Chapitre 4 : Courbes et surfaces

Modélisation 3D et Synthèse

Fabrice Aubert
fabrice.aubert@lifl.fr

Université Lille1
Sciences et Technologies

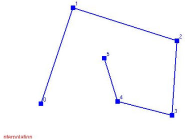
IEEA - Master Info - Parcours IVI

2012-2013

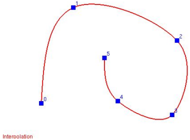
1 Introduction

Courbes et surfaces

- But : approximer les formes (les objets) par des outils mathématiques (i.e modèle de courbes ou surfaces)
- Approximation avec des primitives linéaires :
  - Segments, Triangles, Tétraèdres.
- Approximation avec des courbes et surfaces :
  - Courbes et surfaces polynomiales :
    - Hermites, Béziers (B-Splines, NURBS).
  - Courbes et surfaces implicites :
    - Blobs (Surfaces à squelette)



Interpolation linéaire de points



Interpolation cubique de points

Critères à considérer

- Généricité : ensemble des « formes » représentables par le modèle choisi.
- Interactivité : facilité de contrôle - forme naturelle.
- Visualisation : facilité d'« affichage »
- Représentation : stockage en mémoire et conversion avec d'autres modèles.
- Raccordement : les courbes ou surfaces complexes sont souvent composées de plusieurs primitives (peut-on les raccorder aisément ?)

2 Courbes polynomiales

Définition

- Une courbe polynomiale de degré d est décrite par $t \in \mathbb{R}$:

$$P(t) = \begin{cases} P(t)_x = a_0^x + a_1^x t + a_2^x t^2 + a_3^x t^3 + \ldots + a_d^x t^d \\ P(t)_y = a_0^y + a_1^y t + a_2^y t^2 + a_3^y t^3 + \ldots + a_d^y t^d \\ P(t)_z = a_0^z + a_1^z t + a_2^z t^2 + a_3^z t^3 + \ldots + a_d^z t^d \end{cases}$$

- Notation matricielle :

$$P(t) = \begin{pmatrix} P(t)_x \\ P(t)_y \\ P(t)_z \end{pmatrix} \mathrm{et} M = \begin{pmatrix} a_d^x & a_d^y & a_d^z \\ \cdots & \cdots & \vdots \\ a_1^x & a_1^y & a_1^z \\ a_0^x & a_0^y & a_0^z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(t) = (P(t)_x \, P(t)_y \, P(t)_z) = (t^d \, \ldots \, t^2 \, t \, 1)M}$$

Remarque : on notera également $a_0 = (a_0^x \, a_0^y \, a_0^z)$ (ou sa transposée) dans la suite.

Tracé d'une courbe polynomiale

- Généralement on s'intéresse à des morceaux de courbes ($P(t)$ défini pour $t \in [t_{debut}, t_{fin}]$).
- Calcul d'un ensemble de `nbPoint` points et relier ces points par des segments (approximation polygonale).

```
t=t_debut;
pas_t=(t_fin-t_debut)/(nbPoint-1);

P_old=evaluerP(t);
pour i variant de 2 à nbPoint faire
  t=t+pas_t;
  P_new=evaluerP(t);
  P_old.drawTo(P_new);
  P_old=P_new;
fin pour
```

Problèmes qui peuvent se présenter :

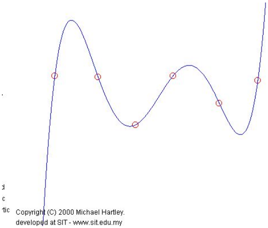
- Calculer `nbPoint` pour que la courbe paraisse lisse (approximation assez fine à l'oeil).
- Calculer un pas `pas_t` non constant pour tenir compte de l'abscisse curviligne et/ou de la courbure.

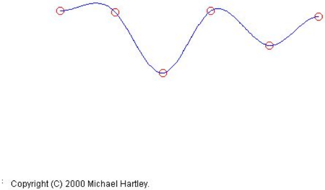
Courbes d'interpolation

- Trouver **la** courbe polynomiale passant par n points P_1, P_2, ..., P_n ?
- Solution brutale : résoudre le système d'équations.
  - Spécifier les t_i pour chaque point P_i (pas très intuitif).
  - La courbe sera de degré $n-1$ (calcul lourd si $n > 4$).
  - Résoudre le système d'équation

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1(t_1) = (t_1^{n-1} \ldots t_1^2\, t_1\, 1)M \\ P_2(t_2) = (t_2^{n-1} \ldots t_2^2\, t_2\, 1)M \\ \ldots \end{array} \right.$$

  - $\Rightarrow$ Interpolation de Lagrange.
  - Forme pas intuitive du tout (fortes variations si le degré est élevé).

