

# ANÁLISIS DE SERIES DE TIEMPO CON R

C. Vladimir Rodríguez Caballero

<https://github.com/Vlasmetrics7/BID-HACIENDA-2023>

Parte II. Análisis de series temporales

## **Parte II. Análisis de series de tiempo**

Modelos básico de series de tiempo.

Estimación.

Metodología Box & Jenkins.

Estimación y pronóstico.

# **Análisis de series de tiempo estacionarias**

# La importancia de las series de tiempo

*La importancia de las series de tiempo econométricas está constituida por el desarrollo de modelos sutilmente sencillos, capaces de proveer pronósticos, de interpretar datos económicos y de probar hipótesis sobre éstos.*

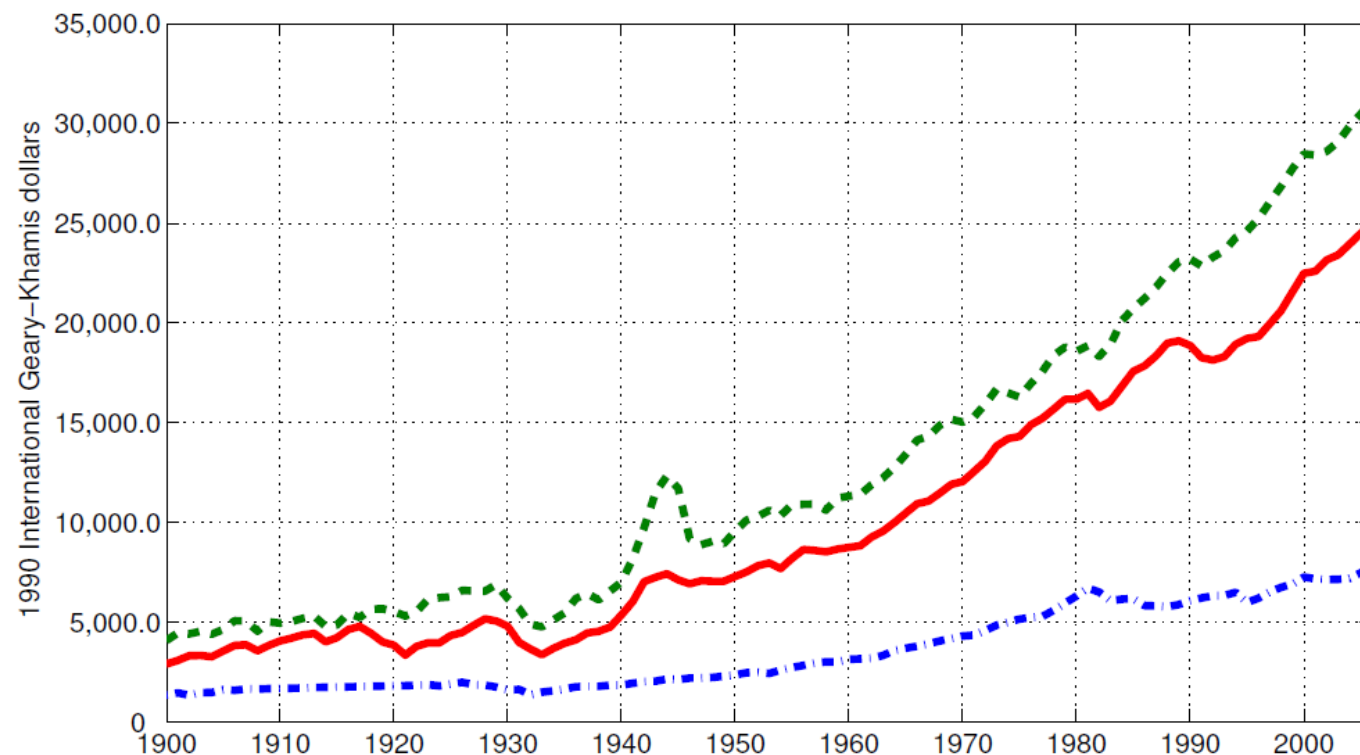
- Los nombres rimbombantes del estilo: AR, MA, ARIMA, ARCH, GARCH, FIGARCH... son modelos estrictamente estadísticos aunque es posible encontrarles una interpretación económica.
- Existen otros modelos (algunos no los cubriremos en este curso) VAR, VECM, ARDL, etc.. que aunque siguen siendo modelos estadísticos, guardan una intrínseca relación con teoría económica.

# La importancia del Proceso Generador de Datos

#	Nombre	Modelo
1	$MA(q)$	$y_t = \mu + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q}$
2	$AR(p)$	$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t$
3	$I(0)$	$y_t = \mu + \epsilon_t$
4	$I(0) + br$	$y_t = \mu + \Theta_1 DU_{1,t} + \dots + \Theta_k DU_{k,t} + \epsilon_t$
5	$TS$	$y_t = \mu + \beta t + \epsilon_t$
6	$TS + br$	$y_t = \mu + \sum_{i=1}^K \Theta_i DU_{i,t} + \beta t + \sum_{i=1}^K \gamma_i DT_{i,t} + \epsilon_t$
7	$I(1)$	$\Delta y_t = \epsilon_t$
8	$I(1) + dr$	$\Delta y_t = \mu + \epsilon_t$
9	$I(1) + dr + br$	$\Delta y_t = \mu + \sum_{i=1}^K \Theta_i DU_{i,t} + \epsilon_t$
10	$I(k)$	$\Delta^k y_t = \epsilon_t$ para $k = 2, 3, \dots$
11	$FI(d)$	$(1 - L)^d y_t = \epsilon_t$ para $d \in [-\frac{1}{2}, 1)$

**Cuadro:** Procesos Generadores de Datos: los acrónimos  $TS$ ,  $br$  y  $dr$  representan Estacionariedad en tendencia, Rompimientos estructurales y deriva, respectivamente.

# La importancia del Proceso Generador de Datos



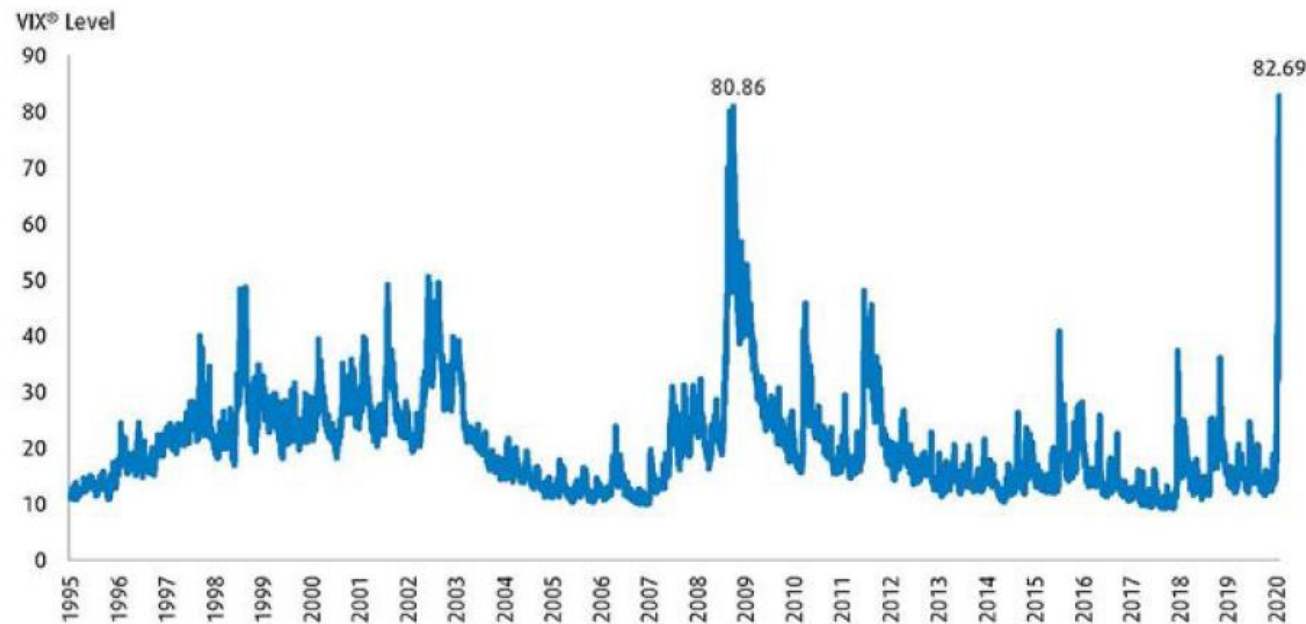
**Figura:** PIB per capita de México, EEUU y Canadá. Fuente: Maddison.

- Resultaría en extremo importante poder tipificar el comportamiento de largo plazo de cada una de ellas con objeto de ver si nuestro país tiene alguna esperanza de alcanzar a sus vecinos.
- La identificación de rompimientos estructurales (que bien podrían estar asociados a crisis o reformas de gran envergadura) se convierte entonces en una cuestión de gran relevancia.



# La importancia del Proceso Generador de Datos

Como Efecto de la pandemia, el índice de volatilidad CBOE ha alcanzado su máximo histórico.



- ¿Cuáles serán los efectos de la pandemia sobre los mercados financieros internacionales?
- ¿Es posible pronosticar estos picos de alta volatilidad?

# **Conceptos sencillos**

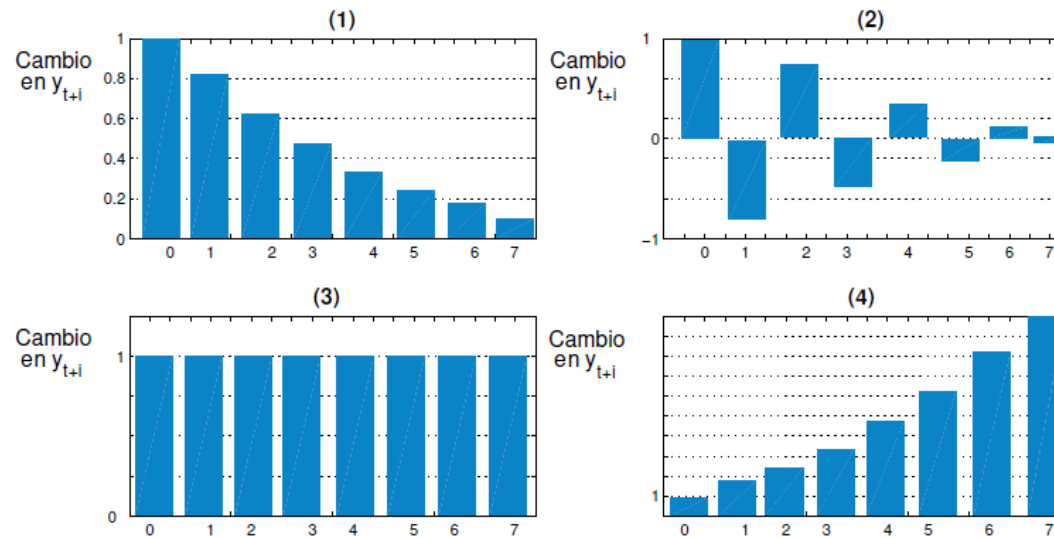


# El concepto del impacto en una serie temporal

$$y_t = \phi y_{t-1} + a_t,$$

Existen cuatro posibles dinámicas siguiendo este ejemplo:

- ❶  $0 < \phi < 1$ . Efecto cuyo impacto disminuye exponencialmente. **Memoria corta.**
- ❷  $-1 < \phi < 0$ . Efecto cuyo impacto disminuye exponencialmente. **Memoria corta.**
- ❸  $\phi = 1$ . Efecto cuyo impacto no decrece. **Memoria infinita.**
- ❹  $|\phi| > 1$ . Efecto cuyo impacto aumenta exponencialmente. **Memoria explosiva.**

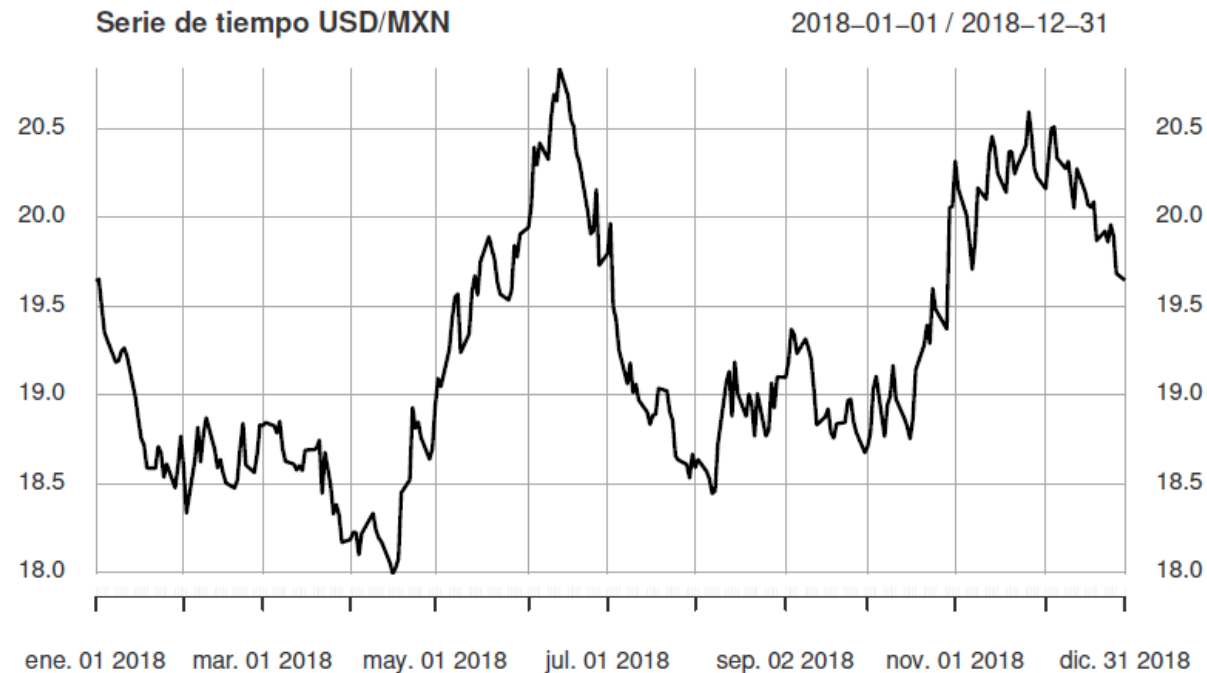


Multiplicador Dinámico para distintos valores de  $\phi$ : (1)  $0 < \phi < 1$ ; (2)  $-1 < \phi < 0$ ; (3)  $\phi = 1$ ; (4)  $\phi > 1$

# El concepto de una serie de tiempo

Imaginemos por un momento que diariamente observamos el tipo de cambio del peso mexicano contra el dólar estadounidense. Tal vez estemos interesados en cambiar unas remesas. ¿Cuándo las cambiaríamos?

- Para sintetizar, supongamos que estamos observando el tipo de cambio del peso mexicano (MXN) frente al dólar norteamericano (USD) a lo largo de todo el 2018.
- El conjunto de observaciones es nuestra famosa **serie de tiempo**.

