

中山大学本科生期末考试

考试科目:《电子人的自我修养》(π 卷)

学年学期: 2020–2021 学年第 1 学期

姓 名: _____

学 院/系: School of Rader

学 号: _____

考试方式: 开卷

年级专业: _____

考试时长: ∞ 分钟

班 别: _____

警示

《中山大学授予学士学位工作细则》第八条:“考试作弊者,不授予学士学位.”

————— 以下为试题区域, 共 7 道大题, 总分 100 分, 考生请在答题纸上作答 —————

1 文类说明

此文本类的设计萌生于期末复习数字信号处理做试卷之时, 在复习不下去的时候便敲打敲打键盘, 构建了基本的骨架——权当复习的放松与娱乐.

`sysuexam.cls` 文类是基于橘子数学社区开发的 `BCHexam.cls` Version 1.5 文类, 进行修改和设计, 在此致谢.

本文档包含三部分——文类说明、版本说明和样卷与说明. 样卷试题来源于平时练习与考试试卷, 片面反映一个电子人的素养.

样卷中的绘图都是基于宏包 `TikZ` 和 `PGF` 宏包绘制, 感谢 Prof.Till Tantau 发明出如此强大的宏包, 更感谢 Prof.Donald Ervin Knuth 和无数程序员开发出 $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 和 $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, 让鄙人领略到代码改变世界的精彩.

2020.01.17

1.1 宏包选项

- `answers` 编译答案和解析版本
- `list` 以列表项目格式显示试题
- `twocolumn` 使用 A3 纸张并分栏
- `custom` 使用私订字体 (存在修改 $\text{CT}_\text{E}\text{X}$ 默认字体警告, 不影响使用)
- `adobe` 使用 Adobe 字体
- `ubuntu` 使用 Ubuntu 字体
- `windows` 使用 Windows 字体
- `fandol` 使用 Fandol 字体, 随 $\text{T}_\text{E}\text{XLive}$ 默认安装
- `mac` 使用 Mac 字体
- `csize5` 默认字体大小为五号
- `csize4` 默认字体大小为小四

1.2 字体安装

1.2.1 私订配置

此文类中文字体为思源宋体、微软雅黑、方正楷体和方正仿宋; 英文字体使用 XITS、Arial 和 Courier New; 数学字体采用 XITS Math. XITS 是 Times New Roman 的复刻版本, 字符更加齐全; 英文字体和数学字体的统一可以让段落模式和数学模式的标点符号一致. 此字体配置仅代表个人审美偏好, 姑且将此字体配置称为私订配置.

在 Windows 系统上, 把文件夹 `fonts` 中的字体 (不要修改字体名称) 拷贝到路径 `C:\Windows\Fonts` 中. 如果使用 $\text{MiK}_\text{T}_\text{E}\text{X}$, 则可以直接编译. $\text{MiK}_\text{T}_\text{E}\text{X}$ 第一次编译时可能会编译失败, 因为有些宏包可能没安装, 可以手动安装或者多次编译, 让其自动安装.

如果使用 $\text{T}_\text{E}\text{XLive}$, 则还要把字体文件拷贝到 $\text{T}_\text{E}\text{XLive}$ 的字体文件夹 (`NotoSerifCJK` 系列不用拷贝 $\text{T}_\text{E}\text{XLive}$ 自带) 中, 路径格式一般如下:

盘符: `...\texlive\年份\texmf-dist\fonts\truetype`
中, 才可正常编译.

如果是其他系统, 请自行 Google 安装方法! 关于字体的更多设置, $\text{CT}_\text{E}\text{X}$ 宏包文档中没有说明得很详细, 可以参看 [xecjk 宏包文档](#) 和 [fontspec 宏包文档](#).

1.2.2 默认配置

如果觉得私订配置太繁琐, 则可以直接将文类选项 `custom` 改为对应自己系统的选项 (如 Windows 系统下为 `windows`), 参见 1.1 宏包选项, 提供的是与 $\text{CT}_\text{E}\text{X}$ 一致的字体配置接口, 详细说明参考 [CT_EX 宏包文档](#).

如果使用非 Windows 的字族, 可能会有报错, 因为文类文件中用了一此选项下的字体命令, 找到报错命令的位置, 进行替换或定义报错命令即可.

1.3 编译说明

- 如果使用私订字体配置, 必须用 XeLaTeX (或 XeTeX) 编译, 因为需加载 `fontspec` 宏包.
- 如果使用 CTEX 宏包提供的字体配置, 则参考 [CTEX 宏包文档](#).
- 基于 LuaLaTeX 或 LuaTeX 的编译请参考 [CTEX 宏包文档](#).
- 不要调换 `fontspec` 宏包、 CTEX 宏包和 `unicode-math` 宏包的调用顺序, 否则会 `clash`(原因应该在于内部的字体组织架构).

1.4 命令

试卷排版命令袭承 `BCHexam.cls`, 可以参考 [BCHexam 文档](#). `sysuexam.cls` 在原基础上优化了环境设置并增加一些环境命令, 下面将会详细介绍.

1.4.1 试卷信息

`\studenttype`{考生类型}
 本科生、硕士生或者博士生.

`\examperiod`{考试时期}
 期中考或期末考.

`\subject`{考试科目}
 考试科目.

`\papertype`{试卷类型}
 A 卷或 B 卷.

`\termyear`{起始年}{终止年}
 学年度.

`\term`{学期}
 第 1 或第 2 学期, 只需输入数字.

`\school`{学院/系}
 学院或院系名称.

`\examtype`{考试方式}
 开卷考或闭卷考.

`\examtime`{考试时长}
 考试时长, 单位为分钟, 只需输入数字.

`\numofq`{大题数目}
 试卷大题总数, 只需输入数字.

`\maketitle`
 生成试卷头, 此命令会有 `Overfull` 警告, 不影响使用.

1.4.2 题组环境

```
\begin{groups}
  \group{ 题 组 1 }{ 题 组 1 的 描 述 }
  ...
  \group{ 题 组 2 }{ 题 组 2 的 描 述 }
  ...
\end{groups}
```

将所有试题包含在 groups 环境中, 每一个 group 是一个大题 (选择题、填空题和计算题等).

