ANÁLISIS DE SERIES DE TIEMPO CON R

C. Vladimir Rodríguez Caballero

https://github.com/Vlasmetrics7/BID-HACIENDA-2023

Parte II. Análisis de series temporales

Temario:

Parte II. Análisis de series de tiempo
Modelos básico de series de tiempo.
Estimación.
Metodología Box & Jenkins.
Estimación y pronóstico.

Análisis de series de tiempo estacionarias

La importancia de las series de tiempo

La importancia de las series de tiempo econométricas está constituida por el desarrollo de modelos sutilmente sencillos, capaces de proveer pronósticos, de interpretar datos económicos y de probar hipótesis sobre éstos.

- Los nombres rimbombantes del estilo: AR, MA, ARIMA, ARCH, GARCH, FIGARCH... son modelos estrictamente estadísticos aunque es posible encontrarles una interpretación económica.
- Existen otros modelos (algunos no los cubriremos en este curso) VAR, VECM, ARDL, etc.. que aunque siguen siendo modelos estadísticos, guardan una intrínseca relación con teoría económica.

La importancia del Proceso Generador de Datos

#	Nombre	Modelo
1	$MA(q)$	$y_t = \mu + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q \epsilon_{t-q}$
2	$AR(p)$	$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \ldots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t$
3	$I(0)$	$y_t = \mu + \epsilon_t$
4	$I(0) + br$	$y_t = \mu + \Theta_1 DU_{1,t} + \ldots + \Theta_k DU_{k,t} + \epsilon_t$
5	TS	$y_t = \mu + \beta t + \epsilon_t$
6	$TS + br$	$y_t = \mu + \sum_{i=1}^{K} \Theta_i DU_{i,t} + \beta t + \sum_{i=1}^{K} \gamma_i DT_{i,t} + \epsilon_t$
7	$I(1)$	$\Delta y_t = \epsilon_t$
8	$I(1) + dr$	$\Delta y_t = \mu + \epsilon_t$
9	$I(1) + dr + br$	$\Delta y_t = \mu + \sum_{i=1}^{K} \Theta_i DU_{i,t} + \epsilon_t$
10	$I(k)$	$\Delta^k y_t = \epsilon_t$ para $k = 2, 3, \ldots$
11	$FI(d)$	$(1 - L)^d y_t = \epsilon_t$ para $d \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right)$

Cuadro: Procesos Generadores de Datos: los acrónimos *TS*, *br* y *dr* representan Estacionariedad en tendencia, Rompimientos estructurales y deriva, respectivamente.

La importancia del Proceso Generador de Datos

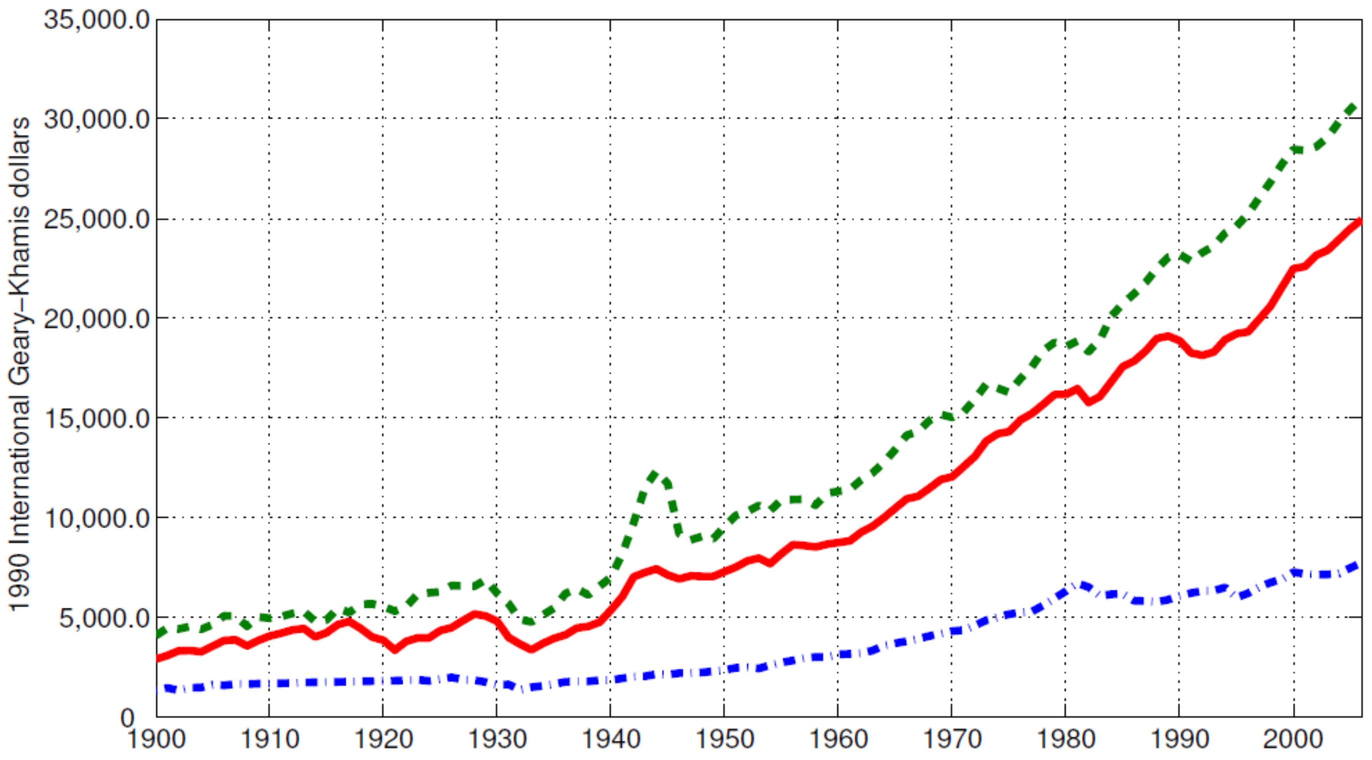
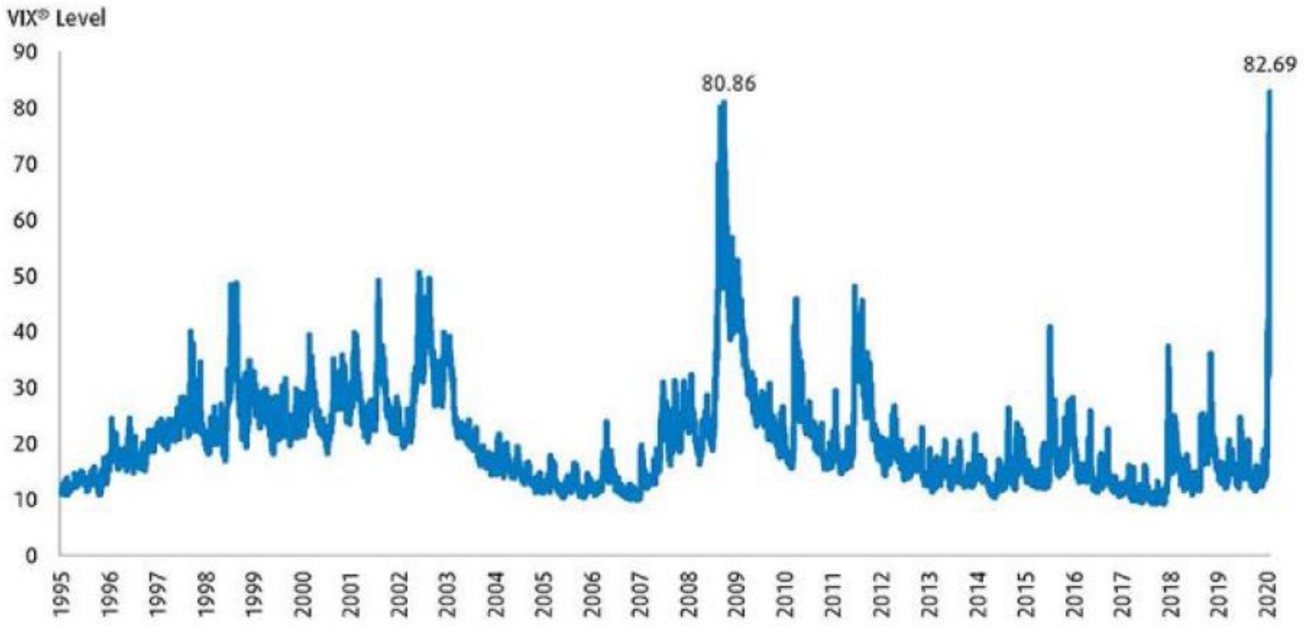


Figura: PIB per capita de México, EEUU y Canadá. Fuente: Maddison.

- Resultaría en extremo importante poder tipificar el comportamiento de largo plazo de cada una de ellas con objeto de ver si nuestro país tiene alguna esperanza de alcanzar a sus vecinos.
- La identificación de rompimientos estructurales (que bien podrían estar asociados a crisis o reformas de gran envergadura) se convierte entonces en una cuestión de gran relevancia.

La importancia del Proceso Generador de Datos

Como Efecto de la pandemia, el índice de volatilidad CBOE ha alcanzado su máximo histórico.



- ¿Cuáles serán los efectos de la pandemia sobre los mercados financieros internacionales?
- ¿Es posible pronosticar estos picos de alta volatilidad?

