

Типовые задачи рубежного контроля

1. Орграф задан матрицей меток дуг:

$$\begin{pmatrix} +\infty & +\infty & 10 & 5 & 7 & +\infty & +\infty \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 14 & 18 & +\infty \\ +\infty & 9 & +\infty & 14 & 7 & 11 & 22 \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 7 & 16 \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 8 & 23 \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 9 \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty \end{pmatrix}.$$

Используя поиск в ширину, найти кратчайшие расстояния от источника (вершины v_1), Показать изменение содержимого очереди вершин.

2. Для орграфа, используя алгоритм Дейкстры, найти кратчайшие расстояния от источника (вершины v_1), если орграф задан следующей матрицей меток дуг:

$$\begin{pmatrix} +\infty & +\infty & 9 & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty \\ +\infty & +\infty & +\infty & 10 & 3 & 5 & +\infty \\ +\infty & 4 & +\infty & 3 & 6 & 7 & +\infty \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 5 \\ +\infty & +\infty & 6 & 7 & +\infty & 5 & 10 \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 4 \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty \end{pmatrix}.$$

3. Для орграфа, используя решение систем линейных уравнений в полукольце \mathbf{R}^+ , вычислить матрицу кратчайших расстояний, если орграф задан следующей матрицей меток дуг:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 8 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 4 & 8 \\ +\infty & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 6 & +\infty \end{pmatrix}.$$

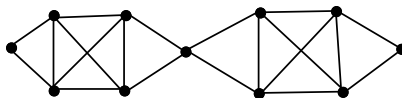
4. Для орграфа, используя решение систем линейных уравнений в полукольце \mathbf{B} , вычислить матрицу достижимости, если орграф задан следующей матрицей смежности вершин:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

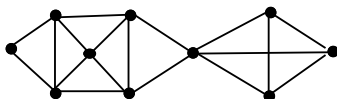
5. Найти группу автоморфизмов неориентированного графа, заданного матрицей смежности вершин.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Найти порядок группы автоморфизмов изображенного ниже графа

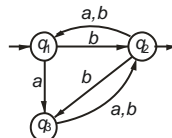


7. Для неориентированного графа, изображенного на рисунке, найти поиском в глубину фундаментальные циклы:



Типовые задачи рубежного контроля

1. Построить конечный автомат по регулярному выражению $((ab) + (ca)^*)^*$. Детерминизировать и минимизировать его.
2. Написать регулярное выражение для множества цепочек в алфавите $\{0,1\}$, содержащих четное число нулей и четное число единиц.
3. Найти язык, допускаемый конечным автоматом, изображенным на рисунке.



4. Решить следующую систему линейных уравнений с регулярными коэффициентами:

$$\begin{cases} x_1 = (01^* + 1)x_1 + x_2, \\ x_2 = 1x_1 + 00x_2 + 11, \\ x_3 = x_1 + x_2 + \lambda. \end{cases}$$

5. Построить конечный автомат, допускающий те и только те цепочки в алфавите $\{a,b\}$, которые не допускает следующий конечный автомат: вход q_1 , выход q_3 , дуги с метками (q_1, q_1, b) , (q_1, q_2, a) , (q_2, q_1, b) , (q_2, q_3, b) , (q_3, q_3, a, b) . Для построенного автомата записать регулярное выражение, задающее его язык.
6. Задача 7.32 из [ОЛ1].
7. Доказать, что если язык L регулярен, то и язык $L^{+k} = \bigcup_{i=k}^{\infty} L^i$ для любого $k > 0$ регулярен.
8. Пусть $L = \{a^m b^n : m \neq n, m, n > 0\}$. Доказать, что язык $L^2 L^+$ нерегулярен.
9. При каких k язык $L_k = \{a^{k^n} : n \geq 0\}$ в алфавите $\{a\}$ будет регулярным?

Типовые задачи

1. Сколь много положительных целых чисел, меньших или равных числу 2300,

взаимно простых с 700?

2. Найти число ломаных, ведущих из точки $A(0,0)$ в точку $D(10,10)$, проходящих через точку $B(3,4)$ и не проходящих ни через одну из точек $C_1(1,3)$, $C_2(5,5)$, $C_3(6,8)$. Вершины ломаной имеют целые неотрицательные координаты, каждое звено ломаной направлено либо вверх, либо вправо.
3. Найти число всех перестановок из 6 элементов с запрещенными парами: $(3,3)$, $(3,4)$, $(4,1)$, $(4,2)$, $(5,4)$, $(5,5)$, $(5,6)$.
4. Найти общее решение соотношения $x_n = x_{n-1} + 3x_{n-2}$.
5. Найти решение соотношения при заданных начальных условиях: $x_0 = 2$, $x_1 = 4$, $x_n = 7x_{n-1} - 12x_{n-2}$, $n \geq 2$.
6. Найти общее решение для соотношения $x_n = 6x_{n-1} - 12x_{n-2} + 8x_{n-3} + 2^n$.

