Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

ОТЧЕТ

к лабораторной работе №2

По курсу: «Математическая статистика»

На тему: «Интервальные оценки»

Студентка ИУ7-65Б
Оберган Т.М
14 вариант

Преподаватели
Власов П.А.
Волков И.К.

Москва, 2020 г.

Введение

Цель работы: построение доверительных интервалов для математичского ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

Содержание работы:

1. Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ
   a. вычисление точечных оценок $\mu(\vec{X}_n)$ и $S^2(\vec{X}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;
   b. вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{X}_n)$, $\overline{\mu}(\vec{X}_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX;
   c. вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{X}_n)$, $\overline{\sigma}^2(\vec{X}_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания DX;
2. вычислить μ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;
3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объема выборки из индивидуального варианта:
   a. на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \mu(\vec{x}_N)$, также графики функций $y = \mu(\vec{x}_n)$, $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;
   b. на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x}_N)$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

Теоретическая часть

В данной части рассмотрены формулы для вычисления величин, границ γ-доверительного интервала, а также определение γ-доверительного интервала.

1.1 Определения

Интервальной оценкой с коэффициентом доверия γ (γ-доверительной интервальной оценкой) параметра θ называют пару статистик $\underline{\theta}(\overrightarrow{X_n})$ и $\overline{\theta}(\overrightarrow{X_n})$ таких, что

$$P\{\underline{\theta}(\overrightarrow{X_n}) < \theta < \overline{\theta}(\overrightarrow{X_n})\} = \gamma.(1)$$

1.2 Формулы для вычисления величин

Оценка математического ожидания:

$$\hat{\mu}\left(\overrightarrow{X_n}\right) = \overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Xi$$

Несмещённая оценка дисперсии:

$$S^2 = \left(\overrightarrow{X_n}\right) = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Xi - \overline{X_n}\right)^2$$

Выборочная дисперсия:

$$\hat{\sigma}^2\left(\overrightarrow{X_n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Xi - \overline{X_n}\right)^2$$

1.3 Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала

Пусть X_n — случайная выборка объема n из генеральной совокупности X, распределенной по нормальному закону с параметрами μ и σ^2.

Оценка для математического ожидания при известной дисперсии

$$\underline{\mu}(\overrightarrow{X_n}) = \overline{X} + \frac{S(\overrightarrow{X_n})}{\sqrt{n}} h_{\alpha}^{t}(n-1)$$

$$\overline{\mu}(\overrightarrow{X_n}) = \overline{X} + \frac{S(\overrightarrow{X_n})}{\sqrt{n}} h_{1-\alpha}^{t}(n-1)$$

Где X_n - оценка математического ожидания, n – объем выборки

$S(X_n)$ — точечная оценка дисперсии случайной выборки X_n,

$h_{\alpha}(n-1)$ — квантиль уровня α распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы.

Оценка для дисперсии

$$\underline{\sigma^2}(\overrightarrow{X_n}) = \frac{(n-1) * S^2(\overrightarrow{X_n})}{\chi_{1-\alpha}^{2}(n-1)}$$

$$\overline{\sigma^2}(\overrightarrow{X_n}) = \frac{(n-1) * S^2(\overrightarrow{X_n})}{\chi_{\alpha}^{2}(n-1)}$$

Где n — объем выборки,$S(X_n)$ — точечная оценка дисперсии случайной выборки X_n,

$\chi_{\alpha}(n-1)$ —^{2} квантиль уровня α для распределения χ^2 с $n-1$ степями свободы.

