EAD

EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

UNIDADE I

Tópicos de Matemática Aplicada

Prof. Me. Rene Ignacio

Apresentação

- Como futuro bacharel em Ciência da Computação, você precisará identificar problemas computacionais de maneira precisa e propondo soluções de maneira competente, usando os recursos computacionais com eficiência e racionalidade.
- Para tanto, você deverá estar apto a sugerir e implementar soluções algorítmicas.
- O domínio de fundamentos da matemática é fundamental para criar estruturas de programação sólidas e confiáveis.
- A disciplina Tópicos de Matemática Aplicada tem importância indiscutível para a atuação de profissionais da área da computação.

Nesta disciplina, abordaremos:

- Funções do 1º e do 2º graus e seus gráficos e
- Matrizes, suas operações e resolução de sistemas lineares.

Funções – 1

Uma função pode ser entendida como uma caixa, onde se entra com um valor numérico x e a caixa devolve um outro valor numérico y:

Entra um valor numérico: x → CAIXA → Sai outro valor numérico: y

Fonte: autoria própria..

- Dentro da caixa ocorre uma transformação de x em y.
- Esta transformação é realizada através de uma fórmula.

- x, chamado de variável independente, é a entrada de valores.
- A variável x pode assumir qualquer valor.
- y, chamado de variável dependente, é a saída de valores.
- O valor da variável y depende de x.

Funções – 2

- Por exemplo, uma fórmula: $y = 5.x$

x (variável independente) → y=5.x → y (variável dependente)

Fonte: autoria própria.

- y=5.x é a função que relaciona x e y.
- O valor de saída em y é o quíntuplo do valor de entrada em x.
- se x=7, então y=35, pois y=5.7=35.

Outra notação para a função:

- f(x)=5.x
- f(x) não é o produto de f por x!
- f(x) em f(x)=5.x é equivalente a y em $y = 5.x$.

Funções – 3

Qual o valor de y quando x é igual a 0 (zero)?

- Usando a notação anterior, $f(x)=5.x$, $f(0)=5.0$, ou seja, $f(0)=0$, ou ainda, $y=0$.
- se $x=-3$, então $y=5.(-3)=-15$, ou $f(-3)=-15$;
- se $x=0$, então $y=5.(0)=0$, ou $f(0)=0$;
- se $x=217{,}8$, então $y=5.(217{,}8)=1089$, ou $f(217{,}8)=1089$.
- Podemos escolher qualquer valor para x, a variável independente.
- Mas y, a variável dependente, não pode ser qualquer valor por depender de x.

Temos, então, dois conjuntos de valores, chamados de:

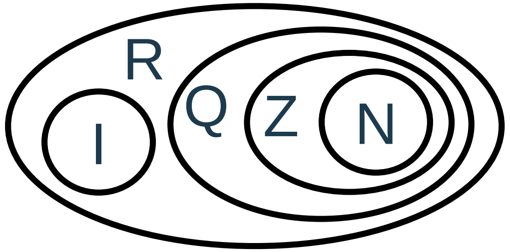
- Domínio e
- Imagem.

Conjuntos

- Domínio (Df): conjunto de valores para a variável independente (domínio da função).
- Imagem (Imf): conjunto dos valores para a variável dependente (imagem da função).

A variável independente pode ser de qualquer conjunto de números:

- Naturais: N={0,1,2,3,...}
- Inteiros: Z={...-2,-1,0,1,2,...}
- Racionais: Q={...,-5,...-7/3,...-2,...,-1,...,0,...1/2,...1}
- Irracionais: I= {...,√2,…,π,…}
- (números que não podem ser representados como uma fração)



Fonte: autoria própria.

- Reais: R
- Formado pelos conjuntos de números: Naturais (N), Inteiros (Z), Racionais (Q) e Irracionais (I).

Outras funções

- $y = 3x^2 \therefore f(x) = 3x^2$

Regra:

- substituir x por um número, elevar esse número ao quadrado e multiplicá-lo por 3, e o resultado obtido é assumido por y.
- Se x=10, então y=300, pois $y = f(10) = 3(10)^2 = 3.100 = 300$
- O conjunto de valores que a variável x pode assumir é o dos números reais.
- Domínio de $y = 3x^2$ é Df=R

Como y é o triplo do quadrado de um número real, y é um número real maior ou igual a zero, pois:

- o triplo do quadrado de zero é zero, e
- o triplo do quadrado de qualquer número real diferente de zero é positivo.
- Logo, a imagem dessa função é Imf=R+, que representa os reais não negativos.

Gráfico de uma função

- $y = 3x^2$
- $f(x) = 3x^2$
- Construir uma tabela (x,y).
- Construir o gráfico.

Domínio:

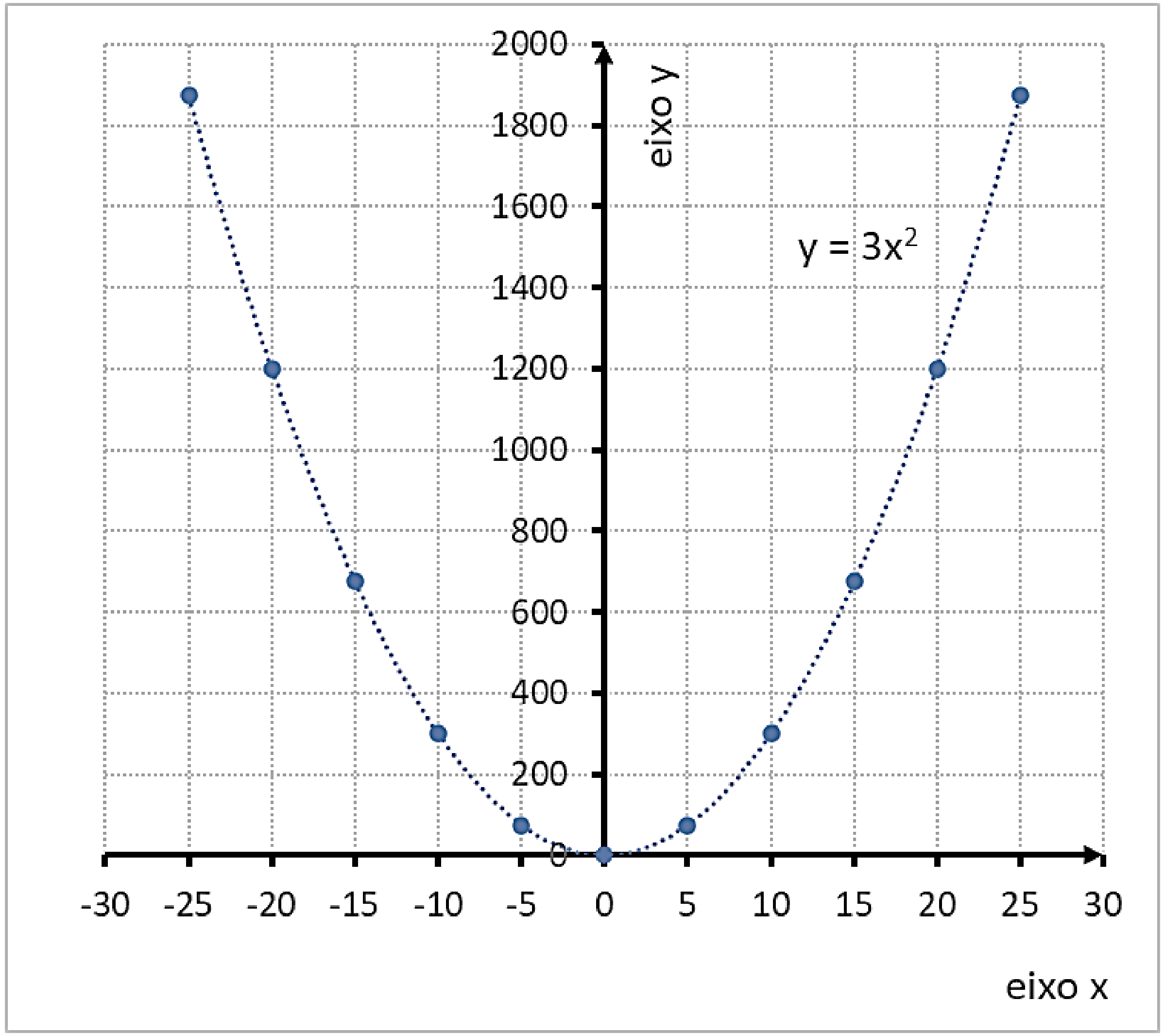
- Df=R

Imagem:

- Imf=R+

x	$y = 3x^2$
-10	300
-5	75
0	0
5	75
10	300
15	675
20	1200
25	1875

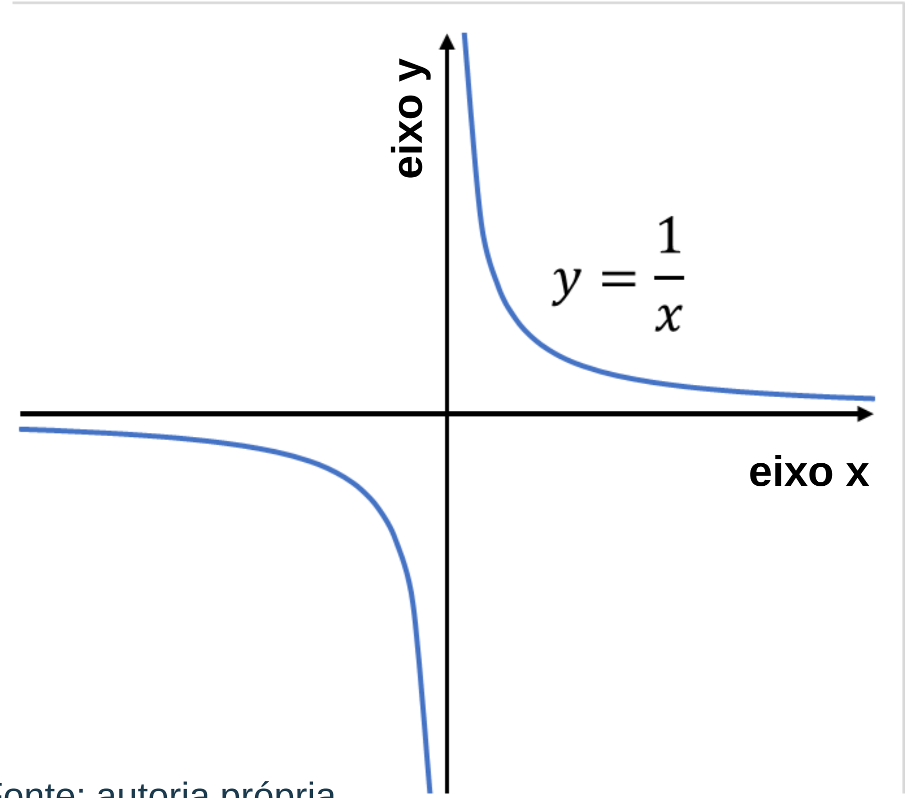
Fonte: autoria própria.



Fonte: autoria própria.

Restrição aos valores da variável independente – 1

- Existem funções em que há “restrições” aos valores da variável independente.
- $y = \frac{1}{x}$
- A variável x não pode ser igual a zero, pois a divisão por zero não é definida.
- O domínio da função corresponde aos números reais, com exceção do zero.
- Df=R-0
- A imagem dessa função é Imf=R-0.
- Construir uma tabela (x,y).
- Construir o gráfico.



Fonte: autoria própria.

Restrição aos valores da variável independente – 2

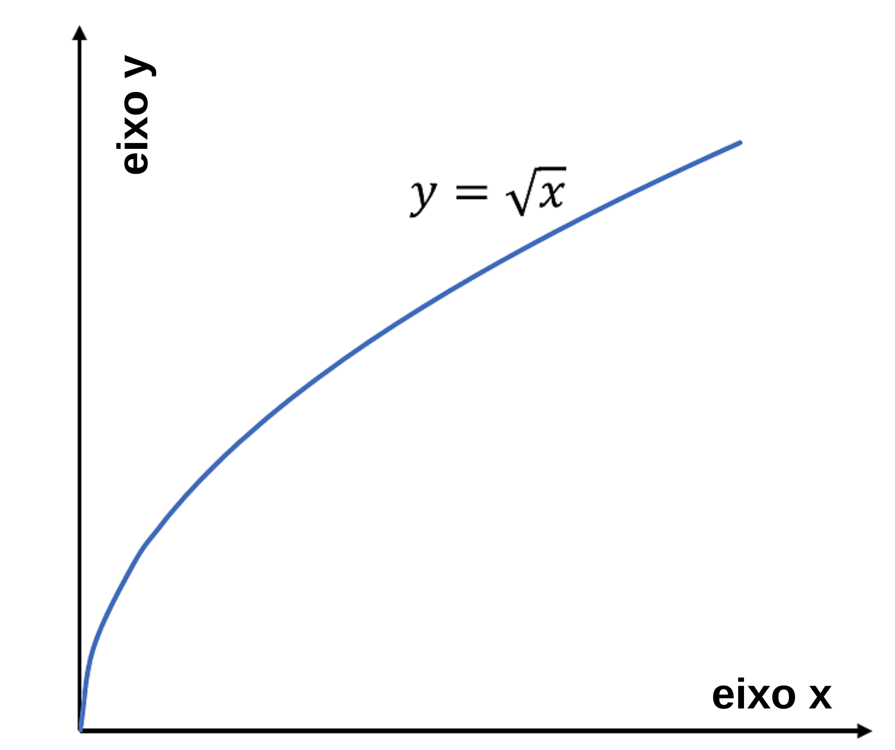
Dê o domínio e a imagem da função:

- $y = \sqrt{x}$.
- Somente podemos extrair a raiz quadrada de números não negativos!
- A variável x tem que ser positiva.
- Por consequência, a variável y também será positiva.

Logo:

- Df=R+.
- Imf=R+.

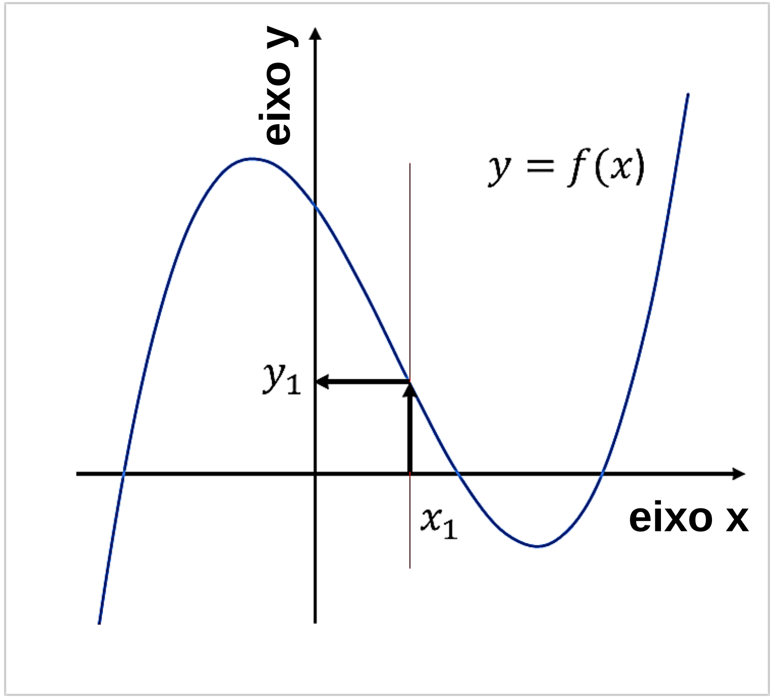
- Construir uma tabela (x,y).
- Construir o gráfico.