7. Записать вид общего решения линейного неоднородного рекуррентного соотношения:

$$x_n + x_{n-2} - 6x_{n-3} + 4x_{n-4} = 2^n n^3 + \sin \frac{2n\pi}{3}$$

8. Найти структурный перечень двухцветных раскрасок правильного пятиугольника.
9. Найти число двухцветных раскрасок 9-клеточной доски.

Типовые задачи рубежного контроля

1. Доказать тождество $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
2. Доказать тождество $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
3. Доказать тождество $(\rho \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \rho^{-1}$.
4. Доказать, что для любой функции f и любых множеств A и B имеют место соотношения: а) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$; б) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
5. Построить график и граф бинарного отношения φ , заданного на множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, если $x_1 \varphi x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2 + 1$.
6. Для бинарного отношения $\rho = \{(x, y) : x < y, y + x < 1,5\}$ на множестве $X = [0,1]$ построить графики отношений ρ^{-1} и ρ^2 .
7. Для бинарного отношения $\rho = \{(x, y) : x + y \leq 1\}$ на множестве $X = [0,1]$ найти $D(\rho)$, $R(\rho)$, ρ^{-1} , $\rho \circ \rho$, $\rho^{-1} \circ \rho$, $\rho \circ \rho^{-1}$.
8. Пусть бинарное отношение ν определено на множестве положительных рациональных чисел следующим образом: $(a/b)\nu(c/d)$, если $ad \leq bc$. Показать, что ν является отношением порядка.
9. Ассоциативна ли операция \square на множестве M , если $M = \square$, $x \square y = 2xy$.
10. Решить уравнение $axb = c$ в группе S_7 , если $a = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 5627134 \end{pmatrix}^{1997}$,
 $b = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 7162534 \end{pmatrix}^{-2002}$, $c = (125)^{1999}$.
11. Решить уравнение $axb = c$ в группе Z_{23}^* , где $a = 7^{-1998}$, $b = 5^{115}$, $c = 21^{21}$.
12. Найти в Z_{23} решение системы уравнений

$$\begin{cases} x - 5y + z = 1, \\ 21x - 19y + 22z = -21, \\ 5x + 17z = 5. \end{cases}$$

13. Доказать, что если в кольце оба произведения ab и ba обратимы, то оба элемента a и b обратимы. Что изменится в результате, если сохранить обратимость только одного произведения?



[Ашот Авагян](#) 13:08

найти язык допускаемый конечным автоматом

структурный перечень трехцветных раскрасок графа

Из теории индуктивно упорядоченное множество. Теорема о неподвижной точке

Поиск в ширину

[Натунька Блинова](#) 13:09

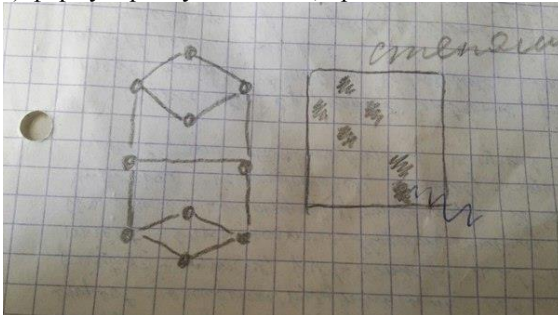
15 билет

1) что-то про кольца

2) сформулировать теорему о детерминизации, написать алгоритм удаления лямбда-переходов

3) найти порядок группы автоморфизмов графа, на какие левые смежные классы она разделяется

4) формулировку не помню, про подстановки с запрещенными позициями



[Павел Минеев](#) 13:15

16

теорема об области целостности

теорема о структуре общего решения ОРЛС (решение есть лин. комб ФРС)

задача по нахождению матрицы кратчайших расстояний по матрице меток

задача на построение КА, допускающего только слова, содержащие нечетное кол-во каждой из букв двухбуквенного алфавита

[Павел Андреевич](#) 13:20

19 билет

1) Алгоритм поиска кратчайших расстояний с помощью алгоритма поиска в ширину

2) Неоднородные линейно рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами. Теорема о структуре общего решения. Принцип суперпозиции.

