Chapitre 1 : Repères et positionnement 3D

Modélisation 3D et Synthèse

Fabrice Aubert
fabrice.aubert@lifl.fr

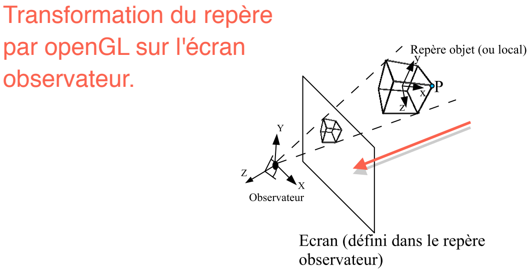
Université Lille1
Sciences et Technologies

IEEA - Master Info - Parcours IVI

2012-2013

1 Introduction avec OpenGL : librairie pour la programmation 3D

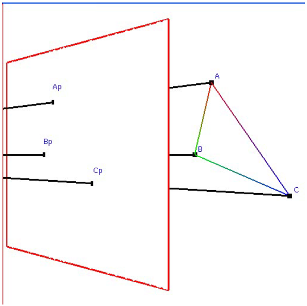
Principe



- Affiche uniquement des polygones.
- Visualisation basée sur un rendu projectif (méthode adoptée par les cartes graphiques).

Phases

- Le rendu projectif consiste en 2 phases :
  - Une phase géométrique 3D : spécification des coordonnées des sommets dans un repère local (repère objet) et positionnement du repère objet par rapport au repère de la caméra.
    - $\Rightarrow$ calcul des sommets dans le repère caméra
    - $\Rightarrow$ projection sur un plan, définie dans le repère caméra, représentant l'écran (passage des polygones 3D à des polygones 2D).
  - Une phase 2D qui concerne les pixels (phase dite pipeline de rasterization) : remplissage des polygones 2D pixel par pixel (algorithme de balayage).



Exemple de code

- Procédure de tracé d'un carré :

```
void drawSquare() {
  glBegin(GL_POLYGON); // trace une primitive polygone
    glVertex3f(1.0,1.0,0.0);   // premier sommet
    glVertex3f(-1.0,1.0,0.0);  // second sommet
    glVertex3f(-1.0,-1.0,0.0); // ...
    glVertex3f(1.0,-1.0,0.0);
  glEnd();             // fin de la primitive
}
```

3f = 3 paramètre -> float

- On déplace (translation, rotation, ...) un repère courant dans lequel seront tracés les sommets (i.e. le repère objet). Initialement le repère courant est l'observateur.

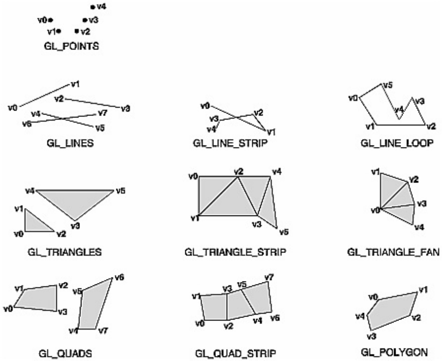
```
void drawScene() {
  glLoadIdentity();      // initialisation du repère courant = repère caméra
  glTranslatef(0,0,-5);  // déplacer du coté "visible" de l'écran
  glRotatef(30,0,0,1);   // rotation de 30 degrés autour de z
  glTranslatef(0,2,0);   // translation de 2 sur y

  drawSquare(); // tous les sommets rencontrés seront interprétés dans le repère courant
}
```

Rotation toujours par rapport a un axe

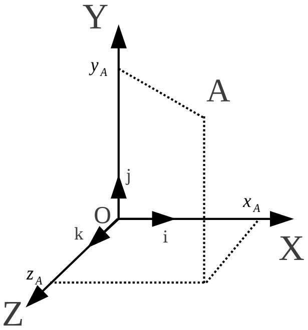
Translate toujours par rapport au repère courant (ici Y a ete penche de 30 degré donc "translate" de biais)

Procédure de tracés

```
glBegin(<primitive>); // <primitive> = GL_POINTS, GL_LINES, etc
  glVertex3f(x0,y0,z0); // sommet v0
  glVertex3f(x1,y1,z1); // sommet v1
  glVertex3f(x2,y2,z2); // sommet v2
...
glEnd();
```



2 Eléments fondamentaux pour la programmation 3D



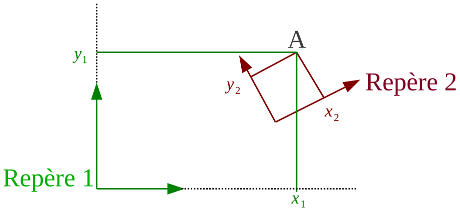
- Repère noté (O, i, j, k) (origine et vecteurs de base).
- Un point : $A = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ ou $A = (A_x, A_y, A_z)$.
- $A = O + xi + yj + zk$.

- Les repères considérés seront généralement directs :
  - Règle de la main **droite** : (Pouce,Index,Majeur) = (X, Y, Z)
- Un repère est dit orthonormé si :
  - Vecteurs (i, j, k) deux à deux orthogonaux.
  - (i, j, k) de même normes 1.

Remarques

- Quand il y aura plusieurs repères : **toujours** préciser le repère en indice :

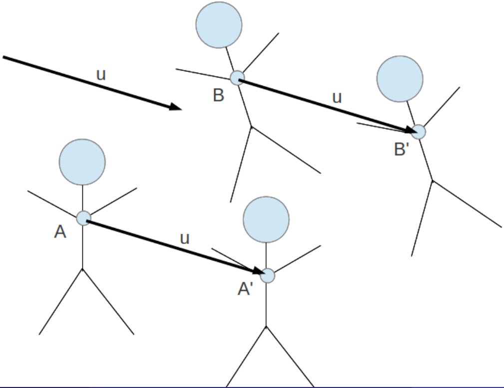
Par exemple, un même point A peut avoir les coordonnées (x_1, y_1, z_1) dans le repère 1 et (x_2, y_2, z_2) dans le repère 2.