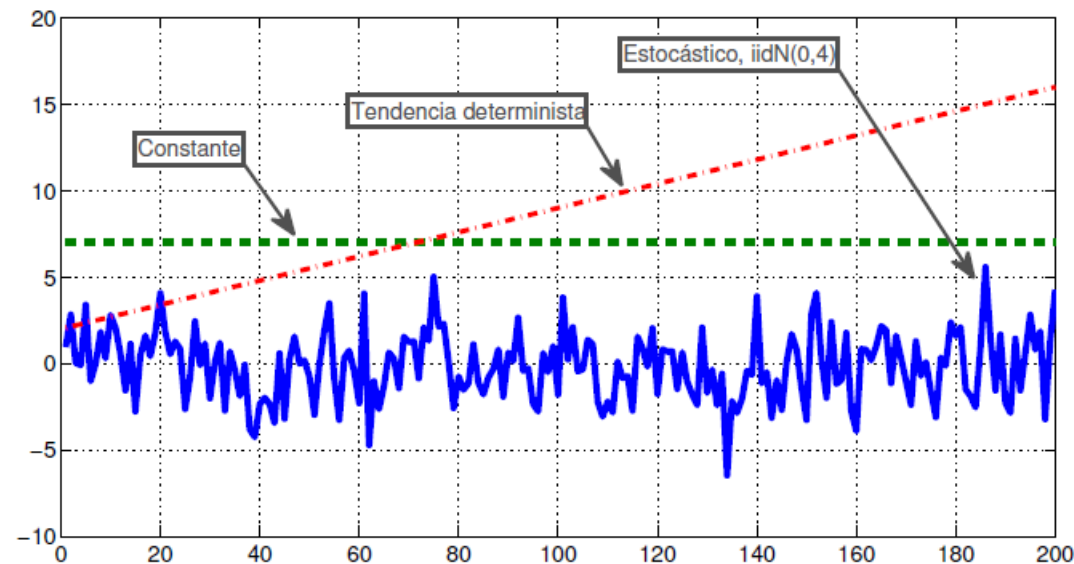


**Figura:** Paridad cambiaria USD/MXN.

# El concepto de una serie de tiempo

Unos sencillos ejemplos de series de tiempo pueden ser:

- 1 Un proceso constante:  $y_t = 7$ .
- 2 Una tendencia lineal en el tiempo:  $y_t = 2 + 0,07 t$ .
- 3 Un proceso aleatorio, digamos gaussiano:  $y_t = \epsilon_t$ , donde  $\{\epsilon_t\}_{t=1}^T$  es una secuencia de variables aleatorias que se distribuyen i.i.d  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .



**Figura:** Series de Tiempo, ejemplos

# Un par de operadores

## Definición (Operador diferencia)

- 1 Primera diferencia ( $\Delta y_t$ ):  $y_t - y_{t-1}$ .
- 2 Segunda diferencia ( $\Delta^2 y_t$ ):

$$\begin{aligned}\Delta y_t - \Delta y_{t-1} &= (y_t - y_{t-1}) - (y_{t-1} - y_{t-2}) \\ &= y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}.\end{aligned}$$

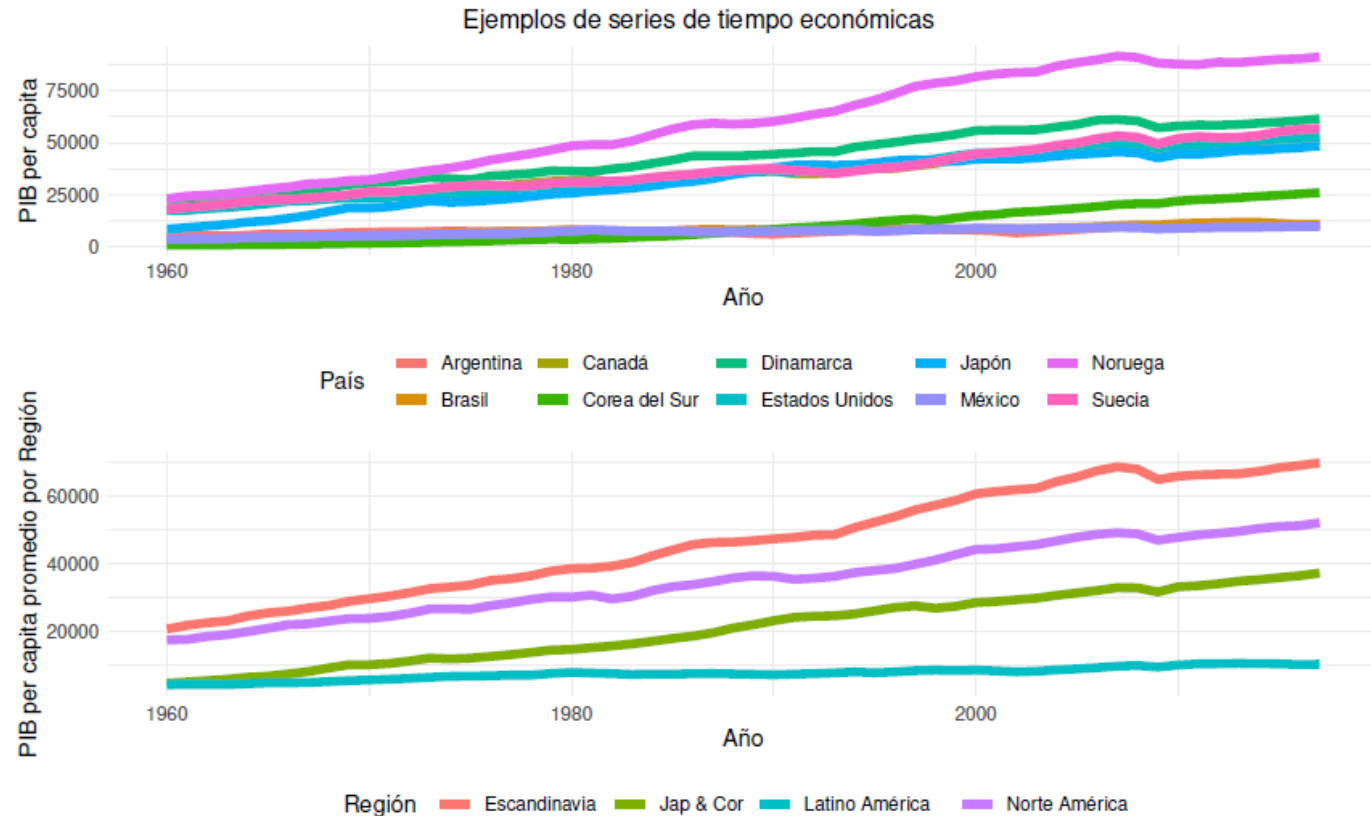
## Definición (Operador rezago)

$$\begin{aligned}L \cdot y_t &= y_{t-1}, \\ L \cdot (L \cdot y_t) &= y_{t-2}, \\ &= L^2 \cdot y_t,\end{aligned}$$

# **Hechos estilizados y descomposición**

# Hechos estilizados: Tendencias claras (les llamamos deterministas)

En esta figura podemos observar el Producto Interno Bruto per Cápita de algunos países y el promedio de esos países por sus regiones específicas. Como podemos observar, dichas series de tiempo incluyen una tendencia creciente clara, evidentemente con pendientes muy diferentes unas a otras.

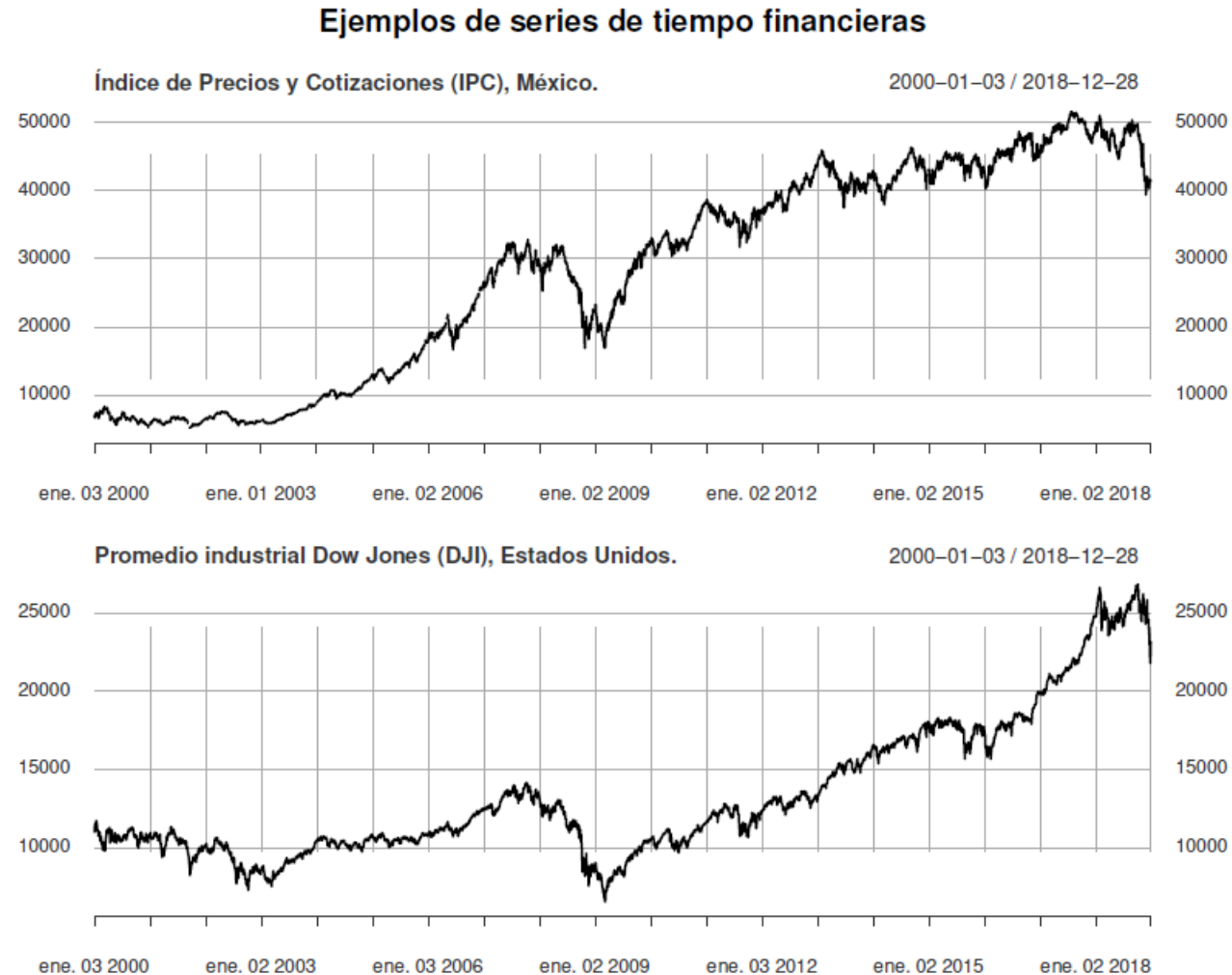


Gráficas de elaboración propia. World Development Indicators, The World Bank

**Figura:** PIB per Cápita por países y promedio por regiones. (US\$ 2010 precios constantes)

# Hechos estilizados: Tendencias no claras (les llamamos estocásticas)

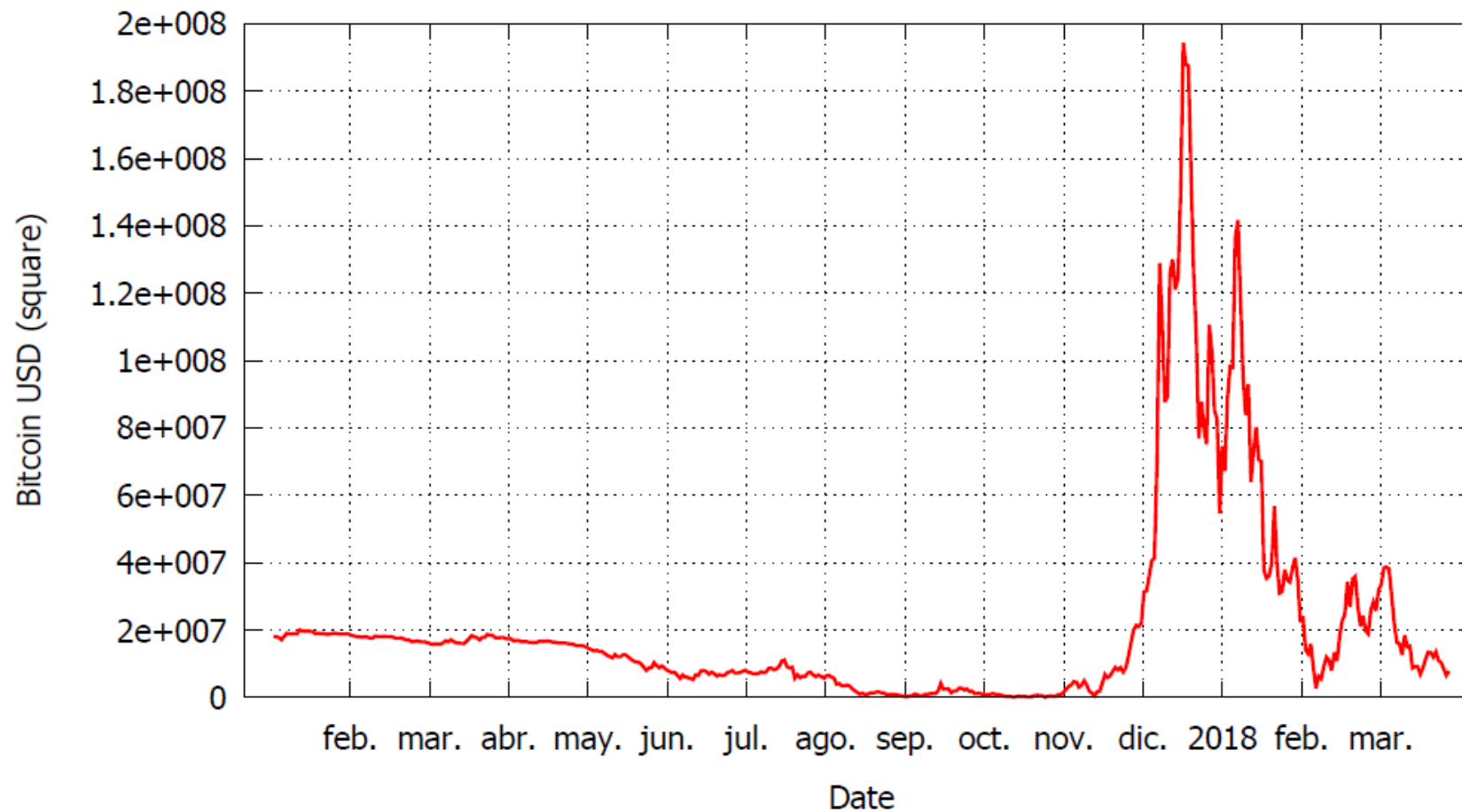
Esta figura muestra el comportamiento de un par de índices bursátiles correspondientes a México y Estados Unidos.