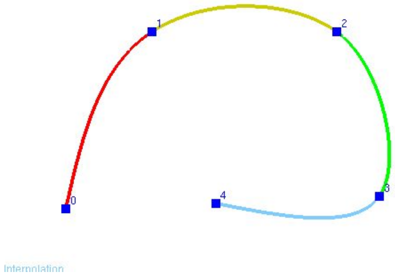




Constructions de courbes

Préferer ⇒

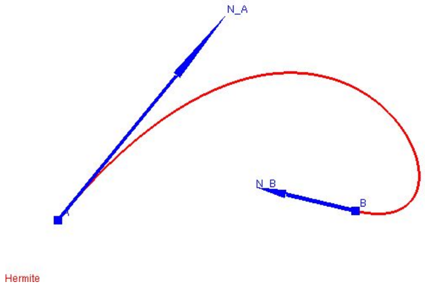
- Raccordement de courbes de degré au plus 3 (voire 4) « naturelles » .



3 Courbes de Hermite

Définition

- C'est une courbe polynomiale de degré 3 (cubique).
- Le paramètre t varie « seulement » entre 0 et 1 (segment normalisé).
- Elle est définie par :
  - les deux points extrémités : $P_0 = P(0)$ et $P_1 = P(1)$
  - les deux tangentes en ces points : $T_0 = P'(0)$ et $T_1 = P'(1)$



$\Rightarrow$

- Contrôle intuitif et aisé (contrôle des extrémités et tangentes)
- Raccordement de plusieurs hermites facile.

- $P(t) = (t^3\, t^2\, t\, 1)M$. Quelle est la matrice M ?
- Le système d'équation $P_0 = P(0)$, $P_1 = P(1)$, $T_0 = P'(0)$ $T_1 = P'(1)$ se met sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ T_0 \\ T_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0^3 & 0^2 & 0 & 1 \\ 1^3 & 1^2 & 1 & 1 \\ 3\times 0^2 & 2\times 0^1 & 1 & 0 \\ 3\times 1^2 & 2\times 1^1 & 1 & 0 \end{pmatrix} M$$

- On résoud pour trouver $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ T_0 \\ T_1 \end{pmatrix}$.

point de départ
point d'arrivé
tangente départ
tangente d'arrivé

P0 = P(0) = a0 + a1 t + a2 t^2 +a3 t^3 = a0
P1 = P(1) = a0 + a1 + a2 +a3
T0 = P'(t = 0) = a1 + 2 a2 t + 3 a3 t^2 = a1
T1 = p'(t = 1) = a1 + 2 a2 + 3 a3

Forme matricielle (2)

- Le « vecteur » $G = \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ T_0 \\ T_1 \end{pmatrix}$ est appelé vecteur géométrique (plus précisément vecteur de hermite dans le cadre des courbes de hermites).
- La matrice $M_h = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est appelée matrice de hermite (aucun rapport avec les matrices hermitiennes).
- $\Rightarrow \boxed{P(t) = (t^3\, t^2\, t\, 1) M_h G}$
- Tangentes : $P'(t) = (3t^2\, 2t\, 1\, 0) M_h G$

4 Raccordements et dérivées

Raccordement et dérivées

- On travaille avec un ensemble de courbes indépendantes.
- Le raccordement de ces courbes est soumis à des contraintes de continuité (continuité des tangentes, continuité des courbures).

