Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

ОТЧЕТ

к лабораторной работе №1

По курсу: «Математическая статистика»

На тему: «Гистограмма и эмпирическая функция распределения»

Студентка ИУ7-65Б
Оберган Т.М
14 вариант

Преподаватели
Власов П.А.
Волков И.К.

Москва, 2020 г.

Введение

Цель работы: построение гистограммы и эмпирической функции распределения.

Содержание работы:

1. Для выборки объема n из генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ
   a. вычисление максимального значения $M_{\max}$ и минимального значения $M_{\min;}$
   b. размаха R выборки;
   c. вычисление оценок μ и S^2 математического ожидания $\mathrm{M}X$ и дисперсии $\mathrm{D}X$;
   d. группировку значений выборки в m = $[\log_2 n]$ + 2 интервала;
   e. построение на одной координатной плоскости гистограммы и графика функции плотности распределения вероятностей нормальной случайной величины с математическим ожиданием μ и дисперсией S^2;
   f. построение на другой координатной плоскости графика эмпирической функции распределения и функции распределения нормальной случайной величины с математическим ожиданием μ и дисперсией S^2.
2. Провести вычисления и построить графики для выборки из индивидуального варианта

1. Формулы для вычисления величин

Минимальное и максимальное значение выборки:

$$M_{min} = min\{x_1, \dots, x_n\}, \tag{1}$$

$$M_{max} = max\{x_1, \dots, x_n\}, \tag{2}$$

где $(x_1, \dots, x_n)$ — реализация случайной выборки.

Размах выборки:

$$R = M_{max} - M_{min}, \tag{3}$$

где M_{max} — максимальное значение выборки, M_{min} — минимальное значение выборки.

Оценка математического ожидания:

$$\hat{\mu}(\overrightarrow{X_n}) = \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{4}$$

Выборочная дисперсия:

$$\hat{\sigma}^2\left(\overrightarrow{X_n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2 \tag{5}$$

Несмещённая оценка дисперсии:

$$S^2(\overrightarrow{X_n}) = \frac{n}{n-1}\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2. \tag{6}$$

2. Эмпирическая плотность и гистограмма

Определение. Эмпирической плотностью распределения случайной выборки $\vec{X}_n$ называют функцию:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n_i}{n\Delta}, & x \in J_i, i = \overline{1, m}; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \tag{7}$$

где $J_i, i = \overline{1; m}$ — полуинтервал из $J = [x_{(1)}, x_{(n)}]$

$$x_{(1)} = \min\{x_1, \dots, x_n\}$$

$$x_{(n)} = \max\{x_1, \dots, x_n\}$$

$$J_i = \left[x_{(1)} + (i-1)\Delta, x_{(i)} + i\Delta\right), i = \overline{1, m-1}$$
$$J_m = \left[x_{(1)} + (m-1)\Delta, x_{(1)} + m\Delta\right]$$

m — количество полуинтервалов интервала $J = [x_{(1)}, x_{(n)}]$,

Δ — длина полуинтервала $J_i, i = \overline{1, m}$ равная

$$\Delta = \frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{m} = \frac{|J|}{m},$$

n_i — количество элементов выборки в полуинтервале $J_i, i = \overline{1, m}$,

n — количество элементов в выборке.

Определение. График функции $f_n(x)$ называют гистограммой.

3. Эмпирическая функция распределения

Определение. Пусть

1. $\overrightarrow{X_n} = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка,
2. $\overrightarrow{x_n} = (x_1, \ldots, x_n)$ — реализация случайной выборки,
3. $n(x, \overrightarrow{x_n})$ — количество элементов выборки $\vec{x}_n$, которые меньше x,

тогда эмпирической функцией распределения называют функцию

$$F_n: \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}, F_n(x) = \frac{n(x, \ \overrightarrow{x_n})}{n}. \quad (8)$$

Замечание.