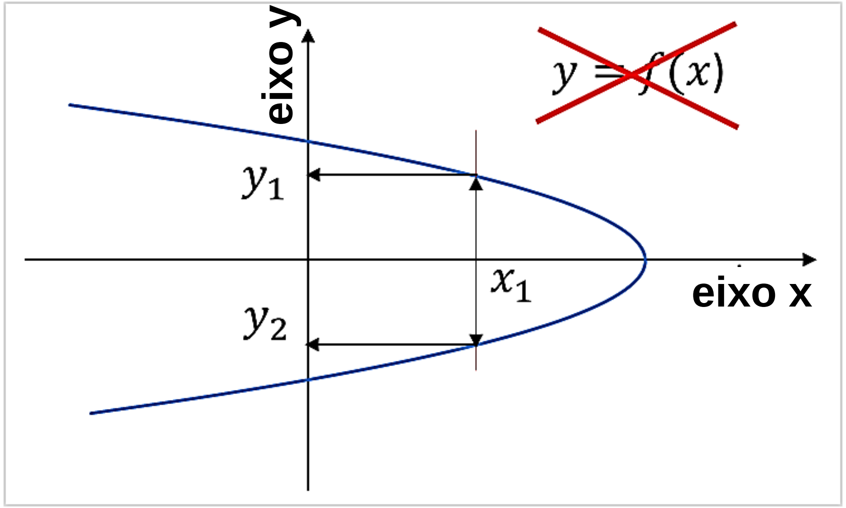
Fonte: autoria própria.

Gráficos que não representam funções

- Uma função é uma regra que associa cada elemento x do domínio a um único elemento y da imagem.
- Uma maneira de visualizarmos isso é traçando linhas verticais (paralelas ao eixo das ordenadas) e verificando se elas são ou não interceptadas mais de uma vez pelo gráfico.
- Eixo y = ordenada
- Eixo x = abcissa



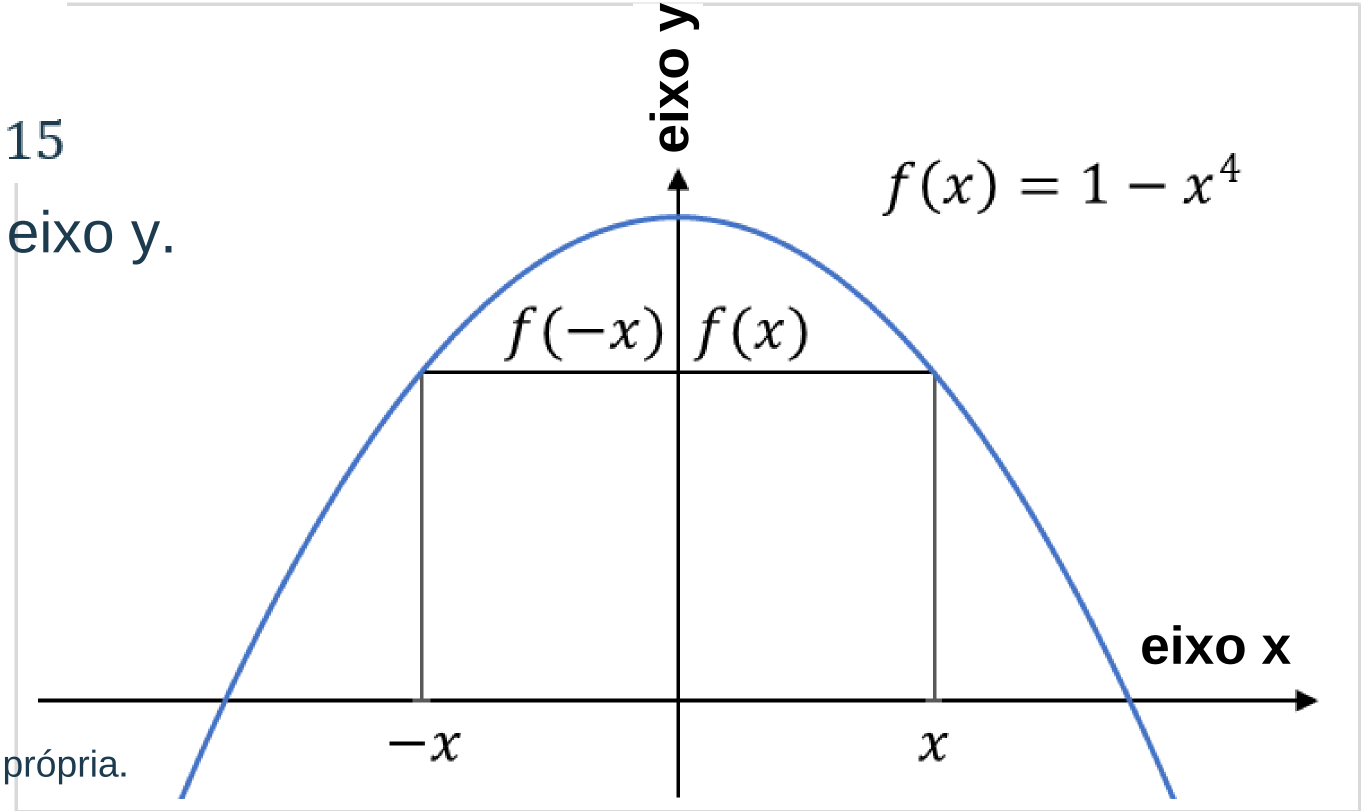
Fonte: autoria própria.



Fonte: autoria própria.

Função par e função ímpar – 1

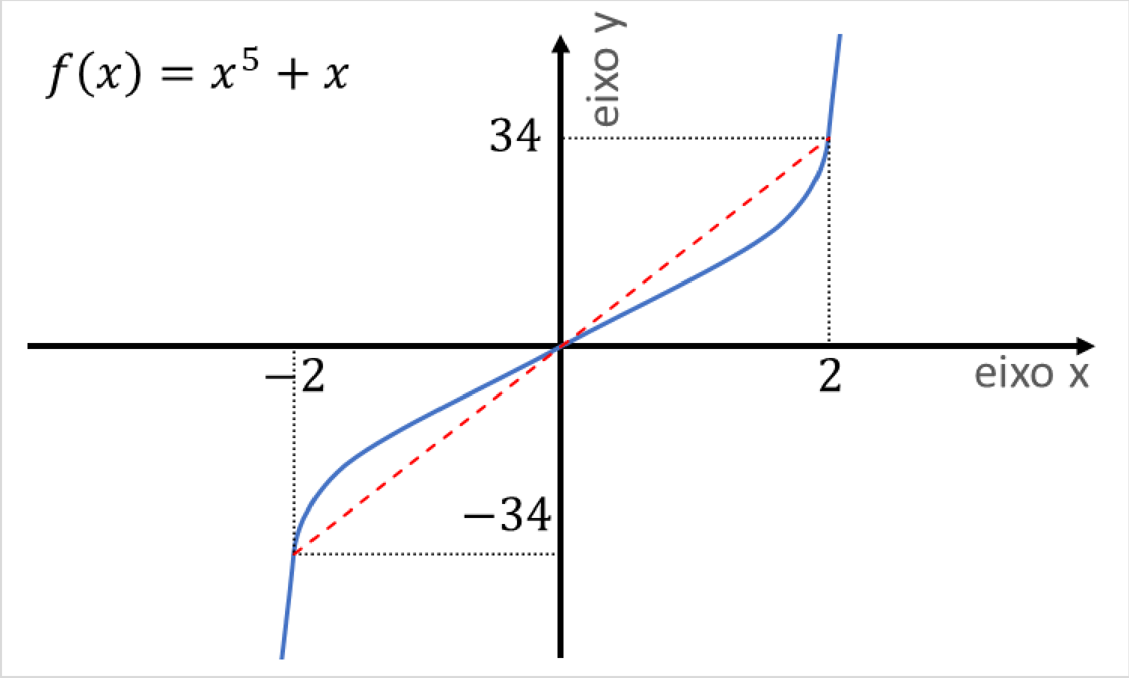
- Uma função y=f(x) é chamada de função par se $f(x) = f(-x)$ para qualquer x pertencente ao domínio da função.
- $f(x) = 1 - x^4$
- Se substituirmos x por -2 ou por 2, chegaremos ao mesmo valor de y igual a -15:
- $f(-2) = 1 - (-2)^4 = 1 - (16) = -15;$
- $f(2) = 1 - (2)^4 = 1 - (16) = -15.$
- $f(x) = f(-x) \therefore f(2) = f(-2) \Rightarrow -15 = -15$
- A função é par e simétrica em relação ao eixo y.



Fonte: autoria própria.

Função par e função ímpar – 2

- Uma função y=f(x) é chamada de <u>função ímpar</u> se $f(x) = -f(-x)$ para qualquer x pertencente ao domínio da função.
- $f(x) = x^5 + x$
- Se substituirmos x por 2 ou por -2, chegaremos a diferentes valores de y:
- $f(2) = (2)^5 + 2 = \ 32 + 2 = 34$
- $f(-2) = (-2)^5 + (-2) = \ -32 - 2 = -34.$
- $f(x) = -f(-x) \therefore f(2) = -f(-2) \Rightarrow 34 = -(-34)$
- A função é ímpar e simétrica em relação à origem.



Fonte: autoria própria.

Interatividade

Assinale a alternativa cuja função é ímpar:

a) $f(x) = 3x^2$.
b) $f(x) = x^4 + x^2$.
c) $f(x) = 5x^6$.
d) $f(x) = x^3 - 2x$.
e) $f(x) = (x^3 - x)^2$

Resposta

Assinale a alternativa cuja função é ímpar:

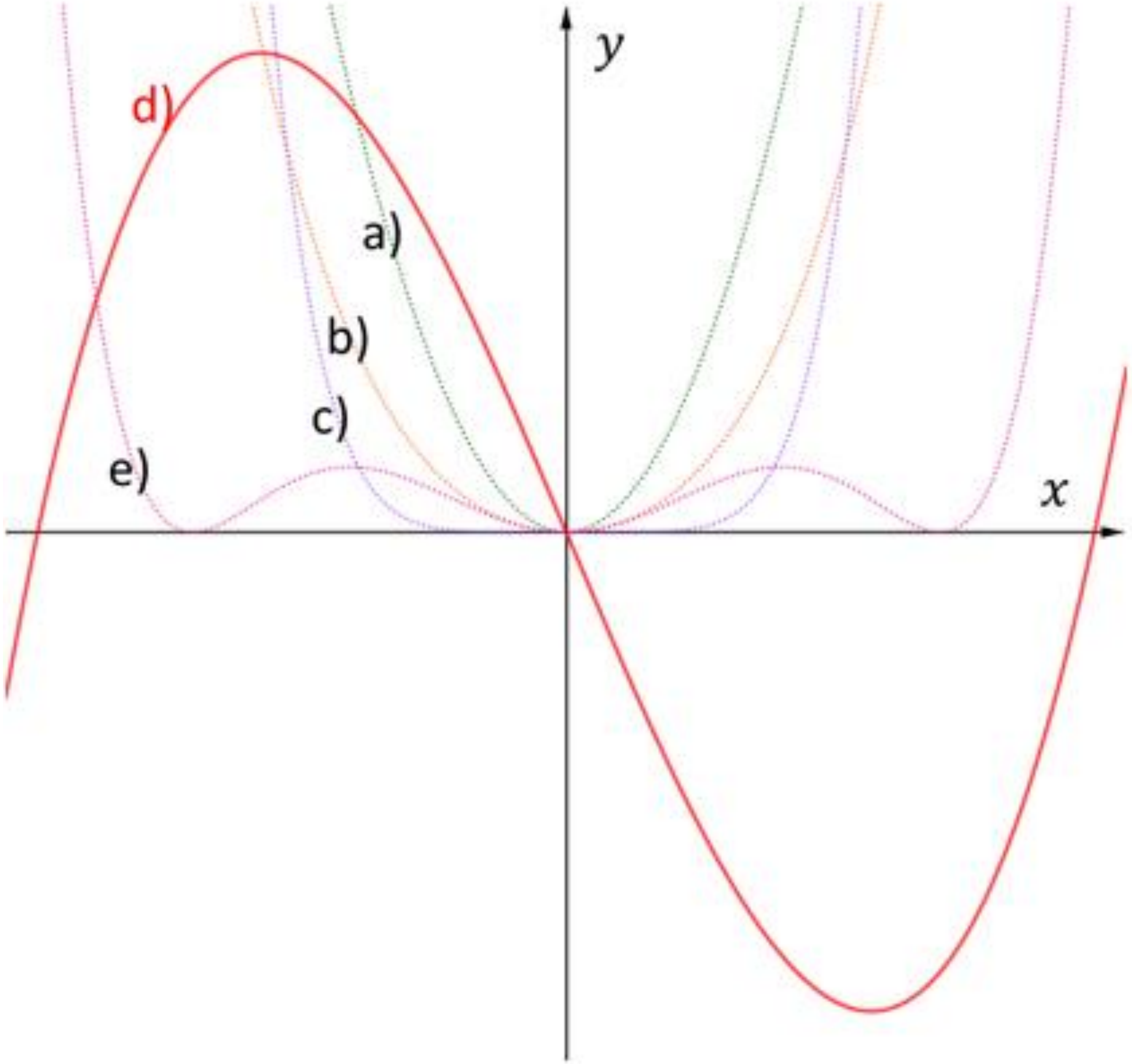
a) $f(x) = 3x^2$.

b) $f(x) = x^4 + x^2$.

c) $f(x) = 5x^6$.

d) $f(x) = x^3 - 2x$.

e) $f(x) = (x^3 - x)^{2}$



Função linear

- A função linear tem uma equação do tipo
- $y = a \, . \, x$
- $f(x) = a \, . \, x$
- x é a variável independente (entrada de valores);
- y é a variável dependente (saída de valores);
- a é o coeficiente angular da reta (número real diferente de zero).
- O gráfico de uma função linear é uma reta inclinada em relação ao eixo das abscissas (eixo horizontal) que passa pela origem do sistema de eixos.

Exemplo de equações que representam função linear:

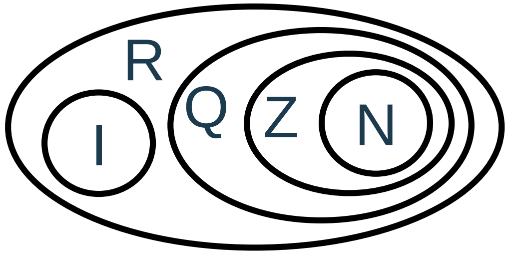
- $y = 3.x$
- $y = -234.x$
- $y = 0{,}005.x$
- coeficientes angulares iguais, respectivamente, a 3, -234 e 0,005.

Função linear – domínio e imagem

O domínio da função linear é o conjunto de todos os números reais, pois podemos substituir a variável x por qualquer número real:

- Df=R
- A imagem da função linear também é o conjunto de todos os números reais, pois y pode "retornar" qualquer número real:
- Imf=R
- O conjunto dos números reais é formado pelos conjuntos de números:
- Naturais (N), Inteiros (Z), Racionais (Q) e Irracionais (I).

- $y = 3.x$
- $y = -234.x$
- $y = 0{,}005.x$



Fonte: autoria própria.

