Homework 3

王不凡 PB20020500

Problem 1: Analyze Motion Detection Neuron in Fly

1.(a)

结果如图1所示。

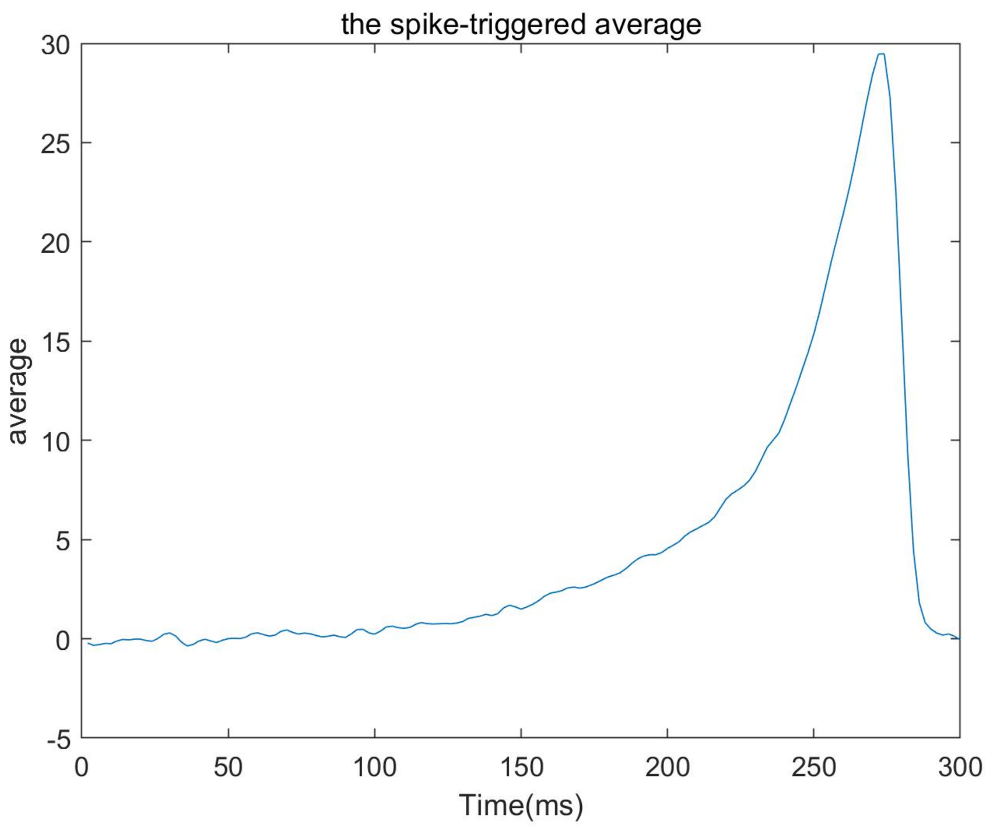


图 1

1.(b)

