

# Chapitre 4 : Courbes et surfaces

## Modélisation 3D et Synthèse

Fabrice Aubert  
fabrice.aubert@lfl.fr

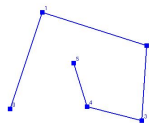


IEEA - Master Info - Parcours IVI

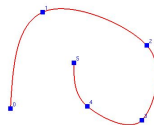
2012-2013

# 1 Introduction

- ▶ But : approximer les formes (les objets) par des outils mathématiques (i.e modèle de courbes ou surfaces)
- ▶ Approximation avec des primitives linéaires :
  - Segments, Triangles, Tétraèdres.
- ▶ Approximation avec des courbes et surfaces :
  - Courbes et surfaces polynomiales :
    - Hermites, Béziers (B-Splines, NURBS).
  - Courbes et surfaces implicites :
    - Blobs (Surfaces à squelette)



Interpolation linéaire de points



Interpolation cubique de points

- ▶ Généricité : ensemble des « formes » représentables par le modèle choisi.
- ▶ Interactivité : facilité de contrôle - forme naturelle.
- ▶ Visualisation : facilité d'« affichage »
- ▶ Représentation : stockage en mémoire et conversion avec d'autres modèles.
- ▶ Raccordement : les courbes ou surfaces complexes sont souvent composées de plusieurs primitives (peut-on les raccorder aisément ?)

## 2 Courbes polynomiales

# Définition

- Une courbe polynomiale de degré  $d$  est décrite par  $t \in \mathbf{R}$  :

$$P(t) = \begin{cases} P(t)_x = a_0^x + a_1^x t + a_2^x t^2 + a_3^x t^3 + \dots + a_d^x t^d \\ P(t)_y = a_0^y + a_1^y t + a_2^y t^2 + a_3^y t^3 + \dots + a_d^y t^d \\ P(t)_z = a_0^z + a_1^z t + a_2^z t^2 + a_3^z t^3 + \dots + a_d^z t^d \end{cases}$$

- Notation matricielle :

$$P(t) = \begin{pmatrix} P(t)_x \\ P(t)_y \\ P(t)_z \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} a_d^x & a_d^y & a_d^z \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^x & a_1^y & a_1^z \\ a_0^x & a_0^y & a_0^z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P(t) = (P(t)_x \ P(t)_y \ P(t)_z) = (t^d \dots t^2 \ t^1) M$$

Remarque : on notera également  $a_0 = (a_0^x \ a_0^y \ a_0^z)$  (ou sa transposée) dans la suite.

# Tracé d'une courbe polynomiale

- ▶ Généralement on s'intéresse à des morceaux de courbes ( $P(t)$  défini pour  $t \in [t_{debut}, t_{fin}]$ ).
- ▶ Calcul d'un ensemble de `nbPoint` points et relier ces points par des segments (approximation polygonale).

```
t=t_debut;
pas_t=(t_fin-t_debut)/(nbPoint-1);

P_old=evaluerP(t);
pour i variant de 2 à nbPoint faire
    t=t+pas_t;
    P_new=evaluerP(t);
    P_old.drawTo(P_new);
    P_old=P_new;
fin pour
```

Problèmes qui peuvent se présenter :

- ▶ Calculer `nbPoint` pour que la courbe paraisse lisse (approximation assez fine à l'oeil).
- ▶ Calculer un pas `pas_t` non constant pour tenir compte de l'abscisse curviligne et/ou de la courbure.

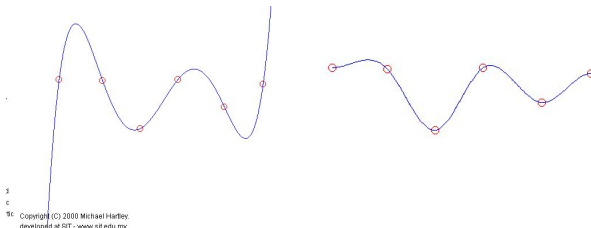
# Courbes d'interpolation

- ▶ Trouver la courbe polynomiale passant par  $n$  points  $P_1, P_2, \dots, P_n$  ?
- ▶ Solution brutale : résoudre le système d'équations.

