某些类型链环投影图解纽数

郑权

2021-06-05

研究背景

研究内容

国内外研究现状

研究成果

总结

参考资料

1. 通俗地说，纽结理论就是要研究三维空间中的绳圈。

"十二五"国家重点图书出版规划项目

走向数学丛书

SCIENCE & HUMANITIES

绳圈的数学

MATHEMATICS OF STRING FIGURES

著 姜伯驹

2. 用数学的语言来说，纽结（knot）就是 $\mathbb{R}^3$ 中的简单闭曲线，链环（link）是 $\mathbb{R}^3$ 中有限多条简单闭曲线的无交并
   2.1 构成链环的每一条简单闭曲线称为该链环的一个分支
   2.2 可以把纽结看作只有一个分支的链环
   2.3 平面上的没有交叉点的简单闭曲线称为平凡纽结（unknot）
3. 链环 K 用投影图来表示，投影图中的交叉点数记作 $c(K)$

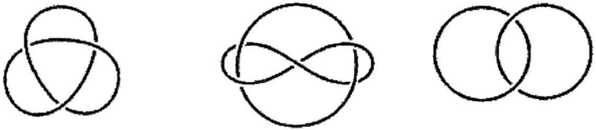
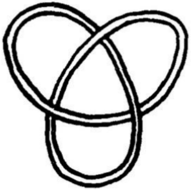


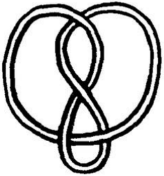
图 1.1 左手三叶结（左）、8字结（中）、$Hopf$链环（右）

4. 纽结理论的中心问题是对纽结进行分类（up to homeomorphism）



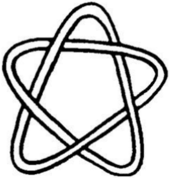
3_1

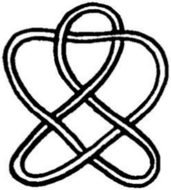
$-1+1+0+1+\underline{0}$



4_1

$1-1+\underline{1}-1+1$





5. 如何分类？使用各种纽结不变量
    5.1 交叉点数
    5.2 bridge 数
    5.3 环绕数
    5.4 解纽数
    5.5 各种纽结多项式
        5.5.1 亚历山大多项式
        5.5.2 琼斯多项式
        5.5.3 括号多项式
        5.5.4 HOMFLY 多项式
    5.6 ...
6. 研究意义
    6.1 纽结应用在分子生物学上，有助于阐明 DNA 双螺旋结构、蛋白质的结构与功能等重大课题
    6.2 量子混沌方面，1984 年以来 Birman 等人应用纽结理论深入揭示了 Lorenz 吸引子的拓扑结构
    6.3 2016 年获得诺贝尔物理学奖的三位教授把拓扑和凝聚态物理结合起来，发现了物质的拓扑相变和拓扑相
    6.4 ...

1. 纽结或链环的解纽数（unknotting number)

   1.1 把一个链环 K 变换成平凡链环时所改变的交叉点的最小数，一般记作 $u(K)$

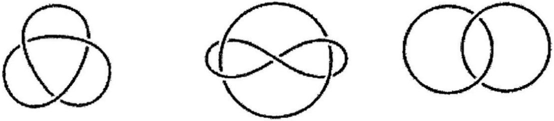


图 1.1 左手三叶结（左)、8字结（中)、$Hopf$链环（右）

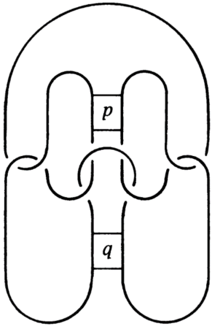
上图中，左手三叶结的解纽数是 1,8 字结的解纽数是 2，Hopf 链环的解纽数是 1.