使用线性核函数重构（或预言）神经元对于刺激的相应得到的结果十分不理

想，其结果如图2所示，实验测得的神经元的激发次数在5万次左右，而我们重构的神经元响应其中的激发次数仅有3万次左右。

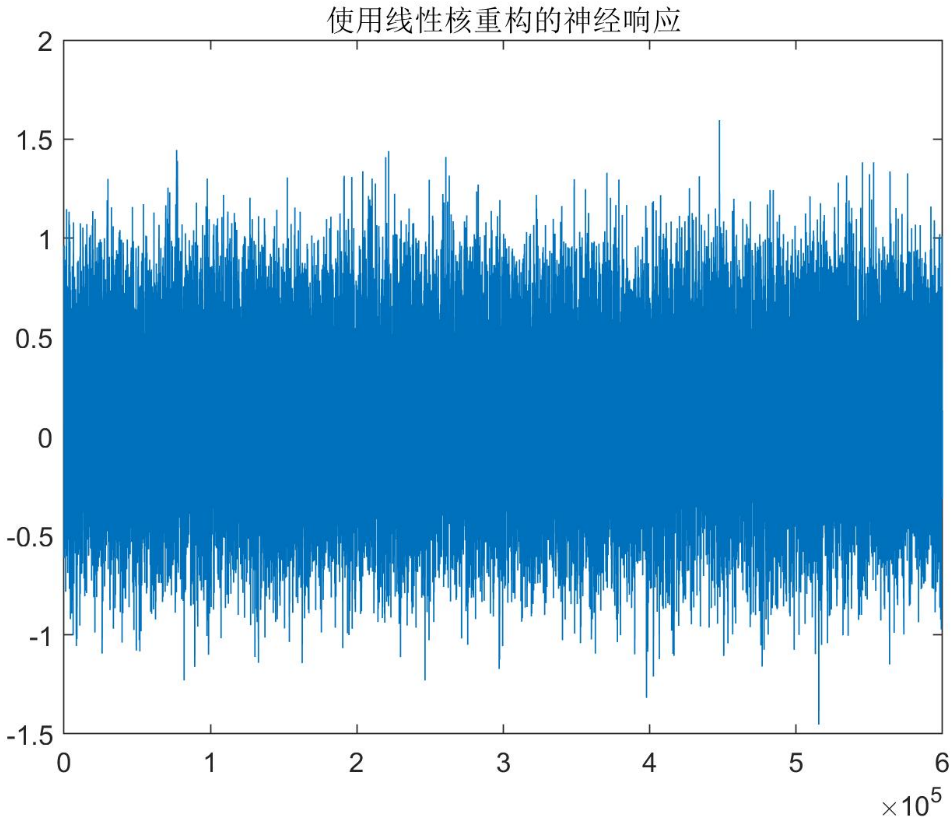


图 2

1.(c)

由于我们采用离散时间，使用泊松过程构建合成激发序列时可以利用泊松过程的第二种定义，即当$\Delta t \to 0$时，有：

$$P(N(t+\Delta t)-N(t)=1)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)\approx\lambda\Delta t$$
$$P(N(t+\Delta t)-N(t)\geq 2)=o(\Delta t)\approx 0$$

显然我们可以认为采样时间间隔的2ms是充分小的时间，从而将泊松过程转化为服从二项分布的随机数列，根据泊松分布的定义，此时λ即为平均激发频率，由此我们得到了合成激发序列，其与真实序列的部分样本对比如图3、4所示。

从图中即可看出二者有一定不同，但二者的均值和方差均相差不足千分之二，不过我们可以从数据的关联性找出不同，图5、6为二者的自相关函数及局部放大图，合成的序列是没有自相关性，除了中心其余部分基本为0。5，这是Poisson过