3) Решить систему в (D100, НОД, НОК)

4) Построить конечный автомат который не начинается на bb и не заканчивается на ba . (Алфавит $\{a, b\}$)

Доп вопрос:

Функции разметки, Понятие эквивалентных функций разметки, Структурный перечень функций разметки, Теорема Пойа

[Олег Макаренко](#) 13:20

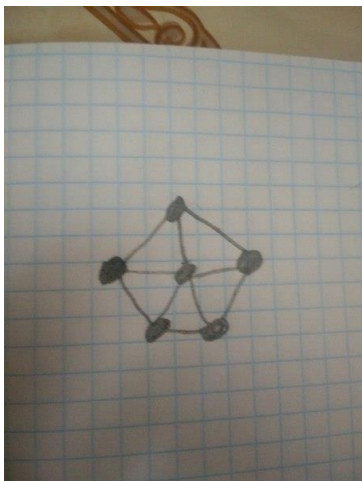
6 билет

1) Непрерывность операции сложения в замкнутом полукольце. Теорема о наименьшем решении линейного уравнения в замкнутом полукольце (с доказательством).

2) Теорема о детерминизации. Написать алгоритм. (формулы начальных и конечных автоматов расписать)

3) Поиск в ширину в орграфе, найти кратчайшие расстояния. Несложно.

4) Найти структурный перечень трехцветных раскрасок в графе. Найти количество неэквивалентных раскрасок.



[Даян Муслимов](#) 13:42

билет 21

1. Задача о путях в размеченном орграфе. Доказательство основной теоремы
2. Лемма Бернсайда
3. Найти обратное отношение и его квадрат. $P = \{5x \leq 4y; x \geq 0; y \leq 1\}$
4. Доказать нерегулярность языка $\{a^n b^m a^p, n > p+1\}$

[Егор Резцов](#) 13:47

Билет 7

- 1) Классы смежности. Теорема Лагранжа
- 2) Задача о путях с док-ом основной теоремы.
- 3) Док-ть нерегулярность языка L^+ если $L = \{a^m b^n, m > n, m, n > 0\}$
- 4) найти число перестановок 6 эл. с запрещенными позициями:
(1,1) (1,2) (2,1) (2,2) (3,3) (3,4) (4,3) (5,5) (5,6) (6,5) (6,6)

[Аленка Павлова](#) 13:50

Билет 23

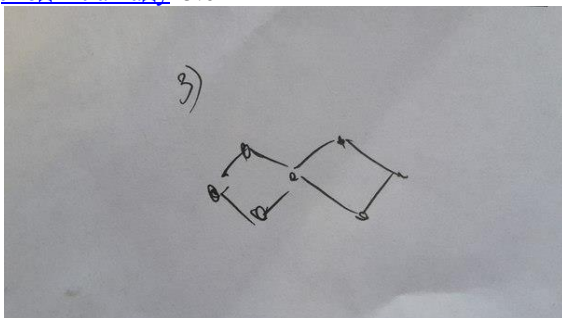
1. Теорема о равенстве порядка образующего элемента порядку группы с доказательством
2. Формулы включения исключения с доказательством
3. Найти матрицу кратчайших расстояний по заданной матрице меток дуг
4. Дан язык $((a^+)(bb)^* + a)^*$ построить конечный автомат и детерминизировать его.

[Катя Полуэктова](#) 13:51

Билет 12

- 1) Теорема о равенстве порядка образующего элемента и порядка циклической группы (формулировка и доказательство)
- 2) Вывод формул включения и исключения
- 3) Вычислить матрицу кратчайших расстояний по заданной матрице меток дуг.
- 4) Дан язык $((a^+)(ba)^* + ba)^*$. Построить конечный автомат и детерминизировать его.

