

<b>Инфо</b>	3
<b>Контрольный минимум</b>	4
<b>Вопросы dead'a :</b>	4
<b>1. Закон Кулона. Напряженность электростатического поля. Принцип суперпозиции.</b>	7
<b>2. Теорема Гаусса в пустоте.</b>	10
<b>3. Потенциал электростатического поля. Связь напряженности и потенциала. (Тут у Васильева опечатка)</b>	13
<b>4. Потенциал электростатического поля. Физический смысл потенциала электростатического поля. Потенциальная энергия заряженного тела.</b>	14
<b>5. Два фундаментальных свойства электростатического поля в пустоте.</b>	15
<b>6. Условие равновесного распределения зарядов на примере заряженного проводника. (в конспектах не нашел)</b>	16
<b>7. Уравнения Лапласа и Пуассона. Краевая (граничная) задача электростатики.</b>	17
<b>8. Поле, созданное точечным диполем.</b>	18
<b>9. Электростатическое поле в диэлектрике. Вектор электрической поляризации. Связь электрических векторов.</b>	20
<b>10. Связь вектора электрической поляризации с объемной и поверхностной плотностями связанного заряда.</b>	21
<b>11. Теорема Гаусса при наличии диэлектрика.</b>	22
<b>12. Энергия электрического поля. Конденсаторы.</b>	23
<b>13. Теорема Томсона в электростатике.</b>	25
<b>14. Постоянный электрический ток. Основные дифференциальные законы постоянного тока.</b>	27
<b>15. Постоянный электрический ток. Интегральные законы постоянного тока. Понятие ЭДС источника тока.</b>	27
<b>16. Теория Друде Лоренца электрического тока в металлах.</b>	30
<b>17. Закон Ампера. Понятие магнитного поля, индукция магнитного поля. Закон Био-Савара.</b>	32
<b>18. Векторный магнитный потенциал. Связь индукции магнитного поля с векторным магнитным потенциалом.</b>	35
<b>19. Свойство векторного магнитного потенциала</b>	36
<b>20. Теорема Стокса в пустоте в интегральной и дифференциальной формах.</b>	38
<b>21. Магнитное поле в веществе. Вектор намагниченности. Связь вектора намагниченности с напряженностью магнитного поля.</b>	39

<b>22. Теорема о связи вектора намагниченности и молекулярных токов намагниченности.</b>	40
<b>23. Теорема Стокса при наличии магнетика.</b>	41
<b>24. Два фундаментальных свойства магнитостатического поля.</b>	42
<b>25. Энергия магнитного поля. Объемная плотность энергии магнитного поля.</b>	44
<b>26. Закон электромагнитной индукции Фарадея. Первый фундаментальный закон Максвелла. Правило Ленца.</b>	47
<b>27. Закон электромагнитной индукции Фарадея. Возникновение ЭДС индукции при движении проводников в магнитном поле.</b>	48
<b>28. Уравнение непрерывности для электрического тока.</b>	52
<b>29. Второй фундаментальный закон Максвелла. Переменное электрическое поле. Ток смещения.</b>	54
<b>30. Уравнения Максвелла и материальные соотношения.</b>	56
<b>31. Теорема Пойнтинга для электромагнитного поля.</b>	58
<b>32. Релаксация электрического заряда в проводниках. Время релаксации.</b>	60
<b>33. Уравнения Максвелла в пустоте. Вывод волнового уравнения, скорость распространения электромагнитных волн.</b>	61
<b>34. Распространение сгустка Хевисайда в идеальном диэлектрике. Связь между напряженностями электрического и магнитного полей. Скорость распространения сгустка.</b>	62
<b>35. Уравнения Максвелла и электромагнитные волны. Доказательство поперечности электромагнитных волн.</b>	67
<b>36. Интерференция света. Опыт Юнга.</b>	67
<b>37. Дифракция света. Метод зон Френеля.</b>	71
<b>38. Дифракция света на круглом отверстии и непрозрачном диске.</b>	74
<b>39. Дифракция Фраунгофера. Условия минимумов и максимумов при дифракции Фраунгофера.</b>	79
<b>40. Нормальное падение электромагнитной волны на границу раздела двух сред.</b>	81
<b>41/42. Формулы Френеля. Вывод формулы для р-волны. Формула тангенсов. Угол Брюстера для р-волны.</b>	84

**Наше дело правое, поэтому мы обязательно проиграем  
Экзамен для всех и каждого, и пусть никто не уйдет обиженным**

**Васильев Николай Сергеевич <3  
Подгузов Геннадий Васильевич бок  
Терезанова Ксения Васильевна <3**

Инфо

Ссылка на сайт Васильева: [bmstu.ru/~vasilev\\_ns/](http://bmstu.ru/~vasilev_ns/) <http://hoster>

Конспекты лекций: [http://hoster.bmstu.ru/~vasilev\\_ns/output.pdf](http://hoster.bmstu.ru/~vasilev_ns/output.pdf)

## Не наша теория

Еще теория

Лекции Семиколенова

## Таня(winterpuma, T)

Коля(К, КК, ККК, алтер, бух): 2 - 10<sup>объ</sup>

Настёна(Н): 11-15

Явлюхин(Я): 17-20

Фарис(П): 16 27-29 37-38

Марго(М): 32-34, 40-42

Марго(М): 32-34, 40-42  
Сергей(Г): 21-26

Борис(1).21-23

WHY ARE YOU SO RUDE???, IN PROGRESS, SOMETHING WRONG , ASK VASILYEV  
в 38 про непрозрачный диск - разобрались или нет?? кто шарит?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ТОМ	К	КК	ККК	КК	К	К	бух	бух	бух	Н	Н	Н	Н	Н

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
П	Я	Я	Я	Я	Г	Г	Г	Г	Г	Г	П	П	П	Т

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
T	M	M	M	T	T	Π	Π	T	M	M

## Контрольный минимум

Ты судорожно открываешь файлик вечером 13 числа?????? ТОГДА ЭТОТ РАЗДЕЛ ДЛЯ ТЕБЯ!!!!!!!!!!!!)))))00)))) **шучу он в любом случае для тебя FUNNY!!! LOL** почему у меня ощущение что тут побывал

Если у вас в билете или в задаче присутствует ЭМВ (электромагнитная волна), то

сразу первым делом пишите эту формулу:  $\sqrt{\epsilon\epsilon_0}E = \sqrt{\mu\mu_0}H$

$$\nabla\varphi = \text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi_i}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_j}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_k}{\partial z}$$

физ. смысл дивергенции:

$$(\nabla, \vec{a}) = \text{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$\text{div}\mathbf{A}>0$  - является источником

$$[\nabla, \vec{a}] = \text{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

$\text{div}\mathbf{A}=0$  - сколько линий входят столько и исходят

$\text{div}\mathbf{A}<0$  - больше линий входят, чем выходят

Физ. смысл ротора - завихрение

## Уравнения Максвелла

$$\text{div}\vec{D} = \rho$$

$$\iint_s (\vec{D}, d\vec{S}) = q_\Sigma$$

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\oint_\Gamma (\vec{E}, d\vec{l}) = -\frac{d}{dt} \iint_s (\vec{B}, d\vec{S})$$

$$\text{div}\vec{B} = 0$$

$$\iint_s (\vec{B}, d\vec{S}) = 0$$

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\oint_\Gamma (\vec{H}, d\vec{l}) = I_\Sigma + \frac{d}{dt} \iint_s (\vec{D}, d\vec{S})$$

$\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}$ , - дифференциальный закон Ома

$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$ , - не знаю как это называется но это связь всех характеристик электрического поля

$\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{J})$  - а это магнитного, J - намагниченность, у Васильева она обычно обозначается как M

$\text{div}(\vec{j}) = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$  - дифференциальная форма уравнения непрерывности

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \quad E_{1t} = E_{2t}$$

$$B_{2n} = B_{1n}, \quad H_{2t} - H_{1t} = i$$

**Зона Френеля** - область на фронте волны

## Вопросы dead'a :

В чём измеряется та или иная величина

Основная она или производная

**Основные единицы (7 шт):**

**Метр(м)** - длина, **Килограмм(кг)** - масса, **Секунда(с)** - время, **Ампер(а)** - сила электрического тока, **Кельвин(К)** - термодинамическая температура, **Моль(моль)** - количество вещества, **Кандела(кд)** - сила света.

**Размерность пси функции(безразмерная):**

Волновая функция  $\Psi$  является основной характеристикой состояния микрообъектов. Является коэффициентом разложения вектора состояния по базису (обычно координатному):

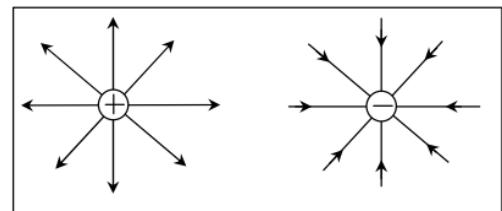
**Один Ампер** - это такая сила, которая возникает при прохождении неизменяющегося тока по двум бесконечно длинным, бесконечно тонким параллельным проводникам, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м друг от друга, равная  $2 \cdot 10^{-7}$  ньютонов на каждый метр длины.

Что такое **дифракция** - это явление нарушения законов геометрической оптики при прохождении света вблизи резкой оптической неоднородности. Следующий вопрос - что такое резкая оптическая неоднородность. Ответ неизвестен. Это препятствие кококето. В общем дифракция - это когда волна обходит препятствие.

Что такое **дисперсия** - альбом dark side of the moon pink floyd // зависимость абсолютного показателя преломления вещества от частоты света

Что такое **интерференция** - это явление перераспределения интенсивности света при наложении когерентных волн.

Следующий вопрос - в чем измеряется интенсивность света.  $[I] = [W/m^2]$  (ватт на метры квадратные)



**Силовой линией** электрического поля называется линия в пространстве, касательная к которой в каждой точке к которой совпадает с направлением вектора  $E$  (напряженности электрического поля). Магнитное поле тоже можно изображать силовыми линиями, только они у него замкнуты.

3 свойства силовых линий:

Силовые линии электрического поля направлены от положительного заряда к отрицательному.

Силовые линии не пересекаются.

По силовым линиям можно определить характер электрического поля.

Законы геометрической оптики (3 штуки)

- Закон прямолинейного распространения света:** В оптически однородной среде свет распространяется прямолинейно.
- Закон отражения света:** падающий и отраженный лучи, а также перпендикуляр к границе раздела двух сред, восстановленный в точке падения луча, лежат в одной плоскости. Угол отражения γ равен углу падения α.
- Закон преломления света:** падающий и преломленный лучи, а также перпендикуляр к границе раздела двух сред, восстановленный в точке падения луча, лежат в одной плоскости.

Что такое **1 моль** - количество вещества, в котором содержится число Авогадро молекул (примерно  $6 \cdot 10^{23}$ )(не определение).

Определение

Моль — количество вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько содержится атомов в углероде-12 массой 0,012 кг.

Не садитесь, закинув ногу на ногу!!!

Никакой яркой одежды, одежды с надписями или чего-то вызывающего.  
Волосы не распускать.

Пацаны, кто помнит что за песенка/стишок про платье? Думаю, если выучу, то это сразу 5.

Песенка про капитана обязательна!

???

### Для большей ясности

- **Линейная**  
плотность заряда:  

$$\tau = \frac{dq}{dl}, \left[ \frac{Кл}{м} \right]$$

заряд, приходящийся на единицу длины.

- **Поверхностная**  
плотность заряда:  

$$\sigma = \frac{dq}{dS}, \left[ \frac{Кл}{м^2} \right]$$

заряд, приходящийся на единицу площади.

- **Объемная**  
плотность заряда:  

$$\rho = \frac{dq}{dV}, \left[ \frac{Кл}{м^3} \right]$$

заряд, приходящийся на единицу объема.

## 1. Закон Кулона. Напряженность электростатического поля. Принцип суперпозиции.

Закон Кулона:  $|\vec{F}| = K \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$

Принцип суперпозиции:  $\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r})$

**Закон Кулона** гласит: «Два электрически заряженных тела действуют друг на друга силами направленными вдоль линии соединяющих эти тела прямо пропорциональны произведению этих зарядов и обратно пропорциональны квадрату расстояния между ними». Закон справедлив для материальных точек.

Для вакуума закон записывается следующим образом:

$$|\vec{F}_{AB}| = |\vec{F}_{BA}| = K \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

Для записи формул в дальнейшем будет использоваться система единиц СИ. В ней справедливо следующее:

$$[Q] = \text{Кл}, \quad K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \quad \text{где } \varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}$$

где  $\varepsilon_0$  – **электрическая постоянная**

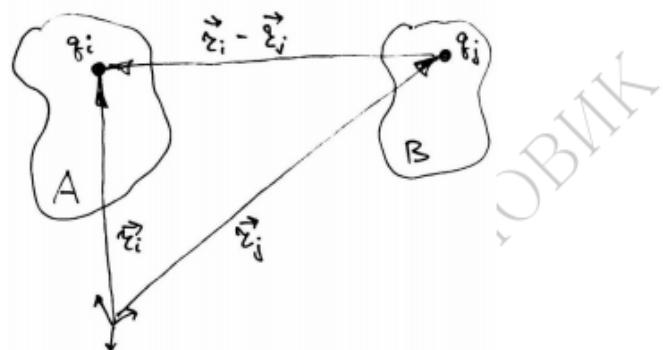
Если взаимодействующие тела погружены в некоторую среду, то тогда закон Кулона записывается так:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

Часть

**Принцип суперпозиции:** взаимодействие любых двух выбранных зарядов не зависит от других тел

Рассмотрим два протяжённых заряженных тела  $A$  и  $B$ , нас интересует с какой силой одно тело действует на другое.



Разобьём два тела на бесконечно малые объёмы, т.е. точки. По закону Кулона мы можем рассчитать силу взаимодействия любой пары:

$$\vec{F}_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

а из принципа суперпозиции результирующая сила исчерпывается следующей суммой:

$$\vec{F}_{AB} = \sum_j \vec{F}_i = \sum_{i,j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}}, \quad (1)$$

где  $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$

Заряд по телу может быть распределён не равномерно. Используется в вычислениях объёмный заряд:  $\left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}\right]$ , поверхностный заряд:  $\left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}\right]$ , линейный заряд:  $\left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}}\right]$  и точечный заряд.

Или

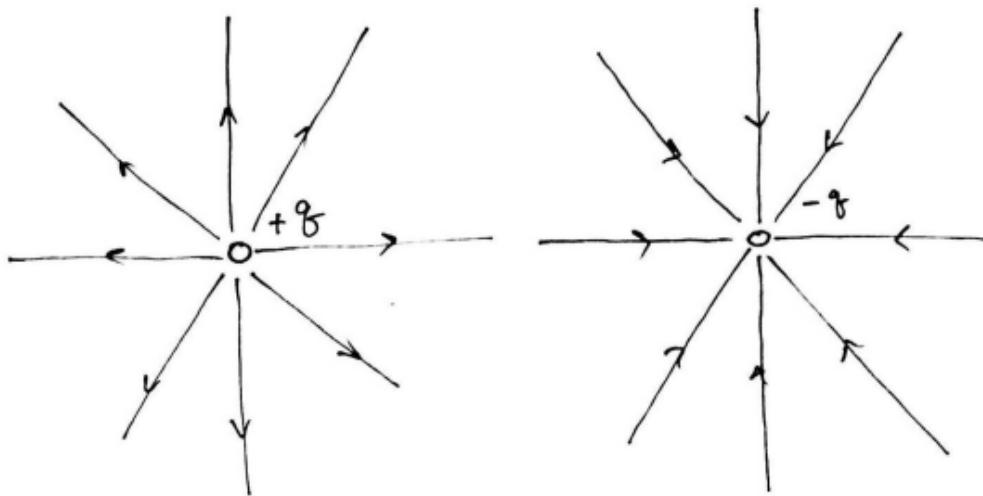
$$\vec{F}_{AB} = \sum_i q_i \vec{E}(\vec{r}_i)$$

**Вектор напряженности электрического поля:**

$$\vec{E}(\vec{r}_i) = \sum_j \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}},$$

Графически интенсивность электрического поля характеризуется **сило-выми линиями** – это линии, касательные в каждой точке к векторам напряжённости с указанием направления этих векторов.

Для точечного тела силовые линии выглядят как лучи, при этом для «+» заряда эти лучи выходят из точки, а для «-» заряда сходятся в точку.



Принцип суперпозиции может быть переформулирован и для электрического поля: «Напряжённость электрического поля, созданного системой зарядов равно векторной сумме напряжённостей электрического поля каждого заряда в отдельности».

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r})$$

## 2. Теорема Гаусса в пустоте.

вектор **электрической индукции**, для пустоты он определяется так:

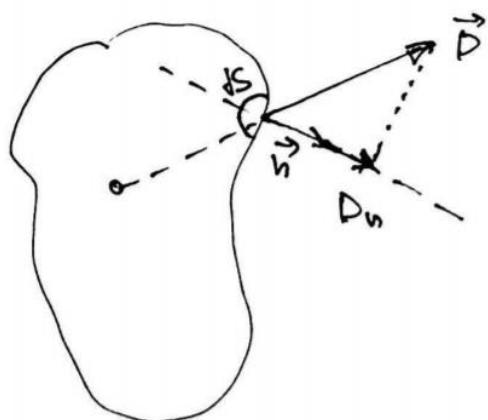
$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r})$$

поля электрической индукции  $\vec{D}$ . **Элементарным потоком** поля  $\vec{D}$  через б.м. площадку  $dS$  в направлении нормали  $\vec{n}$  называется скалярная величина:

$$d\Phi_D = D_n dS$$

**Полным потоком** называется величина, равная интегралу по всей поверхности  $S$ :

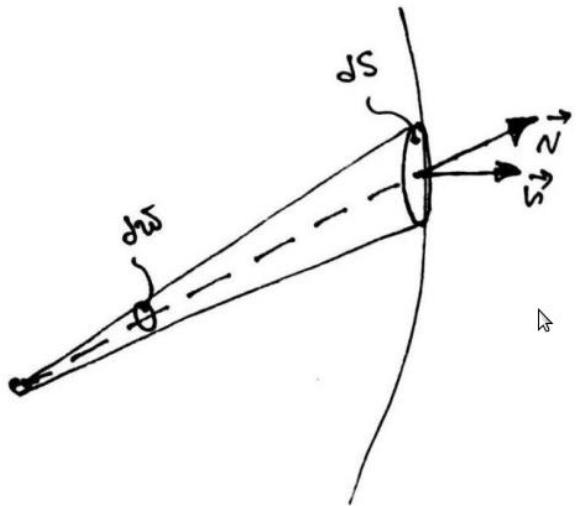
$$\Phi_D = \oint_{\Phi} d\Phi = \oint_S D_n dS$$



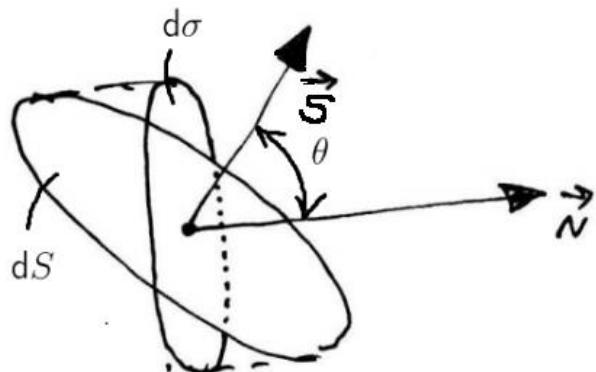
**Теорема Гаусса для пустоты**: Поток вектора электрической индукции через любую замкнутую поверхность наружу этой поверхности равен суммарному заряду внутри этой поверхности.

*Доказательство :*

Рассчитаем поток вектора эл. индукции, создаваемого точечным зарядом через произвольную замкнутую поверхность, содержащую этот заряд:



$d\omega$  – телесный угол, измеряется в стерадианах



По свойству телесного угла имеем:  $d\sigma = (OP)^2 d\omega$

Из стереометрии известно:  $d\sigma = \cos \theta dS$

Из введённых определений  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  для точечного заряда следует:

$$\Downarrow \quad D = \frac{q}{4\pi(OP)^2}$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} d\Phi_D &= \frac{q}{4\pi(OP^2)} \cos \theta dS = \frac{q}{4\pi(OP)^2} d\sigma = \\ &= \frac{q}{4\pi(OP)^2} (OP)^2 d\omega = \frac{q}{4\pi} d\omega \\ \Phi_D &= \oint_{\Phi} d\Phi = \frac{q}{4\pi} \int_0^{4\pi} d\omega = \frac{q}{4\pi} 4\pi = q \end{aligned}$$

Если внутри поверхности произвольное количество зарядов, то с использованием принципа суперпозиции получим, что:

$$\Phi_D = \Phi_{D1} + \Phi_{D2} + \Phi_{D3} + \dots = q_1 + q_2 + q_3 + \dots$$

На этом доказательство закончено.

---

### 3. Потенциал электростатического поля. Связь напряженности и потенциала. (Тут у Васильева опечатка)

Введём новую величину: скалярный электрический потенциал или просто **потенциал электрического поля**, рассчитываемую по формуле:

$$\varphi = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i},$$

Векторное поле  $\vec{E}$  однозначно восстанавливается по скалярному  $\varphi$ :

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

и

+

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = \\ &= - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right) = - \operatorname{grad} \varphi \\ \vec{E}(\vec{r}) &= - \operatorname{grad} \varphi(\vec{r}) \end{aligned}$$

#### 4. Потенциал электростатического поля. Физический смысл потенциала электростатического поля. Потенциальная энергия заряженного тела.

