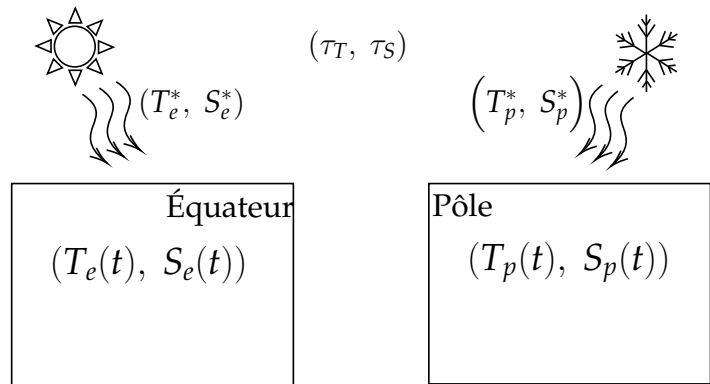
τ_T	$\approx 1\text{mois}$	τ_S	$\approx 6\text{mois}$
T_e^*	$\approx 30^\circ\text{C}$	S_e^*	$\approx 38\text{psu}$
T_p^*	$\approx 2^\circ\text{C}$	S_p^*	$\approx 32\text{psu}$

On suppose que la température et la salinité tendent en l'absence de perturbations extérieures vers des valeurs de forçage, et cela à vitesse exponentielle caractérisée par un temps de relaxation (constant).

1psu \equiv 1g de sel/1kg d'eau

Le modèle de Stommel

Océan à deux compartiments homogènes



Dans le cadre de notre modèle, il y a six paramètres de forçage : deux temps de relaxation pour la température et la salinité, et des valeurs de forçage en température et en salinité pour chaque compartiment.

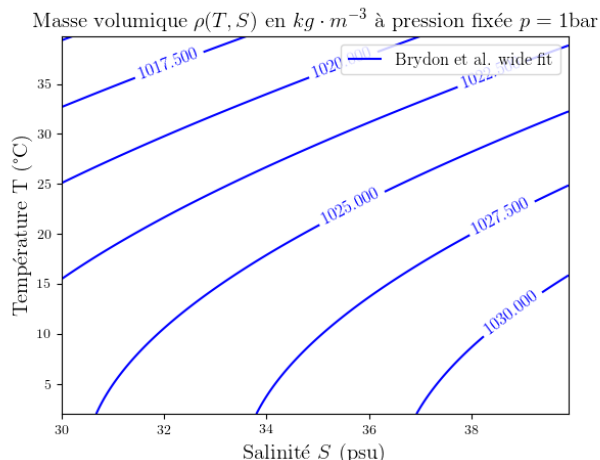
À l'équateur, le soleil réchauffe l'eau et provoque de l'évaporation, ce qui tend à augmenter la salinité.

Au pôle, la fonte de banquise refroidit l'océan et engendre un apport d'eau pure qui réduit la salinité.

Les valeurs fournies sont des estimations (les grandeurs réelles sont difficiles à déterminer et peuvent même varier d'un océan à un autre).

Équation d'état

Densité de l'eau de mer en fonction de sa salinité et de sa température



L'équation d'état de l'eau de mer fournit une expression de la masse volumique en fonction de la température et de la salinité.

La meilleure approximation connue est un polynôme à 26 termes, de degrés 4 en T , 2 en P et $\frac{3}{2}$ en S .

On dispose d'une approximation de degré moindre (Brydon et al., A new approximation of the equation of state for seawater, suitable for numerical ocean models) qui est incluse à la simulation ci-jointe et peut être sélectionnée comme méthode de calcul via `#define EOS_ID 1` dans `src/metavars.h`

Linéarisation en T et S

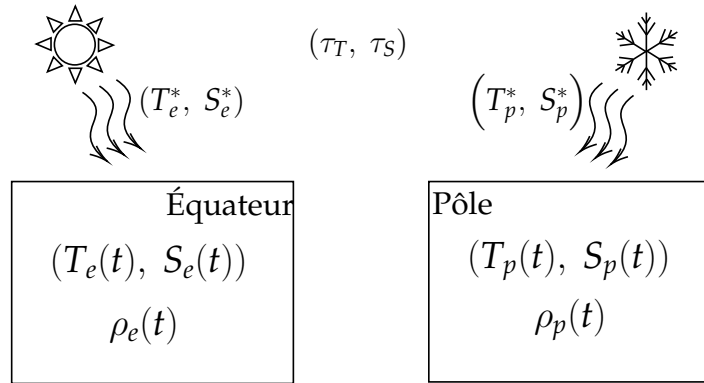
$$\rho = \rho_0 [\beta(S - S_0) - \alpha(T - T_0)]$$

