Оглавление

1. Определение пространства элементарных исходов, примеры. Понятие события(нестрогое), следствие события, невозможное и достоверное событие, примеры. Операции над событиями. Сформулировать классическое определение вероятности и доказать его следствия.

Опр. Мн-во всех элем. исходов Ω будем наз. пр-вом элем. исходов

Опр. Каждый неделимый р-т случ. эксп-та, наз. элем исходом

Пр. 1) Бросают монету. Возможные исходы: выпадение Г или Р.

$\Omega = \{Г, Р\}$ $|\Omega| = 2$

2) Из колоды в 36 карт последоват. извлекают 2 карты.

Возм. исх.: $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \{1, \dots, 36\}, x_1 \neq x_2\}$

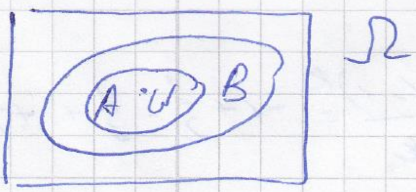
x_i – номер карты, к-я появилась при i-ом извлечении

$|\Omega| = 36 \cdot 35$

Ост. примеры см. семинар №6

Опр. (нестрогое) Событием наз. любое подмн-во мн-ва Ω.

Опр. Событие B наз. следствием соб. A, если из того, что произошло A следует, что произошло B. Другими словами, B наз. следствием A, если $A \subseteq B$



Замеч. Любое мн-во Ω сод-т два подмн-ва: $\emptyset$, Ω. Соотв. события наз. невозможным ($\emptyset$) и достоверным (Ω). Эти события наз. несобственными. Все ост. события наз. собств.

Пр. Из урны, содер. 2 красных и 3 синих шара вынимают случ. образом 1 шар.

$A = \{$извлечен белый шар$\} = \emptyset$

$B = \{$извлечен красный или синий шар$\} = \Omega$

(2) Операции над событиями

События явл. мн-вами $\Rightarrow \cup, \cap, \bar{\ }, \setminus, \Delta$

В ТВ исп. след. терминология

$A \cup B = A + B$ – сумма событий

$A \cap B = A \cdot B$ – произведение событий

$A \setminus B$ – разность событий

$\bar{A} = \Omega \setminus A$ – дополнение события A

Св-ва операций над событиями

1° $A + B = B + A$
2° $A \cdot B = B \cdot A$ } коммутат.-ть

3° $(A+B)+C = A+B+C$
4° $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ } ассоциат.-ть

5° $A + A = A$
6° $A \cdot A = A$ } идемпот.-ть

7° $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$
8° $A + (BC) = A + BC$ } дистриб.-ть

9° $\overline{(\bar{A})} = A$

10° $\overline{A+B} = \bar{A}\bar{B}$
11° $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$ } з-ны де Моргана

12° $A \subseteq B \Leftrightarrow AB = A$

13° $A \subseteq B \Leftrightarrow A + B = B$

14° $A \subseteq B \Leftrightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A}$ ч2

(3) Классическое определ. вероятности

Пусть 1) $|\Omega| = N < \infty$

2) по усл-ям экс-та нет объективных оснований предпочесть какой-нибудь элем. исход остальным (говорят, что все ~~события~~ элем. исходы равновероятны)

Опр. Вероятностью события $A \subseteq \Omega$ наз. число $P(A) = \frac{N_A}{N}$, где $N_A = |A|$

Св-ва вероятности (из классич. опр-я)

1° $P(A) \geq 0$

2° $P(\Omega) = 1$

3° Если $AB = \emptyset$, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Док-ва

1° $P(A) = \frac{N_A}{N}$, $N_A \geq 0$, $N > 0 \Rightarrow P(A) \geq 0$

2° $P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{N} = \frac{N}{N} = 1$

3° По ф-ле вкл. и искл. $|A+B| = |A| + |B| - \underbrace{|AB|}_{0} = |A| + |B|$

Т.о. $N_{A+B} = N_A + N_B$ и $P(A+B) = \frac{N_{A+B}}{N} = \frac{N_A + N_B}{N} = P(A) + P(B)$

2°

2. Определение пространства элементарных исходов, примеры. Понятие события(нестрогое). Сформулировать геометрическое и статистическое определения вероятности. Достоинства и недостатки этих определений.