Введём новую величину: скалярный электрический потенциал или просто **потенциал электрического поля**, рассчитываемую по формуле:

$$\varphi = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i},$$

---

$$E_l = -(\text{grad}\varphi)_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l}$$

---

$$\delta A = (\vec{F}, d\vec{l}) = -(\vec{F}_{\text{эл}}, d\vec{l}) = -F_{\text{эл}} l dl$$

$$A_{NM} = - \int_{l(N)}^{l(M)} F_{\text{эл}} l dl = q \int_{l(N)}^{l(M)} \frac{\partial\varphi}{\partial l} dl =$$
$$= q \int_{\varphi(N)}^{\varphi(M)} d\varphi = q(\varphi(M) - \varphi(N))$$

$A = q(\varphi_N - \varphi_M)$

Физический смысл потенциала следующий. Если начальную точку  $N$  взять на бесконечности, где нет электрического поля и  $\varphi_\infty = 0$ , значит тогда:

$$A_M = q\varphi_M$$

Значит: «Потенциал электростатического поля в данной точке равен работе по перемещению единичного положительного заряда из бесконечности в данную точку поля квазиравновесным способом». Т.к. эта работа

не зависит от траектории, то мы можем ввести потенциальную энергию данного электрического заряда, т.е.:

$$W_M = q\varphi_M, \quad \boxed{W(\vec{r}) = q\varphi(\vec{r})}$$

$$4\pi\varepsilon_0 r_{ij}$$

Тогда полная потенциальная энергия рассматриваемого тела равна:

$$W = \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$

## **5. Два фундаментальных свойства электростатического поля в пустоте.**

### **2.3.1 Свойство 1**

Свойство касается замкнутой траектории. Свойство состоит в следующем: «Интеграл от касательной составляющей напряжённостей электрического поля по любой замкнутой траектории равно нулю».

$$\oint_{\gamma} (\vec{E}, d\vec{l}) = \oint_{\gamma} E_t dl = 0$$

Существует более общее утверждение о том, что если для какого либо поля выполнено свойство 1, то для такого поля справедливо:  $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ , т.е. поле потенциально.

---

### **2.3.2 Свойство 2**

Свойство касается замкнутой поверхности. Свойство состоит в следующем: «Поток вектора электрической индукции через любую замкнутую поверхность наружу этой поверхности равен полному заряду находящемуся внутри этой поверхности».

$$\iint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = \iint_S D_n dS = Q$$

В этих двух формулах содержится вся информация о свойствах электростатического поля. Любое другое свойство есть следствие этих двух.

## 6. Условие равновесного распределения зарядов на примере заряженного проводника. (в конспектах не нашел)

- 1) Напряженность поля всюду внутри проводника должна быть равна нулю  $\vec{E}=0$ . В соответствии с уравнением  $\vec{E} = -\text{grad} \varphi$  это означает, что потенциал внутри проводника должен быть постоянным, т.е.  $\varphi = \text{const}$ .

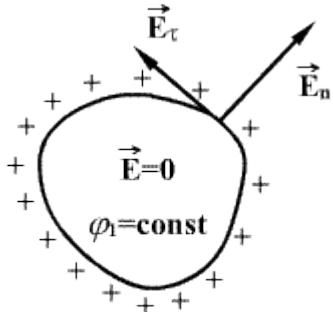


рис. 15.1

- 2) Напряженность поля на поверхности проводника должна быть в каждой точке направлена по нормали к поверхности  $\vec{E} = E_n$  в противном случае появляется составляющая  $E_c$  направлена вдоль поверхности, что будет приводить к перемещению зарядов до тех пор пока не пропадет составляющая  $\vec{E}_c$ .

Согласно теореме Гаусса алгебраическая сумма зарядов внутри поверхности также будет равна нулю.

Следовательно, при равновесии ни в каком месте внутри проводника не может быть избыточных зарядов - все они расположены на поверхности проводника с некоторой плотностью  $\sigma$ . Т.к. в состоянии равновесия внутри проводника избыточных зарядов нет, удаление вещества из некоторого объема, взятого внутри проводника, никак не отразится на равновесном расположении зарядов. Таким образом, избыточный заряд распределяется на полом проводнике так же, как и на сплошном, т.е. по его наружной поверхности. На поверхности полости в состоянии равновесия избыточные заряды располагаться не могут.

## 7. Уравнения Лапласа и Пуассона. Краевая (границная) задача

$$\operatorname{div} \vec{D} = -\varepsilon_0 \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\varepsilon_0 \nabla^2 \varphi = \rho$$

Следовательно дифференциальное уравнение для электростатического потенциала:

$$\boxed{\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Это и есть **уравнение Пуассона**.

Частным случаем уравнения Пуассона является уравнение Лапласа. Для тех областей пространства где электрического заряда нет, т.е.  $\rho = 0$ , получаем:

$$\boxed{\nabla^2 \varphi = 0}$$

Это и есть **уравнение Лапласа**.

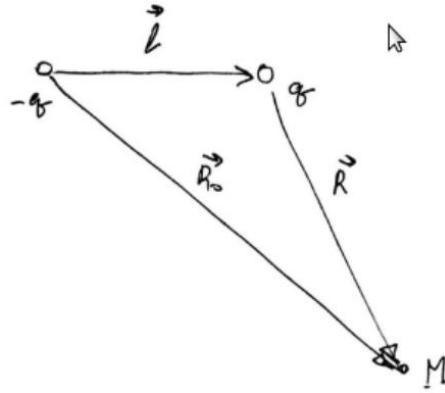
---

**Краевая задача** — задача о нахождении решения заданного дифференциального уравнения, удовлетворяющего краевым (граничным) условиям в концах интервала или на границе области.

Но уравнение Лапласа одинаково для любого поля в пустоте, а решение получается своё для каждого конкретного случая? Дело в том, что само дифференциальное уравнение в частных производных описывает слишком широких круг решений, т.е. тех функций которые только «могут» быть полем. Для выяснения вида электростатического потенциала в каждом конкретном случае нужно применить так называемые **граничные условия**. Это дополнительные соотношения, связывающие исходную функцию с известной функцией на границе той области, где ищется решение. Звучит сложно, но мы уже применяли граничные условия когда когда утверждали, что на бесконечности (границе области) поля нет (функция  $\varphi(\infty) = 0$ , где ноль тоже функция).

## 8. Поле, созданное точечным диполем.

Ниже будет рассмотрена на первый взгляд искусственная система: диполь . Для этой системы мы определим вид потенциала электростатического поля, которое она создает. В последствии мы увидим, что с помощью полученных результатов для этой системы возможно описание поля в диэлектрике. Пусть у нас есть два точечных заряда  $q$  и  $-q$ , которые находятся на расстоянии  $l$  друг от друга. Направим вектор  $\vec{l}$  от  $-q$  до  $q$ .



Вектор равный произведению  $| \vec{l} |$  на величину заряда назовём дипольным моментом:  
 $\vec{p} := q\vec{l}$

Нас будет интересовать поле на расстояниях:  $R \gg l$ . Рассмотрим суммарный потенциал поля:

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_0} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

ниже после скалярного произведения  $(R_0)^2$ , а не  $R_0$

т.к.:  $\vec{R} = \vec{R}_0 - \vec{l}$ , то:

$$R^2 = (\vec{R}_0 - \vec{l}, \vec{R}_0 - \vec{l}) = R_0^2 - 2l(\vec{l}, \vec{R}_0) + l^2 \simeq R_0^2 - 2(\vec{l}, \vec{R}_0)$$

$$R^2 = R_0^2 \left( 1 - \frac{2(\vec{l}, \vec{R}_0)}{R_0^2} \right)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0 \sqrt{1 - \frac{2(\vec{l}, \vec{R}_0)}{R_0^2}}} \simeq \frac{1}{R_0} \left( 1 + \frac{(\vec{l}, \vec{R}_0)}{R_0^2} \right)$$

В последнем равенстве было использовано разложение в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1^{-\frac{1}{2}} + \left( -\frac{1}{2} \right) (1-x)^{-\frac{3}{2}} (-1) \Big|_{x=0} \cdot x + o(x)$$

Таким образом, получаем:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0} + \frac{(\vec{l}, \vec{R}_0)}{R_0^3}$$

Потенциал:

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_0} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_0} + \frac{q(\vec{l}, \vec{R}_0)}{4\pi\epsilon_0 R_0^3}$$

$$\varphi = \frac{(\vec{p}, \vec{R}_0)}{4\pi\epsilon_0 R_0^3}$$

Напряженность:

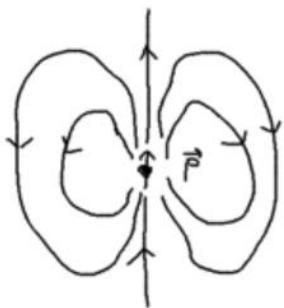
$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \operatorname{grad} \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{r^3}$$

$$\operatorname{grad} \left( \frac{1}{r^3} \right) = -\frac{3}{r^4} \operatorname{grad} r = -\frac{3\vec{r}}{r^5}$$

$$\operatorname{grad}((\vec{p}, \vec{r})) = \vec{p}, \quad \text{поэтому}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{p}}{r^3} - \frac{3(\vec{p}, \vec{r})\vec{r}}{r^5} \right)}$$

Силовые линии:



Выше было определено поле, создаваемое двумя близкими точечными зарядами. Имеет место следующий экспериментальный факт: «Все молекулы у которых есть ионная связь являются диполями».

## 9. Электростатическое поле в диэлектрике. Вектор электрической поляризации. Связь электрических векторов.

Электроны в веществе бывают двух типов – это так называемые **свободные** электроны, которые свободно перемещаются по объёму тела, как, например, в металлах и полупроводниках. Второй тип – **связанные** электроны, которые могут смещаться только внутри атомов и молекул. Такие электроны имеются в большинстве веществ.

При феноменологическом подходе в электростатике поляризованность диэлектрика описывается полем. Поле **электрической поляризации** – это поле векторов в каждой точке равных объёмной плотности суммарного дипольного момента вещества, т.е.:

$$\vec{P} := \frac{\sum_{i=1}^N \vec{p}_i}{\Delta V},$$

Электрическая поляризация может быть спонтанной, т.е. когда существует в диэлектрике без наличия внешнего электрического поля. Будем обозначать такую поляризацию  $\vec{P}_0$ . В диэлектрике под действием внешнего электрического поля возникает индуцированное поле электрической поляризации, обозначим его за  $\vec{P}_{\text{инд.}}$ .

$$\vec{P} = \vec{P}_0 + \vec{P}_{\text{инд.}}$$

Теперь если ввести удобный для дальнейших выкладок коэффициент пропорциональности, то получим:

$$\vec{P}_{\text{инд.}} = (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 \vec{E},$$

где число  $\varepsilon$  – называется **диэлектрической проницаемостью** среды. Это безразмерная величина.

$$\vec{P}(\vec{r}) = \vec{P}_{\text{инд.}}(\vec{r}) + (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r})$$

Выше первое слагаемое Ро, будьте осторожны, берегите себя и своих близких.

$$\vec{D}(\vec{r}) := \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})$$

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_0 + (\epsilon - 1) \epsilon_0 \vec{E} = \vec{P}_0 + \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$$

Если сузить рассматриваемые диэлектрики до «простых», в которых  $\vec{P}_0 = 0$ , то получим:

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}}$$

## 10. Связь вектора электрической поляризации с объемной и поверхностной плотностями связанного заряда.

Когда мы говорим об электростатическом поле, то всегда говорим об источниках этого поля. Оказывается, что для поля электрической поляризации тоже можно указать источники, их называют **связанными зарядами**. Для связанных зарядов используется обозначение:  $\sigma_{\text{св}}$  для поверхностного заряда и  $\rho_{\text{св}}$  для объёмного заряда. По своей сути связанные заряды это тоже заряды, однако возникли они за счёт внутренних микропроцессов реакции диэлектрика на внешнее приложенное поле.

Связь между векторами электрической поляризации и связанными зарядами раскрывают следующие две формулы, которые мы докажем:

$$\boxed{\rho_{\text{св}} = - \operatorname{div} \vec{P}}$$

$$\boxed{\sigma_{\text{св}} = P_n}$$

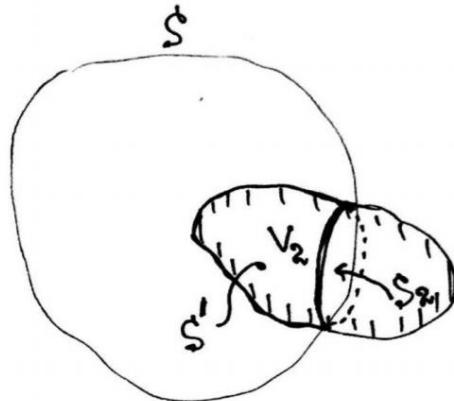
Где  $n$  – внешняя нормаль к диэлектрику.

---

## 11. Теорема Гаусса при наличии диэлектрика.

Запишем теорему Гаусса в пустоте, но теперь включим в суммарный заряд ещё и связанный заряд:

$$\iint_S d\varepsilon_0 E_n S = Q + Q_{\text{cb}}$$



Для простоты, не ограничивая общности, будем рассматривать один диэлектрик. Рассчитаем величину связанного заряда, попавшего в внутрь поверхности  $S$ :

$$Q_{\text{cb}} = \int_{S'} \sigma_{\text{cb}} dS + \iiint_{V_2} \rho_{\text{cb}} dV = \iint_{S'} P_n dS - \iiint_{V_2} \operatorname{div} \vec{P} dV$$

Применим теорему Остроградского-Гаусса:

$$\iiint_{V_2} \operatorname{div} \vec{P} dV = \iint_{S'} P_n dS + \iint_{S_2} P_n dS, \text{ тогда}$$

$$Q_{\text{cb}} = - \iint_{S_2} P_n dS$$

Нас интересует поверхностный интеграл по всей поверхности  $S$ , но на ней  $P_n = 0$ ,  $\notin S_2$ , значит:

$$Q_{\text{cb}} = - \iint_S P_n dS$$

Теперь подставим полученную формулу для связанного заряда в первоначальную формулу:

$$\oint_S \varepsilon_0 E_n dS = Q - \oint_S P_n dS = 0$$

$$\oint_S \varepsilon_0 E_n + P_n dS \Rightarrow$$

$$\oint_S D_n dS = Q$$

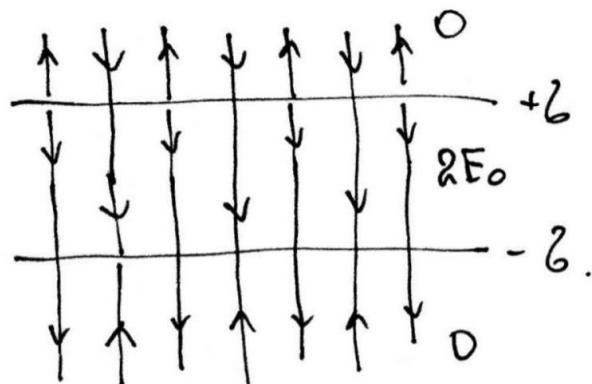
Эта формула и есть содержание теоремы Гаусса для диэлектрика.

## 12. Энергия электрического поля. Конденсаторы.

**Конденсатор** – это такая система проводников емкость которых не зависит от наличия других тел. Для уединенного проводника емкость это величина, равная отношению заряда к потенциалу этого проводника. **Емкость конденсатора** – это величина, равная отношению заряда к разности потенциалов его пластин. В случае плоского конденсатора, состоящего из параллельных проводящих пластин, создаваемое им поле есть только между пластинами, а вне их оно равно нулю.

Междуд пластинами напряженность поля рассчитывается по формуле:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \epsilon}$$



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \epsilon} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0 \epsilon S} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \epsilon S}$$

Т.к. пластина сама на себя не действует (а вернее внутренние силы скомпенсированы), то в расчёт берётся только поле созданное другой пластиной, оно равно:

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{E}{2},$$

Тогда:

$$F_i = \sigma dS \frac{E}{2}, \quad F = \frac{E}{2} \sigma S = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}$$

и суммарная сумма равна:

Пусть одна из пластин передвинулась на малое расстояние, рассчитаем совершенную при этом б. м. работу:

$$\delta A = F dl = \frac{Q}{2\varepsilon_0\varepsilon S} dl$$

$$A_{12} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S} \Delta l$$

Работа перешла на изменение внутренней энергии электрического поля между обкладками конденсатора:

$$A_{12} = W_2 - W_1 = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S} (l_2 - l_1)$$

$$W = \frac{Q^2 l}{2\varepsilon_0\varepsilon S} \text{ или}$$

$$W = \frac{Q^2 \cdot \overbrace{S l}^V}{2\varepsilon_0\varepsilon S^2} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0\varepsilon} V = \underbrace{\frac{(\varepsilon_0\varepsilon E)^2}{2\varepsilon_0\varepsilon}}_{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}} V \Rightarrow$$

$$W = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} V,$$

Очередная опечатка(но конечная формула верна, просто можете пересчитать формулы с этой картинки)

т.к. электростатическое поле внутри конденсатора однородное, то его объемная плотность энергии может быть рассчитана по формуле:

$$\boxed{\omega = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}}$$

Если поле неоднородное, то в каждой б. м. области оно по прежнему однородное. Суммарная энергия такого поля может быть рассчитано по формуле:

$$W = \iiint_V \omega dV = \iiint_V \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} dV$$

### 13. Теорема Томсона в электростатике.

Содержание теоремы составляет следующее утверждение: «Энергия системы зарядов равна энергии ими созданного электростатического поля.»

Докажем это утверждение для уединенного заряженного проводника:

Пусть величина его заряда равна  $Q$ . Известно, что заряд такого проводника распределен по поверхности, а потенциал внутри одинаков. Разобьем проводник на малые части и рассчитаем суммарную энергию их взаимодействия:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_j q_j \sum_{i \neq j} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \dots \\ &\quad \sum_{i \neq j} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \varphi(r_j), \text{ то:} \\ &\quad \dots = \frac{1}{2} \sum_j q_j \varphi(r_j) = \frac{1}{2} \sum_j q_j \varphi = \frac{1}{2} \varphi \sum_j q_j = \frac{1}{2} Q \varphi \end{aligned}$$

Имеет место следующее соотношение:

$$W = \frac{1}{2} Q \varphi$$

Энергия заряженного проводника:

$$dQ = \sigma dS, \Rightarrow W = \frac{1}{2} \iint_S \sigma \varphi dS$$

Перепишем соотношение:

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

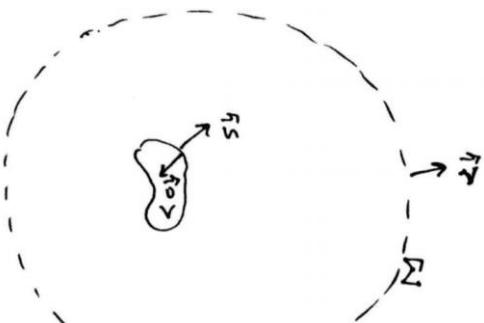
Напряженность поля вблизи поверхности проводника равно:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \iint_S \epsilon_0 E_n \varphi dS, \quad E_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} \\ W &= -\frac{1}{2} \iint_S \epsilon_0 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = -\frac{\epsilon_0}{2} \iint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \end{aligned}$$

Рассмотрим поле вне проводника. Нам понадобится I-ая формула Грина:

$$\operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \varphi) = \varphi \nabla^2 \varphi + (\operatorname{grad} \varphi)^2$$

Поле занимает всё бесконечное пространство, кроме объема самого проводника.



$$\iint_{S+\Sigma} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dS = \iiint_{\tilde{V}} \varphi \nabla^2 \varphi dV + \iiint_{\tilde{V}} (\operatorname{grad} \varphi)^2 dV$$

Часть поверхностного интеграла слева по  $\Sigma$  стремится к нулю с увеличением размера поверхности, т.к. поле на бесконечности равно нулю. Первый интеграл справа равен нулю, т.к. потенциал удовлетворяет уравнению

Лапласа:  $\nabla^2 \varphi = 0$ . В итоге имеем:  $\iint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dS = \iiint_{\tilde{V}} (\operatorname{grad} \varphi)^2 dV$

т.к.  $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = -\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ , то:

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \iiint_{\tilde{V}} (\operatorname{grad} \varphi)^2 dV \Rightarrow$$

$$W = \iiint_{V_\infty} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV = \iiint_{V_\infty} \omega dV$$

Величина  $\omega dV = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV$  – энергия электрического поля в объеме  $dV$ . Тем самым Томпсон указал связь между двумя взглядами на электростатическое взаимодействие: теорию дальнодействия в теорию близкодействия.

## 14. Постоянный электрический ток. Основные дифференциальные законы постоянного тока.

**Электрический ток** - направленное движение электрических зарядов.

**Постоянный электрический ток** - ток, который не меняется с течением времени.  
(измеряется в Амперах ес че)

**Сила тока** – это количество положительного заряда, пересекающего сечение проводника в единицу времени

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}, \quad [I] = \frac{\text{Кл}}{\text{с}}$$

**Плотность тока**  $j$  – это вектор, длина которого равна отношению заряда к площадке,

$$[j] = \frac{\text{А}}{\text{м}^2}$$

расположенной перпендикулярно движению зарядов, в единицу времени.

