EAD

EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

UNIDADE II

Tópicos de Matemática Aplicada

Prof. Me. Rene Ignácio

Introdução

Nesta unidade II, veremos:

- O que são matrizes;
- Os tipos de matrizes;
- As operações realizadas com matrizes; e
- Sistemas lineares.

Matrizes

- As matrizes são representadas por espécies de tabelas, em que vemos valores numéricos nas suas linhas e nas suas colunas.
- Pontuações de cinco candidatos a uma vaga de emprego em avaliações de Português, Inglês e Lógica. Essas pontuações podem variar de 0 a 100.

Candidato	Português	Inglês	Lógica
Claudia	83	67	78
Lucila	64	71	75
Rafael	52	79	68
Tatiana	91	57	63
Tiago	87	92	69

Fonte: autoria própria.

Matrizes

Uma matriz representa, de modo completo, as pontuações dos candidatos:

Candidato	Português	Inglês	Lógica
Claudia	83	67	78
Lucila	64	71	75
Rafael	52	79	68
Tatiana	91	57	63
Tiago	87	92	69

$$A = \begin{pmatrix} 83 & 67 & 78 \\ 64 & 71 & 75 \\ 52 & 79 & 68 \\ 91 & 57 & 63 \\ 87 & 91 & 69 \end{pmatrix}$$

Fonte: autoria própria.

Matrizes

Uma matriz que representa, apenas, as pontuações de Claudia, indicada por B:

Candidato	Português	Inglês	Lógica
Claudia	83	67	78
Lucila	64	71	75
Rafael	52	79	68
Tatiana	91	57	63
Tiago	87	92	69

Fonte: autoria própria.

$$B = \begin{pmatrix} 83 & 67 & 78 \end{pmatrix}$$

Como a matriz B tem uma única linha, ela é classificada como:

- Matriz linha.

Matrizes

Uma matriz que representa as pontuações dos candidatos em Lógica, indicada por C:

Candidato	Português	Inglês	Lógica
Claudia	83	67	78
Lucila	64	71	75
Rafael	52	79	68
Tatiana	91	57	63
Tiago	87	92	69

Fonte: autoria própria.

$$C = \begin{pmatrix} 78 \\ 75 \\ 68 \\ 63 \\ 69 \end{pmatrix}$$

Como a matriz C tem uma única coluna, ela é classificada como:

- Matriz coluna.

Matrizes

- De modo geral, podemos dizer que uma matriz de ordem mxn (“eme por ene”) é uma tabela de números reais dispostos em *m* linhas e *n* colunas.
- Cada um desses números é um elemento da matriz e é identificado pela sua posição, ou seja, pela linha e pela coluna em que ocupa.

A matriz A, das avaliações, tem ordem 5x3:

- 5 linhas e 3 colunas;
- D;
- E.

$$A = \begin{pmatrix} 83 & 67 & 78 \\ 64 & 71 & 75 \\ 52 & 79 & 68 \\ 91 & 57 & 63 \\ 87 & 91 & 69 \end{pmatrix}_{5x3}$$

Fonte: autoria própria.

Matrizes

Observando a posição dos elementos na matriz A:

- O elemento da 1ª linha e da 1ª coluna, representado por a_{11}, é o número 83;
- O elemento da 1ª linha e da 2ª coluna, representado por a_{12}, é o número 67;
- O elemento da 1ª linha e da 3ª coluna, representado por a_{13}, é o número 78;
- O elemento da 2ª linha e da 1ª coluna, representado por a_{21}, é o número 64;
- O elemento da 2ª linha e da 2ª coluna, representado por a_{22}, é o número 71;
- O elemento da 2ª linha e da 3ª coluna, representado por a_{23}, é o número 75; e
- Assim por diante.

$$A = \begin{pmatrix} 83 & 67 & 78 \\ 64 & 71 & 75 \\ 52 & 79 & 68 \\ 91 & 57 & 63 \\ 87 & 91 & 69 \end{pmatrix}_{5x3}$$

Fonte: autoria própria.