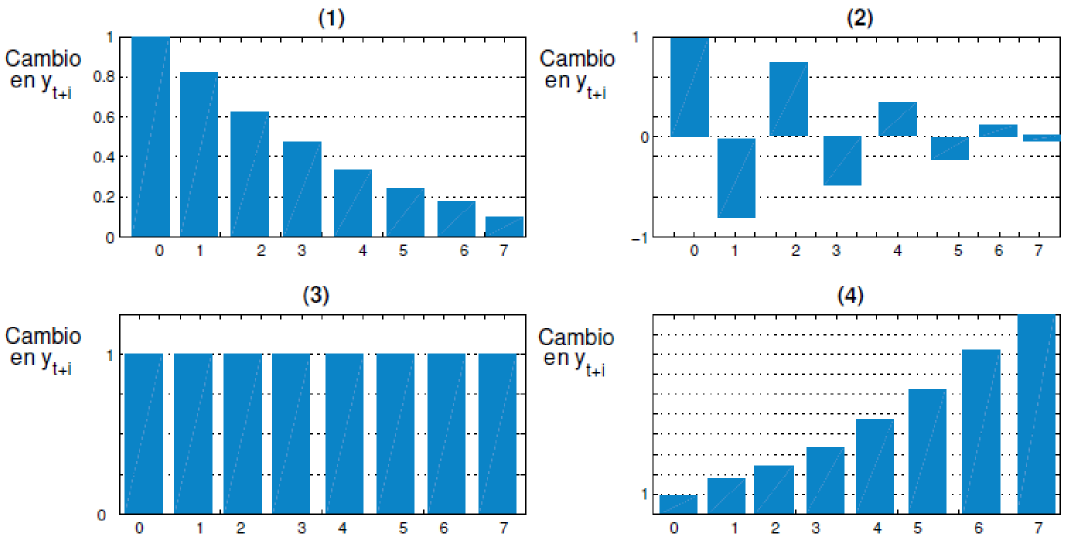
Conceptos sencillos

El concepto del impacto en una serie temporal

$$y_t = \phi y_{t-1} + a_t,$$

Existen cuatro posibles dinámicas siguiendo este ejemplo:

1. $0 < \phi < 1$. Efecto cuyo impacto disminuye exponencialmente. **Memoria corta.**
2. $-1 < \phi < 0$. Efecto cuyo impacto disminuye exponencialmente. **Memoria corta.**
3. $\phi = 1$. Efecto cuyo impacto no decrece. **Memoria infinita.**
4. $|\phi| > 1$. Efecto cuyo impacto aumenta exponencialmente. **Memoria explosiva.**



Multiplicador Dinámico para distintos valores de ϕ: (1) $0 < \phi < 1$; (2) $-1 < \phi < 0$; (3) $\phi = 1$; (4) $\phi > 1$

El concepto de una serie de tiempo

Imaginemos por un momento que diariamente observamos el tipo de cambio del peso mexicano contra el dólar estadounidense. Tal vez estemos interesados en cambiar unas remesas. ¿Cuándo las cambiaríamos?

- Para sintetizar, supongamos que estamos observando el tipo de cambio del peso mexicano (MXN) frente al dólar norteamericano (USD) a lo largo de todo el 2018.

- El conjunto de observaciones es nuestra famosa **serie de tiempo**.

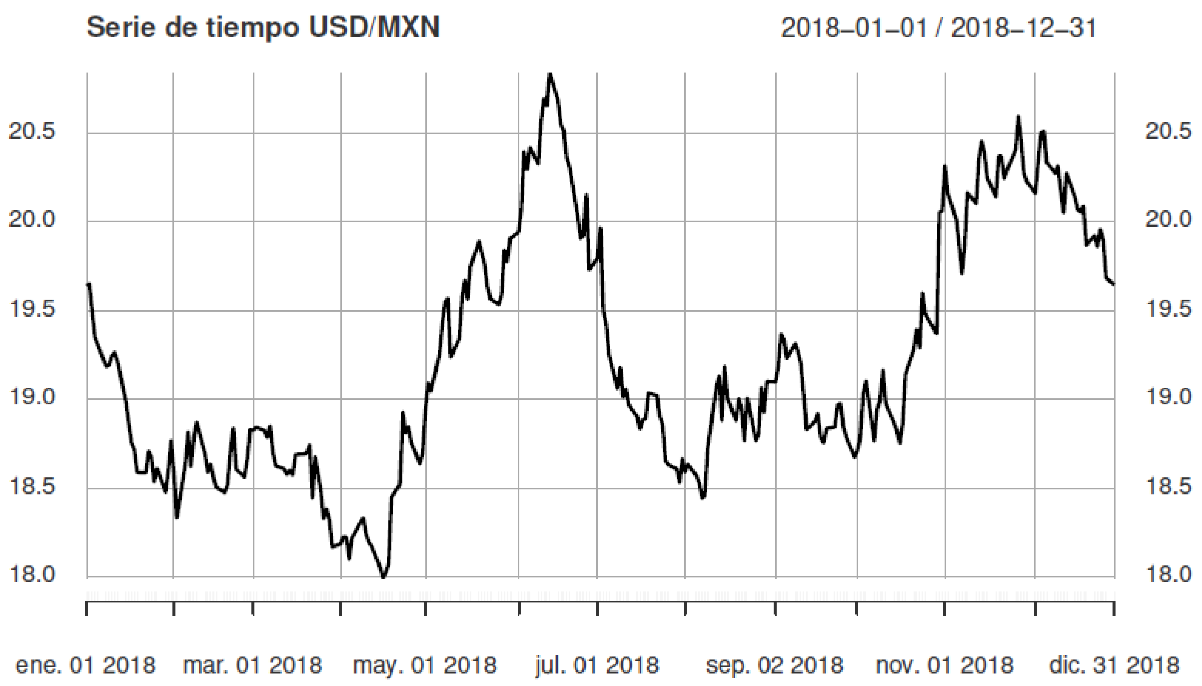


Figura: Paridad cambiaria USD/MXN.

El concepto de una serie de tiempo

Unos sencillos ejemplos de series de tiempo pueden ser:

1. Un proceso constante: $y_t = 7$.
2. Una tendencia lineal en el tiempo: $y_t = 2 + 0{,}07\ t$.
3. Un proceso aleatorio, digamos gaussiano: $y_t = \epsilon_t$, donde $\{\epsilon_t\}_{t=1}^{T}$ es una secuencia de variables aleatorias que se distribuyen i.i.d $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

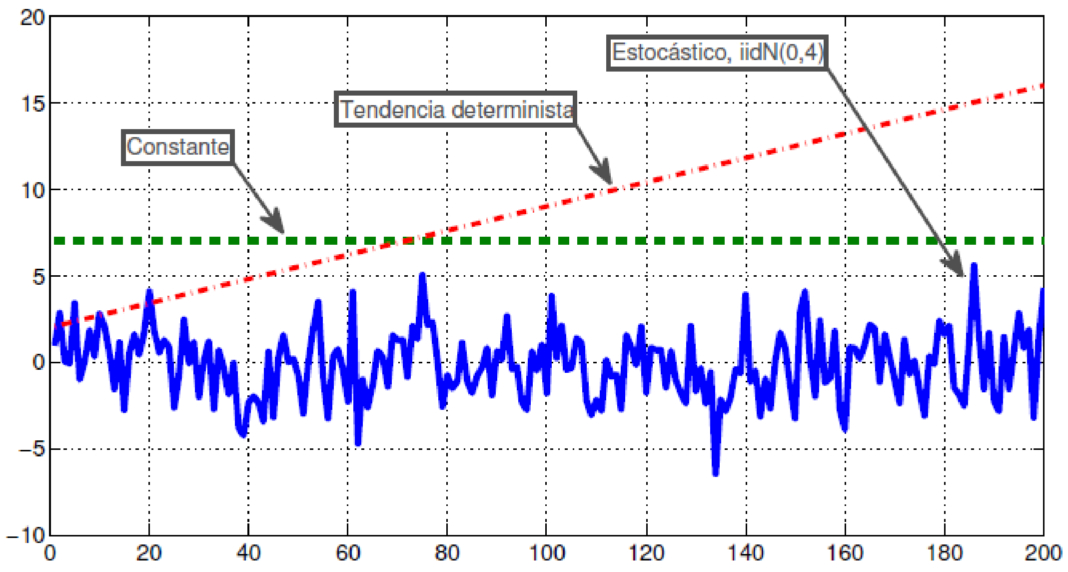


Figura: Series de Tiempo, ejemplos

Un par de operadores

Definición (Operador diferencia)

1. Primera diferencia (Δy_t): $y_t - y_{t-1}$.
2. Segunda diferencia $(\Delta^2 y_t)$:

$$\begin{aligned} \Delta y_t - \Delta y_{t-1} &= (y_t - y_{t-1}) - (y_{t-1} - y_{t-2}) \\ &= y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}. \end{aligned}$$

Definición (Operador rezago)

$$\begin{aligned} L \cdot y_t &= y_{t-1}, \\ L \cdot (L \cdot y_t) &= y_{t-2}, \\ &= L^2 \cdot y_t, \end{aligned}$$

Hechos estilizados y descomposición

Hechos estilizados: Tendencias claras (les llamamos deterministas)

En esta figura podemos observar el Producto Interno Bruto per Cápita de algunos países y el promedio de esos países por sus regiones específicas. Como podemos observar, dichas series de tiempo incluyen una tendencia creciente clara, evidentemente con pendientes muy diferentes unas a otras.

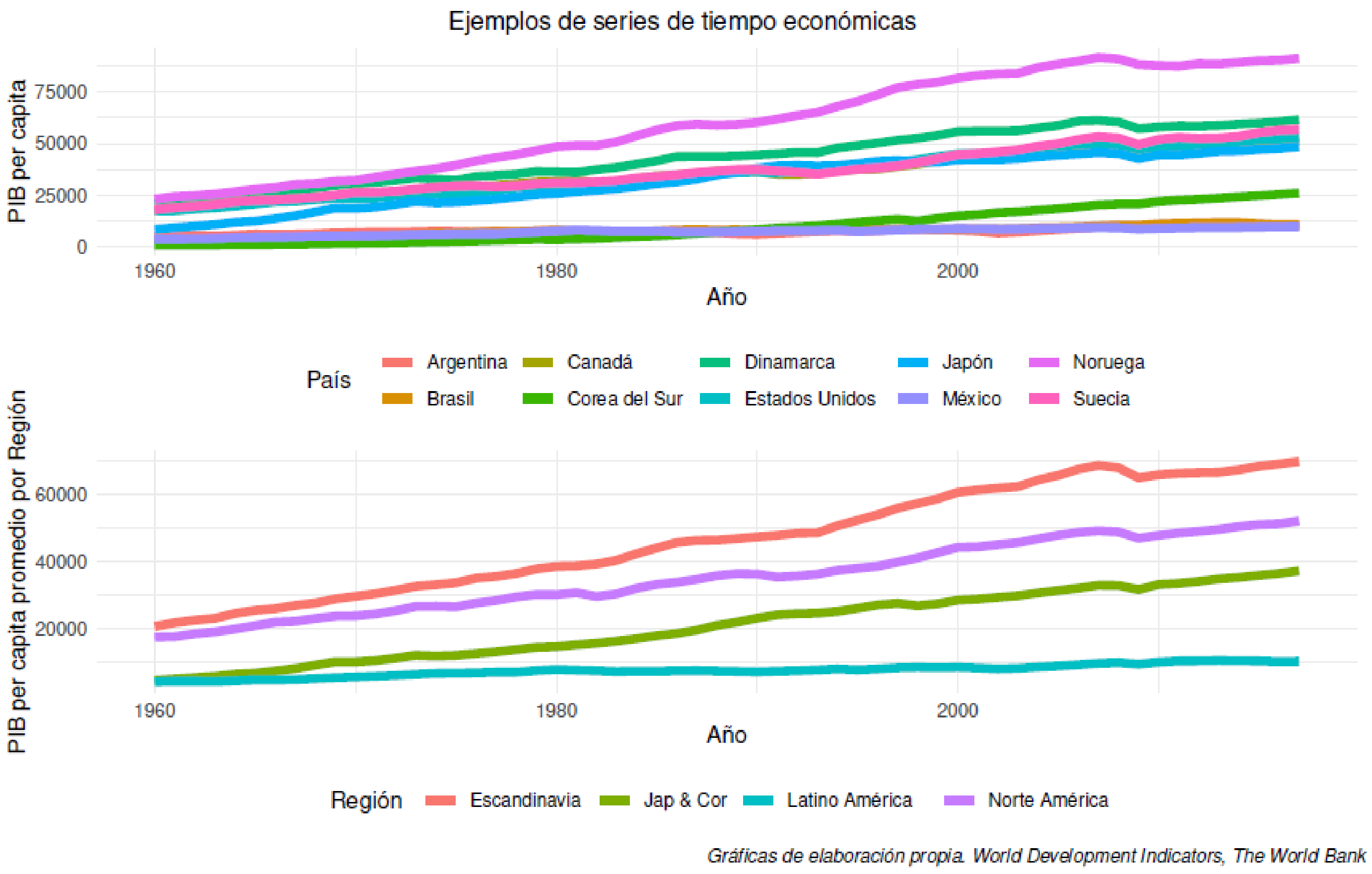


Figura: PIB per Cápita por países y promedio por regiones. (US$ 2010 precios constantes)

Hechos estilizados: Tendencias no claras (les llamamos estocásticas)

Esta figura muestra el comportamiento de un par de índices bursátiles correspondientes a México y Estados Unidos.