Плотность тока и ток связаны соотношением:

$$I = \iint_s j_n ds$$

Свойства плотности тока:

- 1) Дивергенция плотности тока в любой точке проводника равна нулю.
- 2) Так как ток не выходит наружу проводника, то нормальная составляющая плотности тока в любой точке поверхности равна нулю.

**Дифференциальный закон Ома:**

Экспериментально установлено, что для широкого диапазона напряженностей электрического поля, плотность тока пропорциональна напряженности электрического поля:

$$\vec{j} = \lambda \vec{E}^{(3)},$$

где  $\lambda$  – удельная проводимость , а вектор  $E$  (э) – напряжённость электрического поля Часто вводится другая величина:  $\rho = 1/\lambda$  – удельное сопротивление.

$$[\lambda] = \frac{\text{А}}{\text{В} \cdot \text{м}} = \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}, \quad [\rho] = \text{Ом} \cdot \text{м}$$

**Закон Джоуля-Ленца:**

(следует из теоремы Друде)

$$q = \lambda E^2$$

## 15. Постоянный электрический ток. Интегральные законы постоянного тока. Понятие ЭДС источника тока.

**Электрический ток** - направленное движение электрических зарядов.

**Постоянный электрический ток** - ток, который не меняется с течением времени.

Важной характеристикой тока является:

**Сила тока** – это количество положительного заряда, пересекающего сечение проводника в единицу времени

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}, \quad [I] = \frac{\text{Кл}}{\text{с}}$$

**Плотность тока  $j$**  – это вектор, длина которого равна отношению заряда к площадке, расположенной перпендикулярно движению зарядов, в единицу времени.

Плотность тока и ток связаны соотношением:

$$\nearrow [j] = \frac{A}{m^2} \quad I = \iint_s j_n ds$$

Свойства плотности тока:

1) Дивергенция плотности тока в любой точке проводника равна нулю

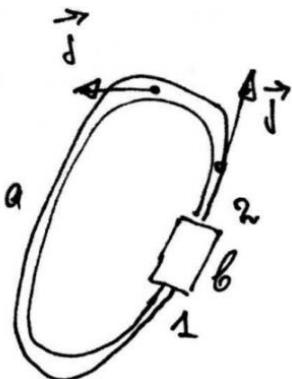
$$\operatorname{div} \vec{j} = 0$$

2) Так как ток не выходит наружу проводника, то нормальная составляющая плотности тока в любой точке поверхности равна нулю

**Интегральный закон Ома** - математическое выражение закона Ома для участка цепи.

$$U = IR$$

Источник тока вместе с проводником образуют замкнутый контур:



**Закон Ома для замкнутой цепи, ЭДС источника:**

( $\lambda$  – удельная проводимость, а вектор  $E$  ( $\vec{E}$ ) – напряжённость электрического поля

Часто вводится другая величина:  $\rho = 1/\lambda$  – удельное сопротивление .

Вектор  $E_{(ст)}$  – это поле сторонних сил неэлектрического происхождения (например, может быть химическая).)

Электродвижущая сила — скалярная физическая величина, характеризующая работу сторонних сил, то есть любых сил неэлектрического происхождения, действующих в цепях постоянного или переменного тока. Измеряется в вольтах блядь. [В]

В замкнутом проводящем контуре ЭДС равна работе этих сил по перемещению единичного положительного заряда вдоль всего контура.

$$\int_{1b2} E_l^{(ct)} dl = \mathcal{E}$$

- электродвижущая сила источника тока.

$$\int_{2a1} \frac{1}{\lambda S} dl = R$$

- сопротивление внешней цепи.

$$\underline{\int_{1b2}} \frac{1}{\lambda S} dl = r$$

- сопротивление источника тока (смотри картинку сверху).

Таким образом Закон Ома для замкнутой цепи:

$$I(R + r) = \mathcal{E}$$

Для разомкнутой цепи:

если цепь разомкнута, то тока нет

$$j = 0 = \lambda \left( E^{(s)} + E^{(ct)} \right) \int_{1b2} E^{(s)} dl = \varphi_2 - \varphi_1 = - \int_{1b2} E^{(ct)} dl$$

$$E^{(s)} = -E^{(ct)} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \mathcal{E}$$

т.е. разность потенциалов на клеммах источника разомкнутого источника равна ЭДС источника тока.

**Закон Джоуля-Ленца в интегральной форме:**

В любом элементе провода за время  $dt$  выделяется тепло:  $qdVdt = \frac{j^2}{\lambda}$ .  
 $dQ = Pdt$

Тогда в некотором объёме проводника выделяется тепло:

$$Pdt = \iint_V \frac{j^2}{\lambda} dt dV$$


---

## 16. Теория Друде Лоренца электрического тока в металлах.

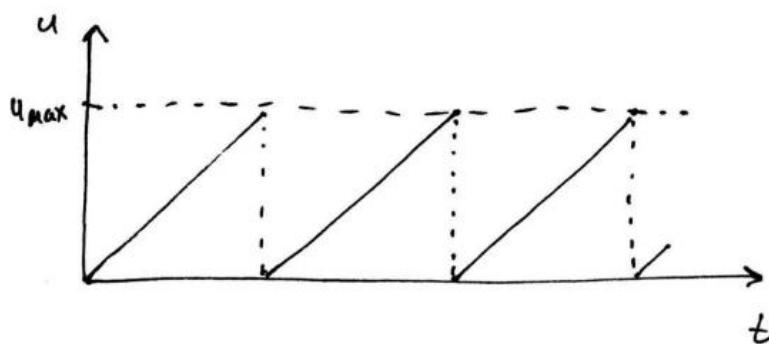
Созданная Друде модель электрического тока в проводниках предполагает, что если внешнего поля нет, то электроны движутся хаотически (тепловое движение), это обусловлено ненулевой температурой. Скорость электронов при тепловом движении при комнатной температуре составляет величину порядка 100 км/с. Это огромная скорость, однако при этом электроны между собой практически не сталкиваются, а сталкиваются с узлами кристаллической решётки.

Введем **длину свободного пробега**  $l$  - это среднее расстояние между двумя столкновениями электрона с решеткой. Также введем **время свободного пробега**  $\tau$  - это среднее время между двумя соседними столкновениями электрона.

При наличии внешнего электрического поля электроны получают дополнительную составляющую скорости по направлению действия внешней силы. Эту скорость называют **дрейфовой**. Величина этой скорости очень мала (приблизительно 1 мм/с).

Дрейфовая скорость на несколько порядков меньше тепловой, из этого Друде сделал следующее предположение: «после каждого столкновения приобретенная в результате действия электрической силы скорость теряется». Обозначим эту скорость через  $u$ . По 2-ому закону Ньютона:

$$ma = eE, \quad a = \frac{eE}{m}$$
$$u_{\max} = a\tau = \frac{eE\tau}{m}$$



И в векторной форме:

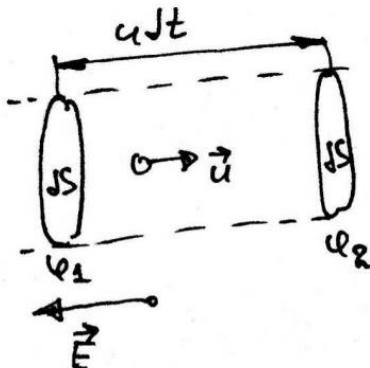
$$\vec{u} = -\frac{e\tau}{m} \vec{E},$$

знак минус поставлен, т.к. сила, действующая на электрон, направлена против вектора поля  $\vec{E}$ . С учетом вида функции  $u(t)$  введем среднюю дрейфовую скорость электронов:

$$u = \frac{u_{\max}}{2} = \frac{a\tau}{2} = \frac{e\tau}{2m} E$$

т.е. считаем, что электроны движутся равномерно против направления внешнего электрического поля.

Определим плотность тока. Рассмотрим площадку  $S$  внутри проводника и рассчитаем заряд, который за время  $dt$  пересечет эту площадку.



Количество электронов, прошедших через площадку равно числу электронов в цилиндре:

$$dN = n dV = n S u dt$$

Тогда искомый заряд:

$$dq = e n S u dt$$

По определению плотности тока:

$$j dS dt = dq = e n S u dt$$

$$j = e n u$$

$$\vec{j} = -e n \vec{u}$$

Используя найденное среднее значения дрейфовой скорости запишем следующее:

$$j = e n u = e n \frac{e \tau}{2m} E = \frac{n e^2 \tau}{2m} E$$

Если сравнить полученное соотношение с законом Ома в дифференциальной форме, то получится, что коэффициент при  $E$  равен удельной проводимости:

$$\lambda = \frac{n e^2 \tau}{2m}$$

$$\rho = \frac{1}{\lambda} = \frac{2m}{n e^2 \tau}$$

Результаты теории Друде можно применить для вывода закона Джоуля-Ленца в дифференциальной форме. При каждом столкновении электрон теряет

энергию  $\frac{m u_{max}^2}{2}$ . Эта энергия переходит в кинетическую энергию кристаллической решётки, т.е. в тепло. В объёме  $dV$  содержится  $n dV$  электронов, а число столкновений

в них:  $\nu = \frac{dt}{\tau}$  тогда:

$$\begin{aligned}
 qdVdt &= \frac{mu_{\max}^2}{2} \cdot n dV \cdot \frac{dt}{\tau} = \\
 \frac{ma^2\tau^2 n}{2} dV dt &\Rightarrow \\
 q &= \frac{m\tau ne^2 E^2}{2m^2} = \frac{ne^2\tau}{2m} E^2
 \end{aligned}$$

В итоге, закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме примет вид:

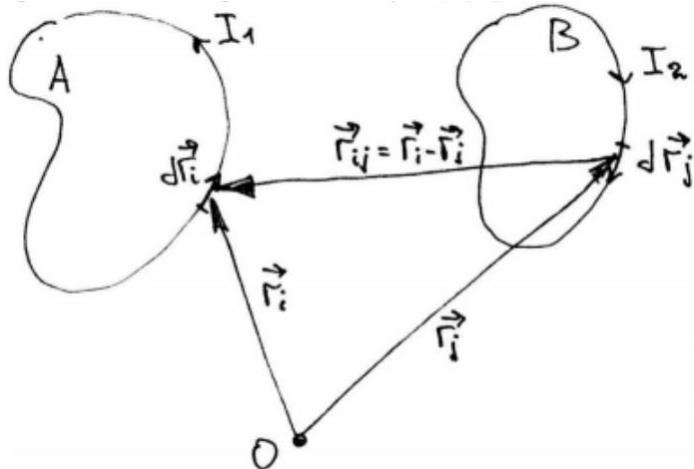
$$q = \lambda E^2$$

## 17. Закон Ампера. Понятие магнитного поля, индукция магнитного поля.

### Закон Био-Савара.

Закон Ампера был получен в результате анализа проводимых им экспериментов. Итак, пусть имеется два проводника по которым течёт ток  $I_1, I_2$ .

Проводники находятся в однородной среде с магнитной проницаемостью  $\mu$ .



Тогда сила с которой проводник В действует на проводник А может быть определена по формуле:

$$\vec{F}_{AB} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \sum_{i,j} \frac{[\Delta\vec{r}_i, [\Delta\vec{r}_j, \vec{r}_i - \vec{r}_j]]}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}$$

Закон Ампера:

$$\vec{F}_{ij} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \frac{[\Delta\vec{r}_i, [\Delta\vec{r}_j, \vec{r}_i - \vec{r}_j]]}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}$$

Где  $\mu_0$  – магнитная постоянная,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{А}}$ , вектора  $\Delta\vec{r}_i$ ,  $\Delta\vec{r}_j$  – направлены по касательной к кривой в сторону тока.

При этом: вектор  $\vec{F}_{ab} = \vec{F}_{ba}$ .

**Магнитное поле** — силовое поле, действующее на движущиеся электрические заряды и на тела, обладающие магнитным моментом, независимо от состояния их движения. Магнитное поле может создаваться током заряженных частиц и/или магнитными моментами электронов в атомах.

**Магнитное поле** будет нами определено, если определить вектор в каждой точке пространства, который бы его характеризовал. Такими векторами в дальнейшем будут:

$$\vec{H}(\vec{r}) = I \sum_j \frac{[\Delta\vec{r}_j, \vec{r} - \vec{r}_j]}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_j|^3}$$

Напряжённость магнитного поля :

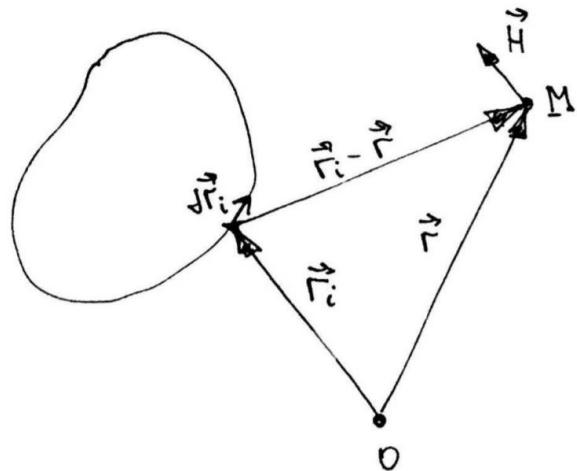
$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu\mu_0 \vec{H}(\vec{r})$$

Индукция магнитного поля:

$$\vec{F}_{AB} = I_1 \sum_i \left[ \Delta\vec{r}_i, \vec{B}(\vec{r}_i) \right]$$

Закон, с помощью которого выражается вектор напряженности поля  $\vec{H}$  по известной форме провода и величине тока в нём, носит название закон Био-Савара-Лапласа :

$$\vec{H}(\vec{r}) = I \sum_i \frac{[\Delta \vec{r}_i, \vec{r}]}{4\pi |\vec{r}|^3}$$



С использованием закона Био-Савара-Лапласа закон Ампера может быть переписан в виде:

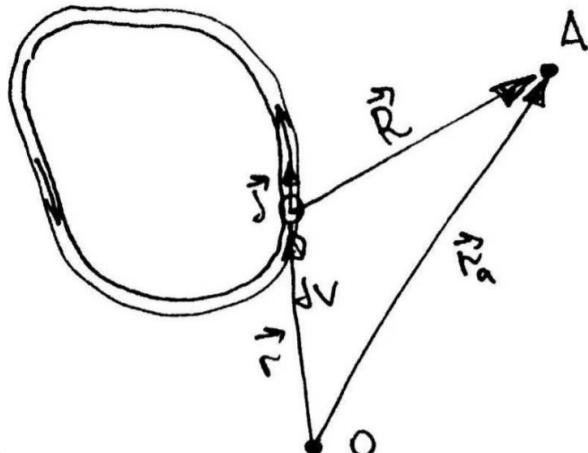
$$\vec{F} = I \sum_i [\Delta \vec{r}_i, \vec{B}_i]$$

(В итоге это типа В от радиуса итого, вот так вот ребята)

## 18. Векторный магнитный потенциал. Связь индукции магнитного поля с векторным магнитным потенциалом.

**ВНИМАНИЕ!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!** тут и везде кроме формулы связи намагниченности и напряженности магнитного поля - если вы видите  $\mu$ , то это Васильев ошибся, имеется в виду  $\mu \neq 0$ , или просто  $\mu = 0$ , если  $\mu = 1$ . Спасибо за внимание.

Рассмотрим индукцию магнитного поля, которая создается некоторым проводником с током:



То

$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} I \sum_i \frac{[\Delta \vec{l}_i, \vec{R}_i]}{R_i^3}$$

Для вектора плотности тока  $\sim j$  можно записать следующее:

$$I \Delta \vec{l} = j S \Delta \vec{l} = \vec{j} S \Delta l \Rightarrow I d \vec{l} = \vec{j} dV$$

Запишем с учетом полученного выражения суммарный вектор через объемный интеграл:

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{[\vec{j}, \vec{R}]}{R^3} dV$$

Упростим это выражение с учетом следующего:

$$R = \sqrt{(x_a - x)^2 + (y_a - y)^2 + (z_a - z)^2}$$

Начальная точка: ( $x, y, z$ ) вектора «бегает» по контуру с током, а конечная: ( $x_a, y_a, z_a$ ) указывает на точку A, которая тоже может двигаться. Обозначим за  $\text{grad}_a \dots$  градиент по переменным  $x_a, y_a, z_a$ , тогда:

$$\text{grad}_a \frac{1}{R} = - \text{grad} \frac{1}{R} = - \frac{\vec{R}}{R^3}$$

$$\vec{B} = - \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \left[ \vec{j}, \text{grad}_a \frac{1}{R} \right] dV = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \left[ \text{grad}_a \frac{1}{R}, \vec{j} \right] dV$$

Воспользуемся теперь формулой 1 из векторного анализа:

$$\operatorname{rot}(\varphi \vec{a}) = \varphi \operatorname{rot} \vec{a} + [\operatorname{grad} \varphi, \vec{a}] \Rightarrow$$

$$\left[ \operatorname{grad}_a \frac{1}{R}, \vec{j} \right] = \operatorname{rot}_a \left( \frac{\vec{j}}{R} \right) \Rightarrow \frac{1}{R} \operatorname{rot}_a \vec{j}$$

Заметим следующее: т.к. ток в контуре не зависит от координат  $x_a, y_a, z_a$ , т.е. от координат наблюдения, то  $\operatorname{rot}_a \vec{j} = 0$  и поэтому:

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \operatorname{rot}_a \left( \frac{\vec{j}}{R} \right) dV = \operatorname{rot}_a \left( \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}}{R} dV \right)$$

Заметим, что индекс  $a$  у ротора во втором выражении опущен, т.к. интегрирование осуществляется по переменным  $x, y, z$ , а значит останутся только переменные  $x_a, y_a, z_a$ .

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}}{R} dV$$

Величина называется векторным потенциалом магнитного поля. С учетом этой величины перепишем выражение для поля вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ :

$$\boxed{\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}}$$

## **19. Свойство векторного магнитного потенциала**

Докажем одно важное свойство векторного потенциала магнитного поля:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{A} = 0}$$

Для доказательства нам понадобятся следующие факты относительно постоянного тока:

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0, j_n = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \operatorname{div}_a \left( \frac{\vec{j}}{R} \right) dV$$

Используем формулу из векторного анализа:

$$\operatorname{div} \varphi \vec{a} = \varphi \operatorname{div} \vec{a} + (\operatorname{grad} \varphi, \vec{a})$$

$$\operatorname{div}_a \frac{\vec{j}}{R} = \frac{1}{R} \operatorname{div}_a \vec{j} + (\operatorname{grad}_a \frac{1}{R}, \vec{j}) = (\operatorname{grad}_a \frac{1}{R}, \vec{j})$$

Величина  $1/R$  зависит и от своего начала и от конца, поэтому:

$$(\operatorname{grad}_a \frac{1}{R}, \vec{j}) = -(\operatorname{grad} \frac{1}{R}, \vec{j})$$

$$\operatorname{div}_a \left( \frac{\vec{j}}{R} \right) = -(\operatorname{grad} \frac{1}{R}, \vec{j})$$

С другой стороны: (теперь без индекса а)

$$\operatorname{div} \varphi \vec{a} = \varphi \operatorname{div} \vec{a} + (\operatorname{grad} \varphi, \vec{a})$$

$$\operatorname{div} \frac{\vec{j}}{R} = \frac{1}{R} \operatorname{div} \vec{j} + (\operatorname{grad} \frac{1}{R}, \vec{j})$$

$$\operatorname{div} \frac{\vec{j}}{R} = \frac{1}{R} \operatorname{div} \vec{j} - \operatorname{div}_a \frac{\vec{j}}{R}$$

Т.к. по свойству постоянного тока:  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ , то:

$$\operatorname{div}_a \left( \frac{\vec{j}}{R} \right) = -\operatorname{div} \left( \frac{\vec{j}}{R} \right)$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \operatorname{div}_a \frac{\vec{j}}{R} dV = -\frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \operatorname{div} \frac{\vec{j}}{R} dV = \dots$$

$$\dots = -\frac{\mu}{4\pi} \iint_S \frac{j_n}{R} dS = 0$$

Используем теорему остроградского-Гаусса:

т.к.  $j_n = 0$  всюду на поверхности S. В итоге получим:  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ .

## 20. Теорема Стокса в пустоте в интегральной и дифференциальной формах. (вывод не нужен)

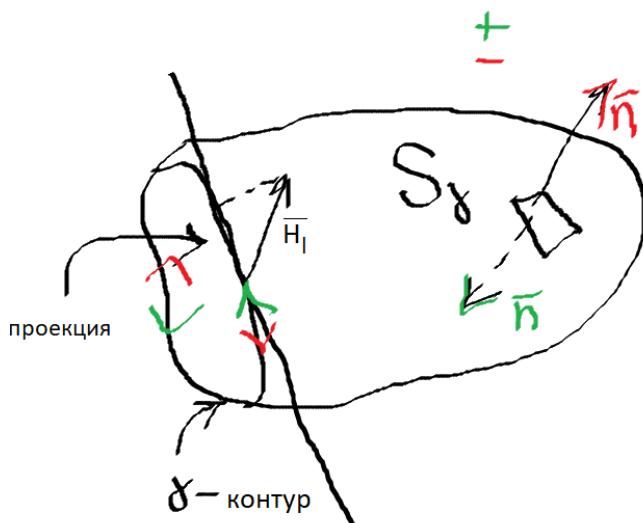
**Теорема Стокса (10.1)** - для любого замкнутого контура циркуляция вектора напряженности магнитного поля равна сумме токов, протекающих через поверхность, охватывающую этот контур, при этом направление обхода и направление токов связаны правилом правого винта.

$$\oint_{\gamma} H_l dl = \iint_S jndS \text{ интегральной форме(7.1):}$$

Формула Стокса в дифференциальной форме(7.1):

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}$$

Здесь надо сказать про связь ориентации обхода контура с направлением нормали.