$\Rightarrow$ Noter A_1 ou A_2 selon le repère considéré.

Points et directions

- Différencier les positions (i.e. les points) et les directions (i.e. les vecteurs).
- Exemple :
  - Le point A est déplacé au point A' par le vecteur u. Le point B est déplacé au point B' par le même vecteur u.
  - Par le calcul : $A' = A + u$ et $B' = B + u$.
  - Remarque sur les notations : pas de "flêche" sur u. Par contre $u = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$. Pour les calculs, on utilisera souvent la relation : $u = A' - A = B' - B$ (ok pour algèbre 3D).



Produit scalaire (dot product)

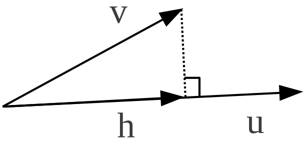
- Apparait pour : équations algébriques (plan), test d'intersection, test de localisation (d'un point par rapport à un plan, ...), éclairement (angle d'incidence de la direction d'éclairement sur un objet), orientation (tests de directions « opposées »), ...

$$\text{Soient } u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} :$$

- Le produit scalaire donne un nombre.
- $\boxed{u \cdot v = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z}$ (calcul valable uniquement dans un repère orthornormé).
- Norme d'un vecteur : $\boxed{\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_x u_x + u_y u_y + u_z u_z}}$
- Normer un vecteur u signifie le « rendre »de norme 1 (ou unitaire) : $\boxed{u' = \frac{u}{\|u\|}}$
- Autre calcul du produit scalaire : $\boxed{u \cdot v = \|u\|\|v\|cos(u, v)}$
- Si u et v sont normés, $u \cdot v \in [-1, 1]$

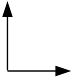
Interprétation du produit scalaire

- Projection :

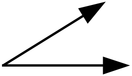


- $u \cdot v = u \cdot h$
- $\|h\| = \frac{|u \cdot v|}{\|u\|}$
- Si u est unitaire : $h = (u.v)u$

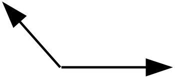
- Angle et localisation :



$u \cdot v = 0$ (orthonormal)



$u \cdot v > 0$ (aigu)



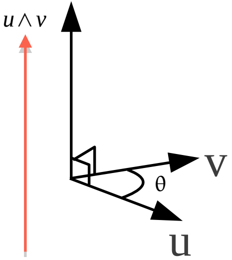
$u \cdot v < 0$ (obtus)

- Si u et v unitaires alors $u \cdot v = cos(u, v)$ (donne un nombre dans $[-1, 1]$.
- $acos(u \cdot v)$ donne alors l'angle entre u et v dans $[0, \pi]$.

Produit vectoriel (cross product)

- Apparait pour : détermination de normales (vecteur orthogonal à un plan), construction de vecteurs (repères par exemple), construction d'orientations (définition d'un sens direct-indirect), ...

$$\text{Soient } u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} : w = u \times v = \begin{pmatrix} u_y v_z - v_y u_z \\ u_z v_x - v_z u_x \\ u_x v_y - v_x u_y \end{pmatrix}$$

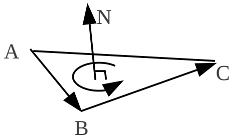


^ = x le produit vectoriel

- Si u et v colinéaires (i.e. $u = \lambda v$) alors $u \times v = 0$
- w est orthogonal à u et v. un nb de fois
- w est orienté tel que (u, v, w) est direct (rêgle de la main droite)
- $\|w\| = \|u\|\|v\||sin(\theta)|$

Remarques sur le produit vectoriel

- Attention le produit vectoriel est non commutatif : $u \times v = -v \times u$ (changement de signe).
- Un vecteur orthogonal à un polygone est appelé une normale et peut être calculé par produit vectoriel si on connait les sommets.
- Exemple d'un triangle (A, B, C) : $n = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$ est une normale.
- La normale d'un triangle (A, B, C) sera dite directe si les sommets A, B et C sont décrits dans le sens trigonométrique par rapport à la normale (en regardant la normale pointée vers soi).
- sens trigonométrique = sens contraire des aiguilles d'une montre.



Classe Vector3

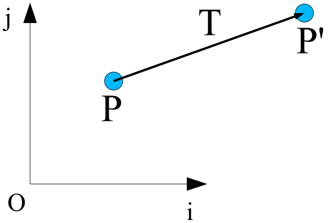
- Nécessité d'une classe sur les points et les vecteurs.
- On confond souvent points et vecteurs dans la même classe (à l'utilisateur de savoir ce qu'il manipule).

```
class Vector3 {
private:
  double c[3]; // c[0]=x, c[1]=y, c[2]=z

public:
  /// constructs the vector (x,y,z)
  Vector3(double x,double y,double z);
  /// getters
  double x() const;
  double y() const;
  double z() const;
  /// setters
  void x(double k);
  void y(double k);
  void z(double k);

  /// dot product : returns dot(this,a)
  double dot(const Vector3 &a) const;

  /// set the cross product a x b to this
  void cross(const Vector3 &a,const Vector3 &b);

  /// function add : p=p1+p2
  friend Vector3 operator +(const Vector3 &a,const Vector3 &b);
 ...

};
```

3 Transformations

Translation

Translation de vecteur $T = \left(\begin{array}{c} T_x \\ T_y \\ T_z \end{array} \right)$.