Matrizes

Generalizando:

Um elemento qualquer de uma matriz A é indicado por a_{ij}, sendo:

- i = 1,2,3,..., m a linha que o elemento ocupa;
- j = 1,2,3,..., n a coluna que o elemento ocupa;
- Os valores de i e de j para dado elemento a_{ij} são chamados de índices;

De maneira geral, temos a representação a seguir:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{22} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

Fonte: autoria própria.

Matrizes

- Podemos ter qualquer número real como um elemento de uma matriz, e não, apenas, números inteiros e positivos.

Na matriz D, temos como elementos números:

- Positivos, como o elemento $a_{13} = {}^{5}/_{6}$;
- Negativos, como o elemento $a_{11} = -1,3$;
- Inteiros, como o elemento $a_{23} = 7$;
- Fracionários, como o elemento $a_{13} = {}^{5}/_{6}$;
- Irracionais, como o elemento $a_{12} = \pi$.

$$D = \begin{pmatrix} -1,3 & \pi & {}^{5}/_{6} \\ \sqrt{2} & 0 & 7 \end{pmatrix}_{2x3}$$

Fonte: autoria própria.

Tipos de matrizes

Matriz nula ou matriz zero (E):

- Todos os elementos da matriz são iguais a zero.

Matriz linha (L):

- Formada por uma única linha.

Matriz coluna (C):

- Formada por uma única coluna.

Matriz quadrada (F):

- Quantidade *m* de linhas igual à quantidade *n* de colunas.

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$L = \begin{pmatrix} 3 & -0{,}8 & 32 \end{pmatrix}_{1x3}$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 1{,}3 \end{pmatrix}_{3x1}$$

$$\mathrm{F} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 99 \\ 1{,}5 & 9 & -3 \\ 7{,}8 & 134 & 9{,}2 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Fonte: autoria própria.

Diagonais de uma matriz quadrada

- Para as matrizes quadradas, a diagonal principal é definida pelos elementos a_{ij}, em que i=j.
- Em uma matriz de ordem 3x3, a diagonal principal é formada pelos elementos a_{11}, a_{22} e a_{33}.
- Elementos que constituem a diagonal principal da matriz F: -2 , 9 e 9,2.

$$F = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 99 \\ 1{,}5 & 9 & -3 \\ 7{,}8 & 134 & 9{,}2 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Fonte: autoria própria.

- Em uma matriz de ordem 3x3, a diagonal secundária é formada pelos elementos a_{11}, a_{22} e a_{33}.
- Elementos que constituem a diagonal secundária da matriz F: 7, 8, 9 e 99.

$$F = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 99 \\ 1{,}5 & 9 & -3 \\ 7{,}8 & 134 & 9{,}2 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Fonte: autoria própria.

Matriz diagonal

Se todos os elementos de uma matriz quadrada são iguais a zero, com a exceção de, pelo menos, um elemento da diagonal principal, ela é chamada de matriz diagonal, como as matrizes G e H:

$$G = \begin{pmatrix} 256 & 0 \\ 0 & -3{,}44 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Fonte: autoria própria.

$$H = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 9{,}7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Fonte: autoria própria.

Matriz identidade

Se todos os elementos da diagonal principal de uma matriz quadrada forem iguais a 1 e todos os outros elementos forem iguais a 0, essa matriz é chamada de matriz identidade ou matriz unidade, como as matrizes I_2 e I_3:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Fonte: autoria própria.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Fonte: autoria própria.

Interatividade

A matriz $A = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ é uma matriz:

a) Linha.
b) Coluna.
c) Quadrada.
d) Nula.
e) Identidade.

Resposta

A matriz $A = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ é uma matriz:

a) Linha.
b) Coluna.
c) Quadrada.
d) Nula.
e) Identidade.

Matriz transposta

- A matriz transposta de J, indicada por J^t, é uma matriz de ordem nxm, cujas linhas são formadas pelas colunas de J e cujas colunas são formadas pelas linhas de J.

