Оглавление

1. Сформулировать определение случайной величины и функции распределения вероятностей случайной величины. Доказать свойства функции распределения.

Опр. Случайной величиной наз. ф-цию $X: \Omega \to R$ такую, что для $\forall x \in R$ мн-во $\{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{B}$ (т.е. это мн-во явл. событием).

Опр. Функцией распр-я (вероятностей) случ. величины X наз. отображение $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенное условием $F(x) = P\{X < x\}$

Св-ва ф-ции распределения

1° $0 \le F(x) \le 1$

2° если $x_1 \le x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$, т.е. $F(x)$ неуб. ф-ция

3° $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

4° $P\{x_1 \le X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$

5° $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$, т.е. $F(x)$ - непрерывна слева в каждой т. $x \in R$

Док-во

1° $F(x) = P\{X < x\} \Rightarrow 0 \le F(x) \le 1$

2° $A_1 = \{X < x_1\}$

$A_2 = \{X < x_2\}$

Т.к. $x_1 \le x_2$, то $A_1 \subseteq A_2$. По св-ву вер-ти

$P(A_1) \le P(A_2)$, $F(x_1) \le F(x_2)$

3° а) док-м, что $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$

Рассм. посл-ть $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ такую, что

1) $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \dots \le x_n \le \dots$

2) $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

Рассм. посл-ть событий

$A_n = \{X < x_n\}, \quad n \geq 1$

Тогда A_n, $n = 1, 2, \dots$, — возраст. посл-ть, т.к.

$A_i \subseteq A_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots$

В соотв. с аксиомой непр-ти

$\lim P\{A_n\} = P\{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\} = P\{\underbrace{X < +\infty}_{\text{достов. соб.}}\} = 1$

Т.к. $P\{A_n\} = P\{X < x_n\} = F(x_n)$

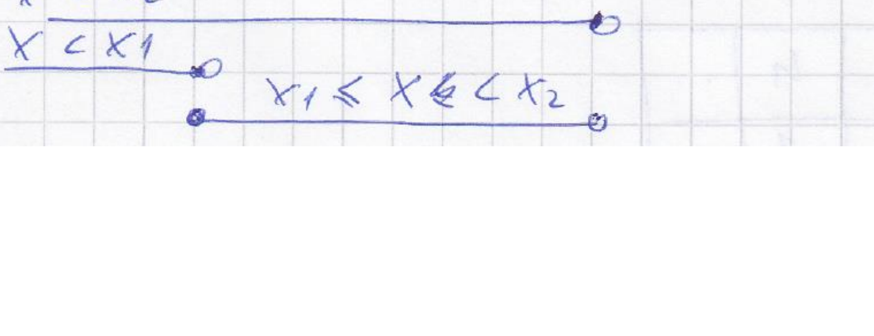
Т.о. $\lim\limits_{n\to+\infty} F(x_n) = 1$

Т.к. x_n — произв. последов., то в соотв. с опред. предела ф-ции по Гейне

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$

б) Рав-во $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ доказ-ся аналог.

4° Рассм. 3 события



5° Рассм. посл-ть $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, к-я

1) $x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n \le \dots < x_0$

2) $x_n \longrightarrow x_0$

Тогда $A_n = \{X < x_n\}$ - ~~посл-ть соб~~ неуб. посл-ть событий

$\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} P\{A_n\} = \left\{\begin{matrix}\text{акс.}\\ \text{непр.-ти}\end{matrix}\right\} = P\{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\} = P\{X < x_0\} = F(x_0)$

С исп. опр-е предела ф-ции по Гейне

$\lim\limits_{x\to x_0-} F(x) = F(x_0)$

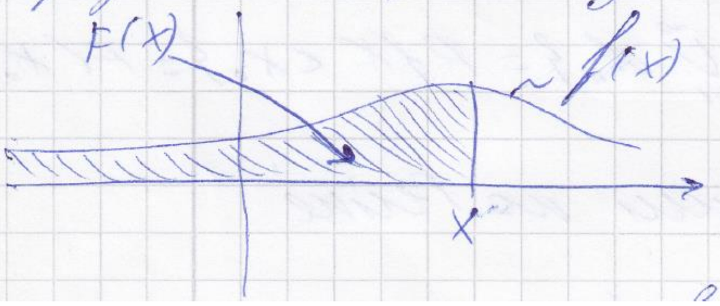
2. Сформулировать определения случайной величины и функции распределения случайной величины. Сформулировать определения дискретной и непрерывной случайной величины. Доказать свойства плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины.

Опр. Случайной величиной наз. ф-цию $X: \Omega \to R$ такую, что для $\forall x \in R$ мн-во $\{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{B}$ (т.е. это мн-во явл. событием).

Опр. Функцией распр-я (вероятностей) случ. величины X наз. отображение $F: R \to R$, определенное условием $F(x) = P\{X < x\}$

Опр. Сл. величина X наз. дискретной, если мн-во её значений конечно или счетно.

Опр. Случ. вел. X наз. непрер., если $\exists$ ф-ция $f(x)$, такая что ф-ция распред. сл. вел. X м. б. представлена в виде $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$



Св-ва ф-ции плотности распр-я вер-тей

1° $f(x) \geq 0, \ x \in R$

2° $P\{x_1 \leq X < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$

3° $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

4° Если x_0 — т. непрер. $f(x)$, то при малых Δx
$P\{x_0 \leq X < x_0 + \Delta x\} \approx f(x_0)\Delta x$

5° если X — непр. сл. вел., то для любого наперед заданного x_0 $P(X = x_0) = 0$

Док-во

1° $f(x) = F'(x)$, т.к. $F(x)$ – неубыв. ф-ция, то $F'(x) \ge 0 \Rightarrow f(x) \ge 0$

2° По св-ву ф-ции распред. $P\{x_1 \le X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1) =$

$= \{$т.к. $F(x)$ – первообразная для $f(x)\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$

ф-ла Ньютона – Лейбница

3° $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \{$св-во 2°$\} = F(+\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$

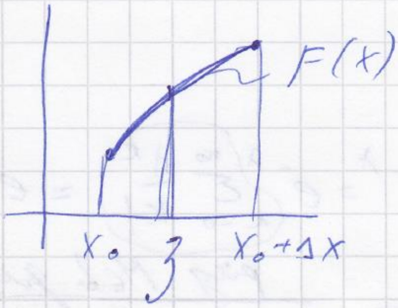
4° $P\{x_0 \le X < x_0 + \Delta x\} = F(x_2) - F(x_1) = \{$т.к. f непрер., то восп. Т. Лагранжа$\} =$

$= f(\xi) \cdot \Delta x$, где $\xi \in (x_0, x_0 + \Delta x)$

~~Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$~~

~~$P\{X = x_0\} = \lim P\{x_0 \le X < x_0 + \Delta x\} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\xi)\Delta x =$~~

~~$= f \Rightarrow$~~



Т.к. Δx "мало", а f непрер., то $f(\xi) \approx f(x_0)$

$P\{x_0 \le X < x_0 + \Delta x\} \approx f(x_0)\Delta x$

5° $P\{X = x_0\} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} P\{x_0 \le X < x_0 + \Delta x\} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\xi)\Delta x =$

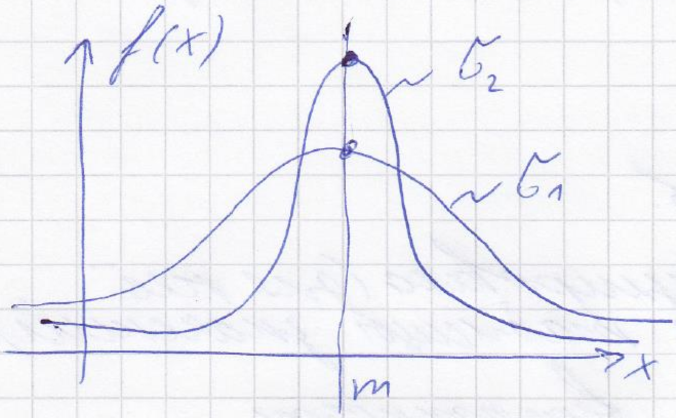
$= \{f(x)$ непрер. $\Rightarrow$ ограничен.$\} = [\text{огр.} \cdot \text{БМ}] = 0$

3. Сформулировать определение нормальной случайной величины, геометрический смысл параметров. Понятие стандартного нормального закона. Доказать формулу для вычисления вероятности попадания нормальной случайной величины в интервал.