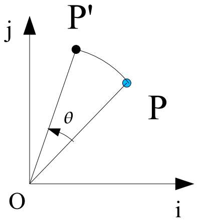


$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x + T_x \\ y' & = & y + T_y \\ z' & = & z + T_z \end{array} \right.$$

$$P' = P + T$$

Rotation en 2D

Rotation d'angle θ autour de l'origine.



$$\left\{ \begin{array}{lll} x' & = & x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \\ y' & = & x\sin(\theta) + y\cos\theta \end{array} \right.$$

Comment retrouver ? Soit α l'angle (i, OP) et $r = \|OP'\| = \|OP\|$. Alors

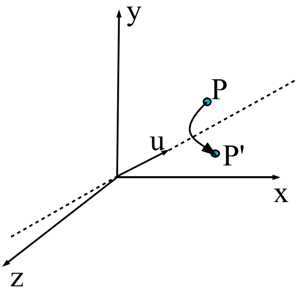
$$\left\{ \begin{array}{lll} x' & = & r\cos(\alpha+\theta) \\ y' & = & r\sin(\alpha+\theta) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} x' & = & r\cos(\alpha)\cos(\theta) - r\sin(\alpha)\sin(\theta) \\ y' & = & r\cos(\alpha)\sin(\theta) + r\sin(\alpha)\cos(\theta) \end{array} \right.$$

or $x = r\cos(\alpha)$ et $y = r\sin(\alpha)$

$$P' = RP \text{ avec } R = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

Rotation en 3D



- La rotation en 3D s'effectue autour **d'un axe** dont on donne un vecteur directeur *u* (seules rotations considérées : axe passant par l'origine).
- Le sens de rotation est le sens trigonométrique par rapport à l'axe (« tourne » dans le sens direct quand le vecteur de l'axe pointe vers vous).
- Exemple : autour de l'axe *z* (droite de vecteur directeur $(0,0,1)$).

$$R_{OZ} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sin\theta & 0 \\ \sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation 3D : autres axes

$$R_{OX} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -sin\theta \\ 0 & \sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \qquad R_{OY} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & cos\theta \end{pmatrix}$$

Substituer Y à X et Z à Y Substituer Z à X et X à Y (attention aux signes)

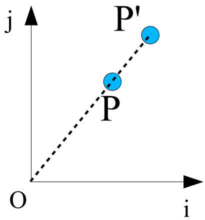
- La rotation autour d'un axe de vecteur u quelconque est un peu plus laborieuse à exprimer.

Avec $c = cos(\theta)$, $s = \sin(\theta)$ et $u = (u_x, u_y, u_z)$ **normé**.

$$\begin{pmatrix} u_x^2 + (1-u_x^2)c & u_x u_y(1-c) - u_z s & u_x u_z(1-c) + u_y s \\ u_x u_y(1-c) + u_z s & u_y^2 + (1-u_y^2)c & u_y u_z(1-c) - u_x s \\ u_x u_z(1-c) - u_y s & u_y u_z(1-c) + u_x s & u_z^2 + (1-u_z^2)c \end{pmatrix}$$

Scale

Changement d'échelle de rapport k.



$$\begin{cases} x' &= kx \\ y' &= ky \\ z' &= kz \end{cases}$$ peut être défini par coordonnées : $$\begin{cases} x' &= k_x x \\ y' &= k_y y \\ z' &= k_z z \end{cases}$$

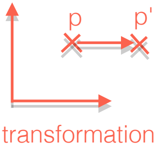
$$\boxed{P' = SP \text{ avec } S = \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{pmatrix}}$$

Changements de repères

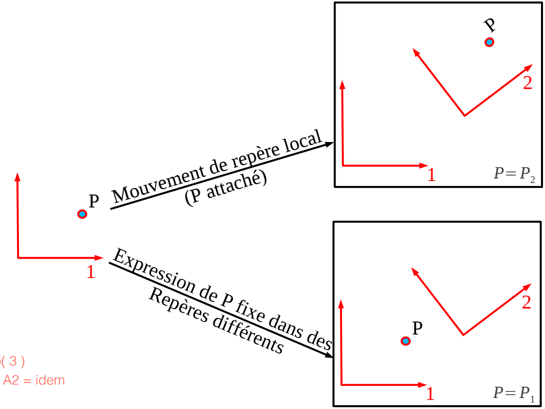
- Il s'agit d'une approche généralement adoptée par les librairies graphiques : placer un objet = placer son repère.
- L'interprétation en **transformation** est différent du raisonnement en **changement de repères**, mais le calcul reste le même :
  - **Transformation** : $P' = \mathcal{T} P$ (2 points dans un même repère)
  - **Changement de repères** : $P_1 = \mathcal{T}_{1 \to 2} P_2$ (un point P dans 2 repères distincts ; $\mathcal{T}_{1 \to 2}$ indique comment on passe du repère 1 au repère 2).

changement de repère correspond mieux

- Remarque : $P_1 = \mathcal{T}_{1 \to 2} P_2$ n'est pour l'instant qu'une notation : elle signifie qu'on applique $\mathcal{T}_{1 \to 2}$ aux coordonnées de P_2 pour obtenir les coordonnées de P_1.