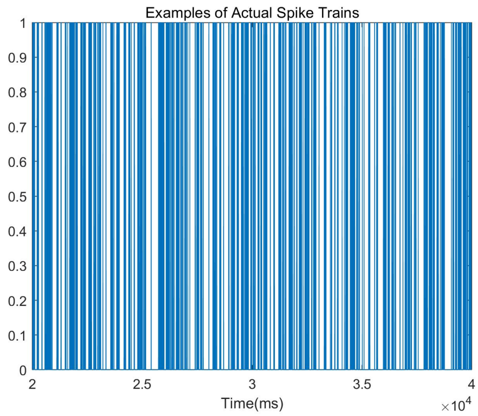


图 3: 真实激发序列样本

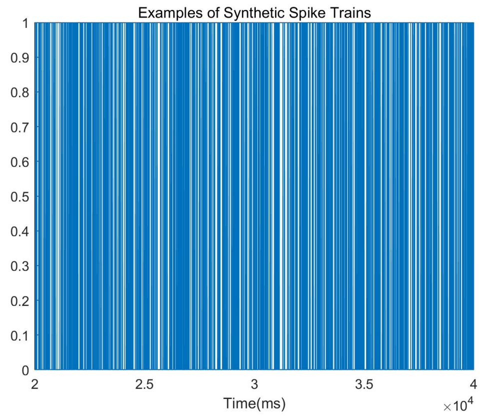


图 4: 合成激发序列样本

程的特点，而真实序列的自相关函数则显在中心附近极小，而后回升.具体分析见(d)。

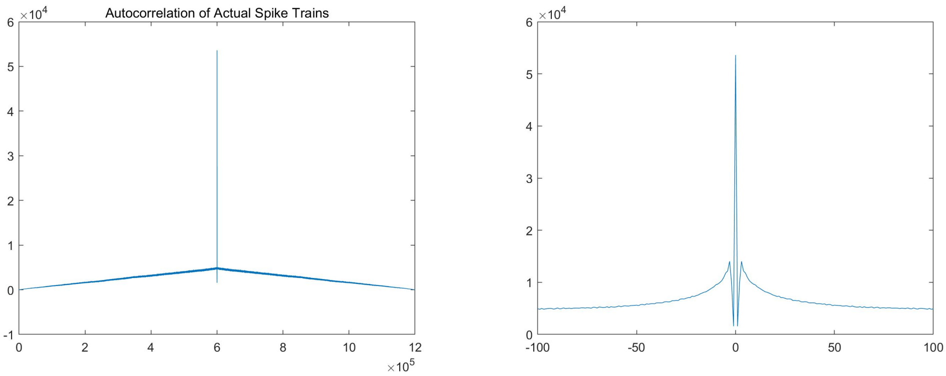


图 5: 真实激发序列自相关函数

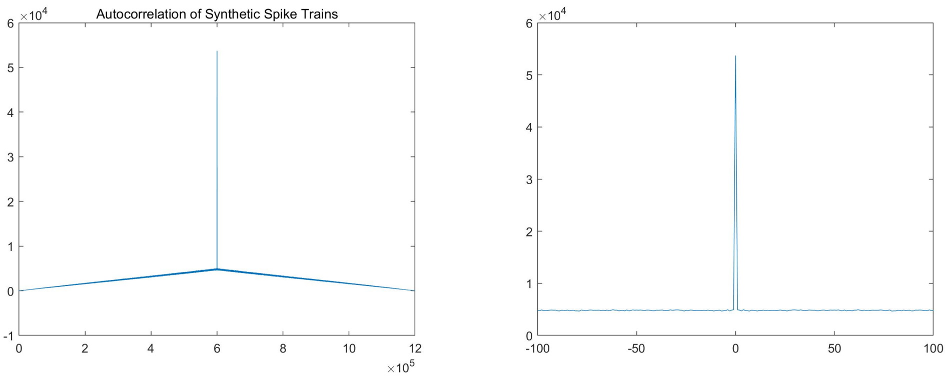
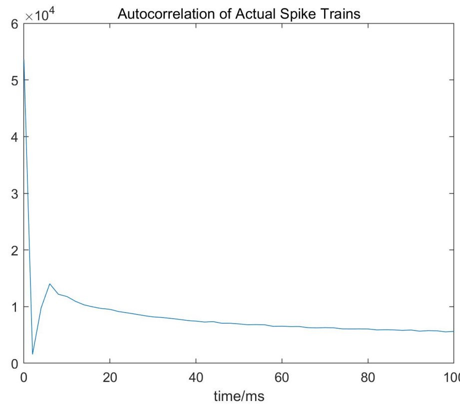


图 6: 合成激发序列自相关函数

1.(d)

与上一小问类似，自相关函数如图7所示。合成的序列是没有自相关性，除了中心其余部分基本为0.5，这是由于Poisson过程是一个独立增量过程且增量平稳，而真实序列的自相关函数则在2ms出发生骤降，而后回升，这可能体现了神经元具有不应期的特征。



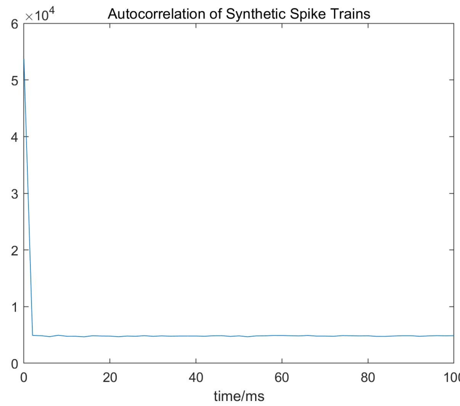


图 7: 自相关函数(0-100ms)

两个序列的CV(the coefficents of variation)相差仅有0.1%，分别为：

真实序列：CV=3.1928
合成序列：CV=3.1893

这一点差异应当是统计误差，与60万的采样数量相符合（$\frac{1}{\sqrt{6\times10^5}} \approx 0.001$）。

Problem 2: Maximization of Entropy under Constraints

2.(a)

记随机变量X的最大取值为x_m，由题意可设：

$$L(x,\lambda) = -\int_0^{x_m} p(x)\ln p(x)\mathrm{d}x + \lambda(\int_0^{x_m} p(x)\mathrm{d}x - 1) \tag{1}$$

$$\delta L(x,\lambda)|_\lambda = 0, \frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \tag{2}$$