VI Нормальная случ. величина $X \sim N(m, \sigma^2)$

Опр. Говорят, что непр. с. в. X имеет нормальное распределение (распределение Гаусса) с пар-рами m и σ^2, если её плотность распр-я имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \text{ где } \sigma > 0$$



Замеч 1) пар-р m характеризует положение центра симметрии графика f(x). Пар-р σ отвечает за степень разброса значений сл. величины относ. среднего знач-я. Чем больше σ, тем больше разброс ($\sigma_1 > \sigma_2$ - см. рис.)

Если m = 0, σ = 1, то норм. с. в. $X \sim N(0,1)$ наз. стандартной ~~нор~~ нормальн. величиной

Замеч. Если норм. с. в. не явл. стандартной, как найти $P\{a \le X < b\}$?

$$P\{a \le X < b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx = \left(\begin{array}{l} t = \frac{x-m}{\sigma} \\ dt = \frac{1}{\sigma}dx \\ x = a \Rightarrow t = \frac{a-m}{\sigma} \\ x = b \Rightarrow t = \frac{b-m}{\sigma} \end{array} \right) =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{\frac{a-m}{\sigma}}^{\frac{b-m}{\sigma}} e^{-t^2/2}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{a-m}{\sigma}}^{\frac{b-m}{\sigma}} e^{-t^2/2}dt = \left\{ \text{вер-ть того, что станд. норм. сл. вел. попала в промеж. } \left[\frac{a-m}{\sigma}; \frac{b-m}{\sigma}\right) \right\} =$$

$$= \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$$

4. Сформулировать определение случайного вектора и функции распределения вероятностей случайного вектора. Сформулировать свойства функции распределения двумерного случайного вектора. Доказать предельные свойства.

Пусть $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ – вероятностное пр-во
$X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ – сл. величины, заданные на этом вероятностном пр-ве

Опр n-мерным случ. в-ром наз. кортеж $(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$.

Опр Ф-цией распр-я n-мерного сл. в-ра $(X_1, \ldots, X_n)$ наз. отображение $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, к-е определено усл-м
$F(x_1, \ldots, x_n) = P\{X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n\}$.

Св-ва двумерной ф-ции распред.

1° $0 \le F(x_1, x_2) \le 1$

2° при фикс. x_2 ф-ция $F(x_1, x_2)$ явл. неуб. ф-цией от x_1.
~~(x_1, x_2)~~ при фикс. x_1 ф-ция $F(x_1, x_2)$ явл. неуб. ф-цией от x_2.

3° $\lim\limits_{x_2 \to -\infty} F(x_1, x_2) = 0$
$\lim\limits_{x_1 \to -\infty} F(x_1, x_2) = 0$

4° $\lim\limits_{\substack{x_1 \to +\infty \\ x_2 \to +\infty}} F(x_1, x_2) = 1$

5° $\lim\limits_{x_2 \to +\infty} F(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1)$
$\lim\limits_{x_1 \to +\infty} F(x_1, x_2) = F_{X_2}(x_2)$

6° $P\{a_1 \le X_1 < b_1, a_2 \le X_2 < b_2\} = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2)$

7° При фикс. x_2 $F(x_1, x_2)$ как ф-ция x_1 явл. непрер. слева во всех точках
При фикс. x_1 $F(x_1, x_2)$ как ф-ция x_2 явл. непрер. слева во всех точках

... на след. стр.

Док-во

1°, 2° доказ-ся аналогично одном. случаю

3° док-м а) $\lim\limits_{x_2 \to -\infty} F(x_1, x_2) = 0$

Рассм. событие $\{X_1 < x_1\} \cdot \{X_2 < -\infty\} \Rightarrow \{X_1 < x_1\} \cdot \underbrace{\{X_2 < -\infty\}}_{}$

$\overset{\text{невозм. соб.}}{}$ - невозм. $\Rightarrow F(x_1, -\infty) = P\{X_1 < x_1, X_2 < -\infty\} = 0$

б) $\lim\limits_{x_1 \to -\infty} F(x_1, x_2) = 0$ - док. аналог.

4° док-ся аналог. одномерному случаю

а) док-м, что $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Рассм. посл-ть $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ такую, что

1) $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$

2) $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$

Рассм. посл-ть событий

$A_n = \{X < x_n\}, \quad n \geq 1$

Тогда A_n, $n = 1, 2, \dots$, - возраст. посл-ть, т.к

$A_i \subseteq A_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots$

В соотв. с аксиомой непр-ти

$\lim P\{A_n\} = P\{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\} = P\underbrace{\{X < +\infty\}}_{\text{достов. соб.}} = 1$

Т.к. $P\{A_n\} = P\{X < x_n\} = F(x_n)$

Т.о. $\lim\limits_{n \to +\infty} F(x_n) = 1$

Т.к. x_n - произв. последов., то в соотв. с опред. предела ф-ции по Гейне

$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

5° а) Док., что $\lim\limits_{x_2 \to +\infty} F(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1)$

Событие $\{X_2 < +\infty\}$ явл. достоверным $\Rightarrow$
$\Rightarrow \{X_1 < x_1\} \cdot \{X_2 < +\infty\} = \{X_1 < x_1\}$

Тогда $F(x_1, +\infty) = P\{X_1 < x_1\} = F_{X_1}(x_1)$

5. Сформулировать определение случайного вектора и функции распределения вероятностей случайного вектора. Сформулировать свойства функции распределения двумерного случайного вектора. Доказать формулу для вычисления P {a1 <= X1 < b1 , a2 <= X2 < b2 }.

Пусть $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ – вероятностное пр-во
$X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ - сл. величины, заданные на этом вероятностном пр-ве

Опр n-мерным случ. в-ром наз. кортеж $(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$.

Опр Ф-цией распр-я n-мерного сл. в-ра $(X_1, \ldots, X_n)$ наз. отображение $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, к-е определено усл-м $F(x_1, \ldots, x_n) = P\{X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n\}$.

Св-ва двумерной ф-ции распред.

1° $0 \le F(x_1, x_2) \le 1$

2° при фикс. x_2 ф-ция $F(x_1, x_2)$ явл. неуб. ф-цией от x_1.
~~(x_1, x_2)~~ при фикс. x_1 ф-ция $F(x_1, x_2)$ явл. неуб. ф-цией от x_2.

3° $\lim\limits_{x_2 \to -\infty} F(x_1, x_2) = 0$

$\lim\limits_{x_1 \to -\infty} F(x_1, x_2) = 0$

4° $\lim\limits_{\substack{x_1 \to +\infty \\ x_2 \to +\infty}} F(x_1, x_2) = 1$

5° $\lim\limits_{x_2 \to +\infty} F(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1)$

$\lim\limits_{x_1 \to +\infty} F(x_1, x_2) = F_{X_2}(x_2)$

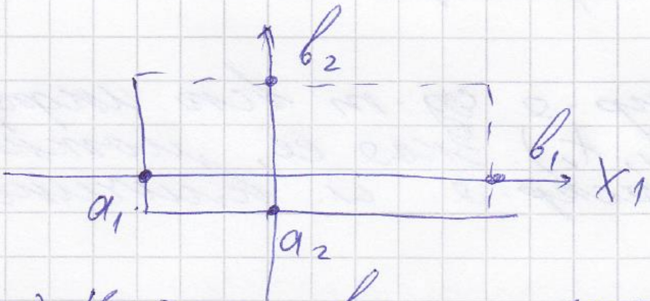
6° $P\{a_1 \le X_1 < b_1, a_2 \le X_2 < b_2\} = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2)$

7° При фикс. x_2 $F(x_1, x_2)$ как ф-ция x_1 явл. непрер. слева во всех точках
При фикс. x_1 $F(x_1, x_2)$ как ф-ция x_2 явл. непрер. слева во всех точках

см. след. стр.

