Lógica e Inteligencia artificial

Practica 2

Agustín Vanzato

Ejercicios

1. Sean A,B fbfs que cumplen que (¬A∨B) es tautología. Sea C una fbf cualquiera. Determinar, si es posible, cuáles de las siguientes fbfs son tautologías y cuáles contradicciones. Justificar las respuestas.

i- ((¬(A→B))→C)

(A→B) es lógicamente equivalente a (¬A∨B), entonces si reemplazo en la fórmula original, quedaría así ((¬(¬A∨B))→C). Dado que partimos de que (¬A∨B) es tautología, su negación va a ser una contradicción. si el antecedente es una contradicción(es decir su valor de verdad siempre es falso), la implicación siempre va a ser verdadera. por lo tanto, es tautología

ii- (C→((¬A)∨B))

Al ser verdadero siempre el consecuente de la implicación(porque (¬A∨B) es tautología), no importa el valor del antecedente, siempre va a dar verdadero(la única forma de que la implicación de falso, es que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso), por lo tanto, (C→((¬A)∨B)) es tautología.

iii- ((¬A)→B)

Si (¬A∨B) es tautología, quiere decir que no existe configuración en la que A sea verdadero y B sea falso al mismo tiempo teniendo eso en cuenta:

(¬	A	→	B)
F	V	V	V
V	F	F	F
V	F	V	V

como existe una configuración en la que no es verdadera, no es tautología.

2. ¿Es cierto que dadas A y B fbfs cualesquiera, siempre ocurre que si A y A→B son tautologías entonces B también lo es? Fundamentar. Ejemplificar con algunos ejemplos concretos escritos en lenguaje natural.

Vayamos por la contraria, sea B una fbf la cual no es tautología, quiere decir que posee configuraciones en la cual su valor es de verdad es falso, pero si A es tautología y B no lo es, podría existir casos en los que A→B no es verdadero, y sería un absurdo porque A→B es tautología, por lo tanto B debe ser tautología

3. Sea A una fbf donde aparecen sólo los conectivos $\wedge, \vee, \neg$. Sea A' la fbf que se obtiene a partir de A reemplazando cada $\wedge$ por $\vee$ y cada $\vee$ por $\wedge$. ¿Si A es una tautología, A' también lo es? Justificar. Ejemplificar con algunos ejemplos escritos en lenguaje natural.

No, no lo es.
contraejemplo:
sea A = $p \vee \neg p$ (tautología), A'= $p \wedge \neg p$ (contradicción)

4. Demostrar que cualquier tautologÍa proposicional que esté escrita usando los conectivos $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ contiene alguna ocurrencia ya sea del símbolo "$\neg$" o del símbolo "$\rightarrow$". Idea: Demostrar que cualquier fórmula que contenga sólo la conjunción y disyunción puede tomar el valor F.

Supongamos que tenemos una fórmula A la cual contiene solo los conectivos $\vee$ y $\wedge$ vamos a construir una valuación en particular en la cual A sea Falsa.(si se encuentra una sola configuración en la que A sea falsa, no es tautología)
Sea v una valuación, que asigna el valor Falso a todas las letras. O sea v(pi)=F para todo i. En esa valuación la Fbf A también va a tomar el valor falso.
Vamos a tomar un ejemplo que contiene 2 letras. La última fila corresponde a la valuación v que nos interesa.
Vamos a demostrarlo formalmente usando inducción sobre la estructura de A.
¿Qué es lo que vamos a demostrar? Vamos a demostrar que si A contiene sólo conjunción y disyunción, entonces v(A)=F (la última fila de la tabla).

Disyunción

p1	$\vee$	p2
V	V	V
V	V	F
F	V	V
F	F	F

Conjunción

p1	$\wedge$	p2
V	v	V
V	F	F
F	F	V

F	F	F

Para demostrar por inducción necesitamos un número natural N. En este caso el “N” es la “cantidad de conectivos de la Fbf”
caso base. N=0
Como N es cero, no hay conectivos, entonces A es atómica. O sea A=p1
v(p1)=F por lo tanto v(A)=F
Hipótesis inductiva: asumimos que para toda Fbf A que contiene sólo conjunción y disyunción, con N o menos conectivos v(A)=F
CASO N+1
Usando la H.I. tenemos que poder probar que v(A)=F, para una fórmula A que tiene N+1 conectivos.
A puede tener 2 formatos:
Caso 1: A es (B ∨ C)
Caso 2: A es (B ∧ C)
Vemos que tanto B como C tienen N o menos conectivos , por lo tanto para ellas vale la H.I., es decir v(B)=F y v(C)=F .
Entonces, por la definición de la semántica del ∨ y del ∧, tanto en el caso 1 como en el caso 2, v(A)=F.
Con esto hemos demostrado que A puede tomar el valor Falso y por lo tanto A no es una Tautología.
Retornando al objetivo del ejercicio, vemos que los conectivos ∨ y ∧ no alcanzan para escribir tautologías. Entonces, para expresar tautologías deben usarse además otros conectivos.

