

3. Dinâmica de Voo

O último tópico abordado na seção de Fundamentação teórica é a modelagem matemática de equações que descrevam, de forma aproximada, a dinâmica de voo do paraquedas. Essa abordagem, apesar de não contribuir diretamente para a construção do projeto do paraquedas do foguete nébula, que possui apenas um evento de recuperação, pode auxiliar em projetos futuros onde as condições de implementação do paraquedas sejam mais extremas ou que haja mais eventos de implementação. Vale dizer que o objetivo desta modelagem é extrair funções de velocidade, força de arrasto e altura do sistema pelo tempo, de forma que seja possível analisar o voo do paraquedas não só no regime permanente. Para realizar a formulação matemática, de acordo com Potolski (2016), é necessário adotar as hipóteses apresentadas no Quadro 1.

Quadro 1 - Hipóteses adotadas para a formulação matemática.

I.	Não são levadas em consideração os efeitos não estacionários decorrentes da movimentação do velame do PQD devido ao campo de escoamento;
II.	A formulação matemática considera o PQD e carga útil como sendo apenas um ponto-massa, localizado no CG do sistema de dois corpos;
III.	A formulação matemática utiliza 2 (dois) graus de liberdade, ou seja, o ponto-massa apresenta movimentos nas direções x (horizontal) e y (vertical);
IV.	A recuperação acontece a velocidades subsônicas e na atmosfera terrestre.

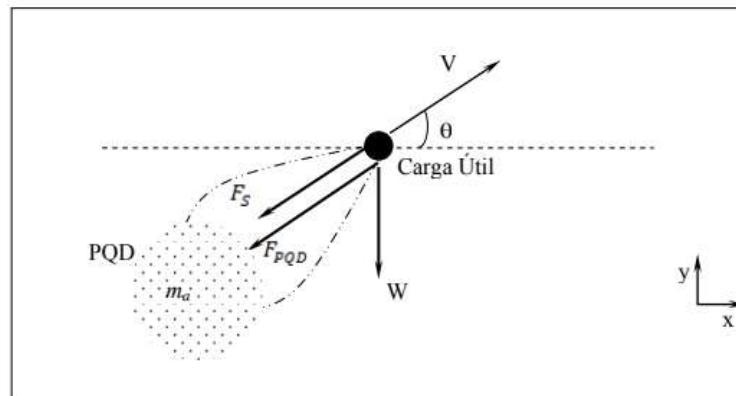
Fonte: Poltoski, L. (2016, p. 27)

Desse modo, o sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO's) que rege a dinâmica de voo do paraquedas é montado principalmente com a aplicação da segunda lei de Newton e fica como o mostrado abaixo.

$$\left\{ \begin{array}{l} (m_s + m_{PQD}) \frac{dV}{dt} = -F_s - F_{PQD} - (W_s + W_{PQD}) \sin \theta \\ \frac{m_s V^2}{R} = -W_s \cos \theta \\ \frac{dH}{dt} = V \sin \theta \end{array} \right. \quad (9)$$

Onde as variáveis dependentes são a velocidade do sistema (V), o ângulo da trajetória (θ) e altura que o sistema se encontra (H) e a variável independente é o tempo (t). O subscrito S representa a carga útil (store) e o subscrito (PQD) o paraquedas, desse modo, m representa a massa dos corpos, W a força peso relacionada aos corpos, R o raio de curvatura da trajetória do sistema e F a força de arrasto nos dois corpos. Uma ilustração do problema se encontra na Figura 10.

Figura 10 - Diagrama de forças na dinâmica de voo



Fonte: Potolski, L. (2016, p. 29)

Ainda sobre a força de arrasto, ela pode tomar a forma já apresentada na Equação 3 para a carga útil, considerando o coeficiente de arrasto e a área de referência de escoamento relacionados ao mesmo, no entanto, para o paraquedas, existe um formato mais complexo mostrada na Equação 10.

$$F_D = \frac{1}{2} \rho V^2 (C_D S)_{PQD} + \frac{dm_a}{dt} V \quad (10)$$

Com m_a sendo a massa de ar, denominado de massa aparente, que envolve o paraquedas onde ele está localizado. Uma estimativa para essa variável, Equação 11, é apresentada em ESDU - 09012. Note que ela é uma função do diâmetro do paraquedas.

$$m_a = 2,136 \rho \frac{\pi}{12} d^3_{PQD} \quad (11)$$

Determinado então a ideia geral da modelagem matemática, foi possível adotar hipóteses, chamadas aqui de hipóteses específicas, que adequa o sistema de EDO's as condições de recuperação do foguete da Kosmos, apresentadas no Quadro 2.