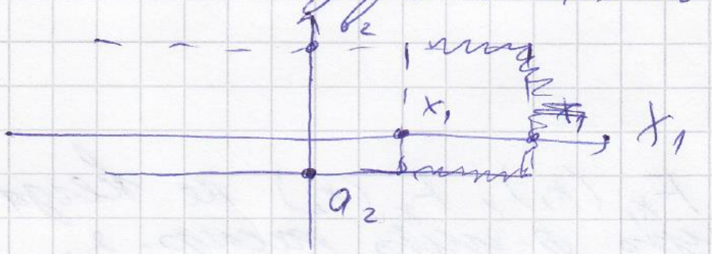
Док-во

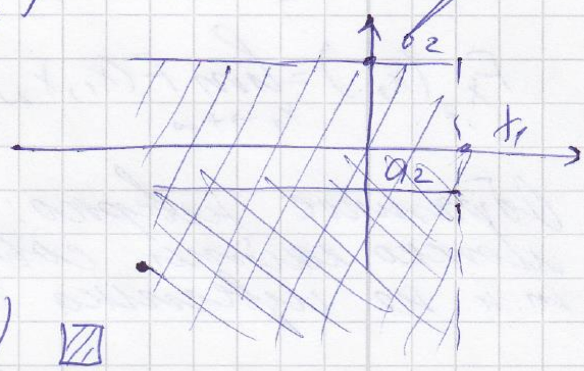
6°



P - ?

а) Найдем вер-ть того, что сл. в-р попадет в полосу $\{X_1 < x_1, a_2 \le X_2 < b_2\}$



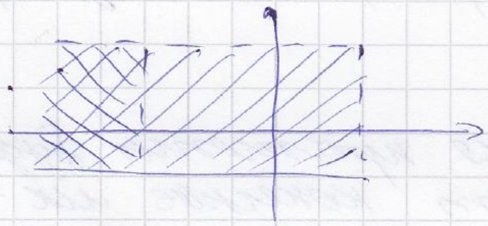


$F(x_1, b_2) = P(X_1 < x_1, X_2 < b_2)$

$F(x_1, a_2) = P(X_1 < x_1, X_2 < a_2)$

$P\{X_1 < x_1, a_2 \le X_2 < b_2\} = F(x_1, b_2) - F(x_1, a_2)$

б)



$F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2)$ (по получ в а) ф-ле)

$F(a_1, b_2) - F(a_1, a_2)$

Тогда $P\{a_1 \le X_1 < b_1, a_2 \le X_2 < b_2\} = P\{(X,Y) \in \ \} - P\{(X,Y) \in \ \} = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2)$

6. Сформулировать определение случайного вектора и функции распределения вероятностей случайного вектора. Сформулировать определение непрерывного случайного вектора и доказать свойства плотности распределения вероятностей для двумерного случайного вектора.

Пусть $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ - вероятностное пр-во
$X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ - сл. величины, заданные на этом вероятностном пр-ве

Опр n-мерным случ. в-ром наз. кортеж $(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$.

Опр Ф-цией распр-я n-мерного сл. в-ра $(X_1, \ldots, X_n)$ наз. отображение $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, к-е определено усл-м
$F(x_1, \ldots, x_n) = P\{X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n\}$.

Опр. Сл. в-р $(X_1, \ldots, X_n)$ наз. непрерывным, если $\exists$ ф-ция $f(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int_{-\infty}^{x_2} dt_2 \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \ldots, t_n)\, dt_n$$

Опр При этом 1) ф-ция $f(x_1, \ldots, x_n)$ наз. (совместной) плотностью распр-я вер-тей сл. в-ра $(X_1, \ldots, X_n)$

2) предполагается, что указ. несобст. инт-л сходится для всех $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Св-ва двумерных непрер. сл. в-ров

1° $f(x_1, x_2) \geq 0$

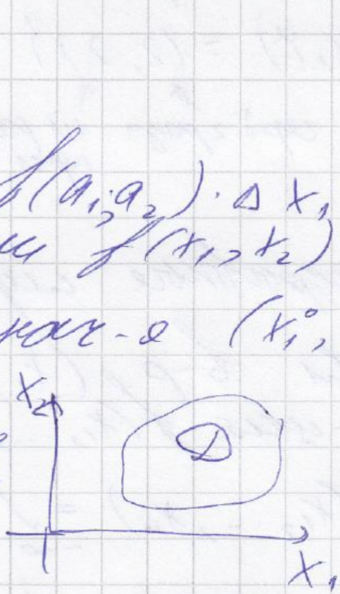
2° $P\{a_1 \leq X < b_1, a_2 \leq X_2 < b_2\} = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2)\, dx_2$

3° $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = 1$

4° $P\{a_1 \leq X_1 < a_1 + \Delta x_1, a_2 \leq X_2 < a_2 + \Delta x_2\} \approx f(a_1, a_2) \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta x_2$,
где (a_1, a_2) - точка непрер. ~~ти~~ ф-ции $f(x_1, x_2)$

5° Для любого наперед заданного знач-я (x_1°, x_2°)
$P\{(X_1, X_2) = (x_1^\circ, x_2^\circ)\} = 0$

6° $P\{(X_1, X_2) \in D\} = \iint_D f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$



7° $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)\, dx_2 = f_{X_1}(x_1)$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)\, dx_1 = f_{X_2}(x_2)$

Док-во

1°–5° доказ-ся аналогично одном. случаю.

6° явл. обобщением св-ва 2° (без док-ва)

7° а) пок. что $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, t_2)\,dt_2 = f_{X_1}(x_1)$

$$F_{X_1}(x_1) = F(x_1, +\infty) \underset{\substack{\text{опр. непр.}\\ \text{сл. в-ра}}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, t_2)\,dt_2$$

Продиф. обе части по x_1:

$$f_{X_1}(x_1) = \left\{\begin{matrix}\text{по th. о}\\ \text{произв. инт-ла}\\ \text{с перем. пред.}\end{matrix}\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, t_2)\,dt_2.$$

б) доказ-ся аналог.

■

Св-ва ф-ции плотности распр-я вер-тей

1° $f(x) \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$

2° $P\{x_1 \leq X < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$

3° $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

4° Если x_0 — т. непрер. $f(x)$, то при малых Δx

$P\{x_0 \leq X < x_0 + \Delta x\} \approx f(x_0)\Delta x$

5° если X — непр. сл. вел., то для любого наперед заданного x_0 $P(X = x_0) = 0$

Док-во

1° $f(x)=F'(x)$, т. к. $F(x)$ - неуб. ф-ция, то $F'(x)\geq 0 \Rightarrow f(x)\geq 0$

2° По св-ву ф-ции распред. $P\{x_1 \leq X < x_2\} = F(x_2)-F(x_1) =$

$= \{$т. к. $F(x)$ - первообразная для $f(x)\} = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$

ф-ла Ньютона - Лейбница

3° $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \left\{ \begin{matrix} \text{св-во} \\ 2° \end{matrix} \right\} = F(+\infty) - F(-\infty) = 1-0=1$

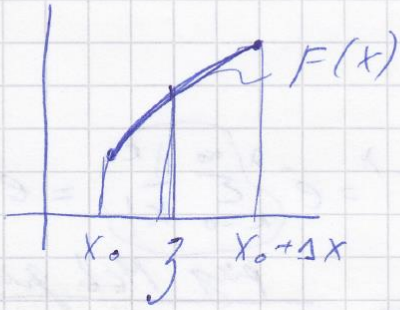
4° $P\{x_0 \leq X < x_0+\Delta x\} = F(x_2)-F(x_1) = \left\{ \begin{matrix} \text{т. к. } f \text{ непрер., то} \\ \text{восп. th Лагранжа} \end{matrix} \right\} =$

$= f(\xi)\cdot\Delta x$, где $\xi \in (x_0, x_0+\Delta x)$

~~Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$~~

~~$P\{X=x_0\} = \lim P\{x_0 \leq X < x_0+\Delta x\} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\xi)\Delta x =$~~

~~$=\{\Rightarrow$~~



Т. к. Δx „мало", а f непрер., то $f(\xi)\approx f(x_0)$

$P\{x_0 \leq X < x_0+\Delta x\} \approx f(x_0)\Delta x$

5° $P\{X=x_0\} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} P\{x_0 \leq X < x_0+\Delta x\} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\xi)\Delta x =$

$= \left\{ \begin{matrix} f(x) \text{ непрер.} \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{огранич.} \end{matrix} \right\} = [\text{ОГР}\cdot\text{БМ}] = 0$

7. Сформулировать определение пары независимых случайных величин. Доказать свойства независимых случайных величин. Понятия попарно независимых случайных величин и случайных величин, независимых в совокупности.

