Lógica e Inteligencia artificial

Práctica 6

Agustín Vanzato

Ejercicios

1. Señalar las ocurrencias libres o ligadas de x_1 , x_2 , x_3 en la siguiente fbf escrita en un lenguaje de primer orden donde C = {c}, F = {f, g}, y P = {A_1^2}, con g de aridad 1; f de aridad 2, A_1^2 de aridad 2

i) $\forall x_1 (\exists x_2 A_1^2(x_1, f(x_2, x_3)) \rightarrow \forall x_3 A_1^2(g(c), x_1) \vee A_1^2(x_1, x_3))$.

- x_1 está ligado en toda las veces que aparece en "$(\exists x_2 A_1^2(x_1, f(x_2, x_3)) \rightarrow \forall x_3 A_1^2(g(c), x_1) \vee A_1^2(x_1, x_3))$".
- x_2 solamente está ligado a "$A_1^2(x_1, f(x_2, x_3)$ "
- x_3 aparece libre en "f(x_2 , x_3)" y luego aparece ligada en A_1^2 (g(c), x_1) $\vee$ A_1^2 (x_1 , x_3)).

ii) $\forall x_1 (\exists x_2 A_1^2(x_1, f(x_2, x_3))) \rightarrow \forall x_3 A_1^2(g(c), x_1) \vee A_1^2(x_1, x_3)$.

- x_1 está ligada en "$(\exists x_2 A_1^2(x_1, f(x_2, x_3)))$" y luego aparece libre 2 veces en "$A_1^2(g(c), x_1)$" y "$A_1^2(x_1, x_3)$."
- x_2 está ligada en $A_1^2(x_1, f(x_2, x_3))$
- x_3 aparece ligada en "A_1^2 (g(c), x_1)" y libre 2 veces tanto en " f(x_2 , x_3)" como en "A_1^2 (x_1 , x_3)".

2. Sean A y B fbfs escritas en un lenguaje de primer orden. Analizar si son o no lógicamente equivalentes los siguientes pares de fbfs (usar noción de i-equivalencia o contraejemplos según corresponda):

i) (∀x) A $\qquad$ ∃xA

supongamos que A es "x es par", entonces estamos diciendo en **(∀x) A** que "para todo x, x es par" y en **∃xA** "existe x, tal que x par" lo cual no es lo mismo

ii) ∃x∃yA $\qquad$ ∃y∃xA

sea I una interpretación, v una valoración en la que se |= (Ex)(Ey)A.
Por 3.29, v' la cual sea x-equivalente a v y que |= (Ey)A.
Por 3.29, v'' que es y-equivalente a v' y que |= A.
Como v'' es y-equivalente a v', para todas las vars != y, son iguales.
En particular, con x tengo que |= (Ex)A.
Como v' es x-equivalente a v, para todas las vars != x, son iguales.
En particular, con y tengo que |= (Ey)(Ex)A.

iii) ∃x∀yA $\qquad$ ∀y∃xA

No son lo mismo porque por ejemplo, si usamos los dominios los números naturales y valoramos a A como x es mayor a y, **∀y∃xA** significa que para todo los números existe otro mayor, mientras que en **∃x∀yA** diríamos que existe un número mayor a todos lo cual no es verdad porque los números naturales son infinitos.

**iv) ∃x(A ∧ B)		∃xA ∧ ∃xB**

No son lo mismo, suponiendo la siguiente interpretación hablando del dominio :
A x es par
B x es impar
∃xA ∧ ∃xB quiere decir que existe un número que es par y existe un número que es impar
∃x(A ∧ B) quiere decir que existe un número par e impar lo cual no es lógico, por lo tanto no son equivalentes

**v) ∃x(A ∨ B)		∃xA ∨ ∃xB**

Sea una valoración V y una interpretación I, existe un x que satisface A o B o ambos, con que uno de los dos sea verdadero toda la fórmula se vuelve verdadera. así que no importa si llegan a ser dos elementos diferentes lo que termine de satisfacer la fórmula o el mismo, ambas fórmulas terminan siendo lógicamente equivalentes.