Нам нужна проекция вектора напряженности на контур. Если она положительная, то направление обхода контура одно, ему соответствует направление вектора нормали (внутрь или наружу), если отрицательная, то направление обхода противоположное, как и направление вектора нормали. С конца вектора  $\vec{n}$  нормали мы должны видеть обход контура против часовой стрелки.

Можно про ротор написать:

$$[\nabla, \vec{a}] = \operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \quad \text{Физ. смысл ротора - завихрение}$$

## 21. Магнитное поле в веществе. Вектор намагниченности. Связь вектора намагниченности с напряженностью магнитного поля.

Магнитный диполь – это плоский контур, по которому протекает электрический ток, размеры которого много меньше расстояния до точки, в которой мы рассматриваем поле.

Магнитный момент – это величина:

$$\vec{m} = IS\vec{n},$$

где  $\vec{n}$  - нормаль к поверхности, натянутой на плоский контур, нормаль к которому связана с током по правилу правого винта.

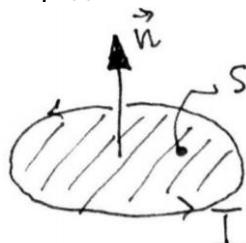
Электроны, вращающиеся по замкнутым орбитам есть диполь. Есть атомы с нулевым и ненулевым суммарным магнитным моментом. При попадании во внешнее магнитное поле атомы - диполи выстраиваются, создавая магнитное поле внутри и снаружи вещества, этот процесс называют поляризацией.

**Намагниченность** — векторная физическая величина, характеризующая магнитное состояние макроскопического физического тела. Обозначается обычно  $M$  или  $J$ .

Введем вектор намагниченности:

$$\vec{M} dV = \sum_i \vec{m}_i$$

Определяется как магнитный момент единицы объема вещества.



Магнитное поле может быть спонтанным и индуцированным:

$$\vec{M} = \vec{M}_0 + \vec{M}_{\text{инд}}$$

Экспериментально определено, что:

$$\vec{M} = (\mu - 1) \vec{H},$$

где  $\mu$  – магнитная проницаемость среды .

Диамагнетики –  $\mu < 1$ . Парамагнетики –  $\mu > 1$ . Ферромагнетики –  $\mu \gg 1$ . При этом записывая  $\mu \sim 1$  означает, что  $(\mu - 1)$  примерно равно  $10^{-4} \dots 10^{-6}$ .

Для диа- и парамагнетиков можно записать (экспериментальный факт):

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

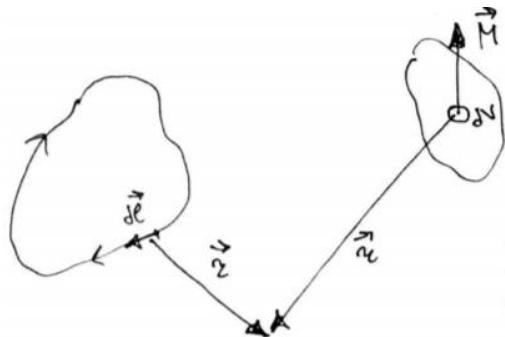
Эта формула приближенная, работает только когда допускается линейное приближение. То есть когда  $\mu$  достаточно мало и среда изотропная. В анизотропных средах эти векторы, вообще говоря, не сонаправлены. В общем формула работает для достаточно малой величины поля  $H$  и для широкого диапазона диа- и парамагнетиков..

## 22. Теорема о связи вектора намагченности и молекулярных токов намагченности.

Докажем следующие соотношения:

$$\vec{j}_{\text{мол}} = \text{rot} \vec{M}, \quad \vec{i}_{\text{мол}} = [\vec{M}, \vec{n}]$$

где  $\vec{j}_{\text{мол}}$  - объемная плотность токов намагченности,  $\vec{i}_{\text{мол}}$  - поверхностная плотность.



$$m = ISn$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{m}, \vec{R}]}{R^3}$$

- векторный магнитный потенциал.

Зная поле магнитного диполя и определение  $M$  (намагченности) можем записать:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{[\vec{M}, \vec{R}]}{R^3} dV$$

Теперь то же самое мы хотим записать через объемные и поверхностные токи:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}_{\text{мол}}}{R} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{i}_{\text{мол}}}{R} dS$$

(Для доказательства этой формулы используем известную формулу векторного анализа:

$$\iiint_V \text{rot} \vec{a} dV = \iint_S [\vec{n}, \vec{a}] dS$$

Итак, заметим:

$$\frac{\vec{R}}{R^3} = \text{grad} \frac{1}{R},$$

$$\text{где } R = \sqrt{(x_a - x)^2 + (y_a - y)^2 + (z_a - z)^2}$$

$$\left[ \vec{M}, \text{grad} \frac{1}{R} \right] = - \left[ \text{grad} \frac{1}{R}, \vec{M} \right]$$

используя известное соотношение:  $\text{rot} \varphi \vec{a} = \varphi \text{rot} \vec{a} + [\text{grad} \varphi, \vec{a}]$ , получим:

$$\left[ \vec{M}, \operatorname{grad} \frac{1}{R} \right] = -\operatorname{rot} \frac{\vec{M}}{R} + \frac{1}{R} \operatorname{rot} \vec{M}$$

С учетом этого можно записать:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{[\vec{M}, \vec{R}]}{R^3} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{1}{R} \operatorname{rot} \vec{M} dV - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \operatorname{rot} \frac{\vec{M}}{R} dV$$

Далее используем фиолетовую формулу:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\operatorname{rot} \vec{M}}{R} dV - \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{[\vec{n}, \vec{M}]}{R} dS$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}_{\text{мол}}}{R} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{i}_{\text{мол}}}{R} dS$$

Сравнивая с формулой токов получим:

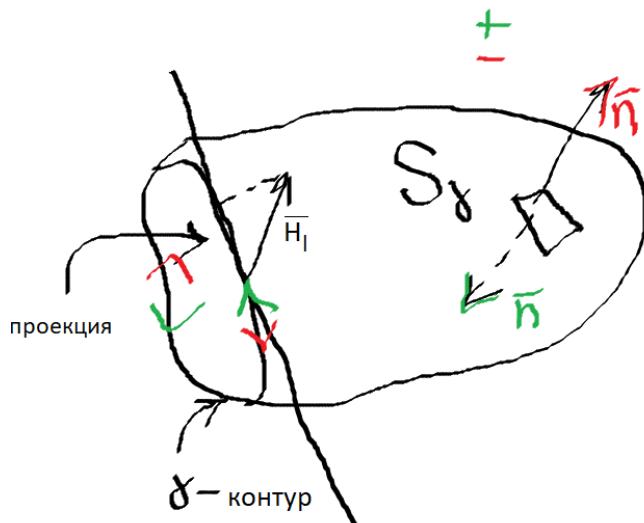
$$\vec{j}_{\text{мол}} = \operatorname{rot} \vec{M}, \quad \vec{i}_{\text{мол}} = [\vec{M}, \vec{n}]$$

### 23. Теорема Стокса при наличии магнетика.

$$\frac{1}{\mu_0} \oint_L B_l dl = I + I_{\text{мол}}$$

$$\oint_{\gamma} H_l dl = I$$

Здесь надо сказать про связь ориентации обхода контура с направлением нормали.



Нам нужна проекция вектора

напряженности на контур. Если она положительная, то направление обхода контура одно, ему соответствует направление вектора нормали (внутрь или наружу), если отрицательная, то направление обхода противоположное, как и направление вектора нормали.

С конца вектора  $n$  нормали мы должны видеть обход контура против часовой стрелки.  
Можно про ротор написать:

$$[\nabla, \vec{a}] = \text{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

Физ. смысл ротора - завихрение

## 24. Два фундаментальных свойства магнитостатического поля.

**Свойство 1 :** Теорема Стокса. Для любого замкнутого контура циркуляция вектора напряженности магнитного поля равна сумме токов, протекающих через поверхность, охватывающую этот контур, при этом направление обхода и направление токов связаны правилом правого винта.

$$\oint_{\gamma} H_l dl = \sum_i I_i \quad \text{rot} \vec{H} = \vec{j}$$

Это свойство справедливо для магнитостатического поля.

**Свойство 2** : дивергенция индукции магнитного поля в любой точке равна нулю.

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Доказательство свойства 2:

$B = \operatorname{rot} A$  (ранее доказали)

$$\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = (\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{A}])$$

Так как векторное произведение это вектор, перпендикулярный к каждому из

слагаемых, то  $[\vec{\nabla}, \vec{A}]$  перпендикулярно к  $\vec{\nabla}$ , в то же время известно, что скалярное

произведению любых перпендикулярных векторов равно нулю. Но обозначение  $-$  – это не есть вектор в привычном смысле, более строгое доказательство следующее:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} = \vec{i} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} &= (\vec{\nabla}, \operatorname{rot} \vec{A}) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = 0 \\ &\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0} \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

По формуле Остроградского-Гаусса:

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{B} dV = \iint_S B_n dS = 0$$

Поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю.  
Свойство 2 справедливо не только для магнитостатических полей, но и для магнитных полей в общем случае.

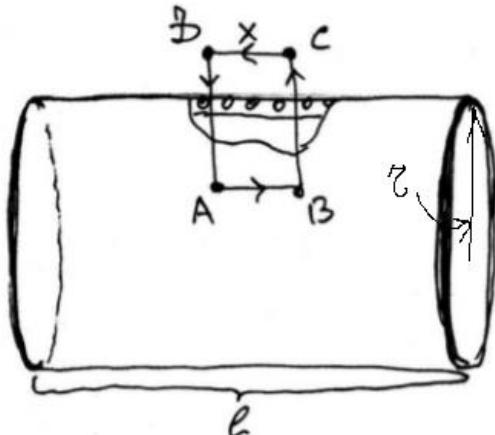
## 25. Энергия магнитного поля. Объемная плотность энергии магнитного поля.

(Справка:

Соленоид — разновидность катушки индуктивности. Обычно под термином «соленоид» подразумевается цилиндрическая обмотка из провода, причем длина такой обмотки многочтко превышает ее диаметр.)

Найдем энергию магнитного поля, для этого рассмотрим катушку длинной  $l$  и радиусом  $r$ ,  $r \ll l$ , число витков  $N$ . Пусть мы погрузили катушку в среду с магнитной проницаемостью  $\mu$  и перевели в сверхпроводящее состояние. По катушке пустили ток  $I$ . Так как в диаметрально противоположных концах катушки ток течёт в противоположные стороны, то вся катушка стремится расширяться за счет магнитного взаимодействия. Предположим что так же катушка может беспрепятственно расширяться. Важно, чтобы длина катушки была много больше радиуса:  $r \ll l$ , таким образом краевым эффектом можно пренебречь.

Пусть сперва радиус катушки не меняется, определим поле, которое она создает:



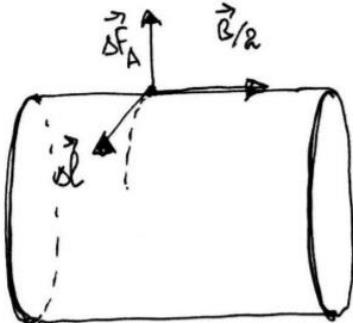
Внутри создается однородное магнитное поле, а снаружи его нет. Применив теорему о циркуляции по контуру  $\gamma$  получим:

$$\oint_{\gamma} H_l dl = \int_{AB}^{H \cos 0} \widehat{H}_l dl + \int_{BC}^{H \cos \frac{\pi}{2}} \widehat{H}_l dl + \int_{CD}^{=0} \widehat{H}_l dl + \int_{DA}^{H \cos \frac{\pi}{2}} \widehat{H}_l dl = Hx = nxI$$

$$H = nI \quad B = \mu\mu_0 nI$$

Внутри соленоида поле равно  $B$ , а снаружи нулю, нас интересует среднее значение поля, которое действует на выделенный элемент провода в катушке, оно равно  $B/2$ .

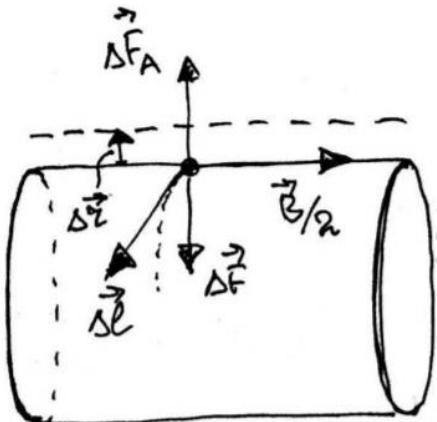
На элемент с током  $Idl$  действует сила Ампера:  $d\vec{F}_A = I(d\vec{l}, \vec{B}/2)$



Расширению катушки препятствовала внешняя механическая сила. к

Пусть теперь катушка расширилась, при этом её радиус увеличился от  $r_1$  до  $r_2$ . Пусть так же расширение осуществлялось квазиравновесным способом, т.е. внешняя сила всюду была равна силе магнитного взаимодействия. На малом перемещении  $\Delta r$  на элементе с током внешними силами была произведена следующая работа:

$(\Delta \vec{F}, \Delta \vec{f}) = -\Delta F \Delta r = -\Delta F_A \Delta r$  - возможно можно опустить - че за дельта ф  
маленькое?????????????????????????????????



Элементарная работа по расширению всей катушки будет равна:

$$\delta A = -I \frac{B}{2} dr \int_0^{2\pi r N} dl = -I \frac{B}{2} N 2\pi r dr = -\pi I B N r dr = -\mu \mu_0 \pi n^2 l I^2 r dr$$

$\alpha = \mu \mu_0 n^2 l \pi$ , тогда:

$$\delta A = -\alpha I^2 r dr$$

Так как:

$$\Phi = \iint_S B_n dS = \text{const}$$

Рассчитаем поток  $\Phi$  для нашего случая:

$$\Phi = B \pi r^2 N = n l \pi r^2 \mu \mu_0 n I = \pi \mu \mu_0 n^2 l I r^2 = \alpha I r^2 = \text{const}$$

Т.е. при изменении радиуса меняется ток, а поток остается неизменным. С учетом этого можно записать:

$$I = \frac{\Phi}{\alpha r^2}$$

$$\delta A = -\alpha I^2 r dr = -\alpha \frac{\Phi^2}{\alpha^2 r^4} r dr = -\frac{\Phi^2}{\alpha r^3} dr$$

$$A_{12} = -\frac{\Phi^2}{\alpha} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^3} dr = \frac{\Phi}{2\alpha} \left( \frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) = \frac{\Phi^2}{2\alpha r_2^2} - \frac{\Phi^2}{2\alpha r_1^2}$$

Эта работа перешла в изменение магнитного поля катушки! Т.к.  $r_1$  и  $r_2$  были выбраны произвольно, то значит для энергии магнитного поля катушки можно записать:

$$W = \frac{\Phi^2}{2\alpha r^2} = \frac{\alpha^2 I^2 r^4}{2\alpha r^2} = \frac{\alpha I^2 r^2}{2} = \frac{\pi \mu \mu_0 n^2 l I^2 r^2}{2} = V \frac{\mu \mu_0 n^2 I^2}{2}$$

Используем выражение, полученное ранее для соленоида:  $H = nl$

$$W = V \frac{\mu \mu_0 H^2}{2}$$

$$\omega = \frac{\mu \mu_0 H^2}{2},$$

(для однородного поля) где  $\omega$  – объемная плотность энергии магнитного поля. Для неоднородного поля энергия может быть найдена интегрированием:

$$W = \iiint_V \omega dV = \iiint_V \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} dV$$

## 26. Закон электромагнитной индукции Фарадея. Первый фундаментальный закон Максвелла. Правило Ленца.

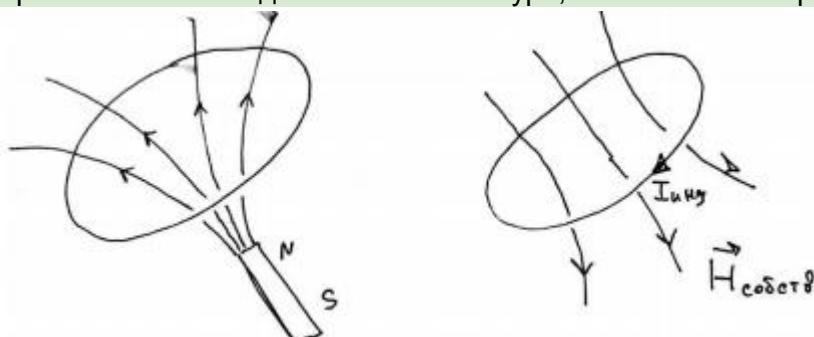
### **Закон электромагнитной индукции Фарадея**

Рассмотрим контур (замкнутый или незамкнутый), который находится в переменном магнитном поле. Тогда справедливо следующее:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad \Phi = \iint_S B_n dS$$

где  $S$  – площадь поверхности, натянутой на контур, а  $\mathcal{E}$  – ЭДС индукции. На самом деле в контуре нет отдельной ЭДС, однако указанная формула говорит нам о том, какой величины нужно использовать источник напряжения, чтобы ток в контуре тек эквивалентным образом.

Рассмотрим теперь замкнутый контур с суммарным сопротивлением  $R$ . Используем постоянный магнит, чтобы создавать переменное магнитное поле, для этого будем приближать или отдалять его от контура, как показано на рисунке.



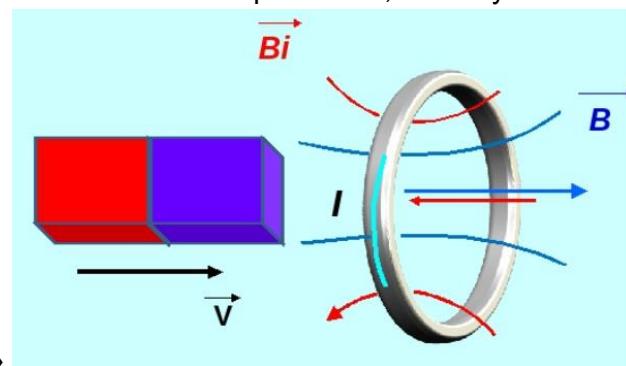
При этом в контуре возникнет ток, который можно рассчитать с помощью **закона Фарадея**:

$$I_{\text{инд}} = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$$

В каком направлении при этом будет течь ток?

Для этого существует **Правило Ленца**:

«Индукционный ток в контуре течет в таком направлении, чтобы уменьшить изменение



внешнего магнитного потока».

## **Первый фундаментальный закон Максвелла.**

Суть I закона Максвелла состоит в связи между вихревым электрическим полем и переменным магнитным.

Сначала сравним электрическое поле, возникающее в процессе электромагнитной индукции и поле создаваемое сторонними силами в проводнике. Для поля сторонних сил известно:

$$\mathcal{E} = \oint_L E^{(ct)} dl = 0$$

В то время как для поля сил ЭДС индукции:

$$\mathcal{E} = \oint_L E^{(инд)} dl = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S B_n dS \neq 0$$

(тут не пси а Ф)

Максвелл предположил, что поле  $E$  (инд), вызывающее ток в контуре, существует за пределами контура и вне его зависимости. В свою очередь рамку можно считать только индикатором его присутствия. Обобщая сделанное рассуждение можно сформулировать, что постоянное магнитное поле может существовать без сопутствующего ему электрического, а вот переменное магнитное поле – нет. Теперь видно, что сам контур может быть лишь воображаемым, однако даже для воображаемого контура можно записать:

$$\oint_L E_l dl = -\frac{d}{dt} \left( \iint_S B_n dS \right)$$

Это соотношение является фундаментальным законом природы и называется **Первым Фундаментальным Законом Электродинамики**. Перейдем от интегральной формы к дифференциальной. По теореме Стокса имеем:

$$\oint_L E_l dl = \iint_S (\operatorname{rot} \vec{E})_n dS$$

$$\iint_S (\operatorname{rot} \vec{E})_n dS = -\frac{d}{dt} \iint_S B_n dS$$

$$\iint_S (\operatorname{rot} \vec{E})_n dS = -\iint_S \left( \frac{\partial B_n}{\partial t} \right)_n dS \quad \boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

С учетом ЭДС индукции плотность тока в дифференциальном законе Ома можно записать:

$$\vec{j} = \sigma \left( \vec{E}^{ct} + \vec{E}_0 + \vec{E}^{инд} \right) \quad \boxed{\vec{j} = \lambda \left( \vec{E}^{(e)} + \vec{E}^{(ct)} \right)}$$

(дифф закон Ома:  $\vec{j} = \lambda \left( \vec{E}^{(e)} + \vec{E}^{(ct)} \right)$ )

$E_0$  - это спонтанное электрическое поле (?). (то есть оно существует без наличия внешнего поля или типа того)

## **27. Закон электромагнитной индукции Фарадея. Возникновение ЭДС индукции при движении проводников в магнитном поле.**

Закон электромагнитной индукции Фарадея.