Changements de repères : 2 interprétations relatives



Calcule tjrs par rapp au repere 1
transformation: A' = T + A = (1,5)(3)
chgt repere avec point: A1 = T + A2 = idem
cht repere sans point:
A1 = T1->2A2
A1 =T + A2
A2 = A1 - T = T2->1A1 (avec T2->1 = -T)

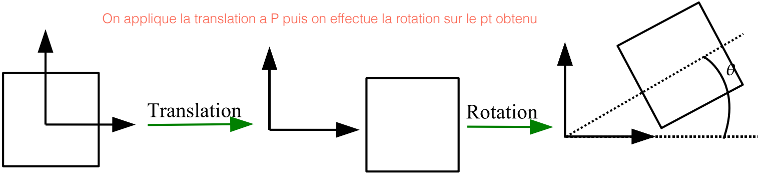
$$\Rightarrow P_1 = \mathcal{T}_{1\rightarrow 2} P_2$$

$\Rightarrow$ savoir manipuler et mixer les 3 interprétations (transformations, mouvement du repère local, changement de coordonnées) pour résoudre les problèmes de placements.
Exercice : point $A(0.5, 1.0)$ donné dans un repère 1, donnez le schéma et le calcul des 3 interprétations (calcul de A'_1 ou A_1 ou A_2 selon l'interprétation) pour une translation de vecteur $T = (1, 2)$

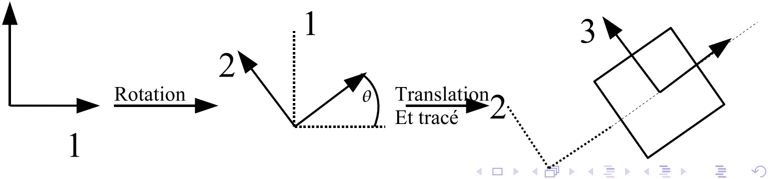
Composition des changements de repères

- Transformations : la composition de transformations notée $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\ldots\mathcal{T}_n$ consiste à appliquer **d'abord** $\mathcal{T}_n$ **puis** $\mathcal{T}_{n-1}$ **puis** $\ldots$ $\mathcal{T}_1$ (**lecture de droite à gauche**).
- Changements de repères : la composition des changements de repères notée $\mathcal{T}_{1\to 2}\mathcal{T}_{2\to 3}\ldots\mathcal{T}_{n-1\to n}$ consiste à appliquer **d'abord** $\mathcal{T}_{1\to 2}$ **puis** $\mathcal{T}_{2\to 3}$ **puis** $\ldots$ $\mathcal{T}_{n-1\to n}$ (**lecture de gauche à droite**).
- Exemple : RT
  - Transformations : $P' = RT(P)$

On applique la translation a P puis on effectue la rotation sur le pt obtenu

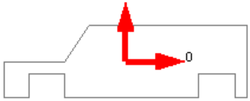


  - Repères : $P_1 = R_{1\to 2}T_{2\to 3}P_3$



Repères et tracé 1/2

- Avec une librairie graphique on "part" d'un **repère initial** :
  - C'est le repère des points tracés lorsqu'on n'applique aucun changement de repère (par exemple coin bas/gauche de la fenêtre graphique pour une librairie 2D).
- On conçoit les objets (i.e. les coordonnées de ses points) dans un repère qui permet de le définir le plus aisément possible. Ce repère est dit **repère local** ou **repère objet**.



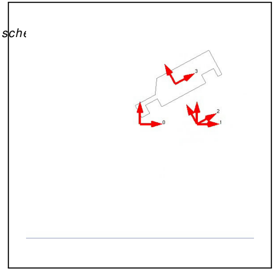
- Pour placer l'objet où on veut, on déplace alors le repère objet **depuis** le repère initial, c'est à dire qu'on indique $\mathcal{T}_{initial \rightarrow objet}$
- Lorsque l'objet est tracé, la librairie graphique doit calculer les points dans le repère initial :
  - Chaque point de l'objet P_{objet} subit $P_{initial} = \mathcal{T}_{initial \rightarrow objet} P_{objet}$
  - La librairie graphique peut alors tracer les points $P_{initial}$.

Repères et tracé 2/2

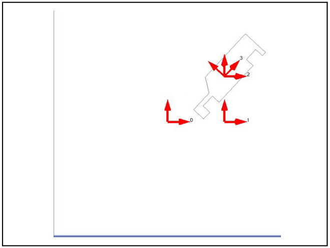
- On peut décomposer $\mathcal{T}_{initial \to objet}$ en autant d'étapes que souhaitées. Par exemple : $\mathcal{T}_{initial \to objet} = \mathcal{T}_{initial \to 1}\mathcal{T}_{1 \to 2}\mathcal{T}_{2 \to objet}$
- Les librairies graphiques gèrent en général une seule transformation de repère qui traduit le passage du repère initial à un repère courant (i.e. $\mathcal{T}_{initial \to courant}$).
- La librairie offre alors les instructions pour modifier à loisir le repère courant en **composant** depuis le repère courant : $\mathcal{T}_{initial \to courant_{new}} \longleftarrow \mathcal{T}_{initial \to courant_{old}} \mathcal{T}_{courant_{old} \to courant_{new}}$.
- Par exemple en OpenGL (2.1) : l'instruction `glTranslatef(5,0,5);` modifie le repère courant en le déplaçant du vecteur $T = (5,0,5)$.
- Ces instructions ne **tracent rien** ! Elles modifient le repère courant.

Exemples OpenGL

```
void drawScene(double angle) {
  // lors de l'appel on se trouve sur un repère courant (noté 0 sur le sche
  // pour éviter tout effet de bord, on mémorise le repère courant.
  glPushMatrix();

  glTranslatef(5,0,0);       // passage à 1
  glRotatef(angle,0,0,1);    // passage à 2
  glTranslatef(0,4,0);       // passage à 3

  drawCar();

  // restituer repère courant (après le pop, le repère courant est à
nouveau le repère 0)
  glPopMatrix();
}
```



```
void drawScene(double angle) {
  // mémoriser le repère courant à l'appel
  glPushMatrix();

  glTranslatef(5,0,0);       // passage à 1
  glTranslatef(0,4,0);       // passage à 2
  glRotatef(angle,0,0,1);    // passage à 3

  drawCar();

  // restituer le repère courant à l'appel
  glPopMatrix();
}
```



L'animation est obtenue en appelant continuellement `drawScene`. Le paramètre `angle` est incrémenté entre chaque image.