5. ¿Es cierto que en el Cálculo de Enunciados pueden escribirse dos fbfs que tengan diferentes letras de proposición y aún así ambas fbfs sean lógicamente equivalentes?. Fundar.

Si, por ejemplo p→p es lógicamente equivalente a q→q

6. Para las tablas dadas a continuación, encontrar al menos dos fbf del cálculo de Enunciados que las tenga por tablas de verdad. Ayuda: alcanza con usar p, q,¬,∧,∨.

p	q	f?
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	V

p∨¬p
q∨¬q

p	q	f?

V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

q ∨(p∧¬p)
q ∨(¬p∧p)

p	q	f?
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	F

p ∨(q∧¬q)
p ∨(¬q∧q)

7. Determinar cuáles de las siguientes fbfs son lógicamente implicadas por la fbf(A∧B). Fundamentar.

Def. de implicación lógica, ver def. 1.7 del Hamilton.

Una fbf A implica a una fbf B si A→B es tautología

i- A

(A	∧	B)	→	A
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	F	V	V	F
F	F	F	V	F

Por lo tanto A es lógicamente implicado

ii- B

(A	∧	B)	→	B
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	F	V	V	V
F	F	F	V	F

Por lo tanto B es lógicamente implicado

iii- A⋁B

(A	∧	B)	→	(A	⋁	B)
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	F
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	F	F

Por lo tanto A⋁B es lógicamente implicado

iv- ¬A⋁B

(A	∧	B)	→	(¬	A	⋁	B)
V	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	F	F	F

Por lo tanto ¬A⋁B es lógicamente implicado

v- ¬B→A

(A	∧	B)	→	(¬	B	→	A)
V	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V	F
F	F	F	V	V	F	F	F

Por lo tanto ¬B→A es lógicamente implicado

vi- A↔B

(A	∧	B)	→	(B	↔	A)
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	F	F
F	F	F	V	F	V	F

Por lo tanto A↔B es lógicamente implicado

vii- A→B

(A	∧	B)	→	(B	→	A)
V	V	V	V	V	V	V

V	F	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	F	F
F	F	F	V	F	V	F

Por lo tanto A→B es lógicamente implicado

viii- ¬B→¬A

(A	∧	B)	→	(¬	B	→	A	¬)
V	V	V	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	F	V	F	V

Por lo tanto ¬B→¬A es lógicamente implicado

ix- B→¬A

(A	∧	B)	→	(B	→	A	¬)
V	V	V	V	V	F	V	F
V	F	F	V	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V	F	V
F	F	F	V	F	V	F	V

Por lo tanto ¬B→¬A no es lógicamente implicado

8. Sea la relación ≤ tal que dadas fbfs A, B se cumple que A≤B sii A→B es una tautología. Dadas las fbfs: p, p→q, ¬p, p∧¬p, r∨¬r, organizarlas bajo la relación ≤. Representar gráficamente.

Primero sabemos que p∧¬p es una contradicción y puede implicar a todos, y r∨¬r es una tautología osea que puede ser implicado por todos, teniendo en cuenta eso quedarían en el siguiente orden: p∧¬p; ¬p; p→q; p; r∨¬r;

Cabe destacar que ninguna de las proposiciones, exceptuando la primera en orden, implica a p. Además, sabemos que p implica únicamente a r∨¬r. Por lo tanto se opta por asociarlo con la única proposición a la cual implica.

9. Sea A una fbf donde aparecen sólo los conectivos ∧,¬. Sea A' la fbf que se obtiene a partir de A reemplazando

cada ∧ por ∨ y cada letra de proposición por su negación (o sea, cada p por ¬p, cada q por ¬q, etc.).
¿Es cierto que A’ es lógicamente equivalente a ¬A? Fundamentar. Ejemplificar con algunos ejemplos concretos escritos en lenguaje natural.