1.4.3 试题环境

```
\begin{questions}[ 可 选 参 数 ]
  \question[ 分 值 ] 这 道 填 空 题 的 答 案 是 \pkey{B}.
  ...
  \question[4] 这 道 选 择 题 的 答 案 是 \key{A}.
  \fourchoices{ 选 项 1 }{ 选 项 2 }{ 选 项 3 }{ 选 项 4 }
  ...
  \question[4] 这 道 题 一 个 选 项 是 正 确 的 \kh
  ...
  \question[4] 这 道 题 一 个 选 项 是 正 确 的 \hx
  \hint
  ...
  \question[10] 这 是 一 道 简 答 题 .
  ...
\end{questions}
```

可选参数 r: 题号从 1 开始.

可选参数 s: 显示环境内试题的分值.

可选参数 t: 在环境内试题后预留答题空间.

可选参数 p: 在选择题后增加右对齐的括号.

```
\begin{subquestions}
  \subquestion[ 分 值 ] 第 1 小 问 % 分 值 默 认 为 0 分 .
  \subquestion[ 分 值 ] 第 2 小 问
  \subquestion[ 分 值 ] 第 3 小 问
\end{subquestions}
```

小问环境.

`\question[分值]` 题目内容

在试题环境中新增试题, 分值为数值, 要同 `questions` 的 `s` 选项一起使用.

`\example` 题目内容

在试题环境中新增一道例题.

`\exercise` 题目内容

在试题环境中新增一道习题.

`\pkay` 答案

在学生版试卷中显示一个括号, 在教师版试卷中括号中会显示答案, 针对选择题.

`\kay` 答案

在学生版试卷中显示与答案匹配长度的横线, 在教师版试卷中括号中会显示答案, 针对填空题.

`\kh`

仅显示括号.

`\hx[宽度]`

仅仅显示横线, 默认为 4 个字宽, 也可以通过选项自定义.

`\threechoices`

显示 3 个选项.

`\fourchoices`

显示 4 个选项.

`\fivechoices`

显示 5 个选项.

`\sixchoices`

显示 6 个选项.

`\hint`

显示“提示”字样.

1.4.4 解答环境

`\begin{solution}[答题空间高度]`

`\answers` 把冰箱打开

`\score{10}{10}`

把大象塞进冰箱

`\score{10}{20}`

关上冰箱门

`\score{10}{30}`

`\end{solution}`

解答环境, 紧跟着试题之后.“答题空间高度”默认为 0cm, 输入格式为“数字 + 单位”(单位可以是 cm, mm 或其他), 要同 `questions` 的 `t` 选项一起使用.

`\ans`

显示“答”字样.

`\answer`

显示“答案”字样.

`\answers`

显示“解”字样.

`\method`

显示“解法 < 中文数字 >”字样, < 中文字数 > 由内部计数器自动计数.

`\proof`

显示“证明”字样.

`\proofover`

在行末输出证毕符号 □.

`\analysis`

显示“解析”字样.

`\thought`

显示“分析”字样.

`\remark[其他文字]`

默认显示“注”字样, 输入可选参数, 则显示内容与“其他文字”一致.

`\score` 此步骤得分累计得分

插入该步骤得分, 显示此步骤的得分和累计得分.

1.4.5 其他命令

`\sj`

置于段首, 缩 (s) 进 (j) 两个字符空格, 用于 solution 环境中, 因为这个环境另起一段不能自动缩进.

1.5 自定义设置

1.5.1 颜色

链接颜色和解析颜色设置如下, 颜色配置请参考 `xcolor` 宏包.

92	<code>\colorlet{dr}{red!70!black}</code>	% 链接颜色
93	<code>\colorlet{jx}{red!70!black}</code>	% 答案和解析颜色

颜色设置

1.5.2 符号

私订字族使用 XTIS Math 数学字体, 其求和符号和 π 符号不是很好看, 故声明了两个新的符号命令, 分别为 `\msum` 和 `\mpi`, 产生 Modern Math 字体下对应的符号 (仅代表个人审美), 即

$$\sum \rightarrow \Sigma, \\ \pi \rightarrow \Pi.$$

由于 `unicode-math` 宏包自己提供的数学符号花体和粗体命令, 也作的命令的更新, 如果不使用 `unicode-math` 宏包会报错, 将 `sysuexam.cls` 中行 184–185 注释掉即可.

```

177 % 重设\sum符号
178 \DeclareSymbolFont{largesymbols}{OMX}{cmex}{m}{n}
179 \DeclareMathSymbol{\msum}{\mathop}{largesymbols}{"50}
180 % 重设\pi符号
181 \DeclareSymbolFont{letters}{OML}{cmm}{m}{it}
182 \DeclareMathSymbol{\mpi}{\mathord}{letters}{"19}
183 % 更新符号命令
184 \renewcommand{\boldsymbol}{\symsbf}
185 \renewcommand{\mathscr}{\symscr}

```

`sysuexam.cls` 文件中 `\msum` 和 `\mpi` 声明和更新命令

1.5.3 页面边距

修改此处代码即可.

```

261 %
262 % 双栏显示
263 %
264 \if@twocolumn
265 \geometry{a3paper,landscape,twocolumn,columnsep=40mm,left=20mm,%
266 right=25mm,top=25mm,bottom=25mm,headheight=20mm}
           % 双栏设置
267 \else
                                           % 单栏设置
268 \geometry{a4paper,left=25mm,right=25mm,top=25mm,bottom=25mm,
           headheight=20mm}
269 \fi