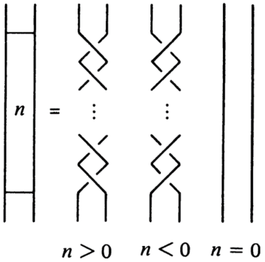
2. 交错链环 如果链环的“线”在一个交叉点在下，而在任何相邻的交叉点都在上，或者反过来，那就称它为交错链环（alternating link)。下面左手三叶结是一个交错纽结：

例如下面这个链环不是交错纽结：

论文的结果依赖于交错链环是非平凡的这一性质

3. Kanenobu 纽结 由日本数学家 Kanenobu 在 1986 年在 [9] 中提出的一族具有相同琼斯多项式的纽结





1. 1991 年 S.Fukuhara、Y. Matsumoto、O. Saeki 给出了一些类型 torus 纽结的解纽数的证明 [1] 对于 $(p, q) = (2, q), (3, 4), (3, 5), (3, 7), (3, 8), (3, 10), (4, 5)$，有 $u(T(p, q)) = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$
2. 2004 年，Owens 给出了所有交叉点小于等于 9 的纽结的解纽数.[3]
3. 1984 年，Beiler 给出了一个奇妙的例子：对于一个纽结，它的极小投影图有 10 个交叉点，它不可能用少于

三个交叉点的改变来变成平凡纽结，但它有个 14 个交叉点的投影图，与之同痕，但可以用两个交叉点的改变来变为平凡纽结

4. 2014 年，V. Siwach, P. Madeti 给出了多于 700 种交叉点数在 10-16 的 torus 纽结的解纽数.[4]

1. 求出 Kanenobu 纽结 $K(0,0)$ 的解纽数是 2 ATTACH :ID: cbef0049-b628-4f6d-8671-a3b10a2d8ce7

等于9的纽结的解纽数.[3]

于一个纽结，它的极小投影图有10个交叉点，它不可能用少于三个交叉点的改变来变

出了多于700种交叉点数在10-16的torus纽结的解纽数.[4]

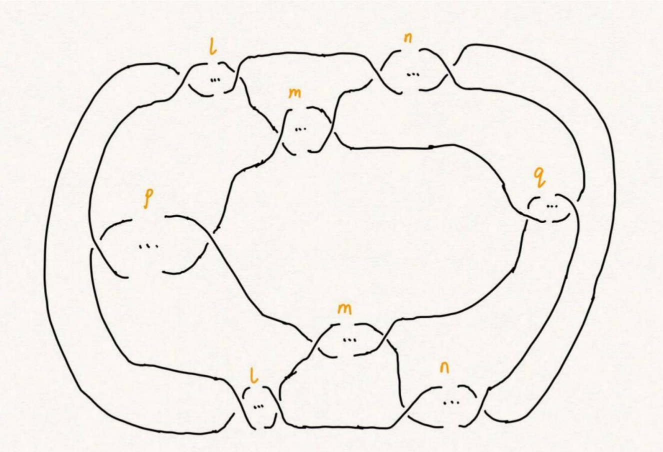
2. 求出了推广的 Kanenobu 纽结 $K(p,q,n)$ 的解纽数是 2，与 p,q,n 无关: MY__ORG__TAG

   2.1 首先说明 $K(p,q,n)$ 是非平凡的，这由参考文献 [8] 里的定理 5 保证： The Khovanov homology for

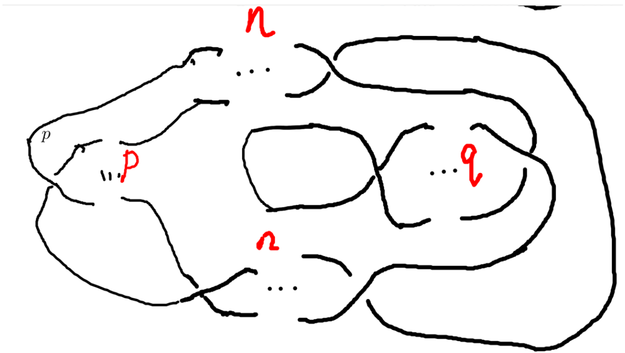
generalized Kanenobu knot:
$Kh(K_{\beta}(p,q)) \cong Kh(K_{\beta}(p+1,q-1))$