Si es cierto, por la proposición 1.15 del libro de Hamilton. por ejemplo
A=(a∧b)
A*=(¬a∨¬b)

¬	(a	∧	b)	↔	(¬	a	∨	¬	b)
F	V	V	V	V	F	V	F	F	V
V	V	F	F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	V	F	V	V	F

10. Sea # el operador binario definido como p#q=$_{def}$(p∧¬q)∨(¬p∧q). Def.de implicación lógica, ver def. 1.7 del Hamilton.
i- Probar que # es asociativo, es decir,x#(y#z) es lógicamente equivalente a (x#y)#z.

(y	∧	¬	z)	∨	(¬	y	∧	z)
V	F	F	V	F	F	V	F	V
V	V	V	F	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F	V	F	V
V	V	V	F	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V	F	F	F

(X	∧	¬	(y#z))	V	(¬	X	∧	(y#z)
V	V	V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V	V
V	V	V	F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	F	V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	F	F	V	F	F	F

(x	∧	¬	y)	V	(¬	x	∧	y)
V	F	F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V	V
V	V	V	F	V	F	V	F	F
V	V	V	F	V	F	V	F	F
F	F	F	V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	F	V	F	F	V
F	F	v	F	F	V	F	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F	F

((x#y)	∧	¬	z)	V	(¬	(x#y)	∧	z)
V	F	F	V	F	F	V	F	V
V	V	V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	F	V	F	V
V	V	V	F	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	F	V	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V	F	F	F

x#(y#z)	↔	(x#y)#z
F	V	F
V	V	V
F	V	F
V	V	V
V	V	V
F	V	F
V	V	V
F	V	F

Por lo tanto # es asociativo.

ii- Probar que # es conmutativo, es decir, y#z es lógicamente equivalente a z#y.

(z	∧	¬	y)	∨	(¬	z	∧	y)
V	F	F	V	F	F	V	F	V
V	V	V	F	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V	F	F	F

(y	∧	¬	z)	∨	(¬	y	∧	z)
V	F	F	V	F	F	V	F	V
V	V	V	F	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V	F	F	F

(y#z)	↔	(z#y)
F	V	F
V	V	V
V	V	V
F	V	F

por lo tanto # es asociativo

11. Demostrar que las siguientes fórmulas son lógicamente equivalentes.

i- (p→q) es lógicamente equivalente a (¬p∨q)

(p	→	q)	↔	(¬	p	∨	q)
V	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	F
F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V	F

ii- (p↔q) es lógicamente equivalente a ((p→q)∧(q→p))

(p	↔	q)	↔	((p	→	q)	∧	(q	→	p))
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V	F	V	F	F
F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F

iii- (¬(p∧q)) es lógicamente equivalente a (¬p∨¬q)

(¬	(p	∧	q))	↔	(¬	p	∨	¬	q)
F	V	V	V	V	F	V	F	F	V
V	V	F	F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	V	F	V	V	F

iv- (¬(p∨q)) es lógicamente equivalente a (¬p∧¬q)

(¬	(p	∨	q))	↔	(¬	p	∧	¬	q)
F	V	V	V	V	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	V	f	V	F
F	F	V	V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	V	V	F	V	V	F

12. Escribir la forma normal conjuntiva FNC y la forma normal disyuntiva FND de las siguientes fórmulas bien formadas:

i- (p→q)→(p∧q)↔∨∧→¬

FNC

(p→q)→(p∧q)

(¬p∨q)→(p∧q) | (p→q) es lógicamente equivalente a (¬p∨q)

¬(¬p∨q)∨(p∧q) | ((¬p∨q)→(p∧q)) es lógicamente equivalente a ¬(¬p∨q)∨(p∧q)
(p∧¬ q)∨(p∧q) = FNC
FND partiendo de la FNC
(p∧¬ q)∨(p∧q)
(¬(p∧¬ q)∧¬(p∧q)) | (¬(p∨q)) es lógicamente equivalente a (¬p∧¬q)
(¬p∨ q)∧(¬p∨¬q) = FNC

ii- (p→q)∨(¬p∨r)

FND
(p→q)∨(¬p∨r) | (p→q) es lógicamente equivalente a (¬p∨q)
¬p∨q ∨¬p∨r
FNC partiendo de la FND
¬p∨q ∨¬p∨r
¬(¬p∨q ∨¬p∨r)
p∧¬q ∧p∧¬ r

iii- ((p→¬q)∧r)∨(¬p↔r)

((p	→	¬	q)	∧	r)	∨	(¬	p	↔	r)
V	F	F	V	F	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V	F	V	V	F
V	V	V	F	V	V	V	F	V	F	V
V	V	V	F	F	F	V	F	V	V	F
F	V	F	V	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	V	F	F	F	F	V	F	F	F

(p∨q ∨r)∧ (¬p∨q∨¬r) ∧(¬p∨¬q∨¬r) FND
(p∧q ∧¬r) ∨(p∧¬q ∧r) ∨(p∧¬q ∧¬r) ∨(¬p∧q ∧r) ∨(¬p∧¬q ∧r) FNC

Encontrar formas normales equivalentes aplicando las reglas de transformación del ejercicio anterior.

