Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Домашнее задание №1

По курсу: «Математическая статистика»

Студентка ИУ7-65Б
Оберган Т.М
14 вариант

Преподаватели
Власов П.А.
Волков И.К.

Москва, 2020 г.

Задача №1 (Предельные теоремы теории вероятностей)
В конденсаторе с вероятностью 0.01 возможен дефект диэлектрика и, независимо от этого, с вероятностью 0.005 возможен дефект корпуса. Проверена партия в 1000 конденсаторов. В каких границах с вероятностью 0.997 заключается число бракованных конденсаторов? Решить задачу, используя неравенство Чебышева и интегральную теорему Муавра Лапласа.

Схема Бернулли
p = (1 – 0.01) * (1 - 0.005) = 0.99 * 0.995 = 0.98505 – не бракованый
q = 1 - 0.98505 = 0.01495
n = 1000

Неравенство Чебышева:

В одном эксперименте (биноминальное распределение):
MX = p = 0.98505
DX = pq = 0.0147264975

В 1000 экспериментов:
MX = 1000*p = 985.05
DX = 14.7264975

$$\mathsf{P}\{|X - \mathsf{M}X| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

вер того, что X не попадет в интервал = 0.003
0.003*e^2 = DX
e^2 = 14.7264975 / 0.003 = 4908.8325
e = 70,06306088089501

Количество хороших в диапазоне [MX – e, MX + e] = [915, 1000], следовательно количество плохих [0, 85].

Муавра Лапласа:

$$\mathsf{P}\left\{\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(x).$$

Интегральная теорема Муавра – Лапласа
n = 1000
Sn – суммарное число успехов в n испытаниях.
m - количество успехов, m1, m2 - границы искомого интервала
m1 = MX – e = np – e
m2 = MX + e = np + e
P(m1 <= m <= m2) = P(MX - e <= m <= MX + e) = Ф((m2 - np)/sqrt(npq)) - Ф((m1 - np)/sqrt(npq)) = 0.997

Ф((m2 - np)/sqrt(npq)) - Ф((m1 - np)/sqrt(npq)) = Ф(e/sqrt(npq)) - Ф(-e/sqrt(npq)) = Ф0(e/sqrt(npq)) - Ф0(-e/sqrt(npq)) = 2Ф0(e/sqrt(npq)) = 0.997
Ф0(e/sqrt(npq)) = 0.4985
e/sqrt(npq) = 2.965 (по таблице)
e = 2.965 * sqrt(14.7264975) = 2.965 * 3,837511889232397 = 11,37822275157406

Количество хороших в диапазоне [MX – e, MX + e] = [974, 996], следовательно количество плохих [4, 26].

Задача №2 (метод моментов)
С использованием метода моментов для случайной выборки $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ из генеральной совокупности X найти точечные оценки указанных параметров заданного закона распределения.
Решение:

$$f_X(x) = 5\theta x^4 e^{-\theta x^5}, \qquad x > 0$$
$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x * f(x)dx$$
$$MX = \int_0^{+\infty} 5\theta x^5\, e^{-\theta x^5} dx$$
$$MX = \int_0^{+\infty} x * e^{-\theta x^5} d(\theta x^5)$$
$$\Gamma(\mathrm{p}) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$
$$MX = \frac{x}{5}(-5e^{-\theta x^5} - \frac{\Gamma(\frac{1}{5}, \theta x^5)}{\sqrt[5]{\theta x^5}}$$
$$MX = \frac{\Gamma(\frac{6}{5})}{\sqrt[5]{\theta}} = \frac{0.918169}{\sqrt[5]{\theta}} = \bar{X}$$
$$\theta = \left(\frac{0.918169}{\bar{X}}\right)^5$$

Задача №3 (метод максимального правдоподобия)
С использованием метода максимального правдоподобия для случайной выборки X~ = = (X1, . . . , Xn) из генеральной совокупности X найти точечные оценки параметров заданного закона распределения. Вычислить выборочные значения найденных оценок для выборки ~x5 = = (x1, . . . , x5).

$$f_X(x) = \frac{\theta^{\frac{7}{2}}}{\Gamma(\frac{7}{2})} x^{\frac{5}{2}} e^{-\theta x}, x > 0$$