Листинг

```
function lab2()
    X = 
[3.38,1.21,1.85,2.24,4.17,2.99,4.81,2.71,2.70,4.41,3.21,3.15,2.77,4.05,3.89,1.56
,2.78,2.04,2.82,3.28,2.63,1.89,3.57,3.15,3.80,5.40,3.25,2.04,2.61,5.06,2.87,2.66
,4.80,3.86,0.09,2.45,2.40,2.14,1.69,2.36,5.44,2.77,1.94,2.55,3.97,1.88,3.01,4.21
,4.74,2.02,2.38,2.46,3.51,2.89,1.57,3.53,0.77,3.31,3.58,2.77,3.61,3.71,2.38,3.06
,4.29,4.76,1.69,1.59,3.21,2.74,3.99,3.53,3.52,2.84,1.21,2.82,4.34,3.65,2.22,2.87
,3.14,3.58,1.96,3.41,3.85,1.96,3.02,4.22,3.10,2.68,3.67,1.70,5.47,5.02,2.52,3.09
,2.19,4.44,2.33,2.27,3.34,3.05,4.35,3.58,3.43,4.49,3.57,3.20,1.53,3.53,3.53,1.27
,3.40,4.53,2.21,3.28,3.50,2.01,3.30,1.86];

    N = length(X);
    gamma = 0.9;

    alpha = (1 - gamma) / 2;

    mu = get_mu(X);
    Ssqr = get_Ssqr(X);
    array_of_mu = get_array_of_mu(X, N);
    array_of_var = get_array_of_var(X, N);
    mu_higher = get_mu_higher(array_of_mu, array_of_var, alpha, N);
    mu_lower = get_mu_lower(array_of_mu, array_of_var, alpha, N);
    sigma_higher = get_sigma_higher(array_of_var, alpha, N);
    sigma_lower = get_sigma_lower(array_of_var, alpha, N);


    fprintf('mu = %.3f\n', mu);
    fprintf('S^2 = %.3f\n', Ssqr);
    fprintf('mu_lower = %.3f\n', mu_lower(end));
    fprintf('mu_higher = %.3f\n', mu_higher(end));
    fprintf('sigma^2_lower = %.3f\n', sigma_lower(end));
    fprintf('sigma^2_higher = %.3f\n', sigma_higher(end));


    figure
    hold on;
    plot([1, N], [mu, mu], 'g');
    plot((1 : N), array_of_mu, 'r');
    plot((1 : N), mu_lower, 'b');
    plot((1 : N), mu_higher, 'm');
    legend('\mu\^(x_N)','\mu\^(x_n)','_{--}\mu^(x_n)','^{--}\mu^(x_n)');
    grid on;
    hold off;

    figure
    hold on;
    plot([1, N], [Ssqr, Ssqr], 'g');
    plot((1 : N), array_of_var, 'r');
    plot((1 : N), sigma_lower, 'b');
    plot((4 : N), sigma_higher(4 : length(sigma_higher)), 'm');
    legend('S^2(x_N)','S^2(x_n)','_{--}\sigma^2(x_n)','^{--}\sigma^2(x_n)');
    grid on;
    hold off;


    function mu = get_mu(X)
        mu = sum(X)/size(X, 2);
    end
```

```
    function Ssqr = get_Ssqr(X)
        n = size(X, 2);
        Ssqr = n / (n - 1) * get_sigma_sqr(X);
    end

    function array_of_mu = get_array_of_mu(X, N)
        array_of_mu = zeros(1, N);
        for i = 1 : N
            array_of_mu(i) = get_mu(X(1 : i));
        end
    end

    function array_of_var = get_array_of_var(X, N)
        array_of_var = zeros(1, N);
        for i = 1 : N
            array_of_var(i) = get_Ssqr(X(1 : i));
        end
    end

    function mu_higher = get_mu_higher(array_of_mu, array_of_var, alpha, N)
        mu_higher = zeros(1, N);
        for i = 1 : N
            mu_higher(i)  = array_of_mu(i) + sqrt(array_of_var(i) ./ i) .*
tinv(1 - alpha, i - 1);
        end
    end

    function mu_lower = get_mu_lower(array_of_mu, array_of_var, alpha, N)
        mu_lower = zeros(1, N);
        for i = 1 : N
            mu_lower(i) = array_of_mu(i) + sqrt(array_of_var(i) ./ i) .*
tinv(alpha, i - 1);
        end
    end

    function sigma_higher = get_sigma_higher(array_of_var, alpha, N)
        sigma_higher = zeros(1, N);
        for i = 1:N
            sigma_higher(i) = array_of_var(i) .* (i - 1) ./ chi2inv(alpha, i -
1);
        end
    end

    function sigma_lower = get_sigma_lower(array_of_var, alpha, N)
        sigma_lower = zeros(1, N);
        for i = 1 : N
            sigma_lower(i) = array_of_var(i) .* (i - 1) ./ chi2inv(1 - alpha, i
- 1);
        end
    end

    function sigma = get_sigma_sqr(X)
        tempMu = get_mu(X);
        sigma = sum((X - tempMu) .* (X - tempMu)) / size(X,2);
    end

end
```