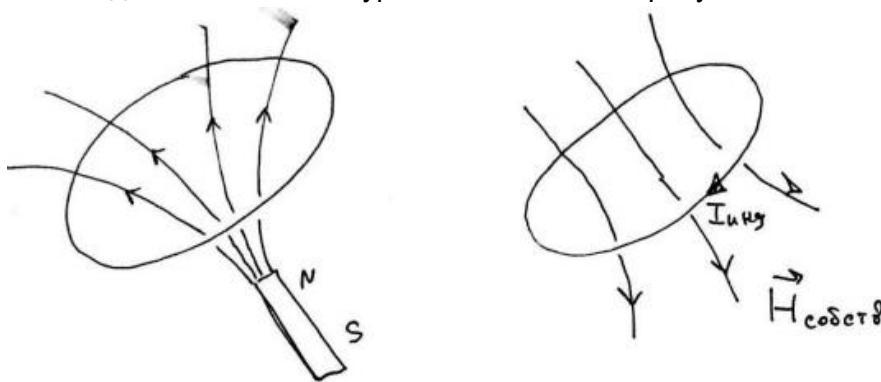
Формулировка: генерируемая ЭДС пропорциональна скорости изменения магнитного потока.

Рассмотрим контур (замкнутый или незамкнутый), который находится в переменном магнитном поле. Тогда справедливо следующее:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{d\Psi}{dt}, \quad \Psi = \iint_S B_n dS,$$

где  $S$  - площадь поверхности, натянутой на контур, а  $\mathcal{E}$  - ЭДС индукции. На самом деле в контуре нет отдельной ЭДС, но указанная формула говорит нам, о том, какой величины нужно использовать источник напряжения, чтобы ток в контуре тек эквивалентным образом.

Рассмотрим теперь замкнутый контур с суммарным сопротивлением  $R$ . Используем постоянный магнит, чтобы создавать переменное магнитное поле, для этого будем приближать или отдалять его от контура, как показано на рисунке.



При этом в контуре возникает ток, который можно рассчитать с помощью закона Фарадея:

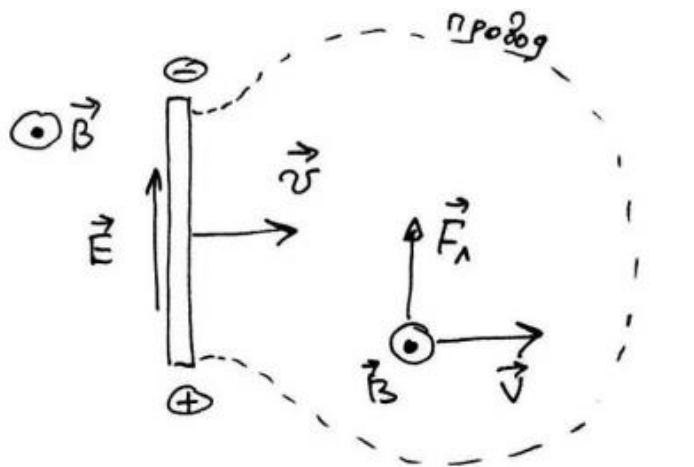
$$I_{\text{инд}} = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Psi}{dt}$$

Чтобы определить в каком направлении будет течь ток, нужно воспользоваться правилом Ленца:

«Индукционный ток в контуре течет в таком направлении, что стремится уменьшить изменение внешнего магнитного потока».

### **Возникновение ЭДС индукции при движении проводников в постоянном магнитном поле.**

Рассмотрим случай возникновения ЭДС индукции в случае движущегося проводника и постоянного магнитного поля. Рассмотрим простой пример: прямой проводник длины  $l$ , который движется со скоростью  $\vec{v}$  перпендикулярно силовым линиям магнитного поля с индукцией  $\vec{B}$ .



На каждый свободный электрон действует сила Лоренца:

$$\vec{F}_L = -e [\vec{v}, \vec{B}]$$

под действием этой силы электроны будут стремиться к верхнему концу проводника. Так как проводник в целом нейтральный, то на нижней его части будет скапливаться эквивалентный положительный заряд. При этом возникнет электрическое поле. Это поле будет действовать на свободные электроны, препятствуя их движению вверх. В некоторый момент времени возникнет равновесие. Рассмотрим это состояние подробнее, приравняв электрическую силу и силу Лоренца получим соотношение:

$$\vec{F}_{\text{эл}} = -e \vec{E}' = -e [\vec{v}, \vec{B}]$$

Разность потенциалов на концах проводника:

$$U = EL = VLB$$

Если теперь замкнуть концы проводом, то по цепи потечет ток:

$$\mathcal{E} = BVl = B \frac{dx}{dt} l = B \frac{d}{dt} S = \frac{d}{dt} (BS) = \frac{d}{dt} \Psi$$

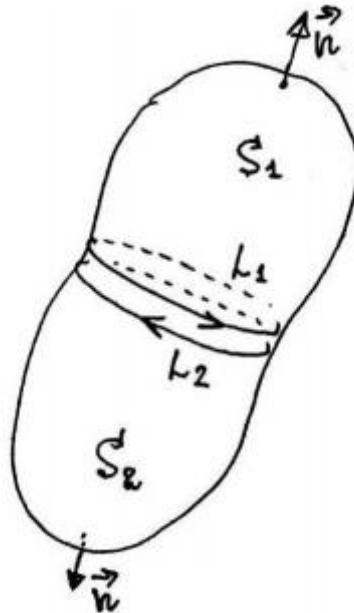
Для плотности тока в этом случае можно записать:

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E}^{\text{ср}} + \vec{E}_0 + [\vec{v}, \vec{B}])$$

В этом случае возникновение ЭДС вызвано движением проводника в постоянном магнитном поле.

## 28. Уравнение непрерывности для электрического тока.

Рассмотрим замкнутую поверхность и разобьем её на две части. Рассмотрим эти два контура противоположного направления. Запишем теорему Стокса для этих двух контуров.



$$\oint_{L_1} H_l dl = \iint_{S_1} j_n dS$$

$$\oint_{L_2} H_l dl = \iint_{S_2} j_n dS$$

Сложим их:

$$\oint_{L_1} H_l dl + \oint_{L_2} H_l dl = \iint_{S_1} j_n dS + \iint_{S_2} j_n dS$$

$$\oint_{L_2} H_l dl = - \oint_{L_1} H_l dl \quad \text{то левая часть равна нулю и:}$$

$$\iint_{S_1} j_n dS + \iint_{S_2} j_n dS = \oint_S j_n dS = 0$$

Применим теорему Гаусса-Остроградского:

$$\oint_S j_n dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{j} dV = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0$$

Полученное выражение верно для стационарных токов, но в общем случае это не так. Дело в том, что внутри поверхности есть заряд, если ток втекает в эту поверхность, то он увеличивается и наоборот.

$$\oint\limits_S j_n dS = -\frac{dQ}{dt}$$

$$Q = \iiint_V \rho dV$$

Примени следующее:

$$\oint\limits_S j_n dS = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV$$

Используя теорему Гаусса-Остроградского, получим:

$$\oint\limits_S j_n dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{j} dV = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{d\rho}{dt}}$$

Это уравнение носит название **Уравнение непрерывности в дифференциальной форме**.

А уравнение:

$$\boxed{\oint\limits_S j_n dS = -\frac{dQ}{dt}}$$

носит название **Уравнение непрерывности в интегральной форме**.

## 29. Второй фундаментальный закон Максвелла. Переменное электрическое поле. Ток смещения.

Сформулировав первый свой закон Максвелл предположил, что переменное магнитное поле приводит к возникновению вихревого электрического поля в всей области пространства где есть магнитное поле. Он исходил из теоремы Стокса, которая была доказана ранее и которая справедлива только в магнитостатике. (а тут магнитное поле переменное).

Запишем уравнение непрерывности в интегральной форме:

$$\iint_S j_n dS = -\frac{dQ}{dt}$$

Заряд в уравнении непрерывности можно выразить из теоремы Гаусса (она справедлива для любого поля)

$$\iint_S D_n dS = Q$$
$$\iint_S j_n dS = -\frac{d}{dt} \iint_S D_n dS$$

[OBJ OBJ OBJ]

Тогда теорему Стокса можно записать в другом виде:

$$\iint_{S_1} j_n dS + \iint_{S_2} j_n dS = - \iint_{S_1} \frac{\partial D_n}{\partial t} dS - \iint_{S_2} \frac{\partial D_n}{\partial t} dS$$

[OBJ]

$$\iint_{S_1} j_n dS = - \iint_{S_1} \frac{\partial D_n}{\partial t} dS + \oint_{L_1} H_l dl$$
$$\iint_{S_2} j_n dS = - \iint_{S_2} \frac{\partial D_n}{\partial t} dS + \oint_{L_2} H_l dl$$

Тогда **2-й Фундаментальный закон электродинамики** гласит, что для любого замкнутого неподвижного контура и поверхности, ограниченной этим контуром справедливо равенство:

$$\oint_L H_l dl = \iint_S j_n dS + \iint_S \frac{\partial D_n}{\partial t} dS$$

(для переменного МП)

Иначе:

$$\oint_L H_l dl = I + \iint_S \frac{\partial D_n}{\partial t} dS$$

$$\iint_S \frac{\partial D_n}{\partial t} dS$$

Слагаемое - называется **током смещения**. Если постоянного тока нет, то:

$$\oint_L H_l dl = \iint_S \frac{\partial D_n}{\partial t} dS$$

Изменение потока вектора электрической индукции  $\iint_S D_n dS$  через поверхность S  
приводит к возникновению вихревого магнитного поля. - СУТЬ ВТОРОГО ЗАКОНА  
МАКСВЕЛЛА.

(Переменное электрическое поле порождает магнитное поле)

Теперь приводим это нечто к дифференциальной форме. По теореме Стокса делаем то, что на картинке, только вместо  $E$  теперь  $H$ :

$$\oint_L E_l dl = \iint_S (\operatorname{rot} \vec{E})_n dS$$

Потом говорим, что так и хотели, подставляем штуку справа в интегральную форму и получаем:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

## **30. Уравнения Максвелла и материальные соотношения.**

**Материальные соотношения:**

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \quad \vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}, \quad \vec{j} = \sigma\vec{E}$$

**Уравнения Максвелла в интегральной форме:**

$$\oint_{\gamma} E_l dl = -\frac{d}{dt} \left( \iint_S B_n dS \right) \quad \begin{aligned} &1) \text{ - переменное электрическое поле порождает} \\ &\text{переменное магнитное поле} \end{aligned}$$

$$\oint_{\gamma} H_l dl = \iint_S j_n dS + \frac{d}{dt} \left( \iint_S D_n dS \right) \quad 2) \text{ - показывает связь между полным током и} \\ &\text{порождаемым им магнитным полем}$$

3) - поток вектора  $D$  через поверхность равен сумме зарядов поверхности.

$$\iint_S D_n dS = \iiint_V \rho dV \quad \begin{aligned} &\text{замкнутую} \\ &\text{внутри этой} \end{aligned}$$

$$\iint_S B_n dS = 0 \quad 4) \text{ - линии вектора магнитной индукции всегда замкнуты, магнитных} \\ &\text{зарядов нет.}$$

**Уравнения Максвелла в дифференциальной форме:**

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \operatorname{div} \vec{D} &= \rho \end{aligned}$$

Формулы Гаусса для векторов  $D$  и  $B$  могут быть получены из двух фундаментальных законов электродинамики.

**Вывод:**

Если из первых двух уравнений получится выразить вторые два, то зависимость соответствующих интегральных соотношений будет очевидной.

Применим оператор  $\operatorname{div}$  к первому уравнению, получим:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{E} = -\operatorname{div} \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

Прямой проверкой доказывается, что  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0$  для любого  $\vec{a}$ . Тогда, используя перестановку знаков дифференцирования получим:

$$\operatorname{div} \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{B}) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{B} = \text{const}$$

Т.е. если величина  $\operatorname{div} \vec{B}$  равна константе, то она равна ей в любой другой момент времени. Если принять эту константу за 0, то получим:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Применим оператор  $\operatorname{div}$  к второму уравнению, получим:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{D})$$

Левая часть опять тождественно равна нулю, тогда:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{D}) + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

Используя уравнение непрерывности:  $\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$  получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{D}) - \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{D} - \rho) &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{D} - \rho &= \text{const} \end{aligned}$$

Где, используя аналогичные рассуждения принимая константу равной нулю получим:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

### **31. Теорема Пойнтинга для электромагнитного поля.**

**Теорема Пойнтинга** - соотношение, показывающее как изменяется энергия электромагнитного поля внутри некоторого объема.

**Вектор Пойнтинга** (также **вектор Умова —Пойнтинга**) — **вектор** плотности потока энергии электромагнитного поля.

Рассмотрим однородную анизотропную среду в отсутствии внешнего источника тока, спонтанная поляризованность и намагниченность так же равны нулю. Тогда можно записать систему уравнений:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$$

Подставив последние два уравнения в первые два, получим:

$$\text{rot} \vec{E} = -\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Умножив первое уравнение слева и справа скалярно на  $\vec{H}$ , а второе на  $\vec{E}$ , получим:

$$(\vec{H}, \text{rot} \vec{E}) = -\mu \mu_0 \left( \vec{H}, \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right)$$

$$(\vec{E}, \text{rot} \vec{H}) = (\vec{j}, \vec{E}) + \epsilon \epsilon_0 \left( \vec{E}, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Теперь вычтем из первого второе уравнение, получим:

$$(\vec{H}, \text{rot} \vec{E}) - (\vec{E}, \text{rot} \vec{H}) = -(\vec{j}, \vec{E}) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} \right)$$

Воспользуемся формулой из векторного анализа:

$$(\vec{H}, \text{rot} \vec{E}) - (\vec{E}, \text{rot} \vec{H}) = \text{div} [\vec{E}, \vec{H}]$$

Тогда получим:

$$\text{div} [\vec{E}, \vec{H}] = -(\vec{j}, \vec{E}) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} \right)$$

Выражение в скобках слева есть сумма плотностей энергии магнитного и электрических полей. Будем считать, что для произвольного электромагнитного поля плотность энергии будет складываться из электрической и магнитной составляющих:  $\omega = \omega_e + \omega_m$ . Выражение  $(\vec{j}, \vec{E})$  есть мощность джоулея тепла, выделяемого в единице объёма в единицу времени. Если так же вспомнить, что:  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ , то:

$$(\vec{j}, \vec{E}) = \sigma E^2 = q,$$

где за  $q$  обозначено тепло, выделяемое в единице объёма в единицу времени.

### Вектор Пойнтинга:

$$\vec{\mathcal{S}} = [\vec{E}, \vec{H}]$$

### Теорема Пойнтинга в дифференциальной форме:

С учётом сделанных обозначений можно записать:

$$-\frac{\partial \omega}{\partial t} = q + \operatorname{div} \vec{\mathcal{S}}$$

Это соотношение и есть содержание теоремы Пойнтинга, записанное в дифференциальной форме.

Получим теперь соотношение в интегральной форме. Рассмотрим объём  $V$ , ограниченный поверхностью  $S$ . Проинтегрируем по объёму полученное уравнение:

$$\begin{aligned} - \iiint_V \frac{\partial \omega}{\partial t} dV &= \iiint_V q dV + \iiint_V \operatorname{div} \vec{\mathcal{S}} dV \\ \iiint_V \frac{\partial \omega}{\partial t} dV &= \frac{d}{dt} \underbrace{\left( \iiint_V \omega dV \right)}_W = \frac{dW}{dt} \\ \iiint_V q dV &= P = \frac{dQ}{dt}, \end{aligned}$$

где  $P$  – мощность тепла  $Q$ , выделяемого в объёме  $V$ .

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{\mathcal{S}} dV = \iint_S \mathcal{S}_n dS$$

Последнее соотношение – это поток вектора  $\vec{\mathcal{S}}$  наружу поверхности  $S$ . В итоге можно записать:

### Теорема Пойнтинга в интегральной форме:

$$-\frac{dW}{dt} = \frac{dQ}{dt} + \iint_S \mathcal{S}_n dS$$

## 32. Релаксация электрического заряда в проводниках. Время релаксации.

Рассмотрим проводник внутри которого в момент времени  $t = 0$  в объёме  $V_0$  находится заряд  $Q_0$ . Пусть вне проводника среда диэлектрическая и непроводящая  $\sigma = 0$ . Теперь рассмотрим произвольный объём  $V$ , ограниченный поверхностью  $S$  и запишем для него уравнение непрерывности:

$$-\frac{dQ}{dt} = \oint_S j_n dS$$

Ток возникает за счёт того, что заряд создаёт внутри проводника электрическое поле, которое создаёт электрический ток.

$$j_n = \sigma E_n = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0} D_n$$

$$-\frac{dQ}{dt} = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0} \oint_S D_n dS$$

$$\oint_S D_n dS = Q$$

Используя формулу Гаусса: для правой части получим:

$$-\frac{dQ}{dt} = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0} Q$$

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0} dt \quad Q = Q_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0} t}$$

Время релаксации  $\tau$  – это время, за которое заряд уменьшится в  $e$  раз.

Получается для нашей системы:  $\tau = \frac{\epsilon \epsilon_0}{\sigma}$ .

Оценим значение этого параметра для реальных проводников.

Для  $\sigma \sim 10^7$  (1 / (Ом·м)),  $\epsilon \sim 1$ ,  $\epsilon_0 = 10^{-12}$  Ф/м, тогда  $\tau \sim 10^{(-18)} \dots 10^{(-19)}$  с. За столь малое время заряд успевает релаксировать. Чем хуже вещество проводит электричество, т.е. при  $\sigma \rightarrow 0 \Rightarrow \tau \rightarrow \infty$ , (если нет заряда, то время релаксации бесконечно) т.е. заряд никуда не движется. Получается, что характер движения зарядов в проводящих телах имеет характер “разбегания”.

### 33. Уравнения Максвелла в пустоте. Вывод волнового уравнения, скорость распространения электромагнитных волн.

В пустоте нет зарядов:  $\rho = 0$ ,  $\vec{j} = 0$ ,  $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$ ,  $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}$

$$\oint_{\gamma} E_l dl = -\frac{d}{dt} \left( \iint_S B_n dS \right)$$

$$\oint_{\gamma} H_l dl = \frac{d}{dt} \left( \iint_S D_n dS \right)$$

$$\iint_S D_n dS = \mathbf{0}$$

$$\iint_S B_n dS = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{div } \vec{D} = 0$$

Вывод волнового уравнения из уравнений Максвелла:

Рассмотрим однородную, изотропную, непроводящую и электрически нейтральную среду, например вакуум, и запишем уравнение Максвелла в ней:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

Начинаем преобразования:

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Продифференцируем второе соотношение:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0} \text{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0} \text{rot} \left( -\frac{1}{\mu\mu_0} \text{rot} \vec{E} \right) = -\frac{1}{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0} \text{rot rot} \vec{E}$$

Используем формулу из векторного анализа:

$$\text{rot rot} \vec{a} = -\nabla^2 \vec{a} + \text{grad div} \vec{a}$$

Из нейтральности среды и теоремы Гаусса сделаем вывод, что:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0} \nabla^2 \vec{E}$$

- это уравнение бегущей волны.

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

Оно же в общем виде: где  $v$  – скорость бегущей волны.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Следовательно: - скорость распространения бегущей волны.

Для вакуума  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ , а для среды с параметрами:  $\epsilon > 0$  и  $\mu > 0$

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

### 34. Распространение сгустка Хевисайда в идеальном диэлектрике. Связь между напряженностями электрического и магнитного полей. Скорость распространения сгустка.

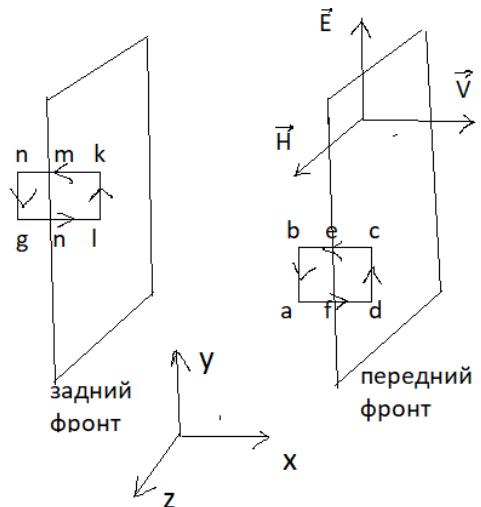
Рассмотрим объект, состоящий из области, образованной двумя бесконечными плоскостями, которые находятся друг от друга на некотором расстоянии.

Внутри этой области в каждой точке вектора напряженности электрического  $E$  и магнитного  $H$  полей постоянны по модулю. Пусть этот объект движется вправо со скоростью (вектор)  $v$  перпендикулярно ограничивающей поверхности.

Вектора  $v$ ,  $E$ ,  $H$  образуют правую тройку векторов. Правую поверхность будем называть передним фронтом, а левую задним фронтом.

Несмотря на искусственность описанного объекта, он тоже, как и гармоническая волна, является частным решением уравнений Максвелла, т.е. может существовать в физическом мире. Этот объект называют сгустком Хевисайда, в дальнейшем он нам понадобится для описания свойств гармонической электромагнитной волны.

Будем рассматривать сгусток Хевисайда в системе координат с осью  $Ox$ , направленной вдоль направления движения, а вектора  $E$  и  $H$  соответственно вдоль оси  $Oy$  и  $Oz$ .



