Lógica e Inteligencia artificial

Práctica 3

Agustín Vanzato

Ejercicios

1. Sean A, B y C tres fórmulas bien formadas (fbfs) del sistema formal L. Dar una demostración sintáctica en L de los siguientes teoremas. Justificar cada paso en la derivación, indicando cuales son los axiomas instanciados y las reglas de inferencia utilizadas.

i- $\vdash_L$ **((¬A→A)→A)**

1)	(¬A → A)	Hipótesis
2)	(¬A →(¬¬(¬A→A)→¬A))	L1
3)	(¬¬(¬A→A)→¬A)→A→(¬(¬A→A))	L3
4)	(¬A→(A→¬(¬A→A)))	SH 2,3
5)	(¬A→(A→¬(¬A→A)))→((¬A→A)→(¬A→¬(¬A→A)))	L2
6)	((¬A→A)→(¬A→¬(¬A→A)))	MP 4, 5
7)	(¬A→¬(¬A→A)))	MP 1, 6
8)	(¬A→¬(¬A→A))→((¬A→A)→A)	L3
9)	((¬A→A)→A)	MP 7,8
10)	A	MP 1, 10

ii- $\vdash_L$ **(¬¬B→B)**

1)	$\sim\sim B$	Hipótesis
2)	$\sim\sim B \rightarrow (B \rightarrow \sim\sim B)$	L1
3)	$(B \rightarrow \sim\sim B)$	MP 1, 2
4)	$B \rightarrow (\sim\sim B \rightarrow B)$	L1
5)	$(B \rightarrow (\sim\sim B \rightarrow B)) \rightarrow ((B \rightarrow \sim\sim B) \rightarrow (B \rightarrow B))$	L3
6)	$(B \rightarrow \sim\sim B) \rightarrow (B \rightarrow B)$	MP 4, 5
7)	$(B \rightarrow B)$	MP 4, 7
8)	B	S.H.

iii- $\vdash_L$ **((A→B)→(¬B→¬A))**

1)	(A→B)	Hipótesis
2)	((A→B)→(¬B→¬A))	L3
3)	(¬B→¬A))	MP 1, 2

2. Sean A, B y C tres fórmulas bien formadas (fbfs) del sistema formal L. Dar una demostración sintáctica en L de las siguientes deducciones. Justificar cada paso en la derivación, indicando cuales son los axiomas instanciados y las reglas de inferencia utilizadas.

i-{((A→B)→C),B} $\vdash_L$ (A→C)

1)	B->(A->B)	L1
2)	B	hipótesis
3)	(A->B)	MP 1, 2
4)	((A→B)→C)	hipótesis
5)	C	MP 3, 4
6)	C->(A->C)	L1
7)	(A->C)	mp 5,6

3. Sea Γ ={A_1,...,A_n} n>0, un conjunto de fbfs del C. de Enunciados. Se sabe que Γ $\vdash_L$ A. ¿Es cierto que si Γ es satisfacible entonces $\vdash_L$ A?. Fundar.

$\nvdash_L A$, pues si $\Gamma = \{p\}$ y $A = p$, $\Gamma \vdash_L A$ es teorema, mientras que $\vdash_L A$ no lo es.

4. Sea Γ un conjunto de fbfs del C. de Enunciados. Se sabe que Γ $\vdash_L$ A. ¿Es cierto que para todo Γ_i tal que $\Gamma_i \subset \Gamma$, $\Gamma_i \vdash_L$ A?. Fundar.

Se sabe que $\Gamma \vdash_L A$.

$(\forall\ \Gamma_i) / \Gamma_i \subset \Gamma$, $\Gamma_i \nvdash_L A$ pues si $\Gamma = \{p\}$, $A = p$ y $\Gamma_i = \varnothing$, se da que $\Gamma \vdash_L A$, $\Gamma_i \subset \Gamma$ y $\Gamma_i \nvdash_L A$.

5. Sean Γ y Γ_0 conjuntos de fbfs del C. de Enunciados. ¿Es cierto que para todo Γ existe algún $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que si Γ $\vdash_L$ A entonces $\Gamma_0 \vdash_L$ A?. Fundar. Nota: relacionar con ejercicio 10.

¿$(\forall\ \Gamma)$, $(\exists\ \Gamma_0 \subseteq \Gamma) / \Gamma \vdash_L A \rightarrow \Gamma_0 \vdash_L A$?

Si, porque en el hipotético caso que $\Gamma_0 = \Gamma$ se cumple siempre. en cualquier otro caso diferente no

6. Sea Γ un conjunto de fbfs del C. de Enunciados. Sean A y B fbfs del C. de Enunciados. ¿Es cierto que si Γ∪{A} $\vdash_L$ B y Γ∪{A} $\vdash_L$ ¬B, entonces Γ $\vdash_L$ A?. Fundar

No, pues si $\Gamma = \{p\}$, $B = q$, y $A = \sim p$, se cumple $(\Gamma \cup \{A\}) \vdash_L B \wedge (\Gamma \cup \{A\}) \vdash_L \sim B$ pero no se cumple $\Gamma \vdash_L A$.

7. Sean A, B y C fbfs del C. de Enunciados. Sea Γ un conjunto de fbfs del C. de Enunciados. Se sabe que $\Gamma \cup \{A,B\} \vdash_L C$ y también se sabe que $\Gamma \vdash_L A$.

i- ¿Es cierto que $\Gamma \vdash_L (C \rightarrow B)$?. Fundar.