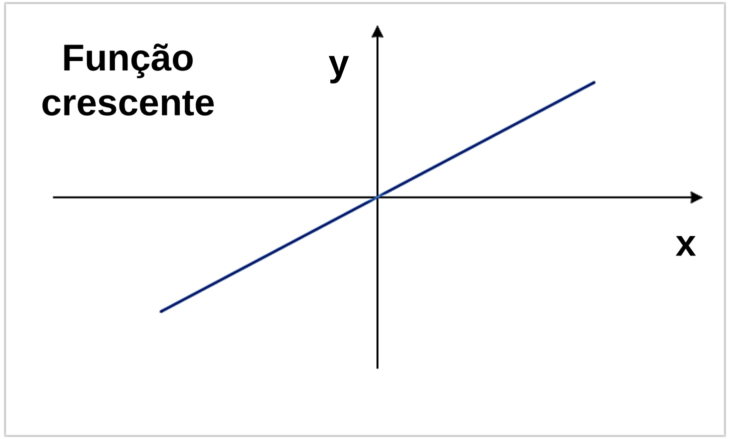
Coeficiente angular

O coeficiente angular a em $y = a.x$ está relacionado com a inclinação da reta que representa o gráfico dessa função:

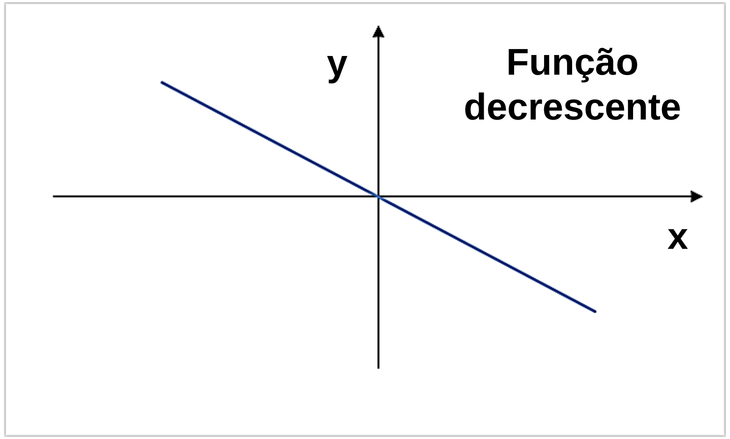
- se $a > 0$, ou seja, se a for positivo:
- Temos uma função crescente (reta inclinada para o lado direito);
- $y = 8x \therefore a = 8$

se $a < 0$, ou seja, se a for negativo:

- Temos uma função decrescente (reta inclinada para o lado esquerdo).
- $y = -7x$, $a = -7$



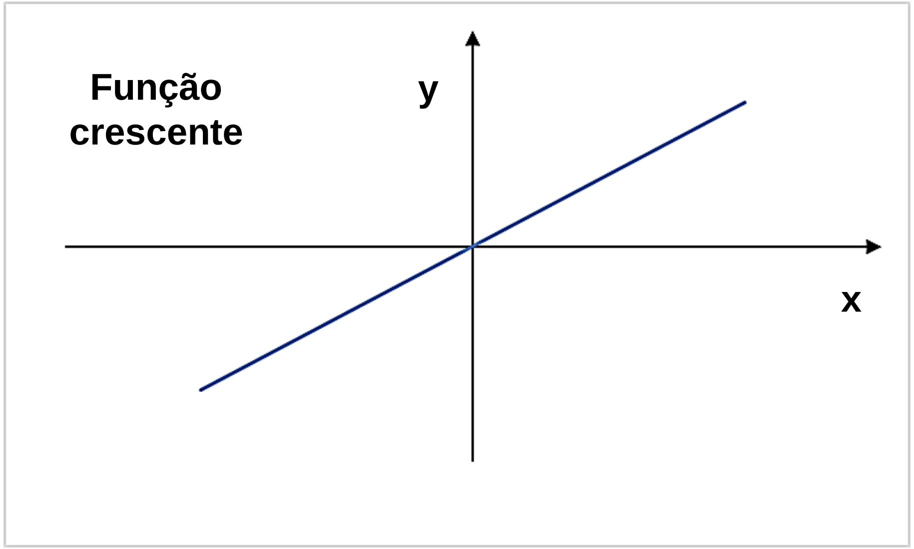
Fonte: autoria própria.



Fonte: autoria própria.

Função crescente

- Uma função $y = f(x)$ é crescente em determinado intervalo I contido em seu domínio Df (I⊂D(f)) se, e somente se, para todo x_1 e para todo x_2 pertencentes a I ($x_{1,}\, x_2 \in$ I):
- se $x_1 < x_2$, então $f(x_1\ ) < f(x_2)$.



Fonte: autoria própria.

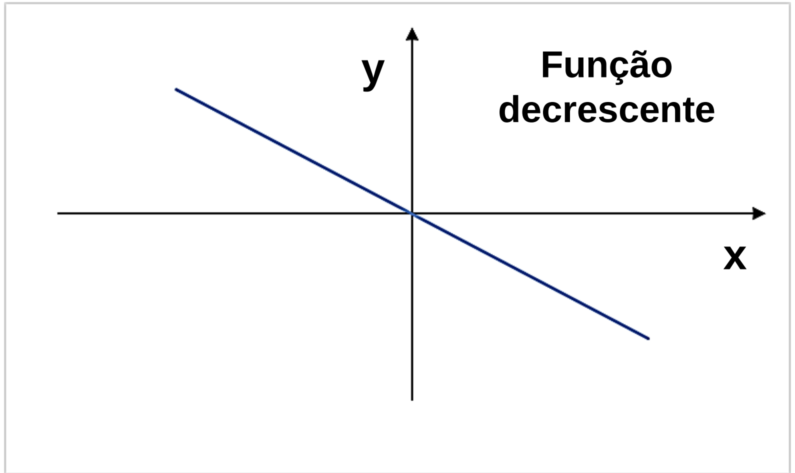
Exemplo:

- $y = 8x$
- $f(x) = 8x$
- $x_1 = 1$
- $x_2 = 3$

- $f(x_1) = f(1) = 8 \cdot 1 = 8$
- $f(x_2) = f(3) = 8 \cdot 3 = 24$
- $f(x_1) < f(x_2) \therefore f(1) < f(8)$
- se $x_2 > x_1$, então $f(x_2) > f(x_1)$.
- $f(3) > f(1)$

Função decrescente

- Uma função $y = f(x)$ é decrescente em determinado intervalo I contido em seu domínio Df (I⊂D(f)) se, e somente se, para todo x_1 e para todo x_2 pertencentes a I ($x_1, x_2 \in$ I):
- se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$.



Fonte: autoria própria.

Exemplo:

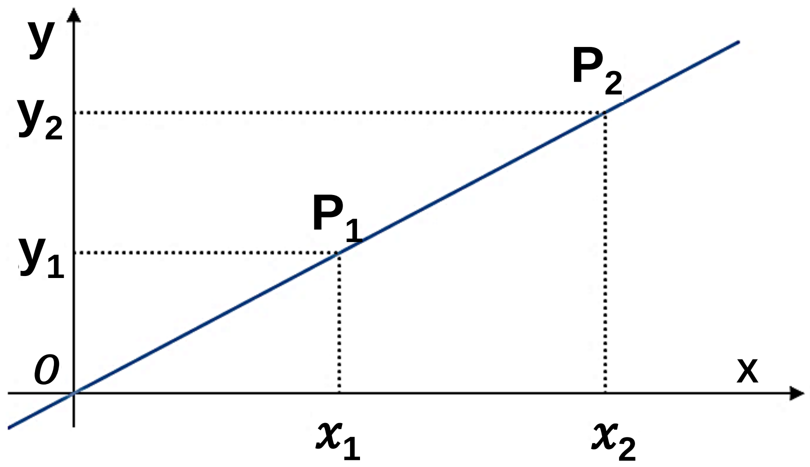
- $y = -7x$
- $f(x) = -7x$
- $x_1 = 1$
- $x_2 = 3$

- $f(x_1) = f(1) = -7 \cdot 1 = -7$
- $f(x_2) = f(3) = -7 \cdot 3 = -21$
- $f(x_1) > f(x_2) \therefore f(1) > f(8)$
- se $x_2 > x_1$, então $f(x_2) < f(x_1)$.
- $f(3) < f(1)$

Determinando o coeficiente angular

Determinando o coeficiente angular de uma reta que passa pela origem O do sistema de eixos e pelos pontos:

- $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$
- x_1 é a abscissa do ponto P_1;
- y_1 é a ordenada do ponto P_1;
- x_2 é a abscissa do ponto P_2;
- y_2 é a ordenada do ponto P_2.



Fonte: autoria própria.

O coeficiente angular a da reta, que está associado com sua inclinação, é calculado por:

- $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Alternativamente, sem que haja mudança no resultado obtido, poderíamos obter o coeficiente angular da reta assim:

- $a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

Exemplo de determinação do coeficiente angular

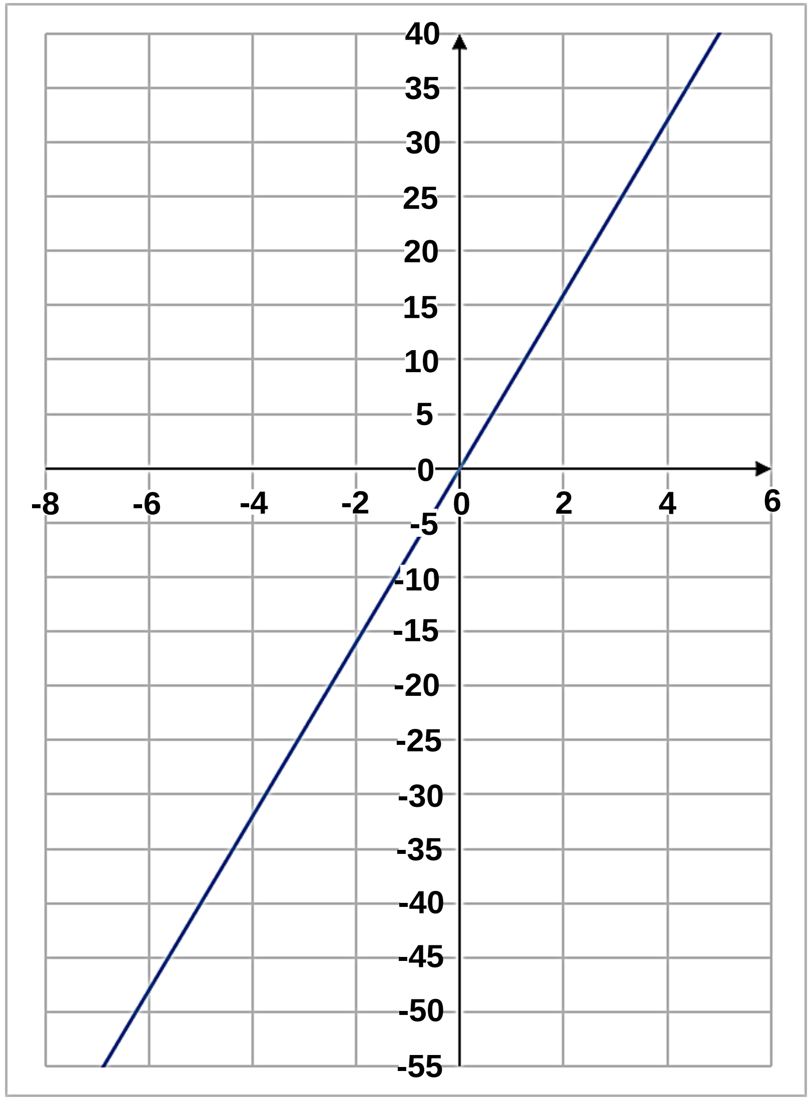
- Reta inclinada que passa pela origem e inclinada para a direita.

Podemos concluir que:

- É uma Função linear

Equação:

- $y = a \, . \, x$
- a é um número real positivo.

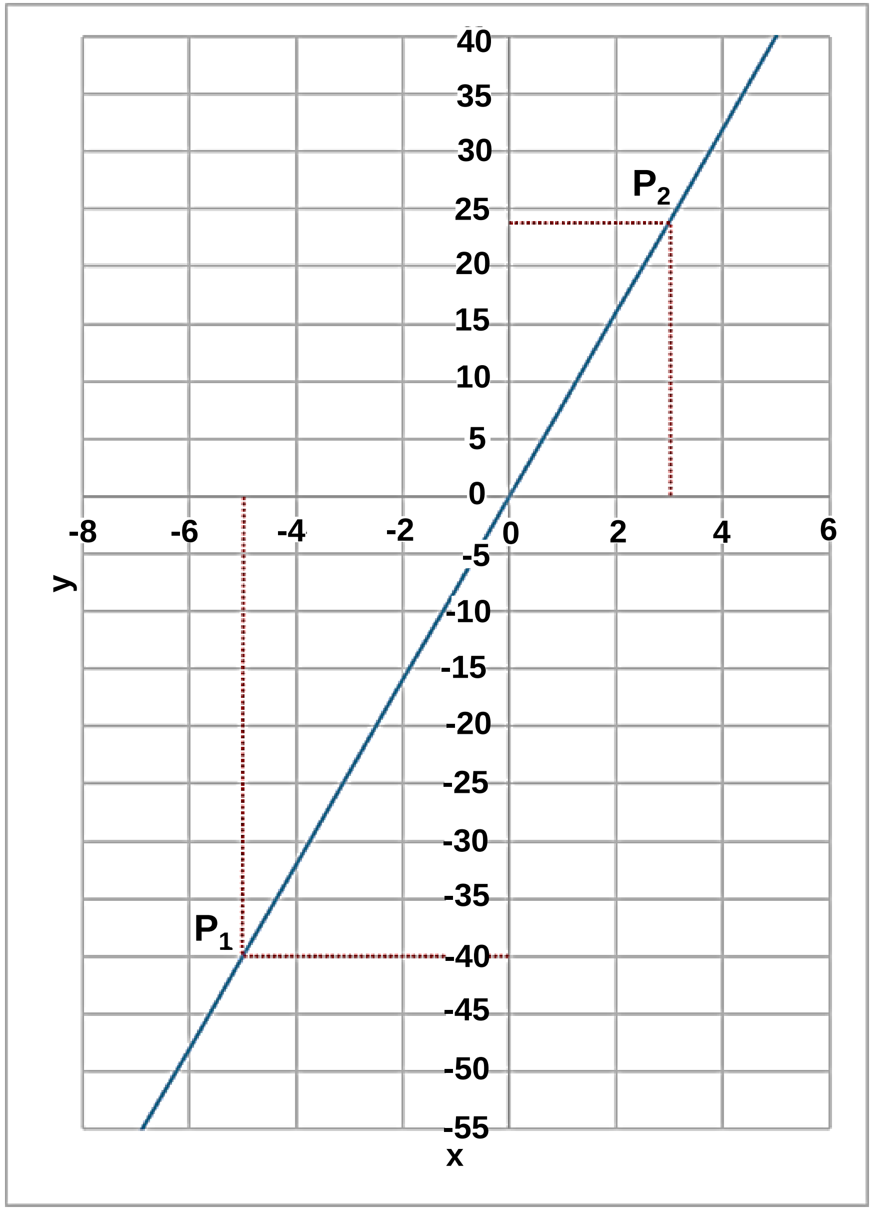


Fonte: autoria própria.