Опр. Мн-во всех элем. исходов Ω будем наз. пр-вом элем. исходов

Опр. Каждый неделимый р-т случ. эксп-та, наз. элем. исходом

Пр. 1) Бросают монету. Возможные исходы: выпадение Г или Р.

$\Omega = \{Г, Р\}$ $\quad |\Omega| = 2$

2) Из колоды в 36 карт последоват. извлекают 2 карты.

Возм. исх: $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \{1, \ldots, 36\}, x_1 \neq x_2\}$,

x_i — номер карты, к-я появилась при i-ом извлечении

$|\Omega| = 36 \cdot 35$

Ост. примеры см. семинар №6

Опр. (нестрогое) Событием наз. любое подмн-во мн-ва Ω.

④ Геометрическое определение вероятности

Геом. опр. обобщает класс. опр. на случай, когда Ω явл. бесконечным мн-вом в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Через $\mu(A)$ будем обозн. меру мн-ва A

$n=1$ $\mu(A)$ — длина

$n=2$ $\mu(A)$ — площадь

$n=3$ $\mu(A)$ — объем

...

Пусть 1) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mu(\Omega) < \infty$

2) $A \subseteq \Omega$

Опр. Вероятностью события A наз. число

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Замеч. 1) Очевидно, для геом. опр. вероятности остаются в силе св-ва 1°–3°, получ. в случае класс. опр.

2) недостатком геом. опр. явл. то, что оно не применимо в случае, когда отдельные области явл. более предпочт. Так, если в пред. примере появление каждого из людей более вероятно, напр., ~~в~~ около 12^{30}, то геом. опр. не даст удовл. рез-т.

(5) Статистическое опр. вероятности

Пусть 1) случ. эксп-т повторен n раз

2) при этом событие A произошло n_A раз

Опр. Вероятностью события A наз. эмпирический (т.е. полученный опытным путем) предел отношения n_A/n при $n \to \infty$

Замеч. 1) недостатки статист. опр.:

- опыт не может б. повторен беск. число раз
- такое опр. не дает достат. основы для дальнейшего развития ~~теории~~ матем. теории

3. Определение пространства элементарных исходов, примеры. Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Доказать простейшие свойства сигма-алгебры. Сформулировать аксиоматическое определение вероятности.

Опр. Мн-во всех элем. исходов Ω будем наз. пр-вом элем. исходов

Опр. Каждый неделимый р-т случ. экс-та, наз. элем. исходом

Пр. 1) Бросают монету. Возможные исходы: выпадение Г или Р.

$\Omega = \{Г, Р\}$ $\quad |\Omega| = 2$

2) Из колоды в 36 карт последоват. извлекают 2 карты.

Возм. исх: $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \{1, \dots, 36\}, x_1 \neq x_2\}$,

x_i – номер карты, к-я появилась при i-ом извлечении

$|\Omega| = 36 \cdot 35$

Ост. примеры см. семинар №6

Пусть 1) Ω – пр-во элемент. исходов

2) $\mathcal{B}$ – набор (некот.) п/мн-в мн-ва Ω, $\mathcal{B} \neq \varnothing$

Опр. $\mathcal{B}$ наз. сигма-алгеброй, если

1) $A \in \mathcal{B} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{B}$

2) $A_1 \dots A_n \dots \in \mathcal{B} \Rightarrow A_1 + \dots + A_n + \dots \in \mathcal{B}$.

Св-ва см. на след. стр. сниzу

<u>Простейшие следствия из опр.</u>

1° $\Omega \in \mathcal{B}$

2° $\varnothing \in \mathcal{B}$

3° Если $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{B}$, то $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \dots \in \mathcal{B}$

4° Если $A, B \in \mathcal{B}$, то $A \setminus B \in \mathcal{B}$

Док-во

1° Т.к. $\mathcal{B} \neq \varnothing$, то произв. мн-во $A \in \mathcal{B}$.

В силу 1° опр-я $\overline{A} \in \mathcal{B}$. В силу 2° $\Omega = A + \overline{A} \in \mathcal{B}$.