Опр Сл. вел. X и Y наз. независимыми, если $F(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$, где F - совмест. ф-ция распр. в-ра (X,Y)

F_X, F_Y - маргинальные ф-ции распред-я сл. вел. X и Y.

Св-ва незав. сл. вел.

1° Сл. вел. X и Y независ. $\Leftrightarrow \forall x, \forall y \in \mathbb{R}$ события $\{X<x\}$ и $\{Y<y\}$ независ.

2° Сл. вел. X и Y независ. $\Leftrightarrow \forall\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $\forall\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ события $\{x_1 \le X < x_2\}$ и $\{y_1 \le Y < y_2\}$ независ.

3° Сл. вел. X и Y независ. $\Leftrightarrow \forall\forall M_1, M_2$ события $\{X \in M_1\}$ и $\{Y \in M_2\}$ независ. где M_1, M_2 — промежутки или объединения промежутков в $\mathbb{R}$

4° Если X, Y - дискр. сл. вел., то X, Y незав. $\Leftrightarrow$ $P\{(X,Y)=(x_i, y_j)\} = P\{X=x_i\} P\{Y=y_j\}$ для всех i, j.

5° Если X, Y непр. сл. вел., то X, Y незав. $\Leftrightarrow$ $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$, где f - совместная пл-ть распред. в-ра (X,Y); f_X, f_Y - маргинальные пл-ти распр. вел. X, Y.

Док-во

1° непоср-венно проверяется по опр-ю.

2° а) док-ть необх. ($\Rightarrow$)

Пусть X, Y - незав. $\Rightarrow F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$.

По св-ву двумерной ф-ции распр.

$P\{x_1 \le X < x_2, y_1 \le Y < y_2\} = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) -$

$- F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) = F_X(x_2)F_Y(y_2) - F_X(x_1)F_Y(y_2) -$

$- F_X(x_2)F_Y(y_1) + F_X(x_1)F_Y(y_1) =$

$= [F_X(x_2) - F_X(x_1)][F_Y(y_2) - F_Y(y_1)] = \left\{\begin{array}{l}\text{св-ва одном.}\\ \text{ф-ции распр.}\end{array}\right\} =$

$= P\{x_1 \le X < x_2\} P\{y_1 \le Y < y_2\} \Rightarrow$ события

$\{x_1 \le X < x_2\}$ и $\{y_1 \le Y < y_2\}$ независ.

б) док. достаточности ($\Leftarrow$)

Пусть для любых x_1, x_2, y_1, y_2 события $\{x_1 \le X < x_2\}$ и $\{y_1 \le Y < y_2\}$ независ.

$F(x,y) = P\{X < x, Y < y\} = P\{-\infty \le X < x, -\infty \le Y < y\} =$

$= \left\{\begin{array}{l}\text{т. к. соб.}\\ \text{незав.}\end{array}\right\} = P\{-\infty \le X < x\} P\{-\infty \le Y < y\} =$

$= P\{X < x\} P\{Y < y\} = F_X(x)F_Y(y)$.

3° явл. обобщением св-в 1° и 2° (без док-ва)

4° а) достаточность ($\Leftarrow$)

доказана в рассуждениях перед опр-ем независ. сл. вел.

б) необходимость ($\Rightarrow$)

доказ-ся аналог. (док. самост.)

Рассм. дискр. сл. в-р (X,Y), у к-ого конечное мн-во значений: $X \in \{x_1, \dots, x_m\}$, $Y \in \{y_1, \dots y_n\}$.

Естественно дать опр-е:
X и Y независ., если $P\{(X,Y) = (x_i, y_j)\} = P\{X = x_i\} P\{Y = y_j\}$

Посмотрим, какими св-вами в этом случае обладает совместная ф-ция распред.:

$$F(x,y) = P\{X<x, Y<y\} = \left\{\begin{matrix}\text{т.к.}\\ (X,Y) -\\ \text{дискр.}\end{matrix}\right\} = P\{X \in \{x_1, \dots, x_k\},$$
$$Y \in \{y_1, \dots, y_l\}\} =$$
$$= P\{(X,Y) \in \{(x_i, y_j) : i = \overline{1,k}, j = \overline{1,l}\}\} =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} P\{(X,Y) = (x_i, y_j)\} = \{X, Y \text{ - незав.}\} =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} P\{X = x_i\} P\{Y = y_j\} = \left(\sum_{i=1}^{k} P\{X = x_i\}\right)\left(\sum_{j=1}^{l} P\{Y = y_j\}\right) =$$
$$= P\{X \in \{x_1, \dots, x_k\}\} \cdot P\{Y \in \{y_1, \dots, y_l\}\} = F_X(x) F_Y(y)$$

Сп

5° а) необх.-ть $\Rightarrow$
Пусть X, Y - независи.
Тогда $F(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[F_X(x) F_Y(y)\right] =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x} F_X(x)\right]\left[\frac{\partial}{\partial y} F_Y(y)\right] = f_X(x) f_Y(y).$$

б) достаточность $\Leftarrow$
Пусть $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

Тогда $F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x} dt_1 \int\limits_{-\infty}^{y} f(t_1, t_2)\, dt_2 =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{x} dt_1 \int\limits_{-\infty}^{y} f_X(t_1) f_Y(t_2)\, dt_2 = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t_1)\, dt_1 \cdot \int\limits_{-\infty}^{y} f_Y(t_2)\, dt_2 =$$

$$= F_X(x) F_Y(y) \Rightarrow X, Y \text{ - независи.}$$

■

Определение

Сл. вел. $X_1, \dots, X_n$, заданные на одном вероятн. пр-ве наз.

– попарно независ., если для всех $i \neq j$ X_i, X_j – независ. сл. вел.

– независ. в совокупн., если $F(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(x_n)$, где F – совместн. ф-ция распр-я сл. в-ра $(X_1, \dots, X_n)$.

$F_{X_i}(x_i)$ – маргинальная ф-ция распр. компонент сл

8. Понятие условного распределения случайной величины. Сформулировать определение условного ряда распределения компоненты двумерного дискретного случайного вектора. Привести рассуждения, приводящие к такому определению. Сформулировать определение условной плотности распределения компоненты двумерного непрерывного случайного вектора. Сформулировать критерии независимости случайных величин в терминах условных распределений.

Условное распределение – это распределение случайной величины при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение.

Случай дискр. сл. в-ра.

Пусть 1) (X, Y) – дискр. сл. в-р
2) $X \in \{x_1, \dots, x_m\}$
$Y \in \{y_1, \dots, y_n\}$
3) Обозн. $p_{ij} = P\{(X, Y) = (x_i, y_j)\}$

Тогда если $Y = y_j$, то $P\{X = x_i / Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{Y_j}} = \frac{p_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} p_{ij}}$

Опр. Для дискр. двум. сл. в-ра (X, Y) условной вер-тью того, что сл. вел. X приняла зн-е x_i при условии, что сл. вел. Y приняла зн-е y_j, наз. число

$$\pi_{ij} = \frac{p_{ij}}{p_{Y_j}}$$

Определение

Условной плотностью распр-я сл. вел. X при условии, что сл. вел. Y приняла зн-е y, наз

$$f_X(x / Y = y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

Th критерий независимости случ. величин в терминах условных распределений.

Пусть (X, Y) - сл. в-р F_X

Тогда 1) X, Y - независ. $\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} F_X(x/Y=y) = F_X(x) \ \forall y, \text{ для к-ых опр-на } F_X(x/Y=y) \\ \text{или} \\ F_Y(y/X=x) = F_Y(y) \ \forall x, \text{ для к-ых опр-на } F_Y(y/X=x) \end{array}\right.$$

2) Если (X, Y) - непр. сл. в-р, то X, Y - независ $\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} f_X(x/Y=y) = f_X(x) \ \forall y, \text{ для к-ых опр-на } f_X(x/Y=y) \\ \text{или} \\ f_Y(y/X=x) = f_Y(y) \ \forall x, \text{ для к-х опр-на } f_Y(y/X=x) \end{array}\right.$$

3) Если X, Y - дискр. с. в-р, то X, Y - независ $\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} P(X=x_i / Y=y_j) = P(X=x_i) \ \forall y_j \\ \text{или} \\ P(Y=y_j / X=x_i) = P(Y=y_j) \ \forall x_i \end{array}\right.$$

9. Понятие функции скалярной случайной величины. Доказать теорему о формуле для вычисления плотности fY (y) случайной величины Y = ϕ(X), если X – непрерывная случайная величина, а ϕ – монотонная непрерывно дифференцируемая функция. Записать аналогичную формулу для кусочно-монотонной функции ϕ.

