Final Exam of CNeuro2023

王不凡 PB20020500

Problem 1: How Granule Cells Sample Inputs

1.1

$$p = \prod_{i=1}^{N-1} \left(1 - i \Big/ \binom{M}{K}\right) \tag{1}$$

1.2

不难发现，p随$\binom{M}{K}$的增加而增加，而$K = \left[\frac{M}{2}\right]$时，$\binom{M}{K}$最大，故$K = \left[\frac{M}{2}\right]$时，$p$最大。示意图如图1所示。

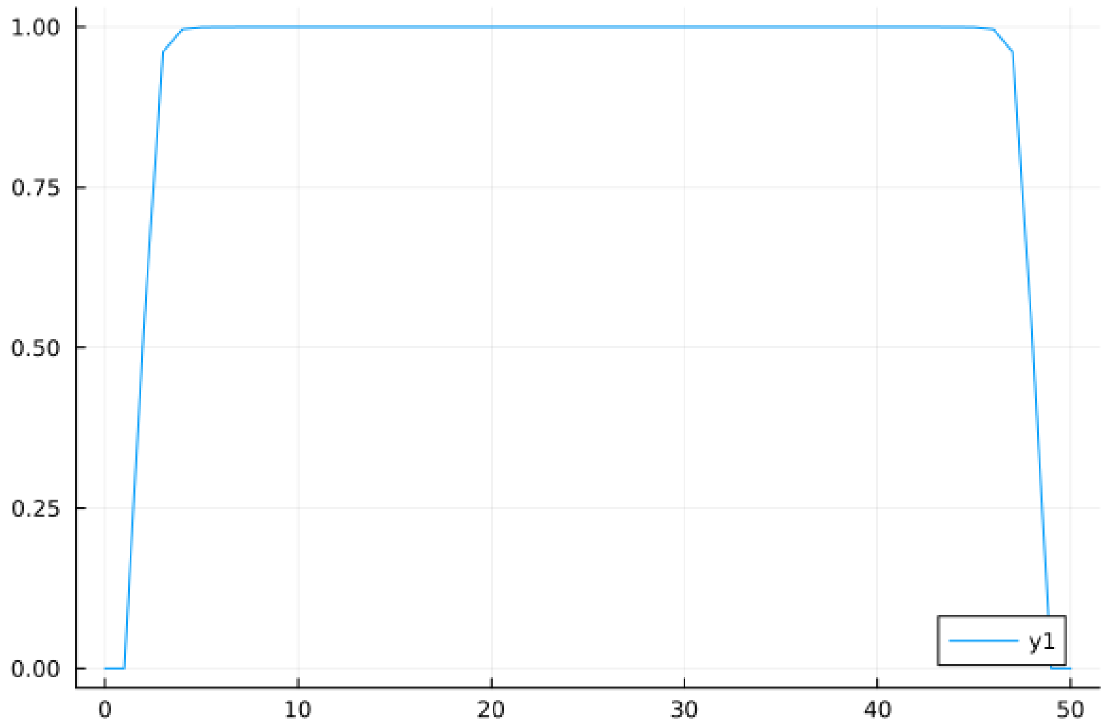

图 1: p-K(M=50,N=40)

1.3

利用斯特林公式：

$$\binom{M}{\frac{M}{2}} = \frac{M!}{\left[\left(\frac{M}{2}\right)!\right]^2} \approx \frac{2^{M+0.5}}{\sqrt{\pi M}} \approx \frac{1024^{(M+0.5)/10}}{\sqrt{\pi M}} \approx 1.095 \times 10^{2105} \gg N \tag{2}$$

如此大的数量级差距，使得我们完全可以认为$p_{max} = 1$，那么所求即为$p = 0.95$时的K值，0.05可以认为是小量，记$\binom{M}{K} = C$，我们可以近似求解：

$$0.95 = \prod_{i=1}^{N-1}\left(1 - \frac{i}{C}\right) \approx 1 - \sum_{i=1}^{N-1}\frac{i}{C} = 1 - \frac{N(N-1)}{2C} \tag{3}$$

解得：$C \approx 10N(N-1) \approx 4.41 \times 10^9$，可以估计出K取2或3，实际计算得到K取3时，$p \approx 0.996$，K取2时，$p \approx 0.0001$，

1.4

K很小而M很大时，Granule细胞几乎不可能得到相同的输入，可以充分利用传递来的信息。

Problem 2: FitzHugh-Nagumo Model

2.(a)