```

页面边距设置

1.5.4 代码高亮

代码高亮设置如下, 更多内容请参考 [listings 宏包](#).

```

212     columns=fixed,
213     numbers=left,                                % 在左侧显示行号
214     frame=tb,                                    % 背景边框
215     % backgroundcolor=\color[RGB]{245,245,244}, % 设定背景颜色
216     keywordstyle=\bfseries\color[HTML]{008000}, % 设定关键字颜色
217     numberstyle=\scriptsize\color{darkgray},    % 行号颜色
218     commentstyle=\it\color[HTML]{438282},        % 设置代码注释的格式
219     stringstyle=\kai\color[HTML]{ba2121},        % 设置字符串格式
220     showstringspaces=false,                      % 不显示字符串中的空格
221     % emph={wire,reg,prod},
222     % emphstyle=\color[HTML]{b00040},
223     % language=verilog,                          % 设置语言
224     basicstyle=\ttfamily\small,
225     % belowskip=1em,                              % 代码块结束间隔
226     aboveskip=1.5em,                             % 代码块开始间隔
227     breaklines=true,                             % 断行
228     breakatwhitespace=true,                     % 在空格处断行
229     captionpos=b,                               % 设置标题位置

```

代码高亮设置

2 版本说明

v0.7

(2020/01/17-2020/01/19)

- 基于 [BCHexam.cls](#) Version 1.5 文类开发文类.
- 为兼容字号, 采用 $\text{CT}_{\text{E}}\text{X}$ 宏包, 默认正文字号为小四. 底层文类仍为 `article`, 而非 `ctexart`, 避免不必要的麻烦; 但这会造成字号的不连续性, 例如 `section` 这个版本的字号过大, 显得不尽美观, 但试卷并不需要用到 `section` 命令, 影响不大, 待新版本优化.
- 完成试卷题头的设计.

Todo List

- 优化字号的连续性.
- 将字体私订配置选择作为宏包选项, 配置 $\text{CT}_{\text{E}}\text{X}$ 宏包提供的字体系列的接口.
- 完成样卷排版与命令说明.

v1.0

(2020/01/20-2020/01/21)

- 配置字族接口.
- 优化选项设计, 消除原文类 `Overfull` 警告, 对 4 选项命令精细控制.
- 增添题解环境命令.
- 完成样卷排版与使用说明.

文类设计基本完成, 后续应该不会有大的更新. Happy L^AT_EXing!

3 样卷与说明

一、单选题 (本大题共 4 小题, 共 20 分)

1. (5 分) $\delta(\sin t) = ()$

A. 1

B. 0

C. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\pi)$

D. ∞

答案 C

解析 由于当 $t = k\pi$ 时, $\sin t = 0$. 所以 $\delta(\sin t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\pi)$.

2. (5 分) 某连续时间系统输入 $f(t)$ 和输出 $y(t)$ 满足 $y(t) = |f(t) - f(t-1)|$, 则系统为 ()

A. 线性、非时变

B. 非线性、非时变

C. 线性、时变

D. 非线性、时变

答案 B

解析 讨论线性. 假设有 $y_1(t) = |f_1(t) - f_1(t-1)|$ 和 $y_2(t) = |f_2(t) - f_2(t-1)|$, 即对输入 $f_1(t)$, 有输出 $y_1(t)$; 对输入 $f_2(t)$, 有输出 $y_2(t)$. 由以上可知

$$y_1(t) + y_2(t) = |f_1(t) - f_1(t-1)| + |f_2(t) - f_2(t-1)|.$$

然而 $|f_1(t) - f_1(t-1)| + |f_2(t) - f_2(t-1)|$ 不一定等于

$$|f_1(t) + f_2(t) - [f_1(t-1) + f_2(t-1)]|,$$

所以该系统为非线性.

讨论时变性. 对于任意的时移, 有 $y(t-t_0) = |f(t-t_0) - f(t-t_0-1)|$, 因而该系统是非时变的.

3. (5 分) 已知 $r(t) = e(t) * h(t)$, 则 $e(2t) * h(2t)$ 为 ()

A. $\frac{1}{2}r(2t)$

B. $\frac{1}{4}r(2t)$

C. $\frac{1}{2}r(4t)$

D. $\frac{1}{4}r(4t)$

答案 A

解析 由傅里叶变换尺度变换性质, 可得:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[e(2t) * h(2t)] &= \mathcal{F}[e(2t)] \cdot \mathcal{F}[h(2t)] \\ &= \frac{1}{2}E\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}H\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{4}E\left(\frac{\omega}{2}\right)H\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{4}R\left(\frac{\omega}{2}\right), \end{aligned}$$

再由傅里叶变换尺度变换性质求其逆变换, 可得 $\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{4}R\left(\frac{\omega}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}r(2t)$.

4. (5 分) 下列关于周期矩形脉冲信号的论述中, 正确的是 ()

A. 脉冲周期增大则主瓣宽度变小

B. 脉冲周期增大则主瓣宽度变大

C. 脉冲宽度增大则主瓣宽度变小

D. 脉冲宽度增大则主瓣宽度变大

答案 C

解析 主瓣宽度与脉冲宽度成反比, 谱线间隔与脉冲周期成反比.

二、不定项选择题 (本大题共 2 小题, 共 4 分)

1. (2 分) 信号 $x(t)$ 的 Nyquist 抽样频率为 ω_1 , 则信号 $x(t)x(2t+1)\cos\omega_2t$ 的 Nyquist 抽样频率为 ()

A. $\omega_2 + 3\omega_1$ B. $\omega_2 + 6\omega_1$ C. $2\omega_2 + 3\omega_1$ D. $2\omega_2 + 6\omega_1$
E. $3\omega_2 + 7\omega_1$

答案 C

2. (2 分) 已知数字音乐的抽样频率是 44.1KHz, 由此, 我们可以推测, 人的听力频率范围的上限接近 (B)

A. 10kHz B. 20kHz C. 30kHz D. 40kHz
E. 20kHz F. 60kHz

三、填空题 (本大题共 2 小题, 共 10 分)

1. (5 分) 已知某系统的输出 $r(t)$ 与输入 $e(t)$ 之间的关系为 $r(t) = e(2t) + \frac{de(t)}{dt}$, 试判断该系统是什么系统 (线性、时不变性) _____

答案 线性、时变系统

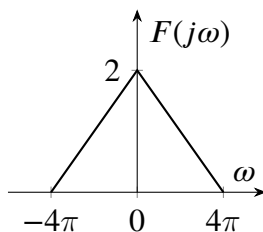
解析 设 $e_1(t) \rightarrow r_1(t)$, $e_2(t) \rightarrow r_2(t)$, 则:

$$ae_1(t) + be_2(t) \rightarrow ae_1(2t) + a\frac{de_1(t)}{dt} + be_2(2t) + b\frac{de_2(t)}{dt} = ar_1(t) + br_2(t),$$

故系统是线性的.