- Spécifier les  $t_i$  pour chaque point  $P_i$  (pas très intuitif).
- La courbe sera de degré  $n - 1$  (calcul lourd si  $n > 4$ ).
- Résoudre le système d'équation

$$\begin{cases} P_1(t_1) = (t_1^{n-1} \dots t_1^2 t_1 1)M \\ P_2(t_2) = (t_2^{n-1} \dots t_2^2 t_2 1)M \\ \dots \end{cases}$$

- $\Rightarrow$  Interpolation de Lagrange.
- Forme pas intuitive du tout (fortes variations si le degré est élevé).

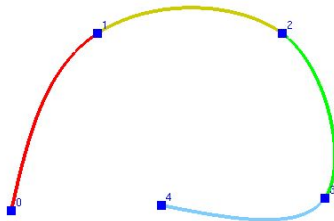




# Constructions de courbes

Préferer  $\Rightarrow$

- Raccordement de courbes de degré au plus 3 (voire 4) « naturelles » .

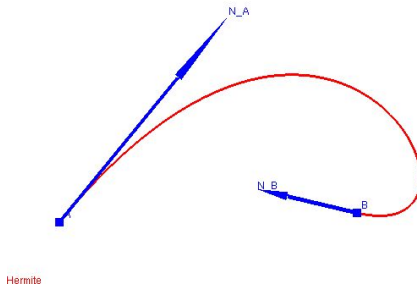


Interpolation

# 3 Courbes de Hermite

# Définition

- ▶ C'est une courbe polynomiale de degré 3 (cubique).
- ▶ Le paramètre  $t$  varie « seulement » entre 0 et 1 (segment normalisé).
- ▶ Elle est définie par :
  - les deux points extrémités :  $P_0 = P(0)$  et  $P_1 = P(1)$
  - les deux tangentes en ces points :  $T_0 = P'(0)$  et  $T_1 = P'(1)$



⇒

- ▶ Contrôle intuitif et aisé (contrôle des extrémités et tangentes)
- ▶ Raccordement de plusieurs hermites facile.

# Forme matricielle

- ▶  $P(t) = (t^3 \ t^2 \ t \ 1)M$ . Quelle est la matrice  $M$  ?
- ▶ Le système d'équation  $P_0 = P(0)$ ,  $P_1 = P(1)$ ,  $T_0 = P'(0)$   $T_1 = P'(1)$  se met sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ T_0 \\ T_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0^3 & 0^2 & 0 & 1 \\ 1^3 & 1^2 & 1 & 1 \\ 3 \times 0^2 & 2 \times 0^1 & 1 & 0 \\ 3 \times 1^2 & 2 \times 1^1 & 1 & 0 \end{pmatrix} M$$

- ▶ On résoud pour trouver  $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ T_0 \\ T_1 \end{pmatrix}$ .  
point de départ  
point d'arrivé  
tangente départ  
tangente d'arrivé

$$P_0 = P(0) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 = a_0$$

$$P_1 = P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

$$T_0 = P'(t = 0) = a_1 + 2 a_2 t + 3 a_3 t^2 = a_1$$

$$T_1 = p'(t = 1) = a_1 + 2 a_2 + 3 a_3$$

## Forme matricielle (2)

- Le « vecteur »  $G = \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ T_0 \\ T_1 \end{pmatrix}$  est appelé vecteur géométrique (plus précisément vecteur de hermite dans le cadre des courbes de hermites).

- La matrice  $M_h = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  est appelée matrice de hermite (aucun rapport avec les matrices hermitiennes).