Quadro 2 - Hipóteses específicas adotadas para a formulação matemática.

- | | |
|------|--|
| I. | O ângulo com a vertical é aproximadamente zero, ou seja, $\theta \simeq -90^\circ$ ou $\theta \simeq 270^\circ$; |
| II. | Não levados em consideração os efeitos do processo de abertura do paraquedas, desse modo é presumido que a abertura do paraquedas é instantânea; |
| III. | É desconsiderado a variação da massa aparente com o tempo. |

Fonte: Elaboração própria.

Aqui vale alguns comentários quanto às hipóteses específicas. Em primeiro lugar, o ângulo adotado para o sistema de recuperação serve para ajustar a direção da velocidade de descida representada na Figura 10 e parti do pressuposto de que o paraquedas - carga útil irá cair em linha reta, ou seja, que o sistema está estável. Em segundo lugar, as pesquisas que foram realizadas pelo setor demonstraram que a força de abertura é muito pequena comparada aos outros esforços do sistema, além de que outras equipes de competição de foguetemodélismo no Brasil também utilizam essa hipótese no estudo de seus projetos. Em terceiro e último lugar, a massa aparente, como já foi citado anteriormente, é função do diâmetro do paraquedas e, decorrente da hipótese II, se a abertura é

instantânea então a variação da massa aparente é muito pequena e pode ser desconsiderada. Note que, se a variação da massa aparente é aproximadamente zero, o termo a mais na Equação 10 some e a fórmula da força de arrasto do paraquedas retorna ao formato da Equação 3. Desse modo, o sistema de EDO's fica como o abaixo.

$$\begin{cases} (m_s + m_{pQD}) \frac{dV}{dt} = -F_s - F_{pQD} + (W_s + W_{pQD}) \\ \frac{m_s V^2}{R} = 0 \\ \frac{dH}{dt} = -V \end{cases} \quad (12)$$

Agora que o sistema está mais simplificado é possível resolvê-lo e achar as funções procuradas, então, substituindo a Equação 3 da força de arrasto para o paraquedas e para a carga útil na primeira equação do sistema,

$$m_T \frac{dV}{dt} = - \left\{ \frac{1}{2} \rho [(C_D S)_s + (C_D S)_{pQD}] \right\} V^2 + W_T$$

$$\frac{dV}{dt} = - \left\{ \frac{1}{2m_T} \rho [(C_D S)_s + (C_D S)_{pQD}] \right\} V^2 + g$$

chamando agora a constante que multiplica a velocidade de k , o modelo para a resolução da EDO fica

$$\frac{dV}{dt} = kV^2 + g \quad (13)$$

Resolvendo a Equação 13, é obtido uma função $V(t)$, que pode ser utilizada para determinar a força de arrasto no paraquedas e altura do conjunto em função do tempo conforme as Equações 14 e 15, onde H_0 é altura inicial do sistema e H uma altura qualquer.

$$F_{pQD}(t) = \frac{1}{2} \rho V(t)^2 (C_D S)_{pQD} \quad (14)$$

$$\int_{H_0}^H dH = - \int_0^t V(t) dt \quad (15)$$

Note que a Equação 15 aparece multiplicando os dois lados da equação que relaciona a altura com a velocidade no Sistema 12 por dt e em seguida integrando os dois lados. Esta equação ainda pode tomar a forma da Equação 16, resolvendo a integral da altura.

$$H = H_0 - \int_0^t V(t) dt \quad (16)$$

Vale dizer que a altura inicial do sistema não necessariamente é o apogeu do mesmo, por conta do ruído nos barômetros utilizados pelo setor de aviação, essa altura inicial pode variar para um pouco menos do que o valor do

apogeu e isso implica que a velocidade em que o paraquedas será implementado, velocidade inicial do sistema, também não será zero.