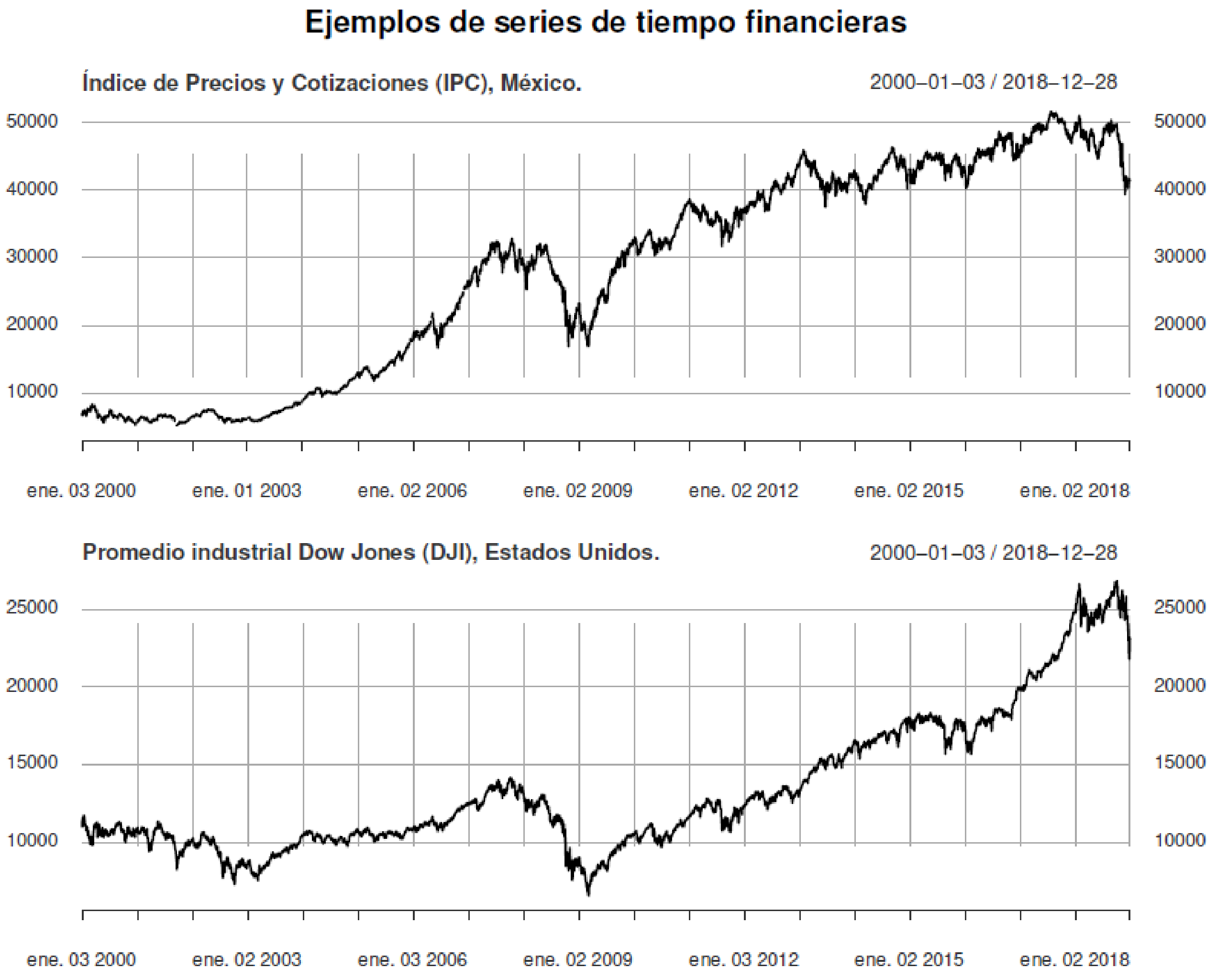


Figura: Índices bursátiles de México y Estados Unidos.

Hechos estilizados: Movimientos bruscos (le llamamos volatilidad)

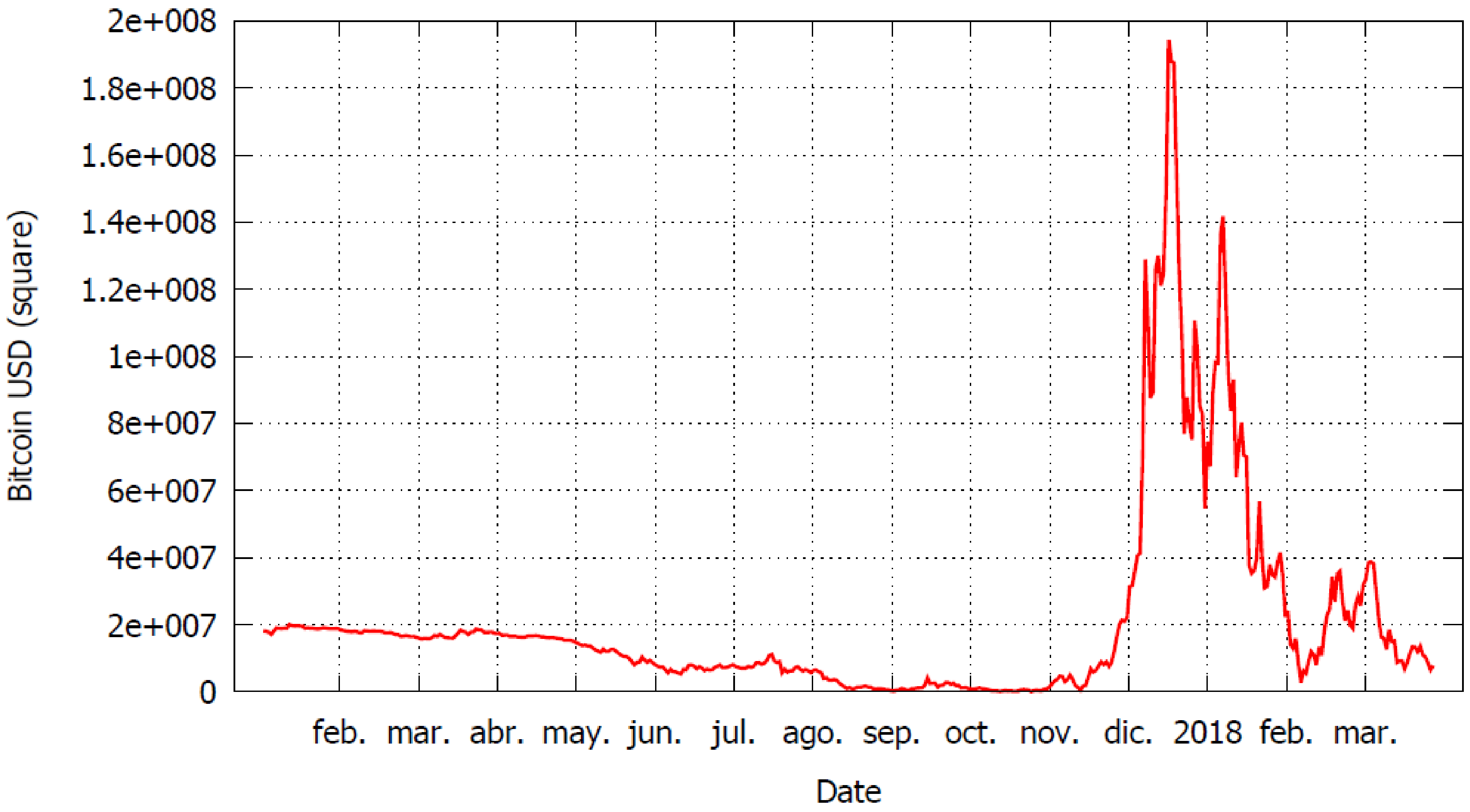
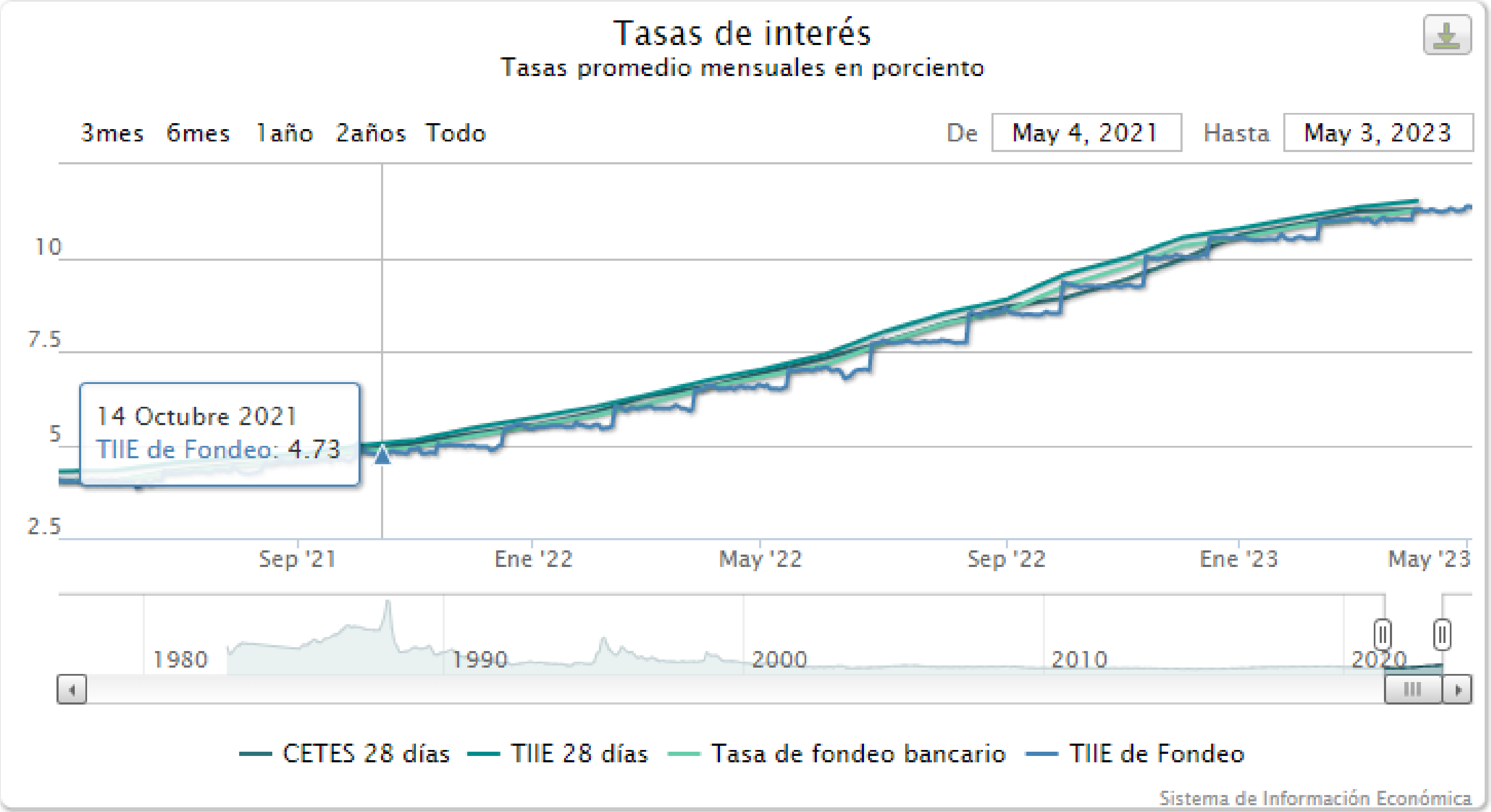