A matriz J^t resulta da troca ordenada das linhas pelas colunas de J:

- A linha 1 de J vira a coluna 1 de J^t;
- A linha 2 de J vira a coluna 2 de J^t.

$$J = \begin{pmatrix} 9 & 13 & -7{,}5 \\ 5 & 68 & 132 \end{pmatrix}_{2x3}$$

Fonte: autoria própria.

$$J^t = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 13 & 68 \\ -7{,}5 & 132 \end{pmatrix}_{3x2}$$

Fonte: autoria própria.

Matriz oposta

- A matriz oposta de J, indicada por $-J$, é uma matriz de ordem mxn, cujos elementos são os opostos dos elementos de J.

Se o elemento a_{mn} de J:

- For positivo, em $-J$ ele será negativo;
- For negativo, em $-J$ ele será positivo.

$$J = \begin{pmatrix} 9 & 13 & -7{,}5 \\ 5 & 68 & 132 \end{pmatrix}_{2x3}$$

Fonte: autoria própria.

$$-J = \begin{pmatrix} -9 & -13 & 7{,}5 \\ -5 & -68 & -132 \end{pmatrix}_{2x3}$$

Fonte: autoria própria.

Igualdade de matrizes

- Igualdade de matrizes.
- Duas matrizes K e L, de mesma ordem, são iguais se os seus elementos de mesmo índice são iguais.

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 8 \\ 0{,}3 & 13 \end{pmatrix}_{3x2}$$

Fonte: autoria própria.

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 8 \\ 0{,}3 & 13 \end{pmatrix}_{3x2}$$

Fonte: autoria própria.

Soma de matrizes

- De modo geral, podemos dizer que, se A e B são matrizes de mesma ordem mxn, então a matriz C, dada por C = A + B, será uma matriz de ordem mxn, em que cada elemento é o resultado da soma dos elementos correspondentes de A e de B.

A soma de duas matrizes A = (a_{ij})mxn e B = (b_{ij})mxn é a matriz C = (c_{ij})mxn, em que:

- $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Com:

- $1 \leq i \leq m$ (linhas); e
- $1 \leq j \leq n$ (colunas).

Exemplo de soma de matrizes

- A + B = C.
- A e B são matrizes de mesma ordem: 3x2.
- c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}.
- c_{11}=a_{11}+b_{11}.
- c_{12}=a_{12}+b_{12}.
- c_{21}=a_{21}+b_{12}.

E, assim por diante, até o último elemento:

- c_{32}=a_{32}+b_{32}.

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -5 \\ 0 & 8 \\ 27{,}5 & 10 \end{pmatrix}_{3x2}$$

$$B = \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 37 & 0 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}_{3x2}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 12 + (-8) & (-5) + 2 \\ 0 + 37 & 8 + 0 \\ 27{,}5 + 1 & 10 + (-9) \end{pmatrix}_{3x2}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 37 & 8 \\ 28{,}5 & 1 \end{pmatrix}_{3x2}$$

Fonte: autoria própria.

Soma de matrizes – Atenção!

Matrizes de ordens diferentes não podem ser somadas!

- c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}

Caso A + B:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -5 \\ 0 & 8 \\ 27{,}5 & 10 \end{pmatrix}_{3x2} \quad B = \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 37 & 0 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Fonte: autoria própria.

- Na matriz B não existem os elementos b_{31} e b_{32} para serem somados com os elementos a_{31} e a_{32} da matriz A.

Caso C + D:

$$C = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 5 \\ 37 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{2x3} \quad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 12 & -5 & 8 \\ 0 & 8 & 4 \\ 27{,}5 & 10 & 2 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Fonte: autoria própria.

- Na matriz C não existem os elementos c_{31}, c_{32} e c_{33} para serem somados com os elementos d_{31}, d_{32} e d_{33} da matriz D.

Multiplicação de matriz por escalar

- Um escalar, no sentido aqui utilizado, é um valor numérico.

Se A é uma matriz de ordem mxn e *k* é um escalar, então a matriz D = *k*.A é uma matriz de ordem mxn, em que cada elemento é o resultado da multiplicação do número *k* por cada elemento de A:

- $d_{ij} = k.a_{ij}$.

Com:

- $1 \leq i \leq m$ (linhas); e
- $1 \leq j \leq n$ (colunas).