显然，零斜线为两条曲线：

$$V(a-V)(V-1) - w + I = 0 \tag{4}$$

$$bV - cw = 0 \tag{5}$$

相图如图2所示。

2.(c)

我进行了大量的尝试，部分结果如图3所示，没有找到振荡区域，使用Mathematica求解可能形成振荡的区域，经尝试也没有结果，认为不会形成振荡。（试了太久，真的找不到……看方程的负反馈性质应该可以振荡的）

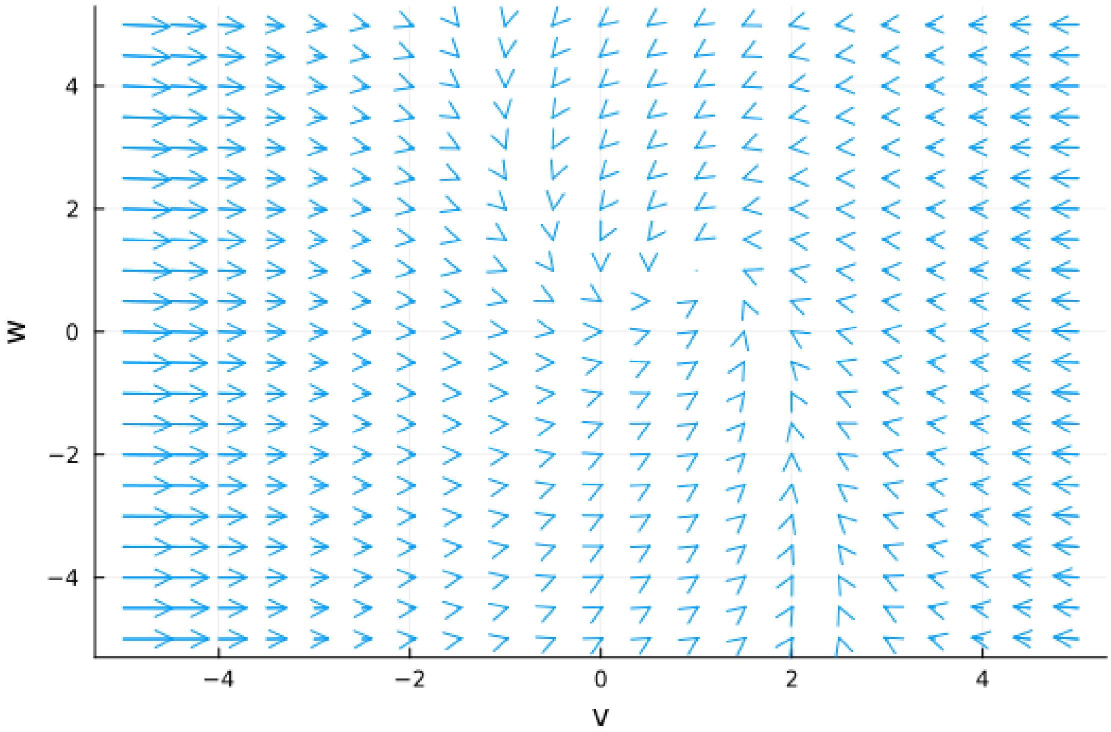

图 2: w-V相图

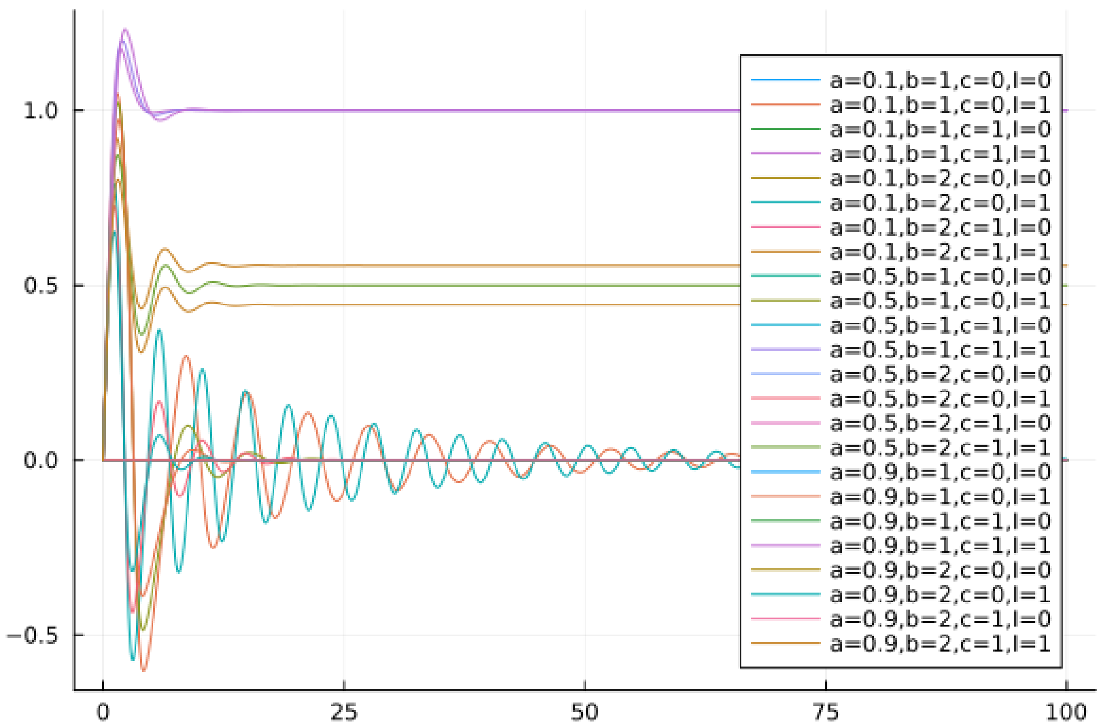

图 3: V-t曲线

2.(d)

这是很典型的耦合同步，只需要$g > 0$即可。考虑二者无耦合($g = 0$)的情况下，$t \to \infty$时，由于参数相同，二者必定以相同的周期振荡，只存在相位差。在耦合的情况下，最终也必然形成周期振荡，那么二者之差可以写成：

$$\frac{\mathrm{d}\Delta V}{\mathrm{d}t} = -2g\Delta V + f(t) \tag{6}$$

其中，$f(t)$是周期函数，由于形成周期振荡，方程6的积分必然为0，则ΔV必须为零才可以稳定，故只要$g > 0$即可。

Problem 3: Oja's rule

先求解方程的稳定点，根据提示，将向量用相关矩阵$\boldsymbol{C}$的特征向量组成的基底$\{\boldsymbol{q}_i\}(i = 1, \cdots, m)$表示，$\{\boldsymbol{q}_i\}$是$\boldsymbol{C}$的正交归一化的特征矢量组成的完备正交基。

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{m} \theta_i \boldsymbol{q}_i \tag{7}$$

我们有：

$$r\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{u}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{w} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{w} \tag{8}$$

$$r^2 = \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{w} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{q}_i = \lambda_i \boldsymbol{q}_i \tag{10}$$

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_m > 0 \tag{11}$$

$$\boldsymbol{q}_i^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{q}_i = \lambda_i \tag{12}$$