由变分法：

$$\ln p(x) + 1 - \lambda = 0 \tag{3}$$

$$\int_0^{x_m} p(x)\mathrm{d}x - 1 = 0 \tag{4}$$

故$p(x) = const.$，即：

$$p(x) = \frac{1}{x_m} \tag{5}$$

2.(b)

由题意可设：

$$\mu = E(X) \tag{6}$$

$$\begin{aligned} L = &- \int_0^{\infty} p(x) \ln p(x) \mathrm{d}x \\ &+ \lambda(\int_0^{\infty} xp(x)\mathrm{d}x - \mu) + \eta(\int_0^{\infty} p(x)\mathrm{d}x - 1) \end{aligned} \tag{7}$$

即：

$$\ln p(x) + 1 - \lambda x - \eta = 0 \tag{8}$$

$$\int_0^{\infty} xp(x)\mathrm{d}x - \mu = 0 \tag{9}$$

$$\int_0^{\infty} p(x)\mathrm{d}x - 1 = 0 \tag{10}$$

解得：

$$p(x) = \frac{1}{\mu} \mathrm{e}^{-\frac{x}{\mu}} \tag{11}$$

2.(c)

由题意可设：

$$\begin{aligned} \sigma^2 =& E(X^2) - E(X)^2 \\ =& \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\mathrm{d}x - (\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x)^2 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} L = &- \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln p(x) \mathrm{d}x \\ &+ \lambda[\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\mathrm{d}x - (\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x)^2 - \sigma^2] \\ &+ \nu(\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x - 1) \end{aligned} \tag{13}$$

有：

$$\ln p(x) + 1 - \lambda[x^2 - 2x(\int_{-\infty}^{+\infty} x' p(x')\mathrm{d}x')] - \nu = 0 \tag{14}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\mathrm{d}x - (\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x)^2 - \sigma^2 = 0 \tag{15}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x - 1 = 0 \tag{16}$$

解得：

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{17}$$

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x \tag{18}$$

下面框中是不知道为什么错了的解法：

由题意可设：

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\mathrm{d}x - (\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x)^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)yp(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{19}$$

为了便于变分法，记$q(y) = p(y)$，有：

$$\begin{aligned}L = &-\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\ln p(x)\mathrm{d}x \\ &+ \lambda[\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)yq(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \sigma^2] \\ &+ \nu(\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x - 1)\end{aligned} \tag{20}$$

$$\ln p(x) + 1 - \lambda[x^2 - \int_{-\infty}^{+\infty} xyq(y)\mathrm{d}y] - \nu = 0 \tag{21}$$

$$\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)y\mathrm{d}x = 0 \tag{22}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)yp(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \sigma^2 = 0 \tag{23}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x - 1 = 0 \tag{24}$$

$$q(y) = p(y) \tag{25}$$

解得：

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \tag{26}$$

2.(d)

$$\begin{aligned}L = &-\int p(\boldsymbol{x})\ln p(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &+ \lambda[\int \boldsymbol{x}^2 p(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} - N\sigma^2] \\ &+ \nu(\int p(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} - 1)\end{aligned} \tag{27}$$

做变分，得到：

$$\ln p(\boldsymbol{x}) + 1 - \lambda \boldsymbol{x}^2 - \nu = 0 \tag{28}$$

$$\int \boldsymbol{x}^2 p(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} - N\sigma^2 = 0 \tag{29}$$

$$\int p(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} - 1 = 0 \tag{30}$$

解得：

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{\boldsymbol{x}^2}{2\sigma^2}} \\ &= \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}} \end{aligned} \tag{31}$$

Problem 3: K-L divergence

本题中$\log(x)$均代表$\log_n(x), (n > 1$, 一般情况下$n = 2)$。

$$f(x) = log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln n} \tag{32}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2 \ln n} < 0 \tag{33}$$

故（显然）$f(x) = log(x)$是一个上凸函数（凹函数）。

根据Jensen不等式，我们有：

$$\begin{aligned} \sum_x P(x) \log \frac{P(x)}{Q(x)} &= -\sum_x P(x) \log \frac{Q(x)}{P(x)} \\ &\geqslant -\log[\sum_x P(x) \frac{Q(x)}{P(x)}] \\ &= -\log[\sum_x Q(x)] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{34}$$

故：

$$0 \leqslant D_{KL}(P, Q) = \sum_x P(x) \log \frac{P(x)}{Q(x)} \tag{35}$$

根据Jensen不等式，取等条件为：

$$\forall x,\ \log \frac{Q(x)}{P(x)} = const. \tag{36}$$

即：

$$\forall x,\ Q(x) = P(x) \tag{37}$$

Problem 4: Fisher Information and Mutual Information

4.(a)