Exemplo de multiplicação de matriz por escalar

- D = k.A

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -5 \\ 0 & 8 \\ 27{,}5 & 10 \end{pmatrix}_{3x2} \quad k = 5$$

Fonte: autoria própria.

- $d_{ij} = k \cdot a_{ij}$.
- $d_{11} = 5 \cdot a_{11}$.
- $d_{12} = 5 \cdot a_{12}$.

- E, assim por diante, até o último elemento de A.
- $d_{33} = 5 \cdot a_{33}$.

$$D = k \cdot A = 5 \cdot \begin{pmatrix} 12 & -5 \\ 0 & 8 \\ 27{,}5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 12 & 5 \cdot (-5) \\ 5 \cdot 0 & 5 \cdot 8 \\ 5 \cdot 27{,}5 & 5 \cdot 10 \end{pmatrix}_{3x2}$$

$$D = \begin{pmatrix} 60 & -25 \\ 0 & 40 \\ 137{,}5 & 50 \end{pmatrix}_{3x2}$$

Fonte: autoria própria.

Exemplo de soma de matrizes que foram multiplicadas por escalares

$$P = 8 \cdot M - 2 \cdot N$$

$$M = \begin{pmatrix} -7 & 23 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$N = \begin{pmatrix} 100 & 10 \\ -0{,}1 & -5 \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$\boxed{P = 8 \cdot M - 2 \cdot N = 8 \cdot \begin{pmatrix} -7 & 23 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 100 & 10 \\ -0{,}1 & -5 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 8 \cdot (-7) & 8 \cdot 23 \\ 8 \cdot 12 & 8 \cdot 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (-2) \cdot 100 & (-2) \cdot 10 \\ (-2) \cdot (-0{,}1) & (-2) \cdot (-5) \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} -56 & 184 \\ 96 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -200 & -20 \\ 0{,}2 & 10 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} -56 + (-200) & 184 + (-20) \\ 96 + 0{,}2 & 0 + 10 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{P = 8 \cdot M - 2 \cdot N = \begin{pmatrix} -256 & 164 \\ 96{,}2 & 10 \end{pmatrix}}$$

Fonte: autoria própria.

Multiplicação de matrizes

Somente podemos fazer a multiplicação de duas matrizes A e B, caso a quantidade de colunas da matriz A seja igual à quantidade de linhas da matriz B:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} A & \cdot & B \\ (m \times p) & & (p \times n) \end{array}}$$

Fonte: autoria própria.

Se essa condição for atendida, o resultado obtido é uma matriz C, que tem a mesma quantidade de linhas da matriz A e a mesma quantidade de colunas da matriz B:

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} A & \cdot & B & = & C \\ (m \times p) & & (p \times n) & & (m \times n) \end{array}}$$

Fonte: autoria própria.

Os elementos da matriz C são dados por:

- $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} . b_{jk} = a_{i1} . b_{1k} + \cdots + a_{in} . b_{nk}$

Exemplo de multiplicação de matrizes

- $T = R{\cdot}S$.

$$R = \begin{pmatrix} 12 & -7 & 3 \\ 50 & 10 & 2 \end{pmatrix}_{2x3} \qquad S = \begin{pmatrix} 25 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}_{3x1}$$

$$\boxed{\underset{(m \times p)}{A} \cdot \underset{(p \times n)}{B} = \underset{(m \times n)}{C}}$$

Fonte: autoria própria.

- A multiplicação é possível, pois R tem 3 colunas e S tem 3 linhas, ou seja, o número de linhas de S é o número de colunas de R.
- Mas não é possível fazer $U = S{\cdot}R$, pois S tem 1 coluna e R tem 2 linhas, ou seja, o número de linhas de R não é o número de colunas de S.

$$S = \begin{pmatrix} 25 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}_{3x1} \qquad R = \begin{pmatrix} 12 & -7 & 3 \\ 50 & 10 & 2 \end{pmatrix}_{2x3}$$

Fonte: autoria própria.