设 $e(t) \rightarrow r(t)$, 则 $e(t-a) \rightarrow e(2t-a) + \frac{de(t-a)}{dt} \neq r(t-a)$, 故系统是时变的.

2. (5 分) 信号 $f(t)$ 的频谱密度函数 $F(j\omega)$ 如图所示, 则 $f(0)$ 等于 4



解析 根据傅里叶反变换的定义, 有 $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$, 故

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} \Big|_{t=0} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) d\omega = 4.$$

四、简答题 (本大题共 1 小题, 共 10 分)

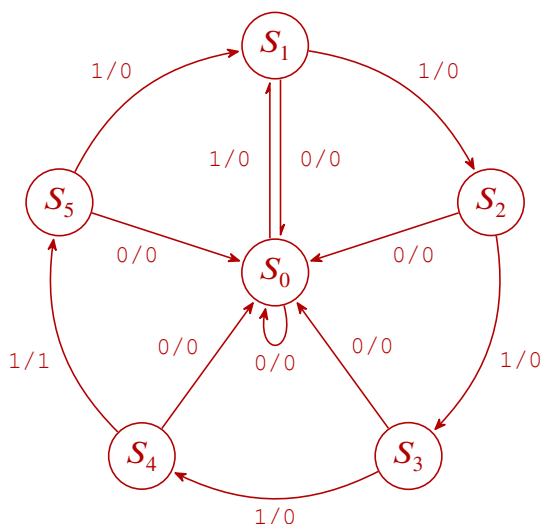
1. 简要分析冲激响应不变法为什么不能用于设计数字高通和带阻滤波器.

答 冲击响应不变法实际是一种时域逼近方法, 即用滤波器的采样信号 $h(n)$ 去逼近滤波器的冲击响应 $h(t)$, 而采样会带来频谱混叠, 在高频或带阻的情况下, 模拟滤波器的高频部分存在较高增益, 因此在采样后, 数字滤波器的在频域会产生严重的混叠, 导致原来的阻带 (低频) 会叠加上高频部分的多个周期延拓, 导致阻带增益增加, 失去滤除低频成分的能力. 同时, 数字滤波器的高频部分也受到污染, 导致通带特性改变.

五、设计题 (本大题共 2 小题, 共 10 分)

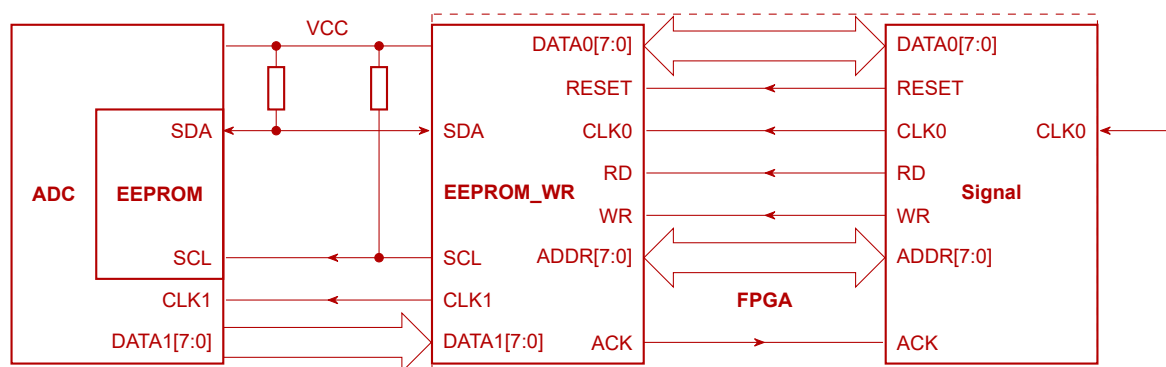
1. 有一种特殊的串行通信系统, 数据以包的形式传输, 数据的包头为 01111110, 然后为数据内容, 然后以 01111110 结尾, 请设计数据组包时的 FSM 状态转移图.

解



2. 请设计一个 ADC 用 EEPROM 存储被读写的 FPGA 电路的连接框图.

解



注 电阻元件的颜色是 circitkz 宏包配置的, 更改电路元件的颜色需要额外设置, 不以环境为转移.

六、分析题 (本大题共 1 小题, 共 5 分)

1. (5 分) 请分析傅里叶变换的不确定性对信号分析的影响.

答 不知道.

有没有一种信号在空域和频域上的分布都很广泛呢? 有的, 最简单的例子就是噪声信号. 一段纯粹的白噪声, 其傅立叶变换也仍然是噪声, 所以它在空域和频域上的分布都是广泛的. 如果用信号处理的语言来说, 这就说明「噪声本身是不可压缩的」. 这并不违反直觉, 因为信号压缩的本质就是通过挖掘信息的结构和规律来对它进行更简洁的描述, 而噪声, 顾名思义, 就是没有结构和规律的信号, 自然也就无从得以压缩.

另一方面, 有没有一种信号在空域和频域上的分布都很简单呢? 换句话说, 不存在一个函数, 它在空间上只分布在很少的几个区域内, 并且在频域上也只占用了很少的几个频率呢?(零函数当然满足这个条件, 所以下面讨论的都是非零函数.)