Рассмотрим контур  $\alpha = ABCD$  и применим к нему первый фундаментальный закон электромагнетизма:

$$\oint_{\alpha} E_l dl = -\frac{d}{dt} \left( \iint_S B_n dS \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \iint_S B_n dS \right) &= -\mu\mu_0 H L_{AB} \frac{dL_{BM}}{dt} = \\ &= -\mu\mu_0 H v L_{AB} \end{aligned}$$

Где за  $v$  обозначена скорость движения правого фронта сгустка.

$$E L_{AB} = +\mu\mu_0 H v L_{AB}$$

$$E = \mu\mu_0 H v$$

Рассмотрим контур  $\beta = EFGH$  и применим к нему первый фундаментальный закон электромагнетизма, аналогично, получим:

$$\begin{aligned} \oint_{\beta} E_l dl &= -\frac{d}{dt} \left( \iint_S B_n dS \right) \\ \iint_S B_n dS &= -\mu\mu_0 H L_{GH} L_{GP} \\ \frac{d}{dt} \left( \iint_S B_n dS \right) &= -\mu\mu_0 H L_{GH} \frac{dL_{GP}}{dt} = \\ &= -\mu\mu_0 H v_1 L_{GH} \end{aligned}$$

Где за  $v_1$  обозначена скорость движения левого фронта сгустка.

$$-E L_{GH} = -\mu\mu_0 H v_1 L_{GH}$$

$$E = \mu\mu_0 H v_1$$

$$V1 = V$$

Это означает, что левый и правый фронты движутся с одинаковой скоростью, а значит сам сгусток не “расползается” в пространстве и может существовать сколь угодно долго. Это справедливо для любой изотропной и непроводящей среды.

Применим к сгустку Хевисайда второй фундаментальный закон электродинамики, но на этот раз будем рассматривать контур  $\gamma = IJ KL$ .

$$\oint_{\gamma} H_l dl = \frac{d}{dt} \left( \iint_S D_n dS \right)$$

$$HL_{IJ} = \frac{d}{dt} \left( \iint_S D_n dS \right) = \frac{d}{dt} (\varepsilon \varepsilon_0 E L_{IJ} L_{JQ}) =$$

$$= \varepsilon \varepsilon_0 E L_{IJ} \frac{dL_{JQ}}{dt} = \varepsilon \varepsilon_0 E v L_{IJ}$$

$$HL_{IJ} = \varepsilon \varepsilon_0 E v L_{JQ}$$

$$H = \varepsilon \varepsilon_0 E v$$

$$\begin{cases} E = \mu \mu_0 H v \\ H = \varepsilon \varepsilon_0 E v \quad v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}} \end{cases}$$

, что соответствует скорости гармонической ЭМВ.

$$\boxed{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} E = \sqrt{\mu \mu_0} H} \text{ (справедливо для электромагнитной волны).}$$

## 35. Уравнения Максвелла и электромагнитные волны. Доказательство поперечности электромагнитных волн.

Покажем, что переносчиком энергии электромагнитного поля является электромагнитная волна. Рассмотрим однородную, изотропную, непроводящую и электрически нейтральную среду, например вакуум, и запишем уравнение Максвелла в ней:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad \text{div} \vec{D} = \rho$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad \vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$$

Используя материальные соотношения получим:

$$\text{rot} \vec{E} = -\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\text{rot} \vec{H} = \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

После преобразований получается **уравнение бегущей волны**: (смотри вопрос повыше)

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \nabla^2 \vec{E}$$

Скорость распространения электромагнитной волны:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}}$$

Для вакуума  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ , а для среды с параметрами:  $\epsilon > 0$  и  $\mu > 0$  получим:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

### **Вывод:**

Электромагнитные волны, которые являются частным решением первых двух уравнений Максвелла, являются переносчиками энергии электромагнитного поля. Скорость их распространения равна  $c$ , а сами волны могут иметь плоскую, сферическую или цилиндрическую форму фронтовой поверхности.

### **Доказательство поперечности**

Получим свойства плоской электромагнитной волны, распространяющейся в однородной изотропной непроводящей среде. Пусть плоская электромагнитная волна распространяется в положительном направлении оси  $Ox$ . Это означает, что проекции векторов  $E \sim$  и  $H \sim$  на оси  $Oy$  и  $Oz$  не зависят от координат  $Oy$  и  $Oz$ . Запишем уравнения Максвелла для этого случая:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{D} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{cases}$$

Распишем первое уравнение по координатам:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} =$$

$$\vec{i} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) +$$

$$+ \vec{k} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = -\vec{i} \frac{\partial B_x}{\partial t} - \vec{j} \frac{\partial B_y}{\partial t} - \vec{k} \frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0, \Rightarrow \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0$$

Значит:

$$\begin{cases} \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 & \frac{\partial D_x}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} & \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{\partial D_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} & \frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\partial D_z}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 & \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Покажем, что из этой системы следует следующее утверждение: электромагнитная волна поперечная:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Эти тождества означают, что компонента векторов

$E \sim$  и  $H \sim$  вдоль оси Ох не зависят от координаты Ох, а значит может быть только константой. В нашем случае она будет нулём и, значит, **волна поперечная**.

## 36. Интерференция света. Опыт Юнга.

**Интерференция света** - явление перераспределения интенсивности света при излучении световых волн несколькими источниками.

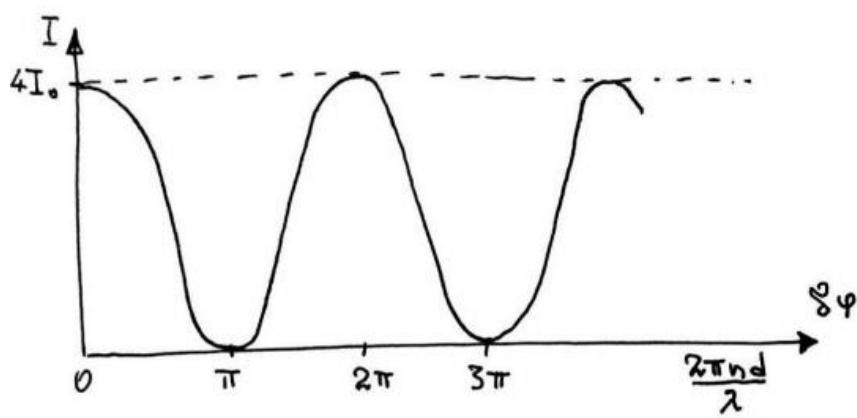
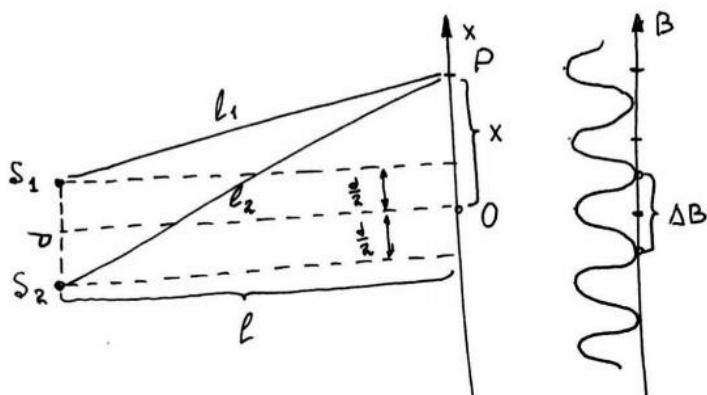
Условие интерференции - **когерентность** - согласованное излучение источниками электромагнитных волн, при котором с течением времени разность фаз колебаний волн остается неизменной или меняется медленно.

**Временная когерентность** связана с полосой частот колебаний электромагнитных волн и определяется временем когерентности, в течении которого можно пренебречь изменением фаз колебаний волн от различных спектральных составляющих.

**Пространственная когерентность** определяется размером протяженности источника колебаний, т.к. в точку наблюдения могут приходить волны от различных участков источника.

### **Расчет интерференционной картины от двух источников:**

Рассмотрим два источника волн  $S_1$  и  $S_2$ . Предположим, что они когерентны, этого можно достичь, например, следующим способом. Используем источник излучения и экран с двумя отверстиями малого размера, тогда волна, дошедшая до экрана разобьётся на две компоненты, которые будут эквивалентны двум когерентным волнам, создаваемым точечными источниками  $S_1$  и  $S_2$ . Поместим на некотором расстоянии  $l$  экран.



Нас будет интересовать интенсивность зарегистрированной интерференционной картины в зависимости от положения точки на экране. Для этого нужно определить величину разности

фаз:  $\delta\varphi(\vec{r})$ , которую можно найти из геометрических соображений:

$$\delta\varphi(\vec{r}) = k\Delta l_{\text{опт}} = \frac{2\pi\Delta l_{\text{опт}}}{\lambda} = \frac{2\pi n(l_1 - l_2)}{\lambda},$$

где  $n$  – показатель преломления среды, а  $l_1, l_2$  – расстояния, проходимые волнами,  $\lambda$  – длина волны в вакууме. Из геометрических соображений можно записать равенства:

$$l_1^2 = l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2, \quad l_2^2 = l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2$$

$$l_1^2 = l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2, \quad l_2^2 = l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2$$

$$l_2^2 - l_1^2 = (l_2 - l_1)(l_1 + l_2) = \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 = 2xd$$

Теперь введем упрощения, основанные на условии, что  $d \ll l$ .

$$(l_1 + l_2) \approx 2l$$

Тогда получим:

$$l_2 - l_1 \approx \frac{xd}{l}$$

$$\Delta l_{\text{опт}} = n(l_1 - l_2) \approx \frac{nx d}{l}$$

Определим теперь положения максимумов на пластине. Для этого вспомним условие:  $\delta\varphi(\vec{r}) = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots = 2m\pi$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , подставив в выражение для  $\delta\varphi(\vec{r})$ , получим:

$$\Delta l_{\text{опт}} = m\lambda$$

Используя приближенное выражение для  $\Delta l_{\text{опт}}$ , получим:

$$x_{\text{макс}}(m) = \frac{m\lambda l}{nd}$$

Номер  $m$  называют порядком максимума. Аналогично для положения минимумов:

$$\Delta l_{\text{опт}} = (2m + 1) \frac{\lambda}{2} = (m + 0,5) \lambda, \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$x_{\text{мин}}(m) = \frac{m + 0,5}{nd} \lambda l$$

Ширину интерференционных полос  $\Delta B$  можно определить как расстояние между соседними интерференционными минимумами.

$$\Delta B = x_{\min}(m+1) - x_{\min}(m) = \frac{\lambda l}{nd}$$

Заметим, что с помощью последнего равенства можно оценить возможность наблюдения интерференции в конкретных случаях. Так, например, если  $l \approx d$ , то  $\Delta B \approx \lambda$ . Так для видимого света длина волны  $\lambda$  составляет десятые доли микрометра, и полученная таким образом интерференционная картина не различима глазом. Выражение, связывающее интенсивность излучения с разностью фаз было получено выше:

$$I(\vec{r}) = I_1(\vec{r}) + I_2(\vec{r}) + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \cos(\delta\varphi(\vec{r}))$$

Используя полученные выше результаты:

$$\delta\varphi(\vec{r}) = \frac{2\pi\Delta l_{\text{опт}}}{\lambda}$$

$$\Delta l_{\text{опт}} \approx \frac{nxd}{l}$$

**Запишем окончательно:**

$$I(x) = 2I_0 \left( 1 + \cos \frac{2\pi n dx}{\lambda l} \right) = 2I_0 \cos^2 \frac{\pi n dx}{\lambda l}$$

### Опыт Юнга:

В опыте пучок монохроматического света направляется на непрозрачный экран-ширму с двумя параллельными прорезями, позади которого устанавливается проекционный экран. Особенность прорезей в том, что их ширина приблизительно равна длине волны излучаемого света (влияние ширины прорезей на интерференцию рассматривается ниже). На проекционном экране получается целый ряд чередующихся интерференционных полос, что и было продемонстрировано Томасом Юнгом. Этот опыт демонстрирует интерференцию света, что является доказательством справедливости волновой теории.

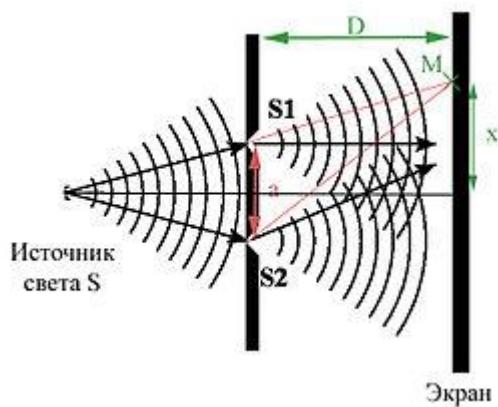
Если исходить из того, что свет состоит из частиц (корпускулярная теория света), то на проекционном экране можно было бы увидеть только две параллельные полосы света, прошедшие через прорези ширмы. Между ними проекционный экран оставался бы практически неосвещенным.

С другой стороны, если предположить, что свет представляет собой распространяющиеся волны (волновая теория света), то, согласно принципу Гюйгенса, **каждая прорезь является источником вторичных волн**.

Если вторичные волны достигнут линии в середине проекционного экрана, находящейся на равном удалении от прорезей, в одной фазе, то на серединной линии экрана их амплитуды сложатся, что создаст максимум яркости. То есть,

максимум яркости окажется там, где, согласно корпускулярной теории, яркость должна быть практически нулевой.

С другой стороны, на определенном удалении от центральной линии волны окажутся в противофазе — их амплитуды компенсируются, что создаст минимум яркости (темная полоса). По мере дальнейшего удаления от средней линии яркость периодически изменяется, возрастаая до максимума и снова убывая



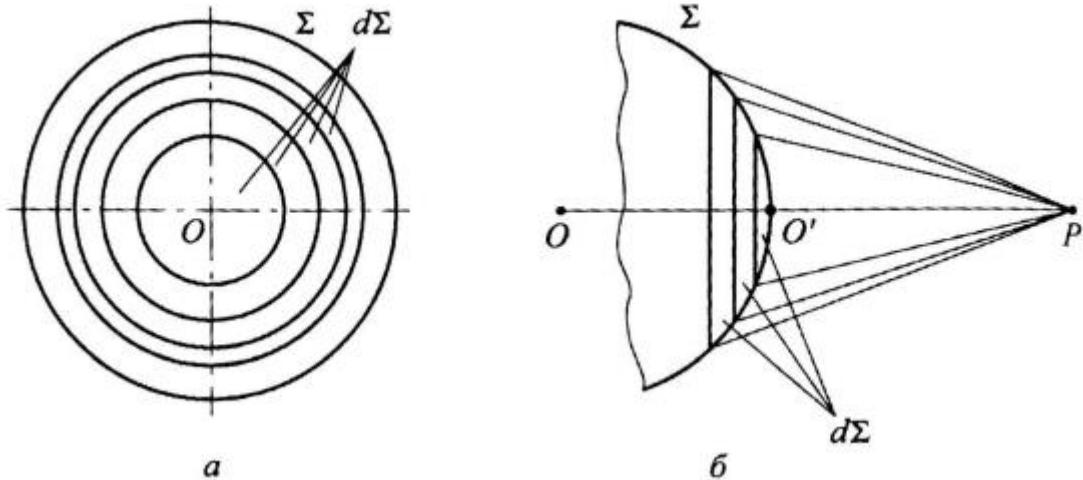
### 37. Дифракция света. Метод зон Френеля.

**Зона Френеля** - область на фронте волны

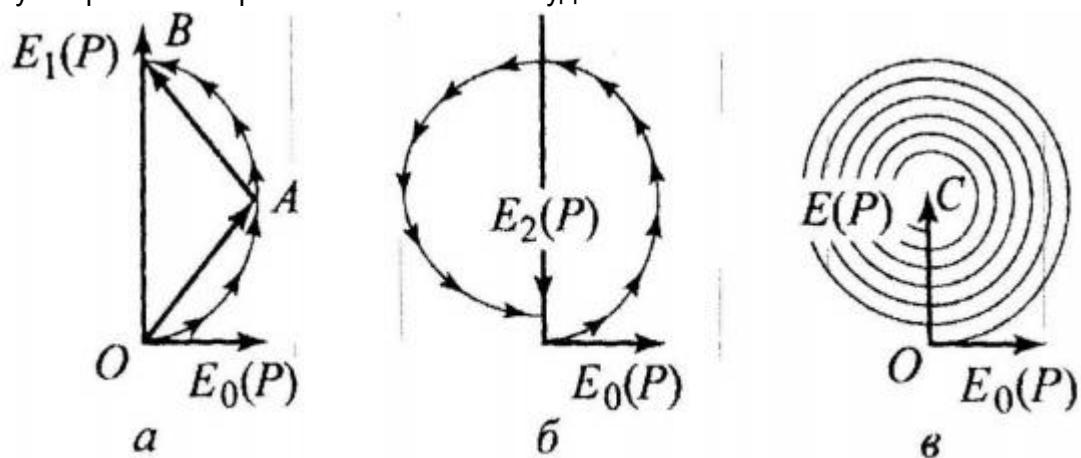
**Дифракция** - это совокупность явлений вызванных взаимодействием электромагнитных волн с любыми неоднородностями среды. Дифракция в частности приводит к явлению огибания волной препятствия. Различают два вида дифракции: дифракция Френеля и дифракция Фраунгофера . Отличие этих двух видов дифракции состоит в расстоянии и форме фронта волны в точке наблюдения.

(Вопрос тесно связан с понятиями дифракции Френеля, дифракции Фраунгофера и принципом Гюйгенса-Френеля, поэтому про них могут спросить)

Из принципа Гюйгенса-Френеля следует, что наблюдаемая электромагнитная волна в произвольный момент времени является суммой волн, испускаемых бесконечным количеством точечных источников, расположенных на фронте волны в начальный момент времени. Рассмотрим сферический фронт волны в некоторый момент времени.

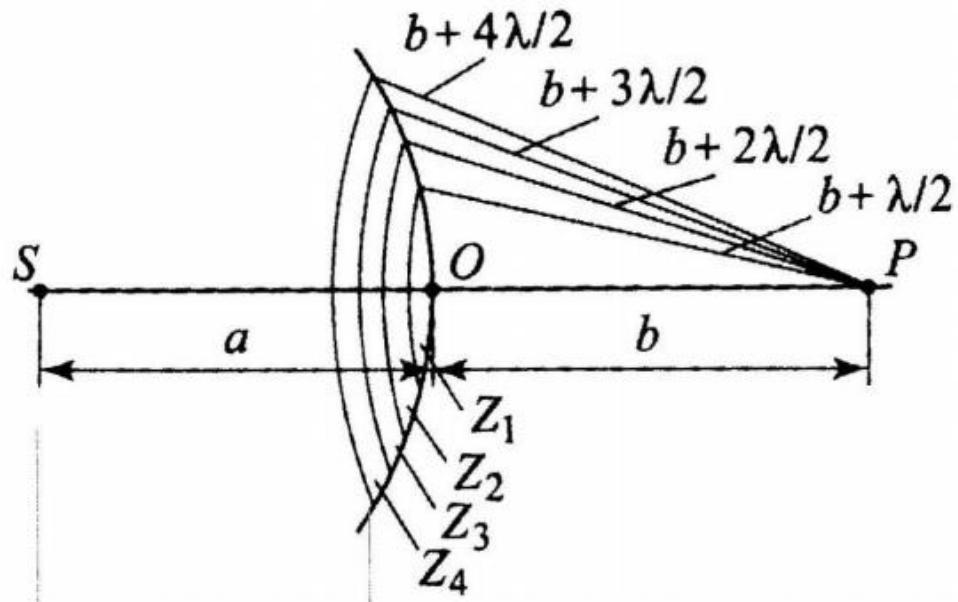


Выделим на этом фронте множество сферических сегментов. Фаза волны, дошедшая до точки Р от точек, лежащих на одной окружности, будет одинакова. Построим суммарный вектор комплексной амплитуды в точке Р.

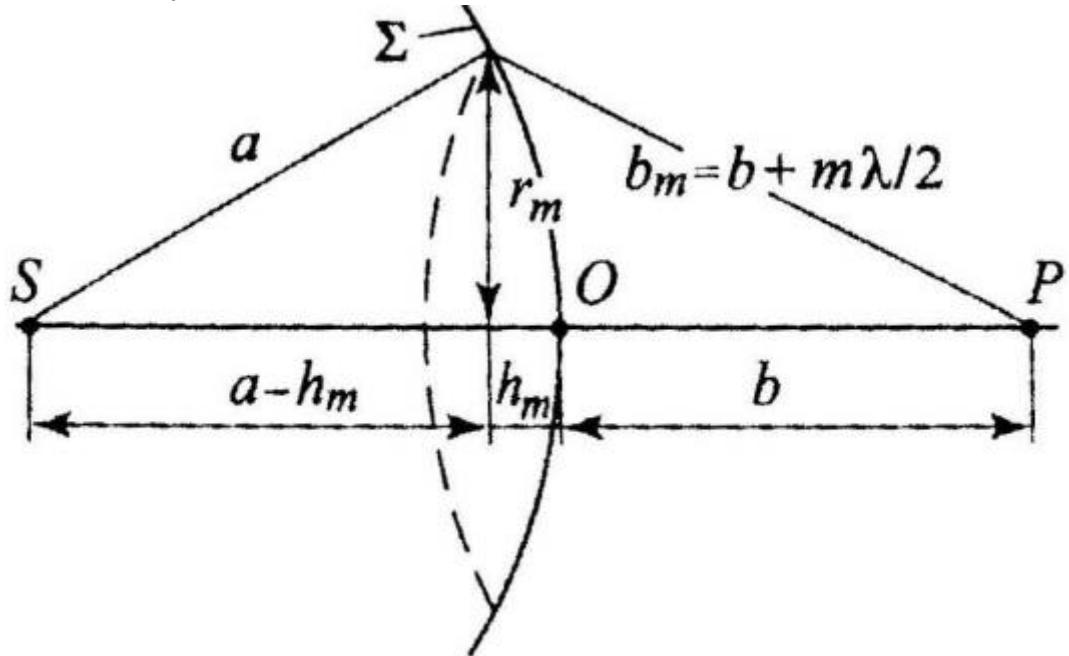


Совокупность точек на фронте волны мы разобьем на зоны по следующему принципу. К первой зоне мы отнесем точку О' и все соседние с ней точки, фаза волны от которых в точке Р отличается менее чем на  $\pi$  радиан. Эта зона называется первой зоной

Френеля . К второй зоне Френеля отнесем окружность и все граничащие с ней точки, фаза волны от которых в точке P отличается от точки O' менее чем на  $2\pi$ , но не менее чем на  $\pi$ . Процесс можно продолжать бесконечно, изобразим фронт волны с построенными по указанному принципу зонами.