4 Représentation des changement de repères par matrices homogènes

Coordonnées homogènes

- Pour représenter, et calculer, les changements de repères, les librairies de programmation graphique (OpenGL, Java2D/3D, Direct3D, etc) utilisent les matrices homogènes.
- Passer des coordonnées 3D en coordonnées homogènes :

$$P_{3D} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow P_H = \begin{pmatrix} xw \\ yw \\ zw \\ w \end{pmatrix} \text{avec } w \in \mathbb{R}^* (\text{cad } w \neq 0)$$

- Passer des coordonnées homogènes en coordonnées 3D :

$$P_H = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \Longleftrightarrow P_{3D} = \begin{pmatrix} x/w \\ y/w \\ z/w \end{pmatrix}$$

- Remarque : on différencie les points (qui ont une coordonnée $w \neq 0$) et les vecteurs (en posant $w = 0$ et les coordonnées (x, y, z) restent identiques en 3D et en homogènes).
- On peut alors traduire tout changement de repères par une matrice 4×4, $M_{1 \to 2}$: $P_1 = M_{1 \to 2} P_2$.

Intérêts/Remarques

- Tout changement de repère (translation, rotation, toute composition, ..., projections, ...) peut se traduire par une matrice 4×4.
- La composition des changement de repères se traduit par le produit des matrices 4×4 (i.e. $M_{1 \to 3} = M_{1 \to 2} M_{2 \to 3}$).
- Attention : la somme n'a pas d'interprétation directes en coordonnées homogènes. Exemple : faire $u = \overrightarrow{AB} = A - B$ n'a aucun sens en coordonnées homogènes.

Exemples

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Translation — Rotation — Scale

- Exercice : soient deux translations de vecteurs $T_1(x_1, y_1, z_1)$ et $T_2(x_2, y_2, z_2)$. Appliquer T_1 au point $A(x, y, z)$ par les coordonnées homogènes et retrouver le résultat $A' = A + T_1$. Quelle est la composition de T_1 et T_2 en appliquant le produit ? (retrouver que le résultat est la translation $T_1 + T_2$).
- Appliquer la composition $T1 + T2$ au **vecteur** $u(x, y, z)$.
- Quelle est la forme générale de la composition TR ? Que constate-t-on quand on applique TR au vecteur u ?

Matrice OpenGL

- Pour le positionnement, OpenGL gère une matrice homogène qui exprime le changement de repère $\mathcal{T}_{Eye \rightarrow Courant}$.
- Cette matrice est appelée la `MODELVIEW`.
- On déplace le repère courant à loisir pour placer les repères objets où on le souhaite en modifiant la valeur de la `MODELVIEW`.
- $\Rightarrow$ Tous les sommets rencontrées à l'exécution subissent la matrice `MODELVIEW`.

Exemple : on appelle `TracerCarre()`

```
void TracerCarre() {
  glBegin(GL_POLYGON); // trace un polygone dont les sommets suivent
    glVertex3f(1.0,1.0,0.0); // premier sommet P(1,1,0)
    glVertex3f(-1.0,1.0,0.0);
    glVertex3f(-1.0,-1.0,0.0);
    glVertex3f(1.0,-1.0,0.0);
  glEnd();
}
```

$\Rightarrow$ A l'éxécution des `glVertex3f(x,y,z);` OpenGL applique à $(x,y,z,1) = P_{Object}$ la `MODELVIEW` :
$P_{Eye} = \mathtt{MODELVIEW} * P_{Object}$.

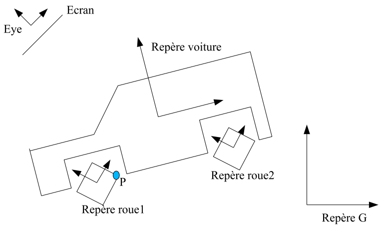
Modifications de la MODELVIEW

- `glLoadIdentity()` : affecte la matrice courante avec l'identité
- `glLoadMatrixd(double m[16])` : affecte la matrice avec *m* (décrite en colonnes).
- `glTranslatef(tx,ty,tz)` : multiplie à droite la matrice courante avec la matrice de translation T ($\Rightarrow$ MODELVIEW $\leftarrow$ MODELVIEW $\times T$).
- `glRotatef(theta,ux,uy,uz)` : multiplie à droite la matrice courante avec la matrice de rotation R.
- `glMultMatrixd(double m[16])` : multiplie à droite la matrice courante avec la matrice *m*.

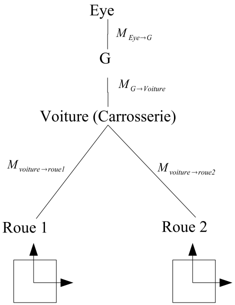
  Remarque pour la rotation : on donne l'angle (en degrés !) et le vecteur directeur de l'axe de rotation (l'axe passe toujours par l'origine).

5 Conception hiérarchique

Conception hiérarchique



Le positionnement relatif des repères peut se représenter sous forme d'arbre :



- Chaque relation se traduit par un changement de repère $M_{\text{pere} \to \text{fils}}$
- Chaque sous-arbre doit pouvoir se concevoir indépendamment de son père (i.e. on peut associer à chaque noeud un `tracerNoeud` sans se préoccuper du noeud père).
- On remarque que les deux roues sont identiques dans leurs repères locaux (ce sera la même procédure qui tracera les deux roues).