Выборка:

$$\overrightarrow{x_5} = (0.8, 1.8, 1.4, 0.8, 0.7)$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)! = 3.3234$$

$$L(X_1, \ldots, X_n, \vec{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} p(X_i; \theta).$$

$$L(X1, \ldots, X_n, \vec{\theta}) =$$

$$= \frac{\theta^{\frac{7}{2}}}{\Gamma(\frac{7}{2})} (X_1)^{\frac{5}{2}} e^{-\theta X_2} * \frac{\theta^{\frac{7}{2}}}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} (X_2)^{\frac{5}{2}} e^{-\theta X_2} * \frac{\theta^{\frac{7}{2}}}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} (X_3)^{\frac{5}{2}} e^{-\theta X_3}$$

$$* \frac{\theta^{\frac{7}{2}}}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} (X_4)^{\frac{5}{2}} e^{-\theta X_4} * \frac{\theta^{\frac{7}{2}}}{\Gamma(\frac{7}{2})} (X_5)^{\frac{5}{2}} e^{-\theta X_5}$$

$$L(X_1, \ldots, X_n, \vec{\theta}) =$$

$$= \left(\frac{\theta^{\frac{7}{2}}}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}\right)^5 * (X_1)^{\frac{5}{2}} e^{-\theta X_2} * (X_2)^{\frac{5}{2}} e^{-\theta X_2} * (X_3)^{\frac{5}{2}} e^{-\theta X_3} * (X_4)^{\frac{5}{2}} e^{-\theta X_4}$$

$$* (X_5)^{\frac{5}{2}} e^{-\theta X_5}$$

$$\ln(L) = 5 * \ln\left(\frac{\theta^{\frac{7}{2}}}{3.3234}\right) + \sum_{i=0}^{5} \ln((X_i)^{\frac{5}{2}}\ e^{-\theta X_i})$$

$$\ln(L) = 5 * \ln\left(\frac{\theta^{\frac{7}{2}}}{3.3234}\right) + \sum_{i=0}^{5} (\ln((X_i)^{\frac{5}{2}})\ - \theta X_i)$$

$$\ln(L) = 5 * \ln\left(\theta^{\frac{7}{2}}\right) - 5 * \ln\,(3.3234) + \frac{5}{2} \sum_{i=0}^{5} \ln\,(X_i) - \theta \sum_{i=0}^{5} X_i$$

$$\ln(L) \approx \frac{35}{2} * \ln(\theta) - 6 + \frac{5}{2} * 0.1213 - \theta * 5.5$$

$$\ln(L)' \approx \frac{35}{2} * \ln(\theta)' - \theta' * 5.5$$

$$\frac{1}{\mathrm{L}} \approx \frac{35}{2\theta} - 5.5 = 0$$

$$\theta = \frac{35}{11} = 3.1818$$

$$(\frac{1}{\mathrm{L}})' \approx (\frac{35}{2\theta})' - 5.5'$$
$$\frac{-1}{\mathrm{L}^2} \approx \frac{-35}{2\theta^2} < 0$$

Задача №4 (доверительные интервалы)

На основании n = 100 опытов определили, что среднее время производства детали составляет $\bar{X}$ = 5.5 сек, а $\mathrm{S}(\overrightarrow{X_n})$ = 1.7 сек. Считая, что время для производства детали распределено по нормальному закону, построить 90%-ый доверительный интервал для среднего времени производства детали и его среднеквадратического отклонения.

$$g(\vec{X}, m) = \alpha * (m - \bar{X})$$
$$M[\bar{X}] = m, \text{а } D[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$$
$$M[g(\vec{X}, m)] = 0$$
$$D[g(\vec{X}, m)] = \alpha^2 D[\bar{X}] = \frac{\alpha^2 * \sigma^2}{n}$$

Т.к. закон распределения $g(\vec{X}, m)$ нормальный, полагаем $\alpha = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}$

$$g(\vec{X}, m) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(m - \bar{X}) \sim N(0,1)$$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(m - \bar{X}) = h_{\alpha_1} \Rightarrow \underline{m}(\vec{X}) = \overline{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} h_{\alpha_1}$$
$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(m - \bar{X}) = h_{1-\alpha_2} \Rightarrow \overline{m}(\vec{X}) = \overline{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} h_{1-\alpha_2}$$
$$\gamma = 0.9$$
$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.05$$

$$\gamma = P\{h_{\alpha_1} < g(\vec{X}, m) < h_{1-\alpha_2}\} =$$
$$P\{\underline{m}(\vec{X}) < m < \overline{m}(\vec{X})\} =$$
$$P\{\overline{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} h_{\alpha_1} < m < \overline{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} h_{1-\alpha_2}\}$$

n = 100

среднее время производства детали составляет $\bar{X}$ = 5.5 сек

S($\overrightarrow{X_n}$) = 1.7 сек

$$h_{0.95} = -h_{0.05} = 1.645$$

$$\underline{m} = 5.5 + \frac{1.7}{10} h_{\alpha_1} = 5.5 - 0.17 * 1.645 = 5.5 - 0.27965 = 5.22035$$

$$\overline{m} = 5.5 + \frac{1.7}{10} h_{1-\alpha_2} = 5.5 + 0.27965 = 5.77965$$

$$m \in (5.22035; 5.77965)$$