Exemplo de multiplicação de matrizes

- $T = R{\cdot}S$.

$$R = \begin{pmatrix} 12 & -7 & 3 \\ 50 & 10 & 2 \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$T = R \cdot S = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} \cdot s_{11} + r_{12} \cdot s_{21} + r_{13} \cdot s_{31} \\ r_{21} \cdot s_{11} + r_{22} \cdot s_{21} + r_{23} \cdot s_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 25 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}_{3x1}$$

$$T = R \cdot S = \begin{pmatrix} 12 & -7 & 3 \\ 50 & 10 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \cdot 25 + (-7) \cdot (-8) + 2 \cdot 6 \\ 50 \cdot 25 + 10 \cdot (-8) + 2 \cdot 6 \end{pmatrix}$$

$$\underset{(2 \times 3)}{\mathrm{R}} \cdot \underset{(3 \times 1)}{\mathrm{S}} = \underset{(2 \times 1)}{\mathrm{T}}$$

Fonte: autoria própria.

$$T = \begin{pmatrix} 374 \\ 1182 \end{pmatrix}_{2x1}$$

Matriz inversa

A matriz inversa da matriz quadrada A, indicada por A^{-1}, é calculada por meio da seguinte igualdade:

- $A \cdot A^{-1} = I$.
- I é a matriz identidade.
- As matrizes quadradas A, A^{-1} e I têm a mesma ordem mxm.

Vale destacar que:

- Nem toda matriz tem matriz inversa;
- Somente matrizes quadradas podem ter matrizes inversas;
- A matriz inversa I^{-1} da matriz identidade I é a própria matriz identidade;
- A inversa da inversa da matriz A é a própria matriz A.

Exemplo de matriz inversa

- $A \cdot A^{-1} = I$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{I = A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-0,5} & \mathbf{0,5} \\ \mathbf{-0,5} & \mathbf{0,25} & \mathbf{0,25} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{I = A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2.\mathbf{0} + 0.(\mathbf{-0,5}) + 1.\mathbf{1} & 2.(\mathbf{-0,5}) + 0.\mathbf{0,25} + 1.\mathbf{1} & 2.\mathbf{0,5} + 0.\mathbf{0,25} + 1.(\mathbf{-1}) \\ 1.0 + 2.(-0{,}5) + 1.1 & 1.(-0{,}5) + 2.0{,}25 + 1.1 & 1.0{,}5 + 2.0{,}25 + 1.(-1) \\ 3.0 + 2.(-0{,}5) + 1.1 & 3.(-0{,}5) + 2.0{,}25 + 1.1 & 3.0{,}5 + 2.0{,}25 + 1.(-1) \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{I = A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 + 0 + 1 & -1 + 0 + 1 & 1 + 0 - 1 \\ 0 - 1 + 1 & -0{,}5 + 0{,}5 + 1 & 0{,}5 + 0{,}5 - 1 \\ 0 - 1 + 1 & -1{,}5 + 0{,}5 + 1 & 1{,}5 + 0{,}5 - 1 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{I = A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Fonte: autoria própria.

Interatividade

Está correto o que se afirma em:

a) As matrizes de ordens diferentes podem ser somadas.
b) As matrizes quadradas não podem ser multiplicadas por um escalar.
c) A inversa de uma matriz não pode ser quadrada.
d) Na multiplicação de duas matrizes A e B, a quantidade de colunas da matriz A deve ser diferente da quantidade de linhas da matriz B.
e) A matriz identidade é obtida pela multiplicação de uma matriz pela sua inversa.

Resposta

Está correto o que se afirma em:

a) As matrizes de ordens diferentes podem ser somadas.
b) As matrizes quadradas não podem ser multiplicadas por um escalar.
c) A inversa de uma matriz não pode ser quadrada.
d) Na multiplicação de duas matrizes A e B, a quantidade de colunas da matriz A deve ser diferente da quantidade de linhas da matriz B.
e) A matriz identidade é obtida pela multiplicação de uma matriz pela sua inversa.

Determinante de uma matriz quadrada

- O determinante de uma matriz quadrada é um número que pode ser usado para acharmos a solução de um sistema de equações lineares.