① Скалярная ф-ция скалярного аргумента

Пусть 1) $X = X(\omega)$ — некот. сл. величина
2) $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — числ. ф-ция

Тогда $Y = \varphi(X)$ — случ. величина

Th Пусть 1) X — непр. сл. вел.
2) $f_X(x)$ — пл-ть распр. сл. вел. X
3) $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — монотонная ф-ция, к-я непрер. диффер.
4) ψ — ф-ция, обратная к φ
5) $Y = \varphi(X)$

Тогда Y — непр. сл. вел., пл-ть распр. к-й

$$f_Y(y) = f_X(\psi(y))\,|\psi'(y)|.$$

Док-во

По опр-ю ф-ции распр.

$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{\varphi(X) < y\}$

т.к. φ - монотонная, то $\exists$ обратная к ней ф-ция $\varphi^{-1} = \psi$

Событие $\{\varphi(X) < y\}$ = соб. $\{X < \psi(y)\}$ (если φ - возраст. ф-ция)

$\varphi(x) = x^3 \quad x^3 < y \Leftrightarrow x < \sqrt[3]{y}$

$\{\varphi(X) < y\}$ = соб. $\{X > \psi(y)\}$ (если φ - мон. убыв.)

Тогда $F_Y(y) = P\{X < \psi(y)\} = F_X(\psi(y))$ (если $\varphi \nearrow$)

$F_Y(y) = P\{X > \psi(y)\} = 1 - P\{X < \psi(y)\} =$

$= 1 - F_X(\psi(y))$ (если $\varphi \searrow$)

Тогда $f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy}\left[F_X(\psi(y))\right] = F_X'(\psi(y)) \cdot \psi'(y) =$

$= f_X(\psi(y))\psi'(y)$ (если $\varphi \nearrow$)

$f_Y(y) = \ldots = -f_X(\psi(y))\psi'(y)$

Т.к. $f_X \geq 0$, а знак $\psi'(y)$ зависит от возр./уб. ф-ции φ, то обе ф-лы м. объед.:

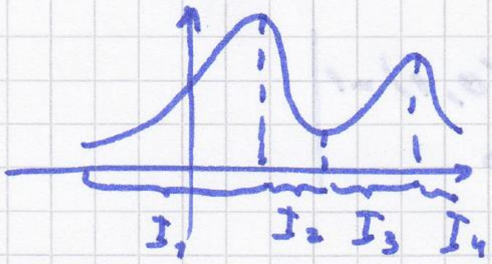
$f_Y(y) = f_X(\psi(y))|\psi'(y)|$

■

Th Пусть 1) X - непрер. сл. вел.

2) $f_X(x)$ - пл-ть распр. X

3) $\varphi: R \to R$ имеет n интервалов монотонности $I_1, \dots, I_n$



4) φ непрер. дифф-ма

5) Для данного $y \in R$ $x_1(y), \dots, x_k(y)$ — все реш-я ур-я $\varphi(x) = y$ ($k \le n$)

6) $\psi_1(y), \dots, \psi_k(y)$ - ф-ции, обратные к φ соотв. на тех интервалах монот., к-м принадлежат $x_1, \dots, x_k$.

Тогда для данного з-ния y

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{k} f_X(\psi_i(y)) |\psi_i'(y)|$$

10. Понятие скалярной функции случайного вектора. Обосновать формулу для вычисления функции распределения случайной величины Y, функционально зависящей от случайных величин X1 и X2, если (X1, X2) – непрерывный случайный вектор. Доказать теорему о формуле свертки.

② Скалярная ф-ция векторного аргумента

т. Пусть 1) (X_1, X_2) – сл. в-р

2) $\varphi: R^2 \to R$ – ф-ция двух перем.

Тогда $Y = \varphi(X_1, X_2)$ – сл. вел. (скалярная)

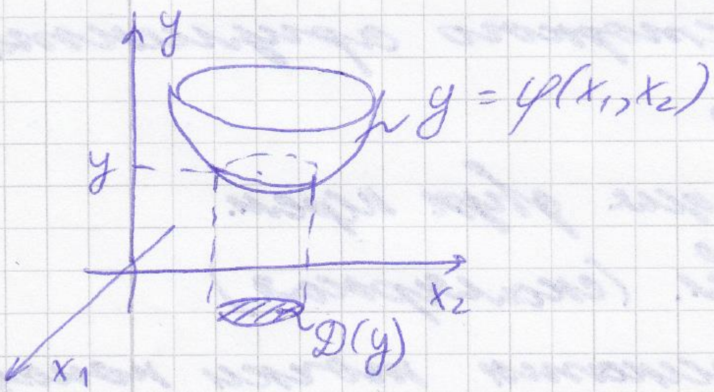
Формула ф-ции распределения сл. вел. Y, завис. от сл. вел X_1 и X_2

II Если (X_1, X_2) – непр. сл. в-р, то

$$F_Y(y) = \iint\limits_{\varphi(x_1,x_2)<y} f(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2, \quad (*)$$ где $f(x_1, x_2)$ – пл-ть распр. сл. в-ра (X_1, X_2)

$\left\{ \begin{array}{l} \text{нер-во } \varphi(x_1, x_2) < y \\ \text{обозн. обл-сть } \{(x_1, x_2) : \varphi(x_1, x_2) < y\} \end{array} \right.$

Замеч. Обоснование ф-лы $(*)$



~~По опр.~~

По опр. $F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{\varphi(X_1, X_2) < y\}$

Событие $\{\varphi(X_1, X_2) < y\}$ эквивал. событию $\{(X_1, X_2) \in D(y)\}$

Т.о. $F_Y(y) = P\{(X_1, X_2) \in D(y)\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{св-во} \\ \text{пл-ти} \\ \text{сл. в-ра} \end{array} \right\} = \iint\limits_{D(y)} f(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 =$

$= \iint\limits_{\varphi(x_1,x_2)<y} f(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2$

переход на ①

③ Формула свертки

Th Пусть 1) (X_1, X_2) – непр. сл. в-р

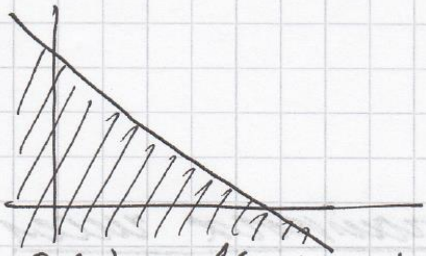
2) X_1, X_2 – незав.

3) $Y = X_1 + X_2$

Тогда $f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x) f_{X_2}(y - x)\,dx$ – ф-ла свертки.

Док-во

$F_Y(y) = P\{Y<y\} = P\{X_1+X_2<y\} = P\{(X_1,X_2)\in \mathcal{D}(y)\} =$



$= \iint\limits_{\mathcal{D}(y)} f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 =$

$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2)\,dx_2 = \left\{ \begin{array}{l} \text{т.к. } X_1, X_2 \text{ - незав.} \\ \Rightarrow f(x_1,x_2) = \\ = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \end{array} \right\} =$

$\mathcal{D}(y) = \{(x_1,x_2) : x_1+x_2<y\}$

$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int\limits_{-\infty}^{y-x_1} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)\,dx_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1)\,dx_1 \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{y-x_1} f_{X_2}(x_2)\,dx_2}_{= F_{X_2}(y-x_1)} =$

$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1) F_{X_2}(y-x_1)\,dx_1$

Продиф. обе части рав-ва ~~по y~~:

$F_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1) F_{X_2}(y-x_1)\,dx_1$ по y:

$f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(y-x_1)\,dx_1$

■

11. Сформулировать определение математического ожидания для дискретной и непрерывной случайных величин. Механический смысл математического ожидания. Доказать свойства математического ожидания. Записать формулы для вычисления математического ожидания функции случайной величины и случайного вектора.