T_0	$= 10\text{ }^{\circ}\text{C}$	S_0	$= 35\text{ psu}$
α	$= 1,67 \cdot 10^{-4}\text{ K}^{-1}$	β	$= 0,78 \cdot 10^{-3}\text{ psu}^{-1}$

Même le polynôme à 7 termes (la pression est considérée la même partout, nous justifierons que cela est raisonnable dans une des diapositives annexes) est déjà trop pour une étude analytique, donc nous nous contenterons dans un premier temps d'une linéarisation de l'équation d'état autour d'un état de référence : 32.3 psu, 15°C.

Le modèle de Stommel

Océan à deux compartiments homogènes



Nous obtenons alors deux densités : une à l'équateur et une au pôle.

Circulation

Établissement du flux de surface

$$\phi = \lambda \cdot (\rho_p - \rho_e)$$

$$\phi \quad \text{kg/s}$$

$$\lambda \approx 10^7 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\rho_p - \rho_e \approx 1 \text{ kg/m}^3$$

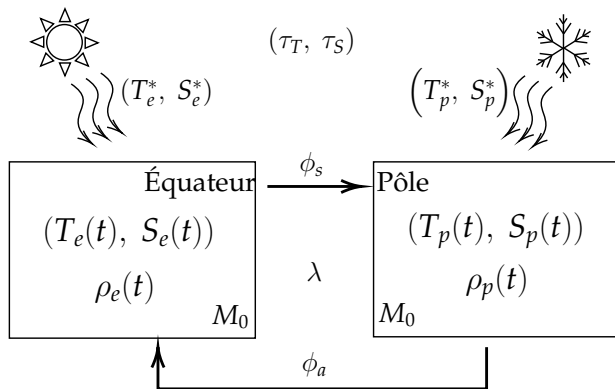
Une réécriture de la loi de Fick (voir annexes) permet d'exprimer un flux de matière engendré par une différence de densité.

λ dépend beaucoup de la géométrie de l'océan, mais est de l'ordre de quelques dizaines de Sv ($1\text{Sv} = 10^6 \text{m}^3/\text{s}$)

La différence de densité observée entre le pôle et l'équateur est de l'ordre de 1 pour 1000

Le modèle de Stommel

Océan à deux compartiments homogènes



Notre modèle est alors complet une fois les flux de surface et de profondeur pris en compte : on suppose que la masse d'eau contenue dans chaque compartiment est constante au cours du temps, donc les deux flux sont de même intensité.

On prend par convention le flux de surface positif lorsqu'il s'établit de l'équateur vers le pôle.

Variation des paramètres

Couplage des deux compartiments

$$dS_e(t)_{\text{Couplage}} = \frac{S_e(t) \cdot (M_0 - \delta m) + S_p(t) \cdot \delta m}{M_0} - S_e(t)$$

$$dS_e(t)_{\text{Couplage}} = (S_p(t) - S_e(t)) \cdot \frac{\delta m}{M_0}$$

$$\delta m \equiv |\phi| \cdot dt$$

$$dS_e(t) = dS_e(t)_{\text{Couplage}} + dS_e(t)_{\text{Forçage}}$$

On exprime la variation d'un paramètre (ici la salinité à l'équateur) lors du retrait d'une masse δm d'eau suivi de l'arrivée de la même masse provenant de l'autre compartiment.

On en déduit ensuite une équation différentielle sur la salinité à l'équateur, qui fait intervenir le flux.

Une annexe justifie qu'établir cette équation pour l'un des quatre paramètres suffit et que les autres vérifient la même équation.

