1. **Сформулировать определение первообразной. Сформулировать свойства первообразной и неопределённого интеграла**

   Функция $y = F(x)$ называется первообразной функции $y = f(x)$ в интервале $(a; b)$, если для $\forall\, x \in (a; b)$ $y = F(x)$ дифференцируема и $F'(x) = f(x)$

   <u>Свойства первообразной:</u>

   1) Если $y = F(x)$ – первообразная функции $y = f(x)$ в интервале $(a; b)$, $C - const$, то $F(x) + C$ – первообразная.
   2) Если функция $\varphi(x)$ дифференцируема в интервале $(a; b)$ и $\varphi'(x) = 0$ для $\forall\, x \in (a; b)$, то $\varphi(x) = C$, $C - const$
   3) Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – $\forall$ первообразные функции $y = f(x)$ в интервале $(a; b)$, то $F_1(x) - F_2(x) = C$, $C - const$
   4) Если функция $y = f(x)$ непрерывна в интервале $(a; b)$, то она имеет в этом интервале первообразную

   <u>Свойства неопределённого интеграла:</u>

   1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
   2) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$
   3) $\int dF(x) = F(x) + C$
   4) $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$
   5) $\int \left(f_1(x) \pm \dots \pm f_n(x)\right)dx = \int f_1(x)dx \pm \dots \pm \int f_n(x)dx$
   6) Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $U = \varphi(x)$ – $\forall$ дифференцируемая функция, то $\int f(U)dU = F(U) + C$

2. **Разложение правильной рациональной дроби на простейшие. Интегрирование простейших дробей**

   $\forall$ правильная рациональная дробь $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ (при $m < n$), где $P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1} * (x - x_2)^{k_2} * \dots * (x - x_s)^{k_s} * (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} * (x^2 + p_2x + q_2)^{l_2} * \dots * (x^2 + p_mx + q_m)^{l_m}$ единственным образом может быть представлена в виде суммы простейших дробей:

   $$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{1}{a_0}\left[\frac{A_1}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{A_{k_1}}{x-x_1} + \dots + \frac{B_1}{(x-x_s)^{k_s}} + \frac{B_2}{(x-x_s)^{k_s-1}} + \dots + \frac{B_{k_s}}{x-x_s} + \frac{C_1x+D_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1}} + \dots + \frac{C_{l_1}x+D_{l_1}}{x^2+p_1x+q_1} + \dots + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_mx+q_m)^{l_m}} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_mx+q_m)^{l_m-1}} + \dots + \frac{M_{l_m}x+N_{l_m}}{x^2+p_mx+q_m}\right],$$

   где $A_1, A_2, \dots, B_{k_s}, \dots, C_1, D_1, \dots, N_{l_m}, M_{l_m}$ – постоянные неизвестные коэффициенты, называемые коэффициентами разложения.

   <u>Интегрирование простейших дробей:</u>

   1) $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x - a| + C$
   2) $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \frac{A(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C, k \neq 1$
   3) $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \left|\begin{matrix} x + \frac{p}{2} = t \\ dx = dt \\ x = t - \frac{p}{2}\end{matrix}\right| = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}dt = M\int\frac{t\,dt}{t^2+a^2} + \left(N - M\frac{p}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{M}{2}ln|t^2 + a^2| + \left(N - M\frac{p}{2}\right)\frac{1}{a}\,arctg\frac{t}{a} = \frac{M}{2}ln|x^2 + px + q| + \left(N + M\frac{p}{2}\right)\frac{1}{a}\,arctg\frac{2x+p}{2a} + C$, где $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$
   4) $Y_m = \int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m} = \left|\begin{matrix} U = (t^2 + a^2)^{-m} & dU = -m(t^2 + a^2)^{-m-1} * 2tdt \\ dV = dt & V = t\end{matrix}\right| = \frac{t}{(t^2+a^2)^m} + 2m\int\frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^{m+1}} = \frac{t}{(t^2+a^2)^m} + 2m\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m} - 2ma^2\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{m+1}} \Leftrightarrow Y_m = \frac{t}{(t^2+a^2)^m} + 2mY_m - 2ma^2Y_{m+1}$

      $Y_{m+1} = \frac{1}{2ma^2}\left[\frac{t}{(t^2+a^2)^m} + (2m - 1)Y_m\right]$, где $Y_1 = \int\frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\,arctg\frac{t}{a} + C$

      $m = 1$: $Y_2 = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{t}{t^2+a^2} + Y_1\right]$

      $m = 1$: $Y_3 = \frac{1}{4a^2}\left[\frac{t}{(t^2+a^2)^2} + 3 * Y_2\right]$

3, 4, 5, 6, 8, 11. **Сформулировать свойства определенного интеграла**

3, 4, 5, 6, 8, 11. **Сформулировать свойства определенного интеграла**

1) Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то $\int_a^b \big(f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)\big)dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm f_2(x)dx \pm \cdots \pm \int_a^b f_n(x)dx$
2) $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$
3) $\int_a^b Cdx = C(b-a)$
4) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$
5) Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и $f(x) \geq 0, (f(x) \not\equiv 0)(f(x) \leq 0)$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$, $\left(\int_a^b f(x)dx \leq 0\right)$
6) Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы на $[a,b]$ и $f(x) \geq \varphi(x)$ для $\forall x \in (a,b)$, то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx$
7) Для $\forall$ чисел a, b, c расположенных в интервале интегрируемости функции $f(x)$ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
8) Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$
9) Если m и M соответственно наименьшее и наибольшее значения интегрируемой на $[a,b]$ функции $f(x)$, то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$
10) Если m и M соответственно наименьшее и наибольшее значения интегрируемой на $[a,b]$ функции $f(x)$ и функция $\varphi(x) \geq 0$ интегрируема на $[a,b]$, то $m\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \leq M\int_a^b \varphi(x)dx$
11) Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и функция $\varphi(x)$ интегрируема и знакопостоянна на $[a;b]$, то существует точка $c \in (a;b)$ такая, что $\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(c)\int_a^b \varphi(x)\,dx$
12) Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то она ограниченна на этом отрезке

3. **Доказать теорему о сохранении определенным интегралом знака подынтегральной функции**

   Если функция $y = f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и $f(x) \geq 0$ $(f(x) \not\equiv 0)$ $(f(x) \leq 0)$, то $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$, $\left(\int_a^b f(x)\,dx \leq 0\right)$

   $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) * \Delta x_k$. Пусть по условию: $f(\xi_k) \geq 0$; $\Delta x_k \geq 0 \Rightarrow f(\xi_k) * \Delta x_k \geq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n f(\xi_k) * \Delta x_k \geq 0 \Rightarrow$ (По теореме о сохранении знака предела функции) $\Rightarrow \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) * \Delta x_k \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

4. **Доказать теорему об оценке определенного интеграла**

   Если m и M соответственно наименьшее и наибольшее значения интегрируемой на $[a,b]$ функции $f(x)$, то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