Figura: Precio de cierre de la criptomoneda Bitcoin (centrada y elevada al cuadrado). Fuente: data.world .

Hechos estilizados: Movimientos “compartidos” entre algunas series



Fuente: SIE, Banco de México

Descomposición

Descomposición de una serie de tiempo

Ya hemos discutido cuales son algunos de los hechos estilizados que hallaremos más frecuentemente al analizar series de tiempo en el campo de la economía. Ahora nos atañe otra incógnita: ¿qué características harán que nuestra serie de tiempo tenga cierto tipo de comportamiento y no otro diferente? Es una interrogante interesante y no trivial.

1. Ruido (ϵ_t)
2. Tendencia (μ_t)
3. Estacionalidad (s_t)
4. Ciclicidad (c_t)
   - Describe un componente repetido pero no periódico en la serie temporal

Es así como podemos obtener un modelo bastante general:

$$y_t = \mu_t + s_t + c_t + \epsilon_t,$$

Desestacionalización de una serie de tiempo

¿Por qué será importante?

Serie desestacionalizada

Si una serie de tiempo y_t posee una tendencia μ_t y un componente estacional S_t, y no nos interesa analizar el componente estacional sino solo estudiar la tendencia de la serie, basta con calcular $y_t - \hat{S}_t$ para remover los efectos estacionales y solo quedarnos con la propia tendencia de la serie.

Desestacionalización de una serie de tiempo

Ejemplo: Homicidios

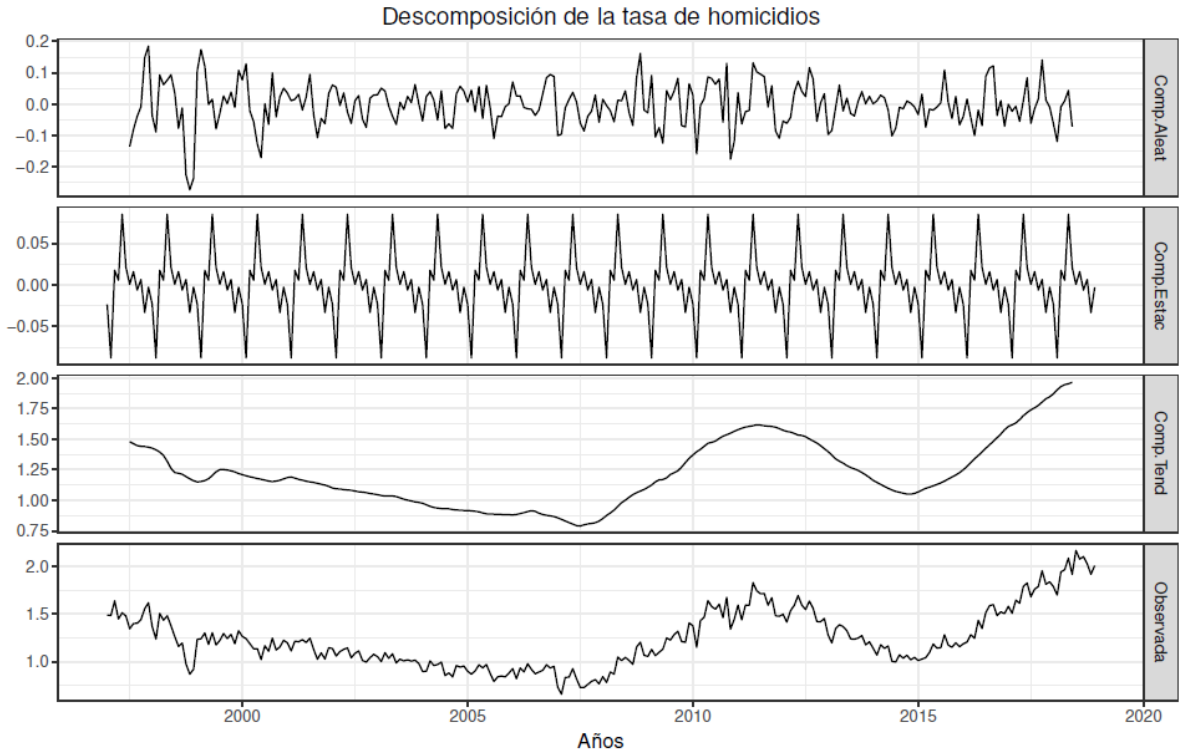


Figura: Tasa de homicidio doloso por cada cien mil habitantes. Información obtenida del Secretariado Ejecutivo del Sistema Nacional de Seguridad Pública y Consejo Nacional de Población. Gráficos de construcción propia.

Códigos a usar:
6. delitos.R
7. descomposición.R

Filtro de Hodrick-Prescott

- Es un filtro lineal que nos sirve para descomponer una serie temporal en
  1. Tendencia
  2. Ciclo
- $y_t = \mu_t + c_t + \epsilon_t$
- El parámetro λ regula el *trade-off* entre las dos fuentes de variabilidad.
  1. Datos anuales: $\lambda = 100$
  2. Datos trimestrales: $\lambda = 1600$
  3. Datos mensuales: $\lambda = 14400$

Códigos a usar:

8. Hodrick-Prescott.R

Modelos estacionarios

Ruido Blanco

- Es una serie, $\{\epsilon_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$, cuyos componentes tienen esperanza cero y varianza constante σ_ϵ^2.
- Se trata de un *ruido*, es decir, que no incluye información útil y podemos interpretar que es *blanco* en el sentido que no resulta perjudicial.

- Notación: $\{\epsilon_t\} \sim RB(0, \sigma^2)$ (en inglés se denota como $\{\epsilon_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$).
- Si las variables aleatorias ϵ_t son independientes, identicamente distribuidas con media cero y varianza σ^2, escribimos $\{\epsilon_t\} \sim iid(0, \sigma^2)$, o bien $\{\epsilon_t\} \overset{iid}{\sim}, \sigma^2)$

Ruido Blanco

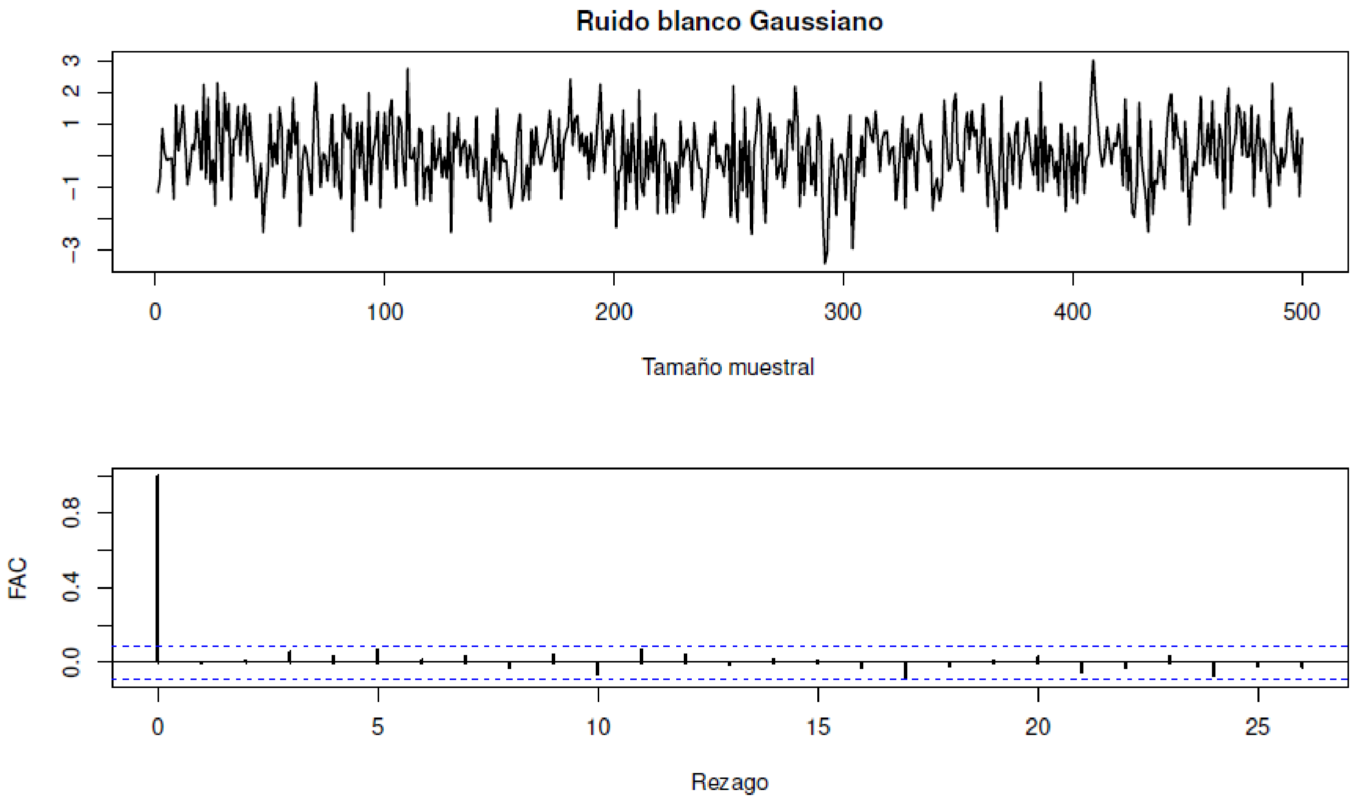


Figura: Simulación de un proceso ruido blanco Gaussiano, $y_t = \epsilon_t$ con $E(\epsilon_t) = 0$ y $var(y_t) = 1$ para toda t y su función de autocorrelación.