Variation des paramètres

Couplage des deux compartiments

$$\dot{T}_e = (T_p - T_e) \cdot \frac{\phi}{M_0} + \frac{T_e^* - T_e}{\tau_T} \quad (1)$$

$$\dot{T}_p = (T_e - T_p) \cdot \frac{\phi}{M_0} + \frac{T_p^* - T_p}{\tau_T} \quad (2)$$

$$\dot{S}_e = (S_p - S_e) \cdot \frac{\phi}{M_0} + \frac{S_e^* - S_e}{\tau_S} \quad (3)$$

$$\dot{S}_p = (S_e - S_p) \cdot \frac{\phi}{M_0} + \frac{S_p^* - S_p}{\tau_S} \quad (4)$$

$$\phi = \lambda \cdot (\rho_p - \rho_e) \quad (5)$$

$$\rho = \rho_0 \cdot [\beta(S - S_0) - \alpha(T - T_0)] \quad (6)$$

On peut finalement exprimer un couplage entre toutes les grandeurs. C'est ce système d'équations qui est incorporé presque tel quel dans la simulation, à quelques ajustements près pour contrôler la méthode d'intégration (rectangles ou trapèzes).

Résolution

Recherche de l'équilibre

$$\hat{\alpha} = \left(1 + |\hat{\phi}|\right) \left(\hat{\phi} + \frac{\hat{\beta}\hat{\delta}}{\hat{\delta} + |\hat{\phi}|}\right)$$

$$\hat{\phi} \propto \phi$$

$$\hat{\alpha} \propto T_p^* - T_e^*$$

$$\hat{\beta} \propto S_p^* - S_e^*$$

$$\hat{\delta} \equiv \frac{\tau_T}{\tau_S}$$

Le reste de l'étude analytique est observé plus en détail dans les annexes.

Ce qu'on obtient finalement est que à défaut de pouvoir exprimer le flux en fonction du forçage, on peut faire l'inverse : on exprime le forçage nécessaire pour obtenir un flux voulu. L'étude de la fonction ainsi obtenue nous donne des éléments d'information sur les flux possibles lorsque le forçage est fixé.

Pour obtenir le flux en fonction du forçage, nous renverserons donc le graphe.

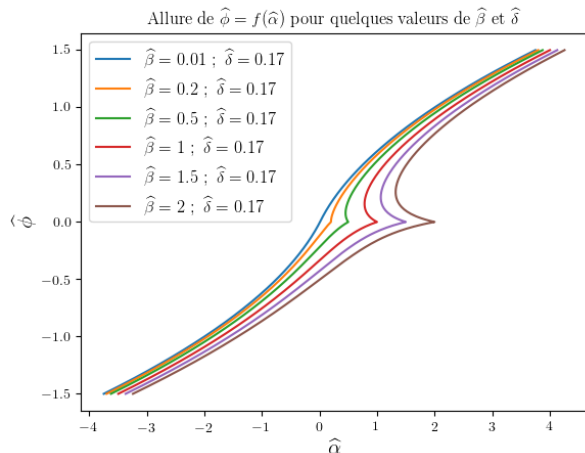
La fonction $\hat{\alpha} = f(\hat{\phi})$ n'est pas toujours injective selon les valeurs des autres paramètres, nous verrons que cela suggère l'existence d'un phénomène d'hystérésis.

Tous les paramètres notés \hat{X} sont sans dimension.

Dans la simulation, ils sont remplacés par x' , les caractères utilisés n'étant pas disponibles avec des accents.

Position d'équilibre

Allure de $\hat{\phi} = f(\hat{\alpha})$ et influence des paramètres



La notation $\hat{\phi} = f(\hat{\alpha})$ est quelque peu abusive.

$\hat{\alpha}$ est un indicateur de la différence des températures de forçage, $\hat{\beta}$ est un indicateur de la différence des salinités, $\hat{\delta}$ est le quotient des temps de relaxation.

Globalement, le flux devient plus intense lorsqu'on :

- augmente la différence de température ($\hat{\alpha}$ augmente)
- diminue la différence de salinité ($\hat{\beta}$ diminue)
- diminue $\hat{\delta}$ (non visible ici)