答案是不存在. 这就是所谓的 Uncertainty Principle(不确定性原理)

七、程序题 (本大题共 1 小题, 共 5 分)

1. (5 分) 请你用大脑编译下面这段 L^AT_EX 代码, 并绘制出编译结果.

```

1 \tdplotsetmaincoords{70}{110}
2 \begin{tikzpicture}[tdplot_main_coords,scale=5,semithick]
3 \pgfmathsetmacro{\r}{.8}
4 \pgfmathsetmacro{\R}{1}
5 \pgfmathsetmacro{\O}{45}
6 \pgfmathsetmacro{\i}{60}
7 \pgfmathsetmacro{\f}{35}
8 \pgfmathsetmacro{\a}{110}
9
10 \coordinate (O) at (0,0,0);
11 \node[left,label=170:\scriptsize 地心 $O$] at (O) {};
12 \node[below] at (10:\r) {\scriptsize 赤道};
13 \fill (0.6,0.6,0.5) circle [radius=0.4pt,fill=black] node[below] {\scriptsize
    $T$};
14 \draw[dashed] (O) --node[above] {\scriptsize $R$} (0.6,0.6,0.5) ;
15
16 \draw [arrows={-Stealth[inset=0pt, angle=25:10pt]}] (O) -- (2.2,0,0)
    node[anchor=north east] {\scriptsize $y$};
17 \draw [arrows={-Stealth[inset=0pt, angle=25:10pt]}] (O) -- (0,-1.1,0)
    node[anchor=north west] {\scriptsize $x$};
18 \draw [arrows={-Stealth[inset=0pt, angle=25:10pt]}] (O) -- (0,0,1.2)
    node[anchor=west] {\scriptsize $z$ 北极};
19
20 \tdplotdrawarc[dashed,very thick]{(O)}{\r}{\a}{\a+180}{}{}
21 \tdplotdrawarc[very thick]{(O)}{\r}{\a-180}{\a}{}{}
22 \draw[very thick] (O) ellipse [x radius=.8cm,y radius=.73cm];
23 \node[rotate=48] at (0,-0.75,0.4) {\scriptsize 本初子午线};
24

```

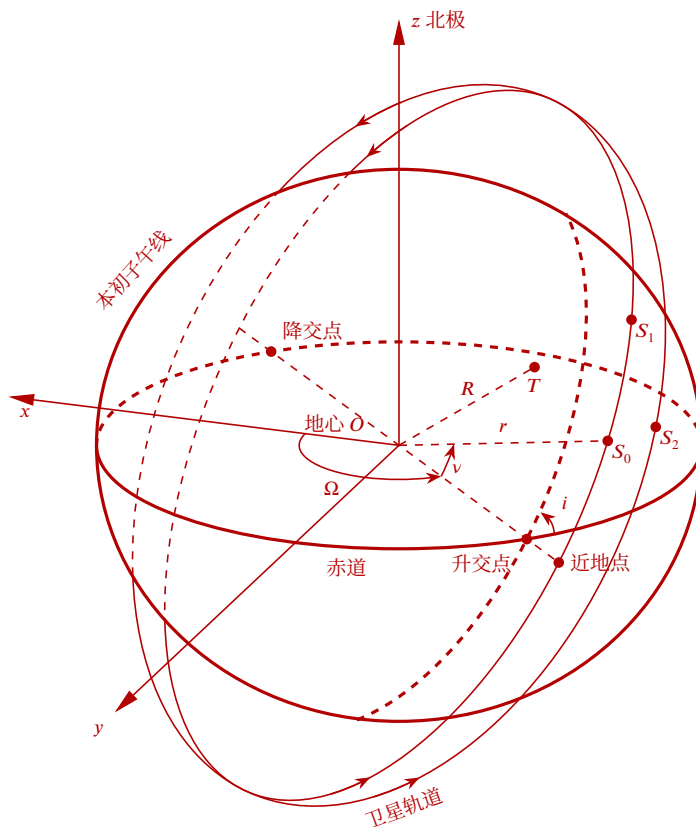
```

25 \tdplotsetrotatedcoords{\O}{0}{0}
26
27 \draw [tdplot_rotated_coords,dashed] (-\R,0,0) -- (\R,0,0);
28 \fill[tdplot_rotated_coords] (\R,0,0) circle [radius=0.4pt,fill=black]
    node[right]{\scriptsize 近地点};
29 \fill[tdplot_rotated_coords] (\r,0,0) circle [radius=0.4pt,fill=black]
    node[below left=2pt]{\scriptsize 升交点};
30 \fill[tdplot_rotated_coords] (-\r,0,0) circle [radius=0.4pt,fill=black]
    node[above right]{\scriptsize 降交点};
31
32 \tdplotdrawarc[-Stealth]{(O)}{.33*\r}{-90}{\O}{anchor=north}{\scriptsize
    $\Omega$}
33
34 \tdplotsetrotatedcoords{-\O}{\i}{0}
35 \tdplotdrawarc[tdplot_rotated_coords]{(O)}{\R}{-41}{239}{}{}
36 \tdplotdrawarc[tdplot_rotated_coords,dashed]{(O)}{\R}{239}{319}{}{}
37 \tdplotdrawarc[tdplot_rotated_coords,dashed,very thick]{(O)}{\r}{34}{164}{}{}
38 \fill[tdplot_rotated_coords] (110:\R) circle [radius=0.4pt,fill=black]
    node[below right,inner sep=1pt]{\scriptsize $S_0$};
39 \fill[tdplot_rotated_coords] (130:\R) circle [radius=0.4pt,fill=black]
    node[below right,inner sep=1pt]{\scriptsize $S_1$};
40 \draw[tdplot_rotated_coords,dashed] (O) --node[above] {\scriptsize $r$}
    (110:\R) ;
41 \tdplotdrawarc[tdplot_rotated_coords,-Stealth]{(O)}{\R}{30}{40}{anchor=north}{}
42 \tdplotdrawarc[tdplot_rotated_coords,-Stealth]{(O)}
43 {\R}{225}{235}{anchor=north}{}
44 \tdplotdrawarc[tdplot_rotated_coords,-Stealth]{(O)}{.33*\r}{90}{110}{below
    right,inner sep=1pt}{\scriptsize $\nu$}
45
46 \tdplotsetrotatedcoords{-\O+10}{\i}{0}
47 \tdplotdrawarc[tdplot_rotated_coords]{(O)}{\R}{-52}{242}{}{}
48 \tdplotdrawarc[tdplot_rotated_coords,dashed]{(O)}{\R}{242}{308}{}{}
49 \fill[tdplot_rotated_coords] (110:\R) circle [radius=0.4pt,fill=black]
    node[below right,inner sep=1pt]{\scriptsize $S_2$};
50 \tdplotdrawarc[tdplot_rotated_coords,-Stealth]{(O)}{\R}
51 {30}{40}{anchor=north,rotate=20}{\scriptsize 卫星轨道}
52 \tdplotdrawarc[tdplot_rotated_coords,-Stealth]{(O)}{\R}
53 {215}{225}{anchor=north}{}
54
55 \tdplotsetrotatedcoords{\O}{-90}{0}
56 \coordinate (Shift) at (\O:\r);
57
58 \tdplotsetrotatedcoordsorigin{(Shift)}
59 \tdplotdrawarc[tdplot_rotated_coords,-Stealth]{(Shift)}{.1*\r}
60 {89}{90-\i}{anchor=south west}{\scriptsize $i$}
61 \end{tikzpicture}

```

题六1 代码

解



八、计算题 (本大题共 4 小题, 共 40 分)

1. (10 分) 设计一个巴特沃斯模拟高通滤波器, 要求其通带边界频率为 10Hz, 阻带边界频率为 100Hz, 通带最大衰减 1dB, 阻带最小衰减 20dB.