Modelo de Media Móvil de orden 1 (MA (1))

MA(1): $y_t = \mu + \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1}$

- $E(y_t) = \mu$
- $E(y_t - \mu)(y_t - \mu) = (1 + \theta^2)\sigma^2$
- $E(y_t - \mu)(y_{t-1} - \mu) = \theta\sigma^2$
- $E(y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu) = 0$ para toda $j > 1$

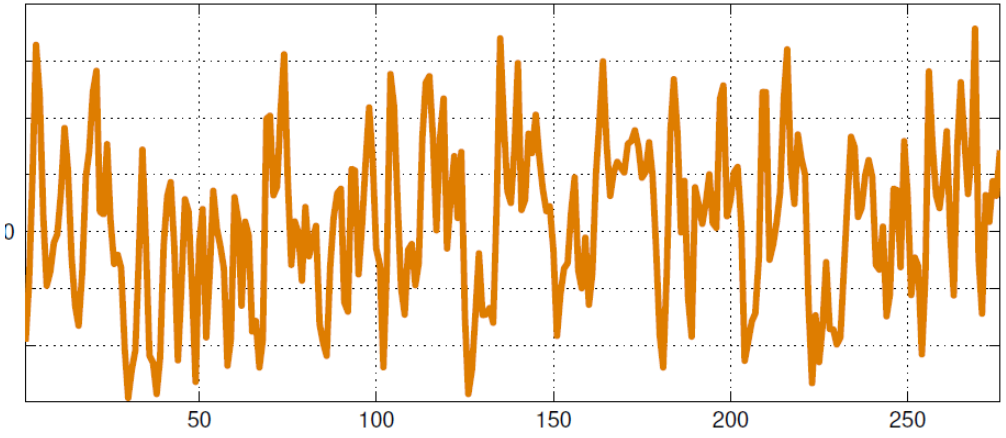
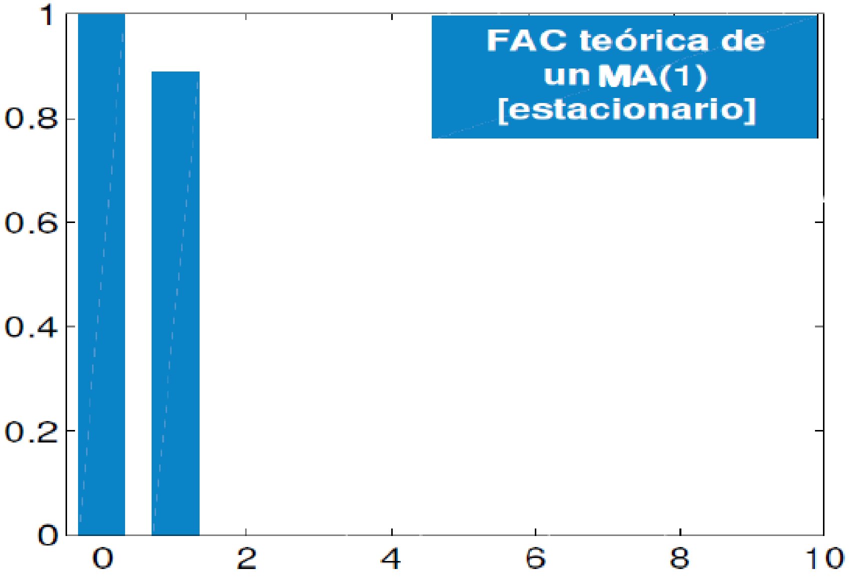


Figura: Simulación de un proceso $MA(1)$; $\theta = 0{,}9$



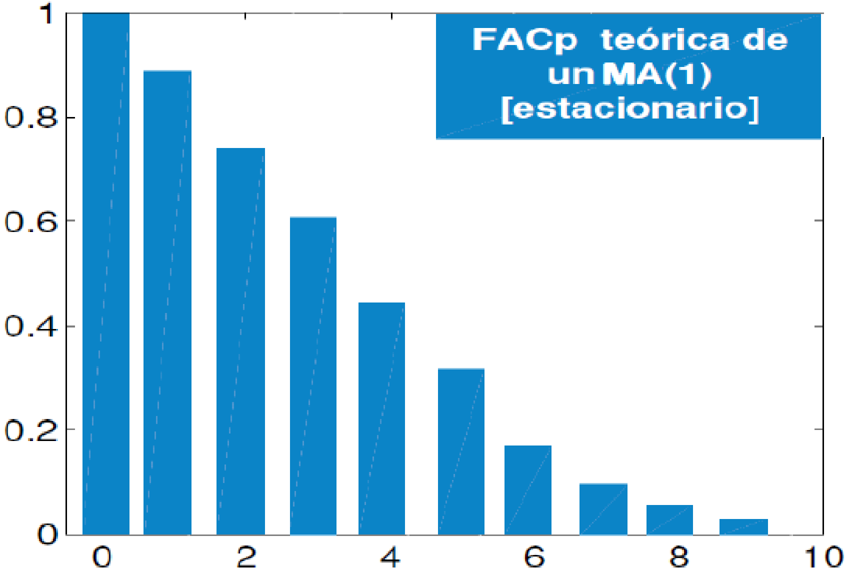


Figura: Correlograma de un Proceso $MA(1)$

Modelo de Media Móvil de orden q (MA (q))

MA(q): $y_t = \mu + \sum_{j=0}^{q} \theta_j \epsilon_{t-j}$

- $E(y_t) = \mu$
- $E(y_t - \mu)(y_t - \mu) = \left(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2\right) \sigma^2$
- $E(y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu) = \left[\theta_j + \theta_{j+1}\theta_1 + \cdots + \theta_q \theta_{q-j}\right] \sigma^2$ para $j = 1, 2, \ldots, q$
- $E(y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu) = 0$ para toda $j > q$

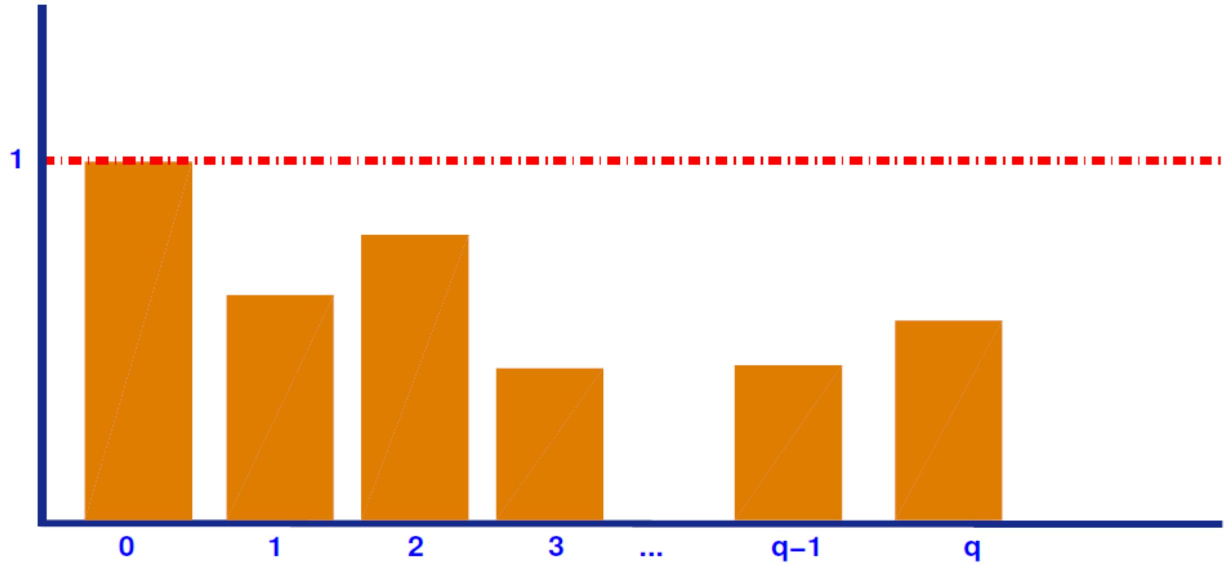


Figura: Función de Autocorrelación de un proceso $MA(q)$

¿Cómo seleccionamos el rezago con datos reales?

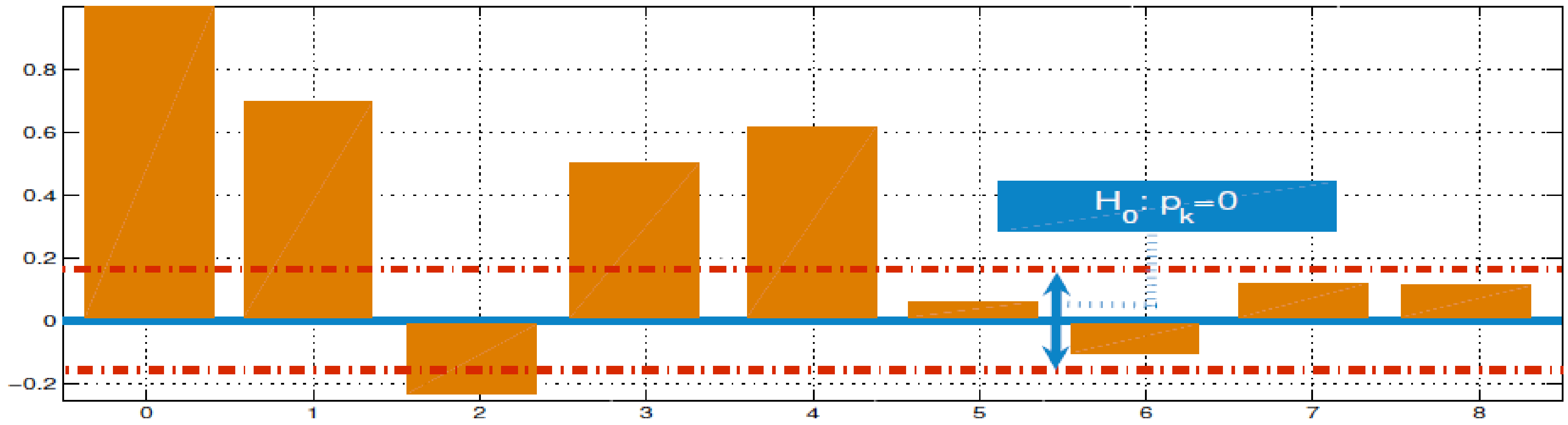


Figura: *FAC* muestral de un *MA*(4) con bandas de confianza

Códigos a usar:

