重采样

$$\left.\begin{aligned} X_k &= f(X_{k-1}) + Q_k \\ Y_k &= h(X_k) + R_k \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{bayes filter}} \begin{cases} \text{预测} & f_k^-(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Q[x - f(v)] f_{k-1}^+(v)\, dv \\ \text{更新} & f_k^+(x) = \eta f_R[y_k - h(x)] f_k^-(x) \end{cases}$$

pf $\Downarrow$ 大数定律 (Mente Carlo integral)

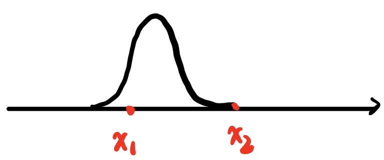
$$\begin{cases} \text{预测} & x_k^{(i)} = f(x_{k-1}^{(i)}) + v_k \quad v_k \sim N(0, Q) \\ \text{更新} & w_k^{(i)} = f_R[y_k - h(x_k^{(i)})]\, w_{k-1}^{(i)} \\ \text{归一} & w_k^{(i)} = \dfrac{w_k^{(i)}}{\sum_i w_k^{(i)}} \\ \text{重采样} & \text{理论} \longrightarrow \text{实践} \end{cases}$$

重采样为了解决粒子退化问题：只有少数粒子具有较高的权重，大量粒子权重极低

为什么会出现粒子退化？

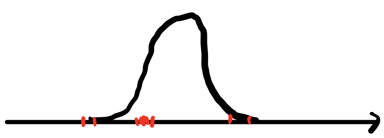
1. 粒子数不能取太多

2. $w_k^{(i)} = f_R[y_k - h(x_k^{(i)})]\, w_{k-1}^{(i)}$ $\quad f_R[y_k - h(x_k^{(i)})] = (2\pi R)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{[y_k - h(x_k^{(i)})]^2}{2R}}$ 为 $e^{-\alpha x^2}$ 型

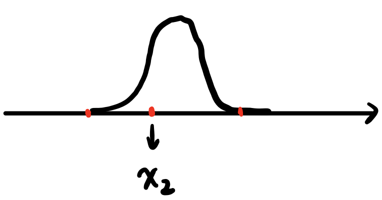


$f_R[y_k - h(x_1)]$ 是 $f_R[y_k - h(x_2)]$ 的 1000 倍

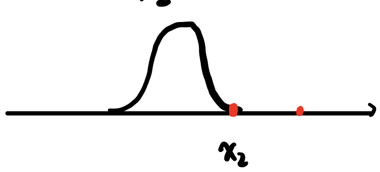
$w_k^{(i)} = \dfrac{w_k^{(i)}}{\sum_i w_k^{(i)}}$ 按比例分配



优



$f_k^+(x) \approx \delta(x - x_2)$ $\quad 1 \quad 0.01$



$f_k^+(x) \approx \delta(x - x_2)$ $\quad 0.01 \quad 0.0000001$

按比例分配，不看绝对大小，看相对大小

粒子退化的坏处： $f_k^+ = \delta(x - x_2)$，除了 $w_k^{(2)} = 1$，其余 $w_k^{(i)}$ 皆为 0

下一步：预测 $\quad x_{k+1}^{(i)} = f(x_k^{(i)}) + v_k$ ✓

更新 $\quad w_{k+1}^{(i)} = f_R[y_k - h(x_k^{(i)})] \cdot w_k^{(i)}$

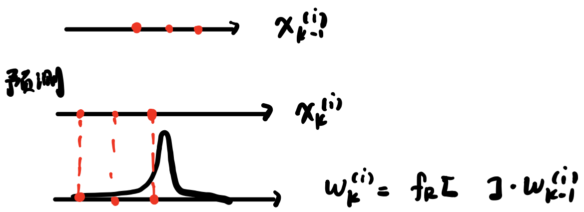
$w_{k+1}^{(2)} = f_R[y_k - h(x_k^{(2)})]$，其余皆为0