►  $\Rightarrow P(t) = (t^3 \ t^2 \ t \ 1) M_h G$

- Tangentes :  $P'(t) = (3t^2 \ 2t \ 1 \ 0) M_h G$

# 4 Raccordements et dérivées

- ▶ On travaille avec un ensemble de courbes indépendantes.
- ▶ Le raccordement de ces courbes est soumis à des contraintes de continuité (continuité des tangentes, continuité des courbures).

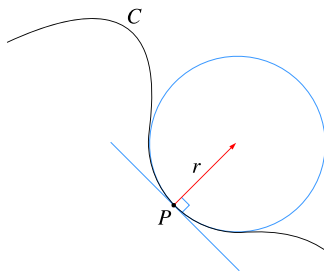
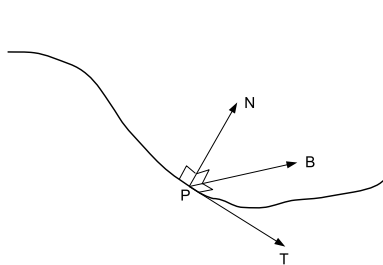
continuité des courbes  $\rightarrow P(1) = Q(0)$   
continuité des tangentes  $\rightarrow P'(1) = Q'(0)$   
avec  $P(1)$  point d'arrivée de courbe P  
 $Q(0)$  point de départ de courbe Q  
 $p'(1)$  tangente d'arrivée de courbe P  
 $Q'(0)$  tangente de départ de courbe Q

Rappels et/ou remarques :

- ▶  $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_d t^d$   
 $\Rightarrow P'(t) = \frac{\partial P(t)}{\partial t} = 0 + a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \dots + da_d t^{d-1}$
- ▶ Le vecteur  $P'(t)$  donne une tangente au point  $P(t)$  (ou vecteur vitesse de  $P(t)$ ).
- ▶  $P''(t) = \frac{\partial^2 P(t)}{\partial t^2} = \frac{\partial P'(t)}{\partial t}$
- ▶ Le vecteur  $P''(t)$  définit l'accélération de  $P(t)$ .
- ▶ Avec la notation matricielle :  $P'(t) = (dt^{d-1} \dots 2t \ 1 \ 0)M$

# Remarques sur les dérivées

- ▶  $P'(t)$  donne une tangente à la courbe  $T$
- ▶ On définit le vecteur binormal par  $B = P'(t) \times P''(t)$  (produit vectoriel).
- ▶ Après **normalisation** de  $T$  et  $B$  on définit la normale principale à la courbe par  $N = B \times T$ .
- ▶  $\Rightarrow$  le repère  $(T, B, N)$  est appelé repère de **frénet**.
- ▶ La courbure en  $P(t)$  est donnée par  $k = \frac{\|P'(t) \times P''(t)\|}{\|P'(t)\|^3}$ .
- ▶ Le rayon de courbure en  $P(t)$  est donné par  $\rho = \frac{1}{k}$ .
- ▶ Le cercle osculateur en  $P(t)$  (cercle qui épouse au mieux la courbe) à un rayon de  $\rho$  et son centre est  $A = P(t) + \rho N$ .





- ▶ Pour simplifier, on considère des segments normalisés ( $P(t)$  est défini avec  $t \in [0, 1]$ ).
- ▶ Soient  $P(t)$  et  $Q(t)$  deux segments de courbes.
- ▶ Le raccordement de  $P$  en  $P(1)$  et de  $Q$  en  $Q(0)$  (« fin » de  $P(t)$  et « début » de  $Q(t)$ ) est dit de continuité :
  - $C^0$  ssi  $P(1) = Q(0)$  (pas d'autres conditions que l'égalité des points).
  - $C^1$  ssi il est  $C^0$  et  $P'(1) = Q'(0) \neq 0$  (égalité des tangentes - raccordement « lisse »).
  - $C^2$  ssi il est  $C^1$  et  $P''(1) = Q''(0) \neq 0$  (égalité des accélérations).
  - ...