9. MA.R

La importancia del modelo AR (1)

AR(1): $y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \epsilon_t$

- Condición de estacionariedad: $|\phi_1| < 1$

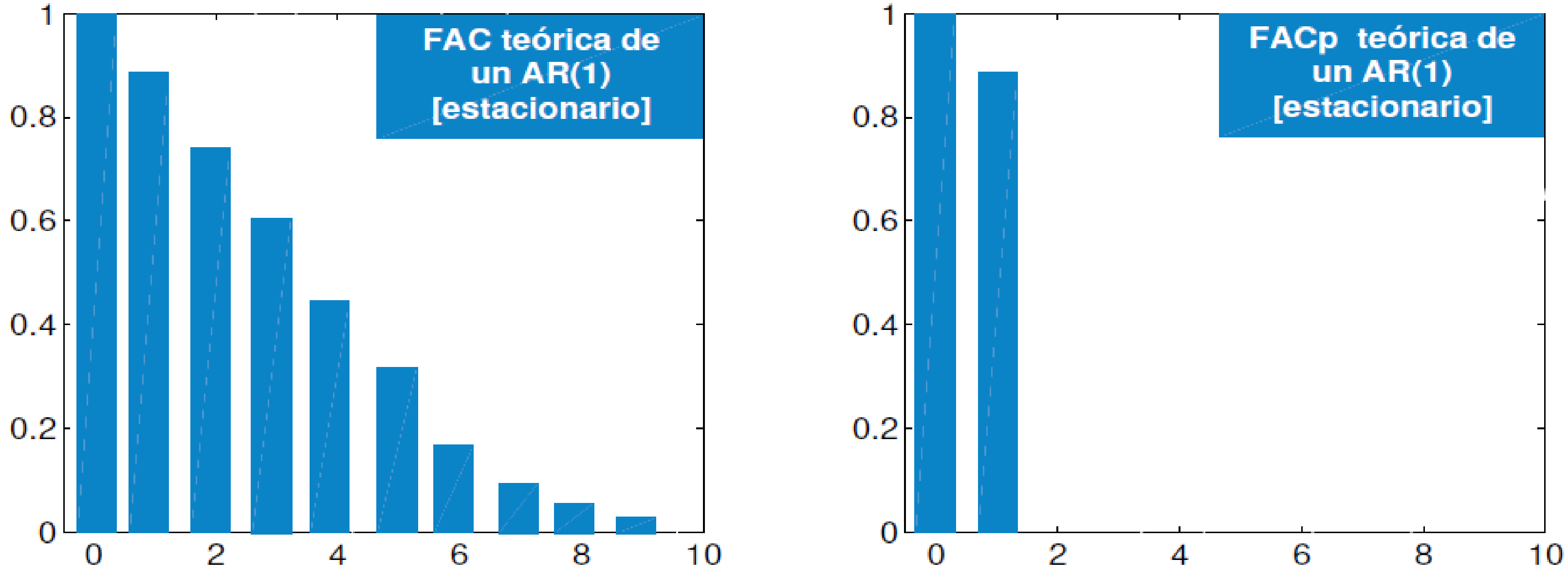


Figura: Correlograma de un Proceso estacionario $AR(1)$

La idea de persistencia a través del modelo AR (1)

AR(1): $y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \epsilon_t$

- Condición de estacionariedad: $|\phi_1| < 1$

- El parámetro ϕ tendrá un impacto directo en el tiempo que le costará al proceso olvidar el choque sufrido en un momento específico,
- aunque al final de los tiempos no importando el valor de dicho parámetro terminará por olvidarse (esto debido a que ϕ es menor a la unidad).

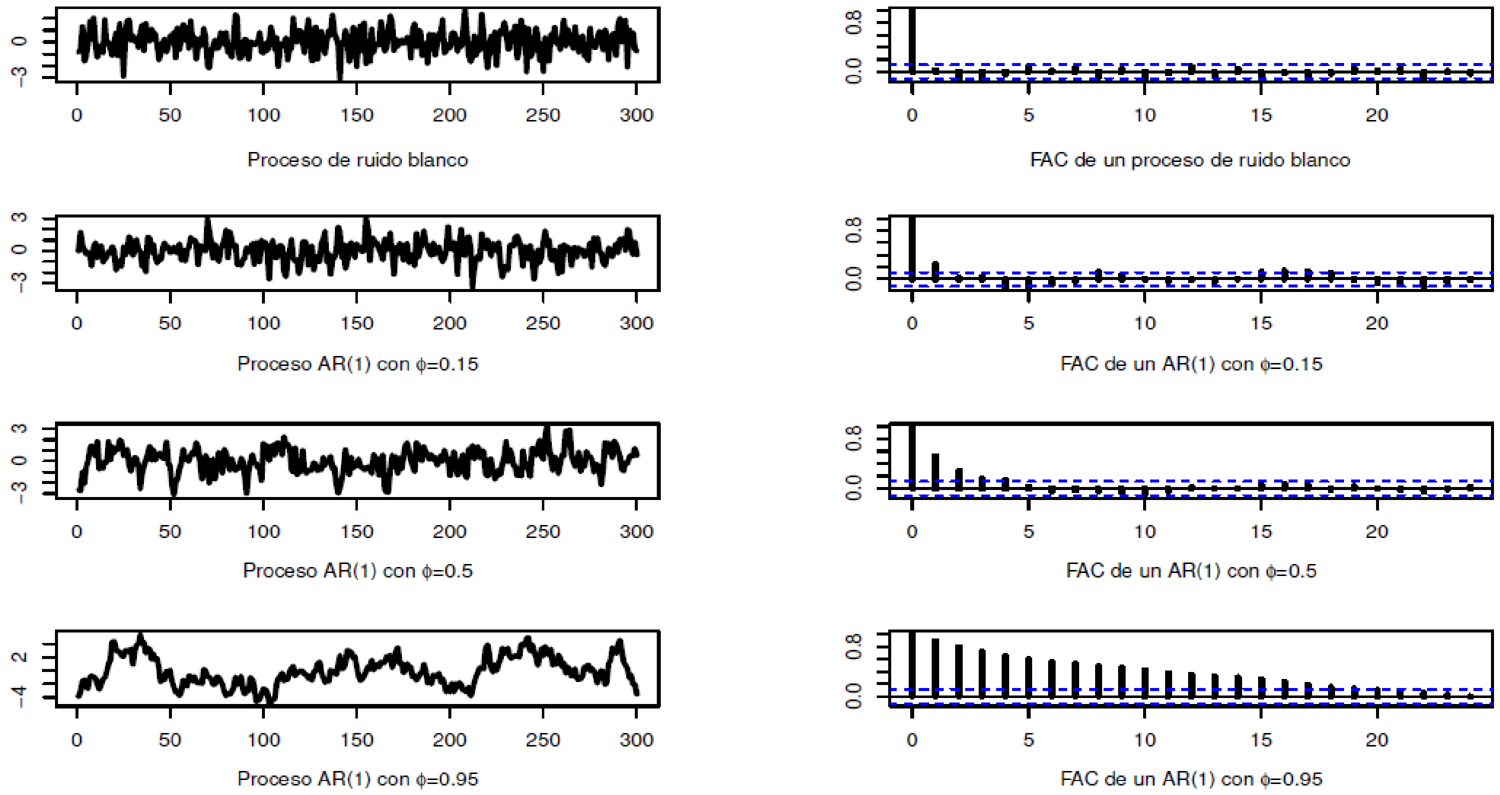


Figura: La intuición de la persistencia a través de las FACs de procesos $AR(1)$. Primer panel con $\phi = 0$, segundo panel con $\phi = 0{,}15$, tercer panel con $\phi = 0{,}5$, cuarto panel con $\phi = 0{,}95$.

Modelo Autorregresivo de orden p (AR(p))

AR(p): $y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t$

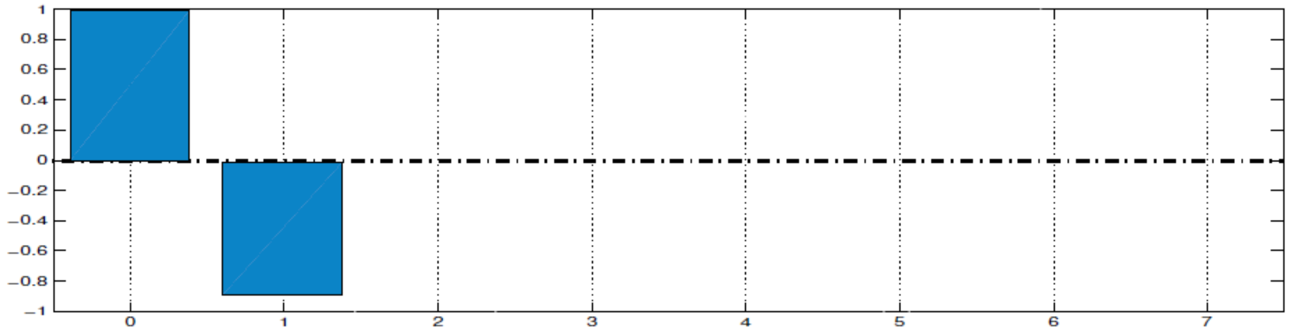


Figura: Función de Autocorrelación parcial de un proceso $AR(1)$ estacionario

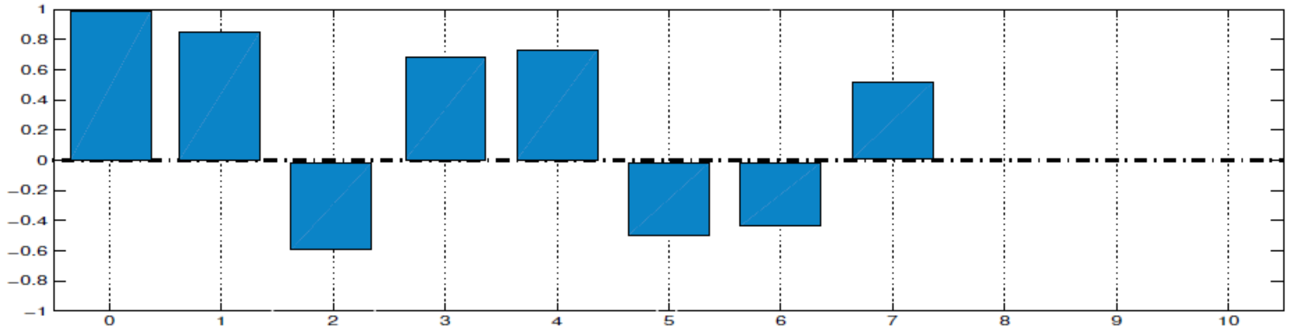


Figura: Función de Autocorrelación parcial de un proceso $AR(7)$ estacionario

Códigos a usar:

10. AR.R

Modelo Autorregresivo y de Media Móvil (ARMA(p,q))

El modelo $ARMA(p, q)$ dispone tanto de elementos regresivos, AR, como de elementos de media móvil, MA:

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q \epsilon_{t-q}.$$

- Dado que los procesos ARMA justamente mezclan los comportamientos de un AR y un MA, podemos esperar que las FACp (así como las FAC) se parezcan mucho a procesos MA (o AR en el caso de las FAC).

