

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CÂMPUS TECNOLÓGICO JOINVILLE

Luana Aparecida Gomes
Widmark Kauê Silva Cardoso

**MÉTODOS NUMÉRICOS APLICADOS À SOLUÇÃO DE UM MOTOR DE
COMBUSTÃO INTERNA DE DOIS TEMPOS**

Santa Catarina
Joinville

Resumo: Este trabalho estudou o valor de convergência da velocidade angular de um motor a combustão interna de dois tempos simplificado, descrito por um sistema de EDOs. Para tanto, foram aplicados os métodos numéricos de Euler, Heun, Runge-Kutta e Runge-Kutta-Fehlberg e analisou-se a resposta segundo a quantidade de passos e o valor do passo h , buscando também, qualificar os métodos segundo a precisão. Por fim, todos os métodos se mostraram eficazes para solucionar o problema proposto.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), Métodos Numéricos, Motor a combustão interna de dois tempos

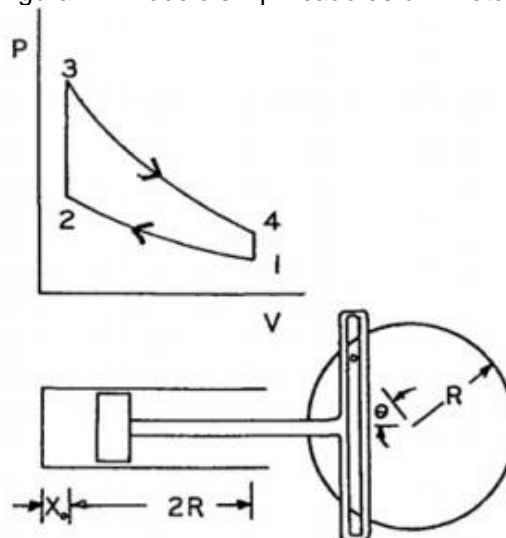
1. INTRODUÇÃO

Este trabalho dedicou-se à resolução do sistema de EDOs que descreve o comportamento da velocidade angular do modelo simplificado de um motor a combustão interna de dois tempos (eq 1), conforme definido por Neff (2013).

$$\ddot{\theta} = \begin{cases} \omega' b = P_3 \left(\frac{R-R \cos \theta_3 + X_0}{R-R \cos \theta + X_0} \right)^n AR \sin \theta - \frac{C\omega^2}{I}, & 0 \leq \theta \leq \pi \\ \omega' a = P_3 \left(\frac{R-R \cos \theta_1 + X_0}{R-R \cos \theta + X_0} \right)^n AR \sin \theta - \frac{C\omega^2}{I}, & \pi < \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad (1)$$

Este modelo matemático se baseia no sistema apresentado na Figura 1. Nele, um jugo escocês transforma o movimento retilíneo de um pistão para o movimento angular de um volante (flywheel) através de um pino que se movimenta ao redor do ponto central do volante. Essa movimentação é responsável pelos ciclos de compressão e expansão do motor durante a combustão.

Figura 1 – Modelo simplificado de um motor



Fonte: Kranc (1977) apud Neff (2013)

Para fins de simplificação, desprezou-se o atrito e o peso das peças e considerou-se o ar como sendo o fluido de trabalho. Também, utilizou-se as características físicas do sistema conforme apresentado por Neff (2013):

Quadro 1 – Condições de contorno do sistema

Grandeza	Valor
Raio do volante	$R = 0.305 \text{ m}$
Espaçamento após máxima compressão do pistão	$x_0 = 0.0254 \text{ m}$
Momento de inércia do volante	$I = 3.171 \text{ kg.m}^2$
Momento de inércia da carga	$C = 0.0113 \text{ kg.m}^2$
Angulo inicial para o processo de expansão	$\theta_1 = \pi \text{ rad}$
Angulo inicial para o processo de compressão	$\theta_3 = 0 \text{ rad}$
Identificador do processo politrópico	$n = 1.3$
Área de seção transversal do pistão	$A = 0.001883 \text{ m}^2$
Pressão inicial de compressão	$P_1 = 0.1 \text{ MPa}$
Pressão inicial de expansão	$P_3 = 10.3 \text{ MPa}$

Fonte: Elaboração própria

2. METODOLOGIA

Para solucionar a EDO que descreve a velocidade angular do motor, fez-se necessário trata-la como um sistema de equações no algoritmo principal. Posteriormente, ela foi passada como parâmetro em funções de uma biblioteca para a solução de EDOs, desenvolvida pelos autores.