   По условию $m \leq f(x) \leq M$, где $m = \min_{[a;\,b]} f(x)$; $M = \max_{[a;\,b]} f(x)$; $f(x)$ интегрируема на $[a;b] \Rightarrow$ (По теореме об интегрировании неравенства) $\Rightarrow \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx \Rightarrow$ (По свойству определённого интеграла) $\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$

5. **Доказать теорему об оценке модуля определенного интеграла**

   Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

   По условию $f(x)$ непрерывна на $[a,b] \Rightarrow -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ для $\forall\, x \in [a,b] \Rightarrow$ (По теореме об интегрировании неравенства) $\Rightarrow -\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \Rightarrow$ (По определению модуля) $\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

6. **Доказать теорему о среднем для определенного интеграла**

   Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и функция $\varphi(x)$ интегрируема и знакопостоянна на $[a;b]$,

6. **Доказать теорему о среднем для определенного интеграла**

   Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и функция $\varphi(x)$ интегрируема и знакопостоянна на $[a;b]$, то существует точка $c \in (a;b)$ такая, что $\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(c)\int_a^b \varphi(x)\,dx$

   По условию $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ ⇒ (по Т. Вейерштрасса) ⇒ функция достигает на $[a,b]$ свои $m = \min_{[a;b]} f(x)$ и $M = \max_{[a;b]} f(x)$. $m \le f(x) \le M$ на $[a;b] | * \varphi(x) \ge 0$;
   $m\varphi(x) \le f(x)\varphi(x) \le M\varphi(x)$ ⇒ (По теореме об инвариантности неравенства)
   $\Rightarrow m\int_a^b \varphi(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \le M\int_a^b \varphi(x)\,dx$; по условию $\varphi(x) \ge 0 \Rightarrow \int_a^b \varphi(x)\,dx \ge 0 \Rightarrow$ (По теореме о сохранении определенным интегралом знака подынтегральной функции)
   $\Rightarrow m \le \frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx} \le M \Rightarrow$ (По теореме Больцано-Коши) $\Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$: $\frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx} = f(c) \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(c)\int_a^b \varphi(x)\,dx$. Аналогично доказывается теорема с $\varphi(x) \le 0$

7. **Сформулировать определение интеграла с переменным верхним пределом. Доказать теорему о производной от интеграла по его верхнему пределу**

   Функция $Y(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ называется определённым интегралом с переменным верхним пределом, где $[a;x] \subset [a;b]$

   Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то $Y'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$

   По определению $Y(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, где $x \in (a;b), (x - \forall)$. $Y(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt$, где $x + \Delta x \in (a;b)$. Таким образом: $\Delta Y = Y(x+\Delta x) - Y(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow$ (По теореме о разбиении отрезка на частичные) $\Rightarrow \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$. Так как по условию $f(x)$ непрерывна, то по теореме о среднем: $\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(c)(x+\Delta x - x) = f(c)\Delta x$, где $c \in (x;x+\Delta x)$. По определению производной:
   $Y'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta Y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} \Rightarrow \left(\begin{matrix}\Delta x\to 0\\ x<c<x+\Delta x\end{matrix}\right\} c \to x\Big) \Rightarrow \lim_{c\to x} f(c) = f(x)$

8. **Вывести формулу Ньютона- Лейбница**

   Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$

   Пусть $F(x) - \forall$ первообразная функции $f(x)$ на $[a;b]$; $Y(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ – первообразная функции $f(x)$ на $[a;b]$ ⇒ (По основной теореме о первообразной) $\Rightarrow \int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C$, где $C - const$.
   Положим $x = a$. $\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C = 0 \Leftrightarrow C = -F(a)$, тогда $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$
   Положим $x = b$, тогда $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b$

9. **Сформулировать и доказать теорему об интегрировании подстановкой для определённого интеграла**

   Если функции $x = \varphi(t), \varphi'(t), f(\varphi(t))$ непрерывны на $[a,b]$ и $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) * \varphi'(t)dt$ ①

   По формуле замены переменной в неопределенном интеграле: $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) * \varphi'(t)dt$, то есть если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то $F(\varphi(t))$ – первообразная функции $f(\varphi(t)) * \varphi'(t)$. Применяя формулу Ньютона-Лейбница к левой и правой частям формулы ①: $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$; $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) * \varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) \Rightarrow$ ①

10. **Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям для определённого интеграла**

   Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в $(a;b)$, то $\int_a^b u\,dv = uv\big|_a^b - \int_a^b v\,du$

   $d(uv) = u\,dv + v\,du \Rightarrow u\,dv = d(vu) - v\,du \Rightarrow$ (В силу непрерывности функций $u(x)$ и $v(x)$ на $[a;b]$ $\exists$ определённый интеграл от функций) $\Rightarrow \int_a^b u\,dv = \int_a^b d(uv) - \int_a^b v\,du \Rightarrow$ (По формуле Ньютона-Лейбница) $\Rightarrow \int_a^b u\,dv = uv\big|_a^b - \int_a^b v\,du$

11. **Интегрирование периодических функций, интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат**

   1) Пусть $f(x)$ – четная на $[-a;a]$, $f(-x) = f(x)$

11. **Интегрирование периодических функций, интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат**

1) Пусть $f(x)$ – четная на $[-a;a]$, $f(-x)=f(x)$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \begin{vmatrix} x=-t & x_1=-a; & t_1=a \\ dx=-dt & x_2=0; & t_2=0 \end{vmatrix} = -\int_{a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

2) Пусть $f(x)$ – нечетная на $[-a;a]$, $f(-x)=-f(x)$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \begin{vmatrix} x=-t & x_1=-a; & t_1=a \\ dx=-dt & x_2=0; & t_2=0 \end{vmatrix} = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$

3) Если периодическая функция $f(x)$ (Т-период) непрерывна на $[a;\ a+T]$, то $\forall\ a\in\mathbb{R}$, для $T>0$

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx$$

12, 13, 14. **Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода**

Несобственным интегралом от непрерывной на $[a;+\infty)$ функции называется предел определённого интеграла:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\big|_a^b = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} F(x)\big|_a^b = F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}}\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a)$$

12. **Сформулировать и доказать признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1-го рода**

Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в $[a;+\infty)$ и $\int_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx$ сходится и для $\forall\ x\in[a;+\infty)$ выполняется неравенство $0<f(x)\le\varphi(x)$, то $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, причём $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \le \int_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx$

По условию $\int_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx$ сходится $\underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ конечный $\lim_{b\to+\infty}\int_a^b\varphi(x)\,dx = M \Rightarrow \int_a^b\varphi(x)\,dx\le M$.

По условию $0<f(x)\le\varphi(x)$ для $\forall\ x\in[a;+\infty)$ $\Rightarrow$ (По теореме об интегрировании неравенства) $\Rightarrow 0<\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b\varphi(x)\,dx\le M \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx\le M$.

