似然概率与狄拉克函数

X：状态　　Y：观测

例：测温度　$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-10)^2}{2}}$　倾向于认为 $X=10$

观测：　$y=9$

$f_{Y|X}(y|x)$?　　$P(Y<y|X=x)$ 的 pdf

$$\frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{9} f_{Y|X}(y|x)\,dy = 0$$

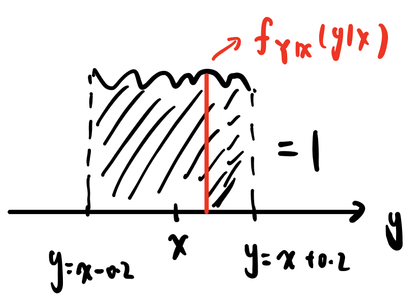
$$f_{Y|X}(y|x)\cdot\varepsilon = P(y<Y<y+\varepsilon \mid X=x)$$

$$\therefore\ f_{Y|X}(y|x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{P(y<Y<y+\varepsilon \mid X=x)}{\varepsilon}$$

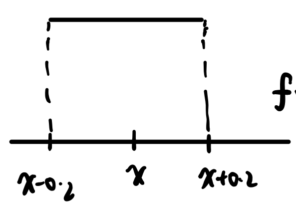
例：温度计精度为 $\pm 0.2^\circ C$，当真实值 $=x$，$y=x\pm 0.2$

$P(x-0.2<Y<x+0.2 \mid X=x)$ 较大，以及 $P(Y<x-0.2$ 或 $Y>x+0.2 \mid X=x)$ 较小，

$$P(x-0.2<Y<x+0.2 \mid X=x)=1 \Rightarrow \int_{y=x-0.2}^{y=x+0.2} f_{Y|X}(y|x)\,dy=1$$



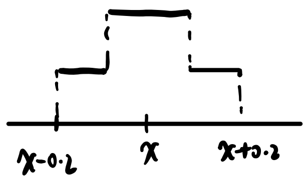
似然模型：(1) 等可能型



$f_{Y|X}(y|x)=C$　$\int_{y=x-0.2}^{x+0.2} f_{Y|X}(y|x)\,dy=1$　$C=2.5$

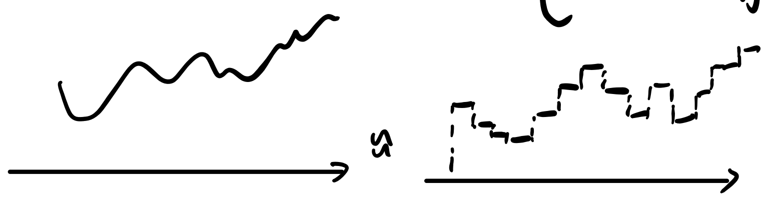
$$\therefore\ f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}2.5 & |y-x|\le 0.2\\ 0 & |y-x|>0.2\end{cases}$$

(2) 阶梯型



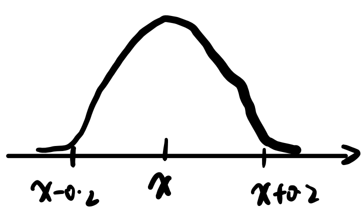
$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}C_1 & |y-x|<0.1\\ C_2 & 0.1<|y-x|<0.2\\ 0 & |y-x|>0.2\end{cases}$$

推广：直方图型



直方图滤波（非线性卡尔曼滤波的一种，与粒子滤波齐名）

(3) 正态分布型



$P(x-0.2<Y<x+0.2\,|\,X=x)<1$ 科学

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}}\qquad E(Y|X)=x,\ D(Y|X)=\sigma^2$$

σ 一般取传感器的精度 ± 0.2 $\sigma^2=0.2^2$

正态分布，均值与方差比较好控制 $X\sim U(a,b)$ $E(X)=\frac{a+b}{2}$ $D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$

$a=x-0.2$ $b=x+0.2$ $E(X)=x$ ✓ $D(X)=\frac{0.4^2}{12}\neq 0.2^2$

测温度，先验 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-10)^2}{2}}$

观测：$y=9$，似然 $f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 0.2}e^{-\frac{(9-x)^2}{2\cdot 0.2^2}}$