2° $\Omega \in \mathcal{B} \Rightarrow \varnothing = \overline{\Omega} \in \mathcal{B}$

3° $A_1 \dots A_n \dots \in \mathcal{B} \overset{опр.}{\Rightarrow} \overline{A}_1, \dots, \overline{A}_n, \dots \in \mathcal{B} \overset{опр.}{\Rightarrow} \overline{A}_1 + \dots + \overline{A}_n + \dots \in \mathcal{B} \Rightarrow$

$\overset{опр.}{\Rightarrow} \overline{\overline{A}_1 + \dots + \overline{A}_n + \dots} \in \mathcal{B} \Rightarrow A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \dots \in \mathcal{B}$

4° $A \setminus B = A \cdot \overline{B}$

$A \in \mathcal{B}, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \in \mathcal{B}, \overline{B} \in \mathcal{B} \Rightarrow A \cdot \overline{B} \in \mathcal{B}$.

7 Аксиоматическое опр-е вероятности

Пусть Ω - мн-во элем. исходов
$\mathcal{B}$ - некот. Ω-алг. событий

Опр. Вероятностью (вероятностной мерой) наз. ф-цию $P: \mathcal{B} \to \mathbb{R}$, к-я обладает след. св-вами

1° Аксиома неотрицательности
$\forall A \in \mathcal{B} \quad P(A) \geq 0$

2° Аксиома нормированности
$P(\Omega) = 1$

3° Расширенная аксиома сложения
для любой посл-ти событий $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{B}$, к-е попарно несовместны, справедливо:

$$P(A_1 + \ldots + A_n + \ldots) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) + \ldots$$

4. Определение пространства элементарных исходов, примеры. Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Сформулировать аксиоматическое определение вероятности и доказать простейшие свойства вероятности.

Опр. Мн-во всех элем. исходов Ω будем наз. пр-вом элем. исходов

Опр. Каждый неделимый р-т случ. эксп-та, наз. элем исходом

Пр. 1) Бросают монету. Возможные исходы: выпадение Г или Р.

$\Omega = \{Г, Р\}$ $|\Omega| = 2$

2) Из колоды в 36 карт последоват. извлекают 2 карты.

Возм. исх.: $\Omega = \{(x_1, x_2): x_1, x_2 \in \{1, ..., 36\}, x_1 \neq x_2\}$,

x_i - номер карты, к-я появилась при i-ом извлечении

$|\Omega| = 36 \cdot 35$

Ост. примеры см. семинар №6

Пусть 1) Ω - пр-во элемент. исходов

2) $\mathcal{B}$ - набор (некот.) п/мн-в мн-ва Ω, $\mathcal{B} \neq \emptyset$

Опр. $\mathcal{B}$ наз. сигма-алгеброй, если

1) $A \in \mathcal{B} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{B}$

2) $A_1 \dots A_n \dots \in \mathcal{B} \Rightarrow A_1 + \dots + A_n + \dots \in \mathcal{B}$.

Св-ва см. на след. стр. снизу

(7) Аксиоматическое опр-е вероятности

Пусть Ω - пр-во элем. исходов

$\mathcal{B}$ - некот. σ-ал событий

Опр. Вероятностью (вероятностной мерой) наз. ф-цию $P: \mathcal{B} \to \mathbb{R}$, к-я обладает след. св-вами

1° Аксиома неотрицательности

$\forall A \in \mathcal{B}$ $P(A) \geq 0$

2° Аксиома нормированности

$P(\Omega) = 1$

3° Расширенная аксиома сложения

для любой посл-ти событий $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}$, к-е попарно несовместны, справедливо:

$P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$

Св-ва вероятности.

1° $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

2° $P(\varnothing) = 0$

3° Если $A \subseteq B$, то $P(A) \le P(B)$

4° $\forall A \in \mathcal{B}$ $\quad 0 \le P(A) \le 1$

5° $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

th сложения двух событий

6° Если $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}$, то $P(A_1 + \dots + A_n) = \sum\limits_{1 \le i_1 \le n} P(A_{i_1}) -$

$$- \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} P(A_{i_1} A_{i_2}) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n)$$

(th сложения)

Док-во

1° $\Omega = A + \bar{A}$, $A\bar{A} = \varnothing$

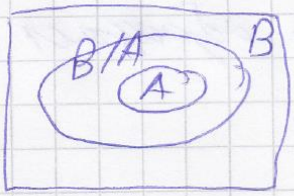
$P(\Omega) = 1$ (акс. 2°)

$P(\Omega) = P(A+\bar{A}) = \{\text{акс. } 3°\} = P(A) + P(\bar{A})$

$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

2° $\varnothing = \bar{\Omega}$

По пред. св-ву $P(\varnothing) = 1 - P(\Omega) = \{\text{акс. } 2°\} = 1 - 1 = 0$