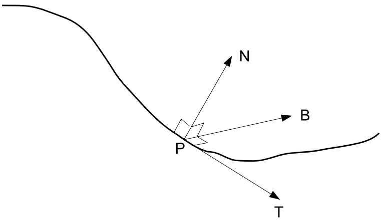
continuité des courbes -> P(1) = Q(0)
continuité des tangentes -> P'(1) = Q'(0)
avec P(1) point d'arrivé de courbe P
Q(0) point de départ de courbe Q
p'(1) tangente d'arrivé de courbe P
Q'(0) tangente de départ de courbe Q

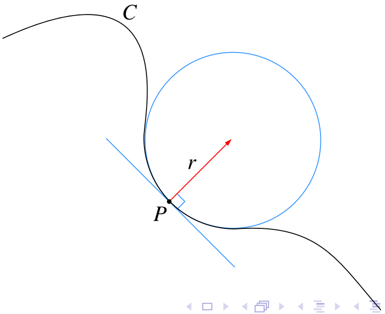
Rappels et/ou remarques :

- $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_d t^d$
  $\Rightarrow P'(t) = \frac{\partial P(t)}{\partial t} = 0 + a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \ldots + d a_d t^{d-1}$
- Le vecteur $P'(t)$ donne une tangente au point $P(t)$ (ou vecteur vitesse de $P(t)$).
- $P''(t) = \frac{\partial^2 P(t)}{\partial t^2} = \frac{\partial P'(t)}{\partial t}$
- Le vecteur $P''(t)$ définit l'accélération de $P(t)$).
- Avec la notation matricielle : $P'(t) = (dt^{d-1} \ldots 2t\, 1\, 0)M$

Remarques sur les dérivées

- $P'(t)$ donne une tangente à la courbe T
- On définit le vecteur binormal par $B = P'(t) \times P''(t)$ (produit vectoriel).
- Après **normalisation** de T et B on définit la normale principale à la courbe par $N = B \times T$.
- $\Rightarrow$ le repère (T, B, N) est appelé repère de **frénet**.
- La courbure en $P(t)$ est donnée par $k = \frac{\|P'(t) \times P''(t)\|}{\|P'(t)\|^3}$.
- Le rayon de courbure en $P(t)$ est donné par $\rho = \frac{1}{k}$.
- Le cercle osculateur en $P(t)$ (cercle qui épouse au mieux la courbe) à un rayon de ρ et son centre est $A = P(t) + \rho N$.





Raccordement

- Pour simplifier, on considère des segments normalisés ($P(t)$ est défini avec $t \in [0, 1]$).
- Soient $P(t)$ et $Q(t)$ deux segments de courbes.
- Le raccordement de P en $P(1)$ et de Q en $Q(0)$ (« fin » de $P(t)$ et « début » de $Q(t)$) est dit de continuité :
  - C^0 ssi $P(1) = Q(0)$ (pas d'autres conditions que l'égalité des points).
  - C^1 ssi il est C^0 et $P'(1) = Q'(0) \neq 0$ (égalité des tangentes - raccordement « lisse »).
  - C^2 ssi il est C^1 et $P''(1) = Q''(0) \neq 0$ (égalité des accélérations).
  - ...

Raccordement géométrique

- La continuité C^1 traduit l'égalité des tangentes en direction **et** norme.
- En informatique graphique, on peut vouloir se contenter d'un lissage visuel : égalité des directions mais pas nécessairement égalité des normes.
- On définit des raccordements avec des continuités géométriques :
  - Le raccordement est dit G^1 ssi $P'(1) = \lambda Q'(0)$ (c'est à dire que $P'(1)$ et $Q'(0)$ colinéaires).
  - G^2 si les rayons de courbures sont identiques en $P(1)$ et $Q(0)$.

5 Courbes de Bézier

Définition

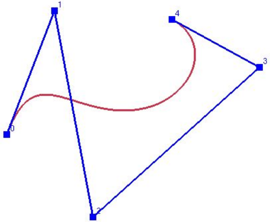
- Une courbe de Bézier est une courbe polynomiale de degré n définie par $n+1$ points de contrôles $(P_0, ..., P_n)$, et décrite sur $t \in [0,1]$ par :

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i$$

où

$$B_i^n(t) = C_n^i (1-t)^{n-i} t^i \text{ avec } C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

- Les $B_i^n(t)$ sont appelés polynômes de bernstein.
- L'ensemble des points $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$, pris dans cet ordre, est appelé polygone de contrôle.