(1) (3 分) 求出对应的低通滤波器阶数 N , 和归一化 3dB 截止频率 λ_c ;

(2) (3 分) 写出关于通带截止频率归一化的低通系统函数 $Q(p)$;

(3) (4 分) 计算高通滤波器系统函数 $H_{HP}(s)$.

提示 低通到高通的映射关系 $p = \frac{\lambda_p \Omega_{ph}}{s}$, 频率映射关系 $\lambda = -\frac{\lambda_p \Omega_{ph}}{\Omega}$. 二阶和三阶巴特沃斯 3dB 频率归一化低通滤波器的系统函数为 $G_2(p) = \frac{1}{p^2 + 1.4142p + 1}$, $G_3(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}$.

解 (1) 对应的低通滤波的通带边界频率为 10Hz, 阻带边界频率为 100Hz, 因此低通滤波器的

$$\lambda_{sp} = \frac{\lambda_s}{\lambda_p} = 10, \quad k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{\alpha_s 10} - 1}{10^{\alpha_p / 10} - 1}} = 19.5538; \dots\dots\dots \text{本步骤 1 分, 累计 1 分}$$

$$N = \frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}} = 1.2912, \text{ 取 } N = 2; \dots\dots\dots \text{本步骤 1 分, 累计 2 分}$$

$$\lambda_c = \lambda_p (10^{0.1 \alpha_p} - 1)^{-\frac{1}{2N}} = 1.4019 \quad \text{或} \quad \lambda_c = \lambda_s (10^{0.1 \alpha_s} - 1)^{-\frac{1}{2N}} = 3.1702.$$

$\dots\dots\dots$ 本步骤 1 分, 累计 3 分

(2)

$$Q(p) = G(p')|_{p'=p/\lambda_c} = \frac{\lambda_c^2}{p^2 + 1.4142p\lambda_c + \lambda_c^2} = \frac{1.965}{p^2 + 1.983p + 1.965}, \quad \lambda_c = 1.4019.$$

..... 本步骤 3 分, 累计 6 分

(3)

$$\begin{aligned} H_{HP}(s) &= Q(p)|_{p=\frac{\lambda_p \Omega_{ph}}{s}} \\ &= \frac{\lambda_c^2}{\left(\frac{\Omega_{ph}}{s}\right)^2 + 1.4142 \times \lambda_c \left(\frac{\Omega_{ph}}{s}\right) + \lambda_c^2} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{\Omega_{ph}}{\lambda_c s}\right)^2 + 1.4142 \times \left(\frac{\Omega_{ph}}{\lambda_c s}\right) + 1} \\ &= \frac{s^2}{200874 + 633.83s + s^2}, \quad \Omega_{ph} = 2\pi \cdot 100. \end{aligned}$$

..... 本步骤 4 分, 累计 10 分

注 题 (2) 中 λ_c 不能通过求算 $\Omega_c = \Omega_p(10^{0.1\alpha_p} - 1)^{-\frac{1}{2N}}$ 或 $\Omega_c = \Omega_s(10^{0.1\alpha_s} - 1)^{-\frac{1}{2N}}$, 然后代入 $\lambda = -\frac{\lambda_p \Omega_{ph}}{\Omega}$ 计算. 这样会得到 $\lambda_c = \lambda_p(10^{0.1\alpha_p} - 1)^{\frac{1}{2N}}$ 或 $\lambda_c = \lambda_s(10^{0.1\alpha_s} - 1)^{\frac{1}{2N}}$. 原因是频率映射关系 $\lambda = -\frac{\lambda_p \Omega_{ph}}{\Omega}$ 是线性映射, 只有 $0, \Omega_{ph}, \Omega_{sh}, -\infty, +\infty$ 这些位置是对应的, 其他频率并不对应; 而且 Ω_c 计算公式只针对巴特沃斯低通滤波器成立.

2. (10 分) 假定概率密度 $f(\mathbf{z}; \theta)$ 满足正则条件:

$$E \left\{ \frac{\partial \ln f(\mathbf{z}; \theta)}{\partial \theta} \right\} = 0.$$

证明任何无偏估计量 $\hat{\theta}$ 的方差满足

$$\text{Var}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2] \geq \frac{1}{E \left\{ \left[\frac{\partial \ln f(\mathbf{z}; \theta)}{\partial \theta} \right]^2 \right\}} = -\frac{1}{E \left\{ \frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{z}; \theta)}{\partial \theta^2} \right\}},$$

当且仅当

$$\frac{\partial \ln f(\mathbf{z}; \theta)}{\partial \theta} = (\hat{\theta} - \theta)k(\theta)$$

时, 上式的等号成立.