**Figura:** Índices bursátiles de México y Estados Unidos.

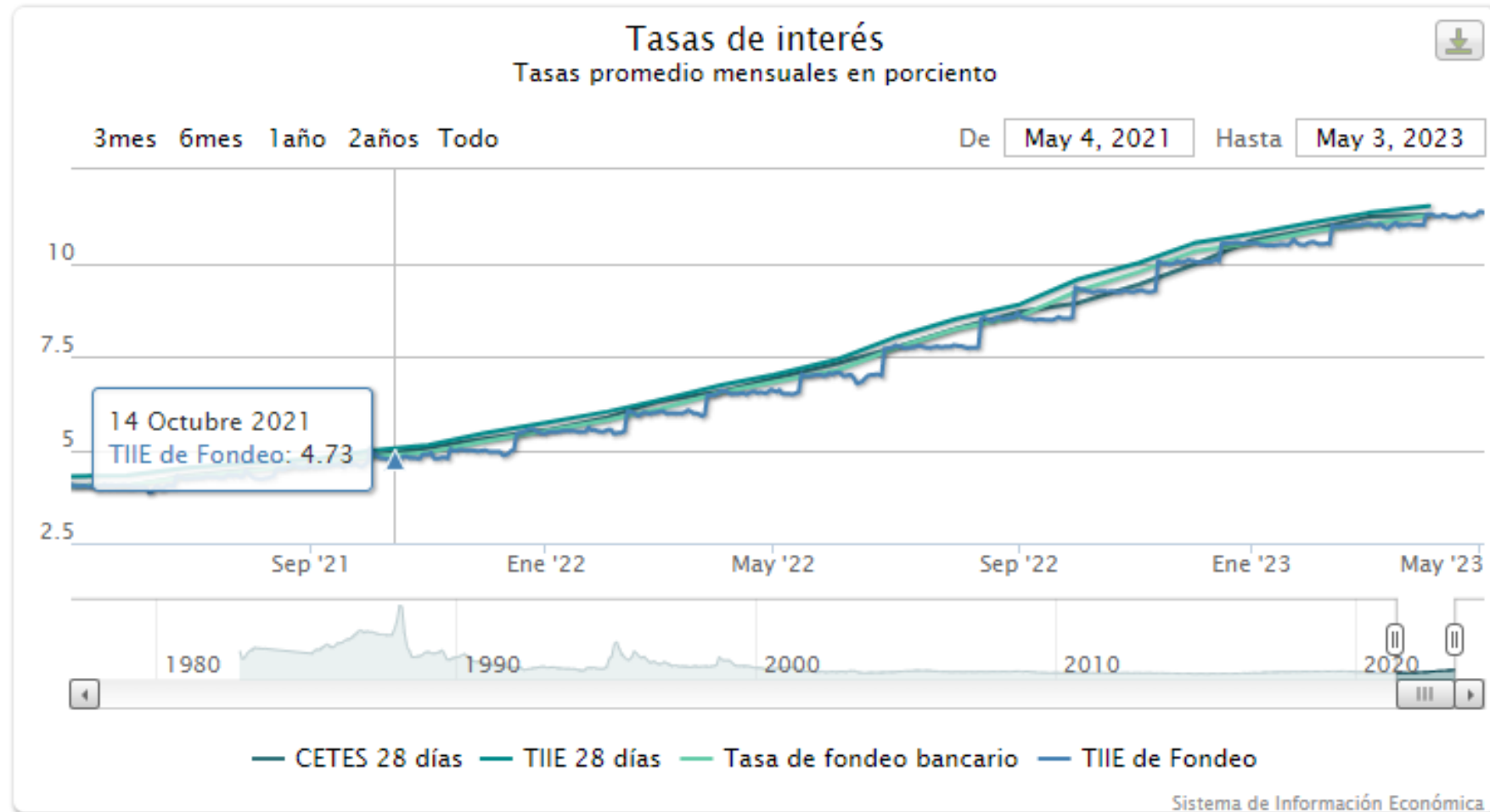


# Hechos estilizados: Movimientos bruscos (le llamamos volatilidad)



**Figura:** Precio de cierre de la criptomoneda Bitcoin (centrada y elevada al cuadrado). Fuente: data.world .

# Hechos estilizados: Movimientos “compartidos” entre algunas series



Fuente: SIE, Banco de México

# Descomposición

# Descomposición de una serie de tiempo

Ya hemos discutido cuales son algunos de los hechos estilizados que hallaremos más frecuentemente al analizar series de tiempo en el campo de la economía. Ahora nos atañe otra incógnita: ¿qué características harán que nuestra serie de tiempo tenga cierto tipo de comportamiento y no otro diferente? Es una interrogante interesante y no trivial.

- 1 Ruido ( $\epsilon_t$ )
- 2 Tendencia ( $\mu_t$ )
- 3 Estacionalidad ( $s_t$ )
- 4 Ciclicidad ( $c_t$ )
  - ▶ Describe un componente repetido pero no periódico en la serie temporal

**Es así como podemos obtener un modelo bastante general:**

$$y_t = \mu_t + s_t + c_t + \epsilon_t,$$

# Desestacionalización de una serie de tiempo

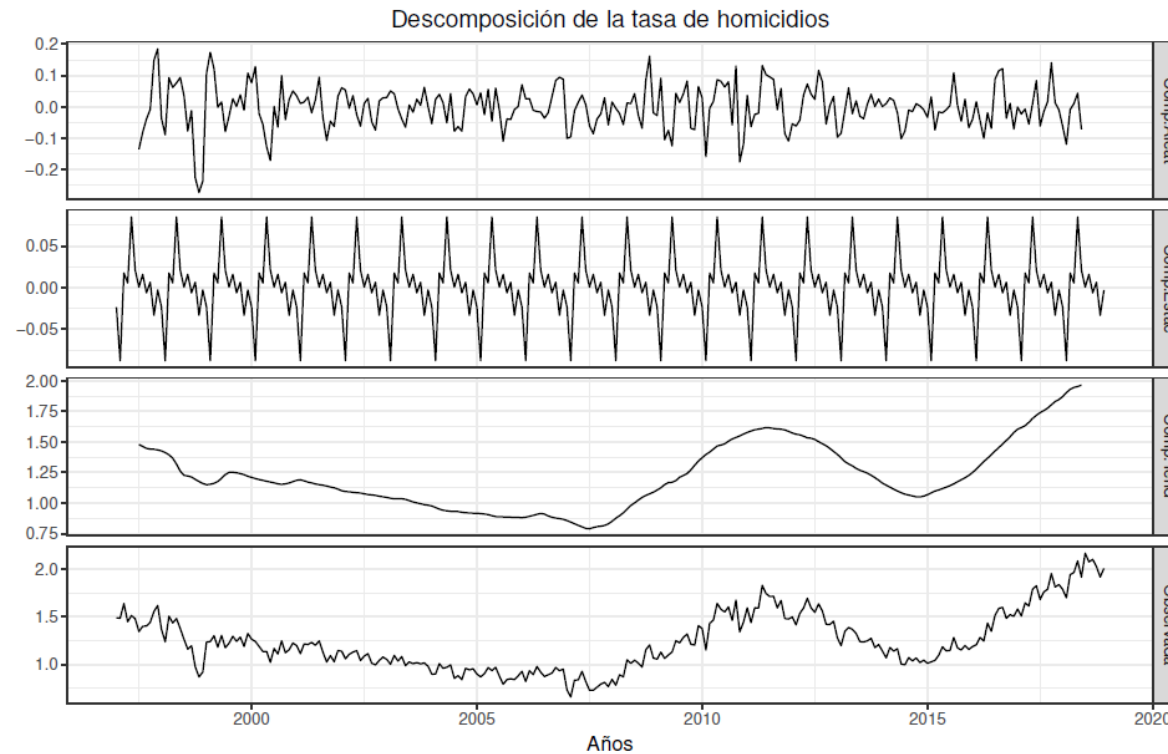
¿Por qué será importante?

## Serie desestacionalizada

Si una serie de tiempo  $y_t$  posee una tendencia  $\mu_t$  y un componente estacional  $S_t$ , y no nos interesa analizar el componente estacional sino solo estudiar la tendencia de la serie, basta con calcular  $y_t - \hat{S}_t$  para remover los efectos estacionales y solo quedarnos con la propia tendencia de la serie.

# Desestacionalización de una serie de tiempo

## Ejemplo: Homicidios



**Figura:** Tasa de homicidio doloso por cada cien mil habitantes. Información obtenida del Secretariado Ejecutivo del Sistema Nacional de Seguridad Pública y Consejo Nacional de Población. Gráficos de construcción propia.

Códigos a usar:

6. delitos.R

7. descomposición.R

# Filtro de Hodrick-Prescott

- Es un filtro lineal que nos sirve para descomponer una serie temporal en
  - 1 Tendencia
  - 2 Ciclo
- $y_t = \mu_t + c_t + \epsilon_t$
- El parámetro  $\lambda$  regula el *trade-off* entre las dos fuentes de variabilidad.
  - 1 Datos anuales:  $\lambda = 100$
  - 2 Datos trimestrales:  $\lambda = 1600$
  - 3 Datos mensuales:  $\lambda = 14400$

Códigos a usar:

8. Hodrick-Prescott.R

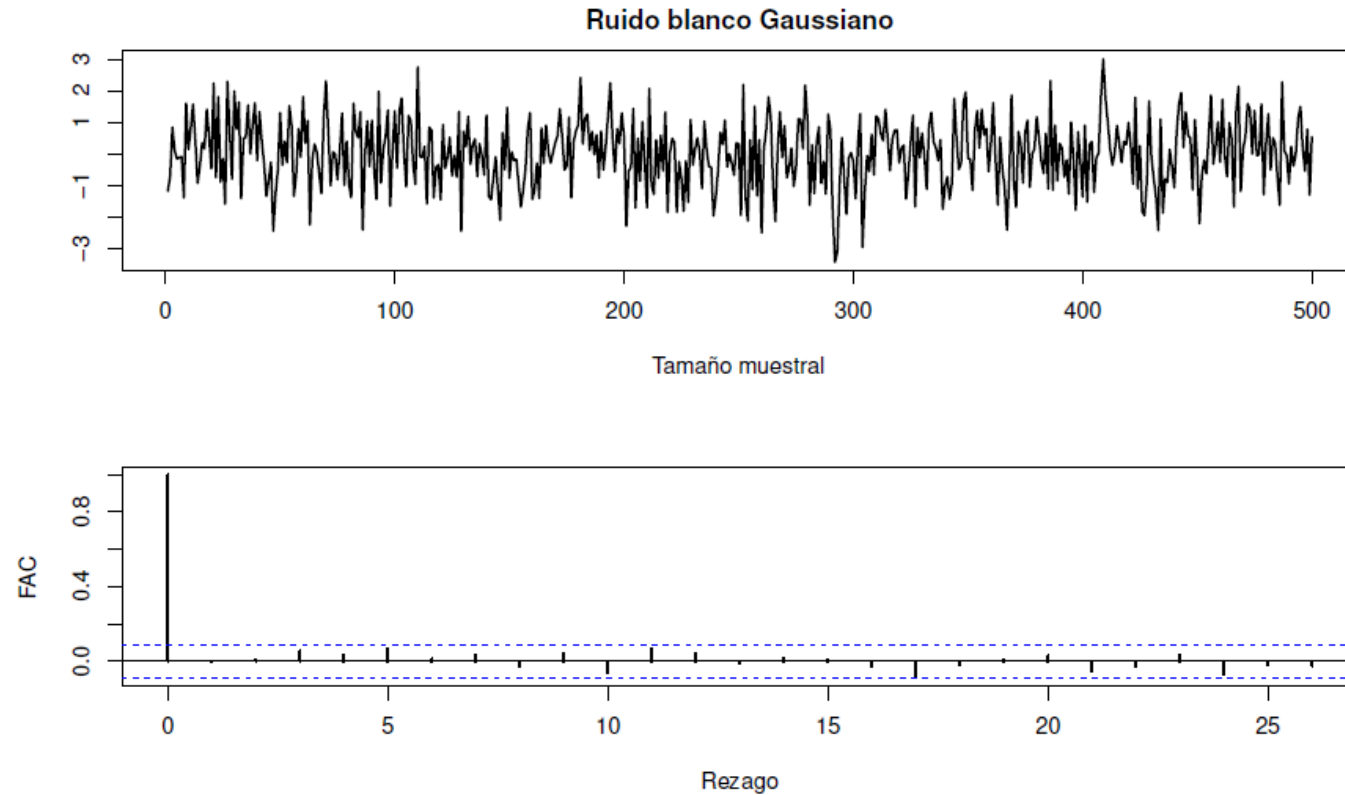


# **Modelos estacionarios**

# Ruido Blanco

- Es una serie,  $\{\epsilon_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ , cuyos componentes tienen esperanza cero y varianza constante  $\sigma_{\epsilon}^2$ .
- Se trata de un *ruido*, es decir, que no incluye información útil y podemos interpretar que es *blanco* en el sentido que no resulta perjudicial.
- Notación:  $\{\epsilon_t\} \sim RB(0, \sigma^2)$  (en inglés se denota como  $\{\epsilon_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ ).
- Si las variables aleatorias  $\epsilon_t$  son independientes, idénticamente distribuidas con media cero y varianza  $\sigma^2$ , escribimos  $\{\epsilon_t\} \sim iid(0, \sigma^2)$ , o bien  $\{\epsilon_t\} \stackrel{iid}{\sim}, \sigma^2)$

# Ruido Blanco

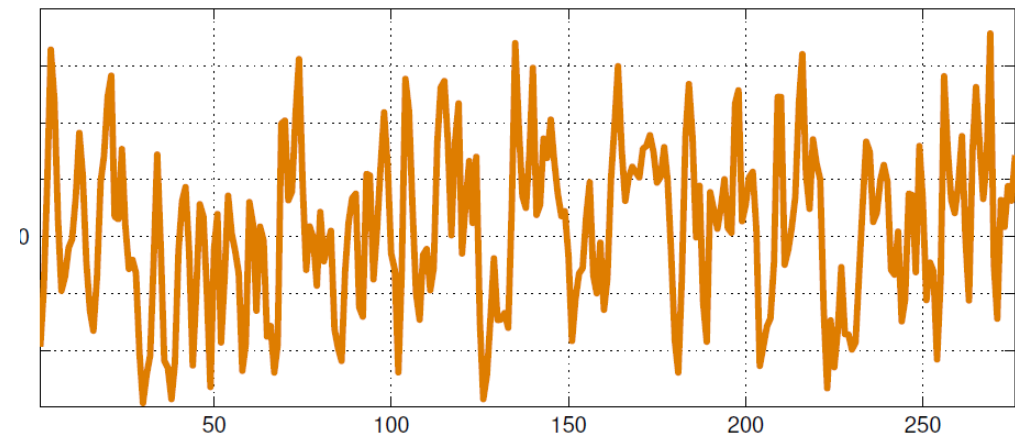


**Figura:** Simulación de un proceso ruido blanco Gaussiano,  $y_t = \epsilon_t$  con  $E(\epsilon_t) = 0$  y  $var(y_t) = 1$  para toda  $t$  y su función de autocorrelación.