Remarques et propriétés (1)

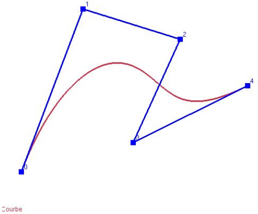
- exemple : bézier cubique : $P(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3$
- La courbe est de degré n.
- La courbe est exprimée comme une combinaison linéaire des points en chaque t : $P(t)$ est barycentre. Les coefficients barycentriques des points P_i sont les $B_i^n(t)$.
- C'est une courbe qui « approxime » les points P_i (n'interpole pas).
- La courbe passe cependant par P_0 et P_n
- La courbe est tangente au polygone de contrôle en P_0 et P_n.

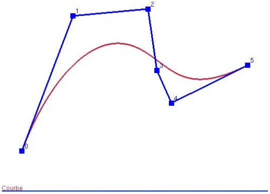
Remarques et propriétés (2)

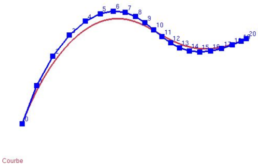
- Les béziers cubiques (4 points) sont des courbes de hermites (les tangentes sont $3\overrightarrow{P_0P_1}$ et $3\overrightarrow{P_2P_3}$).
- Donne des formes naturelles.
- Contrôle aisé et « assez » intuitif (position des points de contrôle).
- Très utilisées en informatique graphique.
- Raccordement G_1 aisé (tangentes aux extrémités colinéaires à $\overrightarrow{P_0P_1}$ et $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$).
- ... très nombreuses propriétés (enveloppe convexe, intersection, raffinement, ...).

Raffinement (augmentation du degré)

- On se donne une courbe de bézier de degré n définie par $(P_0, \ldots, P_n)$.
- $\Rightarrow$ comment calculer des points de contrôles $(\hat{P}_0, \ldots, \hat{P}_{n+1})$ (degré $n+1$) pour obtenir la même courbe ?
- $\Rightarrow \hat{P}_0 = P_0$, $\hat{P}_{n+1} = P_n$ et $\hat{P}_i = \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \frac{n+1-i}{n+1} P_i$ (pour $i \in [1, n]$).







$\Rightarrow$ converge vers la courbe de Bézier initiale.

Construction géométrique

- L'évaluation de $P(t)$ peut se faire analytiquement en calculant « brutalement » les $B_i^n(t)$.
- Cette évaluation est numériquement assez instable.
- $\Rightarrow$ évaluation géométrique par De Casteljau.

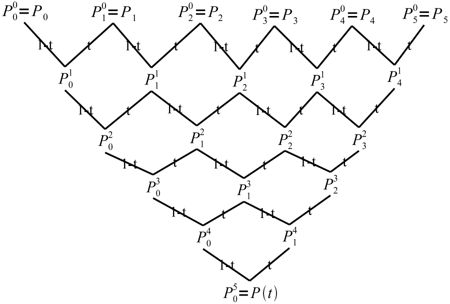
De Casteljau

- Pour t **fixé**, on montre que le point $P(t)$ est le résultat d'une suite récurrente définie par :

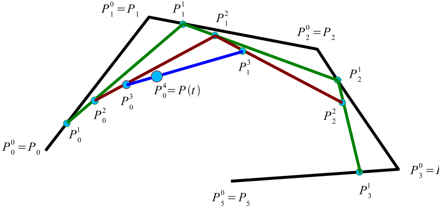
$$\begin{cases} P_i^0 = P_i \text{ pour tout } i (\text{les points initiaux sont les points de contrôles}) \\ P_i^k = (1-t)P_i^{k-1} + tP_{i+1}^{k-1} (P_i^k \text{ est une interpolation linéaire de} P_i^{k-1} \text{ et } P_{i+1}^{k-1}). \end{cases}$$

- On itère sur k jusqu'à $k = n \Rightarrow$ on obtient $P(t) = P_0^n$.