**vi) ∀x(A ∨ B)		∀xA ∨ ∀xB**

No son lógicamente equivalentes, sea una interpretación I y una valoración V supongamos el siguiente ejemplo:
A: x es par
b: x es impar (o bien ¬A)
y sea el dominio todos los números naturales
∀x(A ∨ B) es lo mismo decir que ∀x(A ∨ ¬A), al tener estructura de tautología se satisface siempre pero en el caso de ∀xA ∨ ∀xB, se tiene que dar que ∀x se cumple A o ∀x se cumple B, como no es posible que todos los números sean pares o impares, nunca se logra satisfacer.
Por lo tanto no son lógicamente equivalentes.

3. Sea un lenguaje de primer orden con las siguientes características:
Conjunto de constantes: C = {c, u}.
Sin símbolos de función: F = ∅.
Conjunto de símbolos de predicado: P = {A_1^2}, con A_1^2 de aridad 2.
Sea I la siguiente interpretación para ese lenguaje sobre el dominio de los números Naturales:

. I(c) = 0
. I(u) = 1
. I(A_1^2 (x, y)) = {(x, y) ∈ N × N; x ≤ y}

donde I es una función de interpretación semántica.
Verificar si las siguientes afirmaciones son o no correctas. Fundamentar las respuestas.

i) A_1^2 (c, x) es satisfactible en I.
Es satisfactible porque al no tener un cuantificador con solo indicar un ejemplo alcanzaría, suponiendo que x es 10, 0 es menor a 10, por lo tanto es satisfactible.

ii) A_1^2 (u, x) es satisfactible en I.
Lo mismo que el ejercicio anterior, si usamos el mismo ejemplo, 1 es menor a 10, por lo tanto es satisfactible.

iii) ∀xA_1^2 (c, x) es satisfactible en I.
Al agregar el cuantificador universal hay que confirmar que se satisface para todos los elementos del dominio de la interpretación, en este caso 0 es menor o igual que cualquier número natural, por lo tanto es satisfactible.

iv) ∀xA_1^2 (u, x) es satisfactible en I.
Reutilizando la explicación del inciso anterior, se tiene que cumplir que se satisface para todos los elementos del dominio de la interpretación, en este caso no se satisface porque x podría ser 0 y 1 no es menor igual a 0.

v) A_1^2 (c, x) es verdadera en I.
Para ser verdadera tiene que satisfacerse en todas sus valoraciones posibles, al no tener cuantificador con solo indicar un ejemplo alcanzaría, por ejemplo si decimos que x es 10, 0 es menor a 10, por lo tanto es verdadera

vi) ∀xA_1^2(c, x) es lógicamente válida.
No es lógicamente válida dado que si cambiamos el dominio a número reales se no se satisface el predicado para los números negativos, por lo tanto no sería satisfactible en ese caso y no es lógicamente válida.

vii) A_1^2 (u, c) ∧ ¬A_1^2(u, c) es contradictoria.
A nivel de estructura lógica, tiene la forma p ∧ ¬p lo cual es una contradicción. Por lo tanto es contradictoria.

4. Ofrecer una interpretación para los siguientes lenguajes de primer orden donde las fórmulas sean verdaderas y otra donde sean falsas. Traducir en cada caso las fórmulas dadas a oraciones apropiadas en lenguaje natural.
i) C = F = ∅, P = {A_1^2}, con A_1^2 de aridad 2.
. ∀x∀y(A_1^2 (x, y) → A_1^2 (y, x)).
. ∀x(A_1^2(x, x)).
. ∀x∀y∀z((A_1^2(x, y) ∧ A_1^2 (y, z)) → A_1^2 (x, z)).
Interpretación verdadera:
dominio: x, y pertenecientes a números naturales tal que x = y
A_1^2: “=”

Interpretación falsa:
dominio números naturales
A_1^2 : “<”

ii) C = {c}, F = {f}, P = {A_1^2}, con f y A_1^2 de aridad 2.
. ∀x(A_1^2 (x, c) → A_1^2 (x, f(y))).
. ∀x(¬A_1^2 (x, x)).
. ¬∀x∀y(A_1^2 (x, y)).

interpretación verdadera:
c: 0
f: identidad
A_1^2 : “>”
dominio: x, y pertenecientes a números naturales mayores a 0 tal que x > y

interpretación falsa:
c: 0
f: sucesor
A_1^2 : “=”
dominio: x, y pertenecientes a números naturales tal que x = y

