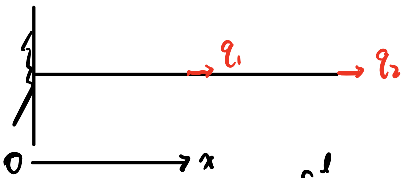
有限元法自学教程 第五讲

应用：



求 u，σ_x　ε_x

一维问题 ⇒ $E_p = \int_0^l \frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x dx - q_1 u(\frac{l}{2}) - q_2 u(l)$

$\int_0^{l/2} \frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x dx - q_1 u(\frac{l}{2}) + \int_{l/2}^{l} \frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x dx - q_2 u(l)$

∵ $u(0)=0$　∴ $u(\frac{l}{2}) = u(\frac{l}{2}) - u(0) = \int_0^{\frac{l}{2}} \varepsilon_x dx$

$u(l) = u(l) - u(0) = \int_0^l \varepsilon_x dx = \int_0^{l/2} \varepsilon_x dx + \int_{l/2}^{l} \varepsilon_x dx$

$\Rightarrow E_p = \int_0^{l/2} [\frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x - (q_1+q_2)\varepsilon_x] dx + \int_{l/2}^{l} (\frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x - q_2\varepsilon_x) dx$

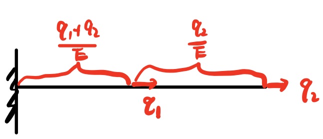
又∵ $\sigma_x = E\varepsilon_x$

∴ $E_p = \frac{E}{2}\int_0^{l/2} [\varepsilon_x^2 - \frac{2(q_1+q_2)}{E}\varepsilon_x] dx + \frac{E}{2}\int_{l/2}^{l} [\varepsilon_x^2 - \frac{2q_2}{E}\varepsilon_x] dx$

$= \frac{E}{2}\int_0^{l/2} [(\varepsilon_x - \frac{q_1+q_2}{E})^2 - (\frac{q_1+q_2}{E})^2] dx + \frac{E}{2}\int_{l/2}^{l} [(\varepsilon_x - \frac{q_2}{E})^2 - \frac{q_2^2}{E^2}] dx$

在 $[0, l/2]$ 处 $\varepsilon_x = \frac{q_1+q_2}{E}$，在 $[l/2, l]$ 处 $\varepsilon_x = \frac{q_2}{E}$ 时，E_p 最小

∴ $\varepsilon_x = \begin{cases} \frac{q_1+q_2}{E} & 0 < x < l/2 \\ \frac{q_2}{E} & l/2 < x < l \end{cases}$



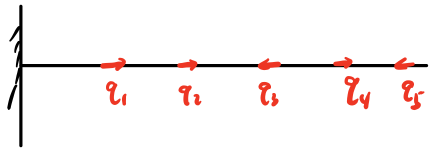
$\int [\varepsilon_x^2 - \frac{2q}{E}\varepsilon_x] dx$ ⇒ 泛函　自变量为 ε_x

$\varepsilon_x = x$　$\int_0^1 (x^2 - \frac{2q}{E}x) dx$　　$\varepsilon_x = \sin x \Rightarrow \int_0^1 (\sin^2 x - \frac{2q}{E}x) dx$

$$\int \left(\varepsilon_x^2 - \frac{2q}{E}\varepsilon_x\right) dx = \int \left(\varepsilon_x - \frac{q}{E}\right)^2 dx - \int_0^{l} \frac{q^2}{E^2} dx$$

当 $\varepsilon_x = \frac{q}{E}$ 时，E_p 最小

定义：有限元法是将微分方程转化为泛函极值问题的近似解法



无须受力分析

大多数泛函问题很难求解析解

$$E_p = \int \left(\frac{E}{2}\varepsilon_x^2 - q\varepsilon_x\right) dx \Rightarrow \int (a u'^2 + b \cdot u') dx$$

$$E_p = \int (u'u - u'^2) dx \qquad E_p = \int (u'' - u'^2) dx$$

$$E_p = \int \left(\frac{1}{2}\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \frac{1}{2}\sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \frac{1}{2}\sigma_{xy}\varepsilon_{xy}\right) dV - \int (p_x u + p_y v) dS$$

必须要找近似解法

最小势能原理：在所有可能的位移中，真实位移使势能取极小值

思想：将"填空题"变为"选择题"

$E_p = \iiint (\cdots\cdots) - \iint (\quad)$ 问：哪个位移使 E_p 最小？

$E_p = \cdots\cdots$ 在所有可能的位移的集合里，选择一个位移，使势能最小

$E_p = \bigcirc$ 使 E_p 最小的位移为（ ）

A. u B. u' C. u'' D. u'''

例 $E_p = \int_0^1 \left(\frac{E}{2}\varepsilon_{xx}^2 - q\varepsilon_{xx}\right) dx$，使 E_p 最小的应变为（A）

A: $\frac{q}{E}$, B: $\frac{q}{E}x$ C. $\frac{q}{E}\sin x$ D. $\frac{2q}{E}\ln(x+1)$

A: $E_p = \int_0^1 \cdots$ B = $\int_0^1 [\frac{E}{2}(\frac{q}{E}x)^2 - q(\frac{q}{E}x)]dx$ C ⋯ D. ⋯

