

有限元法 自学教程第二讲

有限元法是一种微分方程的近似解法

$$y' = f(x, y) \xrightarrow{\text{近似解法}} \begin{cases} \text{有限元法} \\ \text{有限差分法} \end{cases}$$

有限差分法 $y' = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{y(x+\Delta h) - y(x)}{\Delta h} \approx \frac{y(x+\Delta h) - y(x)}{\Delta h}$

有限元法 $y' = f(x, y) \xrightarrow{\text{等效转化}} \int F(x, y, y') dx \xrightarrow{\text{近似解}} \text{有限元法}$

$$x + a = b$$

\Downarrow

$$x = b - a \quad (\text{等效方程})$$

$$y' = f(x, y) \Rightarrow \int F(x, y, y') dx \quad (\text{等效积分})$$

为什么要“多此一举”？

如何将微分方程转化为等效积分形式？

有限元法的精确定义

有限元法是将一个微分方程问题转化为泛函极值问题，再求这个泛

函极值的近似解法

力学背景下的定义：有限元法是将一个力方程转化为能量方程，再求这个能量方程的近似解

牛顿运动定律 $F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow W = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$

有限差分法与有限元法的区别

有限差分法: $y' = f(x, y) \xrightarrow{\text{直接用有限差分求近似解}} \text{直接求解方程, 微分变差分}$

有限元法: $y' = f(x, y) \xrightarrow{\text{等效转化为能量方程}} \int F(x, y, y') dx$ 先将力方程等效

转化为能量方程, 再求能量方程的近似解

物理性质变了 力 \Rightarrow 能量

数学性质变了 微分方程近似解 \Rightarrow 积分方程近似解

有限差分法与有限元法的相似: 画网格 网格越密精度越高

为什么要“多此一举” 为什么要转化?

① 能量方程比力方程易建模



$F = ma$ 微分方程表现局部性质, 建立方程困难 $y' = f(x, y)$

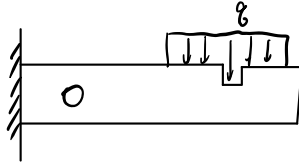
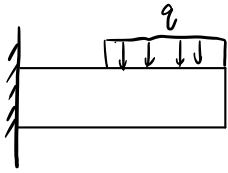
② 力方程(微分方程)对解的连续性要求过高

$F = ma$ 二阶微分方程 刚体, 质点

变形体 二阶 \Rightarrow 解的二阶导数必须存在

\Rightarrow 一阶导数必须连续

不连续现象随处可见

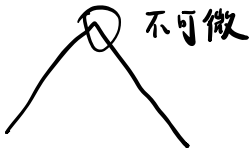


微分方程无法解释 通解无法包括不连续

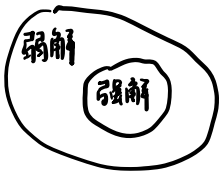
解集不完备

可微的条件很强

可积的条件很弱



积分方程的解集更完备



有限元法任务

力方程是什么？

怎样等效的转化为能量方程

能量方程的近似解怎么求？

弹性力学