De Casteljau est un algorithme dit triangulaire :

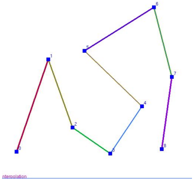


Algorithme de calcul

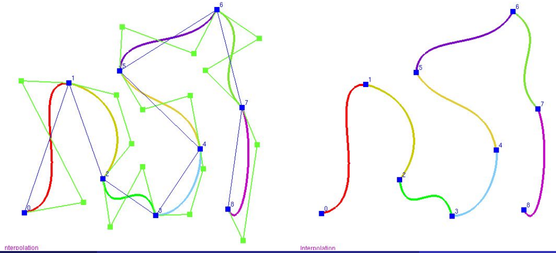


exemple pour le point $t = \frac{1}{4}$

Interpolation par morceaux et Catmull-Rom 1/3

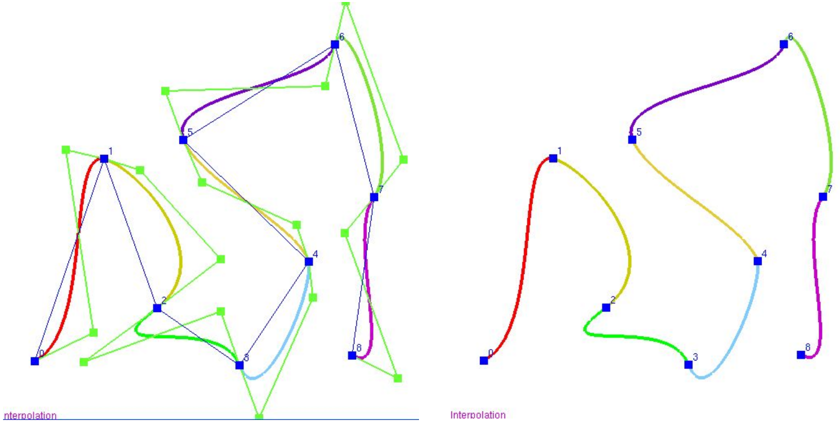


- On veut interpoler les points $[P_0, \ldots, P_n]$ (c'est-à-dire trouver une courbe qui passe par tous ces points).
- $\Rightarrow$ courbe $\mathcal{C}_i$ définie pour chaque segment $[P_i, P_{i+1}]$
  - Exemple : bézier cubique définie sur chaque segment : $\mathcal{C}_i = \left(P_i, I_{i,0}, I_{i,1} P_{i+1}\right)$



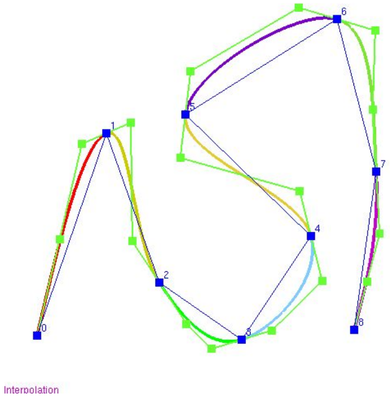
Interpolation par morceaux et Catmull-Rom 2/3

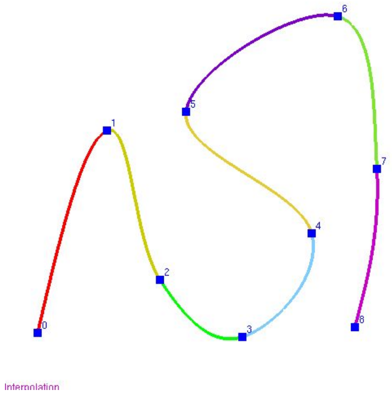
- $\Rightarrow$ Fixer les points de contrôle pour avoir une continuité C_1.
  - Pour des béziers, il suffit d'« aligner »les points de contrôles : $\overrightarrow{I_{i-1,1}P_i} = \overrightarrow{P_i I_{i,0}}$.
  - Il reste un degré de liberté (le $I_{i-1,1}$ peut être fixé n'importe où).



Continuité C_1 (égalité des tangentes)

- $\Rightarrow$ Fixer les tangentes pour avoir une « bonne »courbe.
  - Exemple : $\boxed{\text{Catmull-Rom}}$ $\Rightarrow \text{tangente}_i = \alpha(P_{i+1} - P_{i-1})$
  - Avec des béziers cubiques : $\overrightarrow{I_{i-1,1} I_{i+1,0}} = k\overrightarrow{P_{i-1} P_{i+1}}$





Tangentes fixées par méthode de Catmull-Rom (k=0.4 ici)

6 Courbes implicites

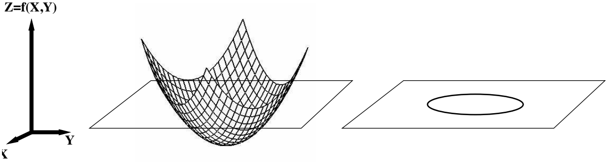
Définition

- Une courbe implicite (2D) est définie par :

$$f(x, y) = s$$

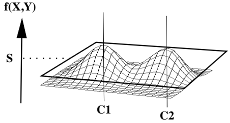
  où s est appelé seuil.