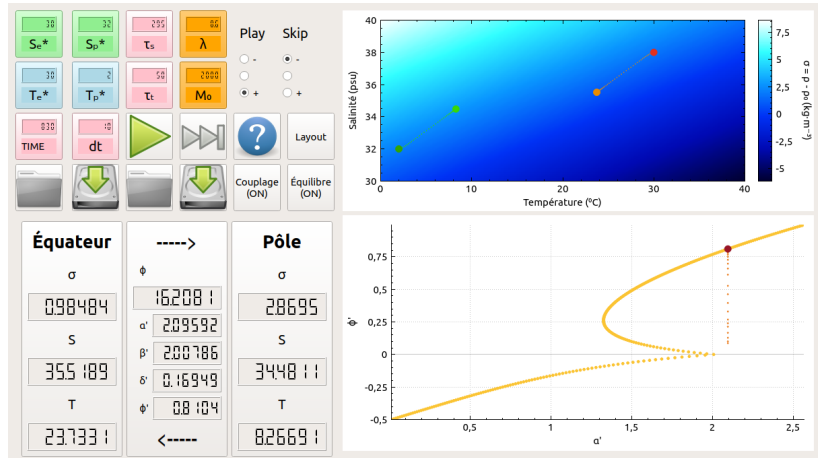
La chose essentielle à remarquer ici est le fait que pour certaines valeurs de $\hat{\beta}$ et de $\hat{\delta}$, il existe plusieurs valeurs possibles de $\hat{\phi}$ pour un même $\hat{\alpha}$.

La simulation qui vient juste après permettra :

- de justifier que la courbe ici tracée est bien une indication des positions d'équilibre du système
- de déterminer lesquelles de ces positions sont stables
- de voir comment la présence de plusieurs positions d'équilibre fait apparaître un phénomène d'hystérésis.

Position d'équilibre

Confirmation par la simulation de la stabilité



Toutes les captures qui suivent ont été réalisées grâce à la fonction capture d'écran intégrée à la simulation, accessible en cliquant sur le bouton "Layout", qui donne ensuite accès à un autre bouton "Screenshot".

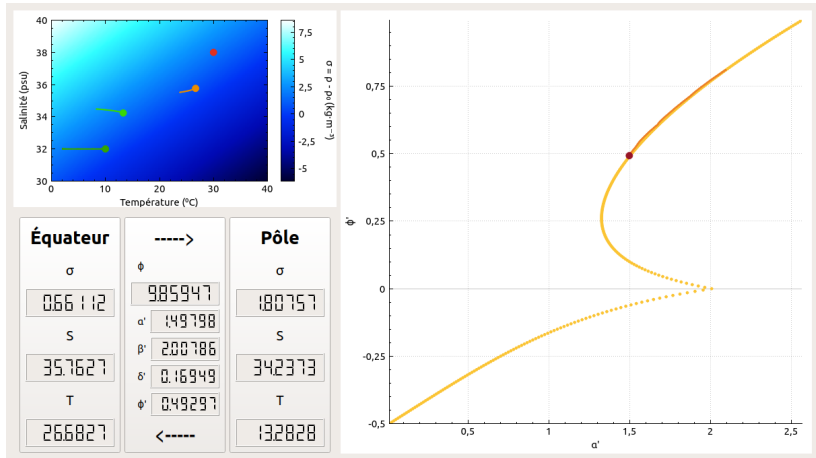
On distingue plusieurs zones sur cet écran de simulation, dont LAYOUT.pdf fournit une explication détaillée qu'il est recommandé de consulter avant de poursuivre.

Dès le lancement de la simulation, le point rouge se stabilise très rapidement sur la courbe orange, fournissant un premier indice qu'il s'agit bien d'une position d'équilibre.

Le flux s'établit bien en surface de l'équateur vers le pôle

Évolution du système

Diminution d'intensité du Gulf Stream



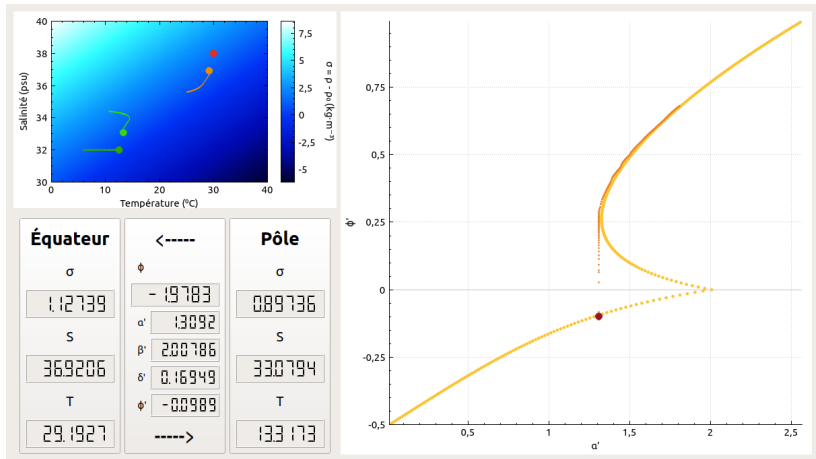
Lorsque la température de forçage au pôle augmente (réchauffement climatique), le paramètre $\hat{\alpha}$ diminue, et $\hat{\phi}$ diminue en suivant toujours la courbe.