[Людмила Бадю](#) 15:04



Пересланные сообщения

[Людмила Бадю](#) 15:04

11 билет



- 1) Циклический индекс группы. формулировка теоремы Пойа
- 2) Непрерывность операции сложения в замкнутом полукольце. Теорема о наименьшем решении линейного уравнения в замкнутом полукольце.
- 3) Найти автоморфизмы графа(как в подготовке)
- 4) Составить КА из символов 1 и 0 не допускающий цепочки 11 и не кончающийся на 00

Билет 1

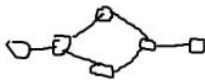
Билет 2

- 1) Поиск в глубину в орграфе. Классификация дуг. Критерий бесконтурности.
- 2) Теорема Клини (формулировка), алгоритм синтеза КА по регулярному выражению.
- 3) Система в Z23
- 4) Решить однородное линейное рекуррентное соотношение

$$X_n = -X_{n-1} + 6 * X_{n-2}$$

Билет 3

- 1) Индуктивное упорядоченное множество. Теорема о неподвижной точке (с доказательством).
- 2) Поиск в ширину в орграфе и поиск (на основе поиска в ширину) кратчайших расстояний от фиксированной вершины: алгоритм волнового фронта и поиск в ширину в орграфе с числовыми метками дуг.
- 3) Найти язык КА.
- 4) Найти количество и структурный перечень неэквивалентных трехцветных раскрасок графа на картинке



Билет 4

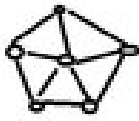
Билет 5

- 1) Теорема о конечной области целостности (с доказательством).
- 2) Однородные линейные рекуррентные соотношения (ОЛРС) с постоянными коэффициентами. Теорема об общем решении ОЛРС как линейной комбинации фундаментальных решений.
- 3) Найти матрицу стоимостей.
- 4) Язык, автомат и регулярное выражение для слов с нечетным количеством каждого из 0, 1.

Билет 6

- 1) Непрерывность операции сложения в замкнутом полукольце. Теорема о наименьшем решении линейного уравнения в замкнутом полукольце.
- 2) Теорема о минимизации ДКА и определение количества состояний ДКА.
- 3) Дана матрица весов дуг. Поиск в ширину.
- 4) Найти количество и структурный перечень неэквивалентных

трехцветных раскрасок графа



Билет 7

Билет 8

- 1) Поиск в ширину в размеченном ориентированном графе.
- 2) Неоднородные линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами. Теорема о структуре общего решения. Поиск частного решения методом подбора. Принцип суперпозиции (без доказательства).
- 3) Система в полукольце. (НОД, НОК)
- 4) Язык, автомат и регулярное выражение для слов, не начинающихся на ba и не заканчивающихся на ab .

Билет 9

Билет 10

Билет 11

- 1) Циклический (цикловой) индекс группы. Теорема Пойа. Ранг группы.
- 2) Непрерывность операции сложения в замкнутом полукольце. Теорема о наименьшем решении линейного уравнения в замкнутом полукольце.
- 3) Автоморфизм.
- 4) Язык, автомат и регулярное выражение, не допускающие цепочку 11 и цепочки, оканчивающиеся на 00 .

Билет 12

- 1) Теорема о равенстве порядка образующего элемента конечной циклической группы порядку группы.
- 2) Формулы включения и исключения (с выводом).
- 3) Найти матрицу стоимостей

4	2	$+\infty$	7
3	$+\infty$	3	11
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	4
6	2	5	$+\infty$

4) Построить КА, детерминизировать и минимизировать

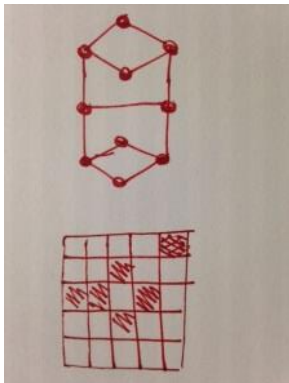
$$(a^+(ba^*) + ba)^*$$

Билет 13

Билет 14

Билет 15

- 1) Кольца. Аддитивная группа и мультипликативный моноид кольца. Коммутативное кольцо. Кольца вычетов. Теорема о тождествах кольца (аннулирующем свойстве нуля, свойстве обратного по сложению при умножении, дистрибутивности вычитания относительно умножения).
- 2) Детерминизация КА. Алгоритм удаления лямбда-переходов.
- 3) Найти число разрешенных подстановок с запрещенной областью.
- 4) Найти группу автоморфизмов.



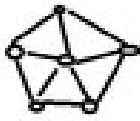
Билет 16

- 1) Область целостности. Теорема о конечной области целостности (с доказательством).
- 2) Однородные линейные рекуррентные соотношения (ОЛРС) с постоянными коэффициентами. Теорема об общем решении ОЛРС как линейной комбинации фундаментальных решений.
- 3) В полукольце R^+ найти матрицу кратчайших расстояний графа из 4 вершин, заданного матрицей меток дуг.
- 4) Язык, автомат и регулярное выражение для слов алфавита $\{a, b\}$, содержащих нечетное количество вхождений хотя бы одного из символов.