Para construir corretamente o sistema de equações, inicialmente foram passados para a função que descreve a EDO, como parâmetros, os dados do quadro 1 e definiu-se as funções da eq. 1, $\omega' a$ e $\omega' b$, segundo a variação de θ e ω .

Em seguida, foram escolhidos quatro métodos numéricos para resolver o modelo matemático: método de Euler, método de Heun, método de Runge-Kutta de 4º ordem e o método adaptativo de Runge-Kutta-Fehlberg.

O primeiro método, e menos preciso dos quatro, calcula o valor do próximo ponto da função a partir do uso de retas tangentes. A cada interação, o valor de t_n é atualizado e o valor de y_{n+1} é calculado.

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n) \cdot h \quad (2)$$

O método de Heun, por sua vez, faz esta aproximação do valor da função a partir do cálculo da área embaixo da função, usando a regra do trapézio como método de integração numérica.

$$\begin{cases} K1 = f(t_n, y_n) \\ K2 = f[t_{n+1}, y_n + h \cdot K1] \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h \cdot (K1 + K2)}{2} \end{cases} \quad (3)$$

Os métodos anteriores pertencem a uma classe chamada de métodos de Runge-Kutta, que se diferem na forma como é realizado a média entre as variáveis Ks buscando uma maior precisão conforme a ordem aumenta. O método de Runge-Kutta de 4º ordem possui um erro de quinta ordem, é mais preciso que os métodos apresentados anteriormente, e costuma ser o método numérico mais utilizado na solução de EDOs.

$$\begin{cases} K1 = f(t_n, y_n) \\ K2 = f(t_n + 0.5 \cdot h, y_n + 0.5 \cdot K1 \cdot h) \\ K3 = f(t_n + 0.5 \cdot h, y_n + 0.5 \cdot K2 \cdot h) \\ K4 = f(t_n + h, y_n + K3 \cdot h) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (K1 + 2 \cdot K2 + 2 \cdot K3 + K4) \end{cases} \quad (4)$$

Por fim, o método de Runge-Kutta-Fehlberg diferencia-se dos demais por ser um método adaptativo, capaz de alterar o tamanho do passo h durante a execução do método conforme o formato da função, de forma a manter o erro dentro de uma tolerância. Além disso, ele admite o cálculo com precisões de quarta e quinta ordem minimizando o custo computacional, haja vista que o cálculo de quinta ordem possui apenas um termo a mais que o de quarta.

Posteriormente, esses métodos foram comparados entre si, analisando a velocidade de convergência de cada um ao fixar $h=0.01$ e igualar o número de passos em 50 e 1300.