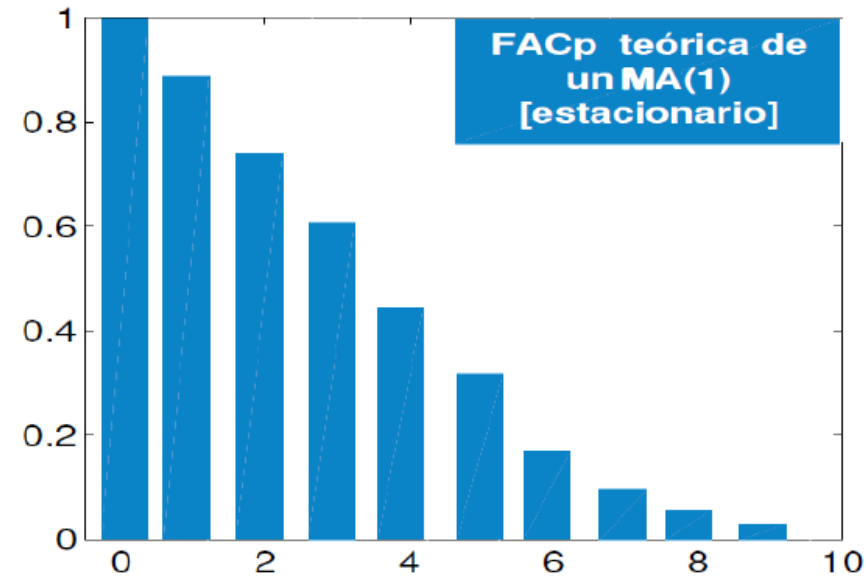
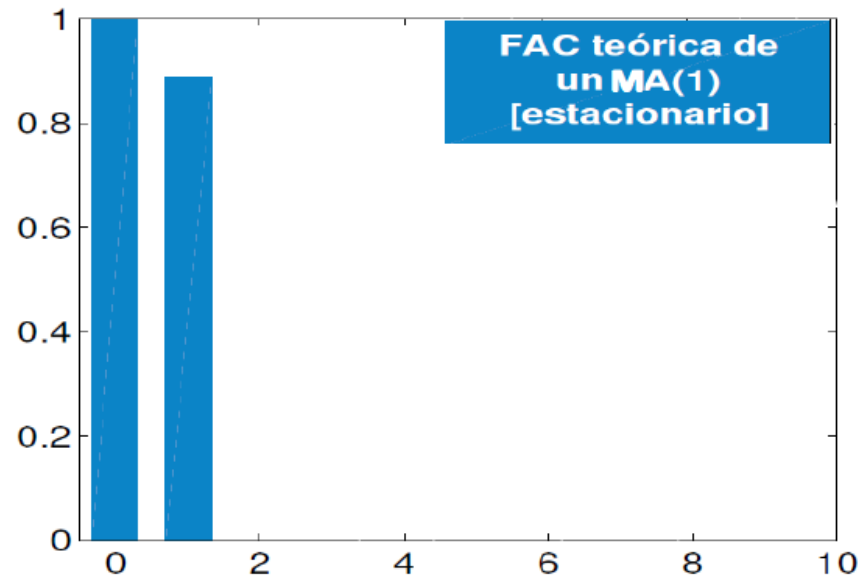
# Modelo de Media Móvil de orden 1 ( MA (1) )

$$\text{MA}(1): y_t = \mu + \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1}$$

- $E(y_t) = \mu$
- $E(y_t - \mu)(y_t - \mu) = (1 + \theta^2)\sigma^2$
- $E(y_t - \mu)(y_{t-1} - \mu) = \theta\sigma^2$
- $E(y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu) = 0$  para toda  $j > 1$



**Figura:** Simulación de un proceso  $MA(1)$ ;  $\theta = 0,9$

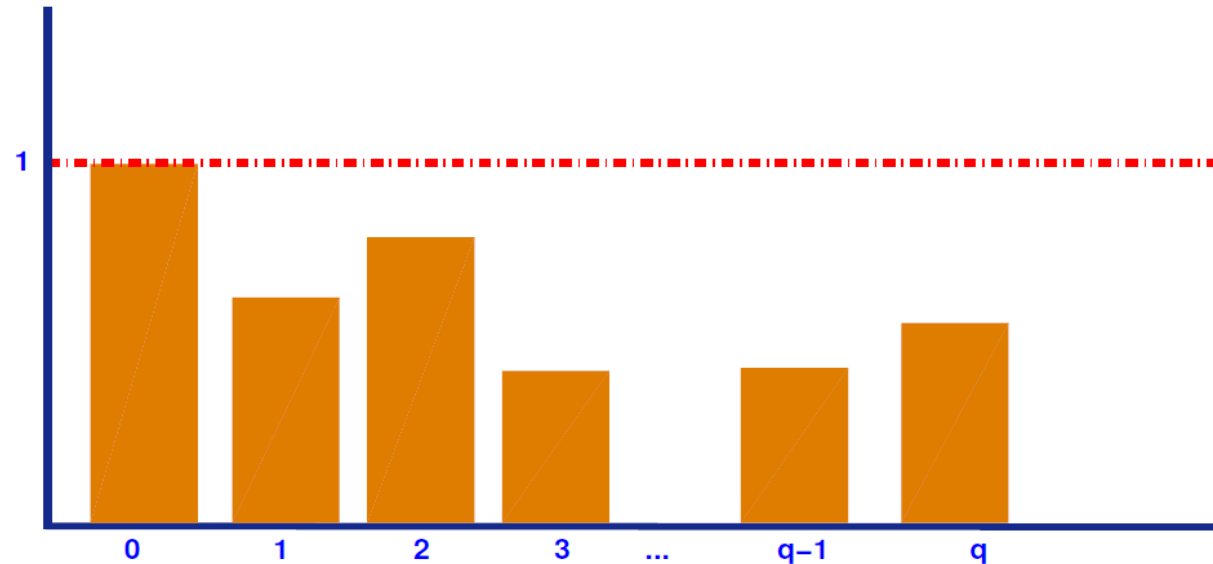


**Figura:** Correlograma de un Proceso  $MA(1)$

# Modelo de Media Móvil de orden $q$ ( $MA(q)$ )

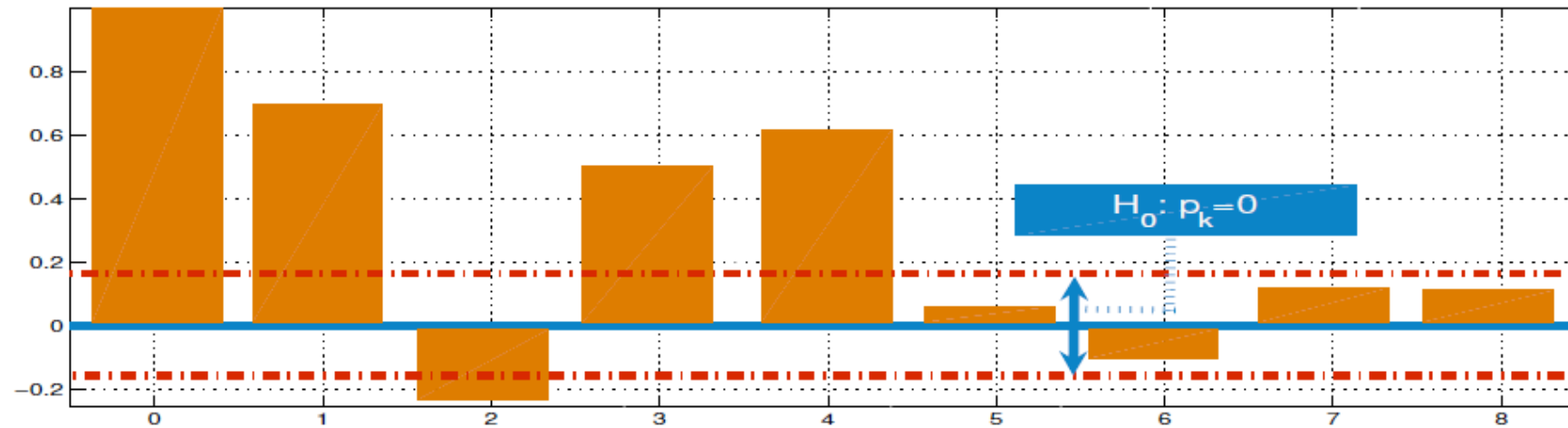
$$MA(q): y_t = \mu + \sum_{j=0}^q \theta_j \epsilon_{t-j}$$

- $E(y_t) = \mu$
- $E(y_t - \mu)(y_t - \mu) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma^2$
- $E(y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu) = [\theta_j + \theta_{j+1}\theta_1 + \dots + \theta_q\theta_{q-j}] \sigma^2$  para  $j = 1, 2, \dots, q$
- $E(y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu) = 0$  para toda  $j > q$



**Figura:** Función de Autocorrelación de un proceso  $MA(q)$

# ¿Cómo seleccionamos el rezago con datos reales?



**Figura:** *FAC* muestral de un *MA*(4) con bandas de confianza

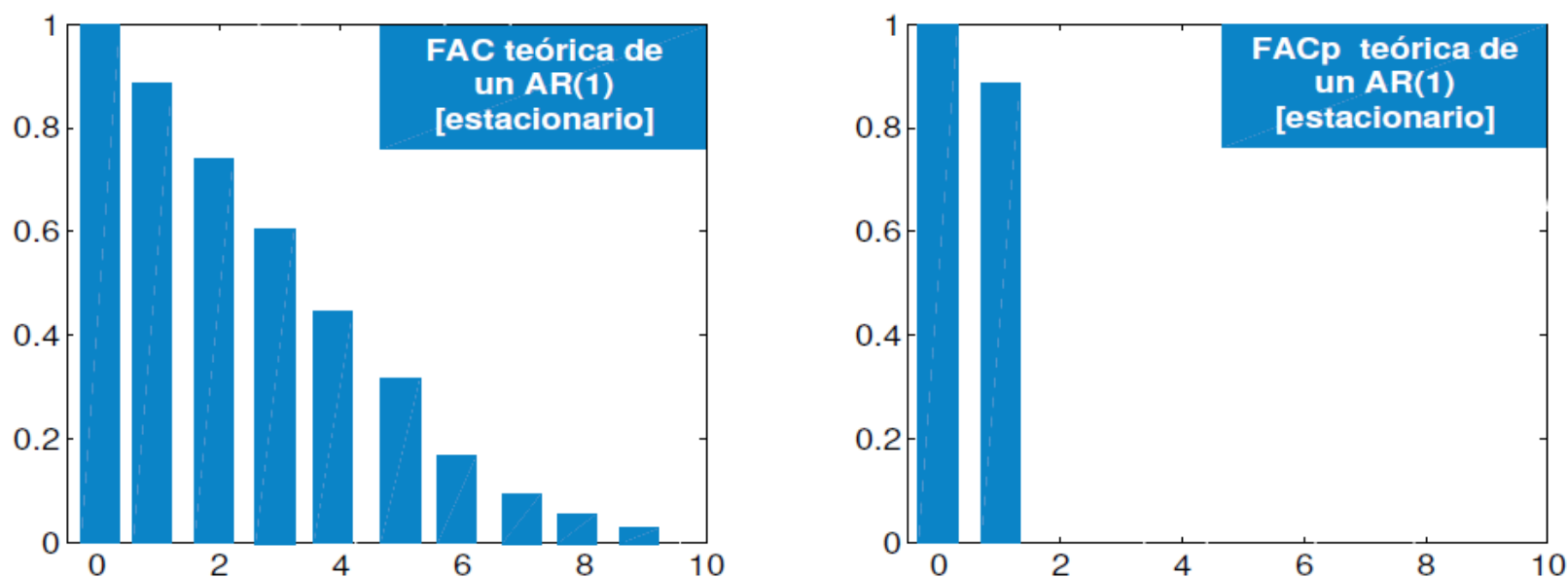
Códigos a usar:

9. MA.R

# La importancia del modelo AR (1)

$$AR(1): y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \epsilon_t$$

- Condición de estacionariedad:  $|\phi_1| < 1$



**Figura:** Correlograma de un Proceso estacionario  $AR(1)$

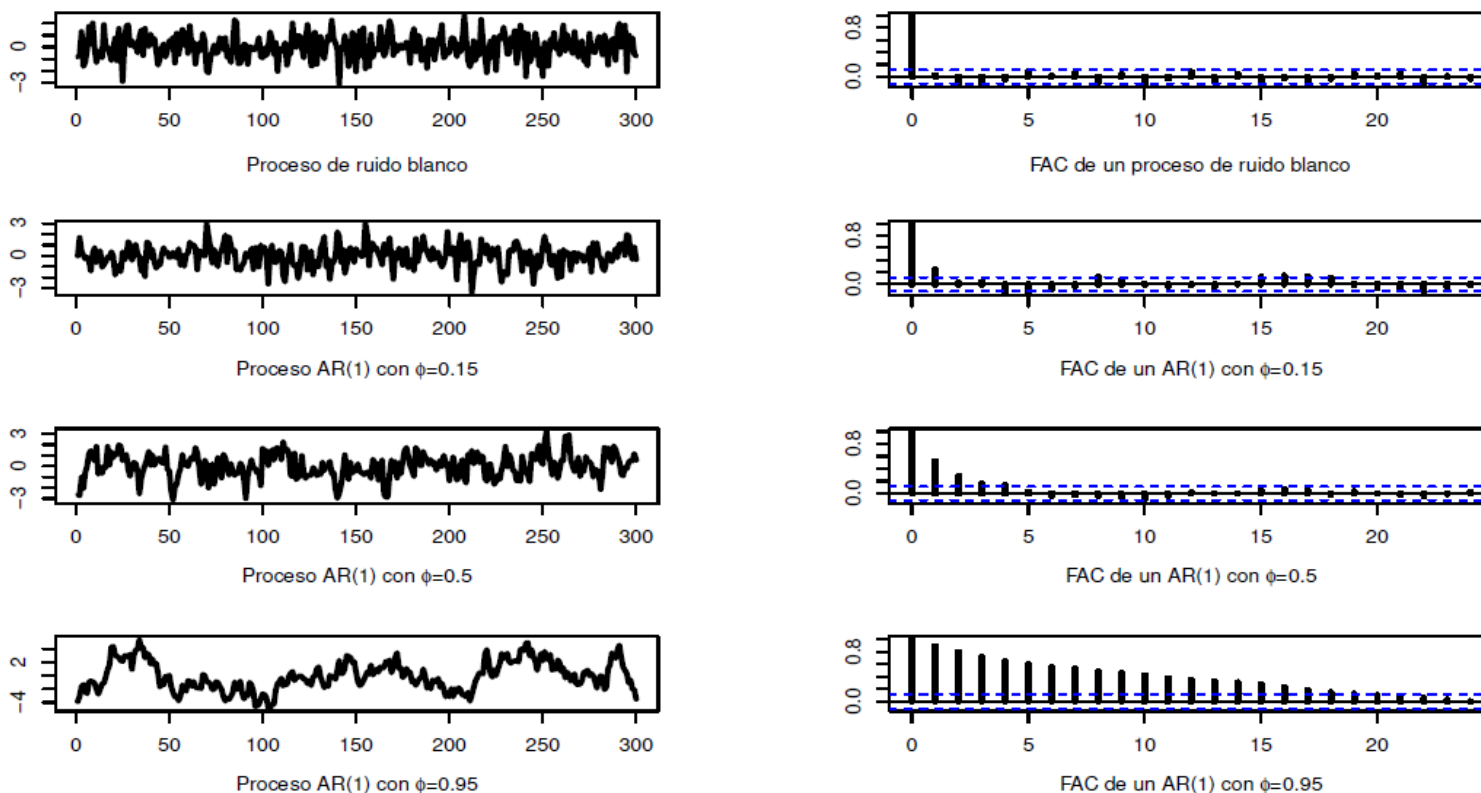


# La idea de persistencia a través del modelo AR (1)

$$\text{AR}(1): y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \epsilon_t$$

- Condición de estacionariedad:  $|\phi_1| < 1$

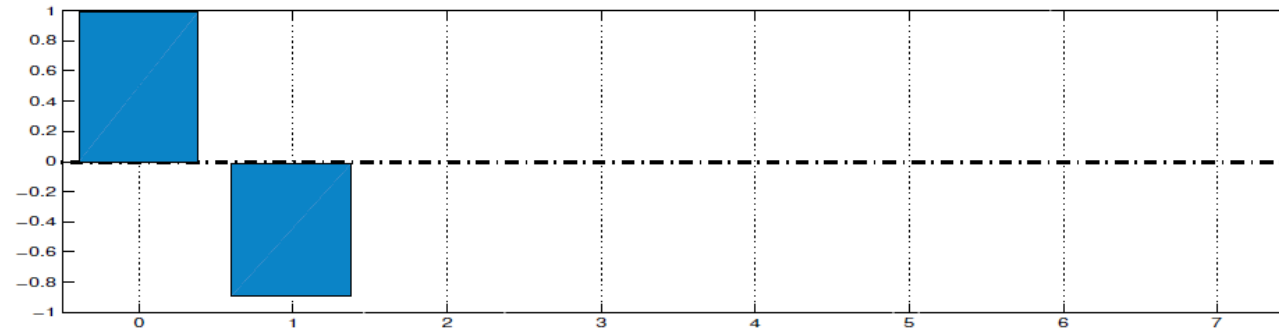
- El parámetro  $\phi$  tendrá un impacto directo en el tiempo que le costará al proceso olvidar el choque sufrido en un momento específico,
- aunque al final de los tiempos no importando el valor de dicho parámetro terminará por olvidarse (esto debido a que  $\phi$  es menor a la unidad).