Определим радиус  $m$ -ой зоны Френеля:



$$r_m^2 = a^2 - (a - h_m)^2 = \left(b + m\frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b + h_m)^2$$

Так как значение  $\lambda$  очень мало, можно пренебречь значениями выражений, которые содержат данную переменную в квадрате.

$$\Rightarrow h_m = \frac{mb\lambda}{2(a+b)}$$

Если  $a \rightarrow \infty$ , то волновой фронт плоский, и в этом случае:

$$r_m = \sqrt{mb\lambda}$$

Выясним, какова интенсивность волны в точке Р, полученная суммированием всех зон Френеля:

$$\begin{aligned} E(P) &= \frac{E_1}{2} \\ \Rightarrow I_0 &= \frac{I_1}{4} \end{aligned}$$

где  $I_0$ - суммарная интенсивность всех зон.

В заключении выясним ещё одно свойство зон френеля, касающиеся из площадей. Из рис. определим приближенно площадь сегмента сферы радиуса а с высотой  $h_m$ :

$$\Sigma_m = 2\pi a h_m = \frac{m\pi ab\lambda}{a+b}$$

Тогда площадь m-й зоны Френеля равна  $\Delta\Sigma_m$ :

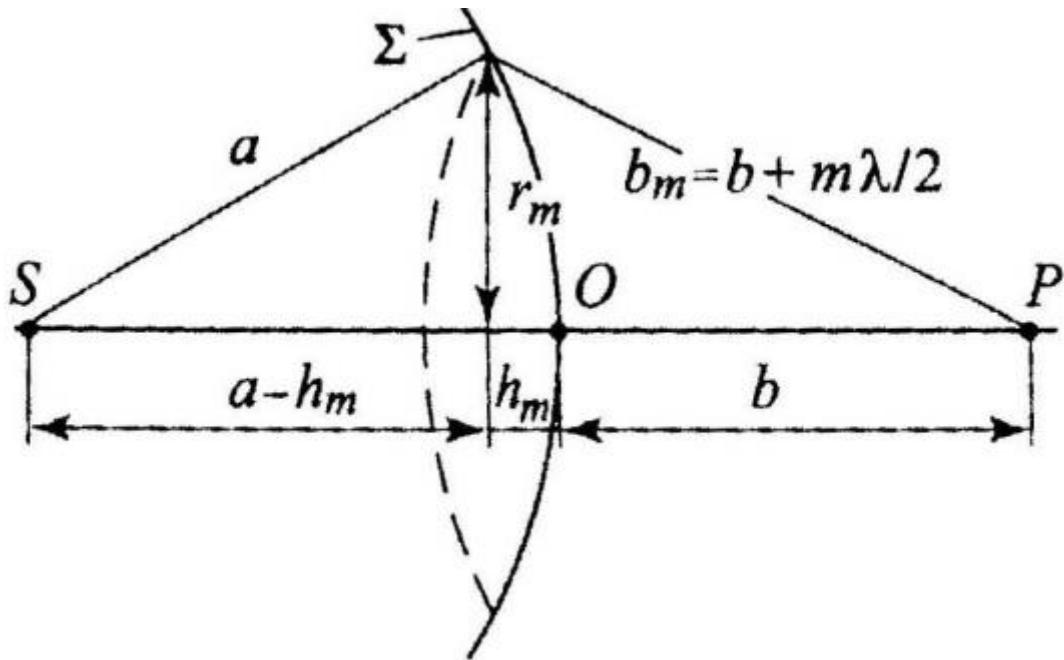
$$\Delta\Sigma_m = \Sigma_m - \Sigma_{m-1} = \frac{\pi ab\lambda}{a+b}$$

Следовательно, площадь зоны Френеля не зависит от ее номера.

## 38. Дифракция света на круглом отверстии и непрозрачном диске.

### Общие сведения

[obj]



[obj][obj][obj]

\*\*Обоснование без векторной диаграммы\*\*

Колебания, возбуждаемые в точке Р между двумя соседними зонами, противоположны по фазе, так как разность хода от этих зон до точки Р  $\Delta = \lambda/2$ .

Поэтому при сложении этих колебаний, они будут взаимно ослаблять друг друга:

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots$$

где  $A$  - амплитуда результирующего колебания, а  $A_i$  - амплитуда колебания, возбуждаемая  $i$ -й зоной Френеля.

$$h_m = \frac{mb\lambda}{2(a+b)}$$

Определим приближенно площадь сегмента сферы радиуса  $a$  с высотой  $h_m$ :

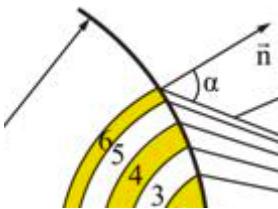
$$\Sigma_m = 2\pi a h_m = \frac{m\pi ab\lambda}{a+b}$$

Тогда площадь  $m$ -й зоны Френеля равна  $\Delta\Sigma_m$ :

$$\Delta\Sigma_m = \Sigma_m - \Sigma_{m-1} = \frac{\pi ab\lambda}{a+b}$$

Следовательно, площадь зоны Френеля не зависит от ее номера. Это значит, что при не слишком больших  $i$  площади соседних зон одинаковы.

Величина  $A_i$  зависит от площади  $S_i$  зоны и угла  $\alpha_i$  между нормалью к поверхности и прямой, направленной в точку Р.



С увеличением номера зоны возрастает угол  $\alpha_i$  и, следовательно, уменьшается интенсивность излучения зоны в направлении точки  $P$ , т.е. уменьшается амплитуда  $A_i$ .

$$A_1 > A_2 > A_3 > \dots > A_i > \dots$$

Общее число зон Френеля, которые умещаются на части сферы, обращенной в сторону точки  $P$ , очень велико. Отсюда следует, что углы  $\alpha_i$  между нормалью к зоне и направлением на точку  $P$  у соседних зон примерно равны, т.е. что **амплитуды волн, приходящих в точку  $P$  от соседних зон, примерно равны**.

Световая волна распространяется прямолинейно. Фазы колебаний, возбуждаемые соседними зонами, отличаются на  $\pi$ . Поэтому в качестве допустимого приближения можно считать, что амплитуда колебания  $A_m$  от некоторой  $m$ -й зоны равна среднему арифметическому от амплитуд примыкающих к ней зон, т.е.

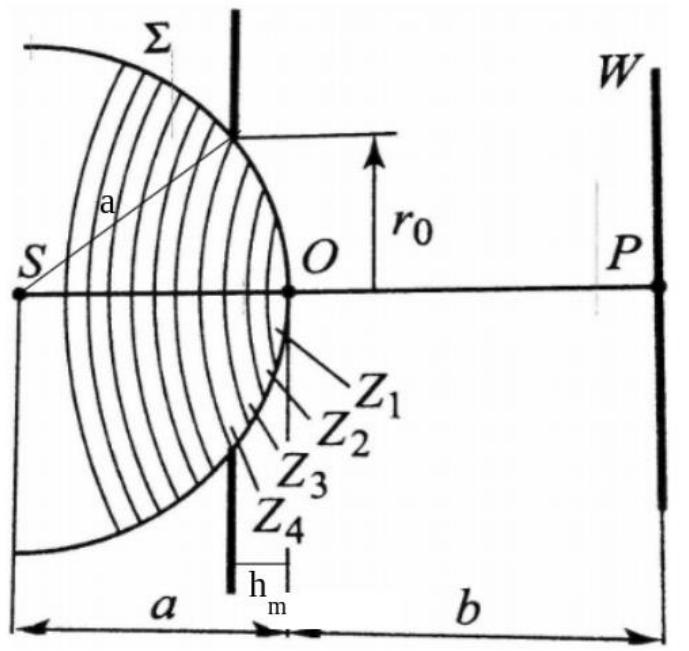
$$A_m = \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}$$

Тогда

$$A = \frac{A_1}{2} + \left( \frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left( \frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots$$

Так как амплитуды волн, приходящих в точку  $P$  от соседних зон, примерно равны, то выражения в скобках равны нулю, значит результирующая амплитуда  $A = A_1/2$ .

### Дифракция на круглом отверстии.



Из формул

$$r_0^2 = a^2 - (a - h_m)^2$$

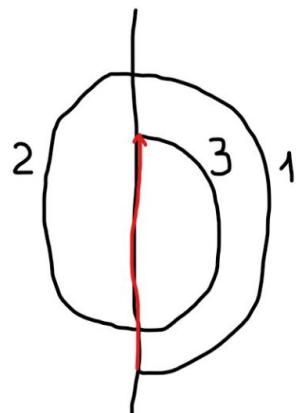
$$h_m = \frac{mb\lambda}{2(a+b)}$$

определим кол-во открытых зон Френеля. Так как значение  $\lambda$  очень мало, можно пренебречь значениями выражений, которые содержат данную переменную в квадрате.

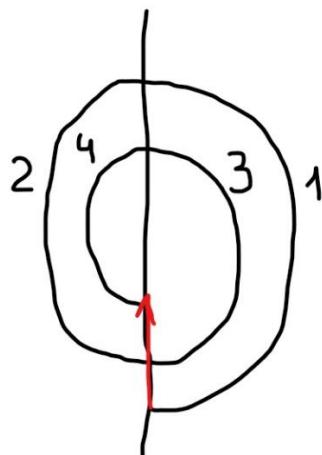
$$m = \frac{r_0^2}{\lambda} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

Из векторной диаграммы для этого случая видно, что если открыто чётное число зон Френеля, то в точке Р наблюдается темное пятно, а если нечётное, то светлое.

Пример для 3 открытых зон:



Для 4 открытых зон:



\*\*Обоснование без векторной диаграммы\*\*

Рассмотрим случай, когда открыто чётное кол-во зон Френеля  $2n$ . Тогда:

$$A = (A_1 - A_2) + (A_3 - A_4) + \dots + (A_{2n-1} - A_{2n}) \approx 0$$

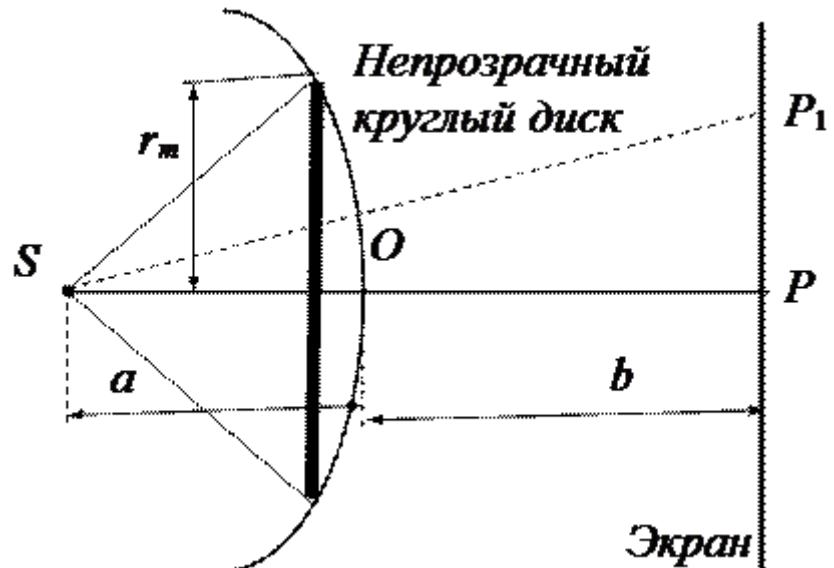
Данная сумма близка к нулю, а значит в точке наблюдения будет темное пятно.

В случае, если открыто нечетное кол-во зон Френеля  $(2n+1)$ , сумма

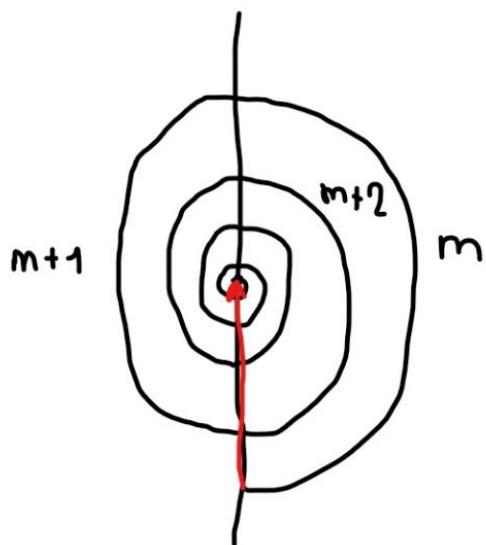
$$A = (A_1 - A_2) + (A_3 - A_4) + \dots + A_{2n+1}$$

не равна нулю. Тогда в точке наблюдения будет светлое пятно.

Дифракция света на непрозрачном диске.



Пусть сферическая волна встречает на своем пути непрозрачный диск. Дифракционную картину наблюдаем на экране. От источника  $S$  проводим прямую линию, проходящую через центр диска и соединяющую  $S$  и точку  $P$  на экране. В данном случае закрытый диском участок волнового фронта необходимо исключить из рассмотрения и зоны Френеля строить, начиная с краев диска. Пусть диск закрывает  $m$  первых зон Френеля.



**\*\*Обоснование без векторной диаграммы\*\***

Тогда **амплитуда результирующего колебания** в точке  $P$  равна

$$A = A_{m+1} - A_{m+2} + A_{m+3} - A_{m+4} \dots = \\ = \frac{A_{m+1}}{2} + \left( \frac{A_{m+1}}{2} - A_{m+2} + \frac{A_{m+3}}{2} \right) + \left( \frac{A_{m+3}}{2} - A_{m+4} + \frac{A_{m+5}}{2} \right) + \dots$$

Так как выражения, стоящие в скобках равны нулю, то

$$A = \frac{A_{m+1}}{2}$$

Следовательно, в точке Р всегда наблюдается интерференционный максимум (светлое пятно), соответствующий половине действия первой открытой зоны Френеля. Центральный максимум окружен концентрическими тёмными и светлыми кольцами. Интенсивность света убывает от центра к краям. Если увеличивать размер диска, то пятно в центре будет уменьшаться и совсем исчезнет (станет неразличимым).

### 39. Дифракция Фраунгофера. Условия минимумов и максимумов при дифракции Фраунгофера.

Тип дифракции, при котором дифракционная картина образуется параллельными пучками, называется **дифракцией Фраунгофера**.

Параллельные лучи проявляются, если источник и экран находятся в бесконечности. Практически используется две линзы: в фокусе одной – источник света, а в фокусе другой – экран.

#### **Дифракция света на одной щели:**

Пусть в непрерывном экране есть щель: ширина щели  $AB = b$ , длина щели (перпендикулярно плоскости листа)  $l \gg b$  (рис. 9.5). На щель падают параллельные лучи света. Для облегчения расчета считаем, что в плоскости щели  $AB$  амплитуды и фазы падающих волн одинаковы.

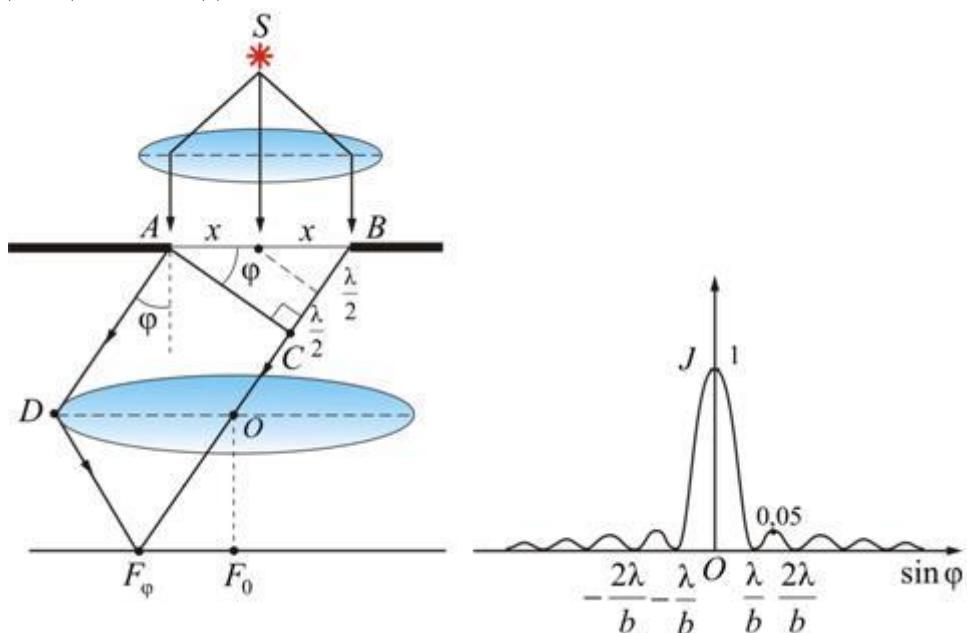


Рис. 9.5

Разобьем щель на зоны Френеля так, чтобы оптическая разность хода между лучами, идущими от соседних зон, была равна  $\lambda/2$ . Если на ширине щели укладывается четное число таких зон, то в точке  $F_\phi$  ( **побочный фокус** линзы) будет наблюдаться **минимум интенсивности**, если **нечетное - максимум интенсивности**:

$$b \sin \phi = \pm 2m \frac{\lambda}{2} \quad \text{условие минимума интенсивности;}$$

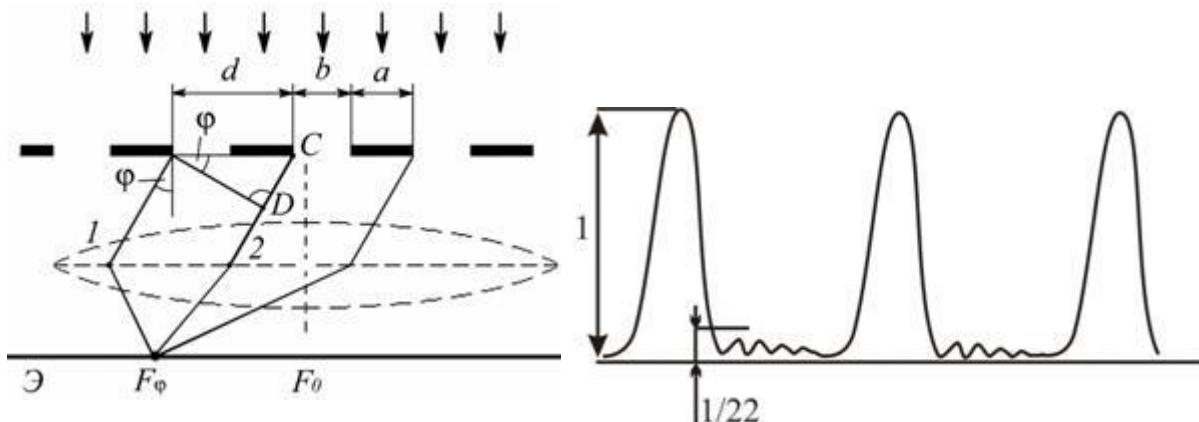
$$b \sin \phi = \pm (2m+1) \frac{\lambda}{2} \quad \text{условие максимума интенсивности}$$

С увеличением ширины щели  $b$  положения минимумов сдвигаются к центру, центральный максимум становится резче. При уменьшении ширины щели  $b$  вся картина расширяется, расплывается, центральная полоска тоже расширяется, захватывая все большую часть экрана, а интенсивность ее уменьшается.

#### **Дифракция света на дифракционной решетке:**

Одномерная дифракционная решетка - система из одинаковых по ширине щелей в экране, разделенных также одинаковыми по ширине непрозрачными промежутками.

Дифракционная картина на решетке определяется как результат взаимной интерференции волн, идущих от всех щелей. Линза собирает все лучи, падающие на нее под одним углом и не вносит никакой дополнительной разности хода.



Пусть луч 1 падает на линзу под углом  $\phi$  (угол дифракции). Световая волна, идущая под этим углом от щели, создает в точке  $F_\phi$  максимум интенсивности. Второй луч, идущий от соседней щели под тем же углом  $\phi$ , придет в ту же точку  $F_\phi$ . Оба эти луча придут в фазе и будут усиливать друг друга, если оптическая разность хода будет равна  $m\lambda$ :  $\Delta = CD = d \sin \phi$ .

**Условие максимума** для дифракционной решетки будет иметь вид:

$$d \sin \phi = \pm m\lambda, \text{ где } m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots .$$

Максимумы, соответствующие этому условию, называются главными максимумами. Значение величины  $m$ , соответствующее тому или иному максимуму называется порядком дифракционного максимума. В точке  $F_0$  всегда будет наблюдаться центральный дифракционный максимум.