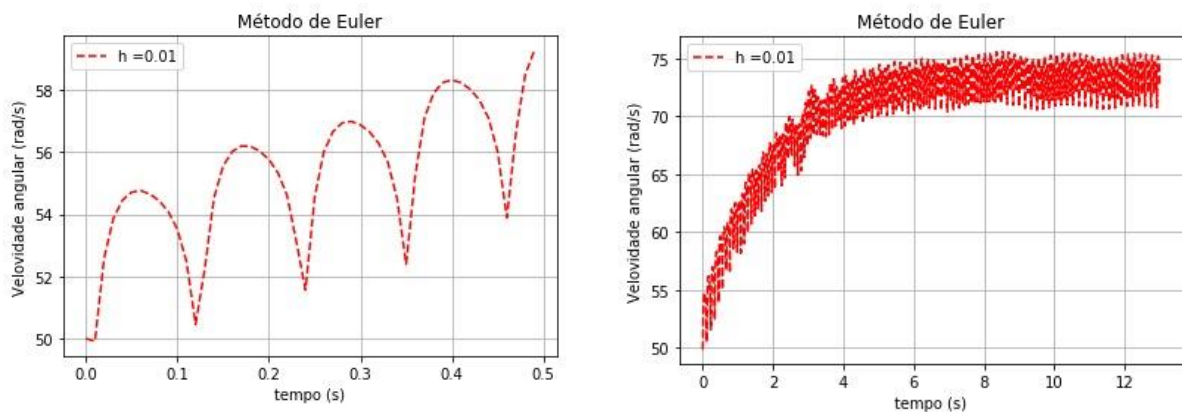
3. RESULTADOS

Aplicando-se os métodos de Euler, Heun, Runge-Kutta e Runge-Kutta-Fehlberg, nota-se que todos os métodos possuem comportamentos similares (Figura 2, Figura 3, Figura 4, Figura 5), de forma que todos se mostram eficientes para a solução do problema. Ainda assim, é possível perceber que o método

adaptativo se destaca diante dos demais por ser mais estável e produzir gráficos com curvas mais suaves.

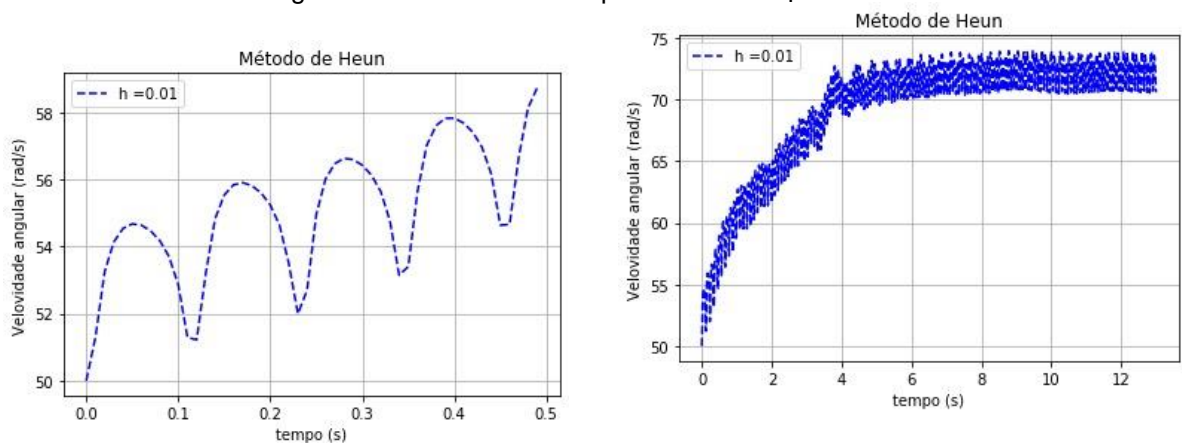
Importante ressaltar que todos os métodos convergem a velocidade angular para 72 rad/s como indicado por Kranc (1977) *apud* Neff (2013). Nesse sentido, os valores encontrados tem coerência com a literatura e representam com veracidade o fenômeno que se propõe.