Опр. Математическим ожиданием (средним значением) дискр. сл. вел. X наз. число

$$M[X] = \sum_{i \in I} x_i p_i$$

Опр. Матем. ожиданием непр. сл. вел. X наз. число $M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$

Мех. смысл мат. ожидания

Дискр. сл. вел. X можно интерпретировать как систему точек $x_1, x_2, \dots$ на прямой; масса т. x_i равна p_i

Коор-та центра масс этой с-мы

$$x_{ц.м.} = \frac{\sum_{i \in I} x_i p_i}{\sum_{i \in I} p_i} = \sum_{i \in I} x_i p_i = MX.$$

1

Св-ва мат. ожидания

1° Если ряд распр-я с.в. X (т.е. фактически X не явл. сл. вел.), то $MX = x_0$

X	x_0
p	1

2° $M[aX + b] = aM[X] + b$, a, b - const

3° $M[X_1 + X_2] = MX_1 + MX_2$

4° Если X_1, X_2 - незав. сл. вел., то $M[X_1 X_2] = MX_1 \cdot MX_2$.

Док-во

1° $MX = 1 \cdot x_0 = x_0$

2° док-м для непр. сл. вел.

$$M[aX+b] = \{\varphi(x) = ax+b\} = \int_R (ax+b) f(x)\,dx = a\underbrace{\int_R x f(x)\,dx}_{MX} +$$

$$+ b\underbrace{\int_R f(x)\,dx}_{1} = aM[X] + b$$

3° док-м для дискр. сл. вел.

$$M[X_1 + X_2] = \{\varphi(x_1, x_2) = x_1 + x_2\} = \sum_i \sum_j (x_{1,i} + x_{2,j}) p_{ij} =$$

$$= \sum_i \sum_j x_{1,i}\, p_{ij} + \sum_j \sum_i x_{2,j}\, p_{ij} = \sum_i x_{1,i} \underbrace{\sum_j p_{ij}}_{P\{X_1 = x_{1,i}\}} + \sum_j x_{2,j} \underbrace{\sum_i p_{ij}}_{P\{X_2 = x_{2,j}\}} =$$

$$= \underbrace{\sum_i x_{1,i}\, P\{X_1 = x_{1,i}\}}_{MX_1} + \underbrace{\sum_j x_{2,j}\, P\{X_2 = x_{2,j}\}}_{MX_2} = MX_1 + MX_2$$

4° док-м для непр. сл. вел.

$$M[X_1 X_2] = \{\varphi(x_1, x_2) = x_1 x_2\} = \iint_{R^2} x_1 x_2 \underbrace{f(x_1, x_2)}_{f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)}\, dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)\, dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f_{X_1}(x_1)\, dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 f_{X_2}(x_2)\, dx_2 =$$

$$= M[X_1] \cdot M[X_2]$$

$\blacksquare$

Замеч 1) Пусть X - сл. вел., $\varphi: R \to R$ - некот. ф-ция.

$Y = \varphi(X)$. $M[Y] = M[\varphi(X)] = \sum_{i \in I} \varphi(x_i) p_i$, если X - дискр. сл. вел.

$MY = M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx$, если X - непр. сл. вел.

2) Если $\vec{X} = (X_1, X_2)$ - сл. в-р, $\varphi: R^2 \to R$, $Y = \varphi(X_1, X_2)$, то

$MY = \sum_{i,j} \varphi(x_{1i}, x_{2j}) p_{ij}$, если $\vec{X}$ - дискр. сл. в-р, $p_{ij} = P\{(X_1, X_2) = (x_{1i}, x_{2j})\}$

$MY = \iint_{R^2} \varphi(x_1, x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$, если $\vec{X}$ - непр. сл. в-р

<...>

12. Сформулировать определение дисперсии случайной величины. Механический смысл дисперсии. Доказать свойства дисперсии. Понятие среднеквадратичного отклонения случайной величины.

Пусть X – сл. вел.
$m = MX$

Опр Дисперсией сл. вел. X наз. число $D[X] = M[(X-m)^2]$

Мех. смысл дисперсии (для дискр. сл. вел.) – момент инерции с-мы точек относ. центра масс. Дисперсия характеризует разброс значений сл. вел. относ. мат. ожид. Чем больше дисперсия, тем больше разброс

Св-ва дисперсии

1° $DX \geq 0$
2° Если $P\{X=x_0\}=1$, то $DX=0$
3° $D[aX+b] = a^2 DX$, $a, b = const$
4° $D[X] = M[X^2] - (MX)^2$
5° Если X_1, X_2 – незав. сл. вел., то $D[X_1+X_2] = DX_1 + DX_2$

Док-во

1° $DX = MY$, где $Y = (X-MX)^2 \geq 0 \Rightarrow MY \geq 0$

2° $DX = \{MX = x_0\} = \{\sum_i (x_i - m)^2 p_i\} = (x_0 - x_0)^2 \cdot 1 = 0$

3° Обозн. $MX = m$
$D[aX+b] = M[((aX+b) - M(aX+b))^2] = M[(aX+b-aM[X]-b)^2] =$
$= M[a^2(X-MX)^2] = a^2 M[(X-m)^2] = a^2 DX$

4° Обозн. $MX = m$
$DX = M[(X-m)^2] = M[X^2 - 2mX + m^2] = M[X^2] - 2m\underbrace{M[X]}_{m} + \underbrace{M[m^2]}_{m^2} =$
$= M[X^2] - m^2 = M[X^2] - (MX)^2$

5° Обозн. $m_1 = MX_1$, $m_2 = MX_2$
$D[X_1+X_2] = M[((X_1+X_2) - \underbrace{M(X_1+X_2)}_{m_1+m_2})^2] = M[((X_1-m_1)+(X_2-m_2))^2] =$

$= M[(X_1-m_1)^2 + (X_2-m_2)^2 + 2(X_1-m_1)(X_2-m_2)] =$

$= \underbrace{M[(X_1-m_1)^2]}_{DX_1} + \underbrace{M[(X_2-m_2)^2]}_{DX_2} + \underbrace{2M[(X_1-m_1)(X_2-m_2)]}_{A} = DX_1 + DX_2$

$A = M[X_1X_2 - m_1X_2 - m_2X_1 + m_1m_2] = M[X_1X_2] - m_1MX_2 - m_2MX_1 +$
$+ m_1m_2 = \{X_1, X_2 \text{ - незав.} \Rightarrow M(X_1, X_2) = m_1m_2\} =$
$= m_1m_2 - m_1m_2 - m_1m_2 + m_1m_2 = 0$

∎

DX имеет размерность квадрата случ. вел. X
(т.е. если X измеряется в метрах, то DX – в $м^2$)

Поэтому во многих сл. удобно исп. величину
$\sigma_x = \sqrt{DX}$ – среднеквадратичное отклонение сл. вел. X.

13. Сформулировать определение математического ожидания и дисперсии. Записать законы распределения биномиальной, пуассоновской, равномерной, экспоненциальной и нормальной случайной величин. Найти математические ожидания и дисперсии этих случайных величин.