Результат работы программы

$\mu(\overrightarrow{X_n}) = 3.055$
$S^2 = 1.055$

$\underline{\mu} = 2.9$
$\overline{\mu} = 3.211$

$\underline{\sigma}^2 = 0.863$
$\overline{\sigma}^2 = 1.324$

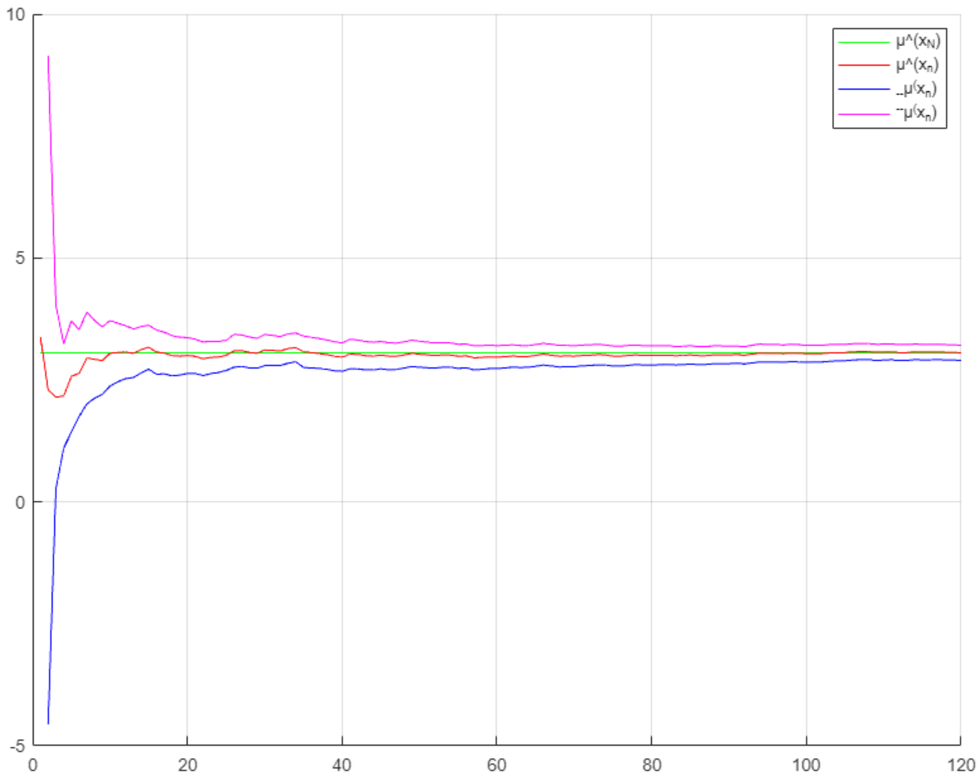

Рис. 1 - оценка для математического ожидания

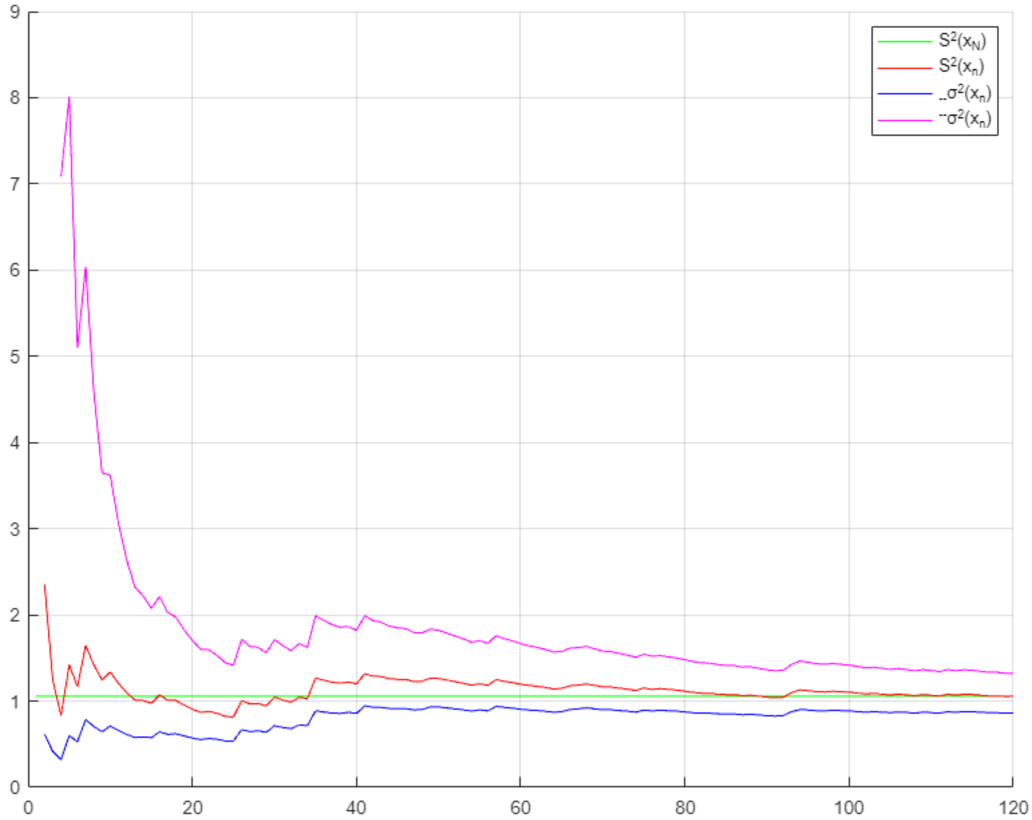

Рис.2 – оценка для дисперсии