Figura 2 – Método de Euler para 50 e 1300 passos



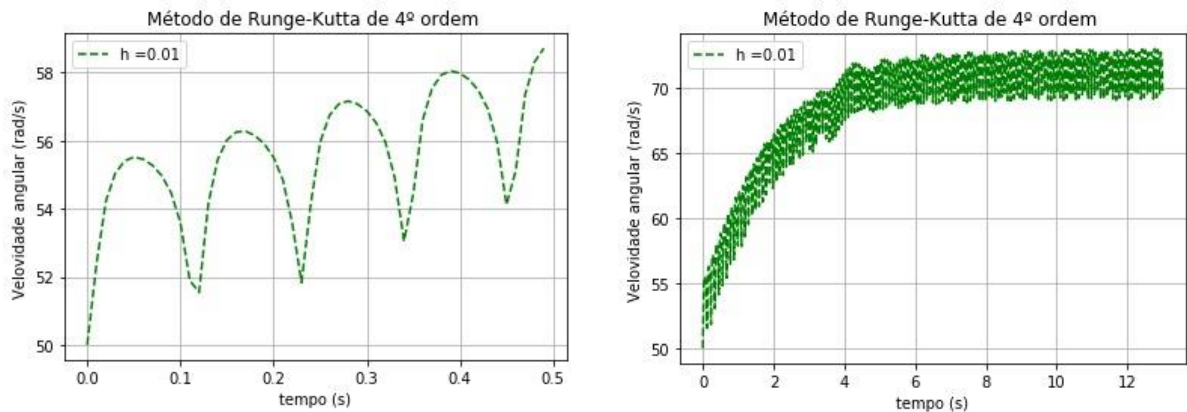
Fonte: Elaboração própria

Figura 3 – Método de Heun para 50 e 1300 passos



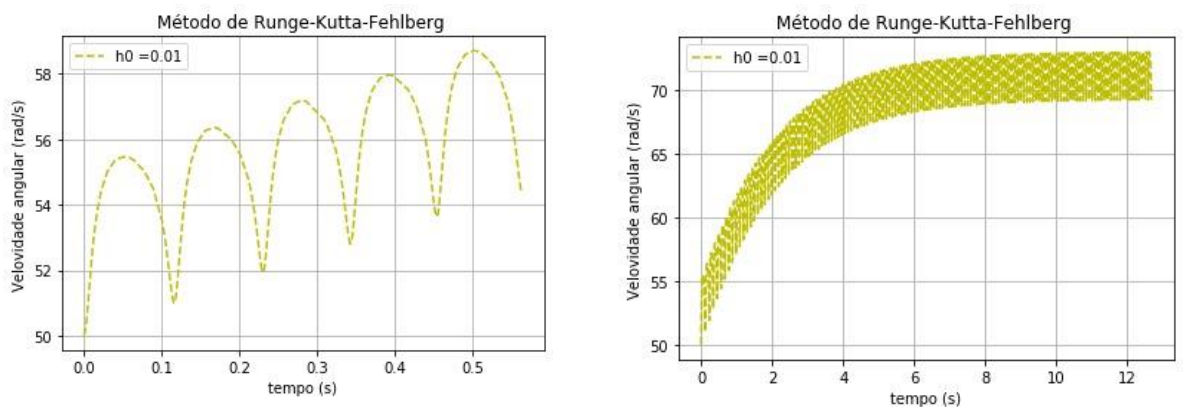
Fonte: Elaboração própria

Figura 4 – Método de Runge-Kutta para 50 e 1300 passos



Fonte: Elaboração própria

Figura 5 – Método de Runge-Kutta-Fehlberg

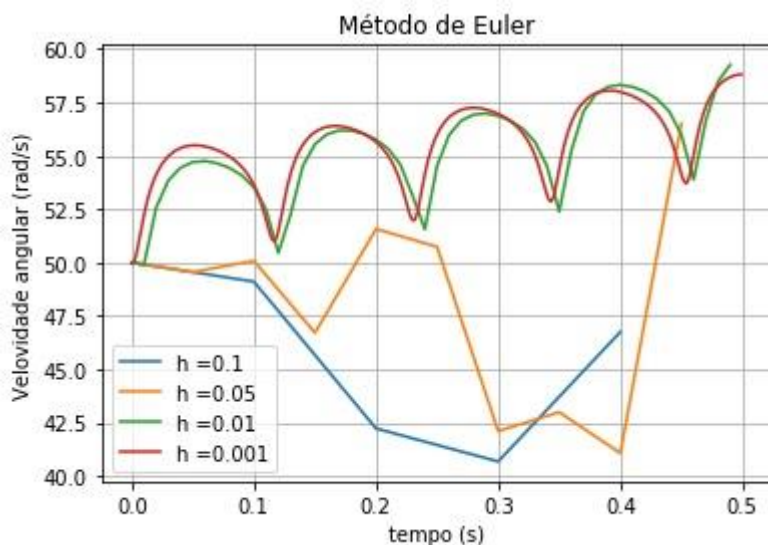


Fonte: Elaboração própria

Um fato importante é que para $h > 0.01$ todos os métodos, exceto Runge-Kutta-Fehlberg, não convergem para o valor indicado pela bibliografia (ver apêndice). Além disso, o método de Euler, especialmente, explode para valores superiores ao esperado. Enquanto isso, o método de Runge-Kutta-Fehlberg se mostrou eficaz na resolução da EDO independente do passo inicial.