Ici la température à l'équateur n'est pas touchée, et les salinités non plus. En réalité, le réchauffement ne se produirait pas exclusivement aux pôles (il y serait tout de même plus intense), et il engendrerait également une fonte de glace supplémentaire et donc un apport d'eau non salée au pôle.

Cela peut s'interpréter comme le fait qu'un réchauffement climatique aura tendance à réduire l'intensité du Gulf Stream.

Évolution du système

Inversion brutale du sens de circulation



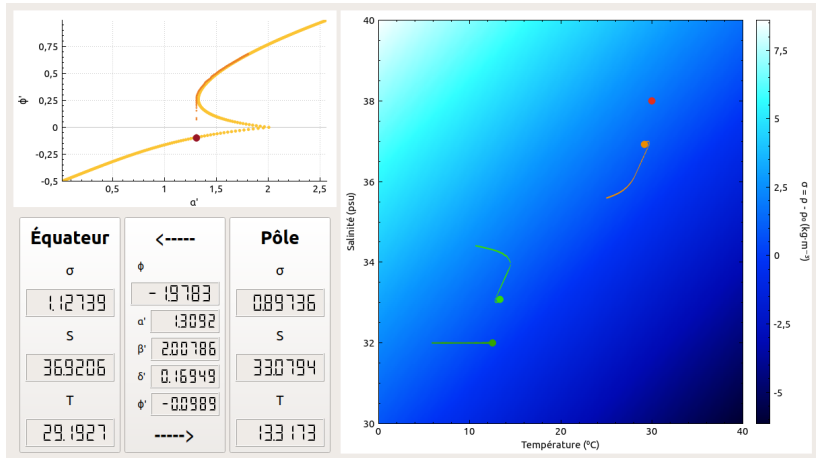
Si $\hat{\alpha}$ descend en dessous de la dernière valeur pour laquelle deux positions d'équilibre existent, on observe un brutal changement du signe de $\hat{\phi}$.

Nous venons donc d'assister à une inversion du sens du Gulf Stream causée par les effets d'un réchauffement climatique.

Notez que la température au pôle a augmenté de environ 3 degrés, ce qui est encore loin des scénarios les plus pessimistes.

Évolution du système

Refroidissement aux pôles



Un phénomène surprenant mais qui faisait déjà partie du cadre de ce que nous avons envisagé : On observe une baisse de la température réelle au pôle alors que la température de forçage n'a fait qu'augmenter !

Cela se comprend de la manière suivante : les positions d'équilibre négatives du flux sont moins grandes en valeur absolue que les positions positives. Lorsque le flux est négatif il y a donc moins de brassage, et en conséquence les températures et salinités réelles sont plus proches de leurs valeurs de forçage.

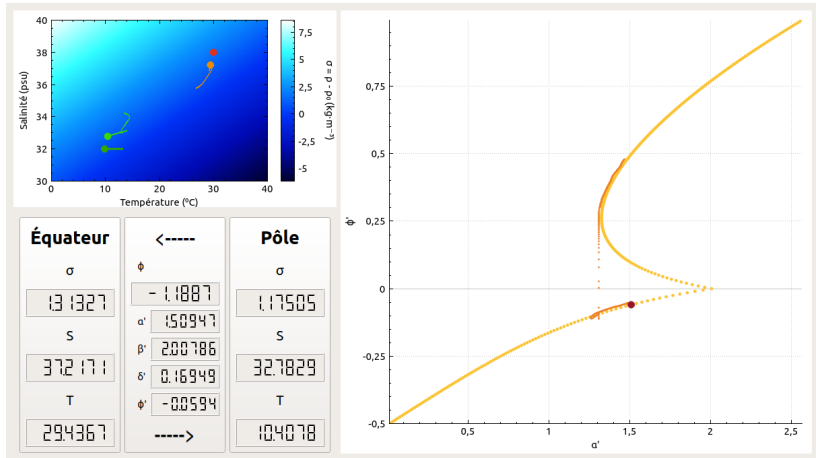
Dans le cas de la température au pôle, le rapprochement de la valeur de forçage est parvenu à contrebalancer l'augmentation de température.