- ▶ La continuité  $C^1$  traduit l'égalité des tangentes en direction **et** norme.
- ▶ En informatique graphique, on peut vouloir se contenter d'un lissage visuel : égalité des directions mais pas nécessairement égalité des normes.
- ▶ On définit des raccords avec des continuités géométriques :
  - Le raccordement est dit  $G^1$  ssi  $P'(1) = \lambda Q'(0)$  (c'est à dire que  $P'(1)$  et  $Q'(0)$  colinéaires).
  - $G^2$  si les rayons de courbures sont identiques en  $P(1)$  et  $Q(0)$ .

# 5 Courbes de Bézier

# Définition

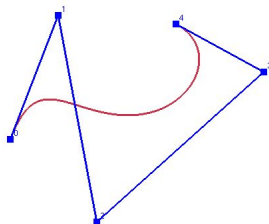
- Une courbe de Bézier est une courbe polynomiale de degré  $n$  définie par  $n + 1$  points de contrôles  $(P_0, \dots, P_n)$ , et décrite sur  $t \in [0, 1]$  par :

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i$$

où

$$B_i^n(t) = C_n^i (1-t)^{n-i} t^i \text{ avec } C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

- Les  $B_i^n(t)$  sont appelés polynômes de Bernstein.
- L'ensemble des points  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ , pris dans cet ordre, est appelé polygone de contrôle.



# Remarques et propriétés (1)

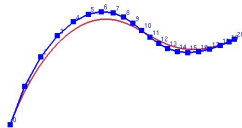
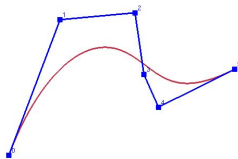
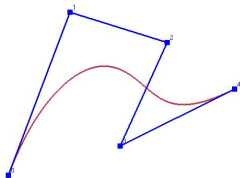
- ▶ exemple : bézier cubique :  $P(t) = (1 - t)^3 P_0 + 3t(1 - t)^2 P_1 + 3t^2(1 - t) P_2 + t^3 P_3$
- ▶ La courbe est de degré  $n$ .
- ▶ La courbe est exprimée comme une combinaison linéaire des points en chaque  $t$  :  $P(t)$  est barycentre. Les coefficients barycentriques des points  $P_i$  sont les  $B_i^n(t)$ .
- ▶ C'est une courbe qui « approxime » les points  $P_i$  (n'interpole pas).
- ▶ La courbe passe cependant par  $P_0$  et  $P_n$
- ▶ La courbe est tangente au polygone de contrôle en  $P_0$  et  $P_n$ .

## Remarques et propriétés (2)

- ▶ Les béziers cubiques (4 points) sont des courbes de hermites (les tangentes sont  $3\overrightarrow{P_0P_1}$  et  $3\overrightarrow{P_2P_3}$ ).
- ▶ Donne des formes naturelles.
- ▶ Contrôle aisé et « assez » intuitif (position des points de contrôle).
- ▶ Très utilisées en informatique graphique.
- ▶ Raccordement  $G_1$  aisé (tangentes aux extrémités colinéaires à  $\overrightarrow{P_0P_1}$  et  $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ ).
- ▶ ... très nombreuses propriétés (enveloppe convexe, intersection, raffinement, ...).

# Raffinement (augmentation du degré)

- ▶ On se donne une courbe de bézier de degré  $n$  définie par  $(P_0, \dots, P_n)$ .
- ▶  $\Rightarrow$  comment calculer des points de contrôles  $(\hat{P}_0, \dots, \hat{P}_{n+1})$  (degré  $n+1$ ) pour obtenir la même courbe ?
- ▶  $\Rightarrow \hat{P}_0 = P_0, \hat{P}_{n+1} = P_n$  et  $\hat{P}_i = \frac{i}{n+1}P_{i-1} + \frac{n+1-i}{n+1}P_i$  (pour  $i \in [1, n]$ ).



$\Rightarrow$  converge vers la courbe de Bézier initiale.