Tipificación general de procesos ARMA

Proceso	FAC	FACp
Ruido Blanco	Sin picos, $\rho_s = 0$, $\forall s = 1, 2.$	Sin picos, $\theta_s = 0$, $\forall\, s = 1, 2, \ldots$
$AR(1)\ \phi_1 > 0$	Decrecimiento exponencial; $\rho_k = \phi^k$.	$\phi_{11} = \rho_1$; $\phi_k = 0$ para $k = 2, 3, \ldots$
$AR(1)\ \phi_1 < 0$	Decrecimiento exponencial; oscilatorio.	$\phi_{11} = \rho_1$; $\phi_k = 0$ para $k = 2, 3, \ldots$
$AR(p)$	Decrecimiento ($\rightarrow 0$) a partir del último parámetro (p) Antes, puede variar.	Picos hasta el último rezago válido (p), cero después.
$MA(q) : \theta > 0$	Pico en todos los rezagos hasta q; cero en los demás.	Decrecimiento geométrico a partir del rezago q.
$ARMA(p, q)$	Picos hasta $\text{máx}(p, q)$; decrecimiento exponencial después.	Decrecimiento geométrico a partir del rezago $\text{máx}(p, q)$.

Cuadro: Tipificación de los correlogramas muestrales

Códigos a usar:

11. tipificacion.R

Idea intuitiva de no estacionariedad y el modelo ARIMA

No estacionariedad

Supongamos un proceso $AR(1)$ con parámetro igual a la unidad:

$$y_t = y_{t-1} + \epsilon_t.$$

Este modelo no es estacionario.

¿Pero eso qué significa o por qué no es relevante en este curso?

Intuición:

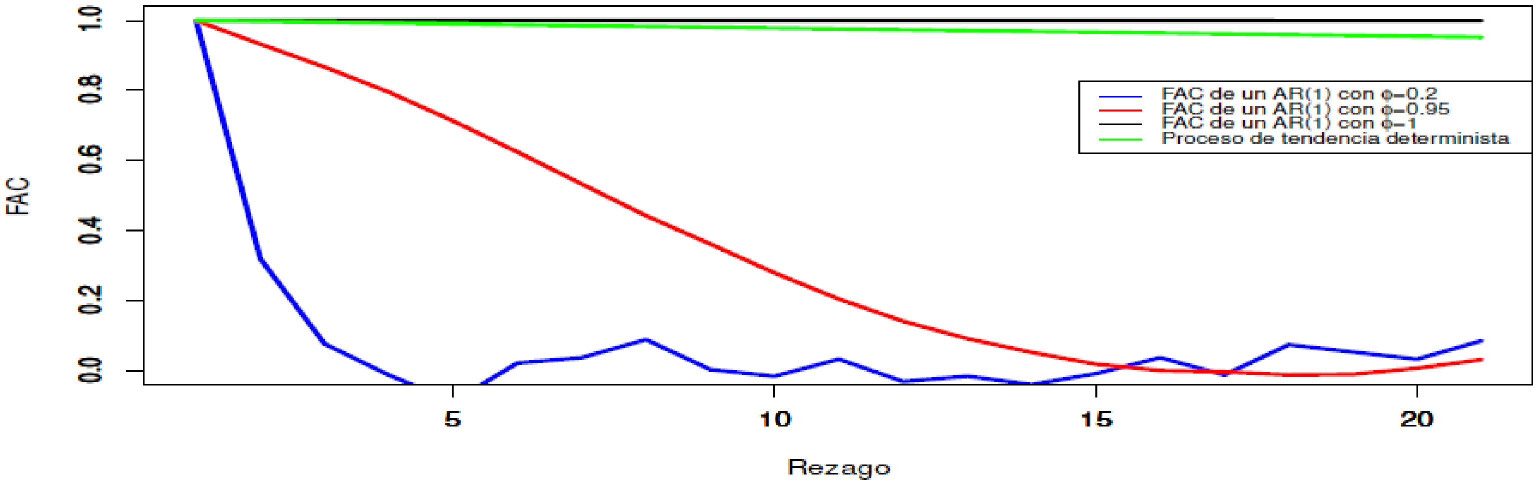


Figura: *FAC* muestral de dos proceso $AR(1)$ estacionarios (línea azul y roja), y dos procesos no estacionarios (líneas verde y negra). El gráfico superior es generado con $T = 2,500$,

Diferenciación

1. $u_t \sim I(0)$: se lee: "u_t es integrada de orden cero"; quiere decir que hace falta diferenciarla cero veces para hacerla estacionaria. Otra forma de expresar lo anterior es: *todas las raíces del polinomio característico inverso están fuera del círculo unitario.*
2. $y_t \sim I(1)$: se lee: "y_t es integrada de orden uno"; quiere decir que hace falta diferenciarla una vez para hacerla estacionaria. Dicho de otra forma: *Una raíz del proceso AR está sobre el círculo unitario.*
3. $z_t \sim I(k)$: se lee: "z_t es integrada de orden k"; quiere decir que hace falta diferenciarla k veces para hacerla estacionaria. Dicho de otra forma: *k raíces del proceso AR están sobre el círculo unitario.*

Entonces, si $y_t \sim I(k) \implies \Delta^k y_t \sim I(0)$.

Diferenciación

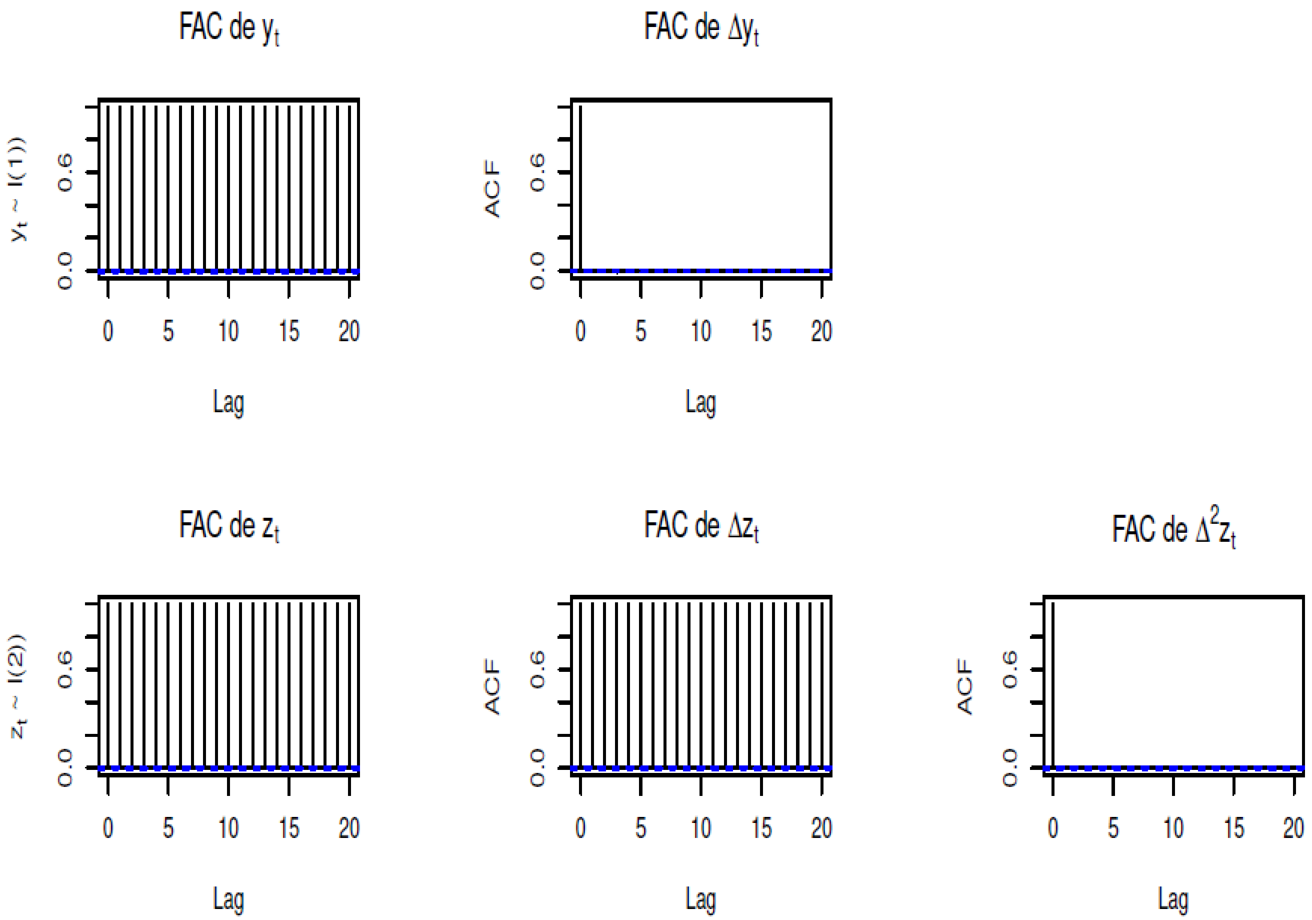


Figura: Función de autocorrelación de procesos $I(1)$ e $I(2)$ y las FAC de sus propias diferencias.