Uma última análise realizada foi acerca da influência do valor atribuído ao passo h para a precisão do método de Euler. Para tanto, foi plotado o um único gráfico com variados passos de h .

Figura 6 – Comparação de valores de passos h no método de Euler para 50 passos



Fonte: Elaboração própria

Pode-se perceber que para $h > 0.01$ o método não foi eficiente para solucionar o problema proposto. Por outro lado, para $h \leq 0.001$ não houve diferença no resultado obtido e as curvas se sobreporam.

Para realizar uma análise qualitativa do resultado é necessário primeiro transformar o valor de velocidade angular do volante para RPM (rotações por minutos), unidade usualmente utilizada para analisar motores a combustão interna. Através da equação 5, utilizando o valor de $\omega = 72$ rad/s chegamos no valor aproximado de 688 rpm.

$$RPM = \frac{60}{2\pi} \cdot \omega \quad (5)$$

Com esse valor de rotação o motor estudado estaria classificado como média rotação e não seria adequado para o uso em automóveis tendo em vista que para esses veículos os valores costumam variar entre 700 rpm (marcha lenta) e 7000 rpm (no mais alto giro) com valores de máxima eficiência entre 1800 rpm e 2400 rpm (Carvalho, 2011).

4. CONCLUSÃO

Por meio deste estudo foi possível comprovar que a velocidade angular de um motor à combustão interna de dois tempos simplificado converge para 72rad/s. Este valor, definido inicialmente por Kranc (1977) *apud* Neff (2013),

pode ser obtido a partir da solução numérica da EDO da eq. (1) quando aplicado as condições iniciais apresentadas no Quadro 1.

De forma geral, os métodos numéricos de Euler, Heun, Runge-Kutta e Runge-Kutta-Fehlberg se mostraram eficazes na solução do problema quando aplicados valores de $h < 0.01$. Todavia, o método Runge-Kutta-Fehlberg merece relevância por promover gráficos mais precisos e possibilitar a convergência a partir de qualquer valor inicial atribuído ao passo.

Por fim, conclui-se que o motor modelado estaria mais adequado para o uso em navios, onde a baixa rotação é desejada, do que no meio automotivo como de costume.

5. BIBLIOGRAFIA

[1] Neff, Christofer (2013) "A Simplified Model of the Internal Combustion Engine," Undergraduate Journal of Mathematical Modeling: One + Two: Vol. 5: Iss. 1, Article 5. DOI: <http://dx.doi.org/10.5038/2326-3652.5.1.5> Available at: <http://scholarcommons.usf.edu/ujmm/vol5/iss1/5>

[2] Kranc, SC. "A Simplified Model of the Internal Combustion Engine." International Journal of Mechanical Engineering Education (IJMEE) - IMechE & UMIST 5.4 (1977): 343-46 *apud* Neff, Christofer (2013) "A Simplified Model of the Internal Combustion Engine," Undergraduate Journal of Mathematical Modeling: One + Two: Vol. 5: Iss. 1, Article 5. DOI: <http://dx.doi.org/10.5038/2326-3652.5.1.5> Available at: <http://scholarcommons.usf.edu/ujmm/vol5/iss1/5>

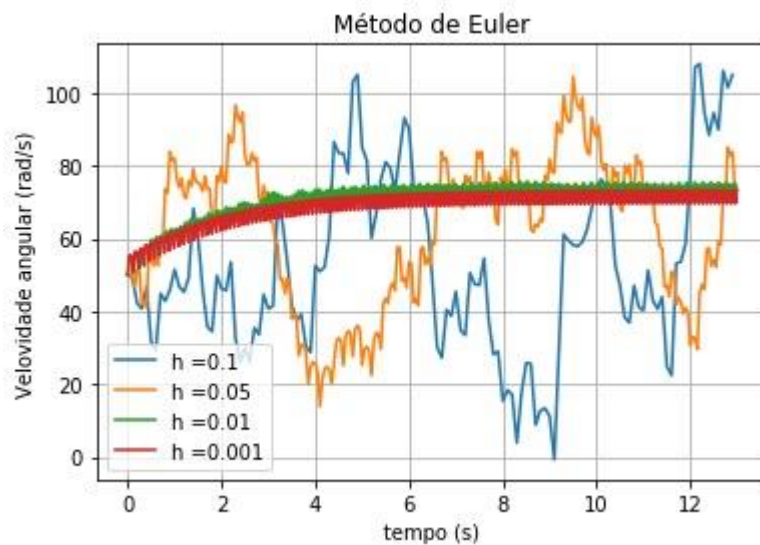
[3] BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. 9.ed. Rio de Janeiro (RJ): LTC, 2010.

