

How Granule Cells Sample Inputs

a.
$$p = \prod_{i=0}^{N-1} \frac{\binom{M}{k} - i}{\binom{M}{k}}$$

b. 当 $N=100$, $M=30$ 时, p 关于 k 的函数图像如

图 1.2.1 所示.

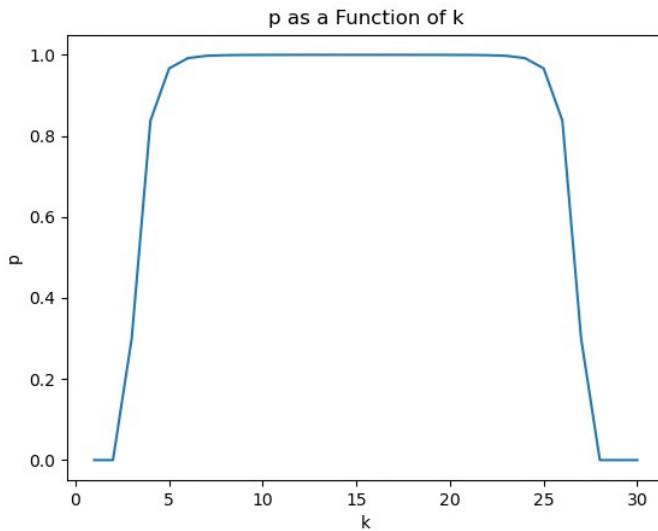


图 1.2.1

由于 p 内含有组合数, 不使用符号计算求解, 因此选择求数值解

$k=15$ 时 p 最大.

c. $k=3$.

d. 当 M 非常大时, 由于函数 P 收敛速度随着 K 的增长快速下降, 进一步增大 K 对提高 P 效果有限. 但 P 的收敛速度在初期又足够快, 所以用很小的 K 就能实现足够大的 P .

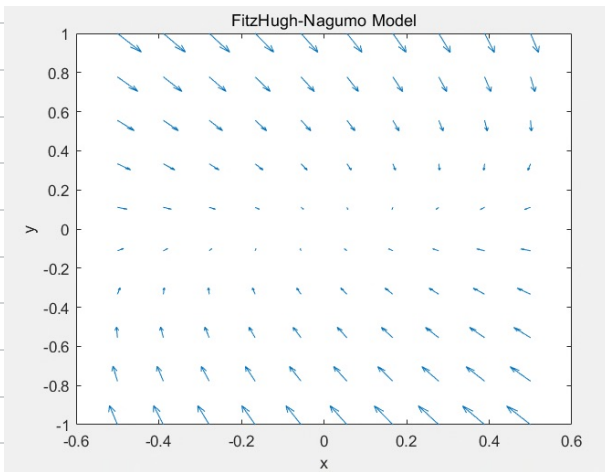
FitzHugh-Nagumo Model

a. $\dot{V} = 0$

$$\Rightarrow w = V(a - V)(V - 1) + I$$

$$\dot{w} = 0$$

$$\Rightarrow w = \frac{b}{c} V.$$



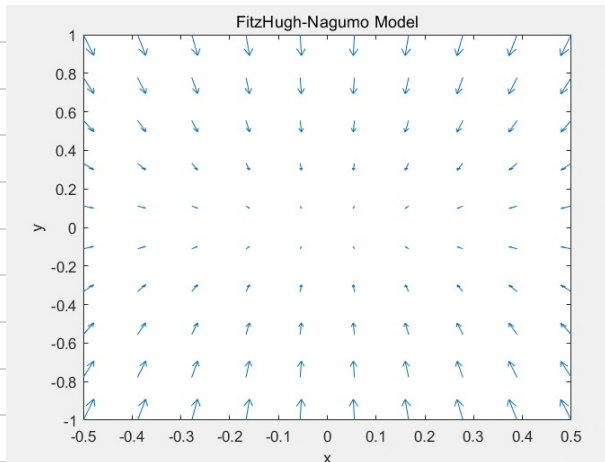
$$a = 0.5$$

$$b = 20$$

$$c = 20$$

$$I = 0$$

Figure 2.1.1



$$a = 0.5$$

$$b = 0.001$$

$$c = 20$$

$$I = 0$$

Figure 2.1.2

b. 如果不动点在 $(0,0)$ 处, 那么外开环输入电流 I 一定为 0.