3° 

$B = A + (B \setminus A)$

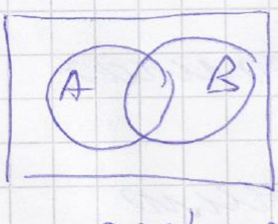
Т.к. $A \cdot (B \setminus A) = \varnothing$, то (акс. 3°)

$P(B) = P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0 \text{ (акс. } 1°)} \geq P(A)$

4° $P(A) \geq 0$ (акс. 1°)

Осталось док. что $P(A) \leq 1$

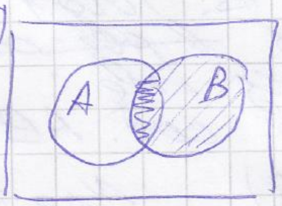
$A \subseteq \Omega \Rightarrow \{\text{св-во } 3°\} \Rightarrow P(A) \leq P(\Omega) = 1$

5° а) 

$A + B = A + (B \setminus A)$

Т.к. $A(B \setminus A)\ \varnothing \Rightarrow \{\text{акс. } 3°\} \Rightarrow P(A+B) =$

$= P(A) + P(B \setminus A)$

б) 

$B = (B \setminus A) + AB$

Т.к. $(B \setminus A)(AB) = \varnothing$,

то $P(B) = P(B \setminus A) + P(AB) \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(AB)$.

в) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

6° Явл. следствием св-ва 5° и доказ-ся аналог. ф-ле вкл. и искл. (док. самост.)

■

5. Сформулировать определение условной вероятности. Доказать, что при фиксированном событии B условная вероятность P (A|B) обладает всеми свойствами безусловной вероятности.

Опр. Пусть $P(B)>0$. Условной вероятностью осущ-я события A при условии, что произошло B наз. число

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

Зафикс. событие B, $P(B)>0$, и будем расм. усл. вер-ть $P(A|B)$ как ф-цию события A.

Th Условная вер-ть удовл. всем аксиомам безусл. вер-ти, т.е.

1) $P(A|B)\geq 0$
2) $P(\Omega|B)=1$
3) Для любого случайного набора попарно ~~несовм~~ несовмест. событ. $A_1,\dots,A_n,\dots$ имеет место

$$P(A_1+\dots+A_n+\dots|B)=P(A_1|B)+\dots+P(A_n|B)+\dots$$

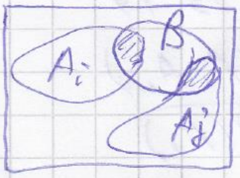
Док-во

1) $$P(A|B)=\frac{\overset{\geq 0}{P(AB)}}{\underset{>0}{P(B)}}\geq 0$$

2) $$P(\Omega|B)=\frac{P(\Omega B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1$$

3) $$P(A_1+\dots+A_n+\dots|B)=\frac{P((A_1+\dots+A_n+\dots)B)}{P(B)}=\left\{\text{св-во счетной дистрибут. } \cap \text{ относ. } \cup\right\}$$

$$=\frac{P(A_1B+\dots+A_nB+\dots)}{P(B)}=\left\{\begin{array}{l} A_iA_j=\varnothing,\ i\neq j \\ \left.\begin{array}{l} A_iB\subseteq A_i \\ A_jB\subseteq A_j\end{array}\right\}\Rightarrow (A_iB)\cap(A_jB)=\varnothing\end{array}\right\}$$



$$=\{\text{акс. } 3^\circ\}=\frac{1}{P(B)}\left[P(A_1B)+\dots+P(A_nB)+\dots\right]=\left\{\text{лин. св-во сходящ. ряда}\right\}=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{P(A_iB)}{P(B)}=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i|B).$$

Следствие Усл вер-ть обладает всеми св-вами безусл вер-ти, т.е.

1) $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$
2) $P(\emptyset|B) = 0$
3) Если $A_1 \subseteq A_2$, то $P(A_1|B) \le P(A_2|B)$
4) ~~$0 \le$~~ $0 \le P(A|B) < 1$
5) $P(A_1 + A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 A_2|B)$
6) $P(A_1 + \ldots + A_n|B) = \sum\limits_{1 \le i_1 \le n} P(A_{i_1}|B) - \sum\limits_{1 \le i_1 < i_2 \le n} P(A_{i_1} A_{i_2}|B) + \ldots$
$+ (-1)^{n+1} P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n|B)$.