- ▶ L'évaluation de  $P(t)$  peut se faire analytiquement en calculant « brutalement » les  $B_i^n(t)$ .
- ▶ Cette évaluation est numériquement assez instable.
- ▶  $\Rightarrow$  évaluation géométrique par De Casteljau.



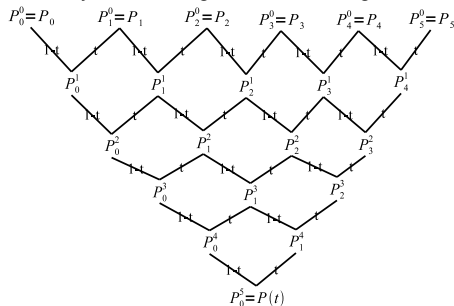
# De Casteljau

- Pour  $t$  **fixé**, on montre que le point  $P(t)$  est le résultat d'une suite récurrente définie par :

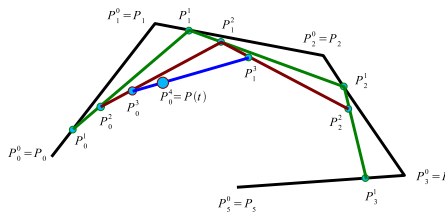
$$\begin{cases} P_i^0 = P_i \text{ pour tout } i \text{ (les points initiaux sont les points de contrôles)} \\ P_i^k = (1-t)P_i^{k-1} + tP_{i+1}^{k-1} \text{ (} P_i^k \text{ est une interpolation linéaire de } P_i^{k-1} \text{ et } P_{i+1}^{k-1} \text{)}. \end{cases}$$

- On itère sur  $k$  jusqu'à  $k = n \Rightarrow$  on obtient  $P(t) = P_0^n$ .

De Casteljau est un algorithme dit triangulaire :

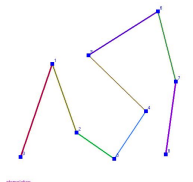


Algorithme de calcul

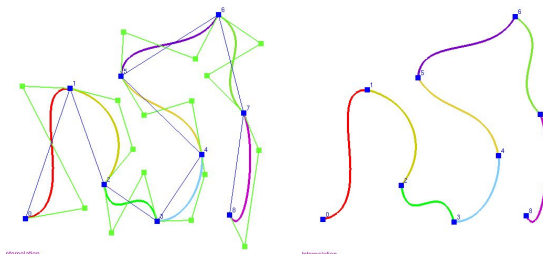


exemple pour le point  $t = \frac{1}{4}$

# Interpolation par morceaux et Catmull-Rom 1/3



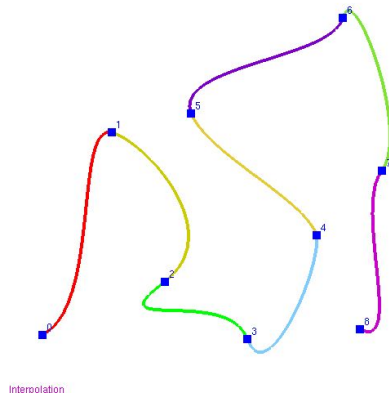
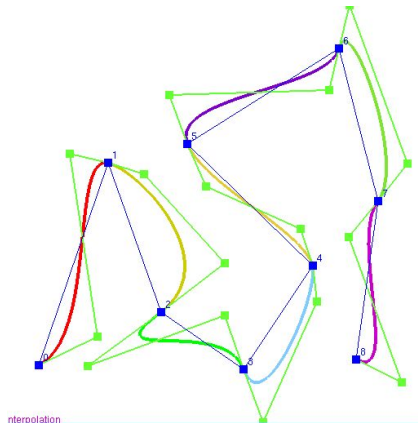
- ▶ On veut interpoler les points  $[P_0, \dots, P_n]$  (c'est-à-dire trouver une courbe qui passe par tous ces points).
- ▶  $\Rightarrow$  courbe  $C_i$  définie pour chaque segment  $[P_i, P_{i+1}]$ 
  - Exemple : bézier cubique définie sur chaque segment :  $C_i = (P_i, l_{i,0}, l_{i,1}, P_{i+1})$



# Interpolation par morceaux et Catmull-Rom 2/3

►  $\Rightarrow$  Fixer les points de contrôle pour avoir une continuité  $C_1$ .