Remarquons toutefois que :

- le refroidissement n'a pas compensé l'intégralité du réchauffement, seulement le dernier des 3 degrés de réchauffement
- dans le même temps la température à l'équateur s'est aussi rapprochée de la valeur de forçage, intensifiant encore le réchauffement climatique

Hystérésis

Irréversibilité de l'évolution

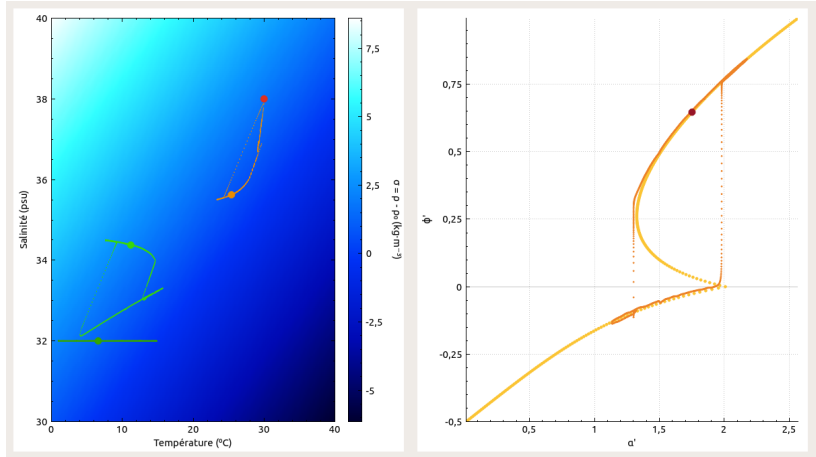


C'est maintenant que le phénomène d'hystérésis apparaît enfin : lorsqu'on revient en arrière en abaissant à nouveau la température de forçage au pôle, le système ne revient pas tout-à-fait dans sa configuration précédente puisque le flux reste négatif.

Cela pourrait suggérer qu'une fois le Gulf Stream inversé, il sera très difficile de réparer les dégâts climatiques.

Hystérésis

Cycle complet



Le cycle complet d'hystérésis peut être observé, consulter `CYCLE.md` pour une discussion sur sa forme et sur la possibilité de le parcourir en entier.

Conclusion

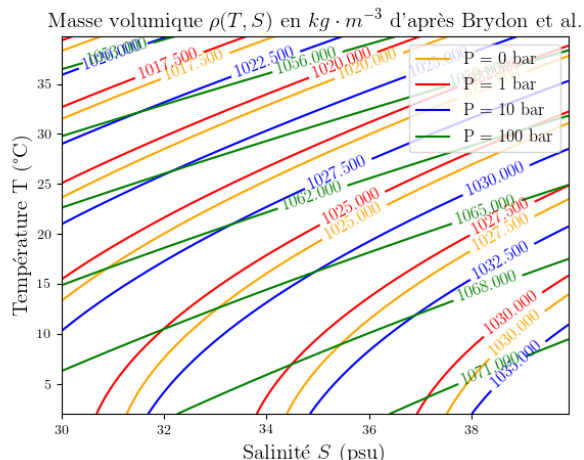
- Inutilisable en tant que tel
- Peut faciliter l'étude d'un modèle plus précis
- Permet d'envisager des scénarios à tester

On rappelle encore une fois que l'objectif de cette simulation n'est pas de prévoir ce qui va se passer mais d'envisager des scénarios possibles. Seul un modèle plus sophistiqué permettra de les valider. De plus, la possibilité de faire une étude analytique a grandement facilité l'interprétation des résultats de la simulation. Dans le cas d'un modèle qui serait trop compliqué pour être étudié de la même manière, le fait de disposer d'un modèle plus simple dont on connaît déjà le comportement peut aider à orienter l'étude.

Tout ce qui suit constitue une annexe, et n'aurait pas été inclus à la présentation du TIPE sauf éventuellement pour une question lors de l'entretien.