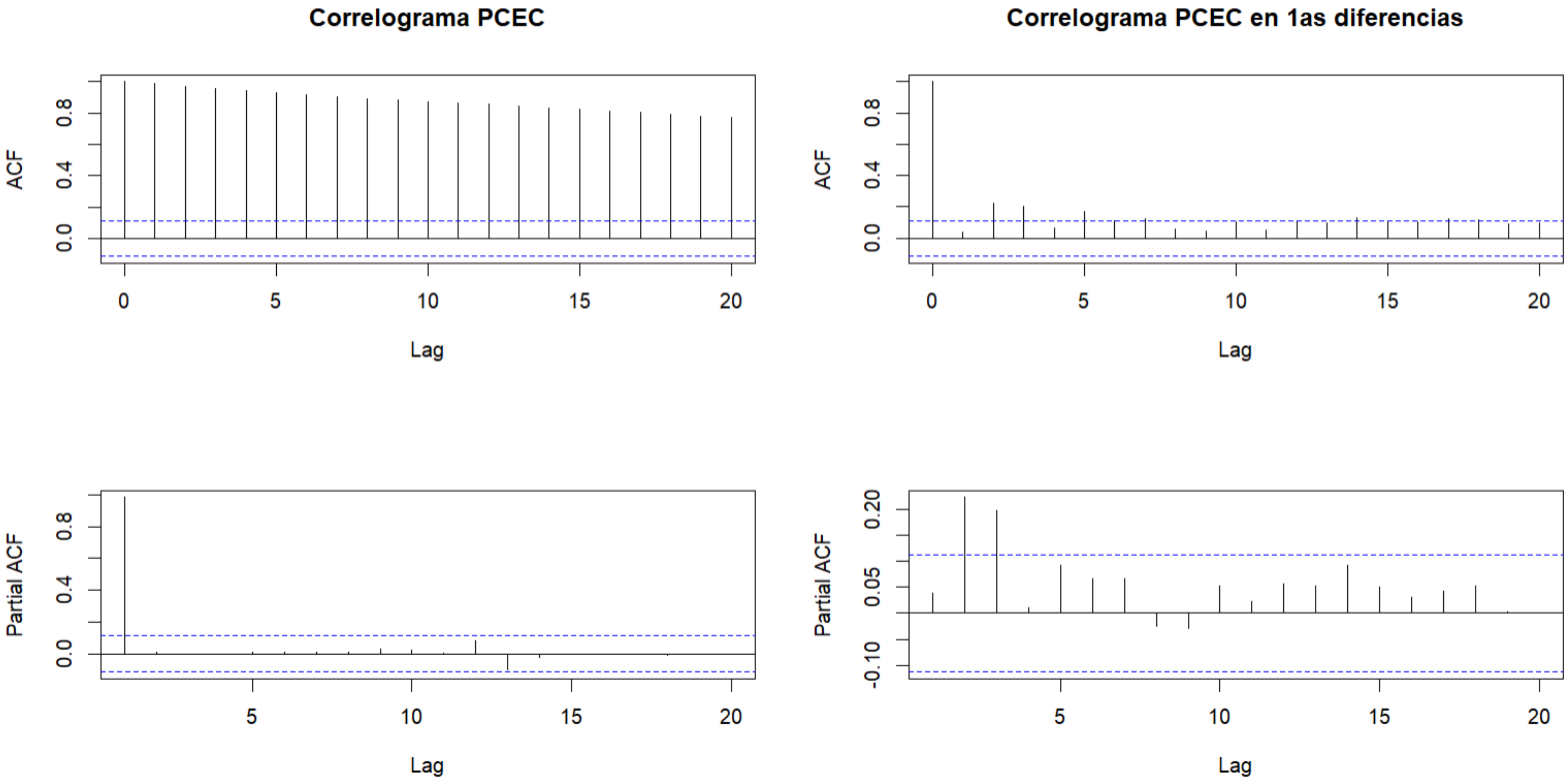
Procesos ARIMA (p,d,q)

$$
\begin{aligned}
\left(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2-\ldots-\phi_p L^p\right)(1-L)^d y_t &= c+(1+\theta_1 L+\theta_2 L^2+\ldots+\theta_q L^q)\epsilon_t, \\
\Phi\,(1-L)^d y_t &= c+\Theta\,(L)\,\epsilon_t. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

- El proceso tiene una parte autorregresiva y estacionaria de orden p,
- otra parte de media móvil de orden q, y
- finalmente, d es un indicador del número de raíces unitarias que posee el proceso.

Al especificar $\Delta^d y_t$ debemos entender que el (nuevo) proceso es estacionario, es decir, dado que $y_t \sim I(d)$ entonces $\Delta^d y_t \sim I(0)$.

Procesos ARIMA (p,d,q)



Estimación de modelos de series de tiempo

Comentarios generales

- Aquí estamos interesados en la estimación de modelos ARIMA basados en la serie de tiempo observada $y_1, y_2, \ldots, y_n$
- Tenemos que asumir que el modelo ya ha sido especificado. Ya tenemos valores específicos para p y q usando una visualización simple del correlograma.
- Aún no sabemos cómo estimar d, pero podemos asumir que puede ser $d = 0$ o $d = 1$ dependiendo del correlograma de la variable en niveles.
- Recordar que tomar la d-ésima diferencia de la serie observada nos conduciría a tener un proceso ARMA(p,q) estacionario.
- Solo nos interesa el problema de estimación de dicho proceso ARMA(p,q) estacionario.

Estimación

Usaremos el paquete y la librería TSA

```
#install.packages("TSA")
library(TSA)
```

El comando " **arima** " nos permitirá estimar nuestros modelos anteriormente explicados

```
arima(x, order = c(0, 0, 0), seasonal = list(order = c(0, 0, 0), period = NA),
 xreg = NULL, include.mean = TRUE, transform.pars = TRUE, fixed = NULL,
init = NULL, method = c("CSS-ML", "ML", "CSS"), n.cond, optim.control = list(),
 kappa = 1e+06, io = NULL, xtransf, transfer = NULL)
```

O bien el paquete y la librería astsa

El comando " **sarima** " nos permitirá estimar nuestros modelos anteriormente explicados (y otros que no ahondaremos mucho al respecto)

```
sarima(xdata, p, d, q, P = 0, D = 0, Q = 0, S = -1,
       details = TRUE, xreg=NULL, Model=TRUE,
       fixed=NULL, tol = sqrt(.Machine$double.eps),
       no.constant = FALSE, ...)
```

Códigos a usar:

12. estimacion.R

Ajuste y predicción

Metodología Box & Jenkins

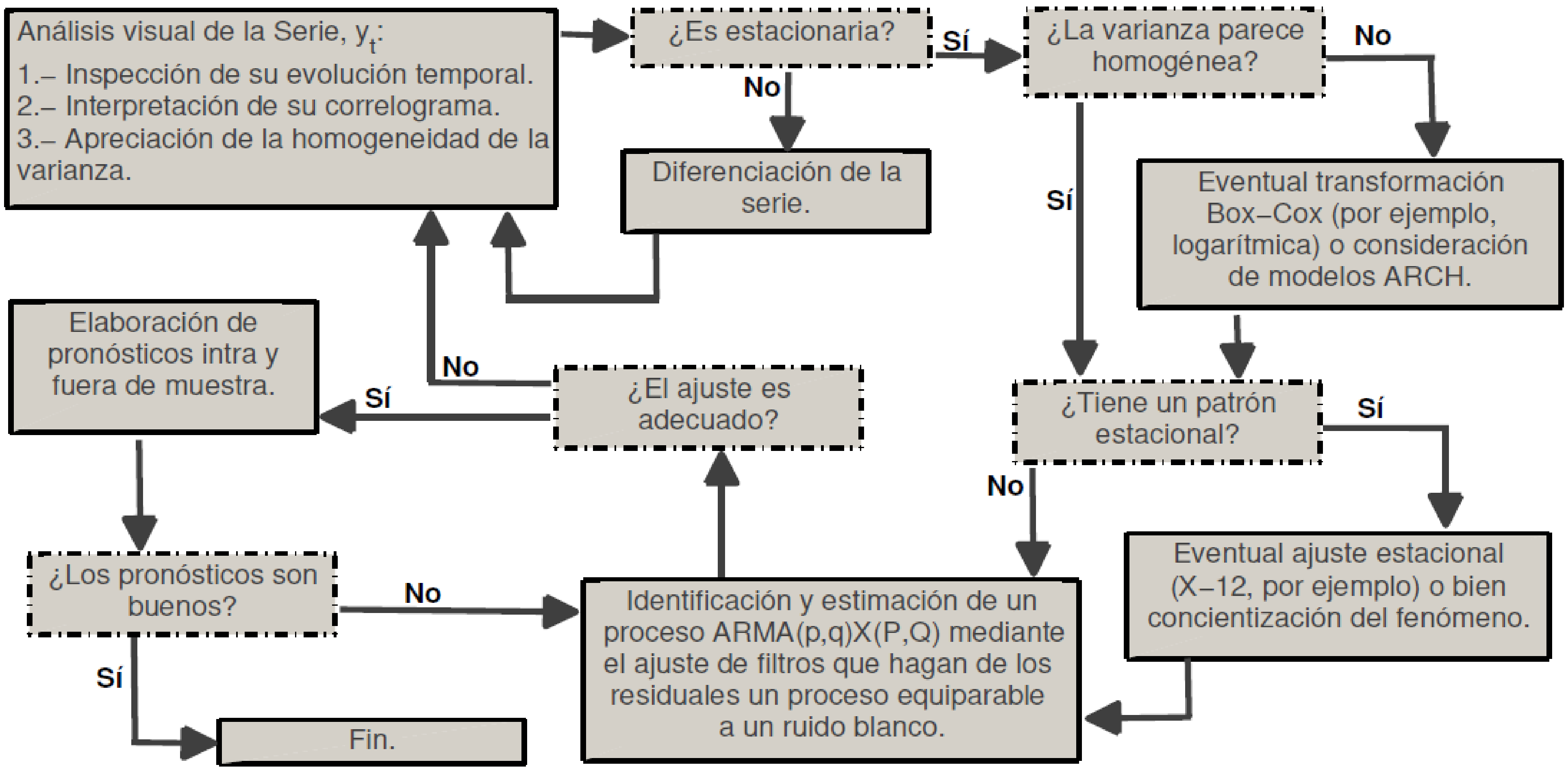


Figura: Diagrama de la Metodología Box-Jenkins con pequeñas adaptaciones.

Regresemos a la estacionalidad

¿Qué hacer con la estacionalidad?

A menos que la misma estacionalidad sea nuestro objeto de estudio, ésta redunda en una fuente adicional de “ruido” que puede dificultar el análisis de la serie de tiempo. Por lo mismo, se suele recomendar remover dicho componente estacional o bien modelarlo.

Opciones:

1. Eliminar la estacionalidad por medio del uso de promedios móviles como se explicó en el primer tema del curso.
2. Eliminar la estacionalidad por medio de un modelo determinista.
3. El método **X-12-ARIMA**, desarrollado por el *Census Bureau* Norteamericano.
4. El método **TRAMO-SEATS**, desarrollado en el Banco de España por Agustín Maravall en 1997.
5. La más reciente metodología **X-13ARIMA-SEATS**, desarrollado por por el *Census Bureau* Norteamericano. Combina y extiende las capacidades de los dos anteriores (X-12ARIMA y TRAMO-SEATS).

Códigos a usar:

13. X13ARIMASEATS.R