- Pour des béziers, il suffit d'« aligner » les points de contrôles :  $\overrightarrow{l_{i-1,1}P_i} = \overrightarrow{P_i l_{i,0}}$ .
- Il reste un degré de liberté (le  $l_{i-1,1}$  peut être fixé n'importe où).

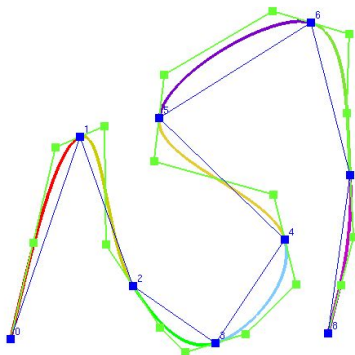


Continuité  $C_1$  (égalité des tangentes)

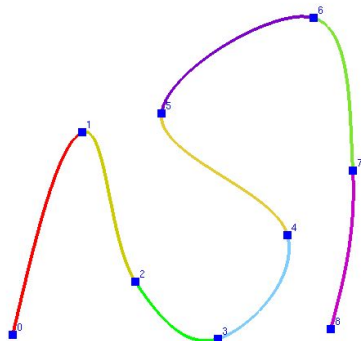
# Interpolation par morceaux et Catmull-Rom 3/3

► ⇒ Fixer les tangentes pour avoir une « bonne » courbe.

- Exemple : Catmull-Rom ⇒  $\text{tangente}_i = \alpha(P_{i+1} - P_{i-1})$
- Avec des béziers cubiques :  $\overrightarrow{l_{i-1,1} l_{i+1,0}} = k \overrightarrow{P_{i-1} P_{i+1}}$



Interpolation



Interpolation

Tangentes fixées par méthode de Catmull-Rom (k=0.4 ici)

# 6 Courbes implicites

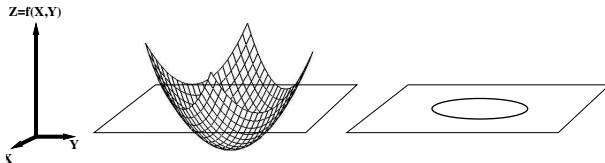
# Définition

- ▶ Une courbe implicite (2D) est définie par :

$$f(x, y) = s$$

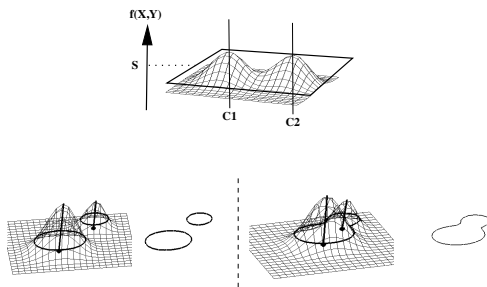
où  $s$  est appelé seuil.

- ▶  $f$  est souvent appelée fonction potentielle (field function), et la courbe est appelée équipotentielle ou iso-courbe.
- ▶ Exemple :  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  (cercle de centre  $(0,0)$ )



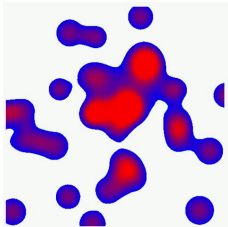
# Primitives implicites

- Pour contrôler les formes on définit souvent des primitives implicites (i.e. courbes implicites simples) qui sont ensuite « mélangées » .
- Exemple : mélange simple par somme : si on dispose de  $n$  champs potentiels  $f_i \Rightarrow f(x, y) = \sum_{i=1}^n f_i(x, y)$ .
- Les primitives peuvent être définies à partir d'objets simples (points, segments, ...)  $\Rightarrow$  primitives dites à squelettes.
- Exemple : 2 primitives  $f_1$  et  $f_2$  définies par un centre et un rayon.