$\int_a^{b_1} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{b_1} f(x)\,dx > \int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow$ функция $\int_a^b f(x)\,dx$ возрастает с возрастанием b $\Rightarrow$ (По теореме Вейерштрасса) $\Rightarrow$ $\exists$ конечный $\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx\le M \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится

13. **Сформулировать и доказать предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-го рода**

Если функции $f(x)>0$ и $g(x)>0$ непрерывны в $[a;+\infty)$ и $\exists$ конечный $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda>0$, то $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

По условию $\exists$ конечный $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda \Leftrightarrow$ (для $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ M=M(\varepsilon)$: для $\forall\ x$: $x>M$) $\Leftrightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)}-\lambda\right|<\varepsilon \Leftrightarrow (\lambda-\varepsilon)g(x)<f(x)<(\lambda+\varepsilon)g(x)$ для $\forall\ x>M$. Пусть $a>M$. Подберём ε так, чтобы $\lambda-\varepsilon>0$.

1) Пусть $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится; $(\lambda-\varepsilon)g(x)<f(x)\Rightarrow$ (По признаку сходимости по неравенству) $\Rightarrow\int_a^{+\infty}(\lambda-\varepsilon)g(x)\,dx$ сходится $\Rightarrow$ (По свойству линейности) $\Rightarrow\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится.
2) Пусть $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится $\Rightarrow$ (По свойству линейности) $\Rightarrow(\lambda+\varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится; $f(x)<(\lambda+\varepsilon)g(x)\Rightarrow$ (По признаку сходимости по неравенству) $\Rightarrow\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится.

3) Пусть $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится; $f(x)<(\lambda+\varepsilon)g(x)\Rightarrow$ (По признаку расходимости по

3) Пусть $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится; $f(x) < (\lambda+\varepsilon) g(x) \Rightarrow$ (По признаку расходимости по неравенству) $\Rightarrow (\lambda+\varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ расходится $\Rightarrow$ (По свойству линейности) $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ расходится.
4) Пусть $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ расходится $\Rightarrow$ (По свойству линейности) $\Rightarrow (\lambda-\varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ расходится; $(\lambda-\varepsilon) g(x) < f(x) \Rightarrow$ (По признаку расходимости по неравенству) $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится.

14. **Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода**

Если функция $y = f(x)$ непрерывная и знакопеременная в $[a;+\infty)$ и $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится абсолютно

По условию $f(x)$ непрерывна в $[a;+\infty) \Rightarrow -|f(x)| \le f(x) \le |f(x)| \Rightarrow 0 \le f(x) + |f(x)| \le 2|f(x)|$; по условию $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ сходится $\Rightarrow$ (По свойству линейности) $\Rightarrow 2\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ сходится $\Rightarrow$ (По признаку сходимости по неравенству) $\Rightarrow \int_a^{+\infty}(f(x)+|f(x)|)\,dx$ сходится $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{+\infty}(f(x)+|f(x)|)\,dx - \int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ сходится абсолютно

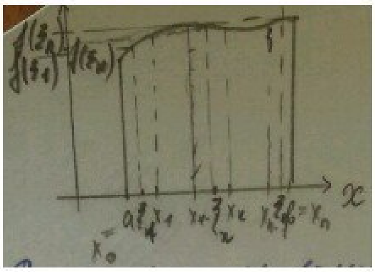
15. **Сформулировать определение несобственного интеграла 2-го рода и признаки сходимости таких интегралов**

1) $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} F(x)\big|_a^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} F(b-\varepsilon) - F(a)$, где $f(b) = \infty$
2) $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} F(x)\big|_{a+\varepsilon}^{b} = F(b) - \lim_{\varepsilon\to 0} F(a+\varepsilon)$, где $f(a) = \infty$
3) $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$, где $f(c) = \infty,\ a < c < b$

<u>**Признаки сходимости:**</u>

1) Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в $[a,b)$ и $f(b) = \infty,\ \varphi(b) = \infty$ и для $\forall\, x \in [a,b)$ $0 < f(x) \le \varphi(x)$ и $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ сходится, то $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится, причем $\int_a^b f(x)dx \ \le \int_a^b \varphi(x)dx$
2) Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в $[a,b)$ и $f(b) = \infty,\ \varphi(b) = \infty$ и для $\forall\, x \in [a,b)$ $0 < f(x) \le \varphi(x)$ и $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ расходится, то $\int_a^b f(x)\,dx$ расходится
3) Если функция $f(x)$ непрерывна и знакопеременная в $[a,b)$ и $f(b) = \infty$ и $\int_a^b |f(x)|\,dx$ – сходится, то $\int_a^b f(x)\,dx$ – сходится абсолютно
4) Если функции $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$ непрерывны в $[a,b)$ и $f(b) = \infty,\ g(b) = \infty$ и $\exists$ конечный $\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0$, то $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_a^b g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно

16. **Фигура ограничена кривой $y = f(x) \ge 0$, прямыми $x = a, x = b$ и $y = 0$ $(a < b)$. Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади этой фигуры**



Рассмотрим данную криволинейную трапецию. Назовём $[a,b]$ основанием трапеции. Разобьём $[a,b]$ на n частичных отрезков точками $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b$. В каждом частичном интервале возьмём произвольно точку $\xi_k, (k = \overline{1,n})$. Проведем прямые, параллельные оси Oy через точку ξ_k: $f(\xi_1), f(\xi_2), f(\xi_3), \dots, f(\xi_n)$. Каждую частичную криволинейную трапецию заменяем прямоугольником со сторонами $f(\xi_k)$ и Δx_k, где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

$S_k = f(\xi_k) * \Delta x_k$; $S_n = \sum_{k=1}^n S_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) * \Delta x_k$. Заменяем площадь криволинейной трапеции интегральной суммой: $\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) * \Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$

17. **Фигура ограничена лучами $\phi = \alpha, \phi = \beta$ и кривой $r = f(\phi)$. Здесь r и ϕ — полярные координаты точки, $0 \le \alpha < \beta \le 2\pi$, где r и ϕ – полярные координаты точки. Вывести**

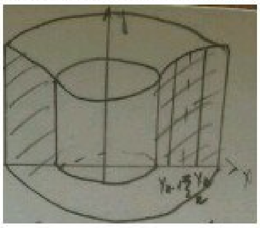
17. **Фигура ограничена лучами $\phi = \alpha, \phi = \beta$ и кривой $r = f(\phi)$. Здесь r и ϕ — полярные координаты точки, $0 \le \alpha < \beta \le 2\pi$, где r и ϕ — полярные координаты точки. Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади этой фигуры**

Разобьём криволинейный сектор на n частичных криволинейных секторов лучами.
$\varphi_0 = \alpha < \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_{k-1} < \varphi_k < \dots < \varphi_n = \beta$. В каждом частичном секторе возьмём произвольно $\widetilde{\varphi_k}$, $(k = \overline{1,n})$, где $r(\widetilde{\varphi_k})$ — радиус-вектор, соответствующий углу $\widetilde{\varphi_k}$.