$(E_p)_A$ ✓ $(E_p)_B$ $(E_p)_C$ $(E_p)_D$

比大小

所有可能位移 A、B. C. D 选项无限 比大小不可行

所有可能位移 ⇒ 有限的位移集合（要把真实位移包进去）

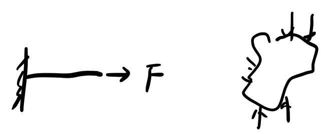
$E_p = \int_0^1 (\frac{E}{2}\varepsilon_{xx}^2 - q\varepsilon_{xx})dx \Rightarrow \varepsilon_{xx} = \frac{q}{E}$

$\{\frac{q}{E},\ x,\ e^x - 1\}$

通用方法 $E_p = \iiint \frac{1}{2}(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{xy}\gamma_{xy})dV - \iint (p_x u + p_y v)dS$

有限的位移集合要体现多样性

$\{x,\ x^2,\ x^3,\ x^4\}$ ⋯ 单调性



多样性与有限矛盾

函数族法（"半无限"）

$\{x,\ x^2,\ x^3,\ x^4\} \Rightarrow \{x^\alpha\}$ α为待定参数 x^α 函数族

$E_p = \int_0^1 \varepsilon_{xx}^2 dx$　设 $u = x^{\alpha}$　$\varepsilon = \alpha x^{\alpha-1}$

$E_p = \int_0^1 \alpha^2 x^{2\alpha-2} dx$　当 $\alpha \neq \frac{1}{2}$ 时　$E_p = \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} x^{2\alpha-1} \Big|_0^1 = \frac{\alpha^2}{2\alpha-1}$

当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时　$E_p = \int_0^1 \frac{1}{4} x^{-1} dx$ = 发散

最小势能一定有明确的值，不存在，$-\infty$ ⇒ 无最小势能

$E_p = \frac{\alpha^2}{2\alpha-1}$　E_p 最小　$\frac{\partial E_p}{\partial \alpha} = 0$　$\alpha = 0$　$E_p = 0$　$u = x^{\alpha}$　$\int_0^1 \varepsilon_{xx}^2 dx$

$\frac{1}{x^{\alpha}}$ 在0处无意义

函数族要满足位移边界条件

$E_p = \iiint \frac{1}{2}(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{xy}\gamma_{xy}) - \iint (p_x u + p_y v) dS$

设　$u = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots\cdots$

$E_p(a, b, c, d, e)$　$\frac{\partial E_p}{\partial a} = 0$　$\frac{\partial E_p}{\partial b} = 0$　$\cdots\cdots$　$\begin{cases} a = \\ b = \\ c = \end{cases}$

多样性：　$u = a + bx + \cdots$

完备性：　能否用多项式表达函数空间所有函数

插一句：　向量　$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$　$\vec{a} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$　完备的

x^0　x^1　x^2　x^3　x^4，$\cdots\cdots$　线性无关　$f(x) \Rightarrow ax^0 + bx^1 + \cdots$

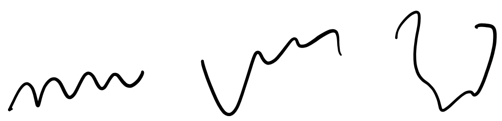
多项式函数族是完备的 √　幂级数　傅立叶级数

$u = a + bx + cx^2 + \cdots\cdots$　参数无限

$u(x,y) = a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2 + \cdots$

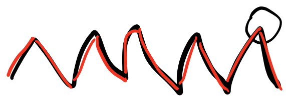
近似： $u = a + bx + cx^2 + dx^3$

$u = a + bx + cx^2 + dx^3$



近似后多样性必然会损失

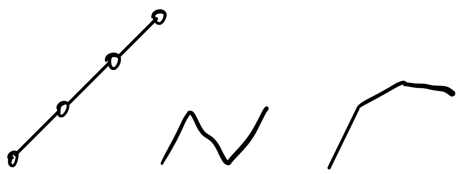
分段函数

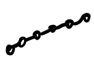


$u = a + bx + cx^2 + \cdots$

$$u = \begin{cases} a_1x + a_2 \\ a_2x + a_3 \\ a_3x^2 + a_4x + a_5 \\ \cdots \end{cases}$$

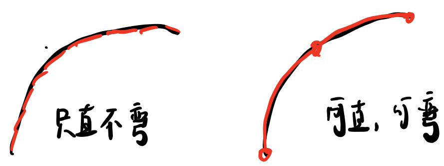
用分段弥补多样性





分段越密：多样性越大，近似越好

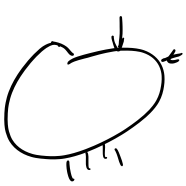
$$u = \begin{cases} ax + bx^2 + cx^3 \\ dx + ex^2 + fx^3 \end{cases}$$

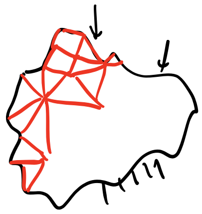


线性 好

高阶 少，高阶可退化为低阶

二维





分段 ⇒ 分片 ⇒ 画网格

只直不弯，⇒ 选单元

所有可能的位移 ⇒ 分段函数族

网格密，单元阶数高 ⇒ 多样性好 ⇒ 尽一切努力让函数族把真实解包进去

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad h \to 0$$