后验 f … $= \frac{1}{\ldots} e^{-\frac{1}{2}\left[(x-10)^2+\frac{(9-x)^2}{\ldots}\right]}$

后验 $f_{X|Y}(x|9) = \eta \frac{1}{2\pi\cdot 0.2} e^{-\frac{1}{2}[(x-10)^2+\frac{(9-x)^2}{0.2^2}]}$

$$\eta = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\cdot 0.2} e^{-\frac{1}{2}[(x-10)^2+\frac{(9-x)^2}{0.2^2}]} dx\right)^{-1}$$

$$f_{X|Y}(x|9) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 0.038} e^{-\frac{(x-9.0385)^2}{2\cdot(0.038)^2}} \sim N(9.0385,\ 0.038^2)$$

先验 $N(10,1)$ 似然 $N(9,0.2^2)$ 后验 $N(9.0385,0.038^2)$

方差显著降低，不确定度减小 滤波

重要定理 若 $f_X(x) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $f_{Y|X}(y|x) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

则 $f_{X|Y}(x|y) \sim N\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\mu_2 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\mu_1,\ \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)$

证：（暴力证明） Mathematica

若 $\sigma_1^2 \gg \sigma_2^2$ 后验 $\sim N\left(\frac{1}{1+(\sigma_2^2/\sigma_1^2)}\mu_2 + \frac{\sigma_2^2/\sigma_1^2}{1+(\sigma_2^2/\sigma_1^2)}\mu_1,\ \frac{\sigma_2^2}{1+(\sigma_2^2/\sigma_1^2)}\right) \approx N(\mu_2, \sigma_2^2)$

若 $\sigma_1^2 \ll \sigma_2^2$ 后验 $\sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

$\sigma_1^2 \gg \sigma_2^2$ 倾向于观测值 $\sigma_1^2 \ll \sigma_2^2$ 倾向于预测值

且 $$\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} = \sigma_1^2 \frac{1}{1+\underbrace{\sigma_1^2/\sigma_2^2}_{>0}} = \sigma_2^2 \frac{1}{1+\underbrace{\sigma_2^2/\sigma_1^2}_{>0}}$$

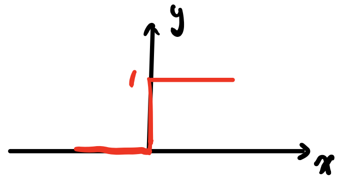
狄拉克函数 $\delta(x)$

$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}}$ 当 $\sigma \to 0$ 时 $f_{Y|X}(y-x) = \delta(y-x)$

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x) = f(0)$$

$\delta(x)$ 实质上为必然事件的概率密度

$$P(X=0)=1 \Rightarrow P(X<x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x\geq 0 \end{cases}$$



设 $H(x)=\begin{cases} 1 & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ 　则 $\delta(x)=\frac{d}{dx}H(x)$

证明 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx = f(0)$

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dH(x) = f(x)H(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)H(x)\,dx$$

$$= f(+\infty)\cdot 1 - 0 - \left(\int_{0}^{+\infty} f'(x)\,dx\right)$$

$$= f(+\infty) - \left(f(+\infty) - f(0)\right) = f(0)$$ 　QED

推论：

1. $\int_a^b \delta(x)\,dx = 1$ 　$a<0<b$
2. $\int_a^b f(x)\,\delta(x) = f(0)$ 　$a<0<b$
3. $\int_c^d f(x)\,\delta(x-a) = f(a)$ 　$c<a<d$

例 　先验 $N(\mu,\sigma^2)$

观测 $y=10$ 　似然：$\delta(10-x)$

后验 $f_{X|Y}(x|y) = \eta\cdot\delta(10-x)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$$\eta = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(10-x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \right)^{-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(10-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right)^{-1}$$

$$\therefore f_{X|Y}(x|y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(10-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right)^{-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \delta(10-x)$$

$$= e^{\frac{(10-\mu)^2}{2\sigma^2} - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \delta(10-x)$$

$$P(X < x \mid Y = 10) = \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{(10-\mu)^2-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \delta(10-x)\, dx = \begin{cases} 0 & x < 10 \\ 1 & x \geq 10 \end{cases}$$