1. $F_n(x)$ обладает всеми свойствами функции распределения;
2. $F_n(x)$ кусочно-постоянна;
3. если все элементы вектора различны, то

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le x_{(1)}; \\ \frac{i}{n}, \text{если } x_{(i)} < x \le x_{(i+1)}, i = \overline{1, n-1}; \\ 1, \text{если } x > x_{(n)} \end{cases} \quad (9)$$

4. Эмпирическая функция распределения позволяет интерпретировать выборку $\overrightarrow{x_n}$ как реализацию дискретной случайной величины $\tilde{X}$, ряд распределения которой имеет вид:

$\tilde{X}$	$x_{(1)}$	…	$x_{(n)}$
P	$\frac{1}{n}$	…	$\frac{1}{n}$

Это позволяет рассматривать числовые характеристики случайной величины $\tilde{X}$ как приближенные значения числовых характеристик случайной величины X.

4. Листинг программы

```
function lab1
      clear
      X = 
     [3.38,1.21,1.85,2.24,4.17,2.99,4.81,2.71,2.70,4.41,3.21,3.15,2.77,4.05,3.89,1.56,2.78,2.04,2.82,3.28,2.63,1
     .89,3.57,3.15,3.80,5.40,3.25,2.04,2.61,5.06,2.87,2.66,4.80,3.86,0.09,2.45,2.40,2.14,1.69,2.36,5.44,2.77,1.9
     4,2.55,3.97,1.88,3.01,4.21,4.74,2.02,2.38,2.46,3.51,2.89,1.57,3.53,0.77,3.31,3.58,2.77,3.61,3.71,2.38,3.06,
     4.29,4.76,1.69,1.59,3.21,2.74,3.99,3.53,3.52,2.84,1.21,2.82,4.34,3.65,2.22,2.87,3.14,3.58,1.96,3.41,3.85,1.
     96,3.02,4.22,3.10,2.68,3.67,1.70,5.47,5.02,2.52,3.09,2.19,4.44,2.33,2.27,3.34,3.05,4.35,3.58,3.43,4.49,3.5
     7,3.20,1.53,3.53,3.53,1.27,3.40,4.53,2.21,3.28,3.50,2.01,3.30,1.86];
      Mmin = min(X)
      Mmax = max(X)
      R = Mmax - Mmin
      mu = getmu(X)
      Ssqr = getS(X)
      m = getNIntervals(size(X, 2))

      % graph1
      findIntervals(X, m)
      hold on;
      f(X, mu, Ssqr, mu, R);
      legend('bar chart', 'density function');
       hold off;


       % graph2
       figure;
       empericalF(sort(X));
       hold on;
       F(sort(X), mu, Ssqr, m, R);
       grid on;
       legend('empirical distribution function', 'distribution function');
       legend('Location', 'southeast')
       hold off;


       function mu = getmu(X)
          mu = sum(X)/size(X,2);
       end


       function sigma = getSigmaSqr(X)
          tempMu = getmu(X);
```

```
    sigma = sum((X - tempMu) .* (X - tempMu))/size(X,2);
end


function Ssqr = getS(X)
    n = size(X,2);
    Ssqr = n / (n - 1) * getSigmaSqr(X);
end


function m = getNIntervals(size)
    m = floor(log2(size)) + 2;
end


function findIntervals(X, m)
    sortX = sort(X);
    n = size(sortX,2);
    delta = (sortX(end) - sortX(1)) / m;
    J = sortX(1):delta:sortX(end)
    nEl = zeros(1, m);


    for i = 1:n
        for j = 1:(size(J,2) - 1)
            if (sortX(i) >= J(j) && sortX(i) < J(j+1))
                nEl(j) = nEl(j) + 1;
                break;
            end
        end
    end
    nEl(end) = nEl(end) + 1


    for i = 1:size(nEl,2)
        nEl(i) = nEl(i)/(n * delta);
    end
    J = [J(1) J];
    nEl = [0 nEl 0];
    stairs(J, nEl), grid;
end


function f(X, MX, DX, m, R)
    delta = R/m;
    sigma = sqrt(DX);


    Xn = min(X):delta/20:max(X);
    Y = normpdf(Xn, MX, sigma);
    plot(Xn, Y, '-.');
end


function empericalF(X)
    [yy, xx] = ecdf(X);
    stairs(xx, yy);
end
```

```
        function F(X, MX, DX, m, R)
            delta = R/m;
            Xn = min(X):delta/20:max(X);
            Y = 1/2 * (1 + erf((Xn - MX) / sqrt(2*DX)));
            plot(Xn, Y, '--');
        end
end
```

