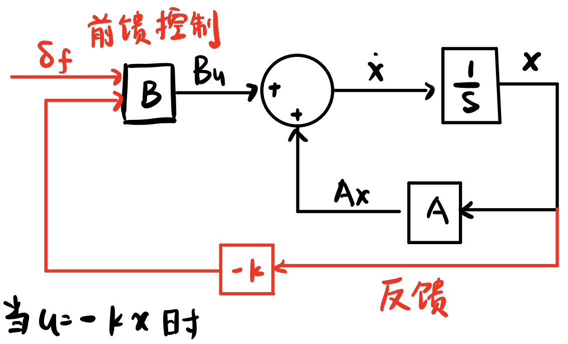
自动驾驶控制算法第六讲

$K = lqr(A,B,Q,R)$　　　$K = dlqr(\bar{A},\bar{B},Q,R)$

$\dot{x} = Ax + Bu$　　　$x_{k+1} = \bar{A}x_k + \bar{B}u_k$

$u = -kx$ (反馈控制)

$\dot{x} = Ax + Bu$



当 $u=-kx$ 时

第四讲　$\dot{e}_{rr} = Ae_{rr} + Bu + C\dot{\theta}_r$

若只用LQR　$u = -ke_{rr}$　⇒　$\dot{e}_{rr} = (A-Bk)e_{rr} + C\dot{\theta}_r$

无论 k 取何值　e_{rr} 与 $\dot{e}_{rr}$ 不可能同时为零　⇒ e_{rr} 不可能永远为零

∵ $e_{rr}=0$，$\dot{e}_{rr}=0$ 不是该微分方程的解　　$0 = 0 + C\dot{\theta}_r$　不可能!

前馈控制　　$\dot{e}_{rr} = Ae_{rr} + Bu + C\dot{\theta}_r$

$u = -kx + \delta_f$　前馈控制

⇓

由LQR计算出的反馈控制

$\dot{x} = Ax + Bu$

前馈控制的引入是为了消除稳态误差

(LQR最终会导致 $\dot{e}_{rr}=0$，$e_{rr}\neq 0$ ✓)

$0 = (A-Bk)e_{rr} + C\dot{\theta}_r$　　$e_{rr} = -(A-Bk)^{-1}C\dot{\theta}_r$　稳态误差

引入前馈控制后

$\dot{e}_{rr} = Ae_{rr} + B(-ke_{rr} + \delta_f) + C\dot{\theta}_r$

稳定后，$\dot{e}_{rr}=0$　　$e_{rr} = -(A-Bk)^{-1}\cdot(B\delta_f + C\dot{\theta}_r)$

目的，选取合适的 δ_f，使得 $e_{rr} = -(A-BK)^{-1}\cdot(B\delta_f + C\dot{\theta}_r)$ 尽可能为零

用软件 Mathematica 计算

$$e_{rr} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1}\left\{\delta_f - \frac{\dot{\theta}_r}{v_x}\left[a+b-bk_3 - \frac{mv_x^2}{a+b}\left(\frac{b}{C_f} + \frac{a}{C_r}k_3 - \frac{a}{C_r}\right)\right]\right\} \\ 0 \\ -\frac{\dot{\theta}_r}{v_x}\left(b + \frac{a}{a+b}\frac{mv_x^2}{C_{\alpha r}}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\dot{\theta}_r$ 对 e_{rr} 的影响

当 $\delta_f = \frac{\dot{\theta}_r}{v_x}\left[a+b-bk_3 - \frac{mv_x^2}{a+b}\left(\frac{b}{C_f} + \frac{a}{C_r}k_3 - \frac{a}{C_r}\right)\right]$

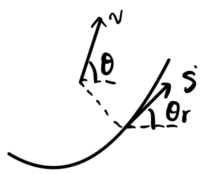
$e_d = 0$ k_3 是反馈 K（k_1 k_2 k_3 k_4）中的 k_3

先算反馈 K，再算前馈

$\boxed{e_\varphi = -\frac{\dot{\theta}_r}{v_x}\left(b + \frac{a}{a+b}\frac{mv_x^2}{C_{\alpha r}}\right)}$ 不受 δ_f，K 的影响

无论前馈反馈取何值 $e_\varphi \neq 0$

对 e_φ 做化简



$$\dot{s} = \frac{|\vec{v}|\cos(\theta-\theta_r)}{1-ke_d} = \frac{|\vec{v}|\cos(\beta+\varphi-\theta_r)}{1-ke_d} = \frac{|\vec{v}|\cos\beta\cos\varphi - |\vec{v}|\sin\beta\sin\varphi}{1-ke_d}$$

$$= \frac{v_x\cos e_\varphi - v_y\sin e_\varphi}{1-ke_d}$$

曲率 $k = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ 定义式 $k = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta/dt}{ds/dt} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{s}}$ $\dot{\theta} = k\dot{s}$

$\therefore \dot{\theta}_r = k\dot{s}$ 近似 $|k| \ll 1$ $|e_\varphi| \ll 1$ $|v_y| \ll 1$（无飘移）