在此情况下, $(0,0)$ 一定是稳定的.

$I = 0$ 时, $\frac{dv}{dt}$ 和 $\frac{dw}{dt}$ 曲线的交点只有两种情况:

其一, 只在 $(0,0)$ 处相交. 其二, 有 3 个交点, 其中包括 $(0,0)$

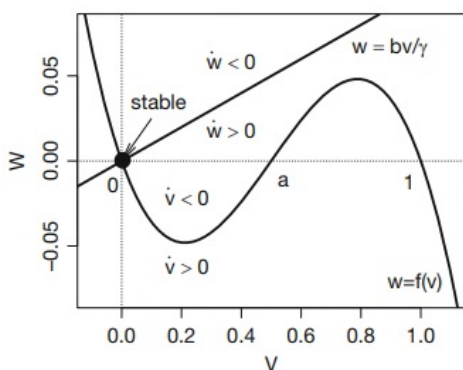
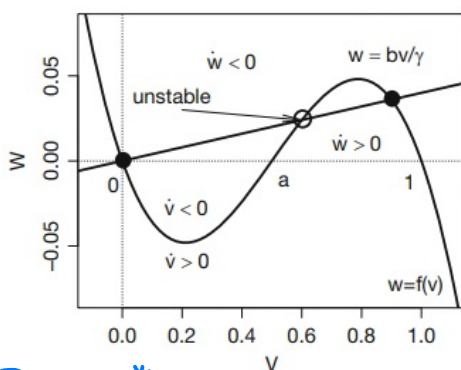


图 2.2.1 *



可以看出, 不论参数取值怎样, $(0,0)$ 处总满足 $\downarrow \leftarrow \rightarrow \uparrow$ 的条件, 所以是稳定的.

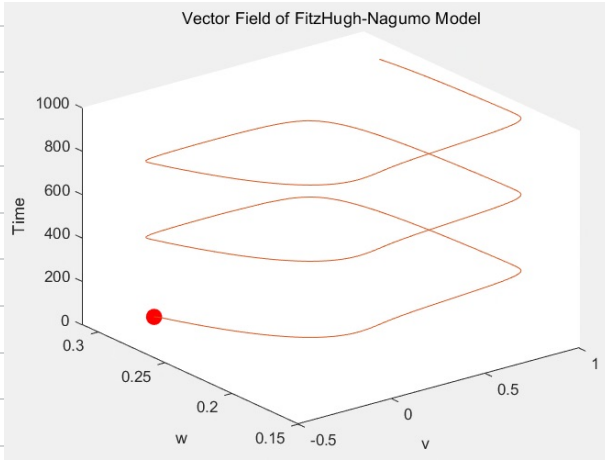
在 $(0,0)$ 为不动点时, 只会有一 个不稳定的不动点出现在中间,

$\leftarrow \rightarrow$, 系统最终会向左右两个不动点偏移.

图 2.1.1 和 图 2.1.2 已经说明了 $(0,0)$ 处在 $I=0$ 时总是稳定的.

* Quantitative Physiology P63 . Shangbin Chen, Alexey Zaitsev.

C.



初始条件: $V_0 = -0.2$

$W_0 = 0.3$

$I = 0.2$

图 2.3 |

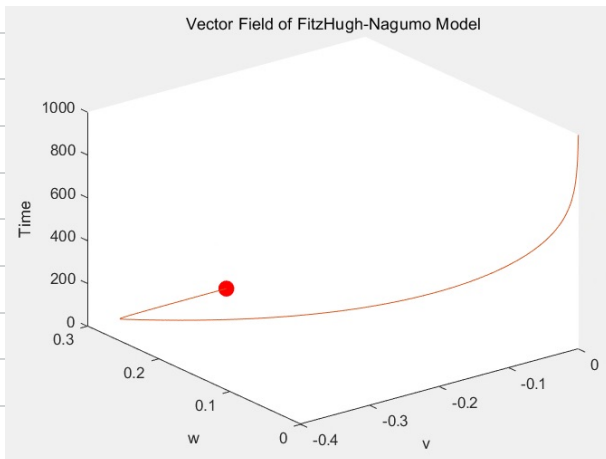
只有当存在外界电流输入时,才会发生振荡.