Traduction de la hiérarchie en OpenGL

- On dispose d'une seule matrice (la `MODELVIEW`) qui représente là où se trouve le repère courant.
- Lorsqu'un noeud a plusieurs fils, on doit mémoriser le repère du père.
- Eviter de faire des transformations inverses $\Rightarrow$ préférer mémoriser les repères.
- $\Rightarrow$ utilisation d'une pile pour mémoriser un repère.

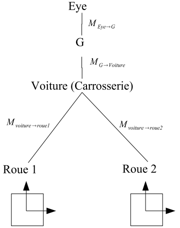
Pile de matrices

- `glPushMatrix()` empile une copie de la `MODELVIEW`.
- `glPopMatrix()` recopie le haut de la pile dans la `MODELVIEW` et dépile.
- Ainsi un `glPopMatrix()` permet de retrouver le repère courant qu'on avait lors du `glPushMatrix()` correspondant.

L'exemple

`Appliquer(R1,R2)` correspond à une suite d'instructions qui modifie la `MODELVIEW` (`glTranslate`, etc).

```
void TracerRoue() {
glPushMatrix();
  tracerCarre();
glPopMatrix();
}

void TracerVoiture() {
  glPushMatrix();

    // MODELVIEW = M_Eye_Voiture (Repere courant = Voiture)
    TracerCarrosserie();
    glPushMatrix(); // Sauvegarde de M_Eye_Voiture
      Appliquer(Voiture,Roue1); // MODELVIEW = M * M_Voiture_Roue1
                                // i.e. Repère courant = Roue1
      TracerRoue();
    glPopMatrix(); // depiler la pile MODELVIEW.
    // Le haut de pile est donc M_Eye_Voiture
    // i.e. Repère courant = Voiture

    Appliquer(Voiture,Roue2); // MODELVIEW = M * M_Voiture_Roue2
                              // i.e. Repère courant = Roue2
    TracerRoue();
  glPopMatrix();
}
```

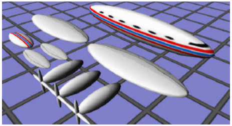
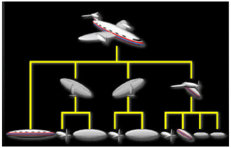
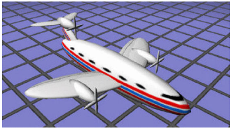



```
void TracerScene() {
glPushMatrix();
  Appliquer(Eye,G);
  Appliquer(G,Voiture);
  TracerVoiture();
glPopMatrix();
}
```

Remarque : la `MODELVIEW` doit être initialisée par `glLoadIdentity()` dans une procédure d'initialisation.

Conception hiérarchique : conclusion

- Concevoir les composants dans des repères locaux les plus simples (ou intuitifs) possibles.
- Assembler les composants hiérarchiquement (sous forme d'arbres), en les positionnant relativement les uns par rapport aux autres (on place les fils par rapport au père par un changement de repère $M_{pere \to fils}$).

- La conception hiérarchique (ou plus généralement les graphes de scène) est fondamentale et apparait dans nombreux formats de scènes 3D (VRML, X3D, ...) et librairies (Java3D, Ogre3D, ...).

6 Manipulations usuelles de changements de repères

Les 3 repères fondamentaux d'une scène 3D

On distingue avant tout 3 repères pour la conception et la visualisation d'une scène :

- Le repère du monde ou repère de scène (i.e. `World`) : c'est le repère de référence par rapport auquel seront positionnés tous les objets. Dans un graphe de scène, c'est le noeud racine.
- Le repère de la caméra (i.e. `Eye` ou `Camera`) : c'est le repère du point de vue/de l'observateur (nécessaire pour la visualisation). On place `Eye` par rapport au repère `World`.
- Le repère objet (i.e. `Object`) : c'est le repère de l'objet (i.e. noeud du graphe de scène) qu'on considère. On place `Object` par rapport à son noeud père (i.e. par rapport à `World` si un seul niveau de hiérarchie).

Autrement dit, en tant que concepteur, on spécifie :

- $\mathcal{T}_{World \rightarrow Eye}$: placement de la caméra dans le monde
- $\mathcal{T}_{World \rightarrow Object}$: placement de l'objet dans le monde (placement éventuellement décomposé par hiérarchie).

Exemple : position de la caméra en OpenGL

- En OpenGL, le repère initial de tracé est le repère `Eye`.
- Lors du tracé d'un objet, il faut qu'OpenGL dispose donc de $\mathcal{T}_{Eye \rightarrow Object}$ (passage mémorisé dans la matrice `MODELVIEW`).
- Comment l'obtenir à partir de $\mathcal{T}_{World \rightarrow Eye}$ et $\mathcal{T}_{World \rightarrow Object}$? (si on conçoit la scène ainsi).
- $\Rightarrow pastEyeObject = \mathcal{T}_{Eye \rightarrow World} \mathcal{T}_{World \rightarrow Object}$ (décomposer).
- et $\mathcal{T}_{Eye \rightarrow World}$ peut être déterminé à partir de $\mathcal{T}_{World \rightarrow Eye}$: c'est le passage inverse.