$S_{\text{крив.сек.}} \approx S_{\text{круг.сек.}} = S_k$; $S_k = \frac{1}{2} r^2(\widetilde{\varphi_k})\Delta\varphi_k$, где $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} r^2(\widetilde{\varphi_k})\Delta\varphi_k \Rightarrow$ (В силу непрерывности $r = r(\varphi)$ на $[\alpha;\beta] \Rightarrow r^2(\varphi)$ непрерывна на $[\alpha;\beta]) \Rightarrow \exists$ конечный

$\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta\varphi_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} r^2(\widetilde{\varphi_k})\Delta\varphi_k = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\, d\varphi$

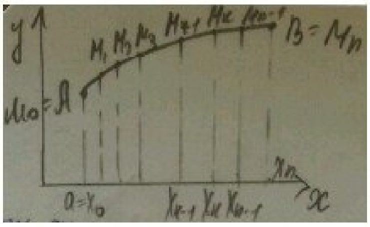
18. **Тело образовано вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x) \ge 0$, прямыми $x = a, x = b$ и $y = 0$ $(a < b)$. Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла объема тела вращения**



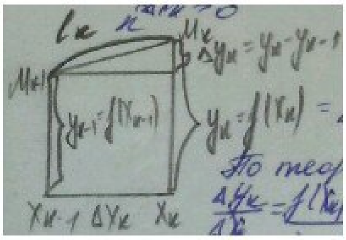
$V(x) = \pi x_k^2 f(\xi_k) - \pi x_{k-1}^2 f(\xi_k) = \pi f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})(x_k + x_{k-1}) = 2\pi\xi_k f(\xi_k)\Delta x_k$.
$V_n = \sum_{k=1}^{n} 2\pi\xi_k f(\xi_k)\Delta x_k \Rightarrow$ (В силу непрерывности функции $x * f(x)$ на $[a,b]) \Rightarrow \exists$ конечный $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} 2\pi\xi_k f(\xi_k)\Delta x_k = 2\pi \int_a^b x * f(x) dx$

<u>Если вопрос по оси Ox:</u>
$V = \int_a^b S(x)\, dx$; $S(x) = \pi f^2(x) \Rightarrow V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$

19. **Кривая задана в декартовых координатах уравнением $y = f(x)$, где x и y — декартовые координаты точки, $a \le x \le b$. Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой**



Пусть функции $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$.
Разобьём $[a,b]$ на n частичные: $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b$. Проведём хорды через соседние точки разбиения $M_{k-1}(x_{k-1}; f(x_{k-1}))$ и $M_k(x_k; f(x_k))$, $(k = \overline{1,n})$; $l_k = [M_{k-1}M_k]$; $l_n = \sum_{k=1}^{n} l_k$.
$l_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \Delta x_k \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}$. По теореме Лагранжа



$\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = \frac{(f(x_k) - f(x_{k-1}))}{x_k - x_{k-1}} = f'(\xi_k) \Rightarrow l_k = \sqrt{1 + \left(f'(\xi_k)\right)^2} * \Delta x_k$.

$l_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(\xi_k)\right)^2} * \Delta x_k \Rightarrow$ (В силу непрерывности функции $y = \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}$ на $[a,b]) \Rightarrow \exists$ конечный

$\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(\xi_k)\right)^2} * \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx = l$

20. **Кривая задана в полярных координатах уравнением $r = f(\phi) > 0$, где r и ϕ — полярные координаты точки, $\alpha \le \varphi \le \beta$. Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой**

В полярной системе координат $r = r(\varphi)$ и $r'(\varphi)$ непрерывны на $[\alpha,\beta]$

$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $\begin{cases} x'_\varphi = r'\cos\varphi - r\sin\varphi \\ y'_\varphi = r'\sin\varphi + r\cos\varphi \end{cases}$

$\left(x'_\varphi\right)^2 + \left(y'_\varphi\right)^2 = (r')^2\cos^2\varphi - 2r'r\cos\varphi\sin\varphi + r^2\sin^2\varphi + (r')^2\sin^2\varphi + 2r'r\sin\varphi\cos\varphi + r^2\cos^2\varphi = r^2 + (r')^2$. Подставим в формулу $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(x'_\varphi\right)^2 + \left(y'_\varphi\right)^2}\, d\varphi = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi$

21. **Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Интегрирование линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка методом Бернулли (метод “$u \cdot v$”) и методом Лагранжа (вариации произвольной постоянной)**

21. **Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Интегрирование линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка методом Бернулли (метод “$u \cdot v$”) и методом Лагранжа (вариации произвольной постоянной)**
Рассмотрим $y' + p(x)y = q(x)$ линейное д.у. ①
Метод Бернулли (метод “$u \cdot v$”):
Пусть $y_{\text{он}} = U(x)V(x)$, где $U(x)$- частное решение, $V(x)$ – общее. $y'_{\text{он}} = U'V + UV'$.
Подставляем в д.у. ①: $U'V + UV' + p(x)UV = q(x)$.
1) $U' + p(x)U = 0$; $\frac{dU}{dx} = -p(x)U$; $\int \frac{dU}{U} = -\int p(x)dx$; $\ln|U| = \ln e^{-\int p(x)dx}$; $U = e^{-\int p(x)dx}$
2) $UV' = q(x)$; $\frac{dV}{dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}$; $\int dV = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$; $V = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$
$y = U(x)V(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right) = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$
$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}$
Метод Лагранжа (вариации произвольной постоянной):
1) $y' + p(x)y = 0$ – соответствующее однородное д.у. с разделяющимися переменными.
$\frac{dy}{dx} = -p(x)y$; $\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx$; $\ln|y| = \ln e^{-\int p(x)dx} + \ln C$; $y_{\text{оо}} = Ce^{-\int p(x)dx}$, где $C - const$.
2) Пусть $y_{\text{он}} = C(x)e^{-\int p(x)dx}$; $y'_{\text{он}} = C'e^{-\int p(x)dx} + Ce^{-\int p(x)dx}\left(-p(x)\right)$. Подставляем $y_{\text{он}}$ и $y'_{\text{он}}$ в д. у. ①: $C'e^{-\int p(x)dx} - p(x)Ce^{-\int p(x)dx} + p(x)Ce^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow C'e^{-\int p(x)dx} = q(x)$;
$\frac{dC}{dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}$; $C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1$, где $C_1 - const$. Подставляем $C(x)$ в $y_{\text{он}}$:
$y_{\text{он}} = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1\right)e^{-\int p(x)dx} = C_1e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$
$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}$

22. **Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения n-го порядка. Интегрирование дифференциальных уравнений n-го порядка, допускающих понижение порядка**
Если в д.у. $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ функция $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ и её частные производные $f'_y, f'_{y'}, f'_{y''}, \dots, f'_{y^{(n-1)}}$ непрерывны в некоторой области $(n+1)$ мерного пространства $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, то для $\forall$ точки $\left(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}\right) \in D$ в $U(x_0)$ $\exists\,!$ решение $y = \varphi(x)$ д. у. $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$