# Blobs et autres...

- ▶ Outre leur intérêt pour modéliser des formes, les surfaces implicites ont beaucoup de succès en infographie car elles permettent d'obtenir facilement des effets de fusion et/ou de déconnexion entre les primitives.
- ▶ Nécessité d'avoir un « bon » mélange entre les primitives (fusion et déconnexion naturelles et esthétiques).
- ▶  $\Rightarrow$  blobs :  $f_i(x, y) = a_i e^{-b_i r^2}$  avec  $r = \sqrt{(x - c_{ix})^2 + (y - c_{iy})^2}$ . Où  $c_i$  est le centre (ou squelette) du blob.  $a_i$  et  $b_i$  permettent de nuancer la forme.



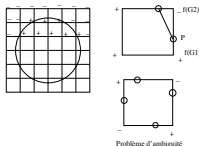
- ▶ Il existe beaucoup de définition de primitives offrant des propriétés de mélanges un peu différentes. Beaucoup reposent sur une fonction  $f_i$  liée à la distance au squelette (point, segment, ensemble de segment).

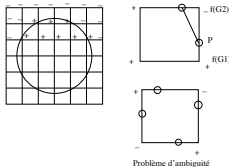


- Problème : trouver les points  $(x, y)$  tels que  $f(x, y) = s$  (équation complexe et non linéaire, souvent non polynomiale).
- Autre formulation :  $\Rightarrow$  trouver la coupe entre le plan  $z = s$  et la surface  $z = f(x, y)$ .

Une solution possible (« polygonisation » d'une courbe implicite) :

- on calcule  $z = f(x, y)$  en chacun des points d'une grille régulière. On affecte "+" si  $f(x, y) > s$  (la fonction est au dessus du plan  $z = s$ ), et "-" sinon (la fonction est au dessous).
- la courbe passe alors nécessairement par les segments de la grille dont le signe des extrémités est différent (point d'intersection entre la grille  $z = f(x, y)$  et le plan  $z = s$ ).
- il reste à relier les points d'intersections.





- ▶ La position du point  $P$  peut s'évaluer par interpolation linéaire : on considère que  $f(P) = s = (1 - \lambda)f(G_1) + \lambda f(G_2) \Rightarrow \lambda = \frac{s - f(G_1)}{f(G_2) - f(G_1)} \Rightarrow P = (1 - \lambda)G_1 + \lambda G_2$ .
- ▶ Incidence de la résolution de la grille :
  - Plus la grille est finement subdivisée, plus le résultat est précis.
  - On suppose **une seule intersection** par arête de la grille : des détails ne sont pas reproduits si ce n'est pas le cas.
  - Les problèmes d'ambiguïtés se résolvent en faisant un choix arbitraire pour relier les points (exemple : toujours « entourer » les « + »).

# Problème d'implicitisation

- ▶ Un des problèmes concernant les surfaces implicites est le contrôle de la forme souhaitée (comment construire une voiture en surface implicite ? un cube ?).
- ▶ Implicitisation = transformer un modèle d'objet en surface implicite.

# 7 Surface

- ▶ Les courbes vues précédemment se généralisent aux surfaces par simple extension.
- ▶ Pour les courbes paramétriques (y compris les polynomiales) : adjonction d'un paramètre  $s$  :

$$P(s, t) = \begin{cases} x = f(s, t) \\ y = g(s, t) \\ z = h(s, t) \end{cases}$$

- ▶ Pour les courbes implicites : adjonction d'une troisième coordonnée  $z$  :

$$P(x, y, z) \text{ tels que } f(x, y, z) = s$$

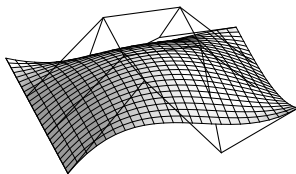
- ▶ Les problèmes de raccordements, de visualisation, de construction, d'interaction s'en trouvent complexifiés mais les solutions restent principalement des extensions des courbes, et les raisonnements sont analogues.