代入微分方程可得：

$$\tau_w \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{q}_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\theta_i\boldsymbol{q}_i - \left[\sum_{j=1}^{m} \lambda_j\theta_j^2\right] \sum_{i=1}^{m} \theta_i\boldsymbol{q}_i \tag{13}$$

$$\Leftrightarrow \tau_w \frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t} = \lambda_i\theta_i - \theta_i \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\theta_j^2 \ , \ i = 1, \cdots, m \tag{14}$$

对于$1 < i \leqslant m$，我们有：

$$\alpha_i = \frac{\theta_i}{\theta_1} \tag{15}$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\theta_1}\frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t} - \frac{\alpha_i}{\theta_1}\frac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}t} \tag{16}$$

则，对于方程14，可以写成：

$$\tau_w \frac{\mathrm{d}\alpha_i}{\mathrm{d}t} = -(\lambda_1 - \lambda_i)\alpha_i \ , \ 1 < i \leqslant m \tag{17}$$

这意味着：

$$t \to \infty \text{ , } \alpha_i \to 0 \text{ , } (1 < i \leqslant m) \tag{18}$$

当$i = 1$时，我们有：

$$\tau_w \frac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}t} = \lambda_1\theta_1 - \lambda_1\theta_1^3 - \theta_1^3 \sum_{j=2}^{m} \lambda_j \alpha_j^2 \tag{19}$$

$$\lim_{t\to\infty} \tau_w \frac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}t} = \lambda_1\theta_1(1 - \theta_1^2) \tag{20}$$