Интегрирование д.у. n-го порядка, допускающих понижение порядка:
1) $y^{(n)} = f(x)$ ①
Общее решение д.у. ① находится методом последовательного интегрирования
$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$
$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x)dx + C_1\right)dx = \int dx \int f(x)dx + C_1x + C_2$
…
$y = \int dx \int dx \dots \int f(x)dx + \frac{C_1x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{C_2x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_{n-1}x + C_n$
2) $F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0$
Метод подстановки: $y^{(k)} = p(x)$; $y^{(k+1)} = p'(x)$; …; $y^{(n)} = p^{(n-k)}(x)$ понижает порядок д.у. на k.
$F\left(x, p, p', \dots, p^{(n-k)}\right) = 0$ ②. Если найдено общее решение д.у. ② $p = \psi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$, то д.у. $y^{(k)} = \psi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$ интегрируется методом последовательного интегрирования.
3) $F\left(y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$
Метод подстановки: $y' = p(y)$; $y'' = \frac{d}{dx}y' = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'p$; … понижает порядок д.у. на .
4) $\frac{d}{dx}F\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) = 0$
Получим уравнение вида $F\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) = C_1$.

23. **Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения линейного**

23. **Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения линейного дифференциального уравнения n-го порядка. Доказать свойства частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка**

Рассмотрим ЛНДУ ①: $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)$.
Если функции $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ и $f(x)$ непрерывны на $[a, b]$, то для $\forall$ начальных условий $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ $\exists\,!$ решение $y = \varphi(x)$ ЛНДУ ① на этом отрезке.

<u>**Свойства частных решений ЛОДУ n-го порядка:**</u>

Рассмотрим ЛОДУ ②: $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$.
Множество частных решений ЛОДУ ② с непрерывными $p_i(x)$, $(i = \overline{1, n})$, на $[a, b]$ функциями образует линейное пространство.

1) Пусть по условию $y_1(x)$ — частное решение д.у. ② $\underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} L[y_1] \equiv 0$.
$L[cy] = cL[y] = c0 = 0 \Rightarrow cy_1$ — решение д.у. ②.
2) Пусть по условию $y_1(x), y_2(x)$ — частные решения д.у. ② $\underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} L[y_1] \equiv 0,\ L[y_2] \equiv 0$.
$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = 0 + 0 = 0 \Rightarrow y_1 + y_2$ — решение д.у. ②.

Из 1) и 2) $\Rightarrow$ множество частных решений д.у. ② образует линейное пространство.

24, 25. **Сформулировать определения линейно зависимой и линейно независимой систем функций**

Функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ называются линейно зависимыми (независимыми) на $[a, b]$, если $\exists$ нетривиальная (только тривиальная) линейная комбинация этих функций, равная 0 на этом отрезке.
$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$. $\exists\ \alpha_i \neq 0$ (Все $\alpha_i = 0$)

24. **Сформулировать и доказать теорему о вронскиане линейно зависимых функций**

Если функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависимы на $[a, b]$, то $W(x) = 0$ для $\forall\ x \in [a, b]$.
По условию функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависимы на $[a, b] \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} \exists\ \alpha_i \neq 0$. Линейную комбинацию дифференцируем $(n-1)$ раз:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x) + \alpha_2 y_2'(x) + \dots + \alpha_n y_n'(x) = 0 \\ \dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$$ — система линейных однородных

алгебраических уравнений с неизвестными $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ $(const)$, и определителем системы

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$ и имеющее ненулевое решение (Так как по условию

$W(x_0) = 0$) $\Leftrightarrow W(x) = 0$ для $\forall\ x \in [a, b]$.

25. **Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка**

Рассмотрим ЛОДУ ①: $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$.
Если линейно независимы на $[a, b]$ функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ являются частными решениями ЛОДУ ① с непрерывными $p_i(x)$, $(i = \overline{1, n})$, на $[a, b]$ коэффициентами, то $W(x) \neq 0$ для $\forall\ x \in [a, b]$.

Метод от противного:
Предположим, что в произвольной точке $x_0 \in [a, b]$ $W(x_0) = 0$. Подберем $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ так,

чтобы система $\ast$ $$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x) + \alpha_2 y_2'(x) + \dots + \alpha_n y_n'(x) = 0 \\ \dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$$ имела ненулевое

решение: $\exists\ \alpha_i \neq 0$ (Так как по условию $W(x_0) = 0$). По условию $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ являются частными решениями ЛОДУ ① $\underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} L[y_1] \equiv 0,\ L[y_2] \equiv 0, \dots, L[y_n] \equiv 0$.

$L[\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x)] = \alpha_1 L[y_1] + \alpha_2 L[y_2] + \dots + \alpha_n L[y_n] = \alpha_1 0 + \alpha_2 0 + \dots + \alpha_n 0 = 0 \Rightarrow y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x)$ — решение д.у. ①, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n - const$,

удовлетворяющие нулевым начальным условиям $y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$ из системы $\ast$. Таким образом $y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x)$ — решение д.у. ①, удовлетворяющие нулевым начальным условиям $y(x_0)=0, y'(x_0)=0, \dots, y^{(n-1)}(x_0)=0$ из системы $\ast$. Таким образом $y=\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\dots+\alpha_n y_n(x)$ – решение д.у. ①, удовлетворяющее нулевым начальным условиям. Но таким же нулевым начальным условиям удовлетворяет и тривиальное решение $y=0$. По условию $p_i(x)$, $(i=\overline{1,n})$ непрерывны на $[a,b]$ ⇒ выполняется условие Т. Коши о ∃ и ! решения ⇒ $\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\dots+\alpha_n y_n(x)=0$ и $\exists\ \alpha_i\neq 0 \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – линейно зависимы на $[a,b]$, что противоречит условию ⇒ предположение $W(x_0)=0$ неверно ⇒ $W(x_0)\neq 0$, и так как $x_0\in[a,b]$ – произвольная точка на $[a,b]$, то $W(x_0)\neq 0$ для $\forall\, x\in[a,b]$

26. **Сформулировать и доказать теорему о существовании фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка**

Для ∀ ЛОДУ n-го порядка $L_n(y)=0$ с непрерывными коэффициентами $p_i(x)$, $(i=\overline{1,n})$, на (a,b) ∃ ФСР.

$b_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, b_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, b_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$. Векторов n штук.

1) $\begin{cases}L_n(y)=0\\ y(x_0)=1\\ y'(x_0)=0\\ \vdots\\ y^{(n-1)}(x_0)=0\end{cases}$ ⇒ По Т. Коши ∃ ! решение $y_1(x)$

2) $\begin{cases}L_n(y)=0\\ y(x_0)=0\\ y'(x_0)=1\\ \vdots\\ y^{(n-1)}(x_0)=0\end{cases}$ ⇒ По Т. Коши ∃ ! решение $y_2(x)$

…

n) $\begin{cases}L_n(y)=0\\ y(x_0)=0\\ y'(x_0)=0\\ \vdots\\ y^{(n-1)}(x_0)=1\end{cases}$ ⇒ По Т. Коши ∃ ! решение $y_n(x)$

Покажем, что $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – линейно независимые решения в т. x_0

$$W(x_0)=\begin{vmatrix}y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0)\\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}=1\neq 0 \Rightarrow$$

$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – линейно независимые ⇒ (По свойству определителя Вронского) ⇒ ∃ ФСР

27. **Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка**

Общее решение ЛОДУ n-го порядка с непрерывными $p_i(x)$, $(i=\overline{1,n})$, на $[a,b]$ функциями равно линейной комбинации ФСР с произвольными постоянными.