Опр. Математическим ожиданием (средним значением) дискр. сл. вел. X наз. число

$$M[X] = \sum_{i \in I} x_i p_i$$

Опр Матем. ожиданием непр. сл. вел. X наз. число $M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$

Пусть X – сл. вел.
$m = MX$

Опр Дисперсией сл. вел. X наз. число $D[X] = M[(X-m)^2]$

Биномиальная сл. вел. $X \sim B(n, p)$

$P\{X = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$, $k = \overline{0;n}$

X равна числу успехов в n испыт. по сх. Бернулли. Поэтому рассм. сл. вел. $X_i = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-м испыт. успех} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$, $i = \overline{1;n}$

Тогда $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$MX = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{MX_i}_{p} = np$$

$$DX = D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \left\{\begin{array}{l}\text{испыт. в сх.} \\ \text{Берн. независ.} \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{ все } X_i \text{ незав.}\end{array}\right\} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{DX_i}_{pq} = npq.$$

II Пуассоновская сл. вел. $X \sim \Pi(\lambda)$

$$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$MX = \sum_k x_k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \left\{ \begin{matrix} t = k-1 \\ k=1 \Rightarrow t=0 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \frac{\lambda^t}{t!}}_{\text{ряд Маклорена}} = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

$$DX = M[X^2] - (MX)^2$$

$$M[X^2] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \left\{ k-1 = t \right\} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) \frac{\lambda^{t+1}}{t!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) \frac{\lambda^t}{t!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \Big[\underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} t \frac{\lambda^t}{t!}}_{(MX) e^{\lambda}} + \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \frac{\lambda^t}{t!}}_{e^{\lambda}} \Big] = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} [\lambda + 1] = \lambda^2 + \lambda$$

$$DX = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

III Сл. вел. X, имеющ. геом. распр-е

$$P\{X=k\} = p q^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad p + q = 1; \ p, q \in (0;1)$$

$$MX = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p q^k = p q \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1}}_{\text{производная суммы геом. прогр.}} = \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{pq}{p^2} = \frac{q}{p}.$$

Аналогично можно найти $DX = \frac{q}{p^2}$.

IV Равномерное распр-е

$X \sim R(a,b)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\,\frac{1}{2}x^2 \Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} =$$

$$= \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$DX = M[(X-MX)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\,\frac{1}{3}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3 \Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{1}{3(b-a)}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 - \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right)^3\right] =$$

$$= \frac{2(b-a)^3}{24(b-a)} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

V Экспоненциальное распр-е

$X \sim Exp(\lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x}\,dx = -\int_0^{\infty} x\,de^{-\lambda x} =$$

$$= -x e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$$DX = M[X^2] - (MX)^2$$

$$M[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \lambda \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x}\,dx = -\int_0^{+\infty} x^2\,de^{-\lambda x} =$$

$$= \underbrace{-x^2 e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}}_{0} + 2\underbrace{\int_0^{\infty} x e^{-\lambda x}\,dx}_{\frac{MX}{\lambda}} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$DX = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

VI Нормальная сл. вел.

$X \sim N(m, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \left| \begin{array}{l} y = \frac{x-m}{\sigma} \\ dx = \sigma dy \\ x = \sigma y + m \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma y + m) e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-y^2/2}\,dy + m \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy}_{\sqrt{2\pi}} \Big] = m$$

ф-ция нечетная

$$DX = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \left| y = \frac{x-m}{\sigma} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma y + m - m) e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = \ldots = \sigma^2$$

14. Сформулировать определение ковариации и записать формулы для ее вычисления в случае дискретного и непрерывного случайных векторов. Доказать свойства ковариации.

Опр Ковариацией сл. вел. X и Y наз. число

$$cov(X,Y) = M[(X-m_1)(Y-m_2)], \text{ где } m_1 = MX, \; m_2 = MY$$

Замеч Если (X,Y) - дискр. сл. в-р, то $cov(X,Y) =$
$$= \sum_{i,j}(x_i - m_1)(y_j - m_2)p_{ij}$$

Если (X,Y) - непр. сл. в-р, то $cov(X,Y) = \iint_{R^2}(x-m_1)(y-m_2)f(x,y)\,dx\,dy$

Св-ва ковариации

1° $D(X+Y) = DX + DY + 2\,cov(X,Y)$

2° $cov(X,X) = DX$

3° Если X, Y - незав., то $cov(X,Y) = 0$

4° $cov(a_1X + a_2, b_1Y + b_2) = a_1 b_1\, cov(X,Y)$

5° $|cov(X,Y)| \le \sqrt{DX \cdot DY}$, при этом $|cov(X,Y)| = \sqrt{DX \cdot DY} \Leftrightarrow$ X и Y связаны лин. завис.

6° $cov(X,Y) = M[XY] - (MX)(MY)$

Док-во

1° $D(X+Y) = M[\{(X+Y) - \underbrace{M(X+Y)}_{m_1+m_2}\}^2] = M[\{(X-m_1) + (Y-m_2)\}^2] =$

$= M[(X-m_1)^2] + M[(Y-m_2)^2] + 2M[(X-m_1)(Y-m_2)] =$
$= DX + DY + 2cov(X,Y)$

2° $cov(X,X) = M[(X-m_1)(X-m_1)] = M[(X-m_1)^2] = DX$

3° $cov(X,Y) = M[(X-m_1)(Y-m_2)] = \left| \begin{array}{l} X, Y \text{ - незав.,} \\ \text{то } X-m_1 \text{ и} \\ Y-m_2 \text{ - незав.} \end{array} \right| =$

$= \underbrace{M[X-m_1]}_{\overset{\circ}{m}_1(X)=0} \cdot \underbrace{M[Y-m_2]}_{\overset{\circ}{m}_2(Y)=0} = 0$

4° $M[a_1X + a_2] = a_1m_1 + a_2$
$M[b_1Y + b_2] = b_1m_2 + b_2$

$cov(a_1X + a_2, b_1Y + b_2) = M[(a_1X + \cancel{a_2} - a_1m_1 - \cancel{a_2})(b_1Y + \cancel{b_2} - b_1m_2 - \cancel{b_2})]$

$= M[a_1(X-m_1) \cdot b_1(Y-m_2)] = a_1b_1 M[(X-m_1)(Y-m_2)] =$
$= a_1b_1\, cov(X,Y)$

5° 1) Покажем, что $|cov(X,Y)| \le \sqrt{DX \cdot DY}$

Рассм. сл. вел. $Z(t) = tX - Y$, где $t \in \mathbb{R}$ – произв. число

$D[Z(t)] = D[tX - Y] = /1°/ = D[tX] + D[Y] - 2t\,cov(X,Y) =$

$= \underbrace{t^2 D[X] - 2t\,cov(X,Y) + D[Y]}_{} \ge 0$

Квадр. трехчлен относ. t, ветви параболы напр. вверх, т.к. $DX > 0$

Кв. трехчлен либо не имеет корней, либо имеет 1 корень $\Rightarrow$ Дискр ≤ 0

Дискр $= \underbrace{4 cov^2(X,Y) - 4 DX \cdot DY \le 0}_{}$

$|cov(X,Y)| \le \sqrt{DX \cdot DY}$

2) Покажем, что если $|cov(X,Y)| = \sqrt{DX \cdot DY}$, то $Y = aX + b$

т.к. $|cov(X,Y)| = \sqrt{DX\,DY} \Rightarrow$ Дискр. $= 0 \Rightarrow$ ур-е $D[Z(t)] = 0$ имеет единств. реш-е $\Rightarrow$ обозн. его $t = a$

Тогда сл. вел. $Z(a) = aX - Y$ имеет $D[Z(a)] = 0 \Rightarrow$ $Z(a)$ принимает единств. знач-е $\Rightarrow$ обозн. его $-b$

$Z(a) = aX - Y = -b \Rightarrow Y = aX + b$

3) Пок., что если $Y = aX + b$, то $|cov(X,Y)| = \sqrt{DX\,DY}$

$Y = aX + b \Rightarrow Z(a)$ принимает ед. знач-е $\Rightarrow$ $D[Z(a)] = 0 \Rightarrow$ Дискр. $= 0 \Rightarrow |cov(X,Y)| = \sqrt{DX\,DY}$

6° $cov(X,Y) = M[(X - m_1)(Y - m_2)] = M[XY - m_2 X - m_1 Y + m_1 m_2] =$

$= M[XY] - \underbrace{m_2 MX}_{m_1 m_2} - \underbrace{m_1 MY}_{m_1 m_2} + m_1 m_2 = M[XY] - m_1 m_2.$

15. Сформулировать определение ковариации и коэффициента корреляции случайных величин. Сформулировать свойства коэффициента корреляции. Сформулировать определения независимых и некоррелированных случайных величин, указать связь между этими свойствами. Понятия ковариационной и корреляционной матриц. Записать свойства ковариационной матрицы.

