代数方程求根与置换群第一讲

一元五次方程及五次以上方程无求根公式

$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$

其中 $a_0, a_1, \cdots a_n \in Q$，称为方程的系数

当 $n \geq 5$ 时，没有通用的求根公式 $(x^5-1=0)$ $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Downarrow$

无法通过有限次的加减乘除开方得到方程的根

无限次 可以（二分法，牛顿法）

方程的系数是整数

尽量不涉及复杂的抽象代数概念

尽可能以人的认知逻辑为主线讲课

总体概览

一次方程求根 $a_0+a_1x=0$

二次方程求根 $a_0+a_1x+a_2x^2=0$

} 古巴比伦时期被解决

三次方程求根

四次方程求根

} 16世纪初由意大利数学家解决

五次方程求根 牛顿 欧拉 高斯 一无所获 极难

1770年 拉格朗日首次认识到方程求根问题与对称性有极为紧密的联系

很遗憾，当时并无研究对称性的数学工具→群论，拉格朗日未能解决五次方程求根

拉格朗日的贡献：①首次提出对称性是解决方程求根问题的关键，为后人指出了正确的道路

②首次暗示了五次方程很有可能没有求根公式

1832年，伽罗瓦，创立研究对称性的数学工具→群论，证明了五次及以上的方程无求根公式，死于一场决斗，当时无人能看懂伽罗瓦的证明

1843~1846年，刘维尔花了三年时间整理了伽罗瓦的论文，群论正式发表，给予数学界极为深刻的影响

公元前 →	16世纪 →	18世纪 →	1832 $\xrightarrow{\text{14年}}$	1846
古巴比伦	意大利	拉格朗日	伽罗瓦	刘维尔

此系列没有功利性，无考试，也不能帮你赚钱，它只满足你的好奇心与对知识的渴求
顺便提升你的科学素养，开阔眼界

此系列性价比极低，需要花费大量的时间，请一定要对自己诚实

客观看待该系列的难度，伽罗瓦创立群论，11年无人看懂，包括傅立叶，泊松
刘维尔花了3年才看懂，它不太可能是一个你看一遍就能看会的理论

看几遍不明白就不要再看了，做别的事，心中有念想

人的智慧会随着见识与环境的变化而增长

基础：线性方程组的解法

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

n次方程必有n个根

Because it's there

因为山就在那里