Équation d'état

Influence de la pression



On utilise l'approximation de Brydon et al. pour étudier les effets de la pression sur la température.

Tant que la pression n'est pas trop élevée, son effet se limite à translater en bloc la masse volumique de l'eau.

Comme on peut considérer que la pression est dans cette situation uniquement liée à la profondeur, une variation de la pression d'une constante n'a aucune influence sur les résultats : la valeur de $\rho_p - \rho_e$ n'est pas modifiée lorsqu'on compare des eaux qui sont à la même profondeur.

Circulation

Loi de Fick et établissement du flux de surface

$$\vec{j} = -D \cdot \overrightarrow{\text{grad}} n$$

$$\vec{j} \cdot m \cdot S = -D \cdot m \cdot S \cdot \overrightarrow{\text{grad}} n$$

$$j \cdot m \cdot S = -D \cdot m \cdot S \cdot \frac{dn}{dx}$$

$$j \cdot m \cdot S = -D \cdot m \cdot S \cdot \frac{\Delta n}{\Delta x}$$

$$\lambda \equiv \frac{D \cdot S}{\Delta x}$$

$$\phi \equiv j \cdot m \cdot S$$

$$\rho \equiv m \cdot n$$

$$\phi = \lambda \cdot \Delta \rho$$

Il est possible d'établir l'expression du flux que nous avons admise. On commence par multiplier par $m \cdot S$ la loi de Fick. À noter que S ne représente plus la salinité mais la surface de contact entre les compartiments.

On commence par exprimer le gradient comme une dérivée, nous sommes ici dans une configuration à une seule dimension x .

On discrétise ensuite cette relation : Δx représente la distance totale considérée entre les centres de nos deux compartiments.

Il suffit alors de remarquer que l'un des deux termes est un flux, et on définit λ en conséquence.

Comme il y avait été fait allusion, λ est dépendant de la géométrie de l'océan.

Mélange

Eaux de salinités et températures différentes

$$\Delta U_{i \rightarrow f} = m \cdot c \cdot (T^f - T^i)$$

$$\Delta M^{\text{sel}}_{i \rightarrow f} = m \cdot (S^f - S^i)$$

$$\Delta U_{i \rightarrow f} + \Delta U_{i \rightarrow f} = 0$$

$$\Delta M^{\text{sel}}_{i \rightarrow f} + \Delta M^{\text{sel}}_{i \rightarrow f} = 0$$

$$m_1 \cdot T_1^f + m_2 \cdot T_2^f = m_1 \cdot T_1^i + m_2 \cdot T_2^i \quad m_1 \cdot S_1^f + m_2 \cdot S_2^f = m_1 \cdot S_1^i + m_2 \cdot S_2^i$$

$$T^f = \frac{m_1 \cdot T_1^i + m_2 \cdot T_2^i}{m_1 + m_2}$$

$$S^f = \frac{m_1 \cdot S_1^i + m_2 \cdot S_2^i}{m_1 + m_2}$$

Ce calcul permet de justifier que les mêmes équations différentielles régissent la salinité et la température dans notre modèle, en établissant une analogie formelle entre les deux.

On écrit d'une part la variation de l'énergie interne d'une masse d'eau en fonction de ses températures initiale et finale, et d'autre part la variation de la masse de sel en fonction des salinités initiale et finale.

On écrit également les équations de conservation de l'énergie interne et de la masse de sel pour une quantité d'eau isolée de l'extérieur.

Lors du mélange de deux quantités d'eaux de températures et salinités différentes, les équations écrites juste avant permettent donc d'établir que la température et la salinité du mélange sont des moyennes pondérées par les masses des températures et salinités initiales.