# Exemple : surface de Bézier

- ▶ Les courbes vues (bézier, b-spline, nurbs) s'étendent par « produit tensoriel » (i.e. produit de deux courbes).
- ▶ Exemple pour bézier : on définit un maillage de contrôle de  $(n+1) \times (m+1)$  points.

$$P(s, t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(s) B_j^m(t) P_{i,j} \quad 0 \leq s \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1$$

- ▶ Remarque : on « reconnaît » des courbes de bézier dans chaque direction  $s$  et  $t$  (i.e. pour  $s = s_{fixe}$ , la courbe  $P(s_{fixe}, t)$  est une courbe de bézier).



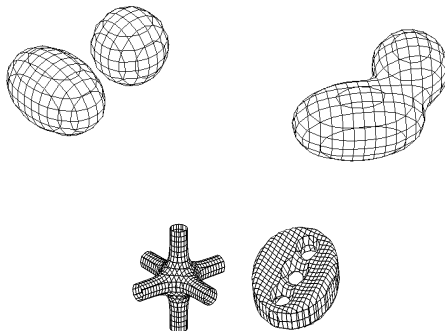
- ▶ On représente souvent une surface complexe en raccordant des « morceaux » (carreaux ou patches) de surfaces simples (béziers cubiques, etc).
- ▶ Les raccordements ( $C^1, C^2, \dots$ ) se font selon une courbe (compléxifie l'étude des courbes dont le raccordement était selon un point).
- ▶ Tangentes en  $P(s, t)$  données par  $T_s(P) = \frac{\partial P(s, t)}{\partial s}$  et  $T_t(P) = \frac{\partial P(s, t)}{\partial t}$ .
- ▶ Remarque : normale en  $P(s, t)$  donnée par le produit vectoriel des deux tangentes.

# Surface implicite

- définition :

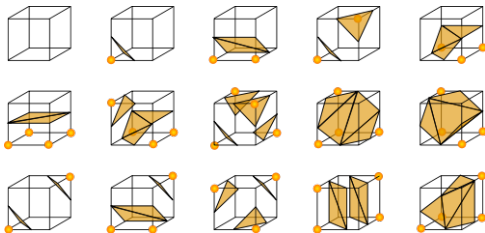
$$P(x, y, z) \text{ tels que } f(x, y, z) = s$$

- la définition des primitives par squelette s'étend naturellement (coordonnée supplémentaire ; voir blobs par exemple).





- ▶ identique à la polygonisation mais sur une grille régulière de cubes (appelés voxels) :
  - évaluer  $f(x, y, z)$  en chacun des sommets de la grille. Déterminer les intersections avec les signes et par interpolation linéaire (un point par arête).
  - relier les points dans chaque face (les carrés)  $\Rightarrow$  donne des arêtes.
  - relier les arêtes dans chaque cube (se fait de manière naturelle en suivant les points d'intersection)  $\Rightarrow$  donne un (ou plusieurs) polygones (généralement décomposé en triangles pour les problèmes de coplanarité).
  - $\Rightarrow$  méthode dite du marching-cube (on fait les cubes un par un). Il existe de très nombreuses variantes accélératrice de cette méthode (notamment précalcul de toutes les configurations de cubes possibles).



- ▶ Localisation : un point est intérieur ou extérieur au volume englobé par la surface implicite selon le signe de  $f(x, y, z)$ .
- ▶ une normale à la surface implicite en un point  $P(x, y, z)$  est donnée par le gradient du champ de potentiel :

$$\vec{n}(P) = \overrightarrow{\text{grad}}f(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(P) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(P) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(P) \end{pmatrix}$$

- ▶ Exemple simple :  $f(x) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \Rightarrow n(x) = (-2x, -2y, -2z)$