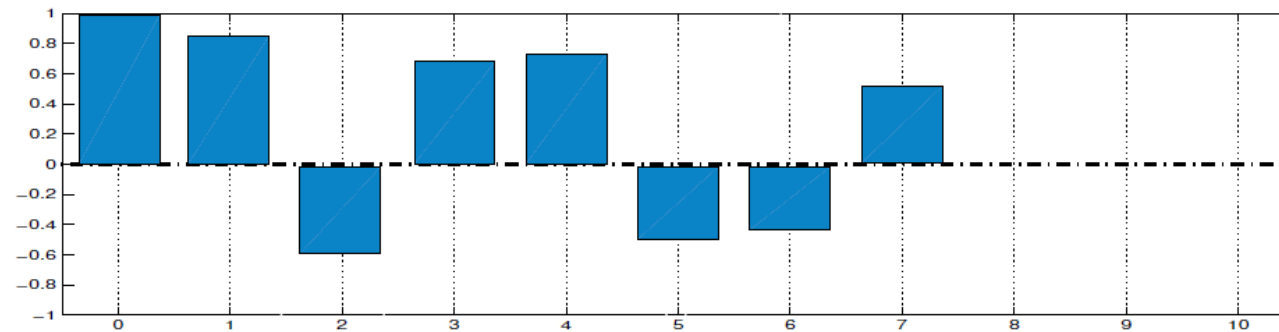
**Figura:** La intuición de la persistencia a través de las FACs de procesos  $AR(1)$ . Primer panel con  $\phi = 0$ , segundo panel con  $\phi = 0,15$ , tercer panel con  $\phi = 0,5$ , cuarto panel con  $\phi = 0,95$ .

# Modelo Autorregresivo de orden p ( AR(p) )

$$AR(p): y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t$$



**Figura:** Función de Autocorrelación parcial de un proceso  $AR(1)$  estacionario



**Figura:** Función de Autocorrelación parcial de un proceso  $AR(7)$  estacionario

Códigos a usar:

10. AR.R

# Modelo Autorregresivo y de Media Móvil ( ARMA(p,q) )

El modelo  $ARMA(p, q)$  dispone tanto de elementos regresivos,  $AR$ , como de elementos de media móvil,  $MA$ :

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q}.$$

- Dado que los procesos ARMA justamente mezclan los comportamientos de un AR y un MA, podemos esperar que las FACp (así como las FAC) se parezcan mucho a procesos MA (o AR en el caso de las FAC).

# Tipificación general de procesos ARMA

Proceso	FAC	FACp
Ruido Blanco	Sin picos, $\rho_s = 0$ , $\forall s = 1, 2$ .	Sin picos, $\theta_s = 0$ , $\forall s = 1, 2, \dots$
$AR(1) \phi_1 > 0$	Decrecimiento exponencial; $\rho_k = \phi^k$ .	$\phi_{11} = \rho_1$ ; $\phi_k = 0$ para $k = 2, 3, \dots$
$AR(1) \phi_1 < 0$	Decrecimiento exponencial; oscilatorio.	$\phi_{11} = \rho_1$ ; $\phi_k = 0$ para $k = 2, 3, \dots$
$AR(p)$	Decrecimiento ( $\rightarrow 0$ ) a partir del último parámetro ( $p$ ) Antes, puede variar.	Picos hasta el último rezago válido ( $p$ ), cero después.
$MA(q) : \theta > 0$	Pico en todos los rezagos hasta $q$ ; cero en los demás.	Decrecimiento geométrico a partir del rezago $q$ .
$ARMA(p, q)$	Picos hasta $\max(p, q)$ ; decrecimiento exponencial después.	Decrecimiento geométrico a partir del rezago $\max(p, q)$ .

**Cuadro:** Tipificación de los correlogramas muestrales

Códigos a usar:

11. tipificacion.R

# **Idea intuitiva de no estacionariedad y el modelo ARIMA**

# No estacionariedad

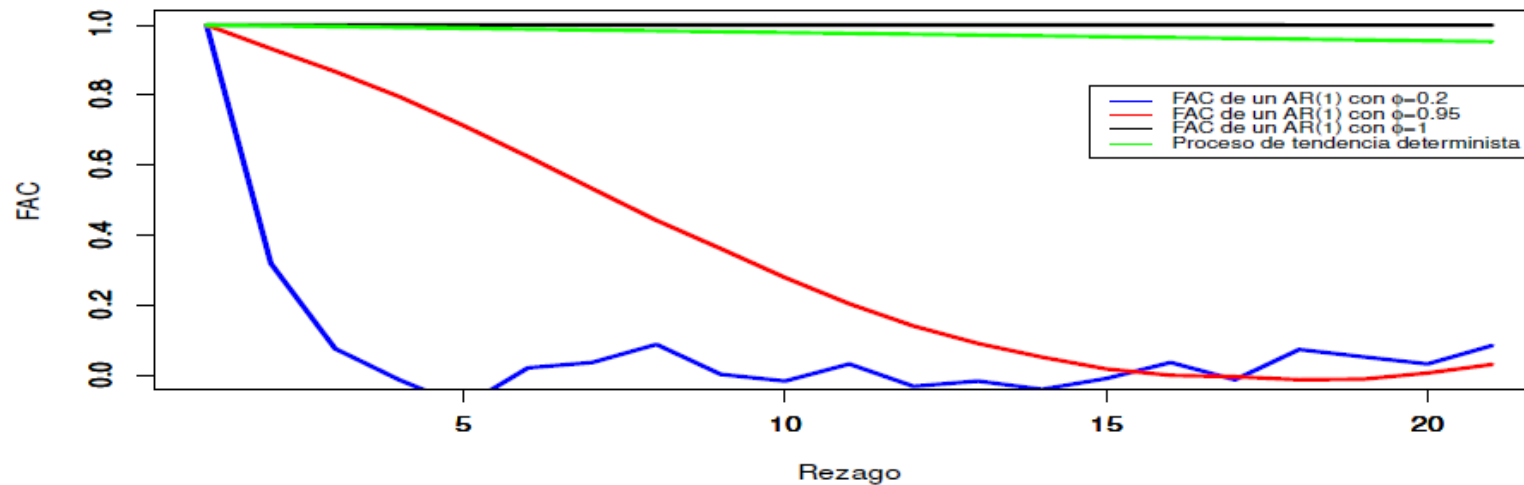
Supongamos un proceso  $AR(1)$  con parámetro igual a la unidad:

$$y_t = y_{t-1} + \epsilon_t.$$

Este modelo no es estacionario.

¿Pero eso qué significa o por qué no es relevante en este curso?

Intuición:

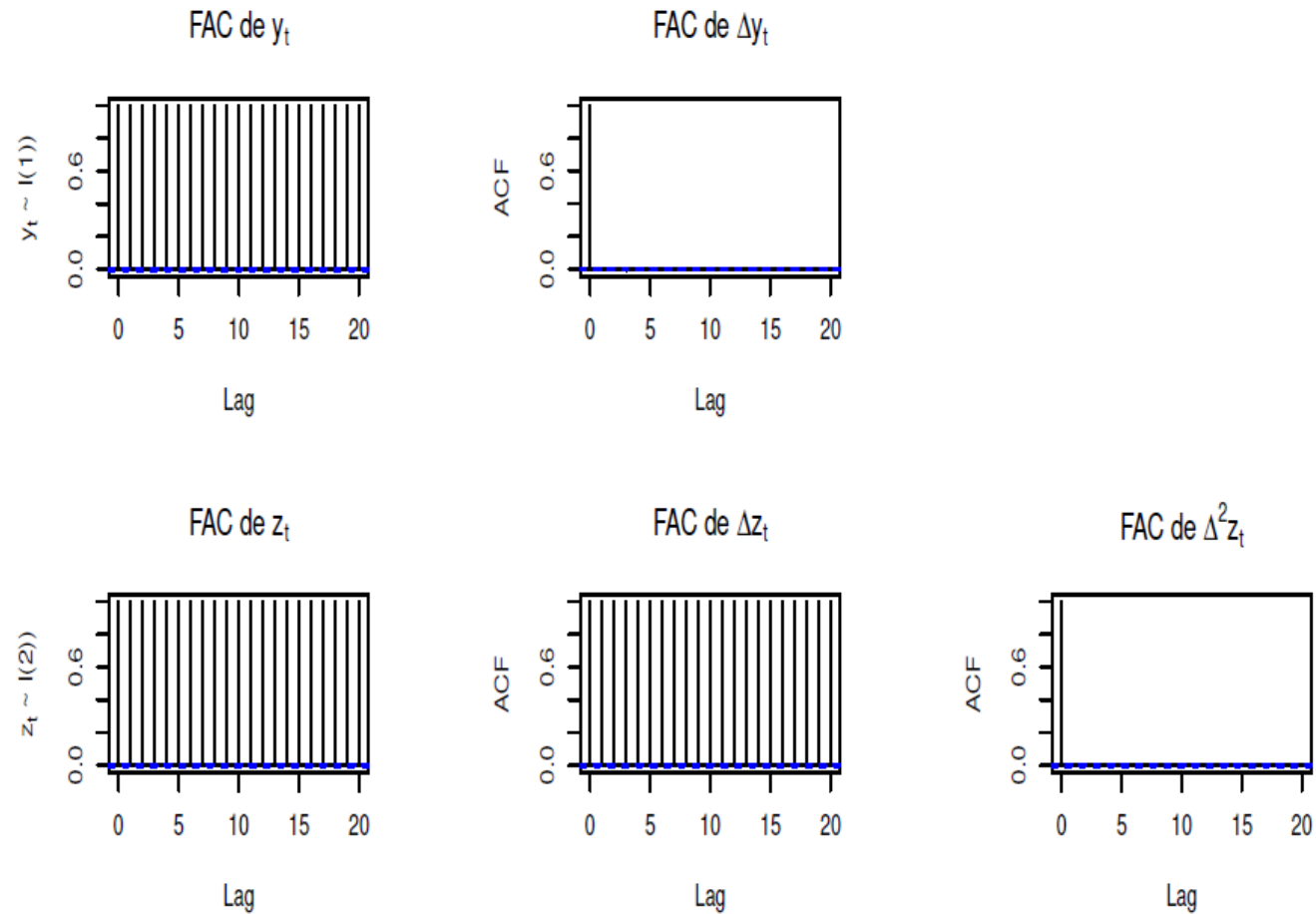


**Figura:** FAC muestral de dos procesos  $AR(1)$  estacionarios (línea azul y roja), y dos procesos no estacionarios (líneas verde y negra). El gráfico superior es generado con  $T = 2,500$ ,

- 1  $u_t \sim I(0)$ : se lee: “ $u_t$  es integrada de orden cero”; quiere decir que hace falta diferenciarla cero veces para hacerla estacionaria. Otra forma de expresar lo anterior es: *todas las raíces del polinomio característico inverso están fuera del círculo unitario.*
- 2  $y_t \sim I(1)$ : se lee: “ $y_t$  es integrada de orden uno”; quiere decir que hace falta diferenciarla una vez para hacerla estacionaria. Dicho de otra forma: *Una raíz del proceso AR está sobre el círculo unitario.*
- 3  $z_t \sim I(k)$ : se lee: “ $z_t$  es integrada de orden  $k$ ”; quiere decir que hace falta diferenciarla  $k$  veces para hacerla estacionaria. Dicho de otra forma:  *$k$  raíces del proceso AR están sobre el círculo unitario.*

Entonces, si  $y_t \sim I(k) \implies \Delta^k y_t \sim I(0)$ .





**Figura:** Función de autocorrelación de procesos  $I(1)$  e  $I(2)$  y las FAC de sus propias diferencias.

# Procesos ARIMA (p,d,q)

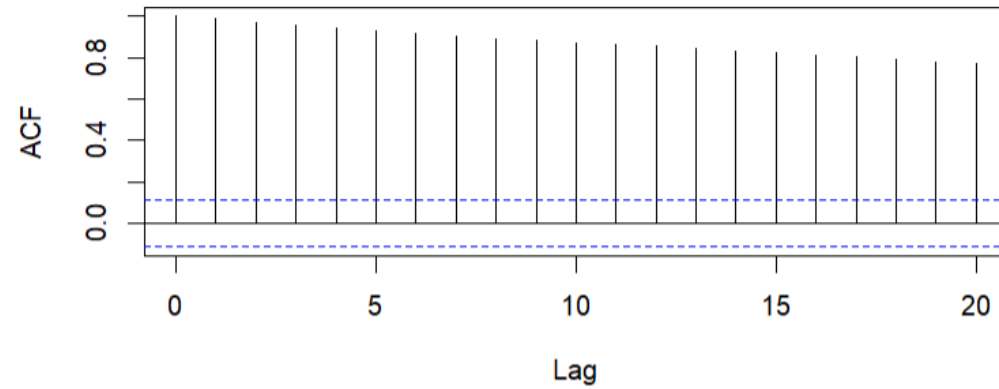
$$\begin{aligned} \left(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p\right) (1 - L)^d y_t &= c + (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q) \epsilon_t, \\ \Phi (1 - L)^d y_t &= c + \Theta (L) \epsilon_t. \end{aligned} \tag{1}$$

- El proceso tiene una parte autorregresiva y estacionaria de orden  $p$ ,
- otra parte de media móvil de orden  $q$ , y
- finalmente,  $d$  es un indicador del número de raíces unitarias que posee el proceso.

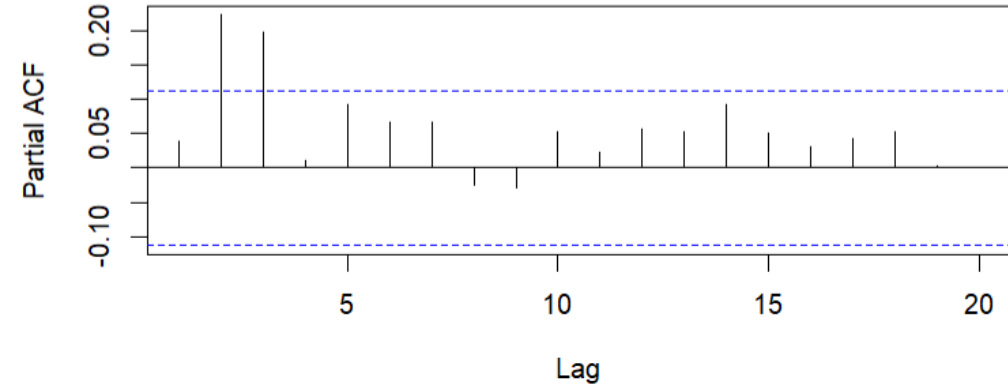
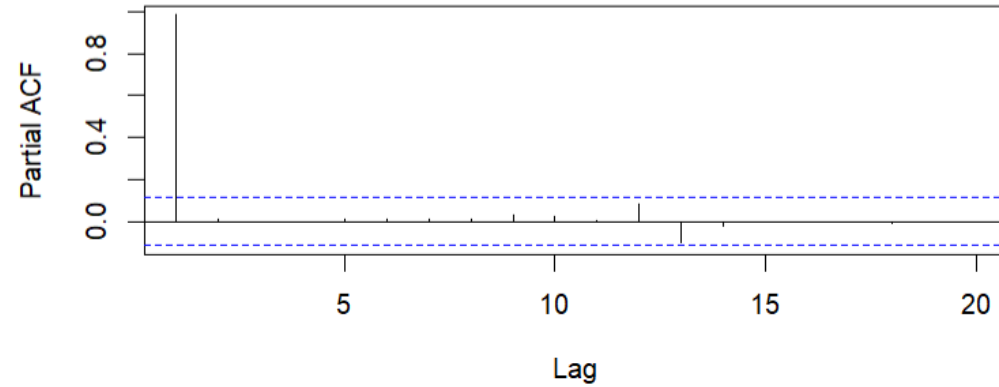
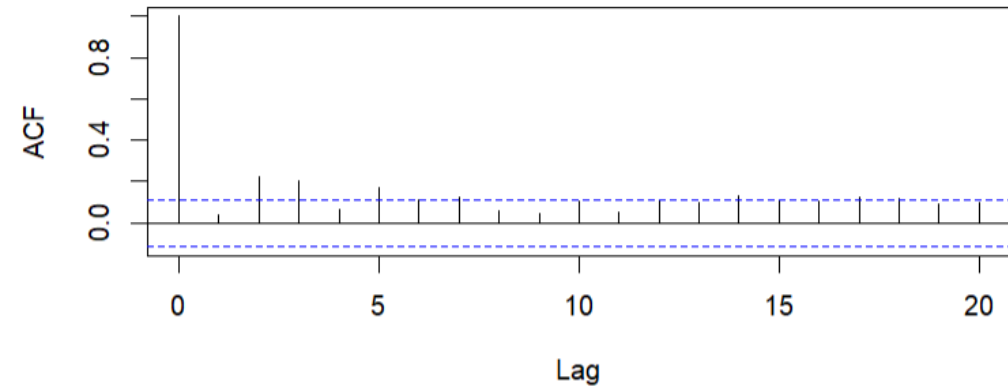
Al especificar  $\Delta^d y_t$  debemos entender que el (nuevo) proceso es estacionario, es decir, dado que  $y_t \sim I(d)$  entonces  $\Delta^d y_t \sim I(0)$ .