调参时我参考了 *Quantitative Physiology* (P63) 的取法,

$a = 0.25$, $b = c = 0.002$

产生振荡的 I 下界是 $I = 0.13$. 但根据膜电位的特性, 振荡过

程中 V 应回到 V_0 . 合适的 I 应在 0.2 左右.



$I = 0$

图 2.3.2

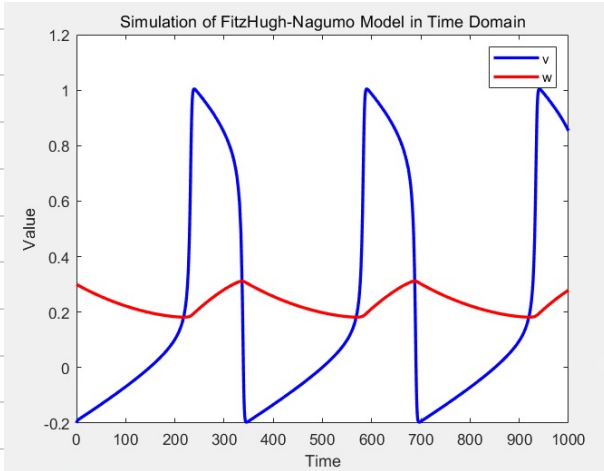


图 2.3.1 的时域表示

图 2.3.3

d.

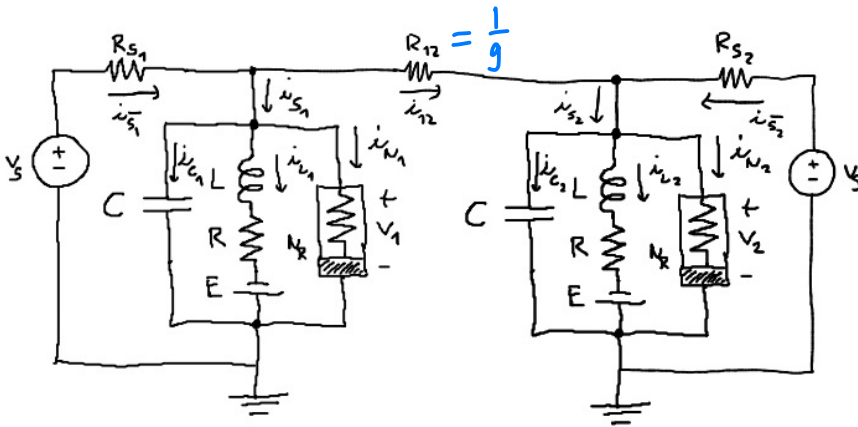


图 2.4.1 *

对于足够大的 g , V_1 会跟随 V_2 振荡。换言之, $g > 0$ 时, 二者不总是谐振的。*

* Coupled FitzHugh - Nagumo Type Neurons Driven by External Voltage Stimulation. J. Zátěhravský, L. Příbylová.