Changements inverses

- L'inverse de $M_{1\to 2}$ est notée $M_{1\to 2}^{-1}$ et identique à $M_{2\to 1}$
- Inverse d'un produit de matrices : $(M_1 M_2 M_3)^{-1} = M_3^{-1} M_2^{-1} M_1^{-1}$ (attention à l'ordre !)
- Inverse d'une composition de changements de repères : $(M_{1\to 2} M_{2\to 3} M_{3\to 4})^{-1} = M_{4\to 3} M_{3\to 2} M_{2\to 1}$
- Dans le cas général l'inversion consiste à résoudre $MM^{-1} = I$ (pivot de gauss, par calcul de déterminant, ...),
- Mais :
  - La translation T inverse est la translation de vecteur opposé $-T$.
  - La rotation inverse R_θ est la rotation d'angle opposé $R_{-\theta}$
  - Le changement d'échelle $S(k_x, k_y, k_z)$ inverse est $S(\frac{1}{k_x}, \frac{1}{k_y}, \frac{1}{k_z}$.
  - L'inverse de toute matrice orthonormale (matrice 3×3 de rotation par exemple, ou tout passage de repère orthonormé) s'obtient en la transposant :

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} \text{ si orthonormal}$$

Exemple d'inversion en OpenGL

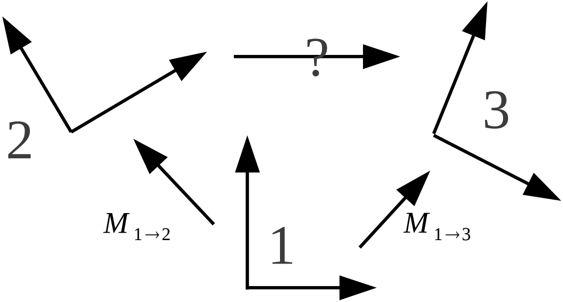
- Si un passage est traduit par :

```
glTranslatef(x,y,z);          // 1->2
glRotatef(angle,ux,uy,uz);    // 2->3
```

- Le code suivant correspond au passage inverse :

```
glRotatef(-angle,ux,uy,uz);   // 3->2
glTranslatef(-x,-y,-z);       // 2->1
```

Autre exemple



- On connait $M_{1 \to 2}$ et $M_{1 \to 3}$, quelle est la matrice $M_{2 \to 3}$?
- Solution : $M_{2 \to 3} = M_{2 \to 1} M_{1 \to 3}$ (il reste à inverser $M_{1 \to 2}$ pour avoir $M_{2 \to 1}$).

Remarque sur la matrice TR

- Tout changement de repères orthonormés directs s'exprime par une matrice de la forme TR.
- $\Rightarrow$ Il s'agit d'une composition que l'on retrouve très souvent (transformation rigide).

Soit 2 changements de repère T (translation) et R (rotation).
alors

$$TR = \left(\begin{array}{c|c} R_{3D} & T_{3D} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

- L'inverse ? Il suffit de transposer R_{3D} (inverse d'une matrice orthonormale) et d'opposer T_{3D} :

$$(TR)^{-1} = R^{-1}T^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} R^t_{3D} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I & -T_{3D} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} R^t_{3D} & -R^t_{3D}T_{3D} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

Passage orthonormé

- Soient $1 = (O^{(1)}, i^{(1)}, j^{(1)}, k^{(1)})$ et $2 = (O^{(2)}, i^{(2)}, j^{(2)}, k^{(2)})$, deux repères orthonormés. On connait les expressions de l'origine et de la base de 2 dans le repère 1.

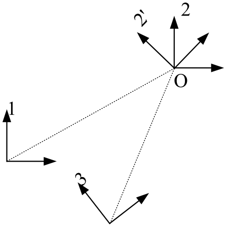
  Alors :

$$M_{1\to 2} = \left(\begin{array}{ccc|c} i_1^{(2)} & j_1^{(2)} & k_1^{(2)} & O_1^{(2)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- L'inverse $M_{2\to 1}$? il suffit de faire comme pour $(TR)^{-1}$ (transposer le bloc haut-gauche (c'est une rotation) et d'opposer le bloc haut-droit (c'est une translation) et faire le produit des inverses)

Transformation exprimée dans un autre repère

- Exemple : rotation du repère 1 autour de O (i.e. rotation par rapport au repère 2) pour obtenir $1'$.
- Revient à "attacher" le repère 1 au repère 2.

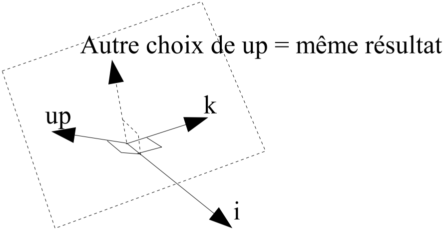


- $\Rightarrow M_{1\to 1'} = M_{1\to 2} M_{2\to 2'} M_{2'\to 1'}$
- avec $M_{2\to 2'} = R$ et $M_{2'\to 1'} = M_{2\to 1}$.
- $\Rightarrow M_{1\to 1'} = M_{1\to 2} R M_{2\to 1}$

LookAt

Placer la caméra par rapport à `World` en donnant sa position A_{World}, quel point elle regarde (point At_{World}) et son roulis par un vecteur Up_{World}.

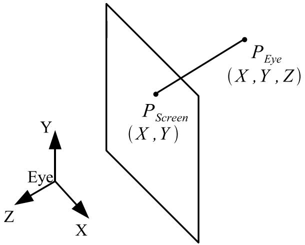
- Construire (i, j, k) :
  - k est donné par $k = O - At$, et on le normalise.
  - i est tel que $i = up \times k$
  - enfin j est calculé par $j = k \times i$
  - La matrice $M_{World \to Eye}$ est donnée en mettant en colonne i, j, k et O (repère étant orthonormé).