$y_{oo}=C_1 y_1(x)+C_2 y_2(x)+\dots+C_n y_n(x)$, где $C_i - const, (i=\overline{1,n})$.

Рассмотрим ЛОДУ ①: $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\dots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0$.

1) Докажем, что y_{oo} – решение д.у. ①. По условию $y_1(x), y_2(x), \dots y_n(x)$ – частные решения д.у. ① ⇒ $\mathrm{L}[\mathrm{y}_1]\equiv 0, \mathrm{L}[\mathrm{y}_2]\equiv 0, \dots, \mathrm{L}[\mathrm{y}_n]\equiv 0$
$L[C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\dots+C_ny_n(x)]=C_1L[y_1]+C_2L[y_2]+\dots+C_nL[y_n]=C_1 0+C_2 0+\dots+C_n 0=0 \Rightarrow y_{oo}=\sum_{i=1}^{n}C_iy_i(x)$ – решение д.у. ①
2) Докажем, что y_{oo} – общее решение д.у. ①. По условию $p_i(x)$, $(i=\overline{1,n})$, непрерывны на $[a,b]$ ⇒ выполняется условие Т. Коши о ∃ и ! решения ⇒ решение $y_{oo}=\sum_{i=1}^{n}C_iy_i(x)$ будет

общим, если для произвольно заданных начальных условий ② $y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=$

общим, если для произвольно заданных начальных условий ② $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ постоянные $C_1, C_2, \dots, C_n$ найдутся единственным образом.
Пусть $y_{oo} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$ удовлетворяющее начальным условиям ②.

$$* \begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = y_0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) = y_0' \\ \dots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$ — система линейных

неоднородных алгебраических уравнений с неизвестными $C_1, C_2, \dots, C_n$ и определителем системы $W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$, так как $x_0 \in [a,b]$ и по условию $y_1(x), y_2(x), \dots y_n(x)$ образуют ФСР $\Rightarrow C_{10}, C_{20}, \dots, C_{n0}$ — единственное решение системы $* \Rightarrow y_{oo} = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$ — общее решение д.у. ①, а $y = \sum_{i=1}^{n} C_{i0} y_i(x)$ — частное решение.

28. **Вывести формулу Остроградского-Лиувилля для линейного дифференциального уравнения 2-го порядка**

$y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0$. Пусть y_1, y_2 — линейно независимые частные решения.
① $y_1'' + p_1(x) y_1' + p_2(x) y_1 = 0 \mid * y_2$
② $y_2'' + p_1(x) y_2' + p_2(x) y_2 = 0 \mid * y_1$
② − ① $(y_2'' y_1 - y_2 y_1'') + p_1(x)(y_2' y_1 - y_2 y_1') = 0$

$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_2' y_1 - y_2 y_1'$

$W'(x) = y_2'' y_1 + y_2' y_1' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' = y_2'' y_1 - y_2 y_1''$

$W'(x) + p_1(x) W(x) = 0;\ W(x_0) = W_0$

$\frac{dW}{W} = -p_1(x) dx;\ \ln|W| = \ln e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x) dx} + \ln|C|;\ W(x) = C e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x) dx}$

$W(x) = C e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x) dx} \Rightarrow C = W_0$

$\boxed{W(x) = W_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x) dx}}$ $\boxed{W(x) = C e^{-\int p_1(x) dx}}$

29. **Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка при одном известном частном решении**

$y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0,\ y_1$ — известное частное решение.

$W(x) = C e^{-\int p_1(x) dx}$

$y_2' y_1 - y_2 y_1' = C e^{-\int p_1(x) dx} \mid \div y_1^2$

$\frac{y_2' y_1 - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{C}{y_1^2} e^{-\int p_1(x) dx}$

$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{C}{y_1^2} e^{-\int p_1(x) dx}$

$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{C}{y_1^2} e^{-\int p_1(x) dx} dx + \widetilde{C}$. Так как ищем частное решение y_2, то $\widetilde{C} = 0;\ C = 1$

$\boxed{y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} dx}$

30. **Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка**

Пусть $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — линейно независимые частные решения $L_n(y) = 0$ с непрерывными $p_i(x),\ (i = \overline{1,n})$, на $[a,b]$; а $\bar{y}(x)$ — частное решение $L_n(y) = f(x)$ с непрерывной $f(x)$ на $[a,b]$. Тогда $y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x) + \bar{y}(x)$ есть общее решение $L_n(y) = f(x)$.

$L_n(y) = L_n\left(\sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x) + \bar{y}(x)\right) = \sum_{k=1}^{n} C_k L_n\big(y_k(x)\big) + L_n\big(\bar{y}(x)\big) = f(x)$

Докажем, что оно общее. Выберем начальные условия:

$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)+\dots+C_ny_n(x_0)=y_0-\bar{y}(x_0) \\ C_1y_1'(x_0)+C_2y_2'(x_0)+\dots+C_ny_n'(x_0)=y_0'-\bar{y}'(x_0) \\ \dots \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0)+C_2y_2^{(n-1)}(x_0)+\dots+C_ny_n^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}-\bar{y}^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$ – СЛАУ с

определителем системы $W(x_0)\neq 0;\ x_0\in[a,b]\Rightarrow \exists\,!\,C_1=C_1^0,\dots,C_n=C_n^0;$

$y(x)=C_1^0y_1(x)+\dots+C_n^0y_n(x)+\bar{y}(x)$ – частное решение.

$y_{\text{он}}=y_{\text{оо}}+y_{\text{чн}}$

31. **Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического уравнения**

$k_1=k_2=k\in\mathbb{R};\ y''+a_1y'+a_2y=0;\ k^2+a_1k+a_2=0;\ k_{1,2}=-\frac{a_1}{2}\pm\sqrt{\frac{a_1^2}{4}-a_2}$

$k=-\frac{a_1}{2}\Rightarrow a_1=-2k$

$y_1=e^{kx};\ y_2=y_1\int\frac{e^{-\int a_1dx}}{y_1^2}dx=e^{kx}\int\frac{e^{\int 2kdx}}{e^{2kx}}dx=xe^{kx}$

Докажем, что y_1,y_2 образуют ФСР:

$W(x)=\begin{vmatrix} e^{kx} & xe^{kx} \\ ke^{kx} & e^{kx}+kxe^{kx}\end{vmatrix}=e^{2kx}+kxe^{2kx}-kxe^{2kx}=e^{2kx}\neq 0$ для $\forall\, x\in[a,b]\Rightarrow y_1$ и y_2 линейно независимые $\Rightarrow$ $\boxed{y_{\text{оо}}=C_1e^{kx}+C_2xe^{kx}}$

32. **Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения**

$k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$, где $\beta\neq 0;\ e^{(\alpha+\beta i)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)=y$

$y_1=Re\ y=e^{\alpha x}\cos\beta x;\ y_2=Im\ y=e^{\alpha x}\sin\beta x$

Докажем, что y_1,y_2 образуют ФСР.

