# Рубежный контроль № 1

по математической статистике

Оберган Татьяна Максимовна
ИУ7-65Б

14.05.20

Билет 115

1. Непрерывная случайная величина $U$ имеет плотность распределения

$$f_U(u) = \frac{4\lambda^4}{u^5}, \quad u \geq \lambda,$$

где значение $\lambda > 0$ неизвестно. Для оценки параметра $\lambda$ используется статистика

$$\hat{\lambda}(\vec{U}) = \frac{4n-1}{4n} \min_{k=\overline{1;n}} \{U_k\}, \text{ где}$$

$\vec{U} = (U_1, \dots, U_n)$ - случайная выборка из генеральной совокупности $U$. Является ли оценка $\hat{\lambda}(\vec{U})$

а) несмещенной

б) эффективной по Рао-Крамеру?

Решение:

$$M[\hat{\lambda}(\vec{u})] = M\left[\frac{4n-1}{4n} \min_{k=\overline{1;n}} \{U_k\}\right] =$$
$$= \frac{4n-1}{4n} M\left[\min_{k=\overline{1;n}} \{U_k\}\right]$$

Примем $Z = \min\limits_{k=\overline{1;n}} \{U_k\}$

$$F_U(u) = \int_\lambda^u \frac{4\lambda^4}{u^5}\,du = 4\lambda^4 \cdot \frac{u^{-4}}{-4}\Big|_\lambda^u =$$
$$= 4\lambda^4 \cdot \left(\frac{u^{-4} - \lambda^{-4}}{-4}\right) = -\lambda^4(u^{-4} - \lambda^{-4})$$
$$= -\frac{\lambda^4}{u^4} + 1$$

$$F_Z(z) = 1-(1-F_u(z))^n$$

$$f_Z(z) = n\cdot\frac{4\lambda^4}{z^5}\cdot\left(\frac{\lambda^4}{z^4}\right)^{n-1} = \frac{4n}{z}\left(\frac{\lambda}{z}\right)^{4n}$$

$$MZ = \int_{-\infty}^{+\infty} z\cdot f_Z(z)\,dz = \int_{\lambda}^{+\infty}\cancel{z}\,\frac{4n}{\cancel{z}}\left(\frac{\lambda}{z}\right)^{4n}dz =$$

$$= 4n\lambda^{4n}\int_{\lambda}^{+\infty}\frac{dz}{z^{4n}} = 4n\lambda^{4n}\left.\frac{z^{1-4n}}{1-4n}\right|_{\lambda}^{+\infty} =$$

$$= \frac{4n\lambda}{4n-1}$$

$$M[\hat{\lambda}(\vec{u})] = \frac{4n-1}{4n}\cdot MZ =$$

$$= \frac{4n-1}{4n}\cdot\frac{4n\lambda}{4n-1} = \lambda$$

Ответ: несмещенная

2. Для определения среднего времени работы эл. у-ва была протестирована партия из $n=11$ изделий. Построить доверительный интервал уровня $\gamma=0.99$ для среднего времени работы у-ва, если для проверенной партии получено

$\overline{x}=223$г., $S^2(\vec{x})=9$г$^2$.

Распределение контролируемого признака считать нормальным.

Решение:

Используем:

$$T(\vec{x}, a) = \frac{a-\overline{x}}{S(\vec{x}_n)}\sqrt{n} \sim St(n-1)$$

$$\gamma = P\{t_{\alpha_1} < T(\vec{x}, a) < t_{1-\alpha_2}\}$$

$$\gamma = P\{-t_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{a-\overline{x}}{S(\vec{x})}\sqrt{n} < t_{\frac{1+\gamma}{2}}\}$$

$$\gamma = P\{\overline{x} - \frac{S(\vec{x})\cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + \frac{S(\vec{x})\cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}\}$$

$$\underline{a}(\vec{x}) = \overline{x} - \frac{S(\vec{x})\cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

$$\overline{a}(\vec{x}) = \overline{x} + \frac{S(\vec{x})\cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+0.99}{2} = 0.995$$

$$t_{0.995} = 3,1693$$

$$\frac{S(\vec{x}) \cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{9} \cdot 3{,}1693}{\sqrt{11}} \approx 2{,}8667$$

$$\underline{a} = 223 - 2{,}8667 = 220{,}1333$$

$$\overline{a} = 223 + 2{,}8667 = 225{,}8667$$

Ответ: $(220{,}1333;\ 225{,}8667)$