由题意可知：

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}} \tag{38}$$

$$p(z_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \mathrm{e}^{-\frac{z_i^2}{2\sigma_i^2}} \tag{39}$$

$$p(r_i|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(r_i-wx)^2}{2\sigma_i^2}} \tag{40}$$

$$p(\boldsymbol{r}|x) = \prod_{i=1}^{N} p(r_i|x) \tag{41}$$

$$\begin{aligned} I_F &= \left\langle \left(\frac{\partial \log p(\boldsymbol{r}|x)}{\partial x}\right)^2 \right\rangle \\ &= \left\langle -\frac{\partial^2 \log p(\boldsymbol{r}|x)}{\partial x^2} \right\rangle \\ &= \left\langle -\frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{w(r_i-wx)}{\sigma_i^2}\right)}{\partial x} \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{N} \frac{w^2}{\sigma_i^2} \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{w^2}{\sigma_i^2} \end{aligned} \tag{42}$$

4.(b)

最大似然函数为：

$$\begin{aligned} f(r,x) &= \log p(\boldsymbol{r}|x) \\ &= \sum_{i=1}^{N} p(r_i|x) \\ &= -\sum_{i=1}^{N} \frac{(r_i-wx)^2}{2\sigma_i^2} + const. \end{aligned} \tag{43}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\bigg|_{x=\hat{x}} = \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{w(r_i-wx)}{\sigma_i^2}\right]\bigg|_{x=\hat{x}} = 0 \tag{44}$$

解得：

$$\hat{x} = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{r_i}{\sigma_i^2}\right) \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{w}{\sigma_i^2}\right) = \frac{1}{I_F} \sum_{i=1}^{N} \frac{w r_i}{\sigma_i^2} \tag{45}$$

$$\begin{aligned}\left\langle (x-\hat{x})^2 \right\rangle &= \int\int (x-\hat{x})^2 p(x) p(\boldsymbol{r}|x) \mathrm{d}x \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &= \int\int (x-\hat{x})^2 p(x) \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(r_i-wx)^2}{2\sigma_i^2}} \mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{I_F}\end{aligned}$$

（这里先对r_i积分即可发现含x的项系数刚好加起来为0）

(46)

那么和I_F的关系也是显然的了，即$\left\langle (x-\hat{x})^2 \right\rangle = \frac{1}{I_F}$

4.(d)

我们在这里采用矩阵表达（J为全1矩阵，角标表示维数）：

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C_r} &= \left\langle \boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{T}} \right\rangle \\ &= \left\langle diag(z_1^2, z_2^2, \cdots, z_N^2) \right\rangle + w^2 \left\langle x^2 \right\rangle J_N \\ &= diag(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_N^2) + w^2 \sigma_0^2 J_N\end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}_z &= \left\langle \boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{T}} \right\rangle \\ &= \left\langle diag(z_1^2, z_2^2, \cdots, z_N^2) \right\rangle \\ &= diag(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_N^2)\end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned}I(\boldsymbol{r}, x) &= \frac{1}{2}\log_2 \frac{|\boldsymbol{C_r}|}{|\boldsymbol{C}_z|} \\ &= \frac{1}{2}\log_2 \frac{\prod_{i=1}^{N}\sigma_i^2 + w^2\sigma_0^2 \sum_{i=1}^{N}\prod_{j=1, j\neq i}^{N}\sigma_j^2}{\prod_{i=1}^{N}\sigma_i^2} \\ &= \frac{1}{2}\log_2\left(1 + w^2\sigma_0^2 \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_i^2}\right)\end{aligned} \tag{50}$$

不难发现，互信息和费舍尔信息具有如下不等关系：

$$I(\boldsymbol{r}, x) \leqslant \sigma_0^2 I_F \tag{51}$$

当$\sigma_i = \sigma$时，我们有：

$$I(\boldsymbol{r}, x) = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + N\frac{w^2\sigma_0^2}{\sigma^2}\right) \tag{52}$$

$$I_F = N\frac{w^2}{\sigma^2} \tag{53}$$

$$N \to \infty \Rightarrow I(\boldsymbol{r}, x) \propto \log_2 N,\ \ I_F \propto N \tag{54}$$