Visto que o problema depende da determinação da função da velocidade pelo tempo, existem duas principais maneiras de resolver a EDO na Equação 13. A primeira é de forma analítica, semelhante ao processo feito para descobrir a altura em função do tempo, é possível fazer,

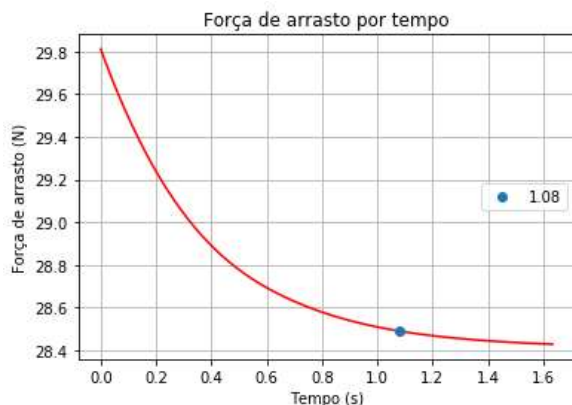
$$\int_{V_0}^V \frac{dV}{(kV^2+g)} = \int_0^t dt = t \quad (17)$$

onde V_0 é a velocidade inicial do sistema, V é uma velocidade num tempo t , e t é um valor qualquer de tempo. O problema desse modo é que a resolução de integrais nem sempre é trivial e mesmo que seja encontrada uma função como resposta da integral, isolar o parâmetro V não é um trabalho simples. Desse modo, torna-se muito trabalhoso tentar encontrar um função de forma analítica e o método numérico para resolução de EDO's, utilizado pela Kosmos e a segunda forma abordada aqui, demonstra uma grande vantagem em relação ao seu concorrente.

O método numérico, baseado na utilização de python como ferramenta para resolução do sistema de EDO's, consiste basicamente na construção de um modelo igual ao apresentado na Equação 13 como uma função de duas variáveis (V , t) e posterior aplicação com sua condição inicial (velocidade inicial) e range de tempo (para a resolução da EDO) na função odeint do pacote scipy.integrate. Como essa função retorna valores correspondentes ao range de tempo e não uma função especificamente, é necessário interpolar os valores de tempo e de retorno da solução da EDO para montar a função $V(t)$. Após isso, é possível construir as funções da força e arrasto em função do tempo e da altura em função do tempo implementando as Equações 14 e 16. Para a resolução da integral desta última foi utilizado a quadratura gaussiana como método de integração numérica. O código implementado pode ser consultado na pasta de "Análise Numérica" dentro de "Simulações de Componentes" do setor de recovery.

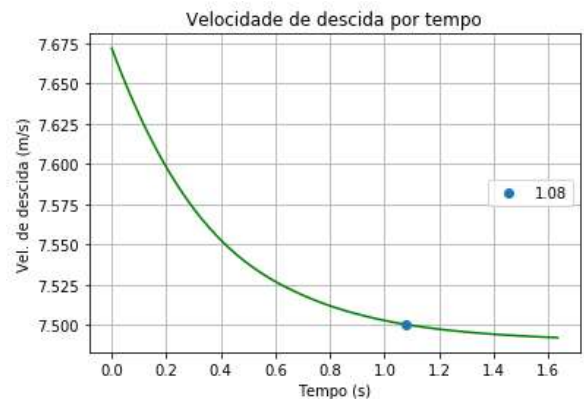
Alguns gráficos construídos a partir das funções geradas no código podem ser visto abaixo.

Figura 11 - Força de arrasto por tempo



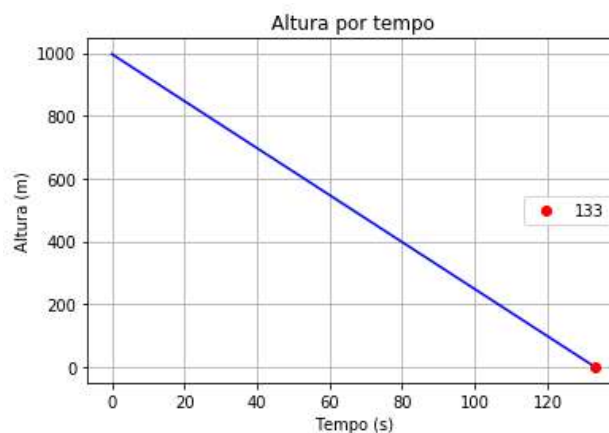
Fonte: Elaboração própria

Figura 12 - Velocidade de descida por tempo



Fonte: Elaboração própria

Figura 13 - Altura do sistema pelo tempo



Fonte: Elaboração própria

É interessante notar que o tempo que o sistema leva para atingir o regime permanente é um pouco mais que 1 segundo, isso se dá por conta de que a velocidade inicial do sistema é muito próxima da velocidade terminal definida inicialmente para o dimensionamento do paraquedas e isso implica a linearidade do gráfico de altura por tempo.