归一 $w_{k+1}^{(2)} = \frac{w_{k+1}^{(2)}}{w_{k+1}^{(2)}} = 1$ 权重未更新，失去了更新的作用

所以要解决粒子退化问题，重采样应运而生

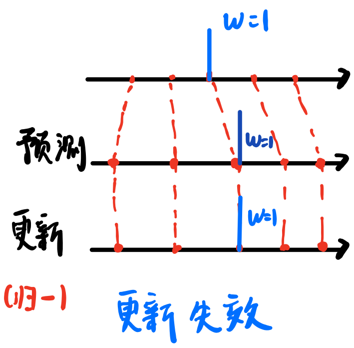
粒子退化 ⟶ 更新失效（是这一步还是下一步）✓

$x_{k-1}^{(i)}$ $w_{k-1}^{(i)} = \frac{1}{n}$

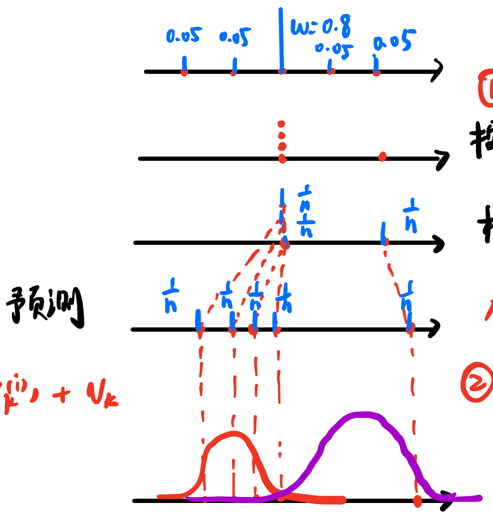


当前步的更新发挥作用 ⟶ 粒子退化 ⟶ 下一步的更新失效

未重采样



重采样



$x_{k+1}^{(i)} = f(x_k^{(i)}) + v_k$

① 按概率进行复制与淘汰

权重高的更有可能被多次复制

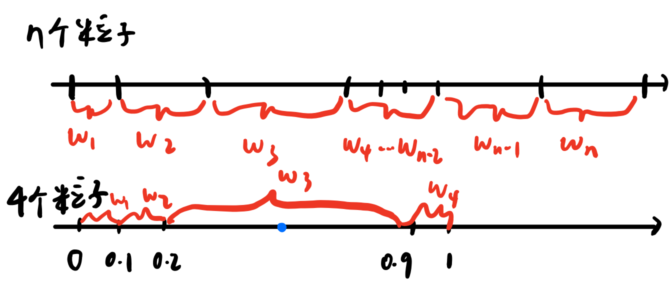
从而保证整个粒子数不变

②：把所有粒子权重设为 $\frac{1}{n}$

重采样算法

x_1 $w_1 = 0.1$ x_2 $w_2 = 0.1$ x_3 $w_3 = 0.7$ x_4 $w_4 = 0.1$

① 在(0,1)上按 w_i 的大小生成区间



每个区间为 $[0, w_1)$ $[w_1, w_1+w_2)$ $[w_1+w_2, w_1+w_2+w_3)$ …… $[\sum_{i-1} w_{i-1}, \sum_{i} w_i)$

$[0, 0.1)$ $[0.1, 0.2)$ $[0.2, 0.9)$ $[0.9, 1)$

② 生成一个随机数 a $a \sim U(0,1)$

③ 看 a 落在哪个区间，就把该区间对应粒子进行复制

$a=0.5 \in [0.2, 0.9)$

a 对应的区间为 w_3，则把 x_3 复制

a 取4次，分别是 0.03 0.23，0.69 0.78

$0.03 \in [0, 0.1)$ x_1 复制一次

$0.23, 0.69, 0.78 \in [0.2, 0.9)$ x_3 复制三次

重采样结果是：x_1，x_3，x_3，x_3 按概率进行复制

④ 所有粒子权重设为 $\frac{1}{n}$ $(\frac{1}{4})$

代码：重采样4次

Xold $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

Wold $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$

```
① for i=1:4
       a = unifrnd(0,1);
       % 看a落在哪个区间
       C[4]= (w1, w1+w2, w1+w2+w3, 1)   % C[4]为递增序列
       for j=1:4
           if (a< C[j])
               Xnew[i] = Xold[j];
               break;
           end
       end
   end
```

C[4]= (0.1, 0.2, 0.9, 1)

a=0.5

i=1

j=1 a< C[1] 0.5<0.1

j=2 a< C[2] 0.5<0.2

j=3 a< C[3] 0.5<0.9 ✓

Xnew[1] = Xold[3];

break; (退出j循环)

无break;

j=4 a< C[4] 0.5<1

Xnew[1] = Xold[4]; 被覆盖

重采样有一定的减弱粒子退化的能力

重采样必然会导致粒子多样性丧失　　$N=\frac{1}{\sum w_i^2}$　　N越小，退化越严重，越要重采样

重采样必然会减慢pf的速度