$\frac{1}{1-ke_d} \approx 1$ $v_x\cos e_\varphi \approx v_x$ $v_y\sin e_\varphi \approx 0$ $\therefore \dot{s} \approx v_x$

$\therefore \dot{\theta}_r = k\dot{s} \approx kv_x$

$$e_\varphi = -k\left(b + \frac{a}{a+b}\frac{m v_x^2}{C_r}\right) \qquad k = \frac{1}{R}$$

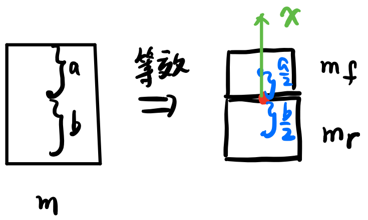
$$= -\left(\frac{b}{R} + \frac{a}{a+b}\frac{m v_x^2}{R}\frac{1}{C_r}\right)$$

$$a_y = \dot v_y + v_x\dot\varphi$$ （无飘移）

$$\approx v_x\dot\varphi \qquad \dot\varphi = \frac{\vec v}{R} = \frac{\vec v_x + \vec v_y}{R} \approx \frac{\vec v_x}{R}$$

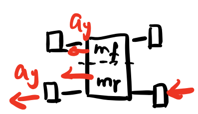
$$\approx \frac{v_x^2}{R}$$

$$e_\varphi = -\left(\frac{b}{R} + \frac{a}{a+b} m a_y \cdot \frac{1}{C_r}\right)$$

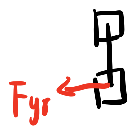


等效的前提 $\begin{cases} m_f + m_r = m \\ m_f \cdot \frac{a}{2} + m_r \cdot \left(-\frac{b}{2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_f = \frac{b}{a+b} m \\ m_r = \frac{a}{a+b} m \end{cases}$

$$e_\varphi = -\left(\frac{b}{R} + \frac{m_r a_y}{C_r}\right)$$

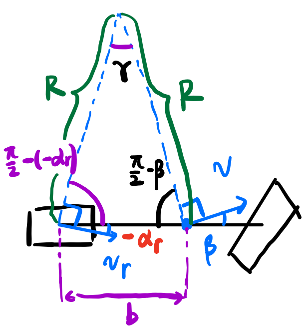


$m_r a_y = F_{yr}$ 后轮侧向力的和

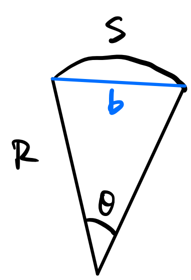


$$= -\left(\frac{b}{R} + \alpha_r\right)$$

还可以化简



$\because R \gg b \qquad \gamma \approx \frac{b}{R}$



$\theta = \frac{S}{R}$ 弧度制的定义

当 $R \gg S$ 时 $S \approx b$

$\therefore \theta \approx \frac{b}{R}$

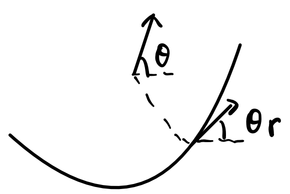
在△中有 $\gamma + \frac{\pi}{2} - \beta + \frac{\pi}{2} - (-\alpha_r) = \pi$

$$\Rightarrow \ -\beta = -(\gamma + \alpha_r) = -\left(\frac{b}{R} + \alpha_r\right)$$

$\therefore \ e_\varphi = -\beta$

e_φ 不是航向误差　　$e_\varphi = \varphi - \theta_r$　　航向误差为 $\theta - \theta_r$　　$\theta = \varphi + \beta$

e_φ 的稳态误差为 $-\beta$　　$e_\varphi = \varphi - \theta_r$　$\Rightarrow$　$-\beta = \varphi - \theta_r$　　$\varphi + \beta = \theta_r$ ✓



虽然 e_φ 不可能通过 δ_f，K 去调节，但是我们不用去理会

$\because$ 最终目的是 $\theta - \theta_r = 0$　$\Rightarrow$ $e_\varphi = -\beta$　而 e_φ 的稳态误差正好是 $-\beta$

$\therefore$ 不用去管

$$\delta_f = \frac{\dot{\theta}_r}{v_x}\left[a + b - bk_3 - \frac{m v_x^2}{a+b}\left(\frac{b}{C_f} + \frac{a}{C_r}k_3 - \frac{a}{C_r}\right)\right]$$

$\theta_r = k v_x$

$$\delta_f = k\left[a + b - bk_3 - \frac{m v_x^2}{a+b}\left(\frac{b}{C_{\alpha f}} + \frac{a}{C_{\alpha r}}k_3 - \frac{a}{C_{\alpha r}}\right)\right]$$

$$u = -\underset{\substack{\downarrow \\ \text{lqr} \\ \text{反馈控制}}}{K} e_{rr} + \underset{\text{前馈控制}}{\delta_f}$$

$$e_{rr} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

e_φ 是不是航向误差　（很微妙）