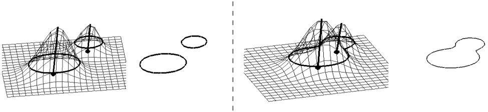
- f est souvent appelée fonction potentielle (field function), et la courbe est appelée équipotentielle ou iso-courbe.
- Exemple : $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (cercle de centre $(0, 0)$)



Primitives implicites

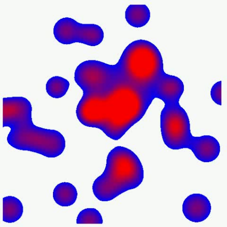
- Pour contrôler les formes on définit souvent des primitives implicites (i.e. courbes implicites simples) qui sont ensuite « mélangées » .
- Exemple : mélange simple par somme : si on dispose de n champs potentiels $f_i \Rightarrow$ $f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x,y)$.
- Les primitives peuvent être définies à partir d'objets simples (points, segments, ...) $\Rightarrow$ primitives dites à squelettes.
- Exemple : 2 primitives f_1 et f_2 définies par un centre et un rayon.





Blobs et autres...

- Outre leur intérêt pour modéliser des formes, les surfaces implicites ont beacoup de succès en infographie car elles permettent d'obtenir facilement des effets de fusion et/ou de déconnexion entre les primitives.
- Nécessité d'avoir un « bon » mélange entre les primitives (fusion et déconnexion naturelles et esthétiques).
- $\Rightarrow$ blobs : $f_i(x, y) = a_i e^{-b_i r^2}$ avec $r = \sqrt{(x - c_{i\,x})^2 + (y - c_{i\,y})^2}$. Où c_i est le centre (ou squelette) du blob. a_i et b_i permettent de nuancer la forme.



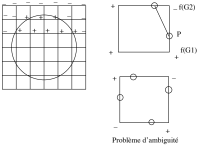
- Il existe beaucoup de définition de primitives offrant des propriétés de mélanges un peu différentes. Beaucoup reposent sur une fonction f_i liée à la distance au squelette (point, segment, ensemble de segment).

Visualisation

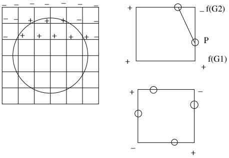
- Problème : trouver les points (x, y) tels que $f(x, y) = s$ (équation complexe et non linéaire, souvent non polynomiale).
- Autre formulation : $\Rightarrow$ trouver la coupe entre le plan $z = s$ et la surface $z = f(x, y)$.

Une solution possible (« polygonisation » d'une courbe implicite) :

- on calcule $z = f(x, y)$ en chacun des points d'une grille régulière. On affecte "+" si $f(x, y) > s$ (la fonction est au dessus du plan $z = s$), et "-" sinon (la fonction est au dessous).
- la courbe passe alors nécessairement par les segments de la grille dont le signe des extrémités est différent (point d'intersection entre la grille $z = f(x, y)$ et le plan $z = s$).
- il reste à relier les points d'intersections.



Remarques



- La position du point P peut s'évaluer par interpolation linéaire : on considère que $f(P) = s = (1-\lambda)f(G_1) + \lambda f(G_2) \Rightarrow \lambda = \frac{s - f(G_1)}{f(G_2) - f(G_1)} \Rightarrow P = (1-\lambda)G_1 + \lambda G_2$.
- Incidence de la résolution de la grille :
  - Plus la grille est finement subdivisée, plus le résultat est précis.
  - On suppose **une seule intersection** par arête de la grille : des détails ne sont pas reproduits si ce n'est pas le cas.
  - Les problèmes d'ambiguités se résolvent en faisant un choix arbitraire pour relier les points (exemple : toujours « entourer » les « + »).

Problème d'implicitisation

- Un des problèmes concernant les surfaces implicites est le contrôle de la forme souhaitée (comment construire une voiture en surface implicite ? un cube ?).
- Implicitisation = transformer un modèle d'objet en surface implicite.