Опр Ковариацией сл. вел. X и Y наз. число

$cov(X,Y) = M[(X-m_1)(Y-m_2)]$, где $m_1 = MX$, $m_2 = MY$

Опр Коэффициентом корреляции сл. вел. X и Y наз. число

$\rho(X,Y) = \dfrac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}}$ (предполож., что $\exists DX$, $\exists DY$, $DXDY>0$)

Св-ва к-та корреляции

1° $\rho(X,X) = 1$

2° Если X, Y - независ., то $\rho(X,Y) = 0$

3° $\rho(a_1X+b_1, a_2Y+b_2) = \pm\rho(X,Y)$, причем „+", если $a_1a_2>0$, „−", если $a_1a_2<0$

4° $|\rho(X,Y)| \le 1$, причем $|\rho(X,Y)| = 1 \Leftrightarrow$ X и Y связ. лин. зав., т.е. $Y = aX+b$

При этом $\rho(X,Y) = 1$, если $a>0$

$\rho(X,Y) = -1$, если $a<0$

Опр Сл. вел. X и Y наз. независимыми, если $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$, где F - совмест. ф-ция распр. в-ра (X, Y)

F_X, F_Y - маргинальные ф-ция распред-е сл. вел. X и Y.

Опр Сл. величины X и Y наз. некоррелированными, если $cov(X,Y) = 0$

Замеч из св-ва 3° $\Rightarrow$ X, Y незав. $\Rightarrow$ X, Y - некорр.

обратное неверно!

Св-ва ковариации

1° $D(X+Y) = DX + DY + 2cov(X,Y)$

2° $cov(X,X) = DX$

3° Если X, Y - незав., то $cov(X,Y) = 0$

4° $cov(a_1X+a_2, b_1Y+b_2) = a_1b_1\, cov(X,Y)$

Пусть $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ – n-мерн сл. в-р

Опр Ковариац. м-цей в-ра $\vec{X}$ наз. м-ца $\Sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=\overline{1;n}}$,
где $\sigma_{ij} = cov(X_i, X_j)$

Св-ва ковариац. м-цы

1° $\sigma_{ii} = DX_i$

2° $\Sigma = \Sigma^T$

3° Если $\vec{Y} = \vec{X}B + \vec{c}$, $\left\{ \begin{array}{l} \text{здесь } \vec{X} = (X_1, \dots, X_n) \\ \vec{Y} = (Y_1, \dots, Y_m) \\ B \in M_{n,m}(\mathbb{R}), \text{ т.е.} \\ \text{компоненты в-ра } \vec{Y} \text{ линейно} \\ \text{выраж. через комп. в-ра } \vec{X} \end{array} \right\}$, $\Sigma_{\vec{Y}} = B^T \Sigma_{\vec{X}} B$

4° М-ца Σ явл. неотрицательно определенной, т.е.
ф-ция $q(\vec{y}) = \vec{y}\,\Sigma\,\vec{y}^T \geq 0$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

5° Если комп-ты в-ра $\vec{X}$ попарно независ., то $\Sigma_{\vec{X}}$ – диагональная

Опр Корреляционной м-цей в-ра $\vec{X}$ наз. м-ца
$P = (\rho_{ij})_{i,j=\overline{1;n}}$, $\rho_{ij} = \rho(X_i, X_j)$.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{bmatrix}$$

16. Понятие условного распределения компоненты двумерного случайного вектора (дискретный и непрерывный случаи). Сформулировать определения значений условного математического ожидания и условной дисперсии. Сформулировать определения условного математического ожидания и условной дисперсии. Записать формулы для вычисления условных математического ожидания и дисперсии для компоненты двумерного нормального вектора.

Пусть (X,Y) – дискр. сл. ~~вел.~~ в-р, $\pi_{ij} = P\{X=x_i \mid Y=y_j\} = \frac{p_{ij}}{p_{Y_j}}$

Опр Значением условного мат. ожидания сл. вел. X при условии, что сл. вел. Y приняла зн-е y_j, наз. число $M[X \mid Y=y_j] = \sum_i x_i \pi_{ij}$

Если (X,Y) – непр. сл. в-р, то $f_X(x \mid Y=y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

Опр Значением усл. мат. ожид. сл. вел. X при условии, ~~что сл. вел.~~ $Y=y$, наз. число $M[X \mid Y=y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x \mid Y=y)\,dx$

Пусть (X,Y) – произв. сл. в-р

Опр Условным мат. ожиданием сл. вел. X относ. сл. вел. Y наз. ф-ция $g(Y) = M[X \mid Y]$ такая, что
1) обл-ть опр-я ф-ции g совпад. с мн-вом возм. значений сл. вел. Y
2) Для каждого возм. зн-е y сл. вел. Y $g(y) = M[X \mid Y=y]$

Замеч Усл. мат. ож. $M[X \mid Y]$ явл. ф-цией сл. вел. Y и, сл-но само явл. сл. вел.

Замеч Усл. мат. ож. сл. вел. Y относ. сл. вел. X опр. ана

Опр Условной дисперсией сл. вел. X относ. сл. вел. Y наз. сл. вел. $D[X \mid Y] = M[(X - M[X \mid Y])^2 \mid Y]$

Замеч 1) Если (X,Y) – дискр. сл. в-р, то зн-е $D[X = Y = y_j] = \sum (x_i - M[X \mid Y=y_j])^2 \pi_{ij}$

2) если (X,Y) – непр. сл. в-р, то зн-е $D[X \mid Y=y] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X \mid Y=y])^2 f_X (x \mid Y=y)\,dx$

Пусть $\vec{X} = (X_1, X_2)$ – двум. сл. в-р с $\vec{m} = (m_1, m_2)$ и $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$

Тогда 1) условное распр-е X при усл. $Y=y$ будет норм.

2) $M[X \mid Y=y] = m_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - m_2)$

$D[X \mid Y=y] = \sigma_1^2 (1 - \rho^2)$

17. Понятие двумерного и n-мерного нормального распределения. Сформулировать основные свойства многомерного нормального распределения.

Опр Говорят, что сл. в-р (X_1, X_2) имеет двумерное норм. распр-е, если его ф-ция пл-ти распр-я вер-тей имеет вид

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2\sqrt{\det \Sigma}} e^{-\frac{1}{2}Q(x_1 - m_1,\, x_2 - m_2)}, \text{ где}$$

$\vec{m} = (m_1, m_2)$ - числ. в-р

$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$ - полож. опр. м-ца

$Q(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2)\,\tilde{\Sigma}\begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{pmatrix}$ - квадр. ~~форма~~ $\tilde{\Sigma} = \Sigma^{-1}$!

сп

Опр Говорят, что сл. в-р $(X_1, \ldots, X_n)$ имеет нормальное распр-е, если его ф-ция пл-ти распр-я вер-тей имеет вид

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n\sqrt{\det \Sigma}} e^{-\frac{1}{2}Q(\vec{x} - \vec{m})}, \text{ где}$$

$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$

$\vec{m} = (m_1, \ldots, m_n)$

$Q(\vec{\alpha}) = \vec{\alpha} \cdot \tilde{\Sigma}\, \vec{\alpha}^T$, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

квадратичная ~~форма~~ от n перем.

$\tilde{\Sigma} = \Sigma^{-1}$

Σ - положит. опред. м-ца порядка n.

сп

Св-ва многомерного норм. распр-я

1° Если $(X_1, \dots X_n)$ - норм. сл. в-р, то $\forall$ его компонента
$X_i \sim N(m_i, \sigma_i^2)$ - тоже норм. сл. вел.

2° Пусть $\vec{X} \sim N(\vec{m}, \Sigma)$
Тогда, если Σ диаг., то сл. вел. $X_1, \dots, X_n$ - независ.

3° Пусть $\vec{X} \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ - n-мерный сл. в-р
Тогда $\vec{Y}' = (X_1, \dots, X_{n-1})$ - нормальный сл. в-р с $\vec{m}' = (m_1, \dots, m_{n-1})$
и ковариац. м-цей Σ', к-я получ. из Σ отбрасыван.
последней строки и посл. ст-ца.

4° Пусть 1) $\vec{X} \sim N(\vec{m}, \Sigma)$
2) $Y = \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n + \lambda_0$
Тогда Y - норм. сл. вел.

5° Пусть $\vec{X} = (X_1, X_2)$ - двум. сл. в-р с $\vec{m} = (m_1, m_2)$ и $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$
Тогда 1) условное распр-е X при усл. $Y = y$ будет норм.
2) $M[X / Y = y] = m_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - m_2)$
$D[X / Y = y] = \sigma_1^2 (1 - \rho^2)$

СМ