Билет 17

- 1) Непрерывность операции сложения в замкнутом полукольце. Теорема о наименьшем решении линейного уравнения в замкнутом полукольце.
- 2) Теорема о минимизации ДКА и определение количества состояний ДКА.
- 3) Дана матрица весов дуг. Поиск в ширину.
- 4) Найти количество и структурный перечень неэквивалентных

трехцветных раскрасок графа



Билет 18

- 1) Смежные классы подгруппы по элементу. Теорема Лагранжа.
- 2) Задача о путях в ориентированном графе, размеченном над полукольцом и ее решение с помощью алгоритма Флойда — Уоршелла — Клини. Задача о достижимости и поиске кратчайших расстояний между двумя узлами графа.
- 3) Доказать, что язык не является регулярным:
$$L = \{ y : y = xb^nx, x = \{ a, c \}^*, n \geq 0 \}$$
- 4) Найти кол-во разрешенных подстановок из 6 элементов.
Запрещенная область:
(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)

Билет 19

- 1) Алгоритм поиска кратчайших расстояний через поиск в ширину.
- 2) Неоднородные линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами. Теорема о структуре общего решения. Поиск частного решения методом подбора. Принцип суперпозиции (без доказательства).
- 3) Система в полукольце. (НОД, НОК)
- 4) Язык, автомат и регулярное выражение для слов, не содержащих вхождение bb в начале и ba в конце цепочки.

Билет 20

- 1) Алгоритм Дейкстры.
- 2) Лемма о разрастании для регулярных языков.
- 3) Проверить обладает ли бинарное отношение $\rho = \{(x, y) : |x - y| \geq k > 0\}$, заданное на множестве целых чисел, свойствами рефлексивности (иррефлексивности), симметричности (асимметричности), транзитивности и определить его квадрат.
- 4) Найти общее решение соотношения

$$X_n = -X_{n-1} + 12 * X_{n-2} + 2^n$$

Билет 21

- 1) Поиск в глубину в орграфе. Классификация дуг. Критерий бесконтурности.

- 2) Теорема Клини (формулировка), алгоритм синтеза КА по регулярному выражению.
- 3) Система в Z23
- 4) Решить однородное линейное рекуррентное соотношение

$$X_n = -X_{n-1} + 6 * X_{n-2}$$

Билет 22

Билет 23

- 1) Теорема о равенстве порядка образующего элемента конечной циклической группы порядку группы.
- 2) Формулы включения и исключения (с выводом).
- 3) Найти матрицу стоимостей

4	2	$+\infty$	7
3	$+\infty$	3	11
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	4
6	2	5	$+\infty$

- 4) Построить КА, детерминизировать и минимизировать

$$(a^+(ba^*) + ba)^*$$

Билет 24

- 1) Поиск в глубину в орграфе. Классификация дуг. Критерий бесконтурности.
- 2) Теорема Клини (формулировка), алгоритм синтеза КА по регулярному выражению.
- 3) Система в Z23
- 4) Решить однородное линейное рекуррентное соотношение

$$X_n = -X_{n-1} + 6 * X_{n-2}$$

Билет 25

- 1) Индуктивное упорядоченное множество. Теорема о неподвижной точке (с доказательством).
- 2) Поиск в ширину в орграфе и поиск (на основе поиска в ширину) кратчайших расстояний от фиксированной вершины: алгоритм волнового фронта и поиск в ширину в орграфе с числовыми метками дуг.
- 3) Найти язык КА.
- 4) Найти количество и структурный перечень неэквивалентных трехцветных раскрасок графа на картинке



Практика из каких-то билетов:

1) Построить КА по регулярному выражению

$$(a^+(bb)^* + a)^*$$

2) Система в полукольце $D = (D100, \text{НОД}, \text{НОК})$

$$\begin{cases} X_1 = 10X_1 + 20X_2 + 25X_3 + 50 \\ X_2 = 4X_1 + 10X_2 + 20X_3 + 20 \\ X_3 = 5X_1 + 2X_2 + 25X_3 + 10 \end{cases}$$

3) Доказать, что язык L^+ не является регулярным, где L :

$$L = \{ x : x = a^n b^m a^p, m, n, p \geq 0, n > p \}$$

4) Доказать, что язык не является регулярным:

$$L = \{ a^m b^n, m > n, m, n > 0 \}$$

5) Система в $Z23$

$$\begin{cases} x - 7y + z = 1 \\ 20x - 19y + 22z = -21 \\ 4x + 17z = 5 \end{cases}$$