[4] CARVALHO, Márcio A. S., "Avaliação de um motor a combustão interna ciclo otto utilizando diferentes tipos de combustíveis", Universidade Federal da Bahia. 2011

[5] ANTÔNIO LIMA. antoniolima.web, 2008. Máquinas térmicas: Motor a combustão interna. Disponível em <<http://www.antoniolima.web.br.com/arquivos/motores.htm>>. Acesso em: 08 de dez. de 2020

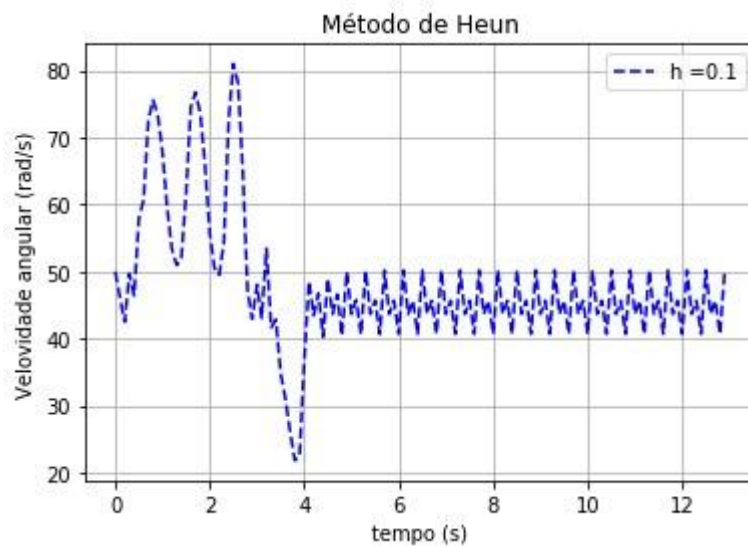
APÊNDICE

Figura A – Comparação de valores de passos h no método de Euler para 1300 passos



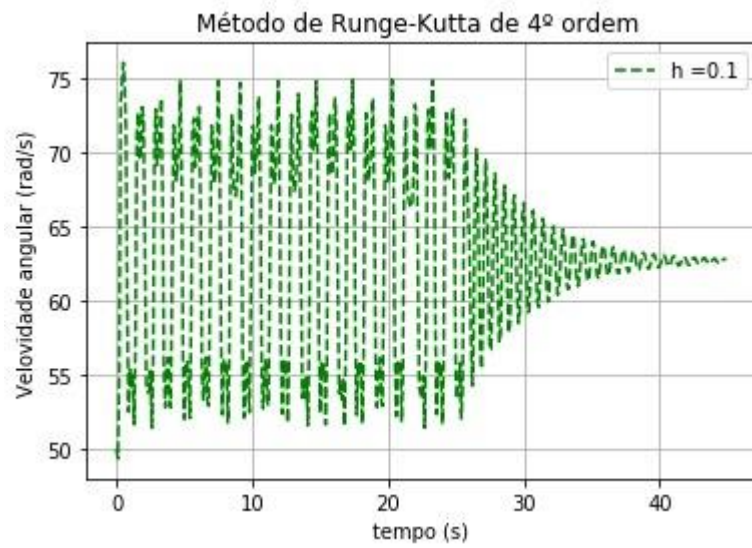
Fonte: Elaboração própria

Figura b – Método de Heun para passo $h = 0.1$



Fonte: Elaboração própria

Figura c – Método de Runge-Kutta para passo $h = 0.1$



Fonte: Elaboração própria