# Procesos ARIMA (p,d,q)

**Correlograma PCEC**



**Correlograma PCEC en 1as diferencias**



# **Estimación de modelos de series de tiempo**

- Aquí estamos interesados en la estimación de modelos ARIMA basados en la serie de tiempo observada  $y_1, y_2, \dots, y_n$
- Tenemos que asumir que el modelo ya ha sido especificado. Ya tenemos valores específicos para  $p$  y  $q$  usando una visualización simple del correlograma.
- Aún no sabemos cómo estimar  $d$ , pero podemos asumir que puede ser  $d = 0$  o  $d = 1$  dependiendo del correlograma de la variable en niveles.
- Recordar que tomar la  $d$ -ésima diferencia de la serie observada nos conduciría a tener un proceso ARMA( $p, q$ ) estacionario.
- Solo nos interesa el problema de estimación de dicho proceso ARMA( $p, q$ ) estacionario.

## Usaremos el paquete y la librería TSA

```
#install.packages("TSA")  
library(TSA)
```

El comando “ **arima** ” nos permitirá estimar nuestros modelos anteriormente explicados

```
arima(x, order = c(0, 0, 0), seasonal = list(order = c(0, 0, 0), period = NA),  
      xreg = NULL, include.mean = TRUE, transform.pars = TRUE, fixed = NULL,  
      init = NULL, method = c("CSS-ML", "ML", "CSS"), n.cond, optim.control = list(),  
      kappa = 1e+06, io = NULL, xtransf, transfer = NULL)
```

## O bien el paquete y la librería asts

El comando “ **sarima** ” nos permitirá estimar nuestros modelos anteriormente explicados (y otros que no ahondaremos mucho al respecto)

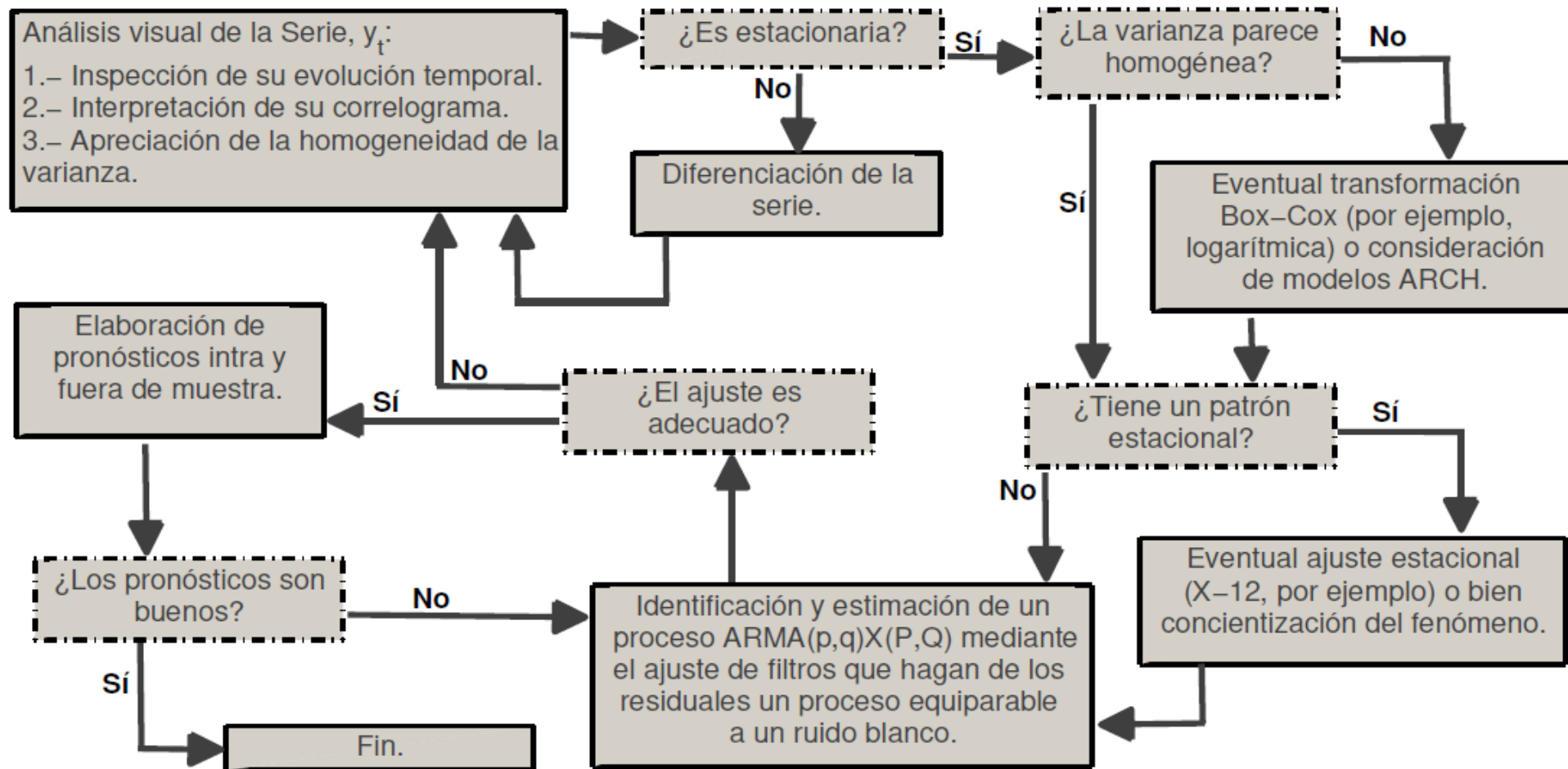
```
sarima(xdata, p, d, q, P = 0, D = 0, Q = 0, S = -1,  
       details = TRUE, xreg=NULL, Model=TRUE,  
       fixed=NULL, tol = sqrt(.Machine$double.eps),  
       no.constant = FALSE, ...)
```

Códigos a usar:

12. estimacion.R

# **Ajuste y predicción**

# Metodología Box & Jenkins



**Figura:** Diagrama de la Metodología Box-Jenkins con pequeñas adaptaciones.



# Regresemos a la estacionalidad

## ¿Qué hacer con la estacionalidad?

A menos que la misma estacionalidad sea nuestro objeto de estudio, ésta redundará en una fuente adicional de “ruido” que puede dificultar el análisis de la serie de tiempo. Por lo mismo, se suele recomendar remover dicho componente estacional o bien modelarlo.

Opciones:

- 1 Eliminar la estacionalidad por medio del uso de promedios móviles como se explicó en el primer tema del curso.
- 2 Eliminar la estacionalidad por medio de un modelo determinista.
- 3 El método **X-12-ARIMA**, desarrollado por el *Census Bureau* Norteamericano.
- 4 El método **TRAMO-SEATS**, desarrollado en el Banco de España por Agustín Maravall en 1997.
- 5 La más reciente metodología **X-13ARIMA-SEATS**, desarrollado por el *Census Bureau* Norteamericano. Combina y extiende las capacidades de los dos anteriores (X-12ARIMA y TRAMO-SEATS).

Códigos a usar:

**13. X13ARIMASEATS.R**

# **Pronóstico y evaluación**

# Pronóstico de un modelo AR(1)

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \epsilon_t.$$

## Pronósticos por pasos:

Empecemos por el pronóstico a un paso.

$$y_{T+1} = c + \phi y_T + \epsilon_{T+1}.$$

Nuestro interés radica en obtener  $E(y_{T+1}|\mathcal{F}_T) \equiv E_T(\cdot)$

$$E_T(y_{T+1}) = c + \phi y_T$$

Este resultado lo podríamos extender al periodo  $t + 2$ . En otras palabras, podríamos obtener un pronóstico en dos pasos:

$$\begin{aligned} E_T(y_{T+2}) &= c + \phi E_T(y_{T+1}), \\ &= c + \phi c + \phi^2 y_T, \\ &= c(1 + \phi) + \phi^2 y_T. \end{aligned}$$

El pronóstico en  $h$  pasos sería:

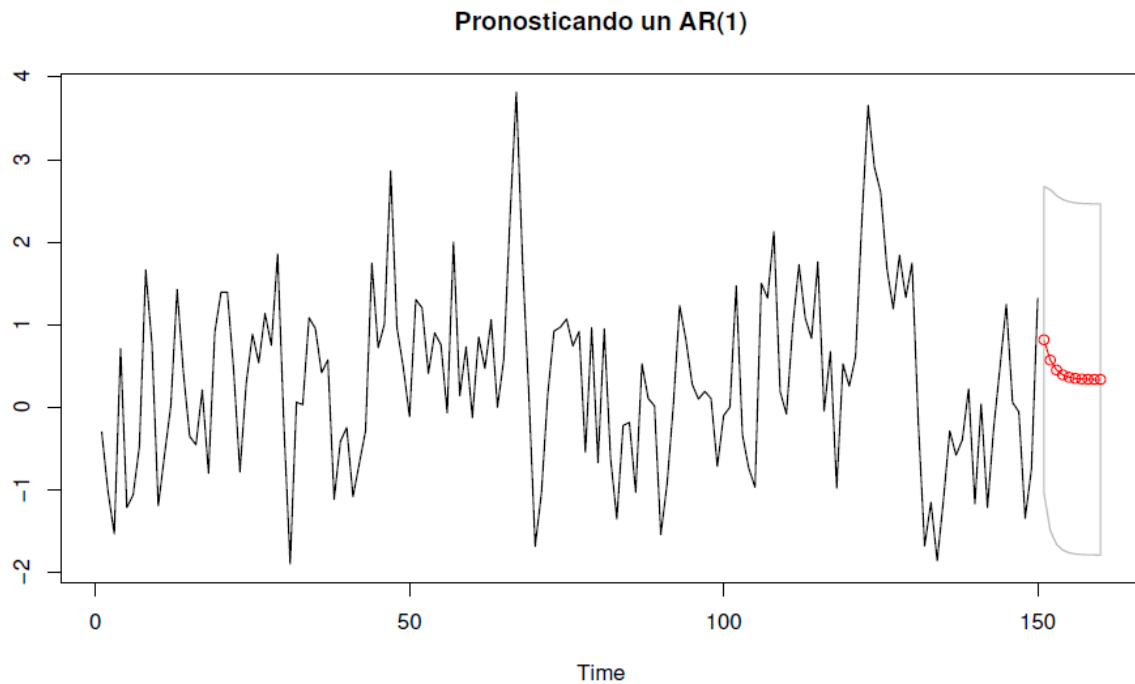
$$\begin{aligned} E_T(y_{T+h}) &= c + \phi E_T(y_{T+h-1}), \\ &= c(1 + \phi + \phi^2 + \phi^3 + \dots + \phi^{h-1}) + \phi^h y_T. \end{aligned}$$

**Cuando el horizonte de pronóstico está demasiado lejano (por ejemplo queremos pronosticar un año con datos diarios), el pronóstico condicional tiende a la esperanza incondicional del proceso.**

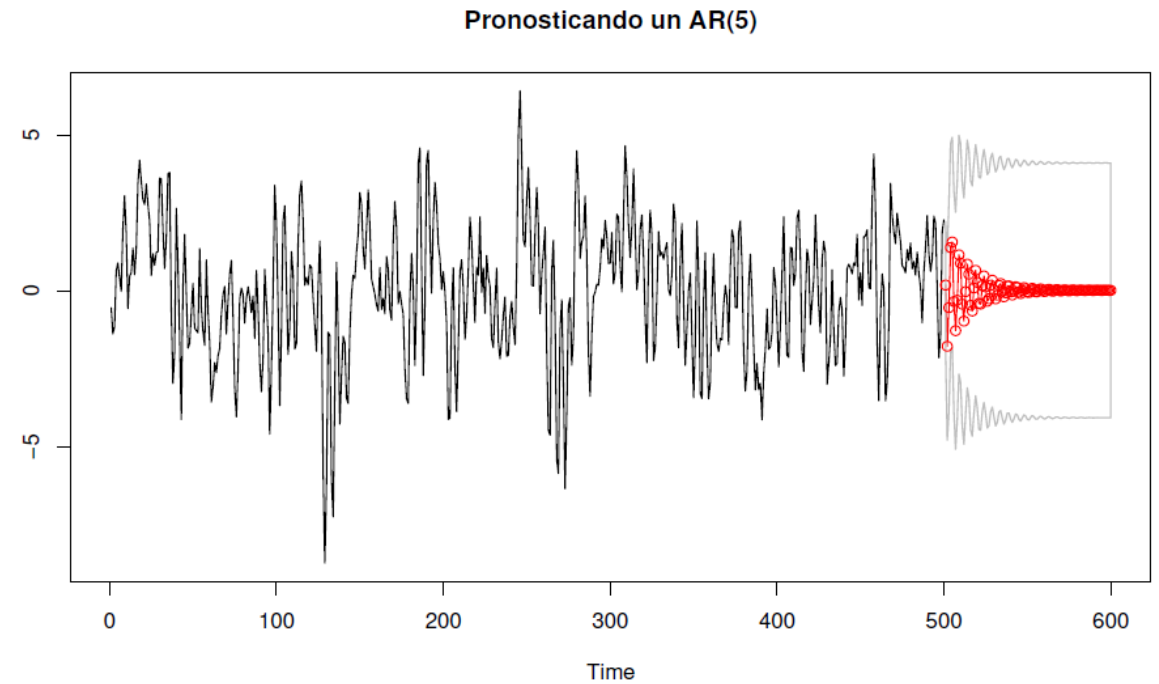
# Pronóstico de un modelo AR(1)

Los resultados matemáticos de la diapositiva anterior se pueden generalizar. Pero el hecho siempre es el mismo:

**Si el horizonte de pronóstico es muy lejano, el pronóstico será la media del proceso.**



**Figura:** Pronosticando un AR(1) con  $\phi = 0,5$



**Figura:** Pronosticando un AR(5)

# Pronóstico de un modelo MA(1)

Consideremos el proceso MA(1)  $y_t = \mu + \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1}$ .

