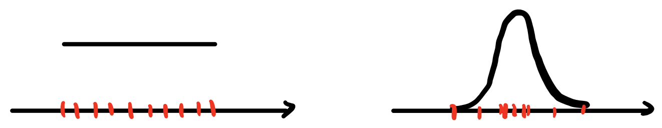
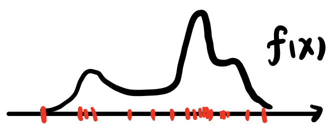
粒子滤波拾遗：采样方法，预测方程

采样方法：如何在复杂pdf上采样

预测方程：$X=f(t)$ 怎么由 $X=f(t) \Rightarrow X_k = F(X_{k-1})$ （高精度）



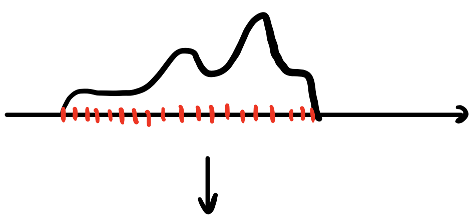


f(x)为复杂pdf，怎么采样

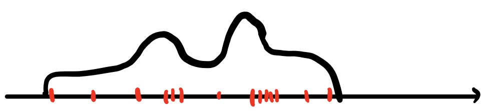
思想

通过某种方式去掉一些粒子

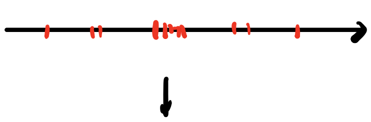
从均匀分布 ⟶ 正态分布



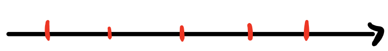
均匀分布



复杂分布

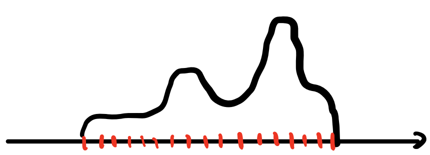


正态分布



均匀分布

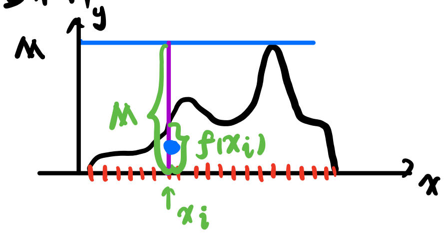
怎么去掉



高pdf的地方有更大的概率保留

低pdf的地方有更大的概率去掉

重采样



① 均匀分布生成粒子

$x_1, x_2 \ldots x_n$

② 取一个直线 M，使得 $M \geq f(x)$

③ 对于每一个粒子 $x_1 \cdots x_n$，做"审判"