5. Результаты расчетов

a)

$M_{min} = 0.0900$

$M_{max} = 5.4700$

b)

$R = 5.3800$

c)

$\hat{\mu} = 3.0554$

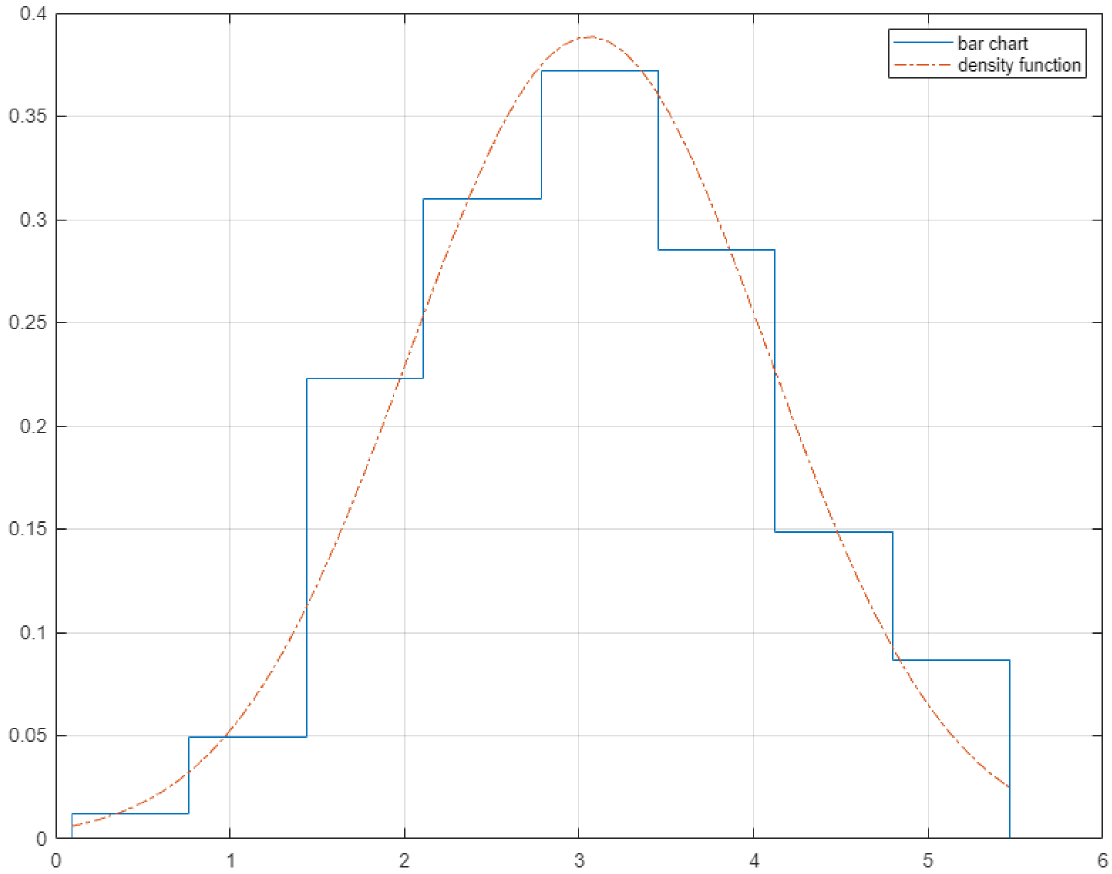
$S^2 = 1.0548$

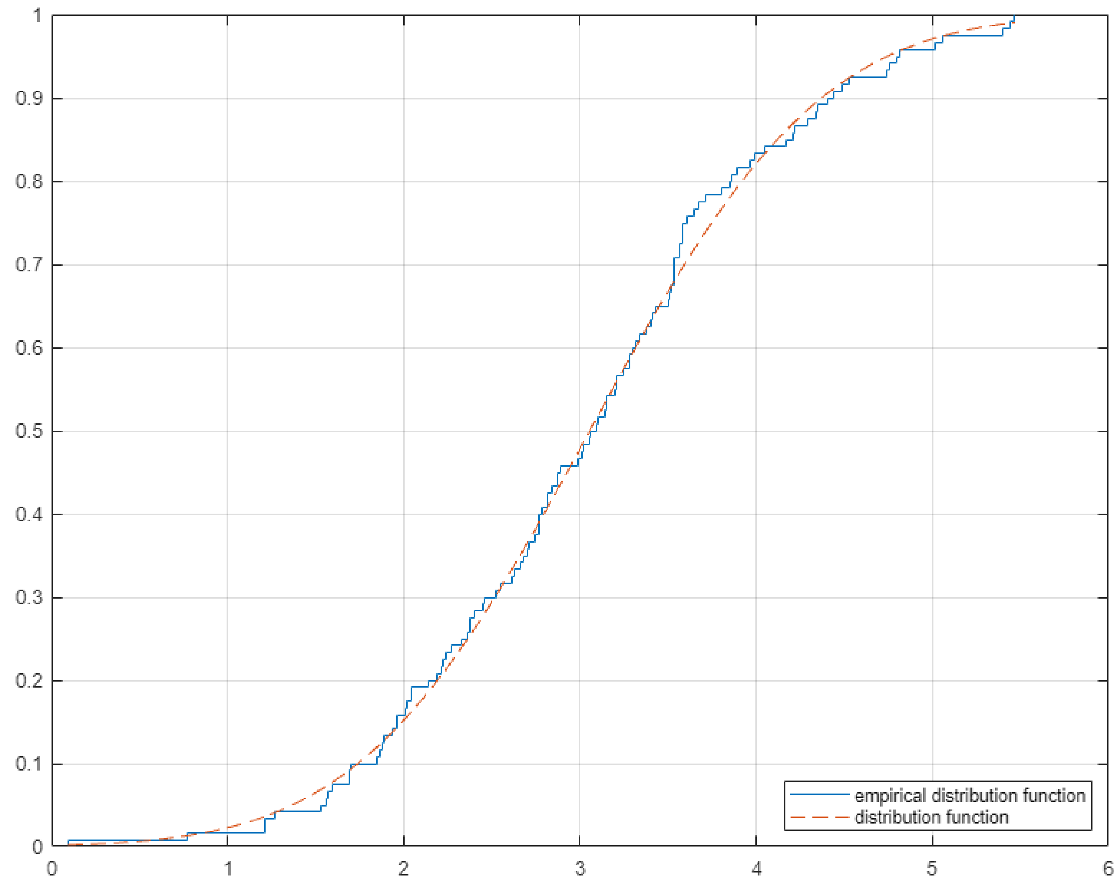
d)

$m = 8$

$J = 0.0900 \quad 0.7625 \quad 1.4350 \quad 2.1075 \quad 2.7800 \quad 3.4525 \quad 4.1250 \quad 4.7975 \quad 5.4700$

$nEl = \quad 1 \quad 4 \quad 18 \quad 25 \quad 30 \quad 23 \quad 12 \quad 7$


bar chart
density function


empirical distribution function
distribution function