Pronóstico a un paso:

$$y_{T+1} = \mu + \epsilon_{T+1} + \theta\epsilon_T.$$

Tomando la respectiva esperanza condicional, tenemos

$$E_T(y_{T+1}) = \mu + \theta\epsilon_T,$$

Pronóstico a dos pasos:

$$y_{T+2} = \mu + \epsilon_{T+2} + \theta\epsilon_{T+1}.$$

Tomando la respectiva esperanza condicional, tenemos

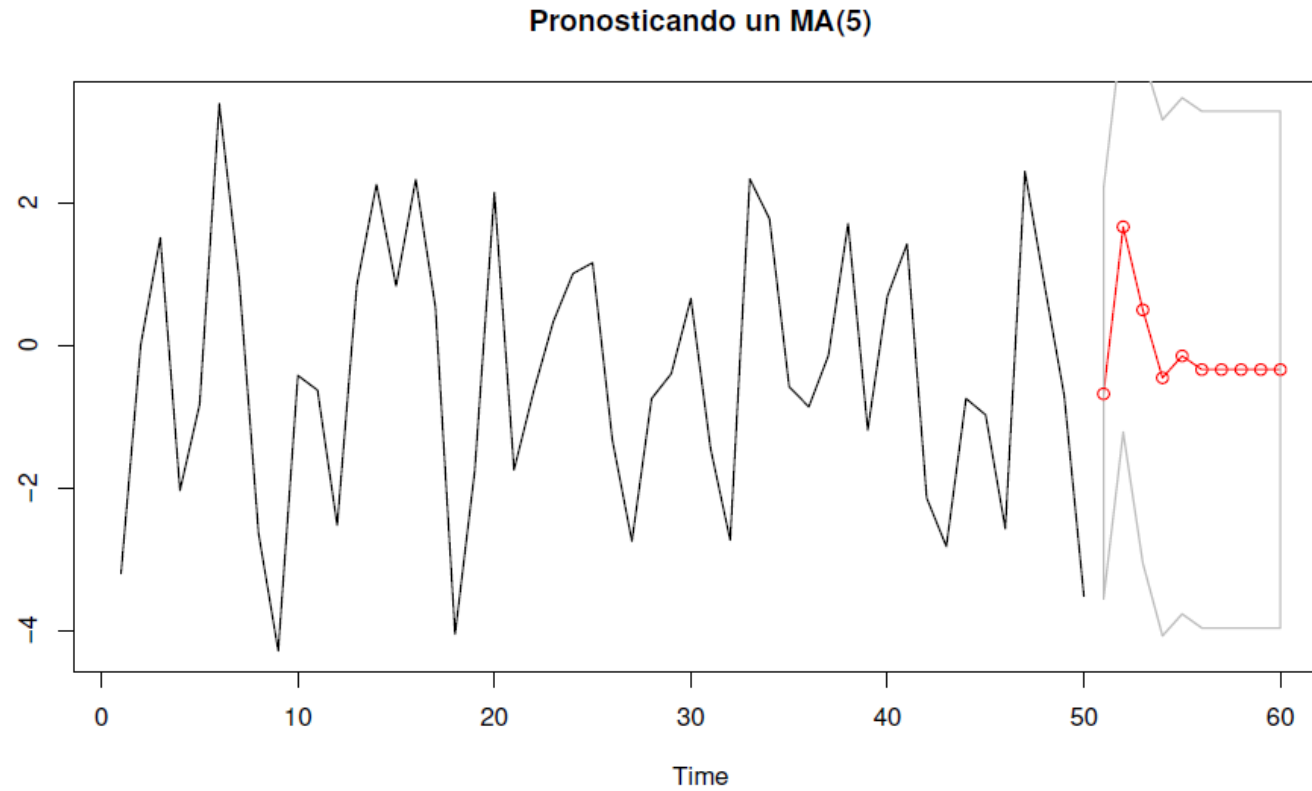
$$E_T(y_{T+2}) = \mu,$$

**Para un modelo MA(1), el pronóstico a 2 pasos es simplemente la media incondicional del modelo. Evidentemente para cualquier pronóstico de mayor horizonte será de igual forma.**

## Regla en el pronóstico de un MA(q)

Para un modelo MA(q), los pronósticos tenderán a la media del proceso después de los primeros q periodos de pronóstico.

# Pronóstico de un modelo MA(1)

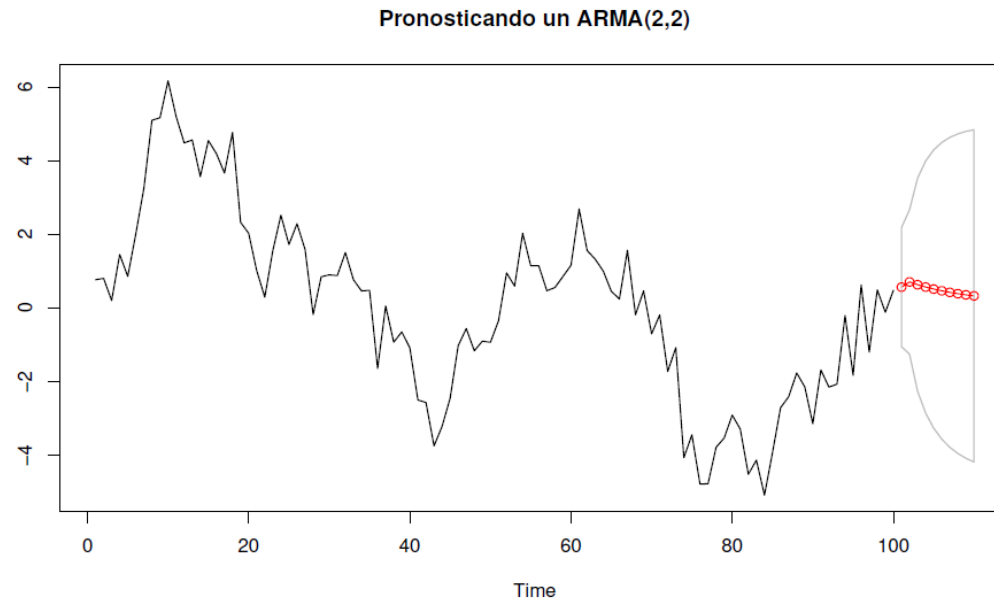


**Figura:** Pronosticando un MA(5)

# Pronóstico de un modelo ARMA(1,1)

Supongamos un modelo ARMA(2,2)

- En la elaboración de los pronósticos de  $h$  pasos, donde  $j < q$  (en nuestro caso,  $q = 2$ ), la parte  $MA(q)$  del modelo aporta información al pronóstico.
- Conforme el horizonte de pronóstico se extiende,  $h \rightarrow \infty$  los pronósticos convergen a la esperanza incondicional del proceso  $ARMA(2,2)$ .

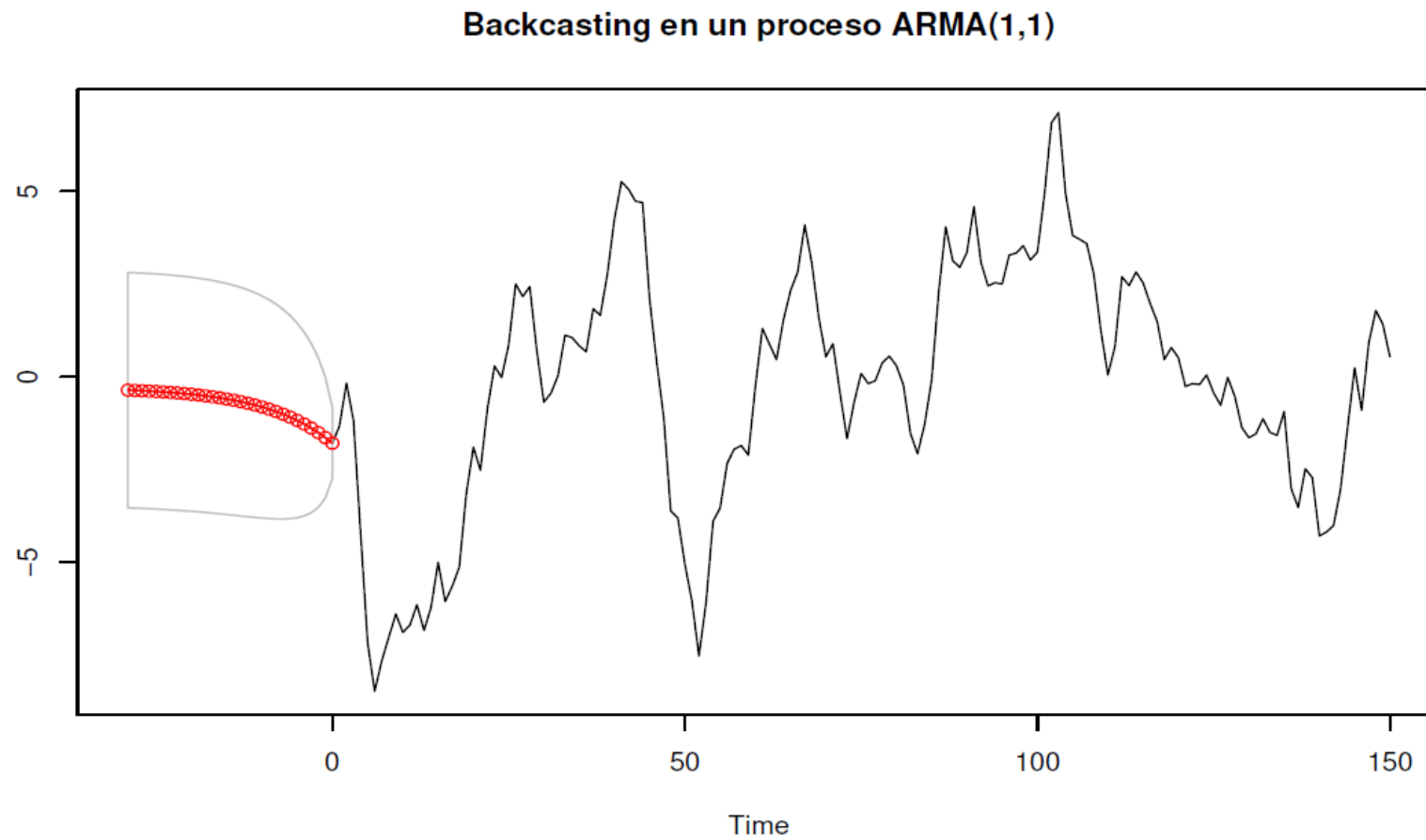


**Figura:** Pronosticando un ARMA(2,2)

- Mientras que 'forecastear' implica predecir el futuro basado en el análisis de tendencias actuales.
- 'backcastear' aborda el desafío de discutir el futuro desde la dirección opuesta.
- **Forecasting** implica la predicción de los valores futuros (desconocidos) de las variables dependientes en base a los valores conocidos de la variable independiente.
- **Backcasting** implica la predicción de los valores desconocidos de las variables independientes que podrían haber existido, a fin de explicar los valores conocidos de la variable dependiente.

**La mejor predicción lineal hacia atrás es la misma que hacia adelante para modelos estacionarios.**





**Figura:** Backcasting

# Pongamos en práctica todo lo anterior:

**Códigos a usar:**

**14. pronosticos.R**

**15. Pronostico variables reales.R**

# **Métodos sofisticados de pronóstico y un ejemplo directo de aplicación**

# Expanding windows

- También conocido como 'Recursive forecast'
- Tenemos una muestra inicial  $t = 1, \dots, T$ .
- La ventana de longitud  $T$  la usamos para estimar los modelos.
- Pronosticamos la serie  $h$  períodos fuera de muestra (out-of-sample) empezando en el periodo  $T$ .
- Entonces la ventana de observaciones es **incrementada** un período adelante, y los modelos son re-estimados usando las observaciones  $t = 1, \dots, T + 1$ .
- Entonces volvemos a pronosticar la serie  $h$  períodos fuera de muestra ahora empezando en el periodo  $T + 1$ .

$[1, \dots, t, \dots, t + h]$

$[1, \dots, t + 1, \dots, t + h + 1]$

$\vdots$

$[1, \dots, t + N, \dots, t + h + N]$

# Rolling windows

- Tenemos una muestra inicial  $t = 1, \dots, T$ .
- La ventana de longitud  $T$  la usamos para estimar los modelos.
- Pronosticamos la serie  $h$  períodos fuera de muestra (out-of-sample) empezando en el periodo  $T$ .
- Entonces la ventana de observaciones es movida un período adelante, y los modelos son re-estimados usando las observaciones  $t = 2, \dots, T + 1$ .
- Entonces volvemos a pronosticar la serie  $h$  períodos fuera de muestra ahora empezando en el periodo  $T+1$ .

$[1, \dots, t, \dots, t + h]$

$[2, \dots, t + 1, \dots, t + h + 1]$

$\vdots$

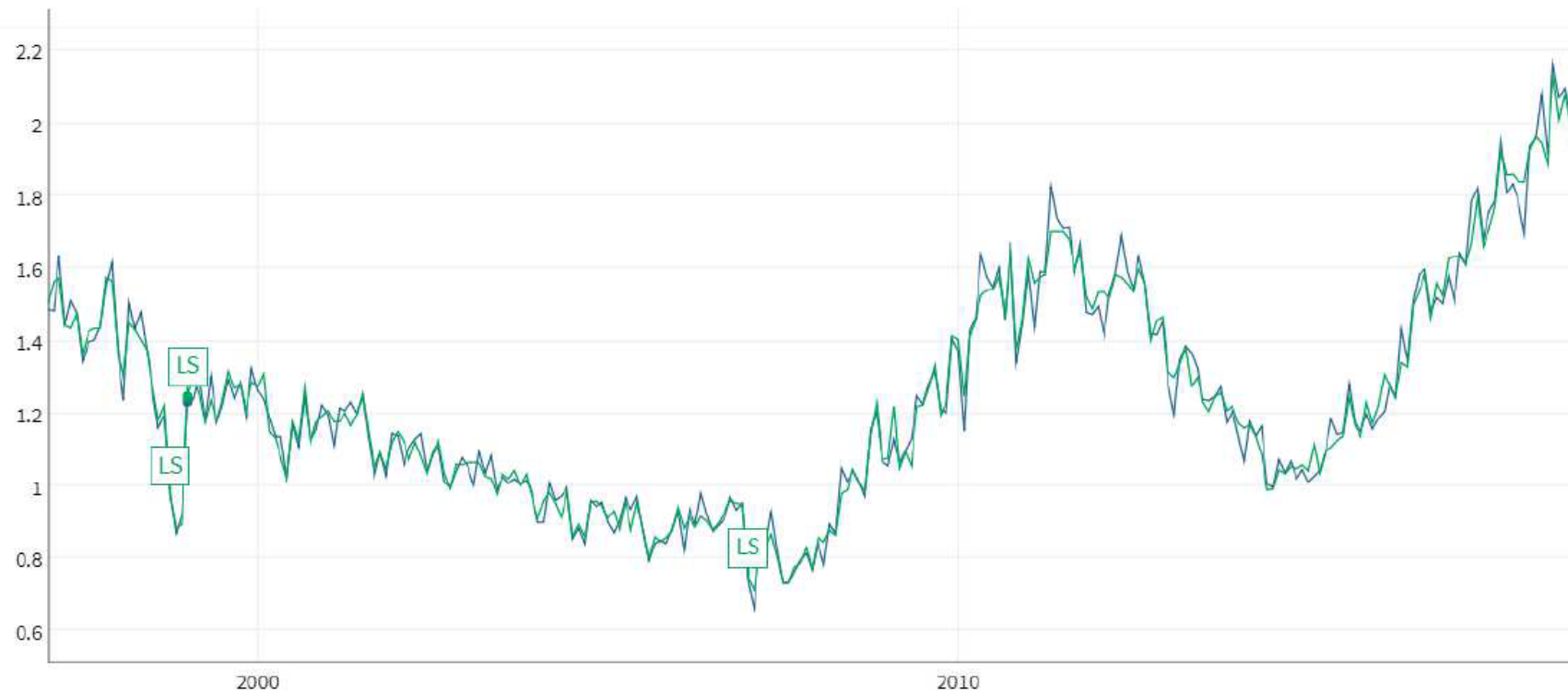
$[N, \dots, t + N, \dots, t + h + N]$

Códigos a usar:

16. Rolling Windows.R

# Nuestro ejemplo de homicidios.

Usemos nuestra serie de la tasa de homicidios dolosos para ejemplificar el uso del método X-13-ARIMA-SEATS. Obtenemos que el mejor modelo está dado por un  $ARIMA(0\ 1\ 1)(1\ 0\ 1)$ .