证明 设 $\hat{\theta}$ 是无偏估计, 则有 $E(\hat{\theta} - \theta) = 0$, 即

$$E(\hat{\theta} - \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\theta} - \theta)f(\mathbf{z}; \theta)d\mathbf{z} = 0,$$

对 θ 求导, 得到 (正则条件保证积分号和微分号可交换)

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\theta} - \theta)f(\mathbf{z}; \theta)d\mathbf{z} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \theta} [(\hat{\theta} - \theta)f(\mathbf{z}; \theta)]d\mathbf{z} = 0,$$

进一步有

$$-\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{z}; \theta) d\mathbf{z} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(\mathbf{z}; \theta)}{\partial \theta} (\hat{\theta} - \theta) d\mathbf{z} = 0.$$

由微分法则 $(\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$ 和 $\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{z}; \theta) d\mathbf{z} = 1$ 可以将上式写成

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \ln f(\mathbf{z}; \theta)}{\partial \theta} f(\mathbf{z}; \theta) (\hat{\theta} - \theta) d\mathbf{z} = 1,$$

也可表示为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \ln f(\mathbf{z}; \theta)}{\partial \theta} \sqrt{f(\mathbf{z}; \theta)} \sqrt{f(\mathbf{z}; \theta)} (\hat{\theta} - \theta) d\mathbf{z} = 1,$$

利用 Cauchy-Schwartz 不等式

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx \right]^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) dx,$$

有下列不等式成立:

$$1 \leq \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \ln f(\mathbf{z}; \theta)}{\partial \theta} \right]^2 f(\mathbf{z}; \theta) d\mathbf{z}}_{E \left\{ \left[\frac{\partial \ln f(\mathbf{z}; \theta)}{\partial \theta} \right]^2 \right\} \triangleq I(\theta)} \times \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\theta} - \theta)^2 f(\mathbf{z}; \theta) d\mathbf{z}}_{\text{Var}(\hat{\theta})},$$

当且仅当 $f(x) = kg(x)$ 时, 不等式等号成立.

可知, CRLB 达到的条件, 即是等号成立的条件:

$$\frac{\partial \ln f(\mathbf{z}; \theta)}{\partial \theta} = k(\theta)(\hat{\theta} - \theta),$$

此外有

$$E \left\{ \left[\frac{\partial \ln f(\mathbf{z}; \theta)}{\partial \theta} \right]^2 \right\} = -E \left\{ \frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{z}; \theta)}{\partial \theta^2} \right\},$$

证明如下:

$$\begin{aligned} \int_{\{\mathbf{Z}\}} f(\mathbf{z}; \theta) d\mathbf{z} = 1 &\xrightarrow{\text{对等式两边求导}} \int_{\{\mathbf{Z}\}} \frac{\partial f(\mathbf{z}; \theta)}{\partial \theta} d\mathbf{z} = \int_{\{\mathbf{Z}\}} \frac{\partial \ln f(\mathbf{z}; \theta)}{\partial \theta} f(\mathbf{z}; \theta) d\mathbf{z} = 0 \\ &\xrightarrow{\text{对等式两边再次求导}} \int_{\{\mathbf{Z}\}} \frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{z}; \theta)}{\partial \theta^2} f(\mathbf{z}; \theta) d\mathbf{z} + \\ &\quad \int_{\{\mathbf{Z}\}} \left[\frac{\partial \ln f(\mathbf{z}; \theta)}{\partial \theta} \right]^2 f(\mathbf{z}; \theta) d\mathbf{z} = 0 \\ &\Rightarrow E \left\{ \left[\frac{\partial \ln f(\mathbf{z}; \theta)}{\partial \theta} \right]^2 \right\} = -E \left\{ \frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{z}; \theta)}{\partial \theta^2} \right\}. \end{aligned}$$

□

说明 (1) 定理成立的条件.

- 定理成立的条件是求导和积分可交换;
- 如果积分限与被估计量 θ 有关, 则求导和积分不能交换;
- CRLB 定理不成立的情况: 概率密度非零的区间与被估计量有关, 如: 概率密度为 $(0, \theta)$ 上的均匀分布, 而 θ 为被估计量.

(2) 正则条件保证了上述要求, 即

$$0 = E \left\{ \frac{\partial \ln f(\mathbf{z}; \theta)}{\partial \theta} \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \ln f(\mathbf{z}; \theta)}{\partial \theta} f(\mathbf{z}; \theta) d\mathbf{z} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f(\mathbf{z}; \theta)}{\partial \theta} d\mathbf{z},$$

又 $\frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{z}; \theta) d\mathbf{z} = 0$, 故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f(\mathbf{z}; \theta)}{\partial \theta} d\mathbf{z} = \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{z}; \theta) d\mathbf{z}.$$

(3) $I(\theta)$ 成为 Fisher 信息 I 越大, 越有可能得到好的估计.

(4) 如果有效估计量存在, 则该有效估计量一定是最大似然估计. 因为如果有效估计量存在, 这表明满足

$$\frac{\partial \ln f(\mathbf{z}; \theta)}{\partial \theta} = k(\theta)(\hat{\theta} - \theta),$$

而最大似然估计满足

$$\left. \frac{\partial \ln f(\mathbf{z}; \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}_{\text{ml}}} = 0,$$

所以有 $k(\hat{\theta}_{\text{ml}})(\hat{\theta} - \hat{\theta}_{\text{ml}}) = 0$, 即 $\hat{\theta} = \hat{\theta}_{\text{ml}}$.

(5) 如果有效估计量不存在, 则最大似然估计的方差不一定是最小的.

3. (10 分) 设

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

求 $e^{\mathbf{A}t}$ (其中 t 为参数).

解

解法一 通过矩阵函数的 Jordan 表示计算. 因为

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda - 2 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2,$$

显然 $n_1 = 1, n_2 = 2$, 于是 \mathbf{A} 的 Jordan 标准形为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

由于对应 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量为 $(0, 1, 1)^T$, 而对应 $\lambda_2 = 2$ 的线性无关的特征向量只有一个 $(1, 0, 1)^T$, 为此再求出它的一个广义特征向量 $(1, 1, 1)^T$. 于是非奇异矩阵 T 取为

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

容易看出

$$\begin{aligned} f(J_1(\lambda_1)) &= f(\lambda_1) = e^t, \\ f(J_2(\lambda_2)) &= \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} e^{At} &= T \cdot \text{diag}(f(J_1(\lambda_1)), f(J_2(\lambda_2))) \cdot T^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (t+1)e^{2t} & te^{2t} & -te^{2t} \\ -e^t + e^{2t} & e^{2t} & e^t + e^{2t} \\ -e^t + (t+1)e^{2t} & te^{2t} & e^t - te^{2t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