5. Determinar si las siguientes fbfs escritas en algún lenguaje de primer orden son contradictorias, satisfactibles en alguna interpretación, verdaderas en alguna interpretación o lógicamente válidas. Fundamentar.
i) (∃x)(¬A(x)) ∨ (∀x)(A(x) ∨ B(x)).
Es lógicamente equivalente a:
(∃x)(A(x)) →(∀x(¬A(x) →B(x))
Suponiendo la interpretación:
A: x es par
B: x es impar
dominio naturales
esta fórmula se vuelve satisfactible.
pero si cambiamos la interpretación a:
A: x es par
B: x es múltiplo de 6
dominio {2, 3}
Esta fórmula se vuelve falsa, por lo tanto no es lógicamente válida.

ii) ∃y∃x P(x, y) → ∃x∃y P(x, y).
Sea I una interpretación del dominio D_i , y sea V una valoración en I.
si V no satisface ∃y∃x P(x, y) entonces satisface ∃y∃x P(x, y) → ∃x∃y P(x, y)
si V satisface ∃y∃x P(x, y) entonces satisface ∃y∃x P(x, y) → ∃x∃y P(x, y), por lo que toda valoración V’ i-equivalente a V satisface la FBF.
Como I es una interpretación abierta, y cualquier valoración la satisface es lógicamente válida.

6.
i) Si la fbf A(x) es satisfactible, ¿entonces la fbf $\exists$xA(x) es lógicamente válida?. Fundamentar.
No es lógicamente válido, supongamos que la interpretación de A es "x es par", en el dominio de los números pares es verdadero, pero en el de los impares no existe ningún x que sea par

ii) La fbf abierta $\forall$y P(x, y) → $\forall$y$\forall$x P(x, y) ¿es lógicamente válida?. Fundamentar.
No basta con tomar una interpretación por ejemplo:
dominio números naturales.
P: "<"
en $\forall$y P(x, y) es verdadero dado que podemos dejar la valoración fija v(x)=0, pero en $\forall$y$\forall$x P(x, y) no se cumple siempre.
por lo tanto es falsa

iii) Sea un lenguaje de primer orden con la letra de constante c y las letras de predicado P y Q, ambas de aridad 1. Sea la fbf : (P(c) ∨ $\forall$x(P(x) → Q(x))) → Q(c) ¿Es lógicamente válida? Fundamentar.
Sea una interpretación I y una valoración V, dada la siguiente valoración
C = 1
dominio: todos los x pares {2,4,6, ...}
p: x es impar
q: x es par
dado que este término **(P(c) ∨ $\forall$x(P(x) → Q(x)))** va a quedar verdadero y **Q(c)** falso, el predicado no es lógicamente valido

iv) Sean A y B dos fbf escritas en un lenguaje de primer orden.
La fbf: $\forall$x(A(x) ∨ B(x)) → (($\forall$xA(x)) ∨ ($\forall$xB(x))) es lógicamente válida? Fundamentar.
No es lógicamente válido, si usamos el mismo contraejemplo que en el inciso VI del ejercicio 2, encontramos un caso en el que $\forall$x(A(x) ∨ B(x)) puede quedar verdadero y (($\forall$xA(x)) ∨ ($\forall$xB(x))) puede quedar falso, por lo tanto la implicación queda falsa y no se logra satisfacer

7. Sea A una fbf de un lenguaje de primer orden, I una interpretación para tal lenguaje. Demostrar que A es verdadera en I si y sólo si ¬A es falsa en I.
A es verdadero en I, es decir para toda valuación V, V satisface A y V no satisface a ¬A, como esto ocurre para cualquier valoración ¬A es falso en I.
¬A es falso en I, es decir para toda valuación V, V no satisface ¬A y satisface ¬(¬A) que es lo mismo que A. como esto ocurre para cualquier valoración, A es verdadero en I.

8. Sea A una fbf que no contiene cuantificadores (es decir, abierta) escrita en algún lenguaje de primer orden. Sea I una interpretación para tal lenguaje. ¿Es posible decidir acerca del valor de verdad de A en I? Fundamentar

Es posible saber por la estructura de la fbf, pero no para todos los casos, por ejemplo si se ve algo con el formato $A \lor A$ se puede saber que es una tautología, $A \land \neg A$ es una contradicción y muchos más. Pero para algo como por ejemplo A no es posible saberlo.