生成一个随机数 $a \sim U(0, M)$

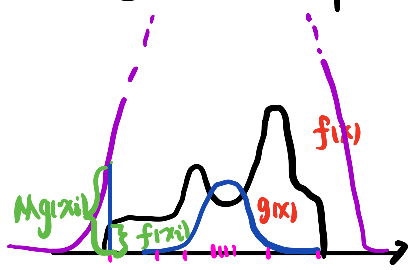
看 a 落在哪个区间

若 $a \in (0, f(x_i))$ x_i 保留

反之 x_i 去掉

参考重采样，高pdf的地方有更大的概率保留

低pdf的地方有更大的概率去掉



g(x) 为 Normal distribute

① 在 g(x) 采样

② 找到一个常数 M，使得 $Mg(x) \geq f(x)$

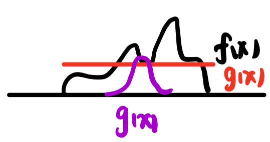
③ 对于每个 x_i

生成一个随机数 $a \sim U(0, Mg(x_i))$

看随机数落在哪个区间，若 $a \in (0, f(x_i))$ 保留，反之去掉

接受-拒绝采样法

待采样 f(x)，容易采样的 g(x) g(x)又叫 proposal distribute



① 找到 M，使得 $Mg(x) \geq f(x)$

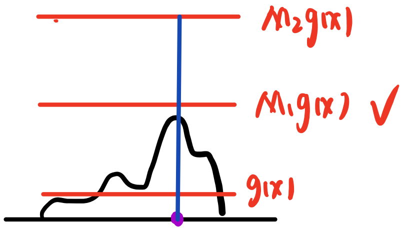
② 在 g(x) 采样一个粒子 x_i

③ 生成一个 $a \sim U(0, Mg(x_1))$，若 $a \in (0, f(x_1))$ 保留，反之则拒绝

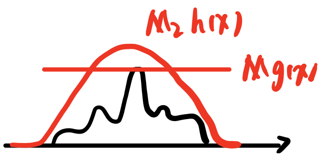
④ 在 $g(x)$ 采样一个粒子 x_2

⑤ ……

proposal distribute

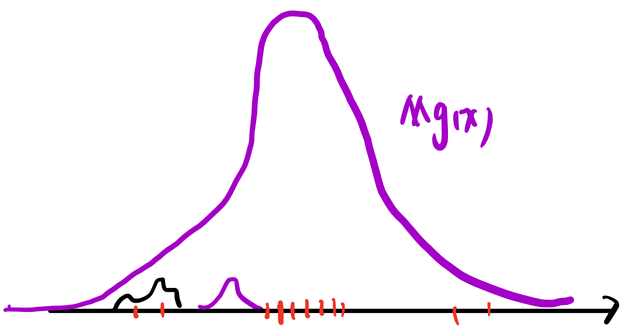


$M_1 g(x)$ 拒绝率低 效率高

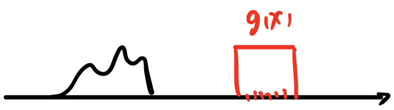


proposal distribute 尽可能要与 $f(x)$ 形状贴近

越相似，拒绝率越低



不相似的 proposal distribute 拒绝率会大幅上升



不可能接受，全部拒绝

二、预测方程

$$X_k = f(X_{k-1}) + Q_k$$ 难写

$$Y_k = h(X_k) + R_k$$ ✓

$X = f(t) \xrightarrow{\text{discrete}} X_k = f(t_k)$ 希望由 $X_k = f(t_k) \Rightarrow X_k = f(X_{k-1}, t)$

第八讲
$$\begin{pmatrix} X_k \\ \dot{X}_k \\ \ddot{X}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & dt & \frac{dt^2}{2} \\ & 1 & dt \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{k-1} \\ \dot{X}_{k-1} \\ \ddot{X}_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_{k1} \\ Q_{k2} \\ Q_{k3} \end{pmatrix}$$

升维，计算缓慢

思路 $X=f(t) \Rightarrow \dot{X}=F(X,t)$ 常微分方程

discrete $\Rightarrow$ 常微分方程的数值解法

欧拉法，改进欧拉法 龙格库塔法，在不改变维数的前提下提高精度

$X=f(t) \Rightarrow \dot{X}=F(X,t)$

$$\frac{dx}{dt}+p(t)\cdot x=0 \Rightarrow x=e^{-\int p(t)dt+\ln C}$$

$$x=f(t)=e^{\ln|f(t)|}$$

$$-\int p(t)dt+\ln C=\ln|f(t)|$$

求导 $-p(t)=\dfrac{f'(t)}{f(t)}$ $\quad p(t)=-\dfrac{f'(t)}{f(t)}$

$\therefore X=f(t) \Rightarrow \dot{X}-\dfrac{f'(t)}{f(t)}X=0 \Rightarrow \dot{X}=F(X,t)$

其中：$F(X,t)=\dfrac{f'(t)}{f(t)}X$

$$\dot{X}=F(X,t) \xrightarrow{\text{离散化}} \begin{cases}\text{欧拉法}\\ \text{改进欧拉法}\\ \text{龙格库塔法}\end{cases}$$

例 $X=f(t)=e^{t^2}$

$f'(t)=2te^{t^2}$

$\therefore F(X,t)=\dfrac{2te^{t^2}}{e^{t^2}}X=2tX \Rightarrow \dot{X}=2tX$

欧拉法 $X_k=X_{k-1}+2t_{k-1}X_{k-1}dt$

改进欧拉法 $X_k=X_{k-1}+\dfrac{dt}{2}[2t_{k-1}X_{k-1}+2t_k(X_{k-1}+2t_{k-1}X_{k-1}dt)]$

龙格库塔法