对于不动点$\bar{\theta}_1 = \pm 1$，$\frac{\mathrm{d}\bar{\theta}_1}{\mathrm{d}t} = 0$，我们可以定义正定的Lyapunov函数：

$$V(\theta_1) = (1 - \theta_1^2)^2 \tag{21}$$

$$t \to \infty \text{ , } \frac{\mathrm{d}V(\theta_1)}{\mathrm{d}t} = -4\lambda_1\theta_1^2(1 - \theta_1^2)^2 < 0 \tag{22}$$

故不动点是稳定的。

综上所述，我们证明了Oja’s rule对应的方程

$$\tau_w \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t} = r\boldsymbol{u} - r^2\boldsymbol{w} \tag{23}$$

有稳定不动点：

$$\bar{\boldsymbol{w}} = \pm \boldsymbol{q}_1 \tag{24}$$

$$\| \bar{\boldsymbol{w}} \| = \| \boldsymbol{q}_1 \| = 1 \tag{25}$$

其中$\boldsymbol{q}_1$即为协方差矩阵的主成分。

Problem 4: Associative Memory with Decaying Memory Traces

4.1

$$W_{ij}^0 = 0 \text{ , } \lambda = \mathrm{e}^{-\tau} \tag{26}$$

$$W_{ij}^p = \lambda W_{ij}^{p-1} + \frac{1}{N}\xi_i^\mu \xi_j^\mu \tag{27}$$

$$W_{ij}^p = \frac{1}{N}\sum_{\mu=0}^{p} \mathrm{e}^{-\mu\tau}\xi_i^\mu \xi_j^\mu \tag{28}$$

事实上，我认为下面的写法更不容易产生歧义：

$$W_{ij}^p = \frac{1}{N}\sum_{\mu=0}^{p} \mathrm{e}^{-(p-\mu)\tau}\xi_i^\mu \xi_j^\mu \tag{29}$$

4.2

$$
\begin{aligned}
\langle \xi_i^\nu h_i^\nu \rangle =& \xi_i^\nu \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{\mu=0}^{p} \mathrm{e}^{-\mu\tau} \xi_i^\mu \xi_j^\mu \xi_j^\nu \\
=& \mathrm{e}^{-\nu\tau} > 0
\end{aligned} \tag{30}
$$

这显然是不合理的，因为在上面的推导中我们完全是采用取均值的方式处理，而忽略了涨落本身的影响，这个比例应当用信噪比来度量，先求解方差：

$$
\begin{aligned}
Var(\xi_i^\nu h_i^\nu) =& \left\langle (\xi_i^\nu h_i^\nu)^2 \right\rangle - \langle \xi_i^\nu h_i^\nu \rangle^2 \\
=& \left\langle (\mathrm{e}^{-\nu\tau} + \xi_i^\nu \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{\mu=0,\mu\neq\nu}^{p} \mathrm{e}^{-\mu\tau} \xi_i^\mu \xi_j^\mu \xi_j^\nu)^2 \right\rangle - \langle \xi_i^\nu h_i^\nu \rangle^2 \\
=& \mathrm{e}^{-2\nu\tau} + \left\langle (\xi_i^\nu \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{\mu=0,\mu\neq\nu}^{p} \mathrm{e}^{-\mu\tau} \xi_i^\mu \xi_j^\mu \xi_j^\nu)^2 \right\rangle - \mathrm{e}^{-2\nu\tau} \\
=& \frac{1}{N^2} \left\langle \sum_{j=1}^{N} \sum_{\mu=0,\mu\neq\nu}^{p} (\mathrm{e}^{-\mu\tau} \xi_i^\mu \xi_j^\mu \xi_j^\nu)^2 \right\rangle \\
=& \frac{1}{N} (\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-2\tau}} - \mathrm{e}^{-2\nu\tau})
\end{aligned} \tag{31}
$$

$$
SNR = \frac{\left\langle \xi_i^\nu h_i^\nu \right\rangle}{\sqrt{Var(\xi_i^\nu h_i^\nu)}} \tag{32}
$$

在正态分布近似下，$\sigma^2 = Var(\xi_i^\nu h_i^\nu), x_0 = \left\langle \xi_i^\nu h_i^\nu \right\rangle$，出错概率：

$$
P = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}) dx \tag{33}
$$

无法求解。