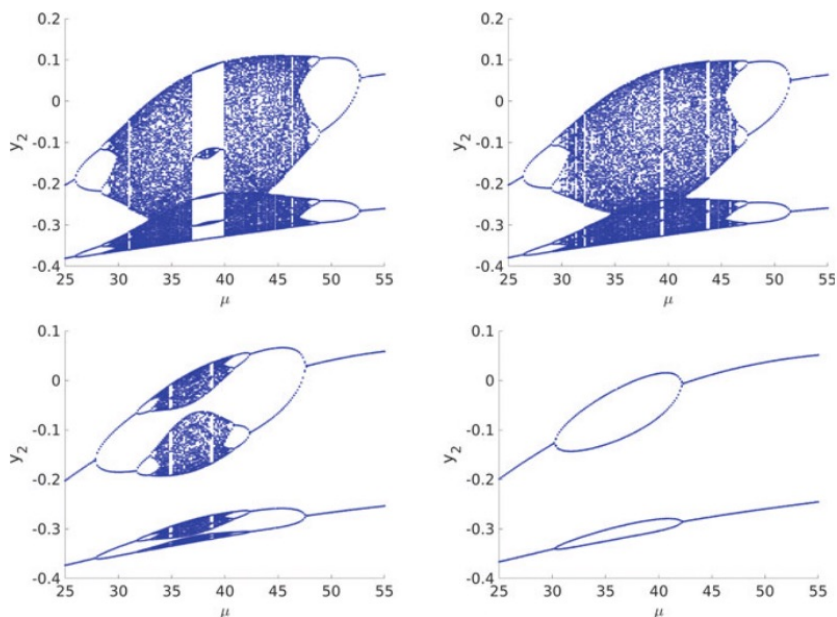


Fig. 11 Poincaré section by the hypersurface $x_2 = -0.75$ for different values of the parameter μ , the values of y_2 are plotted. The values of the parameter ξ are as follows $\xi_1 = 0.009$, $\xi_2 = 0.014$, $\xi_3 = 0.03$ and $\xi_4 = 0.05$. The remaining parameters are chosen to be $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0.3, 0.15)$

图 2.4.2 *

图 2.4.2 表明了随着 g 增大, 混沌泡会逐渐消失. (g 即图中 μ)

Oja's Rule

$$ru - r^2 w = 0 \quad ①$$

$$w^T u = u^T w \quad ②$$

r 是标量, 由 ① $\Rightarrow ur - r^2 w = 0$ ③

由 ② ③ 有 $uu^T w - w^T uu^T w w = 0$ ④

对 ④ 取期望, $\langle uu^T \rangle w - w^T \langle uu^T \rangle w w = 0$

由 $C = \langle uu^T \rangle$, 有 $Cw - w^T Cw w = 0$

$w^T Cw$ 是标量, 故有 $Cw - \lambda w = 0$.

故 w 是 C 的本征向量, λ 是 C 的本征值.

$$\lambda = w^T Cw = w^T \lambda w = \lambda \|w\|_2^2, \text{ 故 } \|w\|_2^2 = 1$$

所以 $\|w\|_2 = 1$. #

接下来需要证明除主成分外其它本征向量都不是稳定的不动点.

$$\langle \tau_w \frac{dw}{dt} \rangle = Cw - w^T Cw w$$

若 $w = e_a + \varepsilon e_b$, e_a, e_b 为本征向量, 对应本征值 λ_a, λ_b

$$\begin{aligned} \langle \frac{dw}{dt} \rangle &= \langle \frac{de_a}{dt} \rangle + \langle \frac{d\varepsilon e_b}{dt} \rangle = \frac{1}{\tau_w} [C(e_a + \varepsilon e_b) \\ &\quad - (e_a + \varepsilon e_b)^T C(e_a + \varepsilon e_b)(e_a + \varepsilon e_b)] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\tau\omega} [\lambda_a e_a + \varepsilon \lambda_b e_b - \underbrace{(e_a + \varepsilon e_b)^T (\lambda_a e_a + \varepsilon \lambda_b e_b)}_{\substack{\uparrow \\ (\lambda_a + \varepsilon^2 \lambda_b)(e_a + \varepsilon e_b)}} (e_a + \varepsilon e_b)]$$

$$= \frac{1}{\tau\omega} [\lambda_a e_a + \varepsilon \lambda_b e_b - \lambda_a e_a - \varepsilon \lambda_a e_b] + O(\varepsilon^2)$$

$$\left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle e_b = \frac{1}{\tau\omega} (\lambda_b - \lambda_a) e_b \varepsilon$$

若 $\lambda_a > \lambda_b$, ε 会收敛到 0.

所以随着时间推移 只有主成分会留下. #