解法二 通过矩阵函数的多项式表示计算. A 的最小多项式

$$\varphi_A(x) = (x-1)(x-2)^2.$$

则

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, \quad p'(x) = a_1 + 2a_2x,$$

把 $f(1), f(2), f'(2)$ 代入上式

$$f(1) = p(1) = a_0 + a_1 + a_2, \quad f(2) = p(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2, \quad f'(2) = p'(2) = a_1 + 4a_2,$$

解得

$$a_0 = 4f(1) - 3f(2) + 2f'(2), \quad a_1 = -4f(1) + 4f(2) - 3f'(2), \quad a_2 = f(1) - f(2) + f'(2).$$

于是矩阵函数 $f(A)$ 的多项式表示为

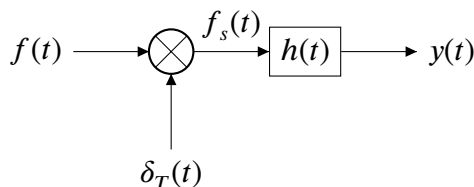
$$\begin{aligned} f(A) &= p(A) = a_0E + a_1A + a_2A^2 \\ &= [4f(1) - 3f(2) + 2f'(2)]E + [-4f(1) + 4f(2) - 3f'(2)]A + \\ &\quad [f(1) - f(2) + f'(2)]A^2 \end{aligned}$$

由 $f(x) = e^{xt}$ 得 $f(1) = e^t, f(2) = e^{2t}, f'(2) = te^{2t}$, 代入上式可得

$$e^{At} = \begin{bmatrix} (t+1)e^{2t} & te^{2t} & -te^{2t} \\ -e^t + e^{2t} & e^{2t} & e^t + e^{2t} \\ -e^t + (t+1)e^{2t} & te^{2t} & e^t - te^{2t} \end{bmatrix}.$$

4. (10 分) 某连续时间系统如下图所示, 输入信号 $f(t)$ 被抽样后, 通过一个单位冲激响应为 $h(t)$ 的系统, 输出 $y(t)$. 已知 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega) = G_{\pi/2}(\omega)$, $h(t) = 2G_1(t)$. $\delta_T(t)$ 为单位强度周期脉冲串, 且 $T = 2$.

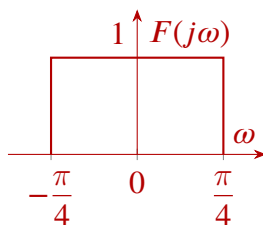
- (1) (4 分) 请画出 $\omega \in (-2\pi, 2\pi)$ 区间上 $y(t)$ 的频谱;
 (2) (6 分) 请设计从 $y(t)$ 恢复 $f(t)$ 的方案.



题七 4 图

分析 通过分析输入与输出的频谱来设计滤波器.

解 (1) $y(t)$ 的频谱 $F(j\omega)$ 如下图所示.

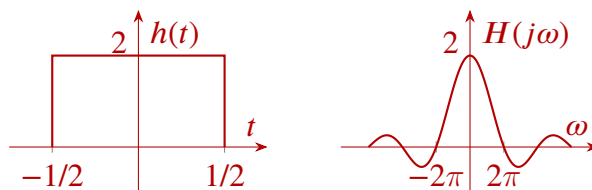


(2) 抽样信号 $f_s(t)$ 的频谱 $\Omega = 2\pi/T = \pi$,

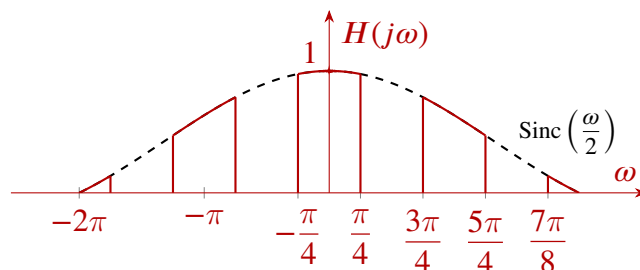
$$F_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * \Omega \delta_{\Omega}(\omega) = \frac{1}{T} F(j\omega) * \delta_{\pi}(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_{\pi/2}(\omega - n\pi).$$

$$H(j\omega) = \mathcal{F}[2G_1(t)] = 2\text{Sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

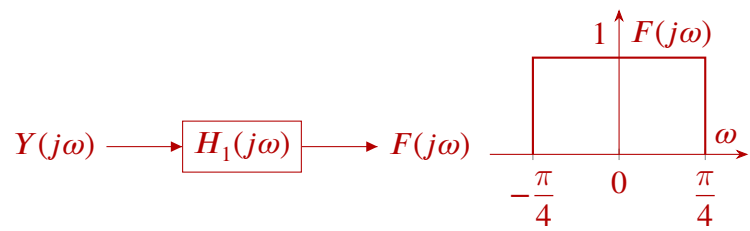
画出滤波器 $H(j\omega)$ 的频谱图:



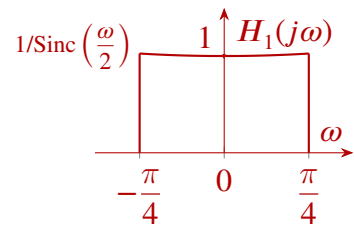
故 $Y(j\omega) = F_s(j\omega)H(j\omega) = \text{Sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{\pi/2}(\omega - n\pi)$, 如图所示:



$Y(j\omega)$ 经过系统后输出应为



所以该系统 $H_1(j\omega)$ 如下图所示:



1

3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974
944592307816406286208998628034825342117067982148086513282306647
09384460955058223172535940812848111745028410270193852110555964462
29489549303 8 1 9 6 4 4
288109 7566 5 9 3
34461 2847 5648
2337 8678 3165
2712 0190 9145
648 5669 2346
0348 6104
54326 64821
33936 07260
24914 127372
458700 660631
558817 488152
092096 2829254
091715 3643678
9259036 0011330
5305488 20466521
38414695 19415116
09433057 270365759
59195309 218611738
193261179 3105118548
074462379 9627495673
518857527 248912279
381830 1194917

¹源自<https://tex.stackexchange.com/questions/158668/nice-scientific-pictures-show-off>.