Док-во

Св-ва 1-6 для безусл. вер-ти явл. следствиями аксиом 1°-3°. Т.к. усл вер-ть удовл этим аксиомам, то для нее будут верны все следствия. ∎

6. Сформулировать определение условной вероятности. Доказать теорему (формулу) умножения вероятностей. Привести пример использования этой формулы.

Опр Пусть $P(B)>0$. Условной вероятностью осущ-я события A при условии, что произошло B наз. число

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

Th Пусть события $A_1 \ldots A_n$ таковы, что $P(A_1 \ldots A_{n-1})>0$. Тогда $P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\cdot \ldots$
$\ldots \cdot P(A_n/A_1 \ldots A_{n-1})$ – ф-ла умнож. вер-тей (*)

Док-во

1) Для любого $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ $A_1 \cdot \ldots \cdot A_k \supseteq A_1 \ldots \cdot A_{n-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_k) \geq P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1})>0 \Rightarrow$ все усл. вер-ти в ф-ле (*) определены

2) $P(\underbrace{A_1 \cdot \ldots A_{n-1}}_{A} \cdot \underbrace{A_n}_{B}) = P(\underbrace{A_1 \cdot \ldots A_{n-2}}_{A} \cdot \underbrace{A_{n-1}}_{B}) P(A_n / A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}) =$
$= P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-2}) P(A_{n-1}/A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-2}) P(A_n / A_1 \ldots A_{n-1}) = \ldots =$
$= P(A_1)P(A_2/A_1)\cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1})$

$\boxtimes$

Пр. На 7 карточках написаны буквы слова „ШОКОЛАД". Карточки перемешивают и послед-но вынимают 3 штуки.

A = {карты в порядке появления образ. слово „КОД"}.

$P(A) = ?$

Реш-е

A_1 = {на 1ой карте написано "К"}
A_2 = {2ой "О"}
A_3 = {3ей "Д"}

Тогда $A = A_1 A_2 A_3$. По ф-ле умнож. вер-ти

$$P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = \underbrace{P(A_1)}_{1/7}\underbrace{P(A_2 \mid A_1)}_{2/6}\underbrace{P(A_3 \mid A_1 A_2)}_{1/5} =$$

6 карт, "К" нет

5 карт, нет "К" нет "О"

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{1}{105}.$$

7. Сформулировать определение пары независимых событий. Доказать критерий независимости двух событий. Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Обосновать связь этих свойств.

Опр. События A и B наз. независимыми, если $P(AB) = P(A)P(B)$

Th 1) Если $P(B) > 0$, то A, B - незав. $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$

2) Если $P(A) > 0$, то A, B - незав $\Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$

Док-во

1) ($\Rightarrow$) Пусть $P(AB) = P(A)P(B)$.

Тогда $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$

($\Leftarrow$) Пусть $P(A|B) = P(A)$

Тогда $\underbrace{P(A|B) = P(A) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}}$

$\Downarrow$

$P(AB) = P(A)P(B)$, т.е. A, B - незав.

2) аналогично

■

Опр События $A_1 \ldots A_n$ наз. попарно незав., если $\forall i \neq j$ события A_i, A_j - независимы, т.е.

$P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j)$, $i \neq j$

Опр События $A_1 \ldots A_n$ наз. независ. в совокупности, если для любого набора индексов $i_1 \ldots i_k \in \{1 \ldots n\}$, $k = \overline{1 \ldots n}$, справедливо

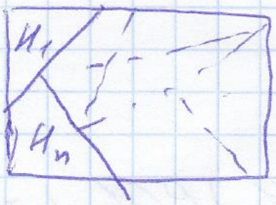
$P(A_{i_1} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$

Замеч 1) Очевидно, что если $A_1 \ldots A_n$ незав. в совокуп., то они попарно незав. Обратное неверно

8. Сформулировать определение полной группы событий. Доказать теорему (формулу) полной вероятности и формулу Байеса. Понятия априорной и апостериорной вероятностей.

Опр Говорят, события $H_1, \dots, H_n$ образуют полную группа событий, если

1) $H_i \cdot H_j = \varnothing$ при $i \neq j$
2) $H_1 + \dots + H_n = \Omega$



Замеч. При этом события H_i, $i = \overline{1,n}$ часто наз. гипотезами.

