贝叶斯滤波三大概率

先验概率　后验概率

《概率机器人》　pdf 与 cdf 混用　独立，无关，没有影响

X，Y 随机变量　x, y 随机变量的取值，代表随机实验一个可能的结果

例 1：正　$X=1$ 做一次随机实验，结果为正面朝上

离散　$P(X=x)=P_x$　例 $P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

连续　$P(X<x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

条件概率：离散　$P(X=x|Y=y)=\frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}$

连续　$P(X<x|Y=y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(x,y)}{f(y)}dx$

温度：今天多少度？

首先：先验概率分布　$\begin{cases} P(T=10)=0.8 \\ P(T=11)=0.2 \end{cases}$

其次：温度计 T_m (measure)　$T_m=10.3℃$

最后：后验概率分布

$P(9.9<T_m<10.1|T=10)=1$

小

$$\underbrace{P(T=10|T_m=10.3)}_{后验}=\frac{P(T_m=10.3|T=10)\underbrace{P(T=10)}_{先验}}{P(T_m=10.3)}$$

小

$P(T=11|T_m=10.3)=\frac{P(T_m=10.3|T=11)P(T=11)}{}$

$P(T_m=10.3)$

似然概率：代表观测的准确度

$P(T_m=10.3 \mid T=10)$ 当真实温度 T=10 时，温度计测得温度为 10.3 的概率

$P(T_m=10.3)$ 教程：$P(T_m=10.3)$ 与 T 无关 ∴ $P(T=10 \mid T_m=10.3)=\eta P(T_m=10.3 \mid T=10) P(T=10)$

why? $P(T_m=10.3)$ 温度计测量值为 10.3 的概率

全概率公式

$$P(T_m=10.3)=\underbrace{P(T_m=10.3 \mid T=10)}_{\text{似然概率}}\underbrace{P(T=10)}_{\text{先验概率}}+\underline{P(T_m=10.3 \mid T=11)}\,\underline{P(T=11)}$$

$P(T_m=10.3)$ 与 T 的取值无关，与 T 的分布律有关

T=10，T=11 代表随机试验一个结果，结果不会影响到分布律

$P(T_m=10.3)$ 与 T 的取值无关

$$\underbrace{P(T=10 \mid T_m=10.3)}_{\text{后验}}=\frac{P(T_m=10.3 \mid T=10)P(T=10)}{P(T_m=10.3)}=\eta\,\underbrace{P(T_m=10.3 \mid T=10)}_{\text{似然}}\,\underbrace{P(T=10)}_{\text{先验}}$$

$$P(T=11 \mid T_m=10.3)=\frac{P(T_m=10.3 \mid T=11)P(T=11)}{P(T_m=10.3)}=\eta P(T_m=10.3 \mid T=11)P(T=11)$$

后验 = η × 似然 × 先验　　$\int f(x)\,dx=1$

求 η　$\sum$后 $=\eta\sum$似·先　　$\sum$后 $=1$　∴ $\eta=\dfrac{1}{\sum \text{似}\cdot\text{先}}$

$$\eta=\frac{1}{P(T_m=10.3 \mid T=10)P(T=10)+P(T_m=10.3 \mid T=11)P(T=11)}$$

先验　$P(T=10)=0.8$　　$P(T=11)=0.2$

似然　已知 $T_m=10.3$　$P(T_m=10.3 \mid T=10)=0.7$　　$P(T_m=10.3 \mid T=11)=0.3$

后验　$P(T=10 \mid T_m=10.3)=\eta\cdot 0.8\cdot 0.7=0.56\eta$

$P(T=11 \mid T_m=10.3)=\eta\cdot 0.2\cdot 0.3=0.06\eta$　　$\eta=\dfrac{1}{0.56+0.06}=1.613$

∴ $P(T=10 \mid T_m=10.3)=0.90328$　　$P(T=11 \mid T_m=10.3)=0.09672$　后验分布

今天气温是多少? 求期望 $\hat{T} = 10\cdot(0.90328) + 11\times 0.09672 = 10.09672$ ✓

先验期望 $T = 0.8\times 10 + 0.2\times 11 = 10.2$

先验分布　似然分布　后验分布

什么是最差的似然分布? $P(T=10)=0.8$ $P(T=11)=0.2$

$T_m = 10$ $P(T_m=10 \mid T=10) = 0?$ $P(T_m=10 \mid T=11) = 1$

后验 $P(T=10 \mid T_m=10) = \eta\cdot 0 = 0$ $P(T=11 \mid T_m=10) = \eta\cdot 1\cdot 0.2 = 0.2\eta$

$\eta = \frac{1}{0.2+0} = 5$ $\therefore P(T=11 \mid T_m=10) = 1$ 准确

似然概率为1或为0，都能有效的减小不确定度

最差的似然分布 $P(T_m=x \mid T=y) = P(T_m=x)$ 测了等于没测

$$P(T=x \mid T_m=y) = \frac{P(T_m=y \mid T=x)\,P(T=x)}{P(T_m=y)} = \frac{P(T_m=y)\,P(T=x)}{P(T_m=y)} = P(T=x)$$

随机过程的贝叶斯滤波