Exemplo de determinação do coeficiente angular – 1

Escolher dois pontos:

- $P_1 = (-5, -40)$
- $x_1 = -5;$
- $y_1 = -40;$
- $P_2 = (3, 24)$
- $x_2 = 3;$
- $y_2 = 24.$

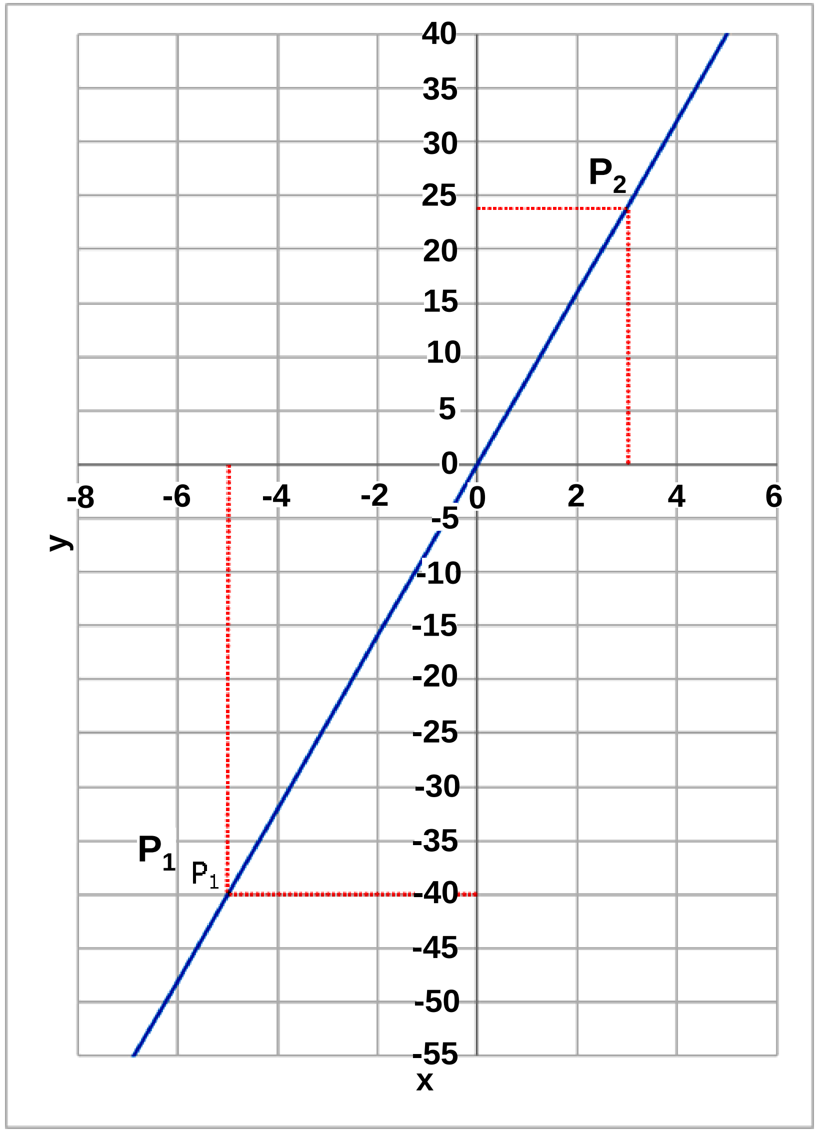


Fonte: autoria própria.

Exemplo de determinação do coeficiente angular – 2

O coeficiente angular a da reta é calculado por:

- $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- $x_1 = -5$
- $y_1 = -40$
- $x_2 = 3$
- $y_2 = 24$
- $a = \frac{24-(-40)}{3-(-5)}$



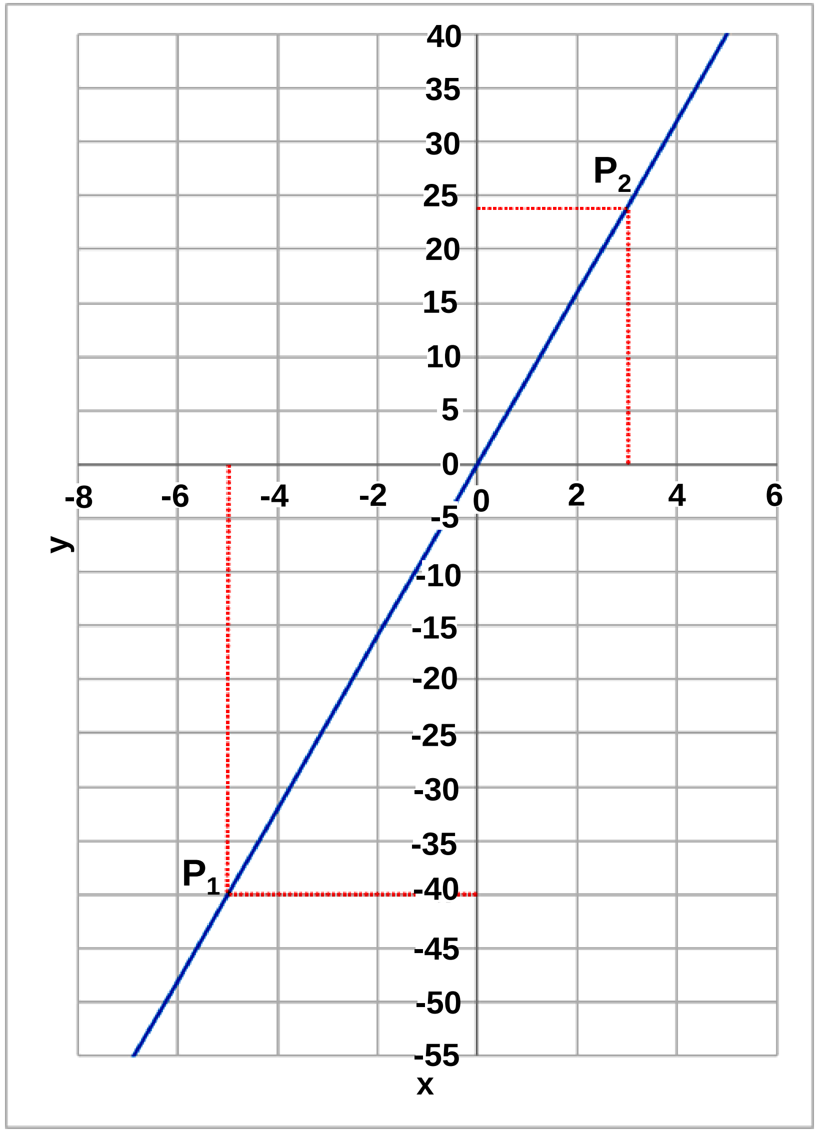
Fonte: autoria própria.

Exemplo de determinação do coeficiente angular – 3

- $a = \frac{24-(-40)}{3-(-5)}$
- $a = \frac{24+40}{3+5}$
- $a = \frac{64}{8}$
- $a = 8$

A função linear é:

- $y = 8x$
- $f(x) = 8x$



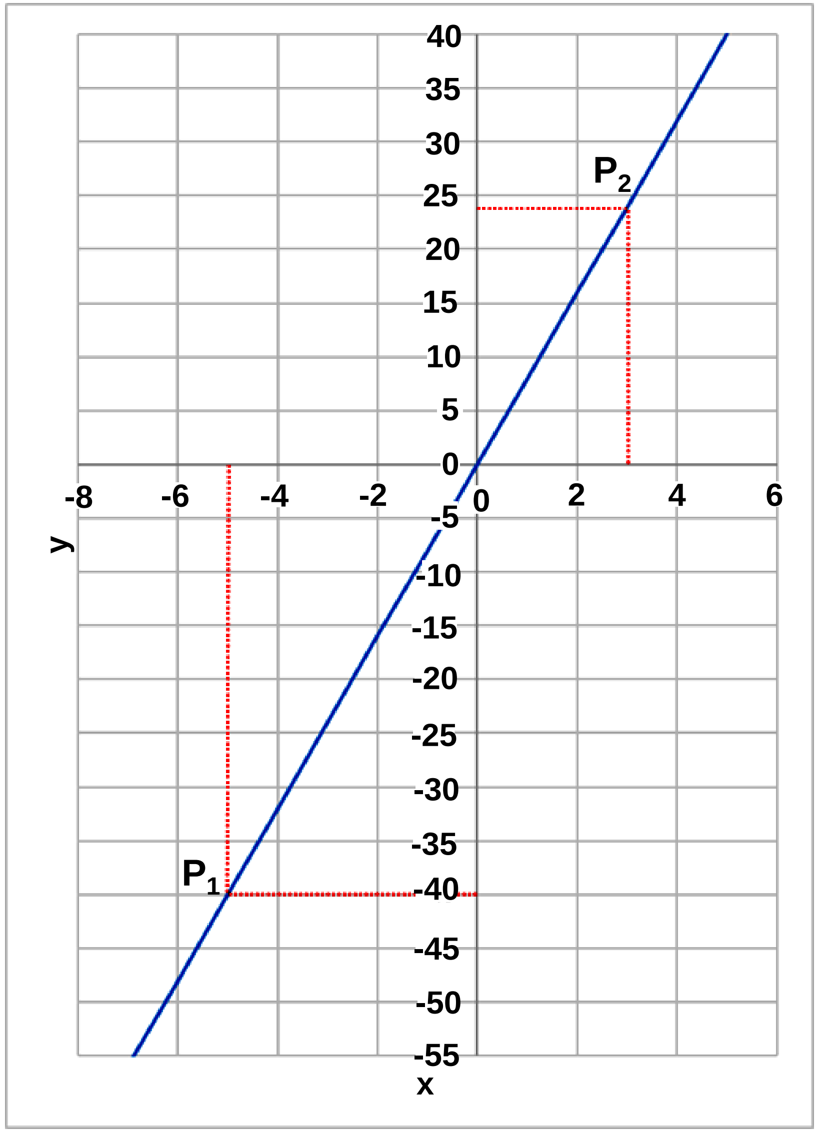
Fonte: autoria própria.

Exemplo de determinação do coeficiente angular – 4

- $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, alternativa:
- $a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \Rightarrow a = \frac{-40-24}{-5-3}$
- $a = \frac{-64}{-8}$
- $a = 8$

A função linear é:

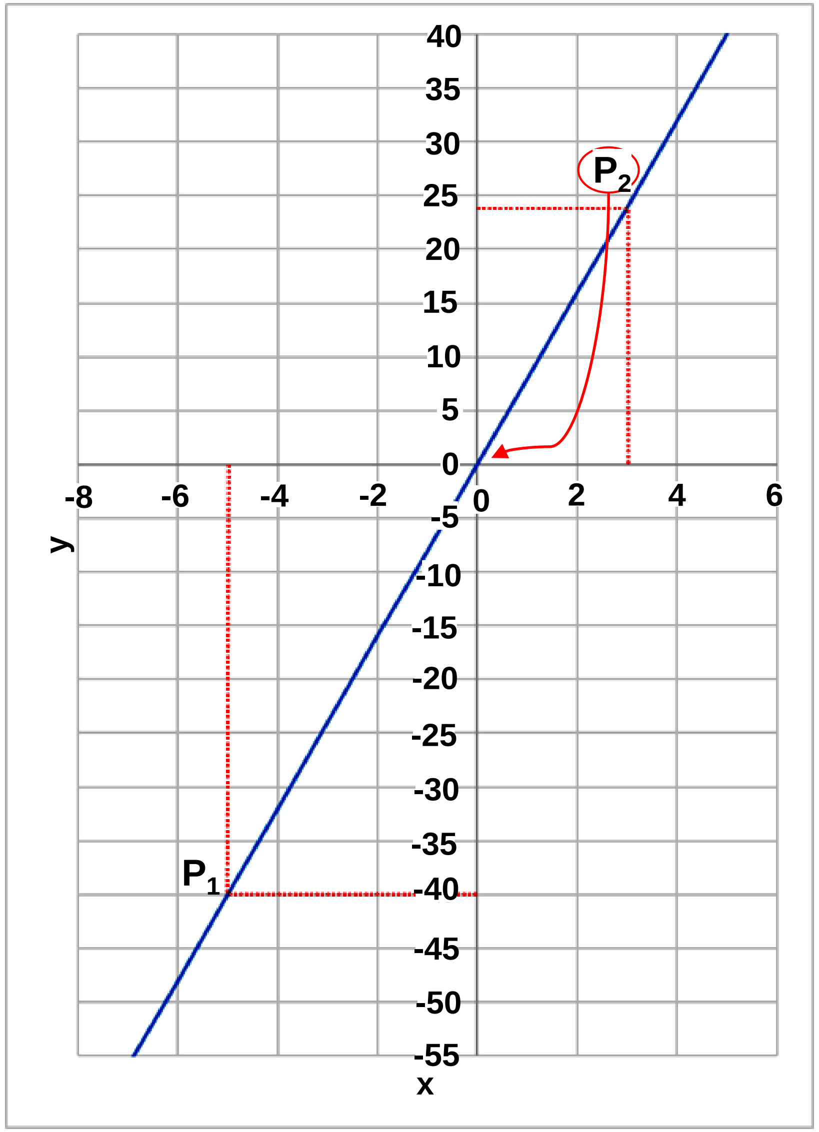
- $y = 8x$
- $f(x) = 8x$



Fonte: autoria própria.

Exemplo de determinação do coeficiente angular – 5

- Para termos maior precisão de leitura de valores do gráfico e maior facilidade na
- realização das contas,
- podemos escolher, por exemplo,
- $P_1 = (-5, -40\ )$ e $P_2 = (0{,}0)$
- $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-(-40)}{0-(-5)} = \frac{40}{5} = 8$
- A função linear é:
- $y = 8x$
- $f(x) = 8x$



Fonte: autoria própria.

Família de funções

Como todas as funções lineares têm a mesma forma:

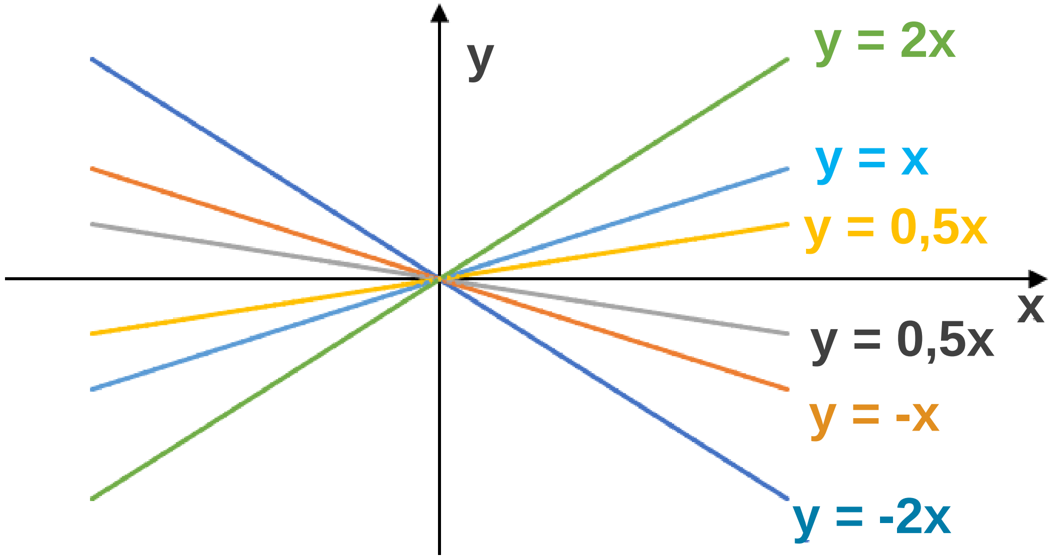
- $y = a.x$
- Podemos pensar nelas como uma família de retas inclinadas que passam pela origem.

Função crescente:

- coeficiente angular positivo, aumentos em x implicam aumentos em y.
- $y = 0{,}5x$; $y = x$; $y = 2x$

Função decrescente:

- coeficiente angular negativo, aumentos em x implicam diminuições em y.
- $y = -0{,}5x$; $y = -x$; $y = -2x$



Fonte: autoria própria.

Interatividade

A função linear $y = ax$ que passa pelo ponto $(x,y) = (-2,-4)$ é:

a) $y = 2x$.
b) $y = -2x$.
c) $y = x$.
d) $y = -x$.
e) $x = -4x$.

Resposta

A função linear $y = ax$ que passa pelo ponto $(x{,}y) = (-2{,}-4)$ é:

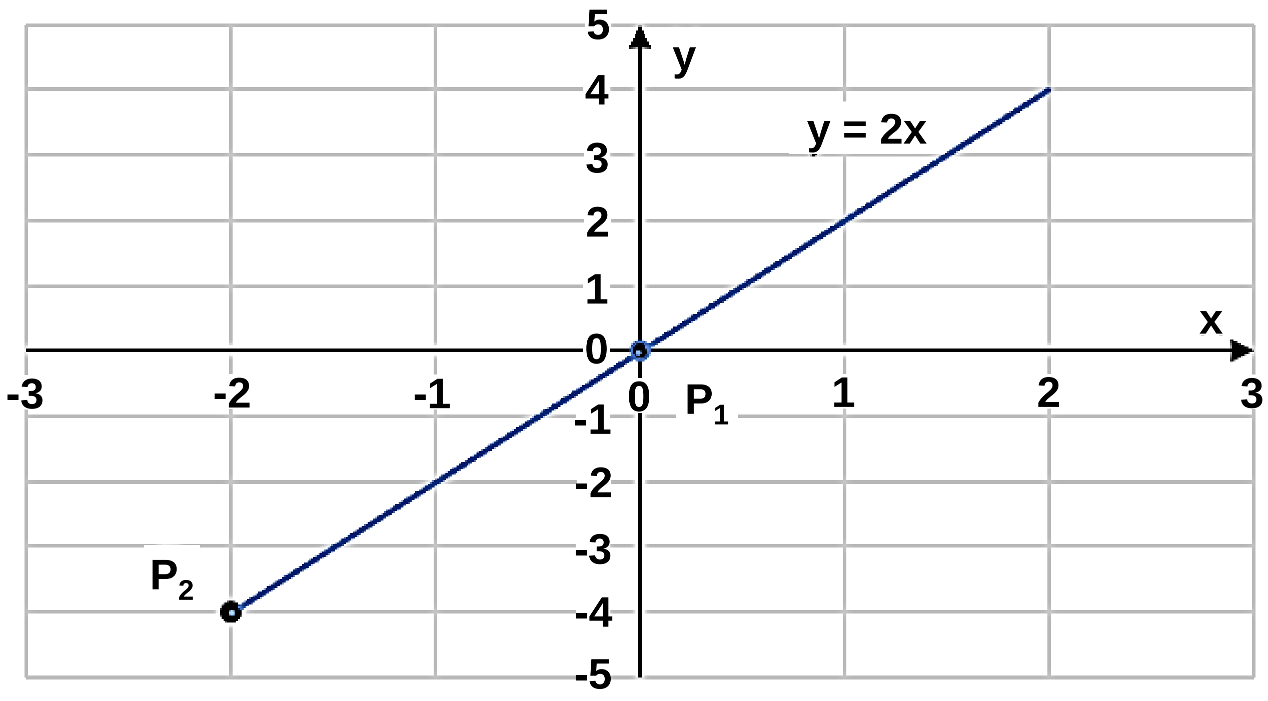
a) $y = 2x$.

b) $y = -2x$.

c) $y = x$.

d) $y = -x$.

e) $x = -4x$.



- $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - 0}{x_2 - 0} = \frac{-4}{-2} = 2$

Função do 1º grau

A função do 1º tem uma equação do tipo:

- $y = a \,.\, x + b$
- $f(x) = a \,.\, x + b$
- x é a variável independente (entrada de valores);
- y é a variável dependente (saída de valores);
- a é o coeficiente angular da reta (número real diferente de zero);
- b é o coeficiente linear (número real).
- O gráfico de uma função do 1º grau é uma reta inclinada em relação ao eixo das abscissas (eixo horizontal).

Função do 1º grau

Exemplo de equações que representam função do 1º grau:

- $y = 3 \;.\; x + 1$
- $y = -234 \;.\; x + 12$
- $y = 0{,}005 \;.\; x - 2$

Coeficientes angulares iguais, respectivamente, a:

- 3, -234 e 0,005.

Coeficientes lineares iguais, respectivamente, a:

- 1, 12 e -2.

Função do 1º grau – domínio e imagem

O domínio da função do 1º grau é o conjunto de todos os números reais, pois podemos substituir a variável x por qualquer número real:

- Df=R

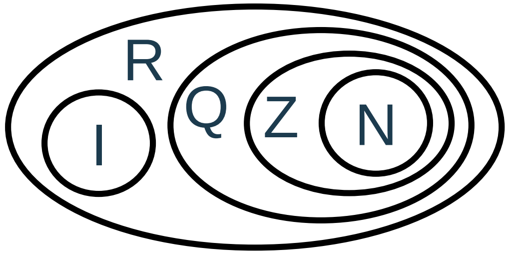
A imagem da função do 1º grau também é o conjunto de todos os números reais, pois y pode “retornar” qualquer número real:

- Imf=R

O conjunto dos números reais é formado pelos conjuntos de números:

- Naturais (N), Inteiros (Z), Racionais (Q) e Irracionais (I).

- $y = 3.x + 1$
- $y = -234.x + 12$
- $y = 0{,}005.x - 2$



Fonte: autoria própria.

Coeficiente angular e coeficiente linear

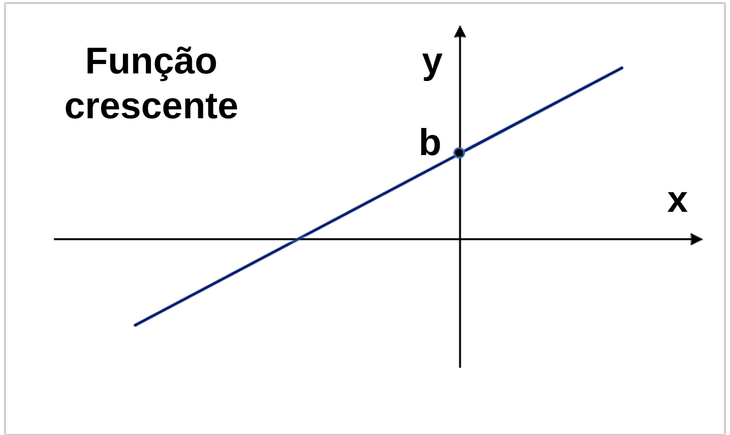
- Assim como no caso da função linear, o coeficiente angular a em $y = a \, . \, x + b$ está relacionado com a inclinação da reta que representa o gráfico dessa função:

se $a > 0$, ou seja, se a for positivo:

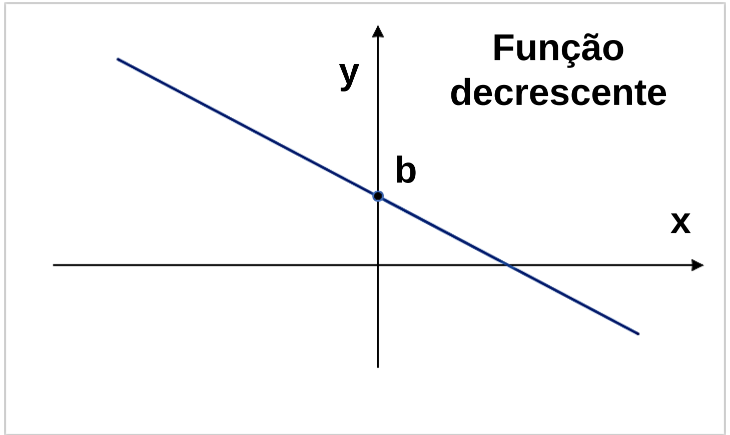
- Temos uma função crescente (reta inclinada para o lado direito);

se $a < 0$, ou seja, se a for negativo:

- Temos uma função decrescente (reta inclinada para o lado esquerdo).
- O coeficiente linear b da função do 1º grau, dada por $y = a \, . \, x + b$, é a posição em que a reta intercepta o eixo vertical (eixo y).



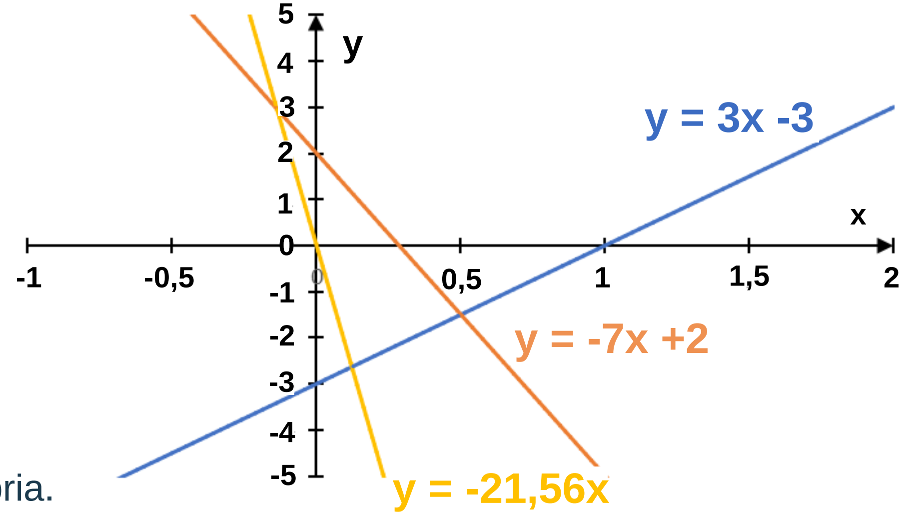
Fonte: autoria própria.



Fonte: autoria própria.

Exemplos

- y = 8x −3, ou y = 8x + (−3)
- O coeficiente angular é 8 (a = 8) e seu coeficiente linear é −3 (b = −3).
- É uma função crescente que cruza o eixo vertical em y = −3.
- y = −7x + 2
- É uma função decrescente, a =−7 e b =2, que cruza o eixo vertical em y = 2.
- y = −21,56x, ou y =−21,56.x + 0
- É uma função decrescente, a = −21,56 e b = 0, que cruza o eixo vertical em y=0.
- A função linear y = ax é um caso particular de função do 1º grau y = a x + b com b = 0.

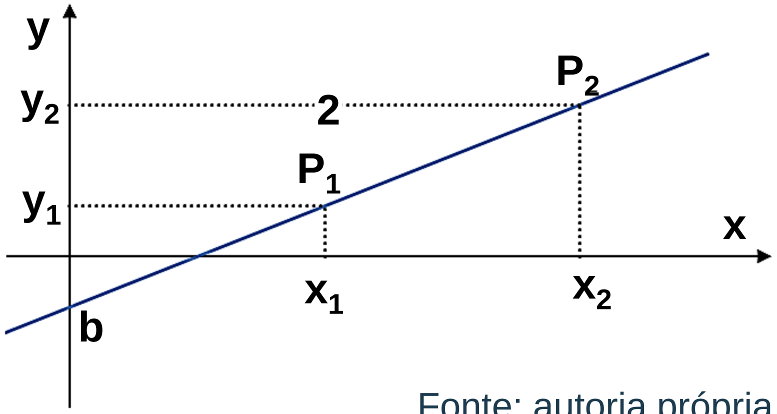


Fonte: autoria própria.

Determinando o coeficiente angular

Determinando o coeficiente angular de uma reta que passa pela origem O do sistema de eixos e pelos pontos:

- $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$
- x_1 é a abscissa do ponto P_1;
- y_1 é a ordenada do ponto P_1;
- x_2 é a abscissa do ponto P_2;
- y_2 é a ordenada do ponto P_2.



Fonte: autoria própria.

- O coeficiente angular a da reta, que está associado com sua inclinação, é calculado por:
  - $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
  - O coeficiente linear b da função do 1º grau pode ser lido diretamente no seu gráfico.

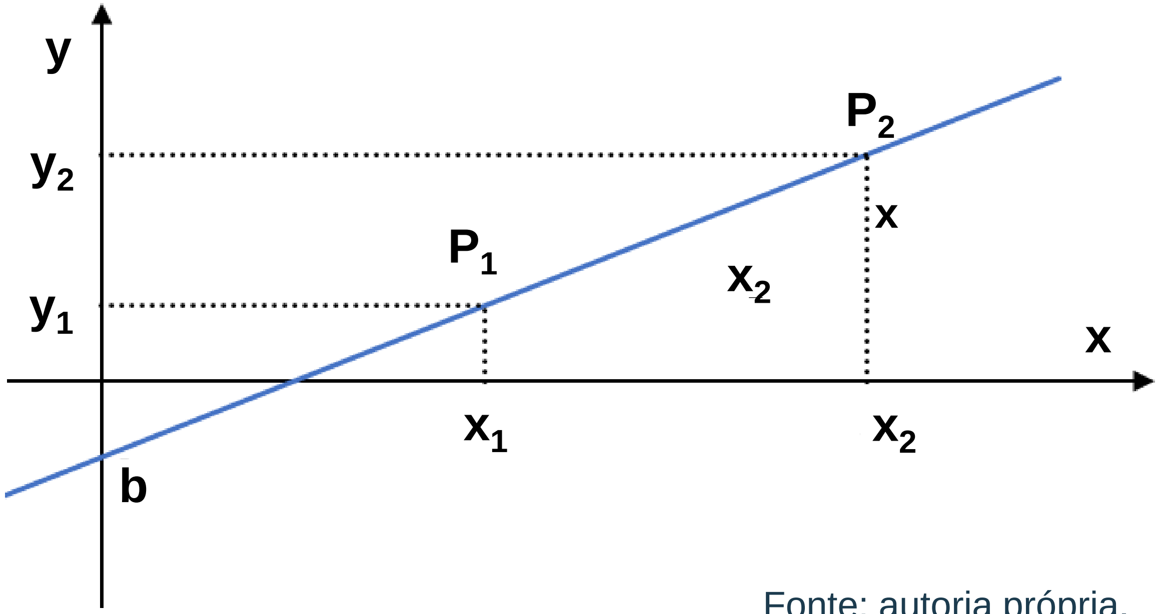
Determinando o coeficiente angular

Vale reforçar:

- O valor do coeficiente angular independe da escolha dos pontos P_1 e P_2.
- Esse valor está relacionado com a inclinação da reta, que é única.

Resumindo:

- Podemos escolher, livremente, quaisquer dois pontos pertencentes à reta em estudo para determinarmos o seu coeficiente angular.



Fonte: autoria própria.

Exemplo de determinação do coeficiente angular

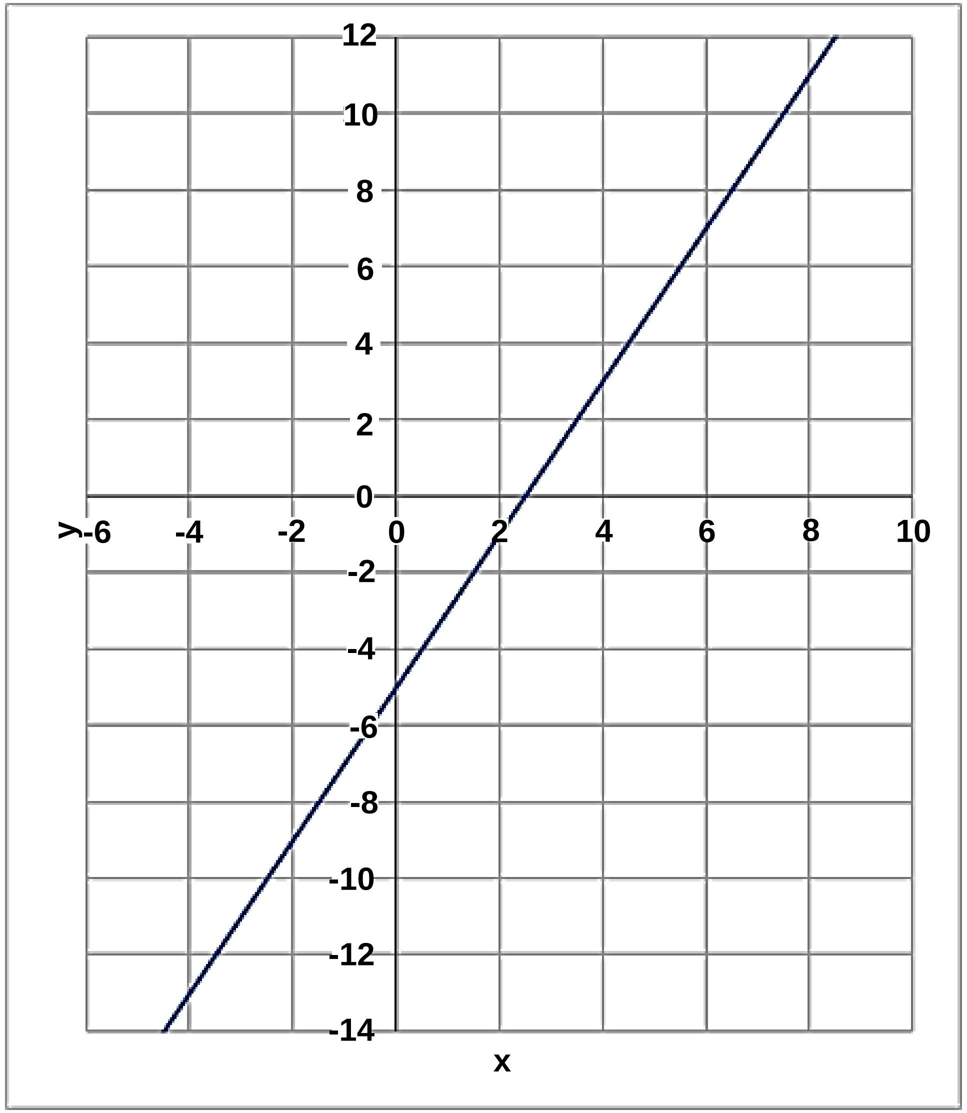
- Reta inclinada que não passa pela origem e inclinada para a direita.

Podemos concluir que:

- É uma Função do 1º grau

Equação:

- $y = ax + b$
- a é um número real positivo.

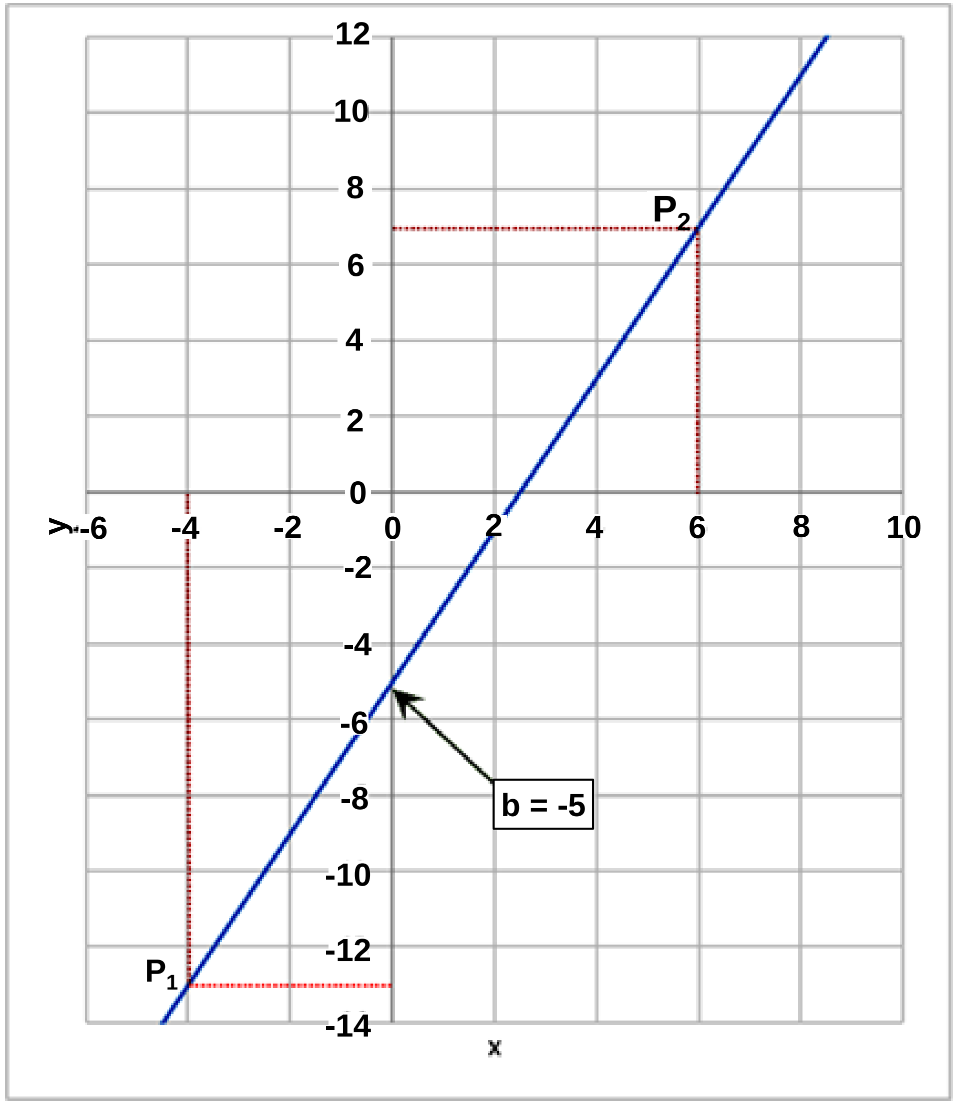


Fonte: autoria própria.

Exemplo de determinação do coeficiente angular – 1

Escolher dois pontos:

- $P_1 = (-4, -13\ )$
- $x_1 = -4;$
- $y_1 = -13;$
- $P_2 = (6, 7)$
- $x_2 = 6;$
- $y_2 = 7.$

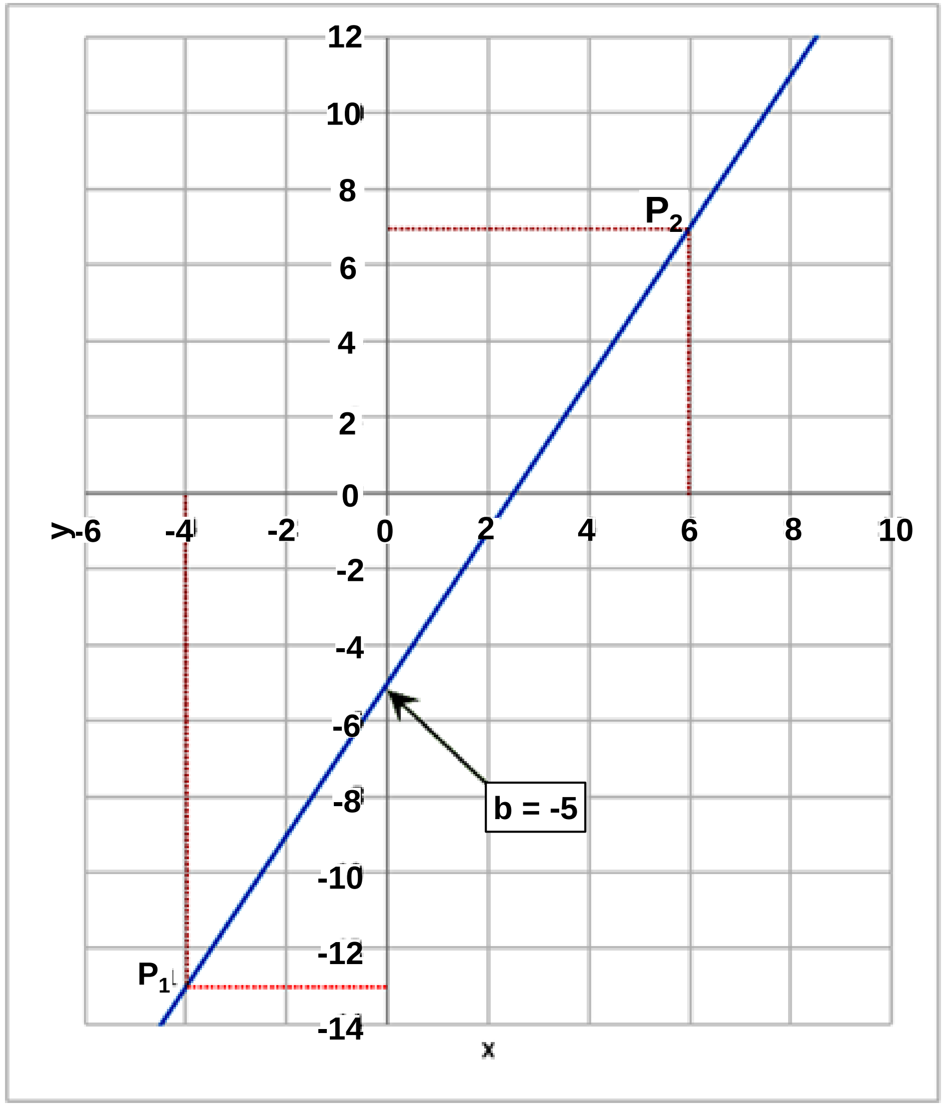


Fonte: autoria própria.

Exemplo de determinação do coeficiente angular – 2

O coeficiente angular a da reta é calculado por:

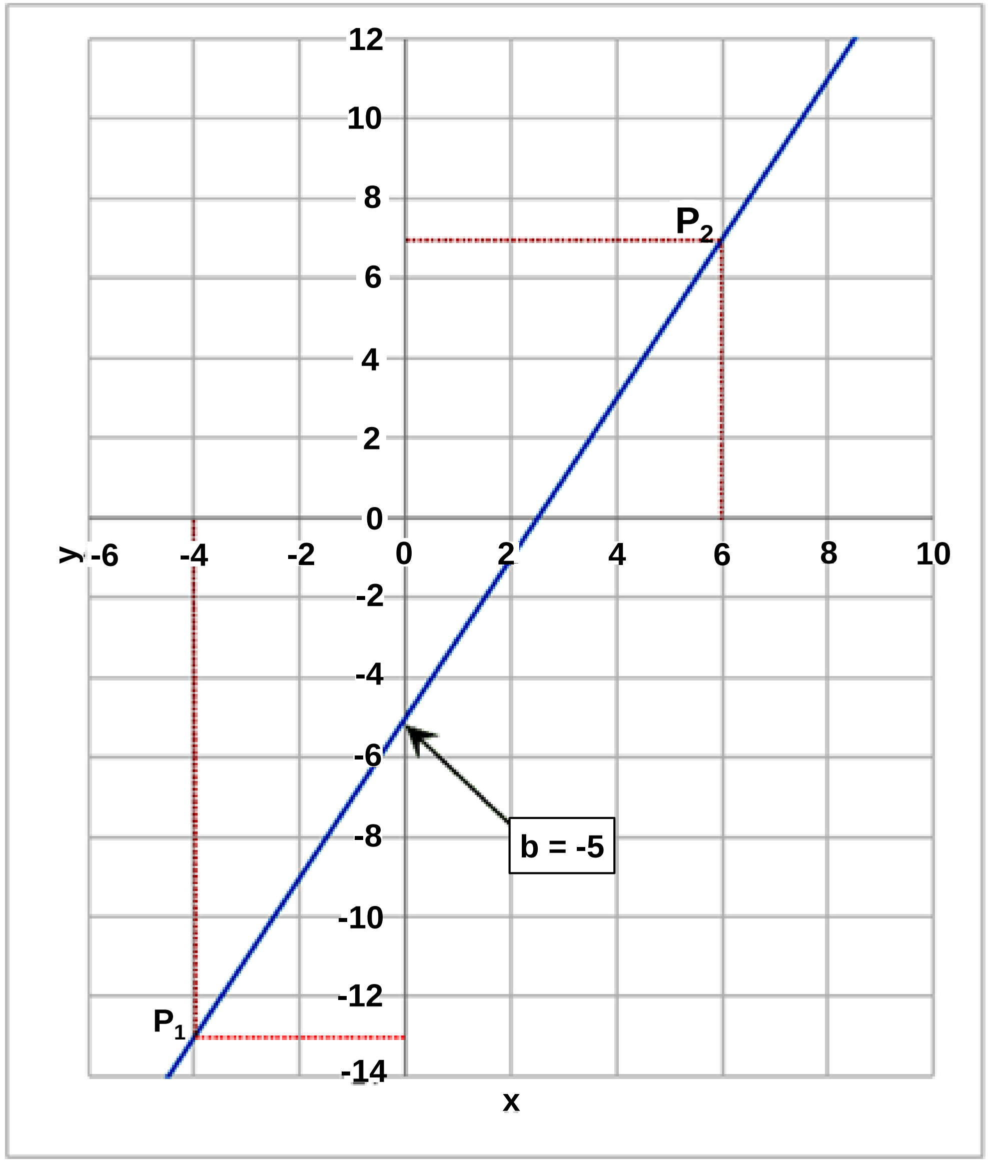
- $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- $x_1 = -4$
- $y_1 = -13$
- $x_2 = 6$
- $y_2 = 7$
- $a = \frac{7-(-13)}{6-(-4)}$



Fonte: autoria própria.

Exemplo de determinação do coeficiente angular – 3

- $a = \frac{7-(-13)}{6-(-4)} = \frac{7+13}{6+4} = \frac{20}{10} = 2$
- $a = 2$
- O coeficiente linear b da reta vale -5.
- A função do 1º grau é:
- $y = 2x - 5$
- $y = 2x + (-5)$
- $f(x) = 2x - 5$



Fonte: autoria própria.

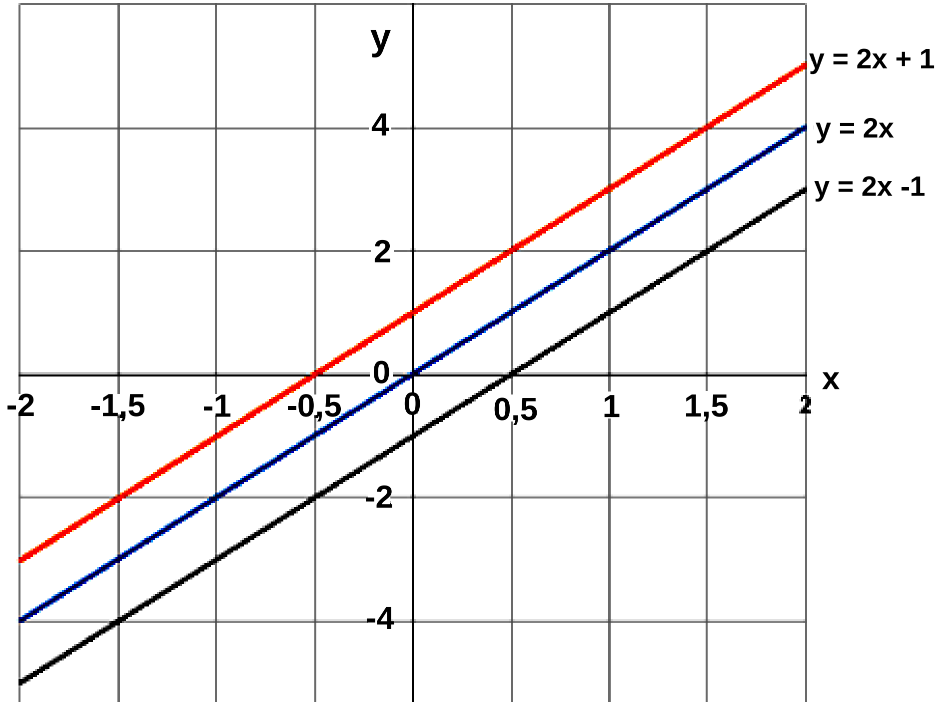
Raiz da função

- A posição em que o gráfico de uma função $y = f(x)$ cruza o eixo horizontal, o eixo x, se existir, é chamada de raiz da função.
- Nessa posição, $y = 0$.
- Na função do 1º grau, $y = ax + b$, a raiz é dada por:
- $x = -\frac{b}{a}$
- A raiz de uma função é o valor de x para o qual $y = 0$:
- $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$

Retas paralelas

- Retas paralelas têm mesma inclinação, ou seja, apresentam mesmo valor de coeficiente angular, mas diferentes valores de coeficientes lineares.
- $y = 2x$ (ou $y = 2x + 0$)
- $y = 2x - 1$
- $y = 2x + 1$
- coeficiente angular igual a 2.
- coeficientes lineares iguais a 0, -1 e 1, respectivamente.

Fonte: autoria própria.



Podemos dizer que duas retas de equações:

- $y_1 = a_1.x + b_1$ e
- $y_2 = a_2.x + b_2$

são paralelas se:

- $a_1 = a_2$

Fonte: autoria própria.

Retas perpendiculares

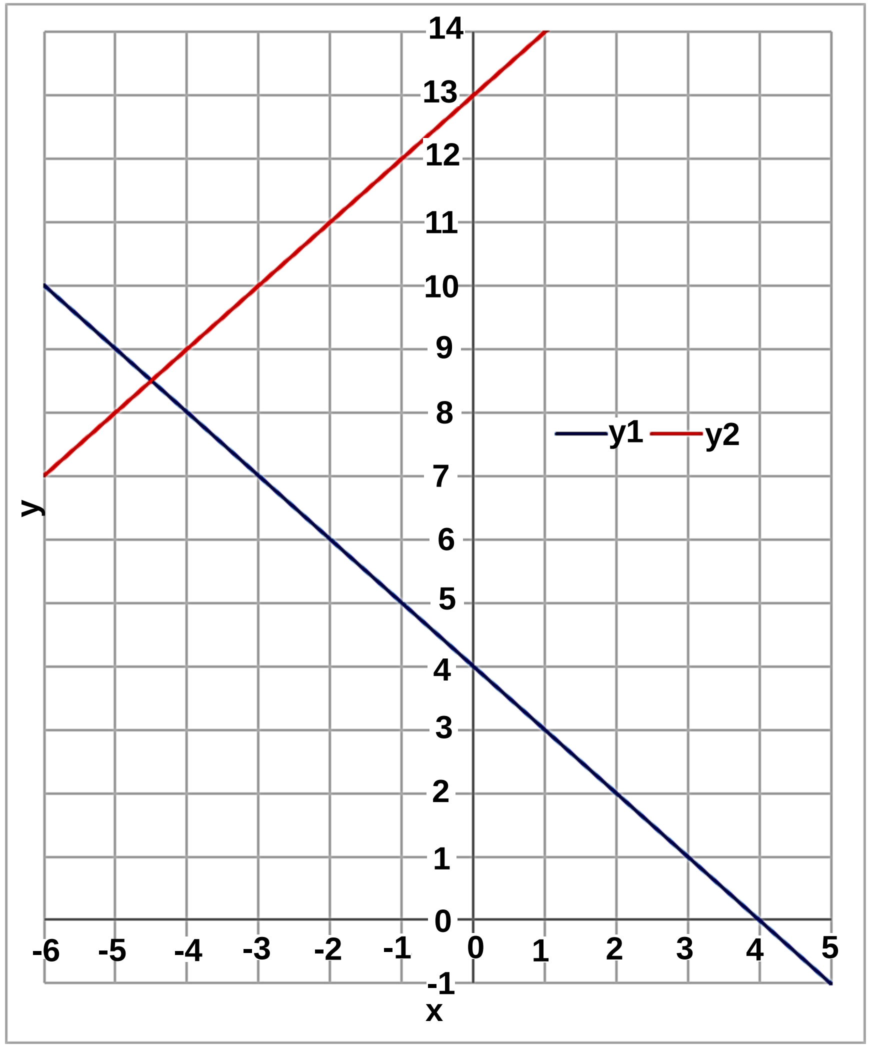
- Retas perpendiculares formam ângulo de 90 graus entre si.

Podemos dizer que duas retas de equações:

- $y_1 = a_1 . x + b_1$ e
- $y_2 = a_2 . x + b_2$

são perpendiculares se:

- $a_1 . a_2 = -1$



Fonte: autoria própria.

Retas perpendiculares – exemplos

- $y_1 = 2x + 3$ e $y_2 = -\frac{1}{2}x + 5$
- São retas perpendiculares: $a_1.a_2 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$
- $y_1 = -x + 7$ e $y_2 = -x + 13$
- São retas perpendiculares: $a_1.a_2 = 1 \cdot (-1) = -1$
- $y_1 = 3x + 1$ e $y_2 = -3x + 1$
- Não são retas perpendiculares: $a_1.a_2 = 3 \cdot (-3) = -9$

Interatividade

Os coeficientes angulares e lineares das funções do 1º grau $y_1 = \left(-\frac{1}{2}\right)x + 2$ e $y_2 = 2x - \frac{1}{2}$ são:

a) $a_1 = -1/2$, $b_1 = 2$; $a_2 = 2$, $b_2 = -1/2$.
b) $a_1 = 2$, $b_1 = -1/2$; $a_2 = 2$, $b_2 = -1/2$.
c) $a_1 = -1/2$, $b1 = 2$; $a_2 = -1/2$, $b_2 = 2$.
d) $a_1 = 2$, $b_1 = -1/2$; $a_2 = -1/2$, $b_2 = 2$.
e) $a_1 = -1/2$, $b_1 = -1/2$; $a_2 = 2$, $b_2 = 2$.

Resposta

Os coeficientes angulares e lineares das funções do 1º grau $y_1 = \left(-\frac{1}{2}\right)x + 2$ e $y_2 = 2x - \frac{1}{2}$ são:

a) $a_1 = -1/2$, $b_1 = 2$; $a_2 = 2$, $b_2 = -1/2$.
b) $a_1 = 2$, $b_1 = -1/2$; $a_2 = 2$, $b_2 = -1/2$.
c) $a_1 = -1/2$, $b1 = 2$; $a_2 = -1/2$, $b_2 = 2$.
d) $a_1 = 2$, $b_1 = -1/2$; $a_2 = -1/2$, $b_2 = 2$.
e) $a_1 = -1/2$, $b_1 = -1/2$; $a_2 = 2$,$b_2 = 2$.

Função do 2º grau

A função do 2º grau tem uma equação do tipo:

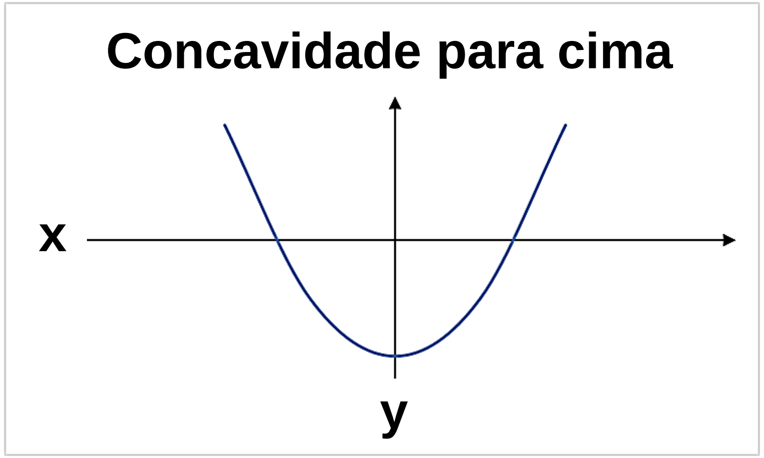
- $y = ax^2 + bx + c$
- $f(x) = ax^2 + bx + c$
- a, b e c são números reais.
- $a \neq 0$

Exemplos:

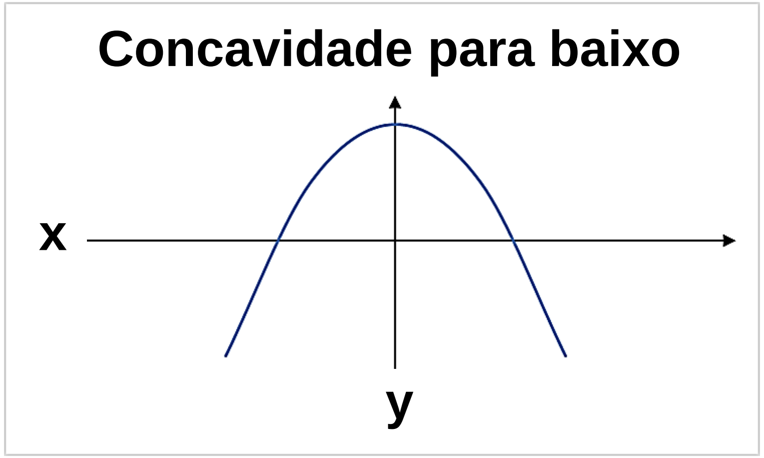
- $y = 7x^2 + 2x - 3$
- $y = -3x^2 + 6x - 13$

Gráfico da função do 2º grau

- O gráfico de uma função do 2º grau é uma parábola.
- Pode ter sua concavidade voltada para baixo ou voltada para cima.



Fonte: autoria própria.



Fonte: autoria própria.

Coeficientes da função do 2º grau

- $y = ax^2 + bx + c$
- Em relação ao coeficiente a:
- Se $a > 0$: a parábola tem concavidade voltada para cima.
- Se $a < 0$: a parábola tem concavidade voltada para baixo.
- Em relação à constante c:
- Corresponde à posição em que a parábola cruza o eixo vertical (eixo y).

Exemplos de coeficientes da função do 2º grau

- $y = ax^2 + bx + c$

Equação	a	b	c	Concavidade
$y = 4{,}7x^2 + x + 3$	$4{,}7$	1	3	Para cima
$y = -3x^2 + 0{,}44x - 6$	-3	$0{,}44$	-6	Para baixo
$y = 3x^2 + 21x$	3	21	0	Para cima
$y = -6x^2 + 429$	-6	0	429	Para baixo
$y = -x^2$	1	0	0	Para baixo

Fonte: autoria própria.

Raízes da função do 2º grau

- A raiz de uma função é o valor de x para o qual $y = 0$.
- $y = ax^2 + bx + c$
- $0 = ax^2 + bx + c$

No gráfico, observaremos que:

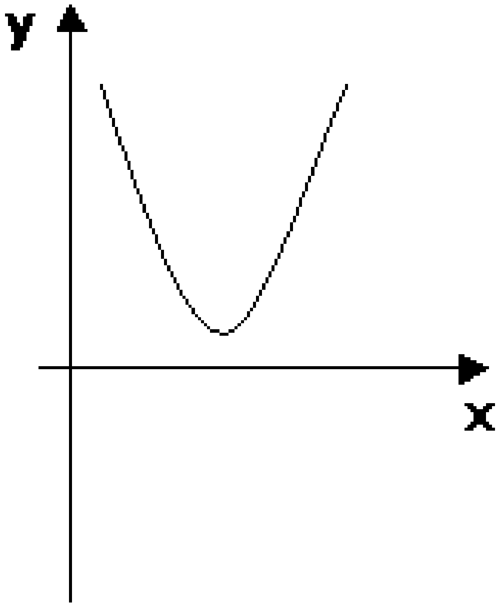
- Se a parábola não cortar o eixo horizontal x, ela não tem raízes reais.
- Se a parábola cortar o eixo horizontal x apenas uma vez, ela tem apenas uma raiz real.
- Se a parábola cortar o eixo horizontal x duas vezes, que é o número máximo de vezes, ela tem duas raízes reais.

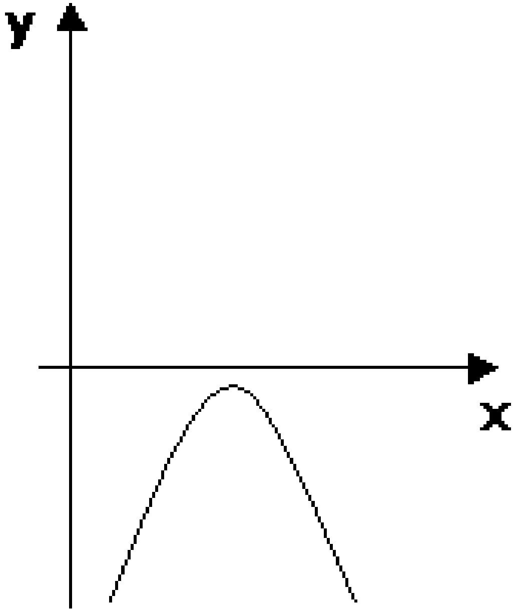
Determinando as raízes da função do 2º grau

- As raízes da função do 2º grau costumam ser representadas por x_1 e x_2.

Para calcularmos esses valores, caso existam, precisamos inicialmente determinar o valor do “delta” :

- $\Delta = b^2 - 4.a.c$
- Quando $\Delta < 0$, ou seja, for um número negativo, a parábola não tem raízes reais e, por isso, não corta o eixo x.





Fonte: autoria própria.

Determinando as raízes da função do 2º grau

Se $\Delta \geq 0$, ou seja, for um número positivo ou zero, as raízes são calculadas por:

- $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2.a}$
- $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2.a}$

Devemos destacar que, quando $\Delta = 0$, as raízes x_1 e x_2 da parábola são iguais:

- $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2.a}$

Vértice da parábola

Toda parábola tem um ponto extremo, chamado de vértice, indicado por:

- $V = (x_V, y_V)$.

O vértice pode ser um:

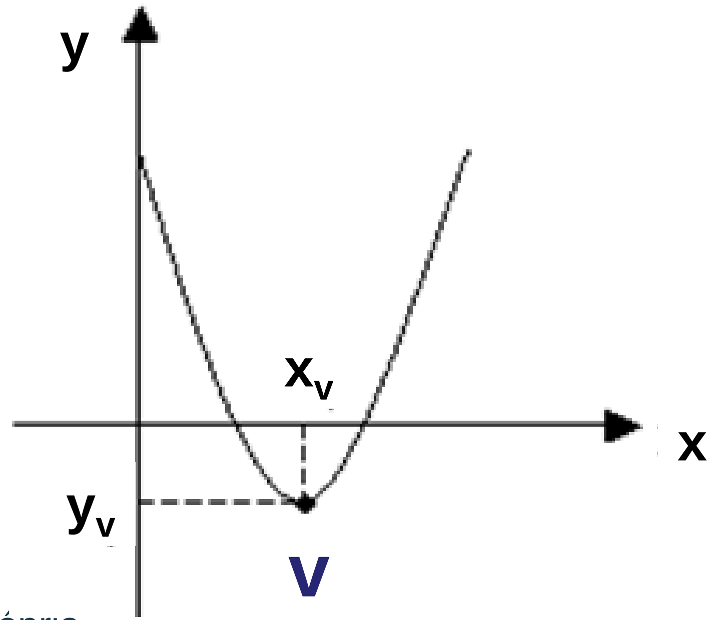
- um ponto de máximo M, ou seja, o “ponto mais alto” da parábola ou
- um ponto de mínimo m, ou seja, o “ponto mais baixo” da parábola.

A abscissa (x_V) e a ordenada (y_V) do vértice V de uma parábola são calculadas por:

- $x_V = \frac{-b}{2a}$, $y_V = \frac{-\Delta}{4a}$

Numa parábola que tem concavidade para cima:

- o vértice corresponde ao
- ponto de mínimo do gráfico.

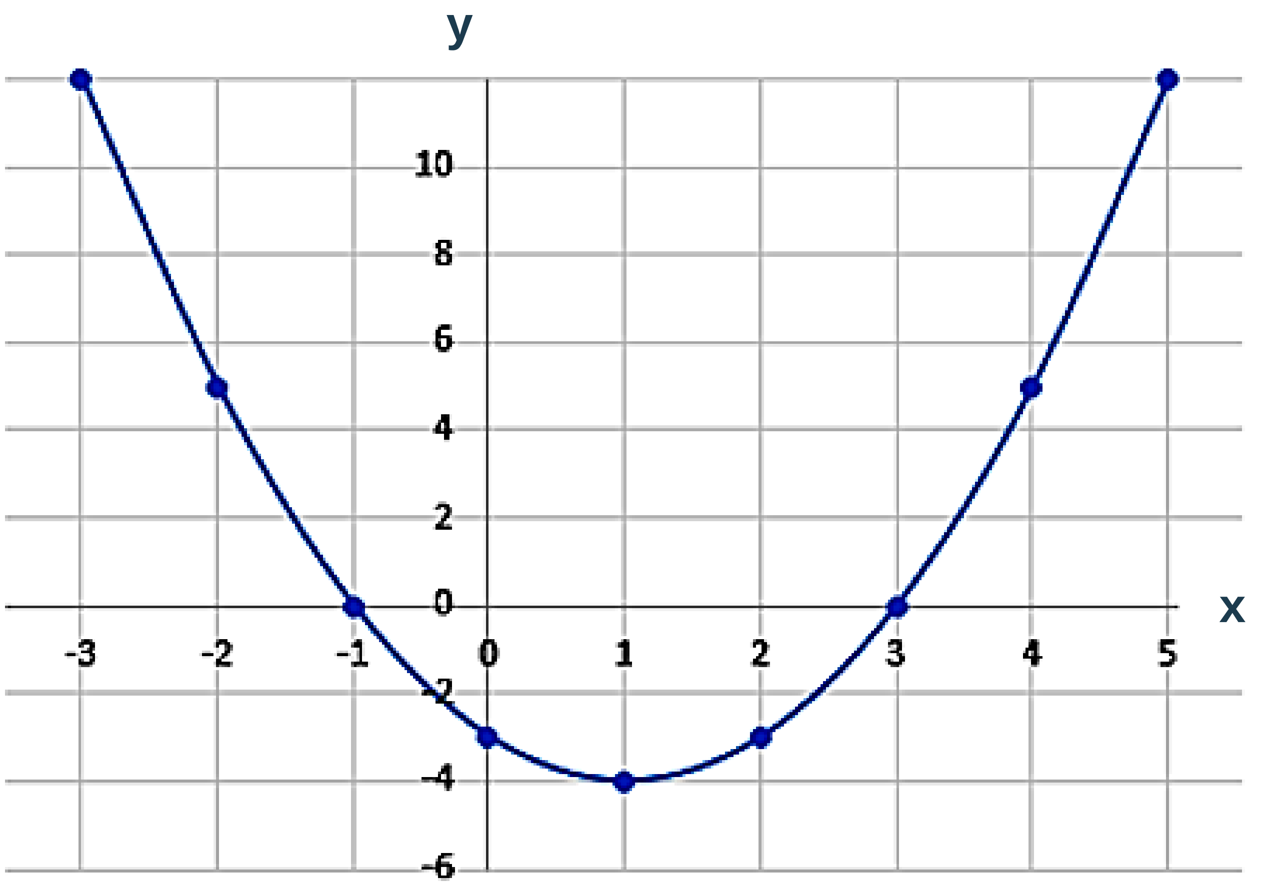


Fonte: autoria própria.

Função do 2º grau – domínio e imagem

O domínio da função do 2º grau é o conjunto de todos os números reais, pois podemos substituir a variável x por qualquer número real:

- Df=R
- A imagem da função do 2º grau é condicionada pela ordenada do vértice.
- $y = x^2 - 2x - 3$
- Vértice: $V = (1, -4)$;
- Raízes: $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$;
- Imagem da função: Imf=$\{y \in R | y \geq -4\}$



Fonte: autoria própria.

Exemplo

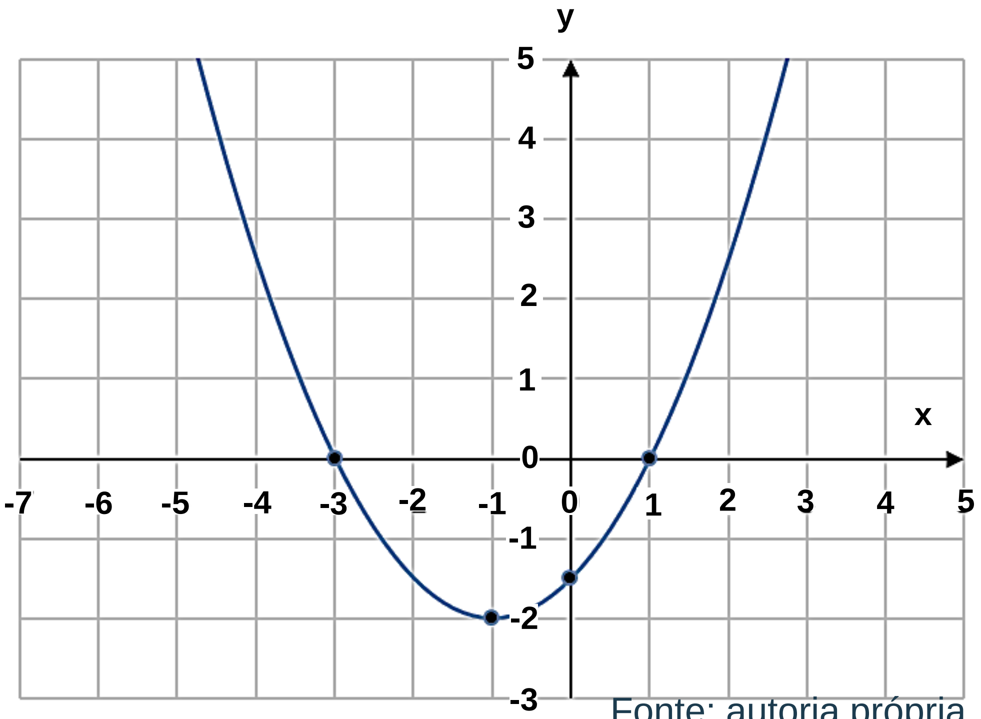
- $y = 0,5x^2 + x - 1,5$
- $a = 0,5$ (Concavidade voltada para cima);
- $b = 1$;
- $c = -1,5$ (intercepta o eixo y).
- $\Delta = b^2 - 4.a.c = 1^2 - 4.0,5.(-1,5) = 1 + 3 = 4$ (duas raízes):
- $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-1+\sqrt{4}}{2.0,5} = \frac{-1+2}{1} = 1$
- $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-1-\sqrt{4}}{2.0,5} = \frac{-1-2}{1} = -3$

- $x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2.0,5} = \frac{-b}{1} = 1$
- $y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-4}{4.0,5} = \frac{-4}{2} = -2$
- Ponto de mínimo.

Exemplo

- $y = 0{,}5x^2 + x - 1{,}5$
- $a = 0{,}5$ (Concavidade voltada para cima);
- $b = 1$;
- $c = -1{,}5$ (intercepta o eixo y).
- $\Delta = b^2 - 4.a.c = 1^2 - 4.0{,}5.(-1{,}5) = 1 + 3 = 4$ (duas raízes):
- $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-1+\sqrt{4}}{2.0{,}5} = \frac{-1+2}{1} = 1$
- $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-1-\sqrt{4}}{2.0{,}5} = \frac{-1-2}{1} = -3$

- $x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2.0{,}5} = \frac{-b}{1} = 1$
- $y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-4}{4.0{,}5} = \frac{-4}{2} = -2$
- Ponto de mínimo.



Fonte: autoria própria.

Parábolas com vértice na origem

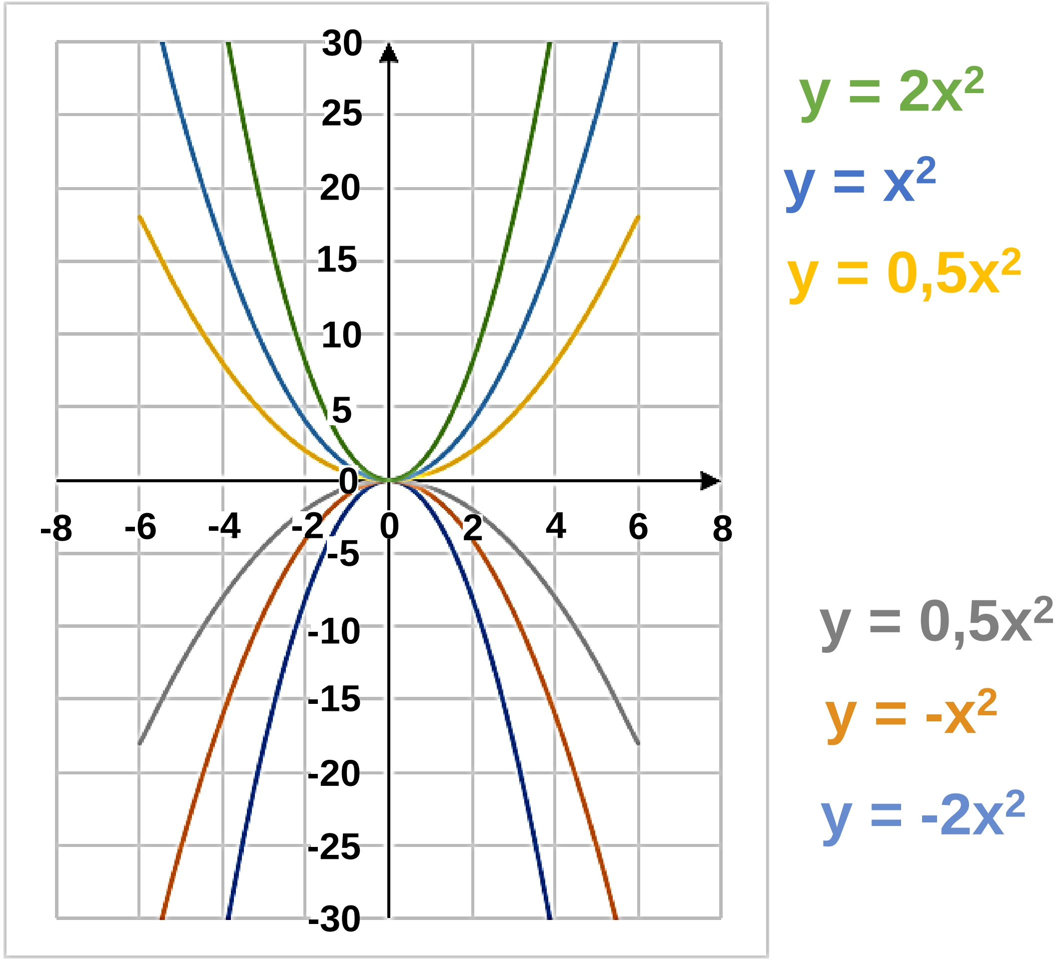
- Funções pares: simetria em relação ao eixo y.

Afunilamento da parábola:

- quando $a > 0$ e aumenta (concavidade para cima)
- quando $a < 0$ e diminui (concavidade para baixo)

Rebatimento do gráfico, tendo o eixo x como eixo de simetria:

- $y = 0{,}5x^2$ e $y = -0{,}5x^2$
- $y = x^2$ e $y = -x^2$
- $y = 2x^2$ e $y = -2x^2$



Fonte: autoria própria.

Interatividade

Analisando a função do 2º grau $y=5x^2$, se pode concluir que ela tem:

a) Concavidade para cima, vértice na origem e duas raízes iguais.
b) Concavidade para cima e duas raízes diferentes.
c) Concavidade para cima e não tem raiz real.
d) Concavidade para cima e passa pelo eixo y no ponto 5.
e) Concavidade para baixo, vértice na origem e duas raízes iguais.

Resposta

Analisando a função do 2º grau $y=5x^2$, se pode concluir que ela tem:

a) Concavidade para cima, vértice na origem e duas raízes iguais.
b) Concavidade para cima e duas raízes diferentes.
c) Concavidade para cima e não tem raiz real.
d) Concavidade para cima e passa pelo eixo y no ponto 5.
e) Concavidade para baixo, vértice na origem e duas raízes iguais.

Referências

- BRADLEY, G. L.; HOFFMANN, L. D. *Cálculo*: um curso moderno e suas aplicações. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 2002.
- Função de Primeiro Grau – Guia Estudo. [s.d.]. Disponível em: https://www.guiaestudo.com.br/funcao-de-primeiro-grau. Acesso em: 18 jan. 2021.
- Função de Segundo Grau – Guia Estudo. [s.d.]. Disponível em: https://www.guiaestudo.com.br/funcao-de-segundo-grau. Acesso em: 18 jan. 2021.
- Função linear – Guia Estudo. [s.d.]. Disponível em: https://www.guiaestudo.com.br/funcao-linear. Acesso em: 18 jan. 2021.
- GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 2018.
- MCCALLUM, W. G.; CONNALLY, E.; HUGHES-HALLETT, D. Álgebra – Forma e Função. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 2011.

ATÉ A PRÓXIMA!