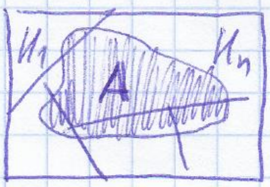
Th формула полной вер-ти

Пусть 1) $H_1 \dots H_n$ — полная группа событий
2) $P(H_i) > 0$, $i = \overline{1,n}$

Тогда $P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)$ — ф-ла полной вер-ти

Док-во

1) $A = A\Omega = A(H_1 + \dots + H_n) = AH_1 + \dots AH_n$



2) $P(A) = P(AH_1 + \dots + AH_n) = \left\{ \begin{array}{l} H_i H_j = \varnothing,\ i \neq j \Rightarrow \\ \Rightarrow \underbrace{(AH_i)}_{H_i}\underbrace{(AH_j)}_{H_j} = \varnothing \end{array} \right\} = P(AH_1) + \dots + P($

$= \left\{ \begin{array}{l} \text{ф-ла} \\ \text{умнож.} \\ \text{вер-тей} \end{array} \right\} = P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)$

Th формула Байеса

Пусть 1) вып-ны все ус-я из th о ф-ле полной вер-ти
2) $P(A) > 0$

Тогда $P(H_i|A) = \dfrac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)}$, $i = \overline{1,n}$

Док-во

$P(H_i|A) = \dfrac{P(AH_i)}{P(A)} = \dfrac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)}$

ф-ла полной вер-ти
th умнож. вер-тей

Априорное распределение вероятностей неопределённой величины p — распределение вероятностей, которое выражает предположения о p до учёта экспериментальных данных.

Апостериорная вероятность какого-либо события - условная вероятность события при некотором условии

9. Сформулировать определение схемы испытаний Бернулли. Доказать формулу для вычисления вероятности реализации ровно k успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли. Доказать следствия этой формулы.

Опр. Схемой Бернулли (биномиальной схемой) наз. серию эксперим. указ. вида, к-я обладает след. св-вами:

1) все испытания незав., т.е. исход k-ого испыт не зависит от исходов испытаний с номерами $1, \ldots, k-1$

2) Вер-ть осущ-я успеха во всех испытаниях неизменна

Th $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $k = 0, 1 \ldots, n$

Док-во

1) Результат серии из n испыт. будем опис. кортежем $\omega = (x_1, \ldots x_n)$, где
$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в i-м испыт удача} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

2) $A = \{$произошло ровно k успехов$\}$

Тогда $A = \{\omega :$ в к-х ровно k единиц$\}$

Число исходов в A равно кол-ву способов поставить в кортеже ω ровно k единиц = равно числу способов выбрать в ω k позиций для расстан. ~~в k~~ единиц $= C_n^k$

3) для каждого $\omega = (x_1 \ldots x_n) \in A$

$P(\omega) = P(x_1 \ldots x_n) = P(\{$в 1-м ~~испыт~~ испыт. рез-т $x_1\} \cdot \ldots$
$\cdot \{$в n-м испыт. рез-т $x_n\}) = \{$испыт. незав.$\} =$
$= \underbrace{P(\{\text{в 1-м испыт. } x_1\}) \cdot \ldots \cdot P(\{\text{в n-м исп. } x_n\})}_{\text{ровно k успехов и n неудач}} =$
$= p^k q^{n-k}$

4) т.к. $|A| = C_n^k$, то $P(A) = C_n^k p^k q^{n-k}$

N.

Следствие 1 Вер-ть того, что ~~в~~ число успехов в серии из n испыт. сх. Берн. не менее k_1 и не более k_2:

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i}; \quad k_1 \le k_2$$

Док-во

1) Пусть $A = \{$произошло $\geq k_1$ и $\leq k_2$ успехов$\}$

Тогда $A = A_{k_1} + \ldots + A_{k_2}$, где $A_i = \{$произошло ровно i успехов$\}$, $i = \overline{k_1; k_2}$

$$P(A) = P\left(\sum_{i=k_1}^{k_2} A_i\right) = \{A_i \text{ несовместны}\} = \sum_{i=k_1}^{k_2} P(A_i) = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i}$$

■

Следствие 2 вероятность того, что в серии из n испытаний по сх. Бернулли произойдет хотя бы один успех, можно найти по формуле

$$P_n(k \geq 1) = 1 - q^n$$

Док-во

$P_n(k \geq 1) = 1 - P\{$в серии из n испыт. будет 0 успехов$\} =$

$= 1 - P_n(0) = 1 - q^n$

■