13. Obtener una FNC para la fbf ¬((¬p→ ¬q)→(q→p)). Fundar los pasos seguidos.

¬((¬p→ ¬q)→(q→p))
¬((p∨ ¬q)→(¬q∨p))
¬(¬(p∨ ¬q)∨(¬q∨p))
(p∨ ¬q) ∧¬(¬q∨p) = (p∨ ¬q) ∧¬q∧¬p)

14. La fbf p→(q→p) tiene forma normal conjuntiva (FNC). Obtenerla, indicando los pasos seguidos.

p→(q→p)
p→(¬q∨p)
¬p ∨(¬q∨p) es lo mismo que (¬p ∨p)∨¬q
(¬p ∨p) es una tautología, por lo tanto esta fórmula solo depende de ¬q
por lo tanto la FNC es ¬q

15. A partir de las conectivas ¬,∧,∨,→,↔mostrar conjuntos adecuados minimales. Fundamentar que lo son.

Por la definición de la proposición 1.24 de hamilton, {¬, ∧}, {¬, ∨} y { ¬, →} son conjuntos adecuados porque a partir de cualquiera de esos pares, se puede transformar a cualquier forma enunciativa. Mientras que {¬, ↔} no es un conjunto adecuado porque no se puede expresar A ∧B a partir del mismo.

16. Se dice que un conjunto Γ de fbfs del C. de Enunciados es satisfactible cuando existe al menos una asignación α de valores de verdad para las letras de proposición en Γ que hace verdaderas a todas las fórmulas de Γ. Demostrar que una proposición A es una tautología si y sólo si ¬A es insatisfacible.

Para que un conjunto Γ de fbfs sea satisfacible, es necesario que exista una configuración tal que todas fórmulas de Γ se vuelven verdaderas. en en caso de la tautología, todas sus configuraciones son verdaderas, de lo contrario, si una sola no lo es, no sería tautología. Entonces al negar esta, se volvería una contradicción y no existiría una configuración tal que satisfaga Γ

17. Determinar si los siguientes conjuntos son satisfacibles. Fundar.

i- Γ ={p→q,p↔q,r∨s,s↔¬q}

una configuración para que esto sea satisfacible seria
p: verdadero
q: verdadero
r: verdadero
s: falso

ii- Γ ={a∨¬c,¬b∨¬a,c∨a,b∨¬a}

a	b	c	a∨¬c	¬b∨¬a	c∨a	b∨¬a
V	V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	F	V	V
V	F	V	V	V	V	F
V	F	F	V	V	V	F
F	V	V	F	V	V	V
F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V
F	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**

No existe configuración tal que Γ sea satisfactible.

18. Sean Γ_1 y Γ_2 dos conjuntos satisfacibles de fbfs del C. de Enunciados. Determinar si los siguientes conjuntos también son satisfacibles. Fundamentar.

i- $\Gamma_3=\{(A\vee B)/A\in\Gamma_1,B\in\Gamma_2\}$.

Es satisfactible ya que es una disyuntiva de formas que, ya que son pertenecientes a conjuntos satisfacibles, existe una asignación que hace verdad al menos a una, entonces es satisfacible.

ii- $\Gamma_4=\{\neg A/A\in\Gamma_1\}$.

existen 2 posibilidades, que A sea una tautología o sea una fórmula satisfacible/contradicción, si es la última Γ4 sería satisfactible, pero si es una tautología, la negación de A sería una contradicción y por lo tanto, no sería satisfacible

iii- $\Gamma_5=\{(A\wedge B)/A\in\Gamma_1,B\in\Gamma_2\}$.

No puedo asegurar que A y B sean verdaderas al mismo tiempo, por lo tanto no puedo asegurar que $(A\wedge B)$ sea satisfacible. por ejemplo si $A=\neg q$ y $B=q$

iv- $\Gamma_6=\{A\#B/A\in\Gamma_1,B\in\Gamma_2\}$ donde # es el conectivo definido en el ejercicio 10.

Para que A#B sea satisfacible, A tiene que tener un valor diferente de B, entonces, en el hipotético caso de que A y B ambos sean contradicciones o tautologías, no se podría satisfacer Γ6.