Matrizes 1x1, o determinante é o seu único elemento:

$$A = (a_{11}) \Longrightarrow det\, A = a_{11} \qquad B = (93) \qquad \det B = |93|$$

$$B = (93)$$

Matrizes 2x2, o determinante é obtido pelo resultado da multiplicação dos elementos da diagonal principal subtraído do resultado da multiplicação dos elementos da diagonal secundária:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Longrightarrow det\, A = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix}$$

Fonte: autoria própria.

$$\det C = \begin{vmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{vmatrix} = 10.40 - 20.30 = 400 - 600 = -200$$

Determinante de uma matriz quadrada

- Matrizes 3x3, o determinante é obtido pela aplicação da regra de Sarrus.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Fonte: autoria própria.

Regra de Sarrus

Copiar os elementos da primeira e da segunda colunas ao lado da terceira coluna:

$$D = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{matrix}$$

Fonte: autoria própria.

Regra de Sarrus

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{array}$$

Fonte: autoria própria.

Multiplicar os 3 elementos das 3 diagonais para a direita e somar os resultados:

- 1.5.9+2.6.7+3.4.8.

Repetir para as 3 diagonais para a esquerda e subtrair do resultado anterior:

- (1.5.9+2.6.7+3.4.8) – (3.5.7+1.6.8+2.4.7).
- O determinante é o resultado dessa operação.
  - det D = (45+84+96)-(105+48+72).
  - det D = 225 – 225.
  - det D = 0.

Resumo da regra de Sarrus

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det A = (a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32}) - (a_{13}.a_{22}.a_{31} + a_{11}.a_{23}.a_{32} + a_{12}.a_{21}.a_{33})$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Fonte: autoria própria.

Sistemas lineares

Equação linear tem a forma:

- $a_1\ x_1 + a_2\ x_2 + \cdots + a_n\ x_n = b$.

- Coeficientes: $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
- Incógnitas: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- Termo independente: b.

- $2x_1 = 16$ ($x_1 = 8$).
- $3x_1 + 7x_2 = 58$ ($x1 = -4$ e $x_2 = 10$).

Sistemas lineares

Sistema linear de *m* equações e *n* incógnitas:

- $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- Solução do sistema linear é um conjunto de números que satisfaz todas as equações.

Sistemas lineares

Exemplo:

- $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 6 \\ x_1 + 5x_2 = 22 \end{cases}$

Solução do sistema:

- $x_1 = 7$
- $x_2 = 3$
- $\begin{cases} 3.7 - 5.3 = 21 - 15 = 6 \\ 7 + 5.3 = 7 + 15 = 22 \end{cases}$

Como determinar a solução do sistema?

Dois métodos:

- Substituição e adição.

Método da substituição

- $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 6 & \text{(I)} \\ x_1 + 5x_2 = 22 & \text{(II)} \end{cases}$
- (II) $x_1 = 22 - 5x_2$
- (I) $3(22 - 5x_2) - 5x_2 = 6$
- (I) $66 - 15x_2 - 5x_2 = 6$
- (I) $66 - 20x_2 = 6$
- (I) $-20x_2 = 6 - 66$
- (I) $-20x_2 = -60$

- (I) $x_2 = 3$
- (II) $x_1 = 22 - 5.3 = 22 - 15$
- (II) $x_1 = 7$

Método da adição

- $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 6 & \text{(I)} \\ x_1 + 5x_2 = 22 & \text{(II)} \end{cases}$

- $$\begin{array}{rc} 3x_1 - 5x_2 = 6 & \text{(I)} \\ -3x_1 - 15x_2 = -66 & (3.\text{II}) \\ \hline -20x_2 = -60 & \text{(I)} + (3.\text{II}) \end{array}$$

- $x_2 = 3$

  - (II) $x_1 + 5.3 = 22$
  - $x_1 = 22 - 15$
  - $x_1 = 7$

Classificação dos sistemas lineares

Possível ou compatível:

- Admite uma solução.