7 Projection

Projection orthogonale

- En OpenGL tout sommet subit la `MODELVIEW` pour obtenir un point exprimé dans le repère `Eye`.
- Comment en déduire les coordonnées à l'écran ?
- Exemple : projection orthogonale.

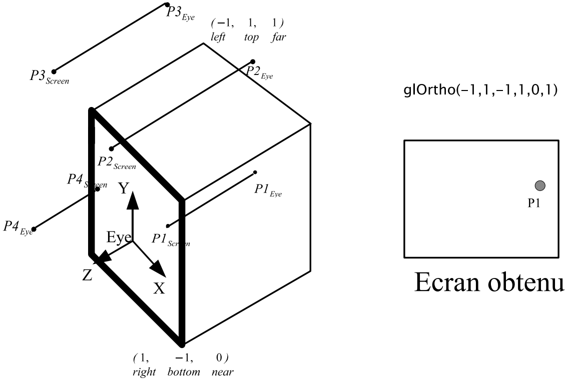


$$\begin{pmatrix} x_{screen} \\ y_{screen} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{eye} \\ y_{eye} \end{pmatrix}$$

Exercice : quelle est la matrice homogène pour passer de P_{eye} à P_{screen} sachant que l'écran est à une distance `near` de `eye` ?

Projection orthogonale en OpenGL

- La projection est mémorisée dans une matrice `PROJECTION`.
- Tout sommet subit $P_{\text{Projeté}} = \mathit{PROJECTION} * \mathit{MODELVIEW} * P_{\text{Object}}$
- `PROJECTION` est calculée pour s'assurer que toutes les coordonnées (incluant la coordonnée z) soit dans l'intervalle $[-1, 1]$ (coordonnées dites normalisées).
- $\Rightarrow$ calcul de `PROJECTION` à partir d'un volume de visualisation :



Projection orthogonale en OpenGL

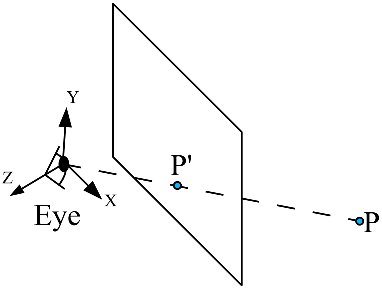
$$P_{\text{Projeté}} = M_{\text{PROJECTION}} P_{Eye}$$

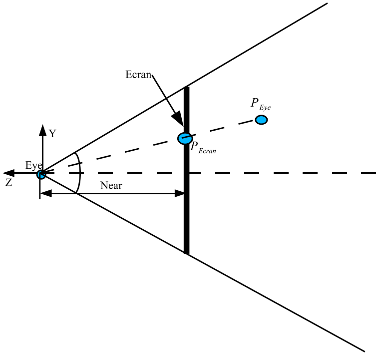
avec

$$M_{\text{PROJECTION}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{right-left} & 0 & 0 & -\frac{right+left}{right-left} \\ 0 & \frac{2}{top-bottom} & 0 & -\frac{top+bottom}{top-bottom} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{far-near} & -\frac{far+near}{far-near} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- C'est la matrice calculée par l'instruction `glOrtho(left,right,bottom,top,near,far)`.
- résulte de l'application d'une rêgle de 3 : passer de $x_{eye} \in [left, right]$ à $x_p \in [-1, 1]$.

Projection perspective

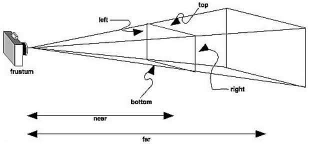




Exercice : quelle est la matrice de passage $M_{Screen \to Eye}$?

Projection Perspective

- Définition d'un volume de visualisation pour normaliser les coordonnées (en OpenGL : `glFrustum(left,right,bottom,top,near,far)`).



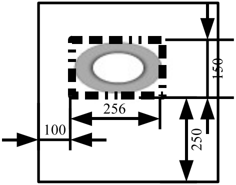
- Attention ! `near` pas "trop proche" de 0, et `far-near` pas "trop grand".

$$M_{\text{PROJECTION}} = \begin{pmatrix} 2\frac{near}{right-left} & 0 & \frac{right+left}{right-left} & 0 \\ 0 & 2\frac{near}{top-bottom} & \frac{top+bottom}{top-bottom} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{far+near}{far-near} & -2\frac{far*near}{far-near} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ "complexité" liée à l'élimination des parties cachées (calcul de la profondeur) : sera justifié dans le chapitre correspondant.

Viewport

- Phase géométrique :
  - Tout sommet subit $P_p = M_{\text{PROJECTION}} M_{\text{MODELVIEW}} P_{Object}$
  - P_p est toujours dans le repère caméra et en coordonnées homogènes.
  - Les coordonnées normalisées sont obtenues en divisant P_p par sa coordonnée homogène.
  - On obtient les coordonnées entières à l'écran de P_p en appliquant un `viewport` (définition de la fenêtre graphique) :
  - Exemple :



glViewport(100,250,256,150)

`glViewport(x_min,y_min,width,height)`

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{ecran} = (x+1)\frac{width}{2} + x_{min} \\ y_{ecran} = (y+1)\frac{height}{2} + y_{min} \end{cases}$$

Spécification de la projection en OpenGL

```
void initGL() {
  // définition de la matrice de projection (projection perspective ici)
  glMatrixMode(GL_PROJECTION);
  glLoadIdentity();
  glFrustum(-1,1,-1,1,0.1,100);

  // définition de la matrice de transformation (identité = repère courant sur Eye).
  glMatrixMode(GL_MODELVIEW);
  glLoadIdentity();

  glViewport(0,0,width,height); // fen\^etre graphique d'OpenGL
  ...
}
```