**Figura:** Ajuste de la tasa de homicidios por cada cien mil habitantes vía X-13-ARIMA-SEATS con la configuración descrita anteriormente. La línea sólida azul representa la serie original mientras que la verde es la ajustada.

# Nuestro ejemplo de homicidios.

i) se separan las componentes vía el método de nuestra elección, ii) se modela la tendencia y el componente estacional, iii) se pronostican ambas series y se juntan los pronósticos.

A continuación presentamos el pronóstico a 12 pasos de la serie en cuestión.

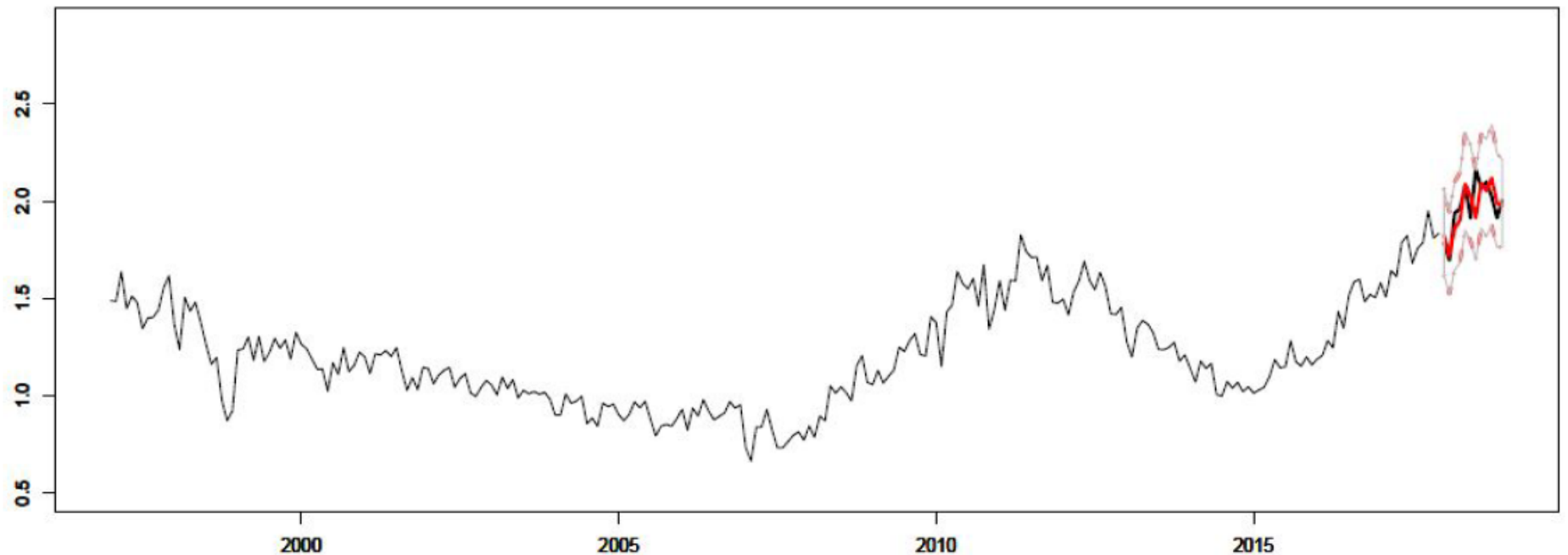


# Nuestro ejemplo de homicidios.

## X13-ARIMA-SEATS con Rolling windows

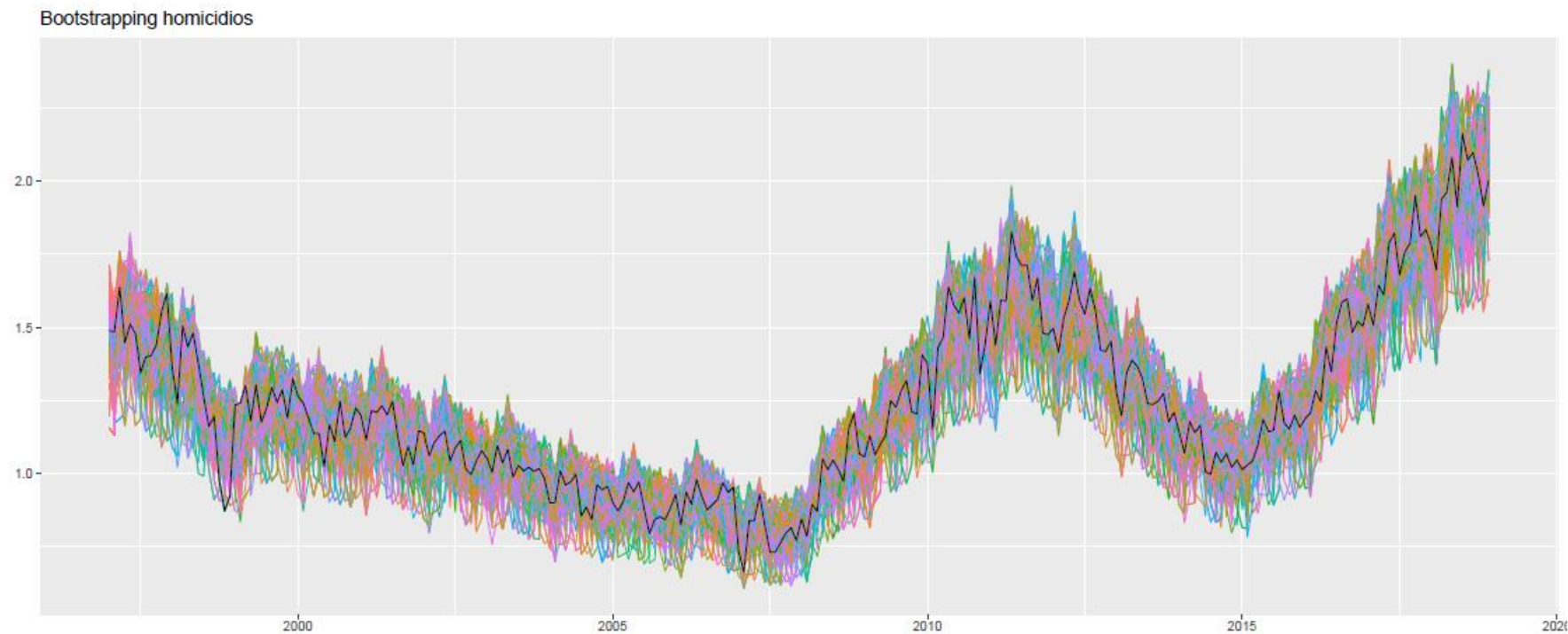
Tenemos la serie de homicidios hasta diciembre de 2017, entonces ajustamos el mejor modelo usando X-13-ARIMA-SEATS y pronosticamos a un paso. Después, usando el dato real de enero de 2018, volvemos a ajustar un modelo mediante la misma metodología y volvemos a pronosticar a un paso. Repetimos el ejercicio con cada nuevo dato hasta noviembre de 2018.

Pronosticando la tasa de homicidio doloso via rolling windows a un paso





## Bootstrapping y Bagging



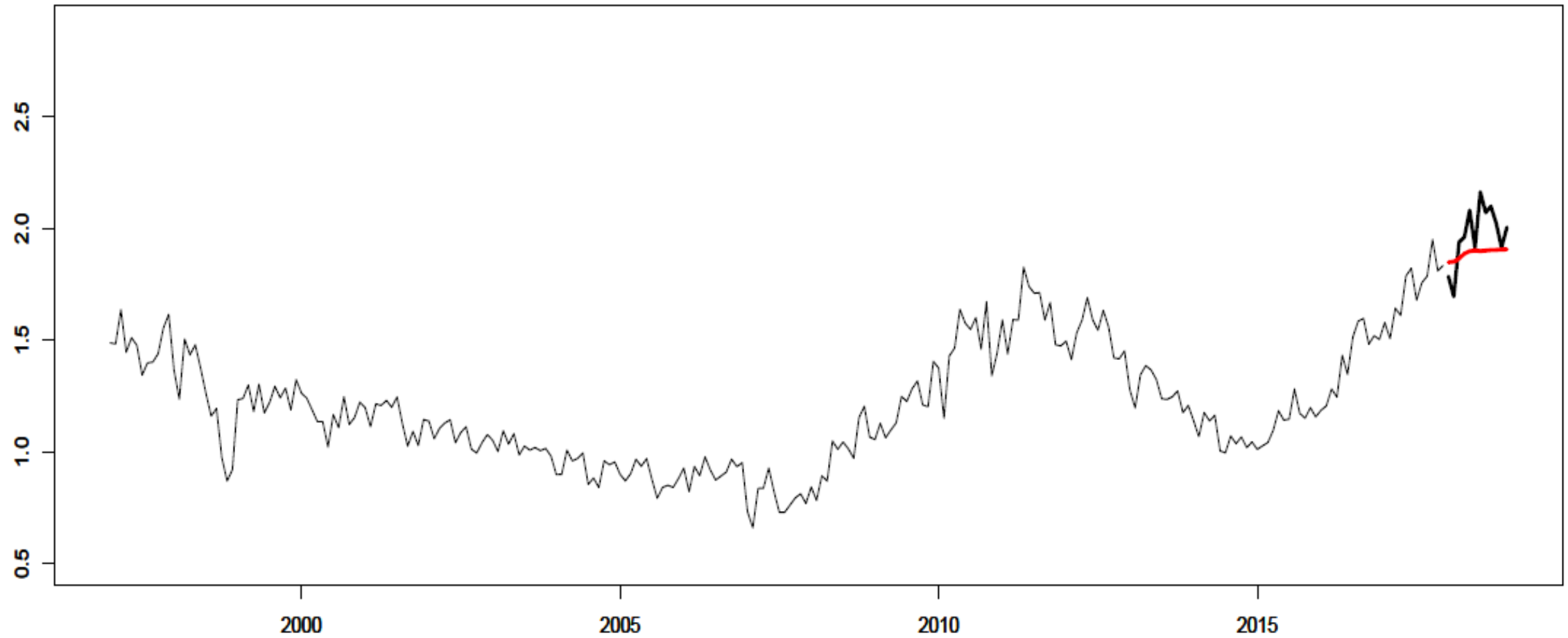
**Figura:** Bootstrapping por bloques de la serie de homicidios. Cada línea coloreada es una serie bootstrap. La línea en negro es la serie original de la tasa de homicidios. Los bloques han sido determinados de forma fija, con una longitud de 6. En la figura se muestran 500 series bootstrap.

## Bagging

- La técnica *bagging* es un método general de estimación. Fue introducido por Breiman (1996) y ha sido ampliamente usado en aplicaciones de pronóstico. No entraremos en muchos detalles por la rigurosidad técnica que necesitaríamos.
- Lo importante en cuestión es recordar que combinar pronósticos podría llegar a ser mucho mejor que solo pronosticar directamente una serie. El *bagging* nos permite justamente lograr esto.
- ¿Cómo? Pues fácil, piense que en la figura anterior ya tenemos 500 series a pronosticar, si logramos pronosticar cada una de ellas y luego obtener un promedio (aunque sea el simple) obtendremos nuestra muy buscada forma de combinar pronósticos.

# Nuestro ejemplo de homicidios.

Pronosticando la tasa de homicidio doloso vía Bagging



Retomando el ejercicio del pronóstico de la tasa de homicidios, en la tabla siguiente encontramos el valor de los principales criterios de evaluación de los pronósticos que hemos hecho mediante i) la metodología X-13-ARIMA-SEATS a doce pasos, ii) *rolling windows* a un paso durante 12 periodos, y iii) utilizando el método de *bagging*.

	RMSE	MSPE	MAE	MAPE	Theil
<i>Bagging</i>	0.139	0.019	0.118	5.877	0.036
<i>Rolling windows</i>	0.093	0.009	0.069	3.462	0.023
X-13-ARIMA-SEATS	0.089	0.008	0.068	3.369	0.022

**Cuadro:** Evaluación del pronóstico de la tasa de homicidios durante el año 2019.

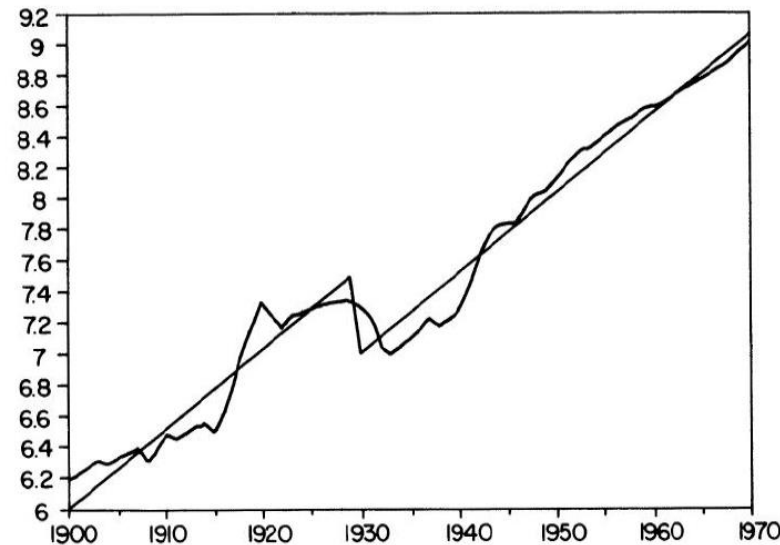
**Una visión fugaz a la idea de  
los rompimientos estructurales**

# Rompimientos estructurales (*breaks*)

Pierre Perron (un profesor de la Universidad de Boston y econometrista muy famoso) a principios de los 90s desarrolló una teoría en la que argumentaba que solo dos eventos han tenido efectos permanentes sobre las variables macroeconómicas: el gran choque de 1929 y el choque de los precios de petróleo en 1973.

Postulado: Estos choques excepcionales no fueron una realización de la propia serie temporal, sino que fueron exógenos a estos. Estas intervenciones suponen que ocurren en una fecha conocida.

En las décadas siguientes, a raíz de la teoría de Perron, se optó por analizar si las series macroeconómicas poseían rompimientos estructurales.



Note: The broken straight line is a fitted trend (by OLS) of the form  $\tilde{y}_t = \tilde{\mu} + \tilde{\gamma} DU_t + \tilde{\beta} t$  where  $DU_t = 0$  if  $t \leq 1929$  and  $DU_t = 1$  if  $t > 1929$ .

**Figura:** Un modelo tipo (A) de salarios nominales.

# Rompimientos estructurales (*breaks*)

... las décadas pasaron y muchas metodologías se han desarrollado para estimar dichos rompimientos estructurales.

El método propuesto por (Bai y Perron 1998 y 2003) trata con múltiples breaks desconocidos, lo que hace que la metodología sea adecuada para una amplia gama de aplicaciones. No es la más moderna pero sí la tenemos en R y es muy fácil de implementar...

**Último código a usar:**

**18. breaks.R**