$W(x)=\begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x-\beta e^{\alpha x}\sin\beta x & \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x+\beta e^{\alpha x}\cos\beta x\end{vmatrix}=$

$\beta e^{2\alpha x}\cos^2\beta x+\beta e^{2\alpha x}\sin^2\beta x=\beta e^{2\alpha x}\neq 0$ для $\forall\, x\in[a,b]\Rightarrow y_1$ и y_2 линейно независимые $\Rightarrow$

$\boxed{y_{\text{оо}}=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)}$

33. **Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида (являющейся квазимногочленом). Сформулировать и доказать теорему о наложении частных решений**

$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$ ①

$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}y'+a_ny=0$ ②

$k^n+a_1k^{n-1}+\dots+a_{n-1}k+a_n=0$ ③

$y_{\text{оо}}=C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n$

$f(x)$ имеет вид квазимногочлена.

$f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x)\Rightarrow y_{\text{чн}}=x^r e^{\alpha x}(T_s(x)\cos\beta x+R_s(x)\sin\beta x)$,

где r – кратность корня $\alpha\pm\beta i$ характеристического уравнения ③. $T_s(x),R_s(x)$ – полные многочлены степени $S=\max(n,m)$ с неопределёнными коэффициентами.

$y_{\text{он}}=y_{oo}+\sum_{i=1}^{p}y_{\text{чн}_i}$

<u>**Теорема о наложении частных решений:**</u>

Если $y_i(x)$ – частное решение д.у. $L[y]=f_i(x)$, то $\sum_{i=1}^{k}\alpha_iy_i(x)$ – решение д.у. $L[y]=\sum_{i=1}^{k}\alpha_if_i(x)$

По условию $y_i(x)$ – решение д.у. $L[y]=f_i(x)\Rightarrow L[y_i]=f_i(x)$.

$L\left[\sum_{i=1}^{k}\alpha_iy_i\right]=\sum_{i=1}^{k}L[\alpha_iy_i]=\sum_{i=1}^{k}\alpha_iL[y_i]=\sum_{i=1}^{k}\alpha_if_i(x)\Rightarrow\sum_{i=1}^{k}\alpha_iy_i(x)$ – решение д.у. $L[y]=\sum_{i=1}^{k}\alpha_if_i(x)$

34. **Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных для нахождения решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка и вывод системы соотношений для варьируемых переменных**

$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$

Решением соответствующее ЛОДУ и получаем $y_{\text{оо}}$:

$y_{\text{оо}} = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n$

Варьируем константы, то есть $y_{\text{он}} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \dots + C_n(x)y_n$

$p_n(x) *$ | $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \dots + C_n(x)y_n$

$p_{n-1}(x) *$ | $y' = C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \dots + C_n'(x)y_n + C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' + \dots + C_n(x)y_n'$

Потребуем, чтобы выражение $\boxed{C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \dots + C_n'(x)y_n = 0}$, чтобы

$y' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' + \dots + C_n(x)y_n'$

$p_{n-2}(x) *$ | $y'' = C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \dots + C_n'(x)y_n' + C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + \dots + C_n(x)y_n''$

Потребуем, чтобы выражение $\boxed{C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \dots + C_n'(x)y_n' = 0}$, чтобы

$y'' = C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + \dots + C_n(x)y_n''$

$p_1(x) *$ | $y^{(n-1)} = C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} + C_1(x)y_1^{(n-1)} + C_2(x)y_2^{(n-1)} + \dots + C_n(x)y_n^{(n-1)}$

Потребуем, чтобы выражение $\boxed{C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0}$, чтобы $y^{(n-1)} = C_1(x)y_1^{(n-1)} + C_2(x)y_2^{(n-1)} + \dots + C_n(x)y_n^{(n-1)}$

$1 *$ | $y^{(n)} = C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} + C_1(x)y_1^{(n)} + C_2(x)y_2^{(n)} + \dots + C_n(x)y_n^{(n)}$

$L_n[y] = C_1(x)\left[y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + p_{n-2}(x)y_1'' + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1\right] + C_2(x)\left[y_2^{(n)} + p_1(x)y_2^{(n-1)} + \dots + p_{n-2}(x)y_2'' + p_{n-1}(x)y_2' + p_n(x)y_2\right] + \dots + C_n(x)\left[y_n^{(n)} + p_1(x)y_n^{(n-1)} + \dots + p_{n-2}(x)y_n'' + p_{n-1}(x)y_n' + p_n(x)y_n\right] + C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x)$

Получаем систему:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \dots + C_n'(x)y_n = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \dots + C_n'(x)y_n' = 0 \\ \vdots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$ – СЛАУ с неизвестными $(C_1', C_2', \dots, C_n')$ и

определителем системы $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$, так как $y_1, y_2, \dots, y_n$ составляют ФСР ⇒ (по теореме о вронскиане системы линейно независимых частных решений ЛОДУ) ⇒ не существует решение $C_1'(x) = \varphi_1(x), C_2'(x) = \varphi_2(x), \dots, C_n'(x) = \varphi_n(x)$

Интегрируем проученные функции:

$C_1(x) = \int \varphi_1(x)\,dx + \widetilde{C_1}$

$C_2(x) = \int \varphi_2(x)\,dx + \widetilde{C_2}$

$\vdots$

$C_n(x) = \int \varphi_n(x)\,dx + \widetilde{C_n}$

Подставляем в $y_{\text{он}}$:

$y_{\text{он}} = \left(\int \varphi_1(x)\,dx + \widetilde{C_1}\right)y_1 + \left(\int \varphi_2(x)\,dx + \widetilde{C_2}\right)y_2 + \dots + \left(\int \varphi_n(x)\,dx + \widetilde{C_n}\right)y_n = \widetilde{C_1}y_1 + \widetilde{C_2}y_2 + \dots + \widetilde{C_n}y_n + y_1\int \varphi_1(x)\,dx + y_2\int \varphi_2(x)\,dx + \dots + y_n\int \varphi_n(x)\,dx$

$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}$

35. Сформулировать определение дифференциального уравнения n-го порядка, разрешенного

35. **Сформулировать определение дифференциального уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной, и сформулировать задачу Коши для такого уравнения. Описать метод сведения этого уравнения к нормальной системе дифференциальных уравнений**

$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$ – д.у., разрешённое относительно старшей производной ①

<u>Задача Коши:</u>

Найти решение д.у. ①, удовлетворяющее начальным условиям:

$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$

<u>Метод сведения к нормальной системе д.у.:</u>

$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)$ – ЛНДУ n-го порядка ②.