No, pues sea $\Gamma = \{p\}$, $B = q$, $A = p$, y $C = p$. Se da que $\Gamma \vdash_L A$ y $(\Gamma \cup \{A, B\}) \vdash_L C$, pero no se cumple $\Gamma \vdash_L (C \rightarrow B)$

ii- ¿Es cierto que $\vdash_L (A)$?. Fundar.

No, usando el mismo ejemplo que en i) no se da $\vdash_L A$. solo se podría dar si A es tautología, pero no tenemos esa información.

8. Sea Γ un conjunto de fbfs del C. de Enunciados. Se define el conjunto de consecuencias lógicas de Γ cómo:

$$Con(\Gamma)=\{A / \ \Gamma \vdash_L A\}$$

Dadas las fbfs p→q y q, ¿cuál es la relación entre los conjuntos $Con_L(p \rightarrow q)$ y $Con_L(q)$?. ¿Son iguales, el primero incluye al segundo, el segundo incluye al primero?. Representar gráficamente. Fundar

$Con_L (p \rightarrow q) \subseteq Con_L (q)$, porque de q se puede deducir $p \rightarrow q$ mientras que de $p \rightarrow q$ no se puede deducir q.

Dem: ¿$q \vdash_L (p \rightarrow q)$?

(1)	q	Hipótesis
(2)	$q \rightarrow (p \rightarrow q)$	L_1
(3)	$(p \rightarrow q)$	M.P. (1) y (2)

9. Sean Γ_1 y Γ_2 conj. de fbfs del C. de Enunciados.

i- $\Gamma_1=\{r,\neg s\}$ Calcular $Con_L(\Gamma_1)$.

Por definición de con_L, $con_L(\Gamma 1) = \{A/\{r,\neg s\} \vdash_L A\}$

ii- Γ_2={r,¬s, s∨¬r}. Calcular $Con_L(\Gamma_2)$.

Dado que Γ2 es un conjunto insatisfacible, es decir es una contradicción, puede deducir cual cosa. por lo tanto dicha conL (Γ1) es el conjunto de todas las fórmulas de L

10. Sea Γ un conj. de fbfs del C. de Enunciados. Se dice que Γ es independiente si para toda fbf A∈Γ no ocurre{Γ−A} $\vdash_L$ A

i- Sea Γ ={p, q,¬p}. ¿Es independiente?. Fundar

Γ no es independiente, dado que al poseer p y ¬p, el conjunto se vuelve insatisfacible, es decir una contradicción, por lo tanto puede deducir todo

ii- Sea Γ ={p, q}. ¿Es independiente?. Fundar

Γ es independiente dado que a partir de un elemento no puedo deducir otro.

iii- Demostrar que para todo Γ finito, $Con_L(\Gamma)=Con_L(\Gamma')$ donde Γ′ es un conjunto independiente.

Si se tiene un Γ finito, el cual no es independiente, se puede obtener otro Γ’ el cual sea independiente quitando todos los A∈ Γ tal que {Γ−A}$\vdash_L$A sin perder elementos de $Con_L(\Gamma)$

11. Se sabe que para todo Γ finito existe algún Γ′ independiente tal que $Con_L(\Gamma)=Con_L(\Gamma')$. Construir un ejemplo donde las afirmaciones previas se verifica y Γ′ ⊄ Γ (ni trivialmente Γ′= Γ).

Γ= {p↔q; r→s; r, s, p, q}

Γ′= {p→q; q→s; ¬r ∨s, r, s, p, q}

12. Sean Γ_1 y Γ_2 conjuntos de fbfs del C. de Enunciados. Sean A y B fbfs del C.de Enunciados. Si $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ y $\Gamma_1 \vdash_L$ A, entonces:

i- ¿Es cierto que $\Gamma_1 \vdash_L$ B?. Fundar.

no, sea Γ1= {p}, r2= r1+{q} a={p} y b={s}, se puede observar que tanto Γ1 como Γ2 no lo deduce

ii- ¿Es cierto que $\Gamma_2 \vdash_L$ B?. Fundar.

no, se demuestra en el ejemplo anterior

iii- ¿Es cierto que $\Gamma_2 \vdash_L$ A?. Fundar.

si, porque como en el ejemplo de i), al estar contenido Γ1 en Γ2 lo deduce

iv- ¿Es cierto que $\Gamma_1 \vdash_L$ (A→B)?. Fundar.

no podemos afirmarlo dado que no tenemos la información suficiente de B
si se diera que por ejemplo Γ1={r,s} A={r}, B={q}, Γ1$\vdash_L$A pero no se da que Γ1$\vdash_L$(A→B)

Si $\Gamma_2 \vdash_L A$ y ocurre que para cada B en Γ_2, $\Gamma_1 \vdash_L B$, entonces:

i- ¿Es cierto que $\Gamma_2 = \Gamma_1$?. Fundar.

No, porque porque por ejemplo si fueran: $\Gamma1=\{p, q\}$, $\Gamma2=\{p, p\rightarrow q\}$, $A=\{p\}$, $B=\{p\rightarrow q\}$
tanto Γ1, como Γ2 deducen A y B pero no son iguales

ii- ¿Es cierto que $\Gamma_2 \vdash_L \neg B$?. Fundar.

Depende, si Γ2 es consistente no debería poder deducir ¬B o B pero no ambos, ahora si es inconsistente si puede deducir ambos, asumiendo que es consistente en este caso y sabemos que deduce B, no deduce ¬B

iii- ¿Es cierto que $\Gamma_1 \vdash_L A$?. Fundar.

Si, se asume por el enunciado