2.2 然后说明改变 2 号和 9 号交叉点可以可以使之成为平凡纽结

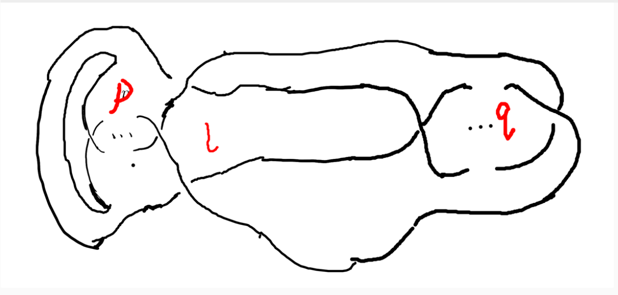
3. 在进一步推广 Kanenobu 纽结 $K(p,q,m,n,l)$ 非平凡的前提下，得到它的解纽数



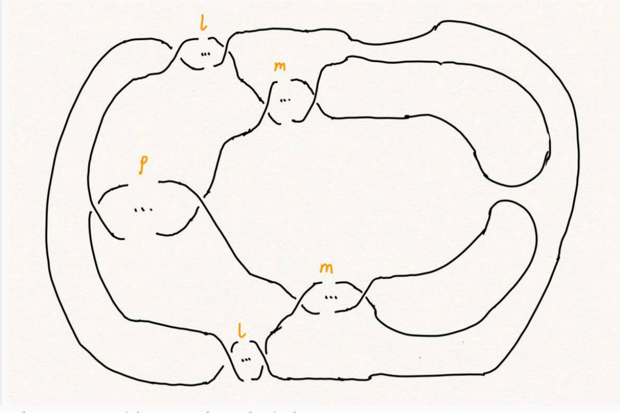
3.1 When $m > n$, after changes the crossing points in the $m$and l part (do this by reducing $[\frac{m+l}{2}]$ crossing points), we get the knot like:



3.2 When $n > m$, after changing the crossing points in n and l part(do this by reducing $[\frac{n+l}{2}]$ crossing numbers), we get the knot like:



3.3 When $q+n<m+l$ and $q+n<n+l$, we would untie the q and n part with $2[\frac{q+n}{2}]$ changes, and get this:



两次推广了 Kanenobu 纽结并给出它的解纽数，但最终的结果依赖于 $K(p,q,m,n,l)$ 的非平凡性。
它的非平凡性直观上看比较显然，但若用琼斯多项式、HOMFLY 同调等工具来证明却非常麻烦，需要进一步研究。

一个两行两列的矩阵 $\frac{1}{2}\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$

表:

0	1
1	0

$f(x)$

1. [1] S.Fukuhara, Y.Matsumoto, O.Saeki, An estimate for the unknotting numbers of torus knots[J], Topology and its Applications, 1991, 38(3): 293-299
2. [2] 姜伯驹，绳圈的数学，湖南教育出版社 [M],1991
3. [3] B. Owens, On slicing invariants of knots[J], Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 2011, 14(01):3-8.

4. [4] V.Siwach, P. Madeti, Unknotting Number of Some Knots[J], Elsevier, 2014
5. [5] V. Siwach, M. Prabhakar, A Method for Unknotting Torus Knots[J], Mathematics, 2012
6. [6] Rolfen, Knots and Links[M], Publish or Perish, 1976
7. [7] W.B. Raymond Lickorish, Introduction to Knot Theory[M], Springer, 1997
8. [8] C.C. Adams, The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots[M], W.H.Freeman and Company, New York, 1994
9. [9] Kanenobu, T., Infinitely Many Knots with the Same Polynomial Invariant, Proceedings of the American Mathematical Society, 97(1), 158–162 (1986)

感谢聆听，请老师批评指正！