Пусть $y = y_1$ – общее решение д.у. ②.

Обозначим: $y' = \frac{dy_1}{dx} = y_2;\ y'' = \frac{dy_2}{dx} = y_3;\ \dots;\ y^{(n-1)} = \frac{dy_{(n-1)}}{dx} = y_n;$

$y^{(n)} = \frac{dy_n}{dx} = f(x) - p_1(x)y_n - p_2(x)y_{n-1} - \dots - p_{n-1}(x)y_2 - p_n(x)y_1$

Получаем систему:
$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = y_3 \\ \vdots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n \\ \frac{dy_n}{dx} = f(x) - p_1(x)y_n - p_2(x)y_{n-1} - \dots - p_{n-1}(x)y_2 - p_n(x)y_1 \end{cases}$$

36. **Сформулировать задачу Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений и теорему Коши о существовании и единственности решения этой задачи. Описать метод сведения нормальной системы к одному дифференциальному уравнению высшего порядка**

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} ①$$

<u>Задача Коши:</u>

Найти решение нормальной системы ①, удовлетворяющее начальным условиям ②:

$x_1(t_0) = x_{10}, x_2(t_0) = x_{20}, \dots, x_n(t_0) = x_{n0}$

<u>Т. Коши:</u>

Если функции $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(i = \overline{1,n})$, и их частные производные $f_1{'}_{x_1}, f_1{'}_{x_2}, \dots, f_1{'}_{x_n}, f_2{'}_{x_1}, f_2{'}_{x_2}, \dots, f_2{'}_{x_n}, \dots, f_n{'}_{x_1}, f_n{'}_{x_2}, \dots, f_n{'}_{x_n}$ непрерывны в некоторой области $(n+1)$ мерного пространства $(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, то для $\forall$ точки $(t_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \in D$ в $U(t_0)$ $\exists\,!$ решение $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ системы ①, удовлетворяющее начальным условиям ②.

<u>Метод сведения нормальной системы к одному д.у.:</u>

Дифференцируем первое уравнение системы ①.

$\frac{d^2x_1}{dt^2} = f_1{'}_t + f_1{'}_{x_1} * x_1{'}_t + f_1{'}_{x_2} * x_2{'}_t + \dots + + f_1{'}_{x_n} * x_n{'}_t =$
$f_1{'}_t + f_1{'}_{x_1} f_1(t, x_1, \dots, x_n) + f_1{'}_{x_2} f_2(t, x_1, \dots, x_n) + \dots + f_1{'}_{x_n}(t, x_1, \dots, x_n) =$
$f_1{'}_t + \sum_{i=1}^{n} f_1{'}_{x_i} f_i(t, x_1, \dots, x_n) = F_2(t, x_1, \dots, x_n).$

Аналогично дифференцируем последнее уравнение:

$\frac{d^3x_1}{dt^3} = F_2{'}_t + F_2{'}_{x_1} * x_1{'}_t + F_2{'}_{x_2} * x_2{'}_t + \dots + + F_2{'}_{x_n} * x_n{'}_t =$
$F_2{'}_t + F_2{'}_{x_1} f_1(t, x_1, \dots, x_n) + F_2{'}_{x_2} f_2(t, x_1, \dots, x_n) + \dots + F_2{'}_{x_n}(t, x_1, \dots, x_n).$

Аналогично дифференцируем последнее уравнение и получаем систему:

Аналогично дифференцируем последнее уравнение и получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} = F_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{d^{(n-1)}x_1}{dt^{(n-1)}} = F_{n-1}(t, x_1, \dots, x_n) \\ \frac{d^nx_1}{dt^n} = F_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad ②$$

Из первых $(n-1)$ уравнений системы ② выражаем $x_2, x_3, \dots, x_n$ как функции, зависящие от $t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{d^{(n-1)}x_1}{dt^{(n-1)}}$: $\begin{cases} x_2 = \psi_2\left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{d^{(n-1)}x_1}{dt^{(n-1)}}\right) \\ \vdots \\ x_n = \psi_n\left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{d^{(n-1)}x_1}{dt^{(n-1)}}\right) \end{cases}$ ③; и подставляем в последнее уравнение системы ②: $\frac{d^nx_1}{dt^n} = F_n\left(t, x_1, \psi_2\left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{d^{(n-1)}x_1}{dt^{(n-1)}}\right), \dots, \psi_n\left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{d^{(n-1)}x_1}{dt^{(n-1)}}\right)\right) =$ $\Phi\left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{d^{(n-1)}x_1}{dt^{(n-1)}}\right)$ – д.у. ④ n-го порядка, зависящее только от одной переменной $t, x_1, \frac{dx_1}{dt}$. Если система ① линейная, то д.у. ④ линейное.

Решая д.у. ④, находим $x_1 = \varphi_1(t, C_1, C_2, \dots, C_n)$ и $\frac{dx_1}{dt} = \frac{d\varphi_1}{dt}$; $\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{d^2\varphi_1}{dt^2}$; …; $\frac{d^nx_1}{dt^n} = \frac{d^n\varphi_1}{dt^n}$ подставляем в систему ③. Находим $x_2 = \varphi_2(t, C_1, C_2, \dots, C_n), \dots, x_n = \varphi_n(t, C_1, C_2, \dots, C_n)$

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ x_2 = \varphi_2(t, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(t, C_1, C_2, \dots, C_n) \end{cases}$$ – общее решение системы ①

37. **Сформулировать определение первого интеграла нормальной системы дифференциальных уравнений. Описать методы нахождения первых интегралов и их применение для решения системы дифференциальных уравнений**

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad ①$$

Первым интегралом системы ① называется уравнение $\Phi(t, x_1, \dots, x_n) = C$, которое после подстановки в него решений $x_1(t), \dots, x_n(t)$ система ① обращается в верное тождество.

<u>Пример:</u>

$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 \end{cases}$; $\frac{d(x_1+x_2)}{dt} = x_1 + x_2$ – интегрируемая комбинация.

$\int \frac{d(x_1+x_2)}{x_1+x_2} = \int dt$; $\ln|x_1 + x_2| = \ln e^t + \ln C_1$; $x_1 + x_2 = C_1e^t$ – первый интеграл системы.

$\frac{d(x_1-x_2)}{dt} = x_2 - x_1$ – вторая интегральная комбинация.

Аналогично $x_1 - x_2 = C_2e^{-t}$ – второй интеграл системы.

Общий интеграл системы: $\begin{cases} x_1 + x_2 = c_1e^t \\ x_1 - x_2 = c_2e^{-t} \end{cases}$

Общее решение системы: $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}c_1e^t + \frac{1}{2}c_2e^{-t} \\ x_2 = \frac{1}{2}c_1e^t - \frac{1}{2}c_2e^{-t} \end{cases}$

<u>Применение:</u>

Сложение, вычитание, арифметические операции, понижение порядка системы д.у.