Так как свет, падающий на экран, проходит только через щели в дифракционной решетке, то **условие минимума** для щели и будет условием главного дифракционного минимума для решетки:

$$b \sin \phi = \pm m\lambda.$$

Конечно, при большом числе щелей, в точки экрана, соответствующие главным дифракционным минимумам, от некоторых щелей свет будет попадать и там будут образовываться побочные дифракционные максимумы и минимумы (рис. 9.7). Но их интенсивность, по сравнению с главными максимумами, мала.

При условии  $\Delta = d \sin \phi = (2m+1) \frac{\lambda}{2}$ , волны, посыпаемые каждой щелью, будут гаситься в результате интерференции и появятся **дополнительные минимумы**.

Количество щелей определяет световой поток через решетку. Чем их больше, тем большая энергия переносится волной через нее. Кроме того, чем больше число щелей, тем больше дополнительных минимумов помещается между соседними максимумами. Следовательно, максимумы будут более узкими и более интенсивными (рис. 9.8).

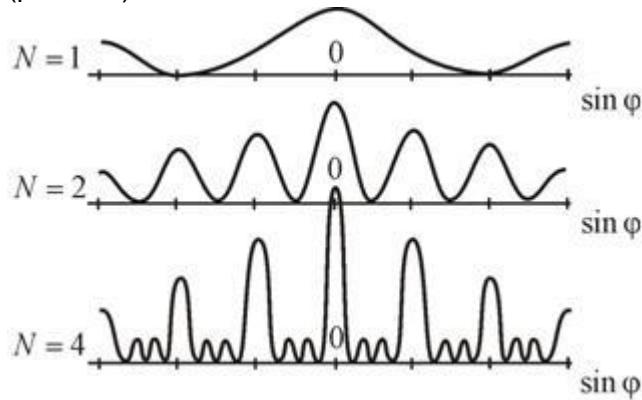


Рис. 9.8

Т.к угол дифракции пропорционален длине волны  $\lambda$ . Значит, дифракционная решетка разлагает белый свет на составляющие, причем отклоняет свет с большей длиной волны (красный) на больший угол (в отличие от призмы, где все происходит наоборот).

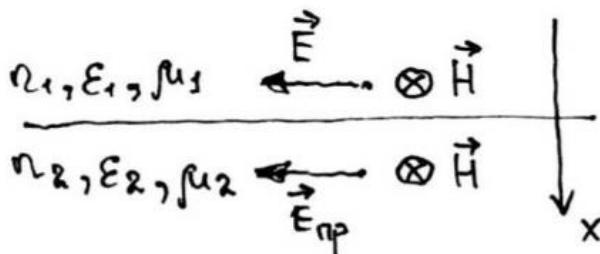
#### 40. Нормальное падение электромагнитной волны на границу раздела двух сред.

Получим соотношения напряженностей  $E$  падающей,  $E_0$  отраженной и  $E_{pr}$  плоской монохроматической волны при прохождении границы раздела двух

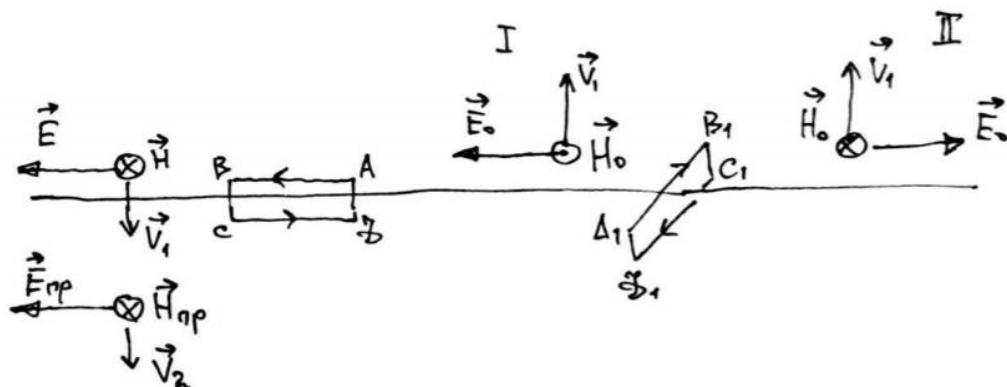
сред. Известно, что плоская монохроматическая волна характеризуется следующими соотношениями:

$$E = E_m \cos(\omega t - kx), \quad H = H_m \cos(\omega t - kx)$$

Пусть на границе раздела имеются значения напряженностей, показанные на рис.:



Пусть так же для простоты выполнено:  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ . Для отраженной волны возможны два варианта:



Рассмотрим I вариант и, если окажется, что  $E_0$  имеет отрицательный знак, то верным будет вариант II.

Рассмотрим замкнутый контур на границе раздела, причем ширину устремим к нулю. Запишем 1-й фундаментальный закон электромагнетизма:

$$\oint_{\gamma} E_l dl = -\frac{d}{dt} \left( \iint_S B_n dS \right)$$

Так как  $s \rightarrow 0$ , то и  $\Phi \rightarrow 0$ , а значит правая часть будет равна нулю. Тогда:

$$(E + E_0) AB - E_{\text{пр}} CD = 0$$

$$E + E_0 = E_{\text{пр}}$$

Рассмотрим второй контур и применим к нему 2-й фундаментальный закон Максвелла:

$$\oint_{\gamma} H_l dl = \frac{d}{dt} \left( \iint_S D_n dS \right)$$

$$\oint_{\gamma} H_l dl = 0.$$

Аналогично из  $S \rightarrow 0 \Rightarrow \Phi \rightarrow 0$ , т.е.  $\gamma$  Тогда:

$$(H - H_0) A_1 B_1 - H_{\text{пр}} C_1 D_1 = 0$$

$$H - H_0 = H_{\text{пр}}$$

Так как волна плоская, то для нее справедливы соотношения:

$$\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H$$

$$\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_0} E_0 = \sqrt{\mu_0} H_0$$

$$\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_0} E_{\text{пр}} = \sqrt{\mu_0} H_{\text{пр}}$$

Подставим эти выражения в полученные соотношения:

$$E + E_0 = E_{\text{пр}}$$

$$H - H_0 = H_{\text{пр}}$$

Из первого получим:

$$\frac{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_0}} (E - E_0) = \frac{\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_0}} E_{\text{пр}}$$

Т.к.  $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}$ , а  $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$ , то получим:

$$\begin{cases} n_1 (E - E_0) = n_2 E_{\text{пр}} \\ E + E_0 = E_{\text{пр}} \end{cases}$$

Умножим второе на  $n_1$  и сложим с первым, получим:

$$2n_1 E = (n_1 + n_2) E_{\text{пр}} \Rightarrow$$

$$E_{\text{пр}} = \frac{2n_1 E}{n_1 + n_2} \quad (2)$$

Если умножить второе на  $n_2$  и вычесть из первого, то получим:

$$E_0 = \frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2} E \quad (1)$$

Для (1) видим, что, если  $n_1 > n_2$ , то справедлив вариант I для отраженной волны. В этом случае направление поля не меняет знак. Если  $n_1 < n_2$ , то  $E_0 < 0$ , а это значит, что имеет место вариант II для отраженной волны. В этом случае можно считать, что **в процессе отражения волна потеряла или приобрела половину длины волны**. В то же время, если посмотреть на выражение (2), то мы увидим, что прошедшая волна ( $E_{\text{пр}}$ ) всегда имеет то же направление, что и падающая. Теперь определим вектор пойнтинга  $S$ . Учтём известное соотношение для ЭМ волны  $\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} E = \sqrt{\mu \mu_0} H$ , тогда:

$$\mathcal{S} = EH = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}}E^2 = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon}{\mu\mu_0}}E_m^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

Будем считать среднее значение вектора Пойнтига:  $\bar{S}$ . Учитывая известное соотношение для косинуса:  $\overline{\cos^2(\omega t - kx)} = \frac{1}{2}$ , получим

$$\bar{S} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon\epsilon}{\mu\mu_0}}E_m^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}nE_m^2$$

Тогда для интенсивности волны  $I$  можно записать:

$$I \sim \bar{S} = nE_m^2$$

Теперь определим коэффициент отражения и преломления для данной границы раздела:

$$\rho = \frac{I_{\text{отр}}}{I_{\text{пад}}}$$

$$\tau = \frac{I_{\text{прош}}}{I_{\text{пад}}}$$

$$\rho = \frac{n_1 E_0^2}{n_1 E^2} = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

$$\tau = \frac{n_2 E_{\text{пр}}^2}{n_1 E^2} = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

Так как поглощение не учитывалось, то сумма коэффициентов должна быть равна нулю, и, действительно:

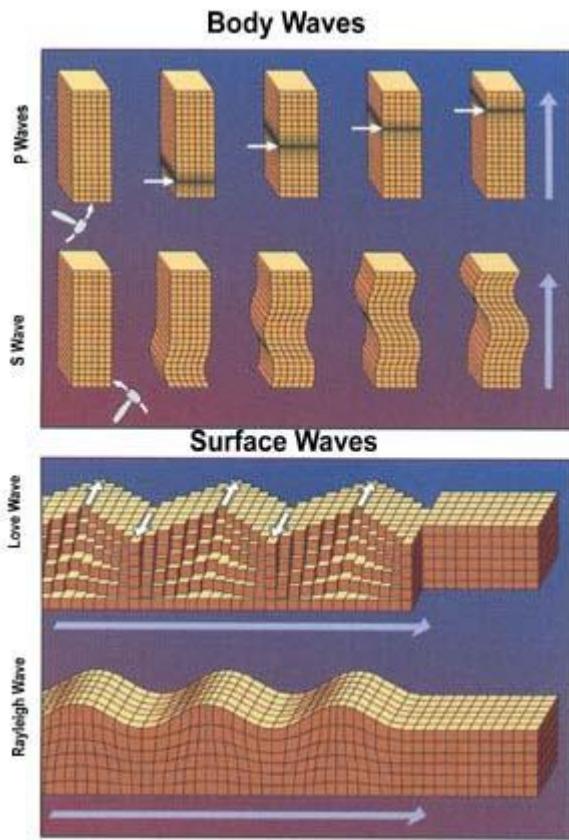
$$\rho + \tau = 1$$

#### 41/42. Формулы Френеля. Вывод формулы для р-волны. Формула тангенсов. Угол Брюстера для р-волны.

На консультации Васильев сказал, что слово Р-волна можно выкинуть, разве что надо знать, что это вообще такое, а так это к делу не относится, поэтому вот вам определение:

Р-волны - продольные, С-волны - поперечные, это все - объемные волны, они могут проходить только внутри объема. (первые в любых субстанциях, вторые - только в твердых телах).

Р-волны представляют собой тип упругих волн, которые могут проходить через газы (как звуковые волны), твердые тела и жидкости. Другое название - сейсмические волны. Это продольная волна, вектор ее распространения параллелен вектору поляризации.

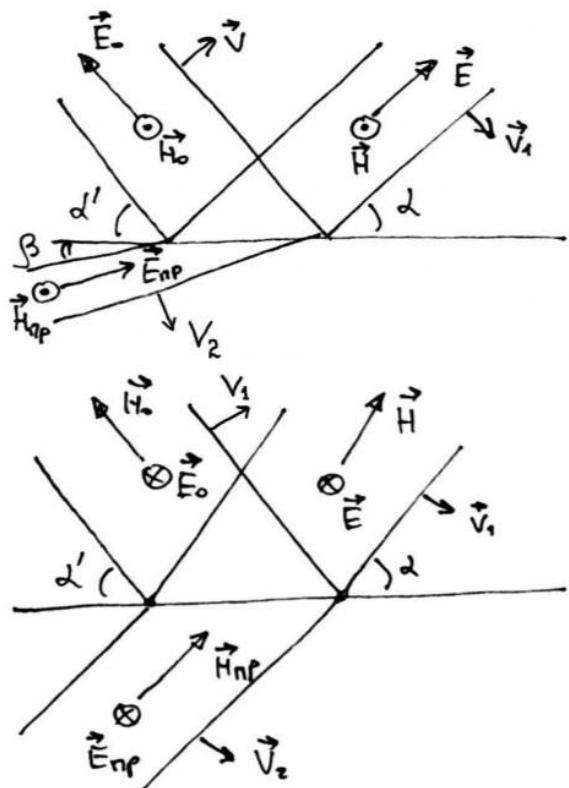


пикча для понимания

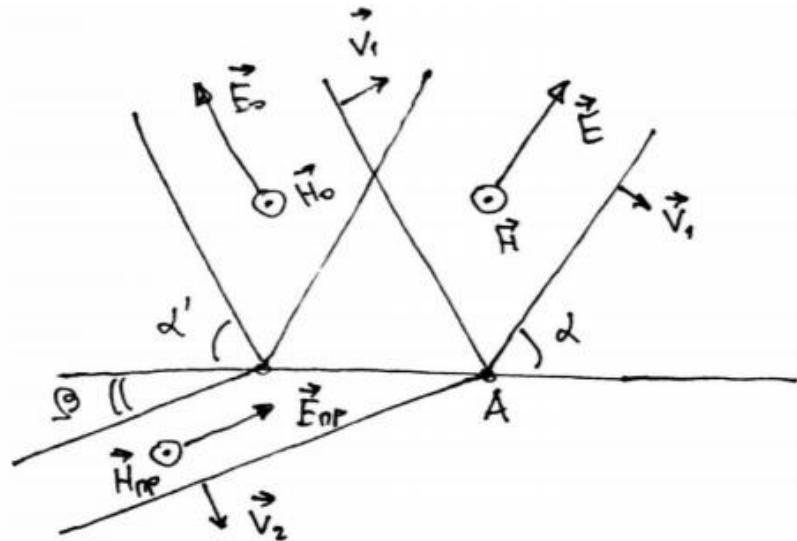
Дальше сам вопрос

[Формулы Френеля Wiki](#)

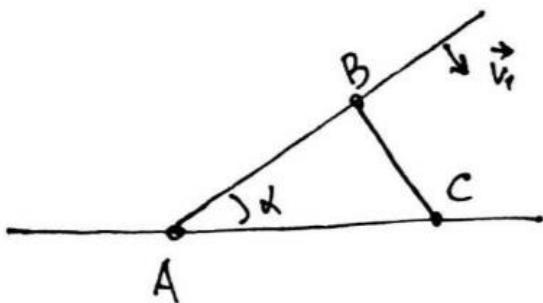
В этой части будет рассматриваться не плоская монохроматическая волна, а сгусток Хевисайда. Задача ставится аналогично предыдущей. Сгусток Хевисайда падает на границу раздела двух идеальных изотропных диэлектриков. Опять возможны два случая направления напряжённости отраженной волны:



Рассмотрим для определённости I-й вариант.

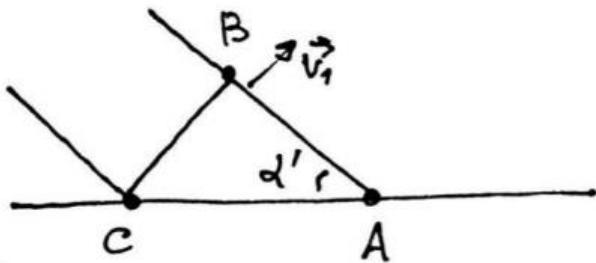


Все 3 сгустка имеют общую границу и движутся как единое целое вдоль границы с некоторой скоростью  $u$ . Определим эту скорость для каждого из частей сгустка.



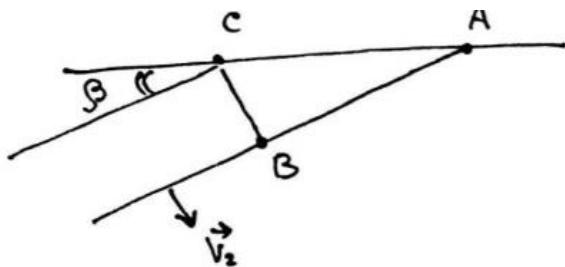
$$BC = v_1 t, \quad AC = u t$$

$$ut = \frac{v_1 t}{\sin \alpha} \Rightarrow u = \frac{v_1}{\sin \alpha}$$



$$BC = v_1 t, \quad AC = u_0 t$$

$$u_0 t = \frac{v_1 t}{\sin \alpha'} \Rightarrow u_0 = \frac{v_1}{\sin \alpha'}$$



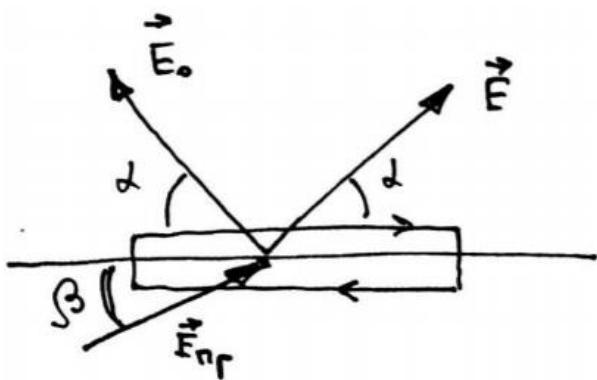
$$BC = v_2 t, \quad AC = u_{\text{пр}} t$$

$$u_{\text{пр}} t = \frac{v_2 t}{\sin \beta} \Rightarrow u_{\text{пр}} = \frac{v_2}{\sin \beta}$$

Теперь используем тот факт, что точка А общая для всех частей сгустка и движется с

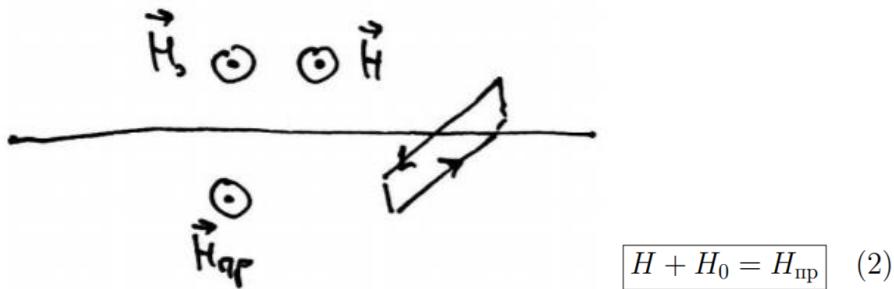
$$u = u_0 \Rightarrow \frac{v_1}{\sin \alpha} = \frac{v_1}{\sin \alpha'} \Rightarrow \alpha = \alpha'$$

$$u = u_{\text{пр}} \Rightarrow \frac{v_1}{\sin \alpha} = \frac{v_2}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$



Для этого применим 1-й фундаментальный закон электромагнетизма, аналогично случаю плоской волны, получим:

$$E \cos \alpha - E_0 \cos \beta = E_{\text{пр}} \cos \beta \quad (1)$$



Используя соотношение, справедливо для сгустка Хевисайда:

$$\sqrt{\epsilon\epsilon_0}E = \sqrt{\mu\mu_0}H$$

$$\sqrt{\epsilon\epsilon_0}E = \sqrt{\mu\mu_0}H$$

$$\sqrt{\epsilon\epsilon_0}E_0 = \sqrt{\mu\mu_0}H_0$$

$$\sqrt{\epsilon\epsilon_0}E_{\text{пр}} = \sqrt{\mu\mu_0}H_{\text{пр}}$$

Выразим из этих формул напряжённость электрического поля и подставим в (2), получим:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu_0}}(E + E_0) &= \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu_0}}E_{\text{пр}} & \left\{ \begin{array}{l} E \cos \alpha - E_0 \cos \alpha = E_{\text{пр}} \cos \beta \\ \sqrt{\epsilon_1}(E + E_0) = \sqrt{\epsilon_2}E_{\text{пр}} \end{array} \right. \\ \sqrt{\epsilon_1}(E + E_0) &= \sqrt{\epsilon_2}E_{\text{пр}} & (2') \end{aligned}$$

Умножим первое на  $\sqrt{\epsilon_1}$ , а второе на  $\cos \alpha$  и сложим уравнения:

$$2\sqrt{\epsilon_1} \cos E = E_{\text{пр}} (\sqrt{\epsilon_2} \cos \alpha + \sqrt{\epsilon_1} \cos \beta)$$

$$E_{\text{пр}} = \frac{2\sqrt{\epsilon_1} \cos \alpha E}{\sqrt{\epsilon_1} \left( \frac{\sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1}} \cos \alpha + \cos \beta \right)} =$$

$$\frac{2 \sin \beta \cos \alpha E}{\sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta} = \frac{4 \sin \beta \cos \alpha E}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta} \quad \left( \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \right)$$

$$= \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} E$$

Вернемся к системе и на этот раз умножим первое уравнение на  $\sqrt{\epsilon_2}$ , второе на  $\cos \beta$  и вычтем из первого второе:

$$E (\cos \alpha \sqrt{\varepsilon_2} - \cos \beta \sqrt{\varepsilon_1}) = E_0 (\sqrt{\varepsilon_2} \cos \alpha + \sqrt{\varepsilon_1} \cos \beta)$$

$$E_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} \left( \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}} \cos \alpha - \cos \beta \right) E}{\sqrt{\varepsilon_1} \left( \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}} \cos \alpha + \cos \beta \right)} =$$

$$\frac{\sin \alpha \cos \alpha - \sin \beta \cos \beta}{\sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta} E = \frac{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta} E$$

$$E_0 = \frac{\sin(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} E = \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} E$$

Рассмотрим частный случай полученного выражения, когда  $\alpha + \beta = \pi/2$ . Тогда  $\tan(\pi/2) = \infty$  и  $E_0 = 0$ ! Последнее означает, что существует только прошедшая волна. Использованное условие для углов называется условием Брюстера.