7 Surface

Extension des courbes

- Les courbes vues précédemment se généralisent aux surfaces par simple extension.
- Pour les courbes paramétriques (y compris les polynomiales) : adjonction d'un paramètre s :

$$P(s,t) = \begin{cases} x = f(s,t) \\ y = g(s,t) \\ z = h(s,t) \end{cases}$$

- Pour les courbes implicites : adjonction d'une troisième coordonnée z :

$$P(x,y,z) \text{ tels que } f(x,y,z) = s$$

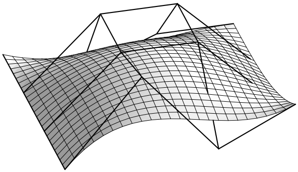
- Les problèmes de raccordements, de visualisation, de construction, d'interaction s'en trouvent complexifiés mais les solutions restent principalement des extensions des courbes, et les raisonnements sont analogues.

Exemple : surface de Bézier

- Les courbes vues (bézier, b-spline, nurbs) s'étendent par « produit tensoriel » (i.e. produit de deux courbes).
- Exemple pour bézier : on définit un maillage de contrôle de $(n+1) \times (m+1)$ points.

$$P(s,t) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} B_i^n(s) B_j^m(t) P_{i,j} \quad 0 \leq s \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1$$

- Remarque : on « reconnait » des courbes de bézier dans chaque direction s et t (i.e. pour $s = s_{fixe}$, la courbe $P(s_{fixe}, t)$ est une courbe de bézier).



Raccordements

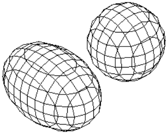
- On représente souvent une surface complexe en raccordant des « morceaux » (carreaux ou patches) de surfaces simples (béziers cubiques, etc).
- Les raccordements ($C^1, C^2, ...$) se font selon une courbe (compléxifie l'étude des courbes dont le raccordement était selon un point).
- Tangentes en $P(s,t)$ données par $T_s(P) = \frac{\partial P(s,t)}{\partial s}$ et $T_t(P)\frac{\partial P(s,t)}{\partial t}$.
- Remarque : normale en $P(s,t)$ donnée par le produit vectoriel des deux tangentes.

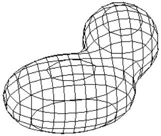
Surface implicite

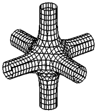
- définition :

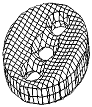
$$P(x,y,z) \text{ tels que } f(x,y,z) = s$$

- la définition des primitives par squelette s'étend naturellement (coordonnée supplémentaire ; voir blobs par exemple).



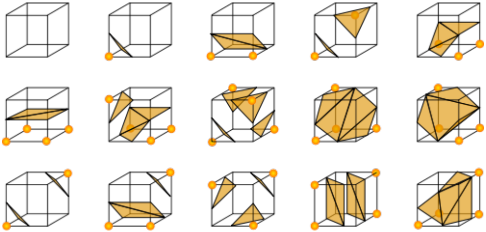






Polyédrisation

- identique à la polygonisation mais sur une grille régulière de cubes (appelés voxels) :
  - évaluer $f(x, y, z)$ en chacun des sommets de la grille. Déterminer les intersections avec les signes et par interpolation linéaire (un point par arête).
  - relier les points dans chaque face (les carrés) $\Rightarrow$ donne des arêtes.
  - relier les arêtes dans chaque cube (se fait de manière naturelle en suivant les points d'intersection) $\Rightarrow$ donne un (ou plusieurs) polygones (généralement décomposé en triangles pour les problèmes de coplanarité).
  - $\Rightarrow$ méthode dite du marching-cube (on fait les cubes un par un). Il existe de très nombreuses variantes accélératrice de cette méthode (notamment précalcul de toutes les configurations de cubes possibles).



Remarques

- Localisation : un point est intérieur ou extérieur au volume englobé par la surface implicite selon le signe de $f(x, y, z)$.
- une normale à la surface implicite en un point $P(x, y, z)$ est donnée par le gradient du champ de potentiel :

$$\overrightarrow{n}(P) = \overrightarrow{grad} f(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(P) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(P) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(P) \end{pmatrix}$$

- Exemple simple : $f(x) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \Rightarrow n(x) = (-2x, -2y, -2z)$