Résolution

Découplage des équations

$$(2) - (1) \quad \frac{d(T_p - T_e)}{dt} = \frac{T_p^* - T_e^* + T_e - T_p}{\tau_T} - \frac{2|\phi|}{M_0}(T_p - T_e)$$

$$(4) - (3) \quad \frac{d(S_p - S_e)}{dt} = \frac{S_p^* - S_e^* + S_e - S_p}{\tau_S} - \frac{2|\phi|}{M_0}(S_p - S_e)$$

$$\frac{d\hat{T}}{d\hat{t}} = 1 - \hat{T} - |\hat{\phi}| \cdot \hat{T} \quad \frac{d\hat{S}}{d\hat{t}} = \hat{\delta}(1 - \hat{S}) - |\hat{\phi}| \cdot \hat{S}$$

$$\hat{T} \equiv \frac{T_p - T_e}{T_p^* - T_e^*} \quad \hat{S} \equiv \frac{S_p - S_e}{S_p^* - S_e^*} \quad \hat{t} \equiv \frac{t}{\tau_T} \quad \hat{\delta} \equiv \frac{\tau_T}{\tau_S} \quad \hat{\phi} \equiv \frac{2\tau_T}{M_0}\phi$$

Résolution

Expression du flux

$$\begin{aligned}\widehat{\phi} &= \frac{2\tau_T}{M_0}\phi \\ &= \frac{2\tau_T}{M_0}\lambda\rho_0 \left[-\alpha(T_p^* - T_e^*)\widehat{T} + \beta(S_p^* - S_e^*)\widehat{S} \right] \\ &= \widehat{\alpha}\widehat{T} - \widehat{\beta}\widehat{S}\end{aligned}$$

$$\widehat{\alpha} = \frac{2\tau_T}{M_0}\lambda\rho_0\alpha(T_e^* - T_p^*) > 0$$

$$\widehat{\beta} = \frac{2\tau_T}{M_0}\lambda\rho_0\beta(S_e^* - S_p^*) > 0$$

Résolution

Recherche de l'équilibre

$$\frac{d\hat{T}}{d\hat{t}} = 1 - \hat{T} - |\hat{\phi}| \cdot \hat{T} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{T} = \frac{1}{1 + |\hat{\phi}|}$$

$$\frac{d\hat{S}}{d\hat{t}} = \hat{\delta}(1 - \hat{S}) - |\hat{\phi}| \cdot \hat{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{S} = \frac{\hat{\delta}}{\hat{\delta} + |\hat{\phi}|}$$

$$\hat{\phi} = \frac{\hat{\alpha}}{1 + |\hat{\phi}|} - \frac{\hat{\beta}\hat{\delta}}{\hat{\delta} + |\hat{\phi}|}$$

Résolution

Recherche de l'équilibre

$$\widehat{\phi} = \frac{\widehat{\alpha}}{1 + |\widehat{\phi}|} - \frac{\widehat{\beta}\widehat{\delta}}{\widehat{\delta} + |\widehat{\phi}|}$$

$$\widehat{\alpha} = \left(1 + |\widehat{\phi}|\right) \left(\widehat{\phi} + \frac{\widehat{\beta}\widehat{\delta}}{\widehat{\delta} + |\widehat{\phi}|}\right)$$

$$\frac{d\widehat{\alpha}}{d\widehat{\phi}} = \left(\widehat{\phi} + \frac{\widehat{\beta}\widehat{\delta}}{\widehat{\delta} + |\widehat{\phi}|}\right) \frac{d|\widehat{\phi}|}{d\widehat{\phi}} + \left(1 + |\widehat{\phi}|\right) \left(1 - \frac{\widehat{\beta}\widehat{\delta}}{(\widehat{\delta} + |\widehat{\phi}|)^2} \frac{d|\widehat{\phi}|}{d\widehat{\phi}}\right)$$

Résolution

Recherche de l'équilibre

$$\left. \frac{d\hat{\alpha}}{d\hat{\phi}} \right|_{\hat{\phi} \approx 0} \approx 1 - \hat{\beta} \left(\frac{1 - \hat{\delta}}{\hat{\delta}} \right) \frac{d|\hat{\phi}|}{d\hat{\phi}}$$

$$\left. \frac{d\hat{\alpha}}{d\hat{\phi}} \right|_{\hat{\phi} \geq 0} \approx 1 - \hat{\beta} \left(\frac{1 - \hat{\delta}}{\hat{\delta}} \right) \quad \left. \frac{d\hat{\alpha}}{d\hat{\phi}} \right|_{\hat{\phi} \leq 0} \approx 1 + \hat{\beta} \left(\frac{1 - \hat{\delta}}{\hat{\delta}} \right)$$

$$0 < \hat{\delta} < 1$$

$$\hat{\beta} \left(\frac{1 - \hat{\delta}}{\hat{\delta}} \right) > 1$$