Possível e determinado:

- Admite uma única solução.
- $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 6 \\ x_1 + 5x_2 = 22 \end{cases}$
- $x_1 = 7, x_2 = 3$

Possível e indeterminado:

- Admite infinitas soluções.
- $\begin{cases} x_1 + x_2 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 = 36 \end{cases}$

Impossível ou incompatível:

- Não admite uma solução.
- $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 + x_2 = 10 \end{cases}$

Interatividade

Está **incorreto** o que se afirma em:

a) Em uma matriz 1x1, o determinante é o seu único elemento.
b) Em matrizes 3x3, o determinante é obtido pela aplicação da regra de Sarrus.
c) A solução de um sistema linear é o conjunto de números que satisfaz todas as equações.
d) Substituição e adição são métodos de solução de sistemas lineares.
e) Um sistema linear possível e determinado admite infinitas soluções.

Resposta

Está **incorreto** o que se afirma em:

a) Em uma matriz 1x1, o determinante é o seu único elemento.
b) Em matrizes 3x3, o determinante é obtido pela aplicação da regra de Sarrus.
c) A solução de um sistema linear é o conjunto de números que satisfaz todas as equações.
d) Substituição e adição são métodos de solução de sistemas lineares.
e) Um sistema linear possível e determinado admite infinitas soluções.

Expressão matricial de um sistema linear

Um sistema linear pode ser representado com o uso de matrizes:

- $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Fonte: autoria própria.

- Matriz é construída pelos coeficientes das incógnitas;
- Matriz coluna construída pelas incógnitas;
- Matriz coluna construída pelos termos independentes.

Expressão matricial de um sistema linear

- $$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 6 \\ 2x_1 + 10x_2 = 44 \end{cases}$$

Fonte: autoria própria.

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 44 \end{pmatrix}$$

Resolução de sistemas lineares pela regra de Cramer

- A regra de Cramer é um método usado na resolução de sistemas lineares que utiliza o cálculo de determinantes.

- Essa regra pode ser usada no caso de um sistema linear ter o número de equações igual ao número de incógnitas.

- O determinante tem que ser diferente de zero.

Resolução de sistemas lineares pela regra de Cramer

- $\begin{cases} a_{11}x_1 - a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 - a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$

Matriz dos coeficientes das incógnitas x_1 e x_2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Matriz dos coeficientes com a substituição dos coeficientes de x_1 pelos termos independentes b_1 e b_2:

$$A_{x_1} = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}$$

Matriz dos coeficientes com a substituição dos coeficientes de x_1 pelos termos independentes b_1 e b_2:

$$A_{x_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$$

Fonte: autoria própria.

Resolução de sistemas lineares pela regra de Cramer

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad A_{x_1} = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \quad A_{x_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$$

Os componentes da solução do sistema são calculados por:

$$x_1 = \frac{\det A_{x_1}}{\det A}$$

Fonte: autoria própria.

$$x_2 = \frac{\det A_{x_2}}{\det A}$$

Resolução de sistemas lineares pela regra de Cramer 3x3

Matriz dos coeficientes a:

Fonte: autoria própria.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

As matrizes com substituição dos coeficientes de x pelos termos independentes:

$$A_{x_1} = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A_{x_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A_{x_3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$$

E os componentes da solução do sistema:

$$x_1 = \frac{\det A_{x_1}}{\det A} \qquad x_2 = \frac{\det A_{x_2}}{\det A} \qquad x_3 = \frac{\det A_{x_3}}{\det A}$$

Resolução de sistemas lineares pelo método do escalonamento

- No método do escalonamento (ou método de Gauss), convertemos a matriz associada a determinado sistema linear de *n* equações a *n* incógnitas em uma matriz escalonada.

Aplicação de uma série de operações algébricas que não alteram a solução do sistema:

- Somar os elementos de duas linhas da matriz;
- Multiplicar os elementos de uma linha da matriz por um número real diferente de zero;
- Somar os múltiplos dos elementos de uma linha com elementos de outra linha da matriz;
- Trocar posições de linhas da matriz.

Resolução de sistemas lineares pelo método do escalonamento

Objetivo do escalonamento:

Chegar a sistemas que facilitem os cálculos das incógnitas:

$$\begin{cases} 1x_1 + k_1x_2 = k_2 \\ 0x_1 + 1x_2 = k_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x_1 + k_1x_2 + k_2x_3 = k_3 \\ 0x_1 + 1x_2 + k_4x_3 = k_5 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = k_6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x_1 + k_1x_2 + k_2x_3 + k_3x_4 = k_4 \\ 0x_1 + 1x_2 + k_5x_3 + k_6x_4 = k_7 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + k_8x_4 = k_9 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 = k_{10} \end{cases}$$

Fonte: autoria própria.

Exemplo de escalonamento

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 1x_3 = -20 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 49 \\ -5x_1 + 10x_2 - 2x_3 = -77 \end{cases}$$

Com os coeficientes e com os termos independentes desse sistema, podemos elaborar a matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & -20 \\ 3 & -2 & 5 & 49 \\ -5 & 10 & -2 & -77 \end{pmatrix}$$

Fonte: autoria própria.

Exemplo de escalonamento - 1

Multiplicamos todos os elementos da 1ª linha por ½, a fim de ficarmos com o elemento da 1ª linha e da 1ª coluna (a_{11}) igual a 1:

$$\begin{pmatrix} 2.\frac{1}{2} & 4.\frac{1}{2} & -1.\frac{1}{2} & -20.\frac{1}{2} \\ 3 & -2 & 5 & 49 \\ -5 & 10 & -2 & -77 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1/2 & -10 \\ 3 & -2 & 5 & 49 \\ -5 & 10 & -2 & -77 \end{pmatrix}$$

Fonte: autoria própria.

Exemplo de escalonamento - 2

Multiplicamos todos os elementos da 1ª linha por -3 e somamos com os elementos da 2ª linha, a fim de ficarmos com o elemento da 2ª linha e 1ª (a_{21}) coluna igual a 0:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1/2 & -10 \\ -3+3 & -6-2 & 3/2+5 & 30+49 \\ -5 & 10 & -2 & -77 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1/2 & -10 \\ 0 & -8 & 13/2 & 79 \\ -5 & 10 & -2 & -77 \end{pmatrix}$$

Fonte: autoria própria.

Exemplo de escalonamento - 7

Agora, com base na última matriz, podemos calcular o valor das incógnitas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} & -10 \\ 0 & 1 & -\frac{13}{16} & -\frac{79}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 1x_1 + 2x_2 - \dfrac{1}{2}x_3 = -10 \\ 0x_1 + 1x_2 - \dfrac{13}{16}x_3 = -\dfrac{79}{8} \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 6 \end{cases}$$

Fonte: autoria própria.

- $x_3 = 6$, determinamos o valor de x_2 pela 2ª equação.
- $x_2 = -5$ e $x_3 = 6$, determinamos o valor de x_1 pela 1ª equação.

A solução do sistema de equações:

- $(x_1, x_2, x_3) = (3, -5, 6)$.

Testando a solução

- (x_1, x_2, x_3)=(3,−5,6).

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 1x_3 = -20 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 49 \\ -5x_1 + 10x_2 - 2x_3 = -77 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2.3 + 4.(-5) - 1.6 = 6 - 20 - 6 = -20 \\ 3.3 - 2.(-5) + 5.6 = 9 + 10 + 30 = 49 \\ -5.3 + 10.(-5) - 2.6 = -15 - 50 - 12 = -77 \end{cases}$$

Fonte: autoria própria.

Interatividade

Assinale a alternativa verdadeira sobre o método de Gauss:

a) Utiliza o cálculo de determinantes.
b) Aplica uma série de operações algébricas que não alteram a solução do sistema.
c) Usa a regra de Sarrus.
d) Não é um método de escalonamento.
e) Não serve para as matrizes.

Resposta

Assinale a alternativa verdadeira sobre o método de Gauss:

a) Utiliza o cálculo de determinantes.
b) Aplica uma série de operações algébricas que não alteram a solução do sistema.
c) Usa a regra de Sarrus.
d) Não é um método de escalonamento.
e) Não serve para as matrizes.

Referências

- HILL, D. R.; KOLMAN, B. *Introdução à Álgebra Linear com Aplicações*. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora, 2006.

- HOLT, J. *Álgebra